



Instituto Politécnico de Lisboa
Escola Superior de Educação



**O desenvolvimento do conceito de área:
um estudo com alunos do 3.º ano de
escolaridade**

**Dissertação apresentada para obtenção do grau de Mestre em Educação
Matemática na Educação Pré-Escolar e no 1.º e 2.º Ciclos do Ensino
Básico**

Sílvia Baptista Caçador

2012



Instituto Politécnico de Lisboa
Escola Superior de Educação



O desenvolvimento do conceito de área: um estudo com alunos do 3.º ano de escolaridade

**Dissertação apresentada para obtenção do grau de Mestre em Educação
Matemática na Educação Pré-Escolar e no 1.º e 2.º Ciclos do Ensino
Básico**

Orientadora Professora Doutora Maria de Lurdes Serrazina
Co-orientadora Professora Doutora Cristina Loureiro

Sílvia Baptista Caçador

2012

Agradecimentos

Às minhas orientadoras, pela disponibilidade, pelas suas críticas e dedicação,

Aos meus alunos, que participaram no estudo com o seu empenho e energia habituais,

À instituição onde desenvolvi a investigação,

Aos meus pais, que me apoiaram nesta etapa e não me deixaram desistir,

E aos meus amigos e companheiros de reflexões infinitas, que me incentivaram sempre a continuar...

Resumo

O objetivo desta investigação é compreender como é que alunos do 3.º ano de escolaridade desenvolvem o conceito de área com ênfase em conhecimentos sobre figuras e propriedades geométricas.

Para melhor objetivar o estudo, formulei três questões que orientaram a investigação. Pretendo (1) compreender como é que os alunos mobilizam conhecimentos sobre as propriedades das figuras geométricas no estudo da área de uma figura plana? A que estratégias recorrem? Que dificuldades sentem? (2) que compreensão é que os alunos têm sobre o processo de medição? e (3) que ideias e/ou experiências são relevantes no desenvolvimento do conceito de área?

Este é um estudo que se insere no paradigma interpretativo e que segue uma abordagem qualitativa, pelo que não visa generalização de resultados, mas uma descrição compreensiva dos processos vivenciados, tendo em conta os contextos pessoais e sociais. Optei por realizar dois Estudos de Caso.

Os dados foram recolhidos através de fontes diversificadas, donde se destacam a observação participante e a análise de registos audiovisuais e escritos dos alunos. A análise dos dados teve por referência categorias criadas com base em contributos da literatura de referência.

As conclusões desta investigação centram-se numa análise acerca das estratégias a que os alunos em estudo tendencialmente mais recorrem, visando também algumas das suas dificuldades mais relevantes e sobre as quais importa refletir. Destaca-se que ambos os alunos foram capazes de recorrer a raciocínios baseados e não baseados na medida, embora seja evidente uma tendência para raciocínios baseados na medida. É igualmente importante referir que os dois alunos revelaram um bom conhecimento acerca do processo de medição, mesmo quando ele implicava a definição de uma unidade de medida adequada e/ou mudança de unidade. É dado, também, destaque às experiências matemáticas que devem ser proporcionadas aos alunos no sentido do desenvolvimento de um conhecimento amplo e flexível do conceito de área.

Palavras-chave: medida; geometria; área; raciocínio geométrico; decomposição de figuras.

Abstract

The purpose of this investigation is to understand the development of 3rd year students' concept of area based on their knowledge of geometrical properties and figures.

As means to orientate the present study, the following investigation questions were formulated: 1) how do students use their knowledge about geometrical properties in order to understand geometrical shape's areas? Which strategies do they use? What do they struggle with? (2) What is their understanding about measurement? And (3) what are the most relevant mathematical reasonings and classroom tasks in the development of the concept of area?

This is a study that follows a qualitative approach: it does not intend to be a generalization, but a fully comprehensive description of the witnessed learning processes, bearing in mind the social and personal contexts. As such, two study-cases were developed.

The data were collected through various sources, such as direct observation and analysis of audiovisual records or written worksheets. The scrutiny of the generated data was undertaken following criteria based on the literature of reference.

The conclusions of this investigation are centered on the most used strategies as well as the students' difficulties upon which it is important to discuss. It was noticed that the two students were able to use both measurement and non measurement thinking – although, preferably, they tend to use the first one. On the other hand, it is equally demonstrated that the two students have shown good acquaintance about measurement, even if obliged to the establishment of a suitable unit of measurement and/or change of units. At last, it is also referred which mathematical classroom tasks are important to develop a sustained and comprehensive concept of area.

Key words: measurement; geometry; area; geometrical thinking; decomposing figures.

Índice Geral

| | |
|---|----|
| Introdução | 1 |
| Pertinência do estudo e motivação pessoal | 1 |
| Definição do objetivo e questões de investigação do estudo | 3 |
| Organização do trabalho | 3 |
| Enquadramento Teórico | 5 |
| 1. Medida: desenvolvimento do conceito de área | 5 |
| 1.1. Perspetivas curriculares – documentos nacionais e internacionais | 5 |
| 1.2. Perspetivas teóricas | 9 |
| 2. A área como grandeza geométrica: conceitos fundamentais | 12 |
| 3. Desenvolvimento do raciocínio geométrico e espacial | 15 |
| Opções Metodológicas | 20 |
| 1. Justificação das opções metodológicas | 20 |
| 2. O professor-investigador | 23 |
| 3. Os participantes | 25 |
| 3.1 Caracterização do grupo-turma | 25 |
| 3.2 Caracterização do cenário pedagógico | 25 |
| 4. Critérios de escolha dos alunos para objeto de estudo de caso e caracterização dos alunos escolhidos | 27 |
| 5. As propostas de trabalho | 28 |
| 5.1 A elaboração dos materiais e as intenções pedagógicas | 28 |
| 6. A recolha dos dados | 30 |
| 7. A análise dos dados e a criação de categorias de análise | 32 |
| 7.1 Categorias de análise | 33 |
| O Desenvolvimento das Tarefas | 34 |
| Estudo de Caso: Vicente | 34 |
| Síntese do percurso do caso Vicente | 62 |
| Estudo de Caso: Alice | 64 |
| Síntese do percurso do caso Alice | 84 |
| Conclusões | 86 |
| Síntese do Estudo | 86 |
| Conclusões | 87 |

| | |
|---|-----|
| Limitações e recomendações | 95 |
| Uma reflexão sobre o meu papel como professora-investigadora..... | 97 |
| Referências Bibliográficas | 98 |
| Anexos | 100 |

Índice de Figuras

| | |
|---|----|
| Figura 1 e figura 2 – Registos escrito do Vicente..... | 35 |
| Figura 4 – Estratégia do Vicente para a figura A (composição final) | 36 |
| Figura 3 – Estratégia do Vicente para figura A | 36 |
| Figura 6 – Sugestão de decomposição do trapézio..... | 37 |
| Figura 5 – Estratégia pouco rigorosa do Vicente | 37 |
| Figuras 7, 8 e 9 – Tentativas do Vicente | 37 |
| Figura 10 – Posição de referência encontrada pelo Vicente..... | 38 |
| Figura 11 – Tentativas do Vicente para a figura B..... | 38 |
| Figura 12 – Estratégia final para a figura B..... | 38 |
| Figura 13 – Quadrados construídos pelo Vicente e agrupamento dessas figuras segundo o critério área | 39 |
| Figura 14 – Estratégia do Vicente para medir a área das figuras construídas com as peças de <i>Tangram</i> | 41 |
| Figura 15 – Construção do triângulo com as sete peças do <i>Tangram</i> | 43 |
| Figura 16 – Registos do Vicente | 45 |
| Figura 17 – Registos escritos do Vicente. | 48 |
| Figura 18 e 19 – Sequência de construção do retângulo com 8 unidades de área..... | 49 |
| Figura 20 – Tentativa de construção de um triângulo com uma unidade e meia de área. | 50 |
| Figura 21 e 22 – Sugestão de estratégia de construção do triângulo com duas unidades de área (sequência) | 50 |
| Figura 23 – Contagens unitárias realizadas pelo Vicente na construção de um triângulo com quatro unidades de área | 52 |
| Figura 24 – Outra construção possível de um quadrado com quatro unidades de área.. | 52 |
| Figura 25 – Quadrado com oito unidades de área | 53 |
| Figura 26 – Construção que suscitou dúvidas ao Vicente..... | 54 |
| Figura 27 – Diferentes tentativas do Vicente (sequência)..... | 55 |
| Figura 28 – Alguns erros de visualização durante a construção do quadrado (sequência) | 56 |
| Figura 29 – Construção no Geoplano de um quadrado com cinco unidades de área, passo a passo..... | 57 |

| | |
|--|----|
| Figura 30 – Pavimentação da figura com peças do material Blocos Padrão..... | 58 |
| Figura 31 – Resposta escrita do Vicente | 58 |
| Figura 32 – Primeira medida da área da figura A..... | 59 |
| Figura 33 – Detalhe da composição feita com o material Blocos Padrão | 60 |
| Figura 34 – Comparação da unidade de medida com os losangos beje | 60 |
| Figura 35 – Registo escrito do aluno..... | 61 |
| Figura 36 – Registo escrito da aluna. | 65 |
| Figura 37 – Estratégia inicial da Alice para a figura B | 65 |
| Figura 38 e 39 – Estratégia de construção do losango da Alice (sequência)..... | 66 |
| Figura 40 e 41 – Estratégia da Alice para a figura A | 66 |
| Figura 42 – Registo dos quadrados construídos com as peças do <i>Tangram</i> | 67 |
| Figura 43 – Medição da área das figuras construídas considerando o triângulo mais pequeno como unidade. | 68 |
| Figura 44 – Esquema da estratégia usada pela Alice..... | 69 |
| Figura 45 – Medição da área dos quadrados construídos com as peças do <i>Tangram</i> | 69 |
| Figura 46 – Esquema que evidencia a comparação das diferentes unidades de medida | 70 |
| Figura 47 – Registo das figuras construídas pela Alice..... | 71 |
| Figura 48 – Registo escrito da aluna | 72 |
| Figura 49 – Triângulo com meia unidade de área | 73 |
| Figura 50 – Tentativa da Alice | 74 |
| Figura 51 – Figura construída por mim no Geoplano | 75 |
| Figura 52 – Construção a que a Alice chegou | 76 |
| Figura 53 – Figura construída por mim no Geoplano | 77 |
| Figura 54 – Tentativa da Alice | 77 |
| Figura 55 – Construção da Alice | 78 |
| Figura 56 – Construção da Alice | 79 |
| Figura 57 – Dificuldade sentida pela aluna para construir um quadrado com duas unidades de área..... | 79 |
| Figura 58 – Construção do quadrado com duas unidades de área..... | 80 |
| Figura 59 – Pavimentação das figuras com as peças dos Bloco Padrão..... | 81 |
| Figura 60 – Registo da aluna | 82 |
| Figura 61 – Registo escrito da aluna | 82 |
| Figura 62 - Pavimentação das figuras com as peças dos Bloco Padrão | 83 |

Introdução

Pertinência do estudo e motivação pessoal

Socialmente, a Matemática ainda é encarada como a disciplina dos números e das contas?

Como são encaradas a Geometria e a Medida enquanto temas matemáticos e como são trabalhados em sala de aula junto dos alunos?

Estas questões são inquietações pedagógicas pessoais, que se têm imposto desde o início da minha carreira profissional, e que despertaram em mim o interesse de querer debruçar-me sobre uma área da Matemática que – e analisando o Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB) em vigor – surge como um tema forte e ao qual é dado destaque, mesmo quando comparado com o dos Números e Operações.

De facto, alguns estudos internacionais e nacionais vêm apontando os fracos resultados dos alunos portugueses (TIMS; PISA; GAVE e outros relatórios da DGIDC que avaliaram o desempenho dos alunos nas Provas de Aferição de Matemática).

Por exemplo, o relatório da DGIDC relativo ao desempenho dos alunos nas Provas de Aferição de Matemática realizadas entre 2004 e 2007 assinala que a Geometria e Medida está entre as áreas em que se verificaram piores resultados e em que os alunos têm maiores dificuldades.

Tais resultados encontram fundamento nas palavras de Ponte e Serrazina (2000:165) que referem que “Até há poucos anos era dada pouca importância à Geometria no 1º ciclo da educação básica. Os alunos limitavam-se a aprender um conjunto limitado de definições, regras e procedimentos.”

Relativamente à Medida, o trabalho com os alunos em sala de aula parece muitas vezes materializar-se em abordagens pobres e/ou mecanicistas, muito limitadas ao uso desprovido de compreensão de fórmulas e que apostam pouco na manipulação e experimentação pelos alunos.

“Many children use measurement instruments or count units in a rote fashion and apply formulas to attain answers without meaning.” (Clements e Battista, 1992 – autores citados por Sarama e Clements, 2009, p.273)

O propósito principal de ensino deste tema matemático deve ser, de acordo com o PMEB:

“Desenvolver nos alunos o sentido espacial, com ênfase na visualização e na compreensão de propriedades de figuras geométricas no plano e no espaço, a noção de grandeza e respectivos processos de medida, bem como a utilização destes conhecimentos e capacidades na resolução de problemas geométricos e de medida em contextos diversos.” (DGIDC, 2008, p.20)

Destaco, então, a importância do desenvolvimento da visualização espacial junto dos alunos enquadrada no estudo da Geometria, que aliás é uma ideia realçada por Matos e Serrazina (1996)

Refira-se também o potencial que este tema pode ter na abordagem e estabelecimento de conexões matemáticas a outros temas importantes como a Medida e os Números e, sobretudo, as ligações com o mundo real e com as vivências sensoriais das crianças, bem como com áreas como as artes, entre outras.

No âmbito desta investigação, quero destacar, sobretudo, o meu interesse em estudar as relações entre a geometria e a visualização espacial, nomeadamente no que respeita aos processos de medida da grandeza área. Para fundamentar o meu interesse, volto a invocar o PMEB, que refere – enquanto um princípio estruturante de gestão curricular que:

“...é preciso que as tarefas no seu conjunto proporcionem um percurso de aprendizagem coerente que permita aos alunos a construção dos conceitos fundamentais em jogo, a compreensão dos procedimentos matemáticos em causa, o domínio da linguagem matemática e das representações relevantes, bem como o estabelecimento de conexões dentro da Matemática e entre esta disciplina e outros domínios. Neste processo, são fundamentais os momentos de reflexão, discussão e análise crítica envolvendo os alunos, pois estes aprendem, não só a partir das actividades que realizam, mas sobretudo da reflexão que efectuam sobre essas actividades.” (DGIDC, 2008, p.12)

Definição do objetivo e questões de investigação do estudo

Com este estudo pretendo contribuir para o desenvolvimento e aprofundamento do conhecimento nesta área da didática da matemática, partindo do conhecimento decorrente de investigações prévias – com realce para o trabalho de autores como Battista, Clements, Sarama, entre outros. O meu contributo é uma análise elaborada sobre as estratégias e dificuldades dos alunos no desenvolvimento do conceito de área, tendo por base conhecimentos geométricos relevantes sobre as figuras no plano.

O objetivo desta investigação é, então, **compreender o desenvolvimento do conceito de área em alunos do 3.º ano de escolaridade, com ênfase em processos de medida baseados no conhecimento de propriedades geométricas de figuras planas.**

De modo a operacionalizar de uma forma mais objetiva este estudo foram definidas as seguintes questões de investigação:

- (1) Como é que os alunos mobilizam conhecimentos sobre as figuras e propriedades geométricas no estudo da área de uma figura plana? A que estratégias recorrem? Que dificuldades sentem?**
- (2) Que compreensão é que os alunos têm sobre o processo de medição?**
- (3) Que ideias e/ou experiências são relevantes no desenvolvimento do conceito de área?**

Organização do trabalho

Relativamente à estrutura deste documento, ele está organizado em quatro capítulos fundamentais, além da Introdução:

- Enquadramento Teórico;
- Opções Metodológicas;
- O Desenvolvimento das Tarefas;
- Conclusões e Recomendações.

No primeiro capítulo faço uma revisão da literatura de referência relativa ao tema, centrando-me sobretudo nas perspectivas curriculares e teóricas sobre o desenvolvimento do conceito de área; sobre a área como grandeza geométrica; e o desenvolvimento do raciocínio geométrico e espacial dos alunos.

No capítulo das Opções Metodológicas inicio justificando as opções metodológicas estruturais tomadas no âmbito desta investigação. Reflito sobre o papel de professor-investigador e caracterizo os participantes, num olhar sobre o grupo-turma, o cenário pedagógico, bem como os critérios que utilizei na seleção dos alunos para objeto de Estudo de Caso. Refiro-me às propostas de trabalho que desenvolvi com os alunos, realçando o processo da sua elaboração e as intenções pedagógicas que lhes estão inerentes. Neste capítulo dou ainda destaque ao processo da recolha dos dados, da sua análise dos dados, focando o processo de criação de categorias de análise.

É no capítulo relativo à ao Desenvolvimento das Tarefas que descrevo o percurso dos alunos na elaboração das tarefas e interpreto os dados relativos ao desenvolvimento do conceito de área, relativamente aos dois casos Vicente e Alice.

Por fim, no capítulo das Conclusões dou resposta às questões de investigação que orientaram este estudo, referindo ainda algumas limitações desta investigação e recomendações que me pareceram pertinentes fazer. Termina como uma reflexão sobre o meu papel como professora-investigadora.

Enquadramento Teórico

Neste capítulo faço um enquadramento teórico essencial relativo aos objetivos desta investigação, realçando as perspetivas dos autores de referência.

É tendo esta revisão de literatura como *pano de fundo* que levarei a cabo a análise e interpretação dos resultados obtidos.

Este capítulo está organizado em três grandes subtemas: desenvolvimento do conceito de área; A área como grandeza geométrica; e o Desenvolvimento do raciocínio geométrico e espacial.

1. Medida: desenvolvimento do conceito de área

A medida é um processo que está necessária e intimamente relacionado com o quotidiano e com a vida real. Se não medíssemos objetos apenas podíamos caracterizar algo usando termos como grande ou pequeno; como forte ou fraco; ou como largo ou estreito.

Talvez pela sua óbvia relação com o mundo *lá fora*, a este tema matemático é dada uma grande importância quer nos currículos atuais, quer no trabalho em sala de aula com os alunos, na prática.

Assim, começo por fazer uma análise do documento curricular atualmente em vigor em Portugal, focando-me sobretudo na forma como este conceito é referido neste documento e que estratégias são sugeridas na sua abordagem.

Referirei também alguns documentos curriculares internacionais que me parecem relevantes neste contexto.

1.1. Perspetivas curriculares – documentos nacionais e internacionais

O estudo do conceito de área é um dos tópicos fundamentais do tema *Geometria e Medida* no Programa de Matemática do Ensino Básico (2008) – à frente designado por PMEB.

Prevê-se que desde os primeiros anos – 1.º e 2.º anos de escolaridade – este conceito seja explorado junto dos alunos a partir de um vasto leque de experiências, estruturadas de modo a que os alunos, no final do ciclo, sejam capazes de compreender o processo de medida, alcançar uma compreensão flexível do conceito de área e que sejam capazes de estimar, medir – usando as unidades de medida convencionais do Sistema Internacional – comparar e resolver problemas no âmbito do estudo desta grandeza (de acordo com os Objetivos Gerais de aprendizagem referidos no PMEB, 2008).

“A resolução de problemas envolvendo grandezas e medidas em situações do dia-a-dia constitui o contexto fundamental para a aprendizagem deste tema. É a partir da exploração de situações concretas que surgem as fórmulas e os procedimentos para determinar medidas.” (PMEB, 2008, p.21)

Realço as Indicações Metodológicas (PMEB, 2008, p.21) na abordagem aos conceitos específicos deste Tema, já que estas sugerem atividades de natureza exploratória, em que sejam privilegiadas a manipulação e a experimentação por parte dos alunos e a apropriação de um vocabulário formal de forma gradual ao longo de todo o Ciclo.

Relativamente à Geometria, é evidenciada a importância de “experiências que [envolvam] a composição e decomposição de figuras, acompanhadas de descrições e representações.” (2008, p. 21) podendo-se prever a sua importância no trabalho em torno da medida e das relações subsequentes que se podem criar.

Do mesmo modo, e desta vez em relação ao estudo da Medida, é realçada a importância de experiências de aprendizagem concretas, em que os alunos contactem com diferentes instrumentos de medição – informais e, mais tarde, formais/convencionais.

É ainda importante evidenciar que, como *Notas*, são sugeridos:

- A construção com os alunos das seguintes unidades de medida: m , dm , cm e dam ; cm^2 , dm^2 e m^2 ; dm^3 ;
- O uso do método das metades e do enquadramento em figuras desenhadas no Geoplano e em papel ponteadado ou quadriculado, para calcular aproximadamente a respetiva área;

- A promoção da utilização do Geoplano, tangram e Pentaminós para investigar o perímetro de figuras com a mesma área e a área de figuras com o mesmo perímetro;

Assim, no PMEB (2008), para além da sistemática relevância dada às atividades exploratórias na abordagem aos conceitos de Geometria e Medida, bem como à importância dos materiais estruturados e não estruturados, é evidente a relação entre os conceitos e a importância de experiências que sustentem essa relação.

Importa, também, fazer também uma revisão das orientações que outros documentos normativos – internacionais – como (do original) *Principals and Standards for School Mathematics*, (NCTM, 2000) – fazem a propósito do mesmo tema matemático.

Estes autores relembram-nos algumas das ideias fundamentais relativas à abordagem às Grandezas e Medida. Debruçar-me-ei mais especificamente sobre o estudo e desenvolvimento do conceito de área.

Medir é encarado, segundo o NCTM, como a atribuição de um valor numérico a um determinado atributo mensurável de um objeto, ou seja, uma propriedade desse objeto passível de ser quantificada.

Ao longo do seu percurso escolar, os alunos deverão, portanto, compreender – e ampliar progressivamente o conjunto de atributos mensuráveis com que operam – e usar diversos processos de medição de tais atributos.

Estes autores afirmam ainda o sentido quotidiano que o estudo da medida potencia, uma vez que as vivências das crianças estão repletas de situações reais em que se torna necessário e útil utilizar tais ferramentas matemáticas.

Segundo o NCTM, este tema caracteriza-se ainda pelas conexões que estabelece com outros tópicos matemáticos, dos quais realço os seguintes:

- Operações numéricas;
- Conceitos geométricos;
- Noções de estatística (Organização e Tratamento de Dados).

Numa lógica de abordagens em espiral, os alunos devem explorar a forma como alteração de algumas características dos objetos afetam determinados atributos

mensuráveis: por exemplo, que a separação e reorganização das partes de uma figura pode alterar o seu perímetro mas não a área.

Também relativamente ao uso de diferentes unidades de medida, os alunos devem começar por usar unidades não convencionais avançando, posteriormente, para o uso de unidades convencionais do sistema internacional, compreendendo a necessidade e a consistência do uso das unidades padrão.

Os alunos têm também de ser capazes de posicionar-se criticamente sobre a seleção de uma unidade de medida apropriada em cada caso. Têm de compreender que para medir a área de uma figura têm de utilizar uma unidade de área que pavimente a figura que pretendem medir.

Segundo o NCTM, no final do 1.º ciclo, os alunos devem ser capazes de alcançar uma boa compreensão sobre o papel que as unidades desempenham nas medições.

O uso do sistema métrico requer que os alunos compreendam também a forma como as unidades (múltiplos e submúltiplos) deste sistema se relacionam entre si.

“Os alunos deverão familiarizar-se com as unidades mais comuns do sistema e estabelecer imagens mentais ou pontos de referência para avaliarem e compararem dimensões.” (NCTM, 2008)

Ao fazerem conversões, os alunos têm necessariamente de mobilizar o seu raciocínio proporcional.

Outros conceitos importantes que segundo o NCTM devem ser trabalhados ainda durante o 1.º ciclo prendem-se com as ideias de *precisão* e *exatidão*. Os alunos deverão ser levados a refletir sobre a ideia de que as medidas são sempre aproximações – com maior ou menor grau de precisão – devido aos instrumentos de medição utilizados e/ou ao erro humano na leitura das escalas desses instrumentos.

Ao longo do ciclo, os alunos devem determinar uma medida com base em diferentes estratégias para que possam, progressivamente, construindo e alargando o seu conceito de área. Tais estratégias são:

- Contagem;
- Estimação;
- Utilização de diferentes instrumentos;
- Utilização de fórmulas.

De acordo com Kenney e Kouba, 1997; Lindquist e Kouba, 1989 – autores citados por NCTM, 2008 – muito frequentemente os alunos utilizam fórmulas para calcular a área e o perímetro de quadrados e retângulos sem compreenderem como é que essas fórmulas se relacionam com a grandeza que está a ser medida ou com a própria unidade utilizada. Ao longo do 1.º ciclo, os alunos devem começar a desenvolver – de uma forma compreensiva – relações entre figuras e processos de generalização de obtenção de medidas com base em variáveis, ou seja, que descubram, compreendam e utilizem fórmulas.

O processo de estimação é também fundamental e deve ser trabalhado junto dos alunos ao longo dos ciclos. O desenvolvimento da capacidade de fazerem estimativas permite que os alunos, progressivamente, compreendam melhor o processo de medição e do papel do tamanho da unidade, bem como a tornarem-se críticos face aos resultados de uma medição obtidos através de outras estratégias.

1.2. Perspetivas teóricas

Focar-me-ei agora nas perspetivas de autores que, do ponto de vista teórico, têm contribuído para o desenvolvimento do conhecimento académico sobre o tema desta investigação.

De acordo com Van de Walle (2004) os alunos dos 4.º e 8.º anos de escolaridade tem um conhecimento sobre a grandeza área incompleto (segundo dados do sétimo National Assessment of Educational Progress).

Este autor refere que uma das experiências de aprendizagem mais importantes nas primeiras abordagens em sala de aula ao conceito de área são as atividades de comparação (*Comparison Activities*). Segundo Van de Walle (2004), estas experiências levam os alunos a serem capazes de distinguir a área de figuras da sua forma, comprimento ou outros atributos em causa.

O conceito de equivalência de figuras é um conceito que este autor caracteriza como difícil. Fundamentando-se nas teorias do desenvolvimento de Piaget, Van de Walle refere que crianças com idades entre os oito e os nove anos de idade não compreendem que a reorganização de uma figura noutra com outra forma não afeta a sua medida de área.

Este autor realça a importância das atividades de comparação não só de duas figuras com (pelo menos) uma dimensão ou propriedades em comum – por exemplo, dois retângulos, em que um é mais estreito e comprido que o outro, ou quaisquer dois círculos – mas sobretudo atividades de comparação que ponham em evidência o atributo área em figuras que tenham sido compostas e/ou decompostas.

Este autor sugere que os alunos devem experimentar situações em que se transformem figