

## Desenvolvendo a flexibilidade em rotinas de cálculo

Lurdes Serrazina<sup>1</sup>, Margarida Rodrigues<sup>2</sup>

Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa, UIDEF, Universidade de Lisboa, <sup>1</sup>*lurdess@eselx.ipl.pt*, <sup>2</sup>*margaridar@eselx.ipl.pt*

**Resumo.** *Nesta comunicação analisamos a rotina “número do dia” desenvolvida numa turma do 1.º ano do 1.º ciclo, mostrando como a flexibilidade em cálculo mental está presente na forma como os alunos respondem ao questionamento da professora e apresentam as diversas representações do número do dia. Procuramos ainda fazer uma ligação entre a flexibilidade em cálculo mental e o processo de desenvolvimento conceptual. Os dados foram recolhidos através da observação das autoras e da videogravação e posterior transcrição da atividade desenvolvida. Na análise de dados procuramos evidenciar como os alunos utilizam os números, as quatro operações aritméticas, as relações entre elas e as suas propriedades. Discute-se também as fases de evolução conceptual dos diferentes alunos da turma, concluindo-se que a turma globalmente revela flexibilidade de cálculo, evidenciando um conhecimento do número, apoiado por uma teia de relações numéricas que a partilha coletiva e a discussão dos raciocínios dos alunos potenciam.*

**Palavras-chave:** *sentido do número; cálculo mental; flexibilidade em cálculo mental; estratégias de cálculo.*

**Abstract.** *In this communication we analyze the routine “day number” developed in a first grade classroom, where the flexibility in mental calculation is present in the way pupils answer to teacher’s questions and justify their representations of number day. We also seek to make a connection between flexible mental calculation and conceptual development process. Data were collected through observation by the authors and videotaping and transcribing of the developed activity. In data analysis we try to put in evidence how pupils use the numbers properties, the four arithmetic operations, the relations between them and their properties. We also discuss the stages in the process of concept formation of the classroom pupils, concluding that, globally, the class reveals flexibility of calculation, evidencing a number knowledge, supported by numerical relations which are potentiated by the collective sharing and discussion of students’ reasoning.*

**Keywords:** *number sense; mental computation; flexibility in mental computation; computational strategies.*

### Introdução

Esta comunicação insere-se no Projeto *Pensamento numérico e cálculo flexível: Aspectos críticos* que está a ser desenvolvido por docentes das Escolas Superiores de Educação

de Lisboa, Setúbal e Portalegre, tendo como objetivos identificar os conhecimentos conceptuais dos alunos que estão em jogo nos diferentes níveis de compreensão das operações/relações numéricas e analisar se e como estes conhecimentos lhes permitem usar flexivelmente o cálculo mental. Nesta comunicação apresentamos a análise da rotina designada por “número do dia”, desenvolvida numa turma do 1º ano de escolaridade, mostrando como a flexibilidade de cálculo, na perspetiva de Threlfall (2009), é visível na forma como os alunos desenvolvem essa atividade. Procuramos ainda fazer uma ligação entre a flexibilidade em cálculo mental e o processo de desenvolvimento conceptual, como definido por Sfard (1991).

O cálculo mental é assumido como um cálculo efetuado com os números globais, e não com os seus dígitos, através da aplicação das propriedades operatórias e do estabelecimento de relações numéricas, envolvendo o uso de variadas estratégias pessoais e podendo recorrer-se a registos em papel (Buys, 2001). Este tipo de cálculo encontra-se intimamente associado ao desenvolvimento do sentido de número, na medida em que este sentido se refere à capacidade de usar flexivelmente a compreensão sobre os números e as operações para desenvolver estratégias na manipulação dos números e das operações (McIntosh, Reys, & Reys, 1992). Diversos autores salientam a importância de existirem sessões diárias interativas e orais focadas no cálculo mental no início das aulas (Brown, Millet, & Askew, 2008; Fosnot & Dolk, 2002) como forma de desenvolver este tipo de cálculo nos alunos.

### **Flexibilidade em cálculo mental**

A capacidade de usar o conhecimento de modo flexível, aplicando, de modo apropriado, o que é aprendido numa situação, numa outra é considerada fundamental para desenvolver a proficiência matemática (NCTM, 2000). A ideia de flexibilidade aparece associada ao cálculo mental e à resolução de problemas aritméticos. Existem diferentes maneiras de resolver um problema aritmético mentalmente, designadas normalmente por estratégias. Flexibilidade estratégica em cálculo mental refere-se ao modo como o problema é afetado pelas circunstâncias ao ser resolvido (Threlfall, 2009). Estas circunstâncias tanto podem relacionar-se com características específicas das tarefas como com características individuais ou ainda com variáveis contextuais. Threlfall (2009) designa o mecanismo subjacente à flexibilidade estratégica de *zeroing-in*, referindo que o mesmo não é totalmente consciente nem racional, envolvendo cálculos

exploratórios parciais que decorrem de reparar em aspetos específicos dos números em causa e respetivas relações.

