

Capítulo 7

FORMAÇÃO DE PROFESSORES E DESENVOLVIMENTO DO SENTIDO DO NÚMERO

Lurdes Serrazina

Universidade de Lisboa

lurdess@eselx.ipl.pt

Margarida Rodrigues

Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Lisboa

margaridar@eselx.ipl.pt

INTRODUÇÃO

Um desafio que se coloca à formação de professores é o de conceber programas de formação que influenciem a natureza e a qualidade das suas práticas de ensino (BORKO et al., 1992; EBBY, 2000; HIEBERT; MORRIS; GLASS, 2003). É uma tarefa difícil, pois os futuros professores aprendem a ensinar, observando os seus professores, durante toda a sua escolaridade. Trata-se de uma prática cultural e mudar práticas culturais é reconhecidamente difícil (EBBY, 2000; HIEBERT et al., 2003). Acresce que a formação inicial ocorre durante um período limitado de tempo, o que não permite transformar os candidatos a professores em professores peritos em ensino da Matemática. Nesta perspetiva, Hiebert et al. (2003) propõem que os futuros professores tenham a oportunidade de desenvolver experiências significativas que possam mais tarde trabalhar com os seus alunos e que correspondam a aspetos chave do currículo de Matemática. Entre elas, parecem-nos fundamentais aquelas que se prendem com o desenvolvimento do sentido do número.

Este capítulo começa por se discutir, com base na literatura e em exemplos concretos, o que se entende hoje por sentido do número e em especial sentido do número racional e a sua interligação com as estratégias de cálculo mental. Na última secção, apresentam-se algumas sugestões sobre como garantir que aquilo que se considera sentido do número é apropriado pelos professores, apresentando propostas a desenvolver na formação.

SENTIDO DO NÚMERO

Atualmente, o sentido do número é considerado um aspeto essencial em muitos currículos da educação básica. A ideia de sentido do número tem essencialmente duas características. Uma diz respeito ao seu desenvolvimento progressivo. Não se trata de algo que se aprende uma vez por todas numa dada fase do percurso escolar, mas, sim, de uma competência que deve ser desenvolvida ao longo de toda a escolaridade (ABRANTES; SERRAZINA; OLIVEIRA, 1999; NCTM, 2000). A outra característica está relacionada ao seu carácter global. Para alguns autores, o sentido do número é uma intuição global sobre os números e as operações. O entendimento geral é que o sentido do número inclui conhecimentos sobre os números e as operações e sobre o seu uso flexível na realização de julgamentos matemáticos e na resolução de problemas (MCINTOSH; REYS; REYS, 1992). Nesta perspetiva, existe uma forte inter-relação entre os diferentes aspetos associados ao sentido do número, isto é, entre os números, as operações e as situações, cada um deles contribuindo para o desenvolvimento mútuo dos restantes. O quadro seguinte apresenta os três componentes do sentido do número propostos por McIntosh et al. (1992):

Quadro 1 – Componentes do sentido do número

1. Conhecimento e destreza com os números	Sentido da regularidade da ordem dos números
	Múltiplas representações dos números
	Sentido da grandeza relativa e absoluta dos números
	Uso de números de referência

2. Conhecimento e destreza com as operações	Compreensão do efeito das operações
	Compreensão das propriedades das operações
	Compreensão das relações entre as operações
3. Aplicação do conhecimento e da destreza com os números e as operações, em situações de cálculo	Compreensão da relação entre o contexto e o cálculo
	Consciencialização da existência de múltiplas estratégias
	Apetência para usar uma representação e/ou método eficaz
	Sensibilidade para rever os dados e o resultado

Fonte: McIntosh et al. (1992, p. 4)

O sentido do número está intimamente associado ao cálculo mental já que este é um tipo de cálculo efetuado com os números globais e não com os seus dígitos, através da aplicação das propriedades operatórias e do estabelecimento de relações numéricas envolvendo o uso de variadas estratégias pessoais, e podendo recorrer-se a registos em papel (ABRANTES et al., 1999; BUYS, 2001). O cálculo mental assume-se, assim, como um cálculo pensado, e não mecanizado (BROCARD; SERRAZINA, 2008) que, ao considerar os números como um todo, o seu resultado, mesmo que seja incorreto, aproxima-se do resultado exato, numa base compreensiva da ordem de grandeza dos números envolvidos (ABRANTES et al., 1999). De modo a ilustrar esta ideia, apresentam-se, em seguida, dois exemplos de cálculo de alunas de 3.º ano de turmas diferentes de duas estagiárias do Mestrado em Ensino do 1.º e 2.º Ciclo do Ensino Básico da Escola Superior de Educação de Lisboa (ESELx). No primeiro caso (Figura 1), a estratégia da compensação usada tirou partido, de forma flexível, das características dos números envolvidos, transformando-os em números de referência, com os quais seria mais fácil operar.

176 - 49 =	$ \begin{array}{r} \overset{-1}{176} - 4\overset{+1}{9} = 175 - 50 = \\ = 125 \end{array} $
------------	--

Figura 1 – Uso incorreto da estratégia da compensação

Fonte: Teixeira e Rodrigues (2015, p. 262)

No entanto, a aluna em causa aplicou a compensação na subtração como se tratasse de uma adição, não tendo adicionado duas unidades no final ao resultado obtido, como resultado da compensação de ter subtraído 1 ao aditivo e adicionado 1 ao subtrativo (o que provocou uma redução na distância entre os números, necessitando, pois, do acréscimo de 2 para repor a distância numérica). Apesar do erro, o resultado obtido é muito próximo do resultado exato, revelando uma compreensão da ordem de grandeza dos números envolvidos no cálculo, bem como da razoabilidade do resultado obtido. A segunda aluna, para calcular mentalmente $272 - 20$, efetuou os seguintes cálculos parciais: $72 - 20 = 52$; $52 + 2 = 54$ (RAMOS, 2016). Esta aluna operou com o 2 (das centenas) enquanto dígito, ignorando o seu valor posicional. Do exposto, podemos concluir que, embora ambos incorretos, no primeiro caso a aluna parece ter o sentido do número e ter utilizado uma determinada estratégia pessoal de cálculo, tendo obtido um valor muito aproximado ao valor exato. Já a segunda revela ausência de sentido de número ao ter adicionado 2 em vez de 200, bem como ausência de sensibilidade para rever o resultado obtido (aspeto associado ao terceiro componente do sentido de número, segundo McIntosh et al. (1992), revelando falta de sentido crítico relativamente à ordem de grandeza estimada da diferença em causa.

Buys (2001, p. 121) define o cálculo mental como “o cálculo hábil e flexível baseado nas relações numéricas conhecidas e nas características dos números”. Efetivamente, uma característica marcante do cálculo mental e do sentido do número é a flexibilidade que permite aos alunos ajustar, de forma adaptativa, os números às operações em causa, ou ajustar as operações mobilizadas às circunstâncias específicas das situações inerentes aos diversos contextos. A flexibilidade é um dos aspetos essenciais no desenvolvimento da proficiência matemática (NCTM, 2000). Assim, num cálculo flexível, as estratégias, definidas como “aplicações de factos numéricos conhecidos ou rapidamente calculados em combinação com propriedades específicas do sistema numérico para encontrar a solução para um cálculo cuja resposta não é conhecida” (THOMPSON, 1999, p. 2) são mobilizadas em função das características específicas dos números em causa, das variáveis contextuais das tarefas e também das características individuais dos alunos (THRELFALL, 2009).

Por vezes, os alunos conseguem fazer um cálculo eficiente aplicando procedimentos mecanizados, sem analisarem o contexto da tarefa ou as características dos números envolvidos (BROCARD, 2013), revelando, pois, ausência de flexibilidade e

de compreensão da relação entre o cálculo e o contexto da tarefa. Por exemplo, mais de metade dos alunos de uma turma de 3.º ano utilizou o procedimento mecanizado de decomposição – $(10 + 9) \times 5$ –, ao efetuar 19×5 , e não a estratégia de compensação, associada à transformação de 19×5 em 20×5 (BROCARD, 2013, p. 2). Embora os alunos em causa tenham efetuado cálculo mental, já que não foi um cálculo algorítmico incidente nos dígitos dos números, e o procedimento usado tenha sido eficiente, baseado na propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, conduzindo a um resultado correto, eles revelam um uso mecanizado da decomposição e ausência de flexibilidade associada ao ato de reparar nos números envolvidos no cálculo, ignorando, assim, a proximidade do 19 ao 20, múltiplo de 10, que poderia ser facilitador do cálculo atrás indicado. A flexibilidade de cálculo assume uma grande importância quando pensamos na relevância do desenvolvimento da fluência de cálculo, definida por Kilpatrick, Swafford e Findell (2001) como a capacidade de calcular de forma eficiente, adequada, apropriada e flexível, e considerada por estes autores como um dos componentes da proficiência matemática.

SENTIDO DO NÚMERO RACIONAL

O sentido do número racional inscreve-se no sentido do número, tal como caracterizado por McIntosh et al. (1992), assumindo, no entanto, especificidades próprias inerentes à ruptura cognitiva colocada aos alunos quando iniciam o estudo dos números racionais, quando estes tendem a estender as propriedades já interiorizadas com os números naturais e que já não se aplicam nos números racionais. Assim, “a passagem dos números inteiros para os números fracionários representa uma grande mudança conceptual” (MONTEIRO; PINTO, 2005, p. 91). Exemplos dessa mudança são a densidade dos números racionais e a possibilidade de distintos efeitos operatórios da multiplicação e da divisão. Com os números naturais, os alunos começam por se apropriar da existência de um e só um número consecutivo a outro, decorrente da atividade de contagem associada à natureza discreta do conjunto dos números naturais.

A compreensão da densidade dos números racionais pelo reconhecimento da existência da infinidade de números entre quaisquer dois números racionais reveste-se

de grande complexidade. Numa fase inicial, os alunos tendem a manter o mesmo tipo de vocabulário aplicado antes aos naturais, referindo-se, no âmbito dos números racionais, ao número a seguir a um outro (por exemplo, referindo que 2,13 é o número a seguir ao 2,12). Com os números naturais, os alunos começam por associar à multiplicação o efeito de aumentar e à divisão o efeito de diminuir. A compreensão de que se pode obter um produto mais pequeno do que um dos fatores quando o outro fator é um número entre 0 e 1, ou que se pode obter um quociente maior do que o dividendo quando o divisor é um número entre 0 e 1, constitui um desafio cognitivo que tem de ser devidamente apoiado (BARNETT-CLARKE; FISHER; MARKS; ROSS, 2011; TALL, 2013).

Nesse mesmo sentido, a representação em fração dos números racionais assume desafios cognitivos específicos, uma vez que, numa fase inicial, os alunos tendem a olhar para a fração como um numeral que representa dois números naturais (um o numerador e outro o denominador), ao invés de a considerarem como a representação de um número (CARRAPIÇO, 2015). Todos os números racionais podem ser representados por frações, mas existem frações que não representam números racionais, representando números irracionais, como por exemplo $\frac{\sqrt{2}}{5}$. Grande parte das dificuldades relativas à aprendizagem dos números racionais representados por frações prendem-se com a ausência da consideração pelos alunos da relação entre numerador e denominador e com a compreensão conceptual da unidade de referência. Estas dificuldades surgem também nos futuros docentes, pelo que é fundamental garantir na sua formação inicial um conhecimento sólido e aprofundado dos números racionais que lhes permita, na sua futura ação docente, preparar e implementar tarefas potenciadoras da compreensão conceptual dos números racionais, bem como entender o fundamento matemático das respostas dos alunos, muitas vezes marcadamente díspares das esperadas, sejam elas corretas ou incorretas (PINTO; RIBEIRO, 2013).

A especificidade do sentido de número racional e a forma lenta e gradual como se desenvolve justifica um modelo próprio para caracterizá-lo que se apresenta no Quadro 2. Em particular, é na síntese dos múltiplos significados que se desenvolve o sentido do número racional (MONTEIRO; PINTO, 2005; PITKETHLY; HUNTING, 1996).

Quadro 2 – Modelo para caracterizar o sentido de número racional

Componentes	Capacidades a desenvolver
Familiaridade com os diferentes significados das frações em contexto	Reconhecer os diferentes significados das frações (partilha, parte-todo, medida, operador e razão) em unidades discretas ou contínuas.
Flexibilidade com a unidade de referência das frações em contexto	Reconstruir a unidade de referência (discreta ou contínua)
	Identificar a unidade de referência (discreta ou contínua)
Familiaridade com diferentes representações de número racional	Conectar diferentes representações (numeral decimal, fração e numeral misto)
	Reconhecer frações equivalentes
Flexibilidade na comparação e ordenação de números racionais	Posicionar números racionais na reta numérica
	Comparar e ordenar números racionais
	Reconhecer a existência da infinidade de números entre dois números racionais
Símbolos e linguagem matemática formal	Relacionar os símbolos com ações e conhecimentos informais
	Relacionar os símbolos com linguagem matemática formal

Fonte: adaptado de Pinto (2011).

