

## Identificar propriedades em quadriláteros – um caminho para a classificação inclusiva

Maria Paula Pereira Rodrigues<sup>1</sup>, Lurdes Serrazina<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Unidade de Investigação do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa,  
mariapaular@campus.ul.pt

<sup>2</sup>Escola Superior de Educação de Lisboa, UIDEF, Universidade de Lisboa,  
lurdess@eselx.ipl.pt

**Resumo** *Este artigo integra-se numa investigação mais ampla realizada no âmbito de um doutoramento e tem como objetivo identificar os conhecimentos que alunos do 3º ano de escolaridade revelam quando estabelecem relações entre propriedades de quadriláteros, dando a conhecer formas de organização e estruturação do pensamento. Ações, aqui, analisadas através de produções escritas dos alunos e da interação gerada em discussões de grande grupo. A recolha de dados foi feita a partir da observação participante da primeira autora, apoiada por gravações áudio e vídeo, e das produções escritas dos alunos. Os dados apresentados revelam as propriedades dos quadriláteros que foram reconhecidas, as conexões estabelecidas, com vista à construção de um processo de classificação, e as dificuldades que ainda persistem em tarefas desta natureza. Os resultados mostram que a classificação inclusiva, ainda inconsistente, decorre do reconhecimento de propriedades invariáveis nas figuras; que o processo de reconhecimento de uma figura através da identificação das suas propriedades, em detrimento da dimensão visual, é lento e distinto e que o raciocínio dos alunos tem implícito uma componente visual que induz a conceptualização e descrição, durante a observação de figuras.*

**Palavras-chave:** *quadriláteros; propriedades; raciocínio geométrico; classificação.*

**Abstract** *This paper is part of a large PHD study and it's target is identify the knowledge that 3rd grade children show while they are establishing relations between properties of quadrilaterals, revealing individual organization and thinking structuration, here analyzed through children productions and interactions on whole group discussions. Data was collected through participant observation supported by audio and video recordings and children written productions. This data reveals quadrilaterals properties that have been recognized and the difficulties that still persists on this kind of tasks. Results show that hierarchical classification stills inconsistent and appears related with invariant properties of figures; shapes recognizing by the identification of its properties is a slow and distinct process and pupils reasoning has implicit a visual component that induces the conceptualization and description while they observe shapes.*

**Keywords:** *quadrilaterals; properties; geometric reasoning; classification.*

## **Introdução**

Ao longo do seu crescimento as crianças aprendem a desenvolver diferentes perspectivas na relação com os objetos e a coordenar diferentes pontos de vista quando os observam e manipulam, utilizando referências externas que requerem a integração de diferentes representações (Clements & Sarama, 2014). Assim, um trabalho continuado que apele à manipulação, observação e discussão de objetos ou formas geométricas pode ajudar a desenvolver o raciocínio geométrico e a tornar, progressivamente, o trabalho com tarefas que apelam à visualização e ao raciocínio espacial mais desafiante e motivador. Neste tipo de tarefas enquadram-se as de natureza exploratória e investigativa que levam a “pensar matematicamente” e que lidam com processos fundamentais da atividade e do pensamento matemático “nomeadamente de classificação e hierarquização a partir de determinadas definições e propriedades” (Abrantes, 1999, p. 156).

Este artigo pretende identificar os conhecimentos que alunos do 3º ano de escolaridade, revelam quando estabelecem relações entre propriedades de quadriláteros, dando a conhecer formas de organização e estruturação do pensamento.