Segundo Fosnot e Dolk (2001), é necessário compreender o que significa operar com uma dada operação aritmética, mas isso não é suficiente. Estes autores referem que, por exemplo, muitas vezes os alunos compreendem o que significa adicionar dois números e mostram essa compreensão usando os dedos, cubos ou outro material. Mas, é fundamental que sejam capazes de estabelecer relações entre os factos básicos de modo a facilitar a sua memorização. Fosnot e Dolk (2001) apresentam diversas estratégias que, quando apropriadas pelos alunos, são importantes auxiliares no desenvolvimento daqueles automatismos (relativamente à memorização dos factos básicos) e consequentemente do cálculo mental. Entre estas, destacamos a ideia de dobro e quase dobro, desenvolvendo a partir daí cadeias de cálculo. Por exemplo, começando com o dobro de 5 ( $5+5$ ), então  $5+6$  ou  $5+4$  são quase dobros. Esta relação pode também ser usada em sentido inverso ( $11-6 = 5$ ), pois  $11=10+1$  e 5 é metade de 10, estabelecendo assim a relação dobro/metade. Hartnett (2007) inclui a estratégia de dobros e metades também como uma estratégia de cálculo mental tanto para a multiplicação como para a divisão. Este autor considera ainda a estratégia de contagem como uma forma de pensar a multiplicação a partir da adição de parcelas iguais.

Desta forma, os alunos vão desenvolvendo uma teia de relações, pois desenvolver a flexibilidade de cálculo passa por desenvolver uma compreensão relacional e flexível, de modo a que, por exemplo, quando os alunos revertem a adição para obter a subtração não necessitem de encarar a subtração como um novo processo, comprimindo as ideias matemáticas, tornando-as mais simples (Gray & Tall, 1994).

De acordo com Sfard (1991) e Tall (2013), os processos e os objetos matemáticos são duas faces da mesma moeda. Assim, o número tanto pode ser concebido estruturalmente como um objeto como operacionalmente como processo, sendo ambas as abordagens complementares. Na perspetiva de Sfard (1991), a conceção operacional é a primeira etapa na construção de novas noções matemáticas. Pegando no exemplo do número, a contagem constitui o processo operacional que conduziu a esse objeto matemático, do ponto de vista histórico mas também psicológico (Gray & Tall, 1994; Sfard, 1991). Assim, partindo da conjectura da origem operacional dos objetos matemáticos, Sfard (1991) propõe um esquema com 3 etapas hierárquicas no desenvolvimento de um conceito: (1) *interiorização*; (2) *condensação*; e (3) *reificação*. Durante a interiorização,

o aluno torna-se competente nos processos até conseguir desempenhá-los através de representações mentais, sendo estes processos operações efetuadas em objetos matemáticos de baixo nível. Na fase de condensação, o aluno consegue pensar num dado processo como um todo, comprimindo as sequências longas de operações em unidades mais manejáveis. É esta fase que permite ao aluno combinar esse processo com outros processos, fazer comparações e generalizações. A autora refere, ainda, que a evolução do aluno nesta fase conduz a uma maior facilidade em lidar com diferentes representações do conceito. A fase de condensação encontra ressonância na perspectiva de Gray e Tall (1994) quando os autores referem que os alunos comprimem as ideias matemáticas, tornando-as mais simples. A condensação dura enquanto se mantiver a ligação com um determinado processo. A passagem para a terceira fase é repentina e coincide com a solidificação de um processo num objeto, numa estrutura estática. A mudança qualitativa para a reificação ocorre quando o aluno consegue ver algo familiar sob um novo prisma.

As várias representações do conceito tornam-se unificadas semanticamente por este constructo abstrato e puramente imaginário. A nova entidade é rapidamente desligada do processo que a produziu e começa a desenhar o seu significado a partir do facto de ser um elemento de uma certa categoria. (Sfard, 1991, p. 20)

Essa categoria justifica a existência do novo objeto, podendo ser investigada seja no que respeita às suas propriedades gerais seja no que se refere às diversas relações entre os seus representativos. O novo objeto A, originado a partir de processos em objetos concretos, reificado enquanto conceito A, ficará sujeito a uma nova evolução, segundo estas três fases, funcionando como *input* para os processos, na fase de interiorização, até ocorrer a reificação do objeto B enquanto conceito B, e assim sucessivamente.

Gray e Tall (1994) propõem o constructo *proceito* formado por três componentes: (1) processo que produz um dado objeto matemático; (2) objeto matemático produzido por esse processo; e (3) símbolo representativo do processo ou do objeto. Tal como Sfard (1991), os autores consideram a combinação cognitiva de processo e conceito. Assim, na sua perspectiva, o pensamento procetual implica a flexibilidade de encarar o simbolismo como representação simultânea do processo e do objeto. Por exemplo,  $5+3$  é simultaneamente o processo de adicionar dois números e o objeto matemático correspondente à soma 8. Neste exemplo, o número 8, ao ser reificado, torna-se um objeto mental cuja manipulação, decomposição ou recomposição efetuadas de maneira

flexível permitem que os alunos considerem as múltiplas representações do 8 como representações do mesmo objeto, unificando-as no seu significado enquanto número.

As múltiplas representações dos números constituem um componente importante do conhecimento e destreza com os números (McIntosh et al., 1992). Cusi e Malara (2007) distinguem as representações canônicas dos números naturais das representações não-canônicas. Tomando o mesmo exemplo, "8" é a representação canônica, representando a sua cardinalidade, e outras representações, como por exemplo, " $5+3$ ", " $2 \times 4$ ", " $2^3$ ", " $16/2$ ", são representações não-canônicas. De acordo com as autoras, embora a representação canônica seja mais popular, ela é mais opaca, dizendo pouco acerca do número. Pelo contrário, cada uma das representações não-canônicas acrescenta informação sobre o número — " $5+3$ " sublinha a estrutura do 5, " $2 \times 4$ " assinala que é múltiplo de 2 e de 4, " $2^3$ " sendo uma potência de base 2 também indica que é múltiplo de 2, " $16/2$ " indica que é metade de 16, e portanto, seu divisor — aprofundando o conhecimento do número e facilitando a identificação de relações numéricas.

## Metodologia

Este estudo segue uma abordagem qualitativa dentro de um paradigma interpretativo (Erickson, 1986). Os dados aqui apresentados foram recolhidos através da observação das autoras, numa turma do 1.º ano, da atividade do “número do dia” — uma rotina desenvolvida durante cerca de meia hora no início do dia pelos alunos e pela sua professora. Esta atividade foi videogravada e posteriormente transcrita. A turma tinha 25 alunos mas neste dia estavam presentes 24.

Nesta rotina, o desafio consiste em apresentar diferentes representações simbólicas do número do dia, neste caso o 19, pois a atividade em análise foi desenvolvida no dia 19 de março de 2015. No lado esquerdo do quadro está afixada uma tabela do 100 (que muitas vezes funcionou como auxiliar de cálculo) onde estão registados os números até 109. A professora regista no quadro as diferentes representações envolvendo as quatro operações aritméticas propostas pelos alunos e pede explicações. Quando um aluno sabe uma representação diferente levanta a mão e espera pela sua vez.

Na sua prática letiva, a professora valoriza o desenvolvimento do cálculo mental, focando o trabalho dos alunos no estabelecimento de relações numéricas e de conexões entre as diversas operações aritméticas, através de um diálogo interativo e de questionamento focalizado. Embora privilegiasse a adição e a subtração, foi

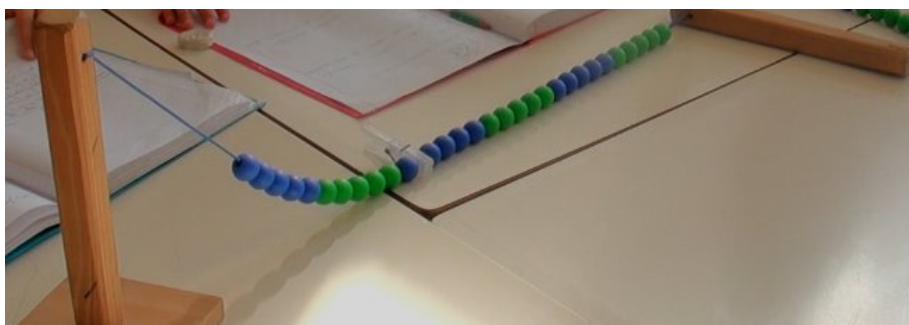
introduzindo a multiplicação e a divisão, de uma forma intuitiva e compreensiva, em ligação com o trabalho desenvolvido no âmbito da estrutura aditiva. Trata-se de uma professora com uma larga experiência, possuindo um conhecimento de Matemática e da sua Didática, que lhe advém, nomeadamente, de uma participação ativa em projetos e ações de formação contínua relativas ao ensino da Matemática nos primeiros anos.

As categorias de análise de dados foram construídas a partir do enquadramento teórico mas também emergiram de uma forma indutiva dos dados e focaram-se nos processos de resolução dos alunos – as relações aplicadas (como relacionaram os números, como relacionaram as operações, como usaram as relações inversas, como compararam quantidades); as propriedades das operações – e também nas fases da evolução conceptual – interiorização, condensação e reificação (Sfard, 1991).

Para preservar o anonimato os nomes dos alunos foram alterados.

### **19 de março: O Número do Dia**

Os alunos encontram-se dispostos em grupo e cada par tem um colar de contas com 30 contas, alternadas na cor de 5 em 5, e uma mola para marcar o 19, embora nem todos os pares tenham feito a marcação. Uma das alunas conta de 5 em 5 — 5, 10, 15 — fazendo deslocar as contas e depois marca o 19 com a mola, fazendo deslocar mais quatro (Figura 1). No entanto, não verbaliza qualquer expressão.



*Figura 1. Colar de contas com a marcação do 19.*

Apesar de disponíveis, os colares de contas não são usados como recursos auxiliares pela maioria dos alunos, tendo sido usados apenas por três alunos. Durante o decurso da atividade, por vezes, a professora recorre ao colar de contas para concretizar a expressão proposta pelos alunos ou para apoiar o seu raciocínio.

Prof<sup>a</sup>: Já toda a gente marcou o 19? O 19 está perto de que número, Maria?

Maria: Do 20.

Prof<sup>a</sup>: Antes ou depois do 20, Marta?

Marta:  $10+10-1$ .  
Prof<sup>a</sup>: Ajuda? O que dá  $10+10$ ?  
Alunos: 20.

A professora inicia o diálogo com os alunos, registrando no quadro as expressões propostas pelos mesmos, e normalmente, dirige-se a um aluno específico que tenha o braço levantado para intervir. Os alunos acompanham a discussão oral em torno dos diversos registos escritos no quadro, sem os escrever no caderno.

Prof<sup>a</sup>: Renato, 19 é dobro ou quase dobro?  
Renato: Quase dobro.  
Prof<sup>a</sup>: Qual o dobro que está a seguir ao 19?  
Renato: 20.  
Prof<sup>a</sup>: Então fomos buscar o  $10+10$ . E o que está antes?  
Renato: 18.  
Alunos:  $9+9+1$ .  
Prof<sup>a</sup>: Lara, 19 é par ou ímpar?  
Lara: É ímpar.

A ideia matemática do dobro/quase dobro, associada à noção de número par/ímpar, já tinha sido trabalhada anteriormente, e a professora mobiliza esta ideia no seu questionamento para que os alunos expressem o 19, relacionando-o com os números vizinhos, o 20 e o 18. O 20 é verbalizado em primeiro lugar pela Maria, talvez por se tratar de um múltiplo de 10. Assim, surgem primeiro as expressões que enquadram o 19 entre o 18 e o 20, sendo estes números decompostos nas suas metades:  $10+10-1$ ;  $9+9+1$ .

Ilda:  $5+5+5+4$ .  
Prof<sup>a</sup>: Consegues transformar isto, Ilda?  
Ilda:  $3 \times 5 + 4$ .

Ilda verbaliza uma expressão que revela a estrutura dos grupos de cinco. Incitada pela professora, transforma a expressão, revelando já um sentido de multiplicação associado à adição de parcelas iguais.

Os alunos continuam a verbalizar as suas soluções:

Prof<sup>a</sup>: Dario?  
Dario:  $38:2$ .  
Prof<sup>a</sup>: Porquê?  
Dario: Porque  $19+19$  é 38.  
Prof<sup>a</sup>: Como é que tu chegaste ao 38?  
Dario: Porque 18 mais 18 dá 36.  
Prof<sup>a</sup>: Calma!... Então fomos ao 18 mais 18 que é uma coisa que tu sabes, certo?  
Dario: Sim.  
Prof<sup>a</sup>: 18 mais 18 dá quanto?

Dario: 36.

Prof<sup>a</sup>: Como é que tu chegaste ao  $19+19$ ?

Dario: Mais 2.

Prof<sup>a</sup>: De onde é que vem este 2?

Dario: Do 18 para o 19, mais 1; do 18 para o 19, mais 1.

Prof<sup>a</sup>: Outra forma de fazer o  $19+19$ , sem ir ao  $18+18$ ?

Maria: Juntamos a dezena do primeiro 19 e depois a outra dezena.

Prof<sup>a</sup>: Esta dezena vale quanto?

Maria: 10. (a professora regista  $10+9+10+9$ ).

Prof<sup>a</sup>: E agora?

Maria:  $10+10$  é 20.  $9+9$  é 18. (a professora regista  $20+18$ , igualando as expressões)

Dario exprime 19 como a metade de 38 ( $38:2$ ). Evidencia, pois, a compreensão da relação entre dobro e metade. A professora desafia os alunos a utilizar outra estratégia, aproveitando a oportunidade para recordar o valor de posição dos números. A professora continua a questionar os alunos, chamando a atenção para a utilização da tabela e procurando que mais alunos participem.

Prof<sup>a</sup>: Outro mais fácil, Luís? Olhem para a tabela. Como fazem rapidamente  $19+19$ , Dario?

Dario (*olhando para a tabela, sentado no seu lugar*):  $19+10=29$ , vindo para baixo; mais 9, porque faz na diagonal.

Prof<sup>a</sup>: Porque é que na diagonal é mais 9?

Maria: Porque se nós andarmos para baixo, é mais 10, na diagonal, é mais 9.

Prof<sup>a</sup>: Então, andar na diagonal é o mesmo que andar 10 para baixo...

Maria: E depois para trás.

Prof<sup>a</sup>: Para trás, o quê? Como é que isso se diz?

Maria: Mais 10 menos um.

Aqui a professora aproveita para ir relembrando as relações entre os números na tabela e faz o registo no quadro, correspondendo ao último registo da figura 2.

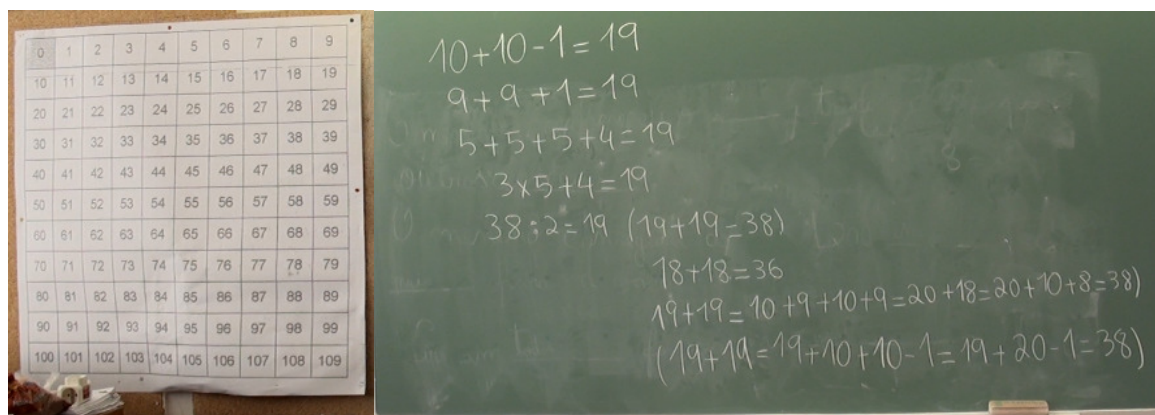


Figura 2. Tabela do 100 e diferentes expressões representativas do 19.

A professora continua a sugerir o uso da tabela como recurso para agilizar o cálculo:



Prof<sup>ª</sup>: Mais rápido? O 19 está próximo do 20. Porque é que eu não vou ao 20 logo no primeiro 19? Quanto é  $20+20$ ?

Alunos: 40.

Prof<sup>ª</sup>: Ajuda?

Alunos: Sim. Ajuda.

Prof<sup>ª</sup>: Então como faço isto? (*registra  $19+19 = 20+20$* ). Quantos é que eu pus a mais aqui? (*aponta com uma mão para o 19 e com a outra para o 20*).

Alunos: Mais um.

Prof<sup>ª</sup>: E aqui? (*aponta com uma mão para o outro 19 e com a outra para o segundo 20*)

Alunos: Mais um.

Prof<sup>ª</sup>: Pus mais um aqui e mais um aqui (*apontando com uma mão para o 19 e com a outra para o 20, e novamente com o segundo 19 e 20*). O que tenho de fazer?

Alunos: Menos 2.

Prof<sup>ª</sup>: Tenho de tirar 2. (*a professora completa o registo  $19+19 = 20+20-2$* ) Quanto dá?

Alunos: 38.

Prof<sup>ª</sup>: Qual é a forma mais rápida?

Alunos: Esta.

Prof<sup>ª</sup>: Concordo. (...) Então, voltando ao 38:2, o que é o 38 em relação ao 19?

Alunos: É o dobro.

Prof<sup>ª</sup>: É o dobro. (...) Quando eu divido o 38 em duas partes iguais, estou a fazer o quê?

Alunos: Estou a achar a metade.

Prof<sup>ª</sup>: Se eu dividir o 38 que é o dobro de 19, vou achar a sua...

Alunos: Metade.

Prof<sup>ª</sup>: Metade (*proferindo "metade" quase ao mesmo tempo que os alunos*), dividindo ao meio.

A professora interpela os alunos para encontrarem novas formas de calcular  $19+19$ . Maria usa a decomposição decimal e Dario, seguindo a sugestão da professora de usar a tabela, faz a leitura da tabela em coluna e depois na diagonal. A professora sugere, ainda, um novo uso da tabela focando a atenção dos alunos no  $20+20$  e compensando, depois, menos 2. E colocando a questão sobre a forma mais rápida de calcular  $19+19$ , valoriza o uso do dobro de 20. No final, a professora focaliza novamente para a expressão proposta por Dario, 38:2, sistematizando a relação de dobro/metade.

Os alunos continuam a exprimir diferentes representações do 19, como por exemplo:  $2 \times 9 + 1 = 19$  e  $3 \times 6 + 1 = 19$ , proferidas por João. Cada nova expressão suscita a geração de uma outra, como se estivessem encadeadas. Embora com uma estrutura similar, estas duas expressões foram propostas com algum distanciamento temporal. A expressão  $2 \times 9 + 1$  foi proposta imediatamente a seguir a uma aluna ter proposto  $18 + 1$ , parecendo

que o João foi inspirado por esta última expressão, procurando representar o 18 como um produto.

O diálogo continua em plenário de turma:

Armando:  $4+4+\dots$  (*hesita*)

Prof<sup>a</sup>: O que é o 19? Par ou ímpar?

Alunos: Ímpar.

Prof<sup>a</sup>: Quando escrevo  $4+4$ , onde começo a contar? (*a professora pega num dos colares para exemplificar*)

Alunos: (*depois de alguma hesitação*) Do zero.

Prof<sup>a</sup>: Se fizer contagens de 4 em 4, obtenho um ímpar? Vamos lá a contar.

Alunos: 4, 8, 12, 16, 20.

Prof<sup>a</sup>: Chego ao 19?

Alunos: Não.

Prof<sup>a</sup>: Porquê?

Aluna: Porque 19 é ímpar e 4 é par.

Prof<sup>a</sup>: Então, diz lá, Armando.

Armando:  $4+4+4+\dots$  (*hesita*)

Prof<sup>a</sup>: Ainda dá outro 4?

Armando:  $4+4+4+3$ .

A professora, depois de precisar o zero como ponto de partida da contagem de 4 em 4, volta a apelar para a conexão com o conhecimento da distinção entre números pares e ímpares. Após mais propostas vindas de diversos alunos, surge uma incidente no 100:

Renato:  $100:100\dots$

Prof<sup>a</sup>:  $100:100$  quanto dá?

Renato: Zero.

Prof<sup>a</sup>: Se tiveres 100 berlindes a dividir por 100 meninos, quantos berlindes recebe cada menino?

Renato: 1.

Prof<sup>a</sup>: Então quanto é 100 a dividir por 100?

Renato: Um.  $100:100+18=19$ . (*a professora regista no quadro*)

Renato parece transpor a diferença entre 100 e 100 para o quociente entre 100 e 100. A professora recorre, então, ao contexto dos berlindes já explorado noutras tarefas anteriores para dar sentido à expressão proposta. Rapidamente, Renato retifica o zero para um.

A expressão proposta por Renato suscita outras similares, embora propostas mais tarde por outros alunos, já no momento final desta rotina:  $10:10+18$  (proposta por Luís);  $1000:1000+18$  (proposta por Dario e um pouco depois por Guilherme),  $2000:2000+18$  e  $4000:4000+18$  (verbalizadas por Dario mas não registadas). Com o uso de números de elevada ordem de grandeza, os alunos parecem querer generalizar a ideia matemática de

que quando se divide qualquer número por si próprio se obtém sempre a unidade. E com a expressão desta generalização, conseguem o seu intuito de obter um elevado número de expressões representativas do 19.

Dario:  $51:3=19$ . (*a professora regista no quadro*)

Prof<sup>a</sup>: Onde foste buscar o 51?

Dario:  $19+19+19$  dá 51.

Prof<sup>a</sup>: Porquê? Vamos ver... (*regista no quadro  $19+19+19$* ). O que vimos aqui que era fácil de fazer?

Aluno: Podemos ir ao 20.

Dario e Maria:  $20+20+20...$

Prof<sup>a</sup>: E agora o que é que eu faço?

Dario: Menos três.

Prof<sup>a</sup>: Menos três. (*regista  $19+19+19=20+20+20-3$* )

Prof<sup>a</sup>: Quanto é  $20+20$ , Dario?

Dario: 40.

Prof<sup>a</sup>: Mais 20?

Dario: Hann...

Prof: Quanto é  $2+2$  e  $+2$ ?

Dario: Seis.

Prof: Quanto é  $20+20$ ? Mais 20?

Alunos: 60.

Prof<sup>a</sup>: Agora menos 3. O  $60-3$ ?

Aluno: 56.

Maria: 57!

Dario revela alguma dificuldade em operar com os números perto da ordem de grandeza do 60, o que não acontece com números menores. A professora orienta os alunos para a leitura regressiva da tabela, desde o 60 até ao 57, e regista 57 no quadro, à frente do sinal de igual.

Prof<sup>a</sup>: (*voltando ao  $51:3$* ) Então está bem?

Alunos: Não.

A professora altera o registo para  $57:3$  (Figura 3).

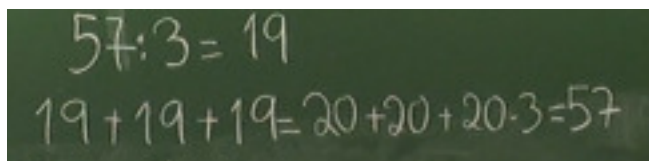

$$57:3=19$$
$$19+19+19=20+20+20-3=57$$

Figura 3. 19 como a terça parte de 57.

A professora continua a solicitar expressões a cada um dos alunos, individualmente, tendo a preocupação de dar a todos a oportunidade para se exprimirem.

João:  $15+2+2=19$  ou então  $15+4=19$ .

Prof<sup>a</sup>: Miguel?

Miguel:  $4+5+3+3+4=19$ . (Miguel vai deslocando as contas acompanhado pela professora que também aponta para os grupos de contas no colar à medida que vai registando a expressão formulada pelo aluno)

João decompõe o 19 em  $15+2+2$  e recompõe  $2+2$  em 4, mostrando flexibilidade em movimentar-se na equivalência de diferentes expressões não-canônicas. Miguel propõe uma decomposição em grupos de 4, 5 e 3, tendo de ser apoiado pela professora com o colar de contas (Figura 4).



Figura 4. Miguel estruturando o 19 com o colar de contas e o apoio da professora.

Os alunos continuam a propor novas expressões até que a professora encerra a rotina: "Temos de terminar". Só no final da rotina é que os alunos registam nos seus cadernos diários algumas das expressões representativas do 19, ficando ao critério de cada um as que quiser copiar. O registo de todas as expressões representativas do 19 propostas pelos alunos, bem como o registo do seu raciocínio subjacente a algumas delas encontra-se na figura 5:

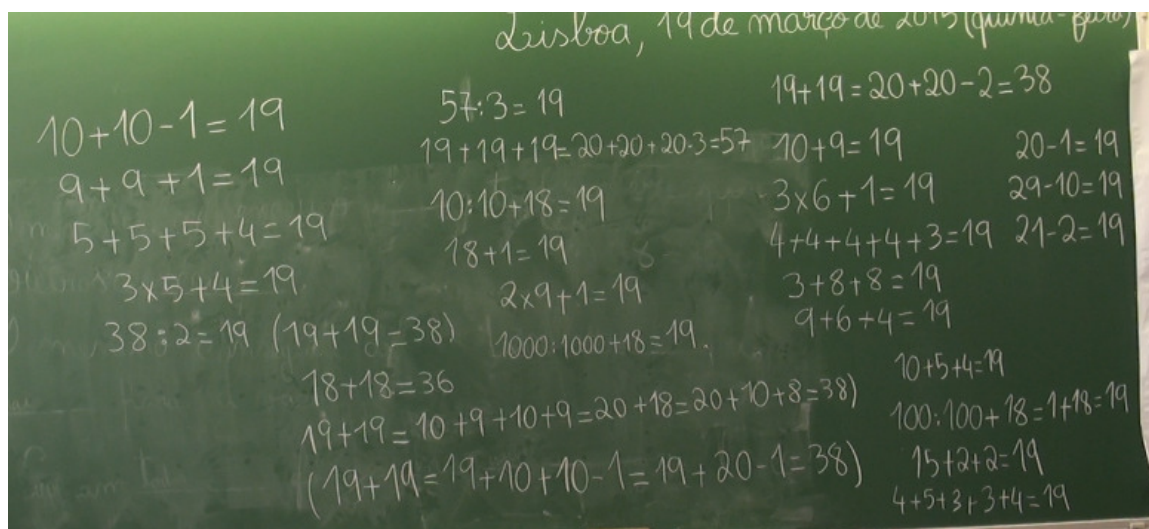


Figura 5. Representações não-canônicas do 19 propostas na rotina.

Para a grande diversidade de representações do 19, os alunos mobilizaram as quatro operações aritméticas, a relação do dobro e metade e aplicaram generalizações, dando evidência de terem já desenvolvido bases importantes para o cálculo mental flexível.

## Considerações finais

A ideia matemática do dobro/quase dobro (Fosnot & Dolk, 2001), associada à noção de número par/ímpar, na turma do 1.º ano, não surge, primeiramente, decorrente do uso de uma dada estratégia nem ligada a uma dimensão processual operatória, mas sim como uma propriedade dos números. No entanto, esta propriedade permite olhar para os números como objetos mentais estruturados, de tal forma que são construídos como proceitos (Gray & Tall, 1994; Tall, 2013) resultantes da fusão entre número/objeto, processo e símbolo representativo de ambos. Assim, por exemplo, a expressão  $10+10-1$  comporta uma simbologia que representa simultaneamente o número quase dobro 19 através de decomposição reveladora de uma estrutura possível, bem como uma forma de operar no âmbito de uma estrutura aditiva produzindo o objeto matemático 19. Tal como sustentado por diversos autores (Sfard, 1991; Tall, 2013), conceito e processo são lados da mesma moeda. O dobro é também mobilizado como operador, e através da sua relação íntima com a metade, é aproveitado para gerar uma nova expressão do 19 como um quociente, como no caso de  $38:2$ . É de destacar a forma como a professora, no final da partilha dos raciocínios subjacentes a essa expressão, sistematiza a relação inversa entre metade e dobro ("Se eu dividir o 38 [por 2] que é o dobro de 19, vou achar a sua metade").

O facto de a professora solicitar novas maneiras de efetuar um determinado cálculo suscita nos alunos o desenvolvimento da flexibilidade, ao encontrarem uma diversidade de processos para calcular uma mesma expressão, como aconteceu, por exemplo, com  $19+19$  (resultante da justificação de  $38:2$  dada por Dario), em que usaram a relação do dobro, associada a um facto básico ("Porque 18 mais 18 dá 36"), e aliada à estratégia da compensação ( $18+18+2$ ; ou  $20+20-2$ ), bem como a decomposição decimal (" $10+10$  é 20.  $9+9$  é 18") ou, ainda, o cálculo por saltos ( $19+10+10-1$ ), apoiado pela tabela do 100.

A característica do 19 como um número ímpar leva os alunos a decompô-lo em  $18+1$ , exprimindo o 18 por diversos produtos já seus conhecidos como  $2 \times 9$  ou  $3 \times 6$ . A decomposição  $18+1$  acaba por suscitar novas expressões, desta vez, representativas da unidade enquanto quociente entre qualquer número e o próprio número, em que os alunos propõem números grandes como forma de evidenciar o sentido alcançado da generalização envolvida ( $100:100+18$ ;  $10:10+18$ ;  $1000:1000+18=19$ ;  $2000:2000+18$  e  $4000:4000+18$ ). O contexto dos berlines foi um recurso mobilizado pela professora para dar sentido à expressão  $100:100$  proposta por um dos alunos, sendo que deixou de

ser necessário continuar a estabelecer a ligação com o contexto, nas sucessivas propostas de expressões que generalizaram a ideia associada a 100:100. Apesar dos alunos do 1.º ano, em março, ainda se encontrarem numa fase inicial de aprendizagem da multiplicação e da divisão, seis alunos da turma mostram ser capazes de usar de forma apropriada estas duas operações e começam a fazer generalizações, como é o caso do exemplo atrás referido.

A turma revela, globalmente, flexibilidade de cálculo, dando evidência de um conhecimento do número suportado por uma rede de relações numéricas, que é potenciado pela partilha coletiva e discussão dos raciocínios dos alunos acerca das diferentes representações não-canónicas propostas (Cusi & Malara, 2007). A equivalência dessa diversidade de representações é um fator que contribui para esse conhecimento, conduzindo também à geração de novas expressões que são encadeadas nas expressões propostas anteriormente, indicador de relacionamento numérico flexível (Tall, 2013). Não obstante, identificamos diferentes níveis de desenvolvimento conceptual (Sfard, 1991). Alguns alunos encontram-se na fase de interiorização, como é o caso do Miguel que ainda precisa de operacionalizar contagens, com o apoio do recurso do colar de contas. Outros encontram-se na fase de condensação, conseguindo comprimir operações já efetuadas de modo competente e mentalmente em unidades mais simples, fazer generalizações e alternar entre diferentes representações do número. É o caso de João que, ao decompor o 19, comprime a iteração de 5 em 5 ( $5+5+5$ ) numa unidade manejável, o 15; e do Luís, ao propor  $10:10+18$ , generalizando o 1 enquanto quociente de um número por ele próprio, a partir do 100:100. Outros, como o Dario, parecem já ter reificado o 19 enquanto objeto matemático mental, fazendo de modo flexível decomposições e recomposições, e tomando como base factos básicos memorizados. Neste nível superior de reificação, as diferentes expressões simbólicas do número são já interpretadas como nomes de uma estrutura, uma entidade estática, a que corresponde um elemento de um determinado conjunto com propriedades bem definidas.

Esta rotina, devidamente explorada pela professora, de forma interativa com os alunos, é potenciadora do desenvolvimento da flexibilidade de cálculo, dando espaço para cada um dos alunos exprimir uma dada representação, seja qual for o seu nível de desenvolvimento conceptual. O material manipulável suportou o pensamento matemático de apenas três alunos, sendo que a maioria lida já com os números de um

modo mais formal enquanto objetos mentais. Sendo uma rotina suficientemente aberta para contemplar diferentes ritmos de aprendizagem, é simultaneamente potenciadora do desenvolvimento dos alunos para níveis superiores de pensamento.

## Referências bibliográficas

- Brown, M., Millet, A., & Askew, M. (2008). O impacto da estratégia nacional de numeracia no ensino e na aprendizagem em Inglaterra. In J. Brocardo, L. Serrazina & I. Rocha (Orgs.), *O sentido do número: Reflexões que entrecruzam teoria e prática* (pp. 61-96). Lisboa: Escolar Editora.
- Buys, K. (2001). Mental arithmetic. In M. Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Children learn mathematics: A learning-teaching trajectory with intermediate attainment targets for calculation with whole numbers in primary school* (pp. 121-146). Netherlands: Freudenthal Institute (FI) Utrecht University and National Institute for Curriculum Development (SLO).
- Cusi, A., & Malara, N. (2007). Approaching early algebra: Teachers' educational processes and classroom experiences. *Quadrante*, 16(1), 57-80.
- Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (3ª ed.). New York: Macmillan.
- Fosnot, C. T., & Dolk, M. (2001). *Young mathematicians at work: Constructing number sense, addition, and subtraction*. Portsmouth: Heinemann.
- Fosnot, C. T., & Dolk, M. (2002). *Young mathematicians at work: Constructing multiplication and division*. Portsmouth: Heinemann.
- Gray, E., & Tall, D. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), 115-141.
- Hartnett, J. (2007). Categorisation of mental computation strategies to support teaching and to encourage classroom dialogue. In J. Watson & K. Beswick (Eds.), *Mathematics: Essential research, essential practice. Proceedings of the thirtieth annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia. (MERGA-30)* (I, pp. 345-352). Hobart: MERGA.
- McIntosh, A., Reys, B., & Reys, R. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics*, 12, 2-8.
- NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics Education*, 22, 1-36.
- Tall, D. (2013). *How humans learn to think mathematically: Exploring the three worlds of mathematics (Learning in doing: social, cognitive and computational perspectives)*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Threlfall, J. (2009). Strategies and flexibility in mental calculation. *ZDM Mathematics Education*, 41, 541-555.