O estudo desenvolvido por Pinto e Ribeiro (2013) com futuros professores de duas instituições de ensino superior de Portugal, que visou a identificação de fragilidades nas capacidades associadas aos componentes do sentido do número racional, permitiu concluir que esses “futuros professores revelam um conhecimento do sentido de número racional alinhado com as mesmas dificuldades, reveladas por alunos dos primeiros anos” (PINTO; RIBEIRO, 2013, p. 94). Apresentam-se, em seguida, algumas dessas fragilidades. Uma dificuldade foi o reconhecimento da densidade dos números racionais, não tendo sido identificada por 73% dos futuros professores.

Numa tarefa em que se pedia para se identificaras imagens que têm $\frac{2}{3}$ pintados,

36% dos futuros docentes identificaram a imagem E (Figura 2), revelando que no significado da fração como parte-todo, não reconhecem a necessidade da congruência das partes em que a unidade está dividida.

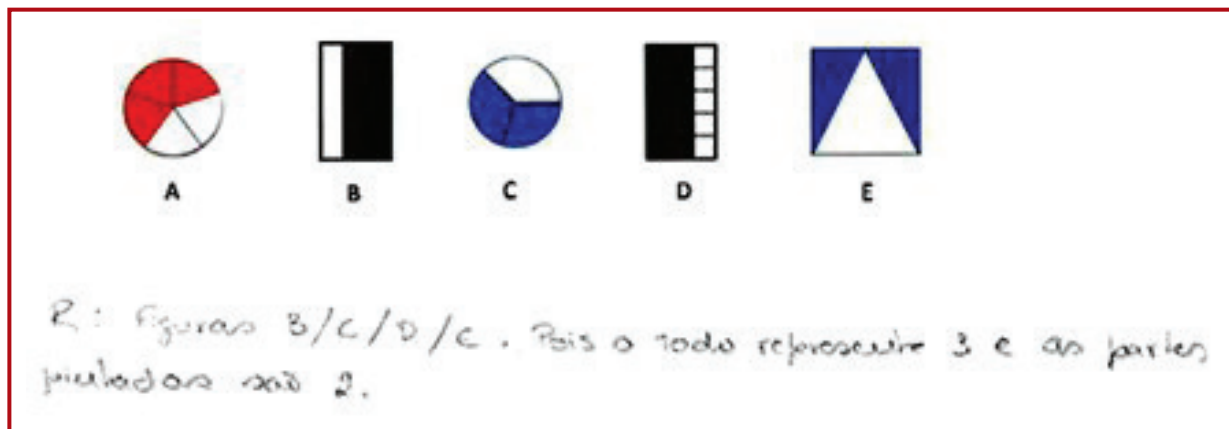


Figura 2 – Fração como parte-todo

Fonte: Pinto e Ribeiro (2013, p. 90).

Também surgiram dificuldades associadas à fração como operador, sendo que 64% dos futuros docentes não conseguiram calcular $\frac{3}{5}$ de 30, na seguinte situação:

“No dia do seu aniversário o Manuel levou para a escola um saco com 30 gomas. Deu aos seus colegas de turma $\frac{3}{5}$ dessas gomas. Com quantas gomas ficou o Manuel?”

Uma das futuras docentes apresentou uma resolução que evidencia a aplicação formal e incorreta do algoritmo da subtração de frações, destituída da compreensão do significado envolvido, fazendo corresponder o conteúdo semântico de “deu” à operação subtração (Figura 3).

$$30 - \frac{3}{5} = \frac{30}{(1)} - \frac{3}{5} = \frac{30}{5} - \frac{3}{5} = \frac{27}{5}$$

Figura 3 – Fração como operador

Fonte: Pinto e Ribeiro (2013, p. 92).

As situações de partilha são consideradas, por diversos autores, como situações a privilegiar na abordagem inicial às frações, partindo de situações do quotidiano das crianças e das suas noções intuitivas, o que permite ligar as frações à divisão de números naturais (MONTEIRO; PINTO, 2005; PITKETHLY; HUNTING, 1996), explorando o significado de quociente. Neste tipo de situações, é importante que se enfatize a dimensão relacional da fração, com uma discussão centrada na unidade de referência (FOSNOT; DOLK, 2002). Por exemplo, a resolução da situação “A Maria tem 3 chocolates. Se os repartir equitativamente pelas suas 5 amigas, que parte do chocolate dará a cada uma?” lida com a compreensão da unidade de referência (Figura 4).



Figura 4 – Fração como partilha

Fonte: elaborado pelas autoras.

Tanto alunos do Ensino Básico (no âmbito de aulas supervisionadas no Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico) quanto futuros docentes, na ESELx, têm apresentado diferentes soluções para o problema, consoante a unidade de referência considerada. A Figura 4 modela a situação de partilha, sendo que cada amiga recebe 3 “bocadinhos” de chocolate, assinalados de uma mesma cor. A solução correta $\frac{3}{5}$ envolve a compreensão de que a unidade de referência é *um* chocolate, surgindo aqui a fração $\frac{3}{5}$ como quociente resultado da divisão de 3 chocolates por 5 pessoas. No entanto, os estudantes podem considerar a unidade de referência como sendo 3 chocolates, levando-os incorretamente considerar $\frac{3}{15}$ de chocolate como a solução do problema. Este é um exemplo ilustrativo da importância da unidade de referência quando se trabalha com frações (BARNETT-CLARKE et al., 2011).

ESTRATÉGIAS EM OPERAÇÕES COM NÚMEROS RACIONAIS

Ilustrando a compreensão das propriedades das operações como um aspeto presente no componente do sentido do número (MCINTOSH et al., 1992), relativo a conhecimento e destreza com as operações, apresentam-se, em seguida, alguns exemplos de estratégias de uma aluna de 3.º ano que envolvem essa compreensão. Tais exemplos foram documentados em um estudo que teve como objetivo compreender as estratégias de cálculo mental utilizadas pelos alunos, nas diversas operações, envolvendo números naturais, e o modo como estas se desenvolvem (TEIXEIRA, 2014).

Na Figura 5, a aluna revela compreender que a diferença não se altera se subtrair o mesmo número ao aditivo e ao subtrativo (propriedade da invariância do resto), ao transformar os termos da subtração em múltiplos de 10 para facilitar a rapidez de cálculo. Neste caso, a estratégia da compensação foi aplicada nos termos da subtração e não no resultado da operação: ao retirar 5 do aditivo, compensou no subtrativo, retirando também 5.

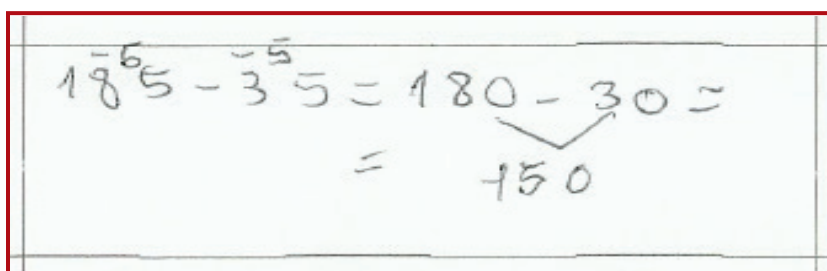
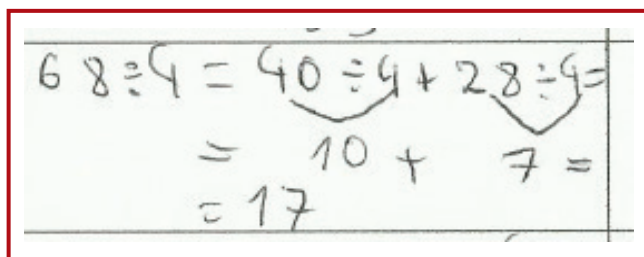

$$\begin{array}{r} 18^5 5 - 3^5 5 = 180 - 30 = \\ = 150 \end{array}$$

Figura 5 – Estratégia da compensação

Fonte: Teixeira e Rodrigues (2015, p. 259).

Na divisão (Figura 6), a mesma aluna utilizou a estratégia da decomposição não decimal do dividendo, mobilizando a propriedade distributiva da divisão em relação à adição. Trata-se de uma decomposição que não é mecanizada como a decomposição decimal cuja utilização não facilitaria o cálculo, pois $60:4$ não constitui um facto básico memorizado.



$$\begin{array}{r}
 68 \div 4 = 40 \div 4 + 28 \div 4 = \\
 = 10 + 7 = \\
 = 17
 \end{array}$$

Figura 6 – Estratégia da decomposição não decimal do dividendo

Fonte: Teixeira e Rodrigues (2015, p. 260).

Assim, a aluna decompôs o 68 na soma $40 + 28$, procurando múltiplos do divisor que entrem na tabuada do 4, de modo a permitir o uso dos factos memorizados da tabuada do 4 : $4 \times 10 = 40$ e $4 \times 7 = 28$. Ela evidencia flexibilidade de cálculo, adaptando o uso da estratégia às características específicas da situação de cálculo proposta e, neste sentido, é um exemplo ilustrativo da compreensão da relação entre o contexto e o cálculo, aspeto presente na componente do sentido de número (MCINTOSH et al., 1992) relativo à aplicação do conhecimento e da destreza com os números e as operações, em situações de cálculo. O contexto aqui é um contexto matemático, e a relação prende-se com os números envolvidos. A aluna também mostra compreensão das relações entre as operações, outro aspeto do componente do sentido de número relativo a conhecimento e destreza com as operações (MCINTOSH et al., 1992). Nesse caso, resolve uma situação de cálculo envolvendo a divisão relacionando-a com factos básicos da multiplicação.

As estratégias de decomposição têm por base a utilização de múltiplas representações dos números, um dos aspetos inerente ao componente do sentido de número relativo a conhecimento e destreza com os números (MCINTOSH et al., 1992). Cusi e Malara (2007) distinguem as representações canónicas dos números naturais (por exemplo, “68”) das representações não canónicas (por exemplo, “ $40 + 28$ ”). As representações canónicas são mais opacas, dizendo pouco acerca do número. Pelo contrário, de acordo com as autoras, cada uma das representações não canónicas acrescenta informação sobre o número. Continuando com o exemplo do 68: “ $40 + 28$ ”, sublinha a sua estrutura envolvendo uma soma de dois múltiplos de 4; “ 2×34 ” assinala que é múltiplo de 2 e de 34; “ $2^6 + 2^2$ ” revela a sua estrutura envolvendo uma soma de duas potências de base 2, “ $136 / 2$ ” indica que é metade de 136 e, portanto, seu divisor. Assim, o uso flexível das múltiplas representações dos números aprofunda o conhecimento dos números e facilita a identificação de relações numéricas, potenciando a sua aplicação em situações diversificadas de cálculo.

É importante que os alunos manipulem os números de modo flexível, decompondo-os e recompondo-os, de forma a considerar as múltiplas representações de um número como representações do mesmo objeto matemático, unificando-as no seu significado enquanto número (SFARD, 1991).

No cálculo de 150×32 (Figura 7), a aluna usa a decomposição decimal do 150 ($100 + 50$), transformando o 50 em 100 para facilitar o cálculo, e compensando depois esse produto parcial, através da relação de dobros e de metades: se 100 é o dobro de 50, então o produto parcial 50×32 é metade de 3200, correspondente a 100×32 . A decomposição efetuada baseia-se na propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

$$\begin{array}{l}
 100 \times 32 + 50 \times 32 = \\
 3200 + 3200 \div 2 = \\
 \cancel{3200} + 1600 = 4800
 \end{array}$$

Figura 7 – Estratégias da decomposição decimal e da compensação através da relação de metade

Fonte: Teixeira e Rodrigues (2015, p. 260).

A estratégia de dobros e metades é uma estratégia de cálculo mental potente para a multiplicação (HARTNETT, 2007) e baseia-se no estabelecimento de relações de dobro e de metade entre os fatores de um mesmo produto. Esta estratégia encontra-se ilustrada num extrato alusivo a uma transcrição de um diálogo entre alunos de uma turma de 4.º ano, numa aula de Matemática de um estágio desenvolvido no âmbito do Mestrado em Educação Pré-escolar e Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico.

R. R.: E agora, quem sabe responder muito depressa a 12×3 ?

Iu. N.: Humm... acho que consigo! – E diz rapidamente – $3 \times 11 = 33$; $3 \times 12 = 36$.

R. R.: Boa! Por acaso foste rápido, mas eu estava a pensar noutra coisa... Ninguém sabe?

E. S.: Então, $12 \times 2 = 24$; $12 \times 3 = (24 + 12) = 36$!

R. R.: Está bem, mas ainda há outra maneira... (Fez-se silêncio, ninguém pôs o dedo no ar, fiz-lhe sinal para continuar.) Olhem, podemos fazer metades e dobros... 12×3 é igual a 6 (que é metade de 12) vezes 6 (que é o dobro de 3). Tiramos de um lado e pomos do outro lado e 6×6 é fácil de fazer!

F. E.: Sim... 6×6 é 36, porque $6 \times 5 = 30$. (CAVALHEIRO, 2012, p. 65)

O aluno R.R. transformou 12×3 em 6×6 (facto básico memorizado) aplicando a metade num fator e o dobro no outro fator, revelando, assim, compreender que o produto se mantém inalterável. Nesse extrato, surgem diferentes estratégias para o mesmo cálculo proposto pelo aluno R.R., o que contribui para a consciencialização pelos alunos da existência de múltiplas estratégias, aspeto importante do componente do sentido de número alusivo à aplicação do conhecimento e da destreza com os números e as operações, em situações de cálculo. Vários alunos usam a iteração como estratégia, partindo de factos básicos memorizados: um dos alunos adiciona 3, partindo de $3 \times 11 = 33$ (verbalizando 3×12 que resulta da sua aplicação da propriedade comutativa); outro adiciona 12, partindo de $12 \times 2 = 24$.

Com base na estratégia de dobros e metades é possível propor aos alunos cadeias de cálculo (FOSNOT; DOLK, 2001) que favorecem a apropriação deste tipo de relações, tal como se exemplifica a seguir.

$$2 \times 24 =$$

$$4 \times 24 =$$

$$2 \times 48 =$$

$$8 \times 12 =$$

$$16 \times 6 =$$

$$32 \times 3 =$$

Uma cadeia de cálculo caracteriza-se por apresentar um conjunto de tarefas relacionadas entre si, visando evidenciar determinadas estratégias de cálculo associadas a propriedades das operações. Assim, cada cadeia é construída tendo como base relações numéricas que se estabelecem a partir do cálculo realizado na(s) linha(s) anterior(es) da cadeia. A exploração, na sala de aula, deste tipo de cadeias pode ser feita oralmente durante um período curto de tempo. O professor pode apresentar cada uma das linhas,

uma a uma, dando tempo para os alunos explicitarem as suas estratégias, que vão sendo registadas no quadro. É importante que ele, durante a partilha das estratégias, enfatize as relações numéricas envolvidas na cadeia.

Exemplificando agora o uso de estratégias aditivas de decomposição envolvendo representações não canónicas, um aluno do 1.º ano (MORAIS, 2011), ao calcular $18 + 7$ (Figura 8), decompôs o 7 de modo a poder operar com o 20, múltiplo de 10.

Handwritten student work showing the strategy of non-decimal decomposition for $18 + 7$. The student writes $18 + 2 = 20$ and $20 + 5 = 25$. Below this, they show $5 + 2 = 7$ and $18 + 7 = 25$. Arrows connect the 2 in the first equation to the 2 in the second, and the 5 in the second to the 5 in the third. A note on the right says "isto era para o ATENÇÃO".

Figura 8 – Estratégia da decomposição não decimal

Fonte: Morais (2011, p. 95).

Assim, à primeira parcela (18), o aluno adicionou uma parte da segunda parcela (2) para obter um múltiplo de 10, adicionando depois a outra parte (5). O aluno revela dominar a estrutura do 5 presente no número 7 ($5 + 2$), tirando partido desse conhecimento para facilitar o cálculo com um múltiplo de 10.

A estratégia da compensação, em particular, é uma estratégia que emerge da forma como os alunos reparam nos números e estabelecem relações a partir de factos básicos memorizados. Por exemplo, um aluno de 1.º ano consegue determinar que $22 - 10$ “é 12, pois aqui (aponta para o 22, comparando com $20 - 10$) é mais 2” (SERRAZINA; RODRIGUES, 2014, p. 269). O aluno recorre ao mesmo facto básico $20 - 10 = 10$ para justificar que $19 - 10$ “é 9, pois é menos 1” (p. 269).

As estratégias, atrás exemplificadas, foram aplicadas em números naturais, funcionando também com os números fracionários. O estudo de Carrapiço (2015) incide, em particular, no cálculo mental com números racionais, sugerindo algumas estratégias específicas quando se alarga o estudo das operações a este conjunto numérico. A autora aponta a mudança de representação como sendo uma estratégia particularmente adequada ao cálculo mental com números racionais. Por exemplo, para determinar o

termo em falta em $2,2 - ? = \frac{1}{5}$, um aluno do 6.º ano explicitou o seu raciocínio do seguinte modo: “Coloquei 2. Porque $\frac{1}{5}$ é 2 décimos. Está lá 2 unidades e 2 décimas. Então, se eu tirar as 2 unidades, fica 2 décimos que fica $\frac{1}{5}$ ” (CARRAPIÇO, 2015, p. 281). Assim, o aluno mudou a representação em fração para a decimal, partindo do conhecimento do facto básico de que $\frac{1}{5} = 0,2$ e revelando flexibilidade na forma como opta pelo número a mudar de representação.

Em síntese, é importante que os alunos desenvolvam uma teia de relações numéricas. Desenvolver o sentido de número passa, pois, por desenvolver a proficiência no cálculo mental flexível suportado por uma compreensão relacional dos números e das operações. Para tal, é fundamental a valorização pelo professor da partilha de estratégias diversificadas e da discussão focada no estabelecimento de relações numéricas para que as diferentes estratégias sejam explicitadas e discutidas do ponto de vista da sua eficácia, proporcionando, assim, uma progressiva apropriação pelos alunos das estratégias uns dos outros com o consequente aumento do reportório pessoal de estratégias. Daí a pertinência em enfatizar esta dimensão na formação dos futuros docentes do Ensino Básico.

IMPLICAÇÕES NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES

A formação inicial, considerada como uma primeira etapa da formação, deve ser complementada ao longo da vida profissional com novas formações, encaradas numa perspetiva de desenvolvimento profissional, considerando que o professor possui um conhecimento profissional específico, multifacetado, que desenvolve continuamente ao longo do tempo, em diálogo com as experiências diversas que vai vivendo, nomeadamente no contexto concreto das escolas em que leciona e com as turmas que vai encontrando. O futuro professor/professor precisa de ter um conhecimento profundo da Matemática que ensina, não apenas o “saber-fazer”, mas o ser capaz de apresentar explicações do porquê fazer, de analisar e compreender estratégias e soluções diferentes e de julgar a sua adequação (BALL; BASS, 2003).

Para que os professores promovam o desenvolvimento do sentido do número dos seus alunos, como explicitado antes, é necessário que durante a sua formação sejam confrontados com situações concretas nas quais o sentido do número está explícito, experimentem diferentes estratégias e analisem diferentes situações, preferencialmente trabalhos realizados por alunos. Deste modo, podem vir a desenvolver o seu próprio sentido do número como apresentado por McIntosh et al. (1992). Acresce que os candidatos a professores têm normalmente uma ideia muito redutora do trabalho a desenvolver com os números, muito ligado aos factos básicos e ao treino dos algoritmos das operações, a que não é alheia a sua própria experiência enquanto estudantes de Matemática ao longo dos anos de escolaridade anterior (MAAB; SCHLÖGLMANN, 2009). Daí que seja fundamental promover experiências significativas neste âmbito na sua formação inicial.