## **Raciocínio geométrico**

Clements e Sarama (2007) sugerem que o conhecimento geométrico das crianças deve ser desenvolvido tendo em atenção diferentes vertentes, através da utilização de tarefas e materiais diversificados que permitam produzir imagens mentais baseadas na manipulação e diálogos produzidos em torno dos objetos observados. As descrições das crianças devem ser incentivadas e melhoradas para aumentar a sua produção e desconstruir os efeitos protótipo. Nesta perspetiva, conduzindo o desenvolvimento do raciocínio geométrico dos alunos, entendido como a capacidade para utilizar informação já conhecida para produzir novas conclusões (Ponte, Mata-Pereira & Henriques, 2012), o professor deve focar-se na intencionalidade de levar os mesmos a ultrapassar uma classificação baseada em protótipos visuais. Deverá, pois, promover tarefas de classificação de tipo descritivo ou analítico, onde se reconhece uma figura a partir da identificação do conjunto das suas propriedades, correspondente ao nível 2 de van Hiele, nível de análise.

Battista (2007) reconceptualizou os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico de van Hiele (1973), criando subníveis que consideram um desenvolvimento gradual do pensamento geométrico dos alunos.

Apresentamos em seguida, dado o percurso até aqui efetuado, um resumo dos subníveis 2.2 e 2.3 de Battista (2007) que, de acordo com a conjectura traçada, considerámos corresponderem aos níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos com os quais desenvolvemos a tarefa apresentada nos resultados.

#### Nível 2.2. Raciocínio na sua componente informal e insuficientemente formal

Neste subnível, os alunos utilizam uma combinação de descrições formais e informais para descrever as formas porque, embora, muitas vezes, recordem propriedades que já abstraíram, dentro de uma dada classe de formas, por exemplo, afirmando para os retângulos: “... dois lados mais longos e dois lados mais curtos”, o seu raciocínio continua a ter subjacente uma componente puramente visual e a maioria das suas descrições e conceptualizações parecem ocorrer subitamente quando observam as formas.

#### Nível 2.3. Raciocínio formal suficiente baseado em propriedades

Nesta etapa, os alunos utilizam explícita e exclusivamente conceitos geométricos formais e uma linguagem que descreve e conceptualiza as formas de maneira a conseguirem obter um conjunto suficiente de propriedades que especifiquem as figuras em análise. Aqui, os alunos fazem uma mudança decisiva e passam do raciocínio visual para um raciocínio baseado na identificação e relação de propriedades das formas, sendo capazes de utilizar e enunciar definições formais, identificando listas formais de características não relacionadas e as propriedades que são capazes de descrever, para as classes de figuras conhecidas.

Este subnível requer que conceitos formais como lado; comprimento e medida de ângulo estejam já suficientemente abstraídos para poderem ser utilizados na formação de conceptualizações relacionais, como “todos os lados iguais”, descrevendo relações espaciais entre as partes de uma forma. Estas relações, tais como, lados opostos iguais, devem ter alcançado um nível de interiorização que os destaca dos seus contextos originais, de modo a serem aplicáveis a novas situações e disponibilizadas para analisar formas.

### **Raciocínio geométrico e representações**

Battista (2008) afirma que em geometria “nós raciocinamos sobre objetos; nós raciocinamos com representações” (p.342), logo, de acordo com Clements (1981), que considera o raciocínio geométrico um processo interno, devemos ter em conta,

fundamentalmente, as representações internas sem, no entanto, deixar de lado as representações externas, dado estas exprimirem as manifestações internas, através de processos de comunicação oral e escrita. Assim, qualquer processo de raciocínio depende da apresentação e organização da informação (Duval, 1998), nomeadamente os processos de raciocínio geométrico onde o indivíduo parte de uma imagem ou objeto para poder organizar a informação percebida e construir relações, através da manipulação de imagens e construção de relações individuais.

Goldenberg, Cuoco e Mark (1998) referem que o facto de os objetos geométricos se relacionarem com representações visuais nem sempre representa uma mais-valia na elaboração de raciocínios, dada a articulação entre as suas dimensões conceptuais e visuais conduzirem a dificuldades e erros que, entre outros, se relacionam com conceitos conhecidos evocados pela memória que não representam a definição formal do conceito pretendido mas, sim, conjuntos de representações visuais, imagens, propriedades ou experiências vividas (Vinner, 1983), ou se ligam à ação sobre imagens e não sobre objetos, gerando definições protótipo que confundem e dificultam o raciocínio dos alunos (Battista, 2007; Clements, 2003; Clements & Battista, 1992). A esta situação está associada, segundo Mariotti (1992), a dupla dimensão dos objetos com que o raciocínio geométrico opera: a dimensão figurativa, relacionada com as representações, e a dimensão conceptual, ligada à definição e de carácter mais abstrato, que articuladas geram o *conceito figurativo* (Fishbein, 1993). Esta difícil articulação entre dimensão figurativa e conceptual dos objetos geométricos gera dificuldades na construção de definições claras e abrangentes, comprometendo, consequentemente, os processos de classificação.

### **Classificar em geometria**

O processo de classificar em geometria, de acordo com Fischbein (1993), lida com ideias mentais que designamos de figuras geométricas. Estas possuem, em simultâneo, um carácter conceptual e visual, nomeadamente um conjunto de propriedades e uma forma. O conceito expressa uma ideia geral relativa à representação de uma classe de objetos, baseada nas suas características comuns, em contraste uma imagem é uma representação sensorial do objeto.

A coexistência de conceitos e imagens e a sua fusão possibilitam ao indivíduo construir conceitos figurativos que se ligam a realidades mentais, permitindo a construção do raciocínio geométrico e o desenvolvimento da capacidade de classificar

geometricamente. Logo, classificar implica agir sobre conceitos figurativos, gerando interação entre conceito e imagem. Esta interação permite a criação de um processo de relações lógicas que levam ao reconhecimento de classes e subclasses de figuras ou a “... identificar as propriedades comuns e relevantes que determinam a categoria” (Mariotti & Fischbein, 1997, p.244).

Todavia, para Fischbein (1993) o desenvolvimento de conceitos figurativos não parece ser um processo natural mas, sim, o resultado de um percurso onde, vulgarmente, imagens e conceitos interagem durante a atividade cognitiva do indivíduo, umas vezes cooperando, outras criando conflito e dificuldades nos processos de classificação. Na opinião de Mariotti e Fischbein (1997), as dificuldades surgem porque o processo de conceptualização referente à definição formal entra em conflito com a tendência natural de praticar uma classificação de tipo partitivo, onde apenas são consideradas as propriedades necessárias e suficientes para a classificação de figuras.

A classificação de qualquer conjunto de conceitos não é independente do processo de definição, dado implicar uma relação de interdependência onde classificar implica definir os conceitos envolvidos e definir conceitos implica, de forma direta, a sua classificação (de Villiers, Govender & Patterson, 2009). Esta ideia pode ser traduzida na perspetiva de que saber a definição de um conceito não garante a compreensão do mesmo, como sugere de Villiers (1994):

(...) embora possam ter ensinado a um aluno, e ele seja capaz de dizer, a definição padrão de um paralelogramo como um quadrilátero com lados opostos paralelos, o aluno pode ainda não considerar retângulos, quadrados e losangos como paralelogramos, já que a imagem conceptual que os alunos têm de um paralelogramo é que nem todos os ângulos ou lados podem ser iguais (p.412).

Esta ideia permite-nos perceber que o conhecimento da definição de paralelogramo não implica o conhecimento de uma classificação de tipo inclusivo, onde os conceitos mais particulares formam subconjuntos dos mais gerais.

Na classificação hierárquica ou inclusiva é possível observar que os retângulos e os losangos são subconjuntos dos paralelogramos, com os quadrados como interseção dos retângulos com os losangos.



Figura 1. Classificação hierárquica (de Villiers, 1994)

Classificar hierarquicamente pressupõe que o aluno não decore apenas um conjunto de definições mas que possua o conceito e seja capaz de criar imagens conceptuais das formas com que tem de lidar. Só assim poderá identificar propriedades invariáveis para uma classe ou subclasses de figuras, nomeadamente reconhecendo todos os paralelogramos, incluindo quadrados, retângulos e losangos, a partir da propriedade “dois pares de lados opostos paralelos”.

### Metodologia

O estudo apresentado neste artigo segue uma metodologia de natureza qualitativa-interpretativa (Denzin & Lincoln, 1989) e pretende identificar os conhecimentos que alunos do 3º ano de escolaridade revelam quando estabelecem relações entre propriedades de quadriláteros, dando a conhecer formas de organização e estruturação do pensamento.

A investigação é centrada num ambiente de aprendizagem em contexto, a partir da resolução e discussão de tarefas, cujo objetivo é promover nos alunos o desenvolvimento do raciocínio geométrico, levando-os a identificar conjuntos de propriedades de figuras no plano e a estabelecer conexões. Nesta perspetiva, optou-se por uma metodologia de *design research*, na modalidade de experiência de ensino (Gravemeijer & Cobb, 2006), orientada por uma conjectura.

A experiência de ensino envolve uma turma de vinte alunos, de uma escola privada, situada no concelho de Sintra, e os dados analisados englobam as produções escritas de duas alunas, recolhidos através da observação participante da primeira autora, apoiada pelos registos áudio e vídeo das discussões coletivas tidas em torno do seu trabalho.

A investigação onde se inserem os dados analisados neste artigo teve início com um estudo exploratório e, posteriormente, um primeiro ciclo de recolha de dados, pertencendo os dados aqui apresentados a um segundo ciclo de recolha, reunidos ao longo de duas aulas, de uma hora cada. A primeira aula contemplou o trabalho autónomo e a segunda a discussão coletiva, em torno do trabalho realizado autonomamente. A escolha dos trabalhos a discutir coletivamente resultou de aspetos relacionados com a identificação de propriedades conhecidas em quadriláteros; a apresentação de agrupamentos de figuras que considerassem propriedades nunca discutidas anteriormente; a utilização de erros de linguagem ou de ideias incorretas, entre outros. Os dados foram analisados tendo em conta, fundamentalmente, os subníveis de Battista (2007) que consideram um desenvolvimento gradual do pensamento geométrico dos alunos, resultantes da reconceptualização dos níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico de van Hiele (1973).

Este estudo emerge de um trabalho conjunto, entre a primeira autora, designada a seguir por investigadora, e a professora da turma, na conceção da tarefa e definição da metodologia de implementação da mesma. A sessão de discussão em grande grupo foi orientada pela professora da turma, tendo a investigadora intervindo em situações pontuais.

Para preservar a identidade dos alunos, na análise de dados, os mesmos serão identificados por nomes fictícios.

## **Resultados**

A tarefa apresentada na figura 2 foi proposta aos alunos através do enunciado escrito “Observa com atenção as figuras e identifica propriedades das mesmas”. Todavia, logo após o início do trabalho individual, uma grande percentagem de alunos revelou não ter entendido o que era suposto fazer. Perante esta dificuldade, a professora informou que deveriam ser identificadas propriedades das figuras apresentadas no enunciado e, caso fossem encontradas propriedades comuns, os alunos poderiam agrupar figuras por “famílias”.

Observa com atenção as figuras e identifica propriedades das mesmas

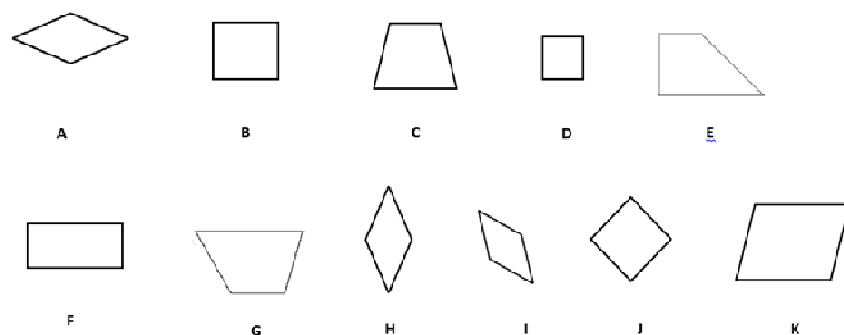


Figura 2. Tarefa para identificação de propriedades dos quadriláteros

No final do trabalho individual, foi visível, talvez motivados pela sugestão da professora, a necessidade que os alunos tiveram de agrupar as figuras de acordo com as propriedades que haviam conseguido identificar.

Na aula seguinte, analisaram-se e discutiram-se em grande grupo as propriedades referenciadas e os agrupamentos formados por duas alunas, no sentido de identificar as propriedades reconhecidas e entender as relações espaciais estabelecidas.

Decidimos, investigadora e professora, começar a discussão coletiva pelo trabalho apresentado por Catarina (Figura 3), dado o agrupamento criado remeter para a inclusão dos losangos na classe dos paralelogramos e possibilitar, ainda, uma discussão em torno das propriedades do paralelogramo obliquângulo.

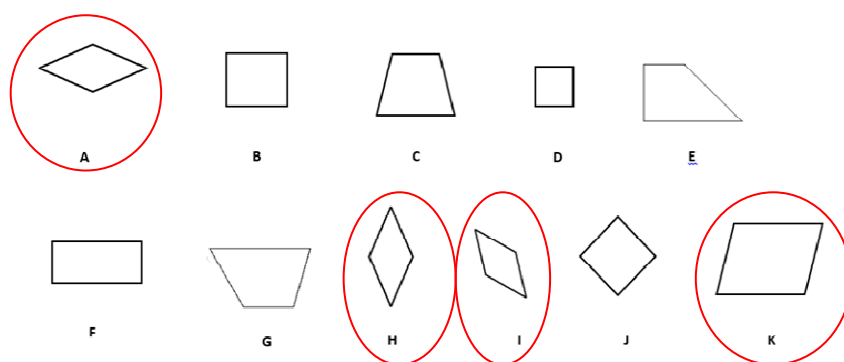


Figura 3. “Família” de paralelogramos e losangos criada por Catarina

A aluna rodeou as figuras A; H; I e K e identificou-a como “família” dos paralelogramos e losangos (Fig. 3), sem apresentar qualquer tipo de justificação escrita.



Professora: Catarina escolheste as figuras  $A$ ;  $H$ ;  $I$  e  $K$  e chamaste-lhe “família” dos paralelogramos e losangos. Queres explicar-nos porquê?

Catarina: Porque têm os lados todos iguais e têm os lados paralelos.

Patrícia: Catarina, a  $K$  não tem os lados todos iguais e não pode ser losango.

Patrícia, ao ouvir a justificação da colega, reage sugerindo que para formar a “família” dos paralelogramos losangos, as figuras nela incluída teriam de ter os “lados todos iguais”, característica não identificada em  $K$ .

Professora: Concordas com a Patrícia?

Catarina: Concordo, acho que pensei mais nos lados paralelos e nos ângulos!

Catarina parece considerar relevante a existência de dois pares de lados opostos paralelos, para determinar os paralelogramos, e a existência de dois ângulos agudos e obtusos, para determinar os losangos, deixando de lado a congruência dos lados.

Professora: Bom, então, pensando na existência de dois pares de lados opostos paralelos, para poder ser paralelogramo, e nos “lados todos iguais”, para ser losango, será que podemos considerar a figura  $B$  um paralelogramo losango?

Catarina: Não.

Professora: Porquê?

Catarina: Porque é um quadrado e não tem ângulos agudos e obtusos, só tem ângulos retos.

Esta reação parece ligar-se à imagem conceptual que a aluna tem de paralelogramo onde nem todos os lados ou ângulos podem ser iguais. Para além disso, Catarina continua focada na ideia da existência de dois ângulos agudos e dois ângulos obtusos para reconhecer o losango. Situação que poderá estar ligada à dimensão visual da mesma.

Patrícia: Eu acho que sim, mas não sei explicar muito bem.

Professora: .... a Catarina diz que a figura  $B$  não pode ser um paralelogramo losango e a Patrícia acha que sim. Quem quer ajudar?

Patrícia: Eu acho que é porque a diferença é só nos ângulos. A  $B$  tem ângulos retos e as outras têm ângulos agudos e obtusos.

Patrícia parece perceber que a diferença entre as figuras  $A$ ;  $H$ ;  $I$  e  $B$  reside apenas nos ângulos, mantendo-se invariáveis as propriedades consideradas inicialmente: dois pares de lados opostos paralelos e a congruência dos lados.

Prosseguindo, Patrícia acrescenta:

Patrícia: ... mas ao grupo dos paralelogramos losangos, agora, eu acrescentava também as figuras  $D$ ;  $F$  e  $J$ .

Lurdes: Não, não pode ser! Estás a fazer o mesmo que a Catarina quando escolheu a figura  $K$  para a “família” dos paralelogramos losangos.

Na escolha de Patrícia, é perceptível a inconsistência da ideia de inclusão do quadrado na classe dos retângulos. A aluna, ao incluir a figura  $F$  nos paralelogramos losangos, parece ter considerado o retângulo como caso especial de quadrado e não o contrário.

Professora: Lurdes, explica um pouco melhor a tua ideia?

Lurdes: Olha... a  $F$  não pode ser um losango porque os lados não são todos iguais.

Patrícia: Ah...pois!

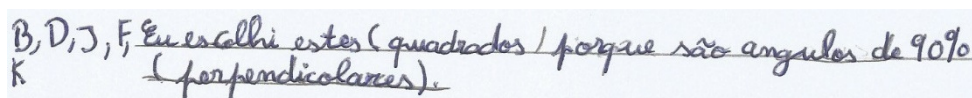
Professora: ... com calma, vamos lá arrumar ideias! [...] quais são as figuras que tu achas que fazem parte da família dos paralelogramos losangos?

Patrícia: Então, deixa-me ver...  $A$ ;  $B$ ;  $D$ ;  $H$ ;  $I$  e  $J$ . Acho que todas têm dois pares de “linhas” paralelas e os lados todos iguais.

Patrícia consegue identificar todos os paralelogramos losangos utilizando uma combinação de ideias e linguagem formais e informais para identificar propriedades das figuras que pretende identificar, por não conseguir, com as ideias e linguagem formal de que dispõe, especificar com clareza as propriedades que pretendia clarificar.

Em seguida, pelo facto de se ter apercebido que não tinha concluído a discussão pretendida em torno da figura  $K$ , o paralelogramo oblíquângulo, e de ainda existirem muitas dúvidas relativamente à inclusão dos quadrados na subclasse dos retângulos, a professora decidiu discutir o trabalho de Carolina.

Carolina considera a propriedade ângulos de  $90^\circ$  para agrupar os “quadrados”  $B$ ;  $D$ ;  $J$ ;  $F$ ;  $K$  (Fig. 4) e deixa perceber que a amplitude de  $90^\circ$  resulta do encontro entre duas linhas perpendiculares, embora na representação utilize o símbolo de percentagem e não o de graus. Esta representação parece relacionar-se com conceitos conhecidos já utilizados mas que não indicam a representação formal do conceito pretendido. A resposta apresentada parece revelar que a aluna não foi capaz de se focar numa classificação de tipo descritivo ou analítico, para reconhecer a figura a partir da identificação das suas propriedades.



B, D, J, F, K Eu escolhi estes (quadrados) porque são ângulos de 90% (perpendiculares).

Figura 4. Grupo de figuras organizado por Carolina de acordo com as propriedades identificadas

Durante a apresentação do seu trabalho à turma, a professora sugere a Carolina (Fig. 5) que explique o motivo pelo qual escolheu as figuras  $F$  e  $K$  como “quadrados”.

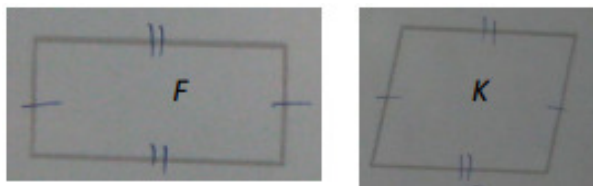


Figura 5. Figuras identificadas por Carolina como “quadrados”

Professora: Por que escolheste as figuras  $F$  e  $K$  para o grupo dos quadrados?

Carolina: Ai, enganei-me! O retângulo não é quadrado.

Professora: O que queres dizer?

Carolina: ... este é o conjunto dos retângulos porque os quadrados é que são retângulos.

Professora: Como assim?

Carolina: Os quadrados têm 4 ângulos retos, como o retângulo, mas o retângulo não tem os 4 lados iguais.

Professora: Então, a figura  $K$  pode ser um retângulo?

Carolina: Pois... não tem os 4 ângulos retos, mas, então, não a conheço!

A questão inicial da professora e os esclarecimentos que foi pedindo, ao longo do diálogo com a aluna, foram ajudando a clarificar a ideia da subclasse dos retângulos como inclusiva dos quadrados. Todavia, quando Carolina refere que desconhece a figura  $K$ , depois de já ter acontecido a discussão em torno do trabalho de Catarina e de esta já a ter identificado como um paralelogramo, pelo facto de possuir dois pares de lados opostos paralelos, indicia que o processo de reconhecimento de uma figura através da identificação das suas propriedades, em detrimento da dimensão visual, é lento e bastante variável de aluno para aluno.

Após esta discussão, a professora pede a Roberto, projetando a Figura 2, que tente identificar todos os paralelogramos quadrados.

Professora: Roberto, podes ajudar-nos a descobrir todos os paralelogramos quadrados que temos aqui?

Roberto: Acho que sim. Então... são a  $B$ ;  $D$  e  $J$ .

Roberto parece ter percebido que tanto a congruência dos lados como dos ângulos são atributo crítico do quadrado e não havendo mais nenhuma figura que reúna estas propriedades os paralelogramos quadrados só poderão ser estas três figuras.

Depois da resposta de Roberto, Patrícia intervém, dizendo:

Patrícia: Ao grupo do Rodrigo, eu acrescentava a figura  $F$ .

Álvaro: Eu não concordo com a Patrícia, porque a  $F$  tem os quatro ângulos retos mas não tem os lados todos iguais. A  $F$  é um retângulo mas não é um quadrado. O quadrado é que é um retângulo porque tem os quatro ângulos retos.

Álvaro parece já ter interiorizado as propriedades essenciais do quadrado e reconhecido as propriedades do retângulo que não lhe permitem a inclusão na classe dos quadrados.

### **Conclusões**

Colocar os alunos perante uma tarefa cujo objetivo era fazer uma classificação de tipo descritivo ou analítico, onde os mesmos reconhecessem uma figura ou conjunto de figuras a partir da identificação do conjunto das suas propriedades (Clements & Sarama, 2007), permitiu gerar uma discussão coletiva que, progressivamente, poderá levar ao reconhecimento de classes e subclasses de figuras.

Os alunos enquanto observaram e dialogaram sobre os quadriláteros analisados, construíram agrupamentos de figuras com dois lados opostos paralelos, os paralelogramos; figuras com ângulos e lados congruentes, os quadrados; figuras com lados congruentes e ângulos opostos iguais, os losangos, entre outros. Desenvolveram diferentes perspetivas sobre processos de inclusão de figuras e utilizaram referências externas que poderão ter conduzido à assimilação de diferentes representações (Clements & Sarama, 2014).

Durante a discussão em grande grupo, as descrições foram incentivadas e melhoradas na tentativa de conduzir a uma melhoria da linguagem utilizada e da estruturação espacial (Clements & Sarama (2007).

Os alunos utilizaram descrições formais e informais para descrever as formas sobre as quais se debruçaram, pois, embora, já tenham abstraído algumas propriedades, o seu raciocínio continua a ter subjacente uma componente visual que faz ocorrer um grande número de conceptualizações e descrições durante a observação das figuras (Battista, 2007).

A tarefa proposta levou a que um grupo de alunos baseasse o seu raciocínio na identificação e relação de propriedades das formas e gerasse interação entre conceito e imagem, a caminho da construção de definições (Mariotti & Fischbein, 1997).

Alguns alunos conseguiram utilizar os conceitos de *lado*; *comprimento*; *ângulo* reto, agudo e obtuso (Battista, 2007) e identificar propriedades invariáveis em diferentes quadriláteros. No entanto, há alunos que ainda tentam incluir os paralelogramos retângulo e oblíquângulo na subclasse dos losangos, ou os retângulos na classe dos quadrados. Este facto pode estar relacionado com a interação entre as dimensões conceptuais e visuais (Goldenberg et al., 1998).

Os dados analisados estão de acordo com Battista (2008) quando afirma que o processo de reconhecimento de uma figura através da identificação das suas propriedades parece ser lento e distinto.

### Referências bibliográficas

- Abrantes, P. (1999). Investigações em geometria na sala de aula. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca & L. Brunheira (Eds.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 153-167). Lisboa: Projeto Matemática para Todos e Associação de Professores de Matemática.
- Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 843-908). Greenwich, CN: Information Age.
- Battista, M. T. (2008). Representations and cognitive objects in modern school geometry. In G. W. Blume, M. K. Heid (Eds.), *Research on technology and the teaching and learning of mathematics: Cases and perspectives* (vol. 2, pp. 341-362). Charlotte: Information Age Publishing.
- Clements, K. (1981). Visual imagery and school mathematics. In *Proceedings of 5th Annual Conference of MERGA* (pp. 21-24). Adelaide, Austrália.
- Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 420-464). New York, NY: National Council of Teachers of Mathematics/Macmillan.
- Clements, D. H. (2003). Teaching and learning geometry. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 151-178). Reston, VA: NCTM.
- Clements, D. H. & Sarama, J. (2007). The Development of Geometric and Spatial Thinking, Students and Learning. In F.K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching Learning* (pp. 489 -517). Reston, VA: NCTM.
- Clements, D. H. & Sarama, J. (2014). *Learning and Teaching Early Math*. NY: Routledge.
- De Villiers, M. (1994). The role and function of a hierarchical classification of quadrilaterals. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 11-18.

- De Villiers, M., Govender, R. & Patterson, N. (2009). Defining in geometry. In T. V. Craine & R. Rubenstein (Eds.), *Understanding geometry for a changing world* (pp. 189-203). Reston: NCTM.
- Denzin, N. K. & Lincoln, Y. S. (1989). *Handbook of qualitative research* (pp. 105 – 117). Thousand Oaks, CA: Sage.
- Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point a view. In C. Mammana & V. Villani (Eds.) *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century* (pp. 37-52). Dordrecht/Boston: Kluwer.
- Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational studies in mathematics*, 24(2), 139-162.
- Goldenberg, E. P., Cuoco, A. & Mark, J. (1998). A Role for Geometry in General Education. In R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space*, (pp. 3-44). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Gravemeijer, K., & Cobb, P. (2006). Design research from a learning design perspective. In J. Van Den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney, & N. Nieveen (Eds.), *Educational Design Research*, (pp. 17-51). New York and London: Routledge.
- Mariotti, M. A. (1992). Geometrical reasoning as a dialectic between the figural and the conceptual aspects. *Structural Topology*, 18, 9-18.
- Mariotti, M. A., & Fischbein, E. (1997). Defining in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics*, 34(3), 219-248.
- Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., & Henriques, A. (2012). O raciocínio matemático nos alunos do ensino básico e do ensino superior. *Praxis Educativa*, 7(2), 355-377.
- Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 14(3), 293-305.