Uma das práticas promovida na ESELx, num conjunto alargado de Unidades Curriculares do domínio de Matemática, é a implementação de uma rotina de cálculo mental, aplicada no início de todas as aulas. Esta rotina consiste na distribuição pelos estudantes, futuros docentes, de uma “tira”¹ com expressões de cálculo que é resolvida individualmente durante um minuto, a que se segue a discussão oral em grande grupo das estratégias usadas. Esta rotina vivida pelos futuros docentes, enquanto estudantes na Licenciatura em Educação Básica, tem implicações ao nível do desenvolvimento da sua capacidade de calcular mentalmente, através da aplicação de estratégias diversificadas, que passam a ser dominadas de forma consciente e a ser usadas de modo fluente. Tem também implicações ao nível dos estágios, verificando-se uma transposição desta prática nos diversos contextos de estágio dos 1.º e 2.º ciclos do ensino básico. Assim, a maioria dos estudantes implementa, posteriormente, a rotina de cálculo mental nas turmas em que desenvolve a sua *Prática de Ensino Supervisionada* nos mesmos moldes em que a viveu nas referidas Unidades Curriculares, com aplicação de tiras de cálculo mental, seguida de discussão em grupo-turma. Esta transposição direta de uma experiência vivida, na formação inicial, de forma significativa e com sistematicidade, apoia a ideia da importância de os futuros docentes serem confrontados com experiências de aprendizagem consistentes com as recomendações curriculares para a educação matemática (PONTE; CHAPMAN, 2008), de modo a virem implementá-las nas suas práticas docentes futuras.

¹ Um conjunto de expressões para calcular, impressas numa tira de papel.

Nas aulas de Didática da Matemática na ESELx, procura-se o aprofundamento do conhecimento didático, aliando a análise teórica de textos com tarefas práticas de análise de produções de alunos dos primeiros anos, análise de episódios em vídeos e, também, de planificação de sequências didáticas. Considerando a relevância que a planificação assume nas práticas docentes (CLARK; PETERSON, 1986; O'DONNELL; TAYLOR, 2007; SUPERFINE, 2008; SERRAZINA, a publicar), esta é uma vertente a que se dá uma especial atenção nas aulas, visando, na sua elaboração, que os futuros docentes selecionem tarefas com potencial de desafio cognitivo (STEIN; SMITH, 1998), explicitem os respetivos objetivos de aprendizagem, as sequenciem, de acordo com uma dada trajetória hipotética de aprendizagem (SERRAZINA; OLIVEIRA, 2010) num tópico matemático específico, e além de preverem a dinâmica das aulas planificadas, antecipem, também, possíveis resoluções corretas e incorretas de alunos. Esta antecipação facilita a gestão das aulas, quer na fase de monitorização do trabalho autónomo dos alunos, permitindo ao docente estar mais desperto para os possíveis seus raciocínios e, assim, colocar questões focadas em dificuldades ou em aspetos relevantes associados às tarefas, quer na fase de discussão em grupo-turma (STEIN; ENGLE; SMITH; HUGHES, 2008), ajudando a tomar decisões num curto espaço de tempo relativamente à forma de selecionar e sequenciar as apresentações das resoluções dos alunos. As planificações elaboradas em Didática da Matemática são hipotéticas porque não têm como referência uma turma concreta de alunos, mas constituem um ensaio importante para a elaboração futura de planificações detalhadas já em contexto de estágio.

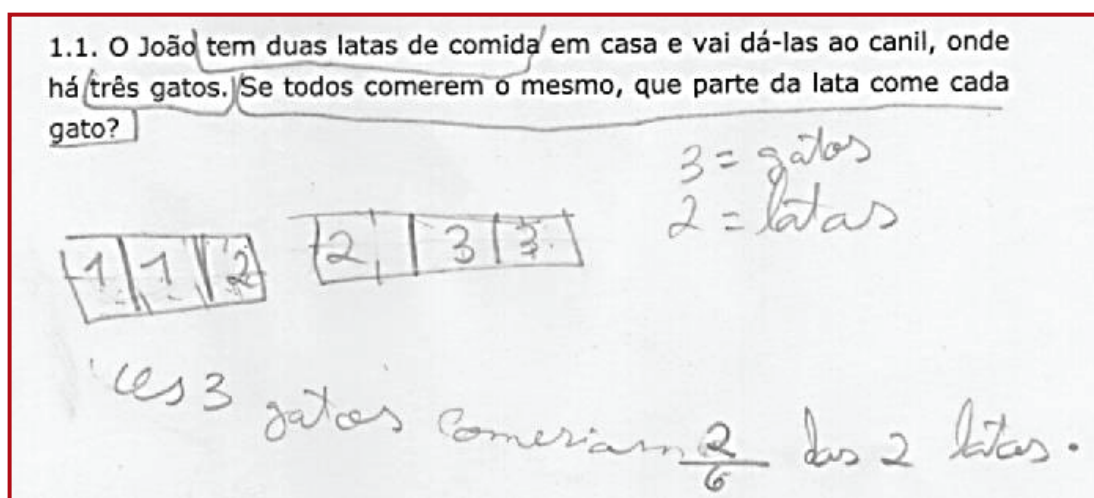


Figura 9 – Exemplo de resposta de uma aluna de 4.º ano

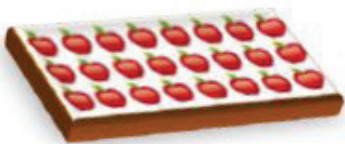
Fonte: arquivo das autoras.

Apresentam-se, em seguida, extratos de planificações elaboradas em Didática da Matemática dos cursos de mestrado profissionalizante em ensino do 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico. No primeiro caso, a planificação² aborda uma sequência didática nos números racionais e contempla, além da antecipação de possíveis resoluções, a análise de respostas concretas de alunos (Figura 9) a quem as estudantes aplicaram algumas das tarefas.

As estudantes, ao apresentarem este exemplo de resposta, evidenciam compreender a razão subjacente ao erro, afirmando que ele se deve “à incompreensão da unidade (uma lata de comida de gato) [...], embora a partilha equitativa já esteja a ser realizada corretamente”. A sua interpretação revela, ainda, consciência da importância da compreensão conceptual da unidade de referência na aprendizagem dos números racionais.

No segundo caso, a planificação³ aborda a estrutura multiplicativa com números naturais e a antecipação das resoluções de alunos incide numa tarefa retirada de Mendes, Oliveira e Brocardo (2011). Apresenta-se parte da antecipação realizada pelas estudantes de resoluções de alunos relativa a uma subtarefa apresentada na Figura 10.

2. À Merceria da Piedade chegaram caixas de 24 maçãs cada, embaladas como mostra a imagem.



2.1. As 25 caixas que chegaram foram arrumadas em pilhas como é indicado na figura ao lado. No total das caixas, quantas maçãs há?

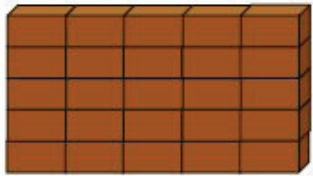


Figura 10 – Subtarefa

Fonte: retirada de Mendes, Oliveira e Brocardo (2011).

² In trabalho realizado em 2016 por Ana Isabel Silva, Bernadete Silva, Daniela Branco e Joana Letras.

³ In trabalho realizado em 2016 por Ana Marques, Ana Rodrigues, Cláudia Baixinho e Daniela Vieira.

Entre as diversas estratégias corretas antecipadas de resolução da subtarefa, incluem-se:

- “**Decomposição, multiplicação e adição**”

Número de caixas	Número de caixas x 24	Total
1	1 x 24	24
5	5 x 24	120
10	10 x 24	240

Recorrendo à decomposição de um dos fatores e à adição (...):

$$25 \text{ caixas} = 10 + 10 + 5$$

$$\text{Ou seja, } 240 + 240 + 120 = 600 \text{ maçãs}$$

- **Dobro:** o aluno identifica que 1 caixa tem 24 maçãs e 5 caixas têm 120 maçãs ($5 \times 24 = 120$). Se 10 é o dobro de 5, então $120 \times 2 = 240$ maçãs. E se 20 é o dobro de 10, $240 \times 2 = 480$ maçãs. Logo, recorrendo à adição, chega às seguintes conclusões:

$$20 + 5 = 25 \text{ caixas}$$

$$480 + 120 = 600 \text{ maçãs}$$

- **Decomposição de um dos fatores e compensação com múltiplos de 5:** o aluno identifica que 1 caixa tem 24 maçãs. Para simplificar o cálculo, supõe que cada caixa tem 25 maçãs e, no final, retirará 1 maçã por cada uma das 25 caixas. Através dos múltiplos de 5, o aluno descobriu que:

Número de caixas	Número de caixas x 24	Total
5	5 x 25	125
10	10 x 25	250

Uma vez que são 25 caixas, o aluno procede à seguinte decomposição e adição:

$$25 \text{ caixas} = 5 + 10 + 10$$

$$125 + 250 + 250 = 625 \text{ maçãs}$$

É necessário subtrair a maçã que está a mais em cada uma das caixas, por isso o aluno faz a seguinte operação:

$$625 - 25 = 600 \text{ maçãs}.$$

A diversidade de estratégias apresentada pelas estudantes (futuras professoras), da qual se transcreveu aqui uma parte, revela a capacidade de prever diferentes resoluções, capacidade esta importante no que respeita à prática docente de dinamização das aulas de Matemática. É de registar que, embora tratando-se de diferentes estratégias, todas as incluídas no extrato acima se baseiam numa mesma propriedade: distributiva da multiplicação em relação à adição e à subtração.

Assim, os professores, durante a sua formação, devem ser envolvidos em situações que lhes permitam vivenciar aspetos essenciais da sua futura prática de ensino, mas que façam sentido, isto é, sejam significativas (HIEBERT et al., 2003) e correspondam a aspetos chave do currículo de Matemática. Ora, um dos desafios que se colocam hoje aos professores dos anos iniciais é o de promover nos seus alunos o desenvolvimento do sentido do número, na perspetiva defendida por Macintosh et al (1992). Para que o possam fazer de modo eficiente, eles próprios têm de ter vivenciado aulas visando esse objetivo, que, muitas vezes não aconteceu na sua escolaridade anterior, e, por isso, deve acontecer durante a sua formação. Para além disso, a observação e discussão de produções dos alunos, de modo a analisarem as estratégias envolvidas bem como os erros cometidos, pode ser uma atividade rica e promissora que exige um domínio dos conhecimentos relativos a números e operações. Desta forma, os futuros professores vão aprofundando tanto o seu conhecimento matemático como o didático.

REFERÊNCIAS

ABRANTES, P.; SERRAZINA, L.; OLIVEIRA, I. *A Matemática na Educação Básica*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica. 1999.

BALL, D.; BASS, H. Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. In: DAVIS, B.; SIMMT, E. (Eds.). *Proceedings of 2002 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group*. Edmonton, AB: CMESG/GCEDM. 2003. p. 3-14.

BARNETT-CLARKE, C.; FISHER, W.; MARKS, R.; ROSS, S. *Developing Essential Understanding: Rational Numbers, Grades 3-5*. Reston, Va: NCTM. 2011.

BORKO, H.; EISENHART, M.; BROWN, C. A.; UNDERHILL, R. G.; JONES, D.; AGARD, P. C. Learning to teach hard Mathematics: Do novice teachers and their instruction give up too easily? *Journal for Research in Mathematics Education*, v. 23, n. 3, p. 194-222, 1992.

BROCARD, J. *Exploring flexibility in mental calculation in the domain of multiplicative reasoning*. Paper presented in ECER, Porto, Portugal. 2014.

BROCARD, J.; SERRAZINA, L. O sentido de número no currículo de Matemática. In: BROCARD, J.; SERRAZINA, L.; ROCHA, I. (Eds.), *O sentido do número: reflexões que entrecruzam teoria e prática*. Lisboa: Escolar Editora, 2008. p. 97-115.

BUYS, K. Mental arithmetic. In: HEUVEL-PANHUIZEN, M. (Ed.). *Children Learn Mathematics: a learning-teaching trajectory with intermediate attainment targets for calculation with whole numbers in primary school*. Netherlands: Freudenthal Institute (FI) Utrecht University and National Institute for Curriculum Development (SLO). 2001. p. 121-146.

CARRAPIÇO, R. A. C. *Cálculo mental com números racionais: um estudo com alunos do 6.º ano de escolaridade*. 2015, 530f. Tese (Doutorado em Educação – Didática da matemática). Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Lisboa. 2015.

CAVALHEIRO, A. *O contributo das TIC para a aprendizagem da multiplicação*. 2012. 84f. Dissertação (Mestrado em Educação Pré-escolar e Ensino). Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal, Setúbal. 2012.

CLARK, C. M.; PETERSON, P. P. In: WITTROCK, M. (Ed.). *Handbook of Research on Teaching*. New York, NY: Macmillan. 1986. p. 255-296.

CUSI, A., MALARA, N. Approaching early algebra: Teachers' educational processes and classroom experiences. *Quadrante*, v. 16, n. 1, p. 57-80, 2007.

EBBY, C. B. Learning to teach Mathematics differently: The interaction between coursework and fieldwork for pre-service teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, v. 3, n. 1, p. 69-97, 2000.

FOSNOT, C.; DOLK, M. *Young mathematicians at work: constructing multiplication and division*. Portsmouth: Heinemann, 2001.

FOSNOT, C. T.; DOLK, M. *Young mathematicians at work: constructing multiplication and division*. Portsmouth: Heinemann, 2002.

HARTNETT, J. Categorisation of mental computation strategies to support teaching and to encourage classroom dialogue. In: WATSON, J.; BESWICK, K. (Ed.), *Mathematics: Essential Research, Essential Practice. Proceedings of the thirtieth annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*. (MERGA-30). Hobart: MERGA, 2007. p. 345-352.

HIEBERT, J.; MORRIS, A. K.; GLASS, B. Learning to learn to teach: An “experiment” model for teaching and teacher preparation in mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, v. 6, n. 3, p. 201-222, 2003.

KEMMIS, S.; SMITH, T. J. *Enabling praxis: Challenges for education*. Rotterdam: Sense Publishers, 2008.

KILPATRICK, J.; SWAFFORD, J.; FINDELL, B. *Adding it up: helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press, 2001.

MAAB, J.; SCHLÖGLMANN, W. *Beliefs and attitudes in mathematics education: new research results*. Rotterdam: Sense Publishers, 2009.

MACINTOSH, A.; REYS, B. J.; REYS, R. E. A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics*, v. 12, n. 3, p. 2-8, 1992.

MENDES, F.; OLIVEIRA, H.; BROCARD, J. As potencialidades de sequências de tarefas na aprendizagem da multiplicação. In: HENRIQUES, A.; NUNES, C.; SILVESTRE, A.; JACINTO, H.; PINTO, H.; CASEIRO, A.; PONTE, J. P. (Eds.), *Atas do XXII Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Lisboa: APM, 2011. p. 337-352.

MONTEIRO, C.; PINTO, H. A aprendizagem dos números racionais. *Quadrante*, v. 14, n. 1, p. 89-107, 2005.

MORAIS, C. *O cálculo mental na resolução de problemas*: um estudo no 1.º ano de escolaridade. 2011, 198f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa, Lisboa. 2011. Disponível em: <<https://repositorio.ipl.pt/bitstream/10400.21/1211/1/O%20c%C3%A1lculo%20mental%20na%20resolu%C3%A7%C3%A3o%20de%20problemas.pdf>>.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, Va: NCTM, 2000.

O'DONNELL, B.; TAYLOR, A. A Lesson Plan as Professional Development? You've got to be kidding! *Teaching Children Mathematics*, v. 13, n. 5, p. 272-278. 2007.

PINTO, H. *O desenvolvimento do sentido da multiplicação e da divisão de números racionais*. 2011, 569f. Tese (Doutorado em Educação – Didática da Matemática) – Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Lisboa. 2011. Disponível em: <file:///D:/Downloads/ulsd061430_td_Helia_Pinto.pdf>.

PINTO, H.; RIBEIRO, C. M. Conhecimento e formação de futuros professores dos primeiros anos: O sentido de número racional. *Da Investigação às Práticas: Estudos de Natureza Educacional*, v. 3, n. 1, p. 80-99, 2011.

PITKETHLY, A.; HUNTING, R. A review of recent research in the area of initial fraction concepts. *Educational Studies in Mathematics*, v. 30, p. 5-38, 1996.

PONTE, J. P. Gestão curricular em Matemática. In: GTI (Ed.). *O professor e o desenvolvimento curricular*. Lisboa: APM, 2005. p. 11-34.

PONTE, J. P.; CHAPMAN, O. Preservice mathematics teachers' knowledge and development. In: ENGLISH, L. (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education*. New York: Routledge, 2008. p. 225-263.

RAMOS, V. *Prática de Ensino Supervisionada no 1º Ciclo do Ensino Básico*: As dimensões individual e coletiva no ensino exploratório da matemática. 2016. (Dissertação de mestrado não publicada) – Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa, Lisboa, 2016.

SERRAZINA, L.; OLIVEIRA, I. Trajectórias de aprendizagem e ensinar para a compreensão. In: GTI (Org.). *O professor e o Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: APM, 2010. p. 43-59.

SERRAZINA, L.; RODRIGUES, M. Cálculo flexível e o raciocínio quantitativo aditivo em alunos dos 1.º e 2.º anos. In: MARTINHO, M. H.; TOMÁS FERREIRA, R. A.; BOAVIDA, A. M.; MENEZES, L. (Eds.). *Atas do XXV Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Braga: Associação de Professores de Matemática. 2014. p. 263-279.

SERRAZINA, L. Planificação do ensino e aprendizagem da Matemática. In: GTI (org.), *A prática dos professores: planificação e discussão em sala de aula*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática (no prelo).

SFARD, A. On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics Education*, v. 22, p. 1-36, 1991.

STEIN, M. K.; SMITH, M. S. Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, v. 3, n. 4, p. 268-275, 1997.

STEIN, M. K.; ENGLE, R. A.; SMITH, M. S.; HUGHES, E. K. Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, v. 10, n. 4, p. 313-340, 2008.

SUPERFINE, A. C. Planning for mathematics instruction: A Model of experienced Teachers' planning processes in the context of a reform mathematics curriculum. *The Mathematics Educator*, v. 18, n. 2, p. 11-22, 2008.

TALL, D. *How humans learn to think mathematically: Exploring the three worlds of mathematics* (Learning in doing: social, cognitive and computational perspectives). Cambridge: Cambridge University Press, 2013.

TEIXEIRA, R. *Prática de Ensino Supervisionada no 1º e 2º Ciclo do Ensino Básico – Cálculo mental: um estudo sobre as estratégias utilizadas por alunos do 1º e do 2º Ciclo do Ensino Básico*. 2014, 91f. Dissertação (Mestrado em Ensino do 1º e 2º Ciclo do Ensino Básico) – Instituto Politécnico de Lisboa, Escola Superior de Educação, Lisboa,

2014. Disponível em: <file:///D:/Downloads/Relat%C3%B3rio-de-Est%C3%A1gio_ESELX_2016-Meu-1%20formatado.pdf>.

TEIXEIRA, R.; RODRIGUES, M. Evolução de estratégias de cálculo mental: Um estudo no 3.º ano de escolaridade. In: PEREIRA, A.; VASCONCELOS, A.; DELGADO, C.; SILVA, C. G.; PINTO, J.; DUARTE, J.; RODRIGUES, M.; ALVES, M. (Eds.). *Entre a Teoria, os Dados e o Conhecimento (III): investigar práticas em contexto*. Setúbal: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal, 2015. p. 249-267.

THOMPSON, I. Getting your head around mental calculation. In: THOMPSON, I. (Ed.). *Issues in Teaching Numeracy in Primary Schools*. Maidenhead: Open University Press, 1999.

THRELFALL, J. Strategies and flexibility in mental calculation. *ZDM Mathematics Education*, v. 41, p. 541-555, 2009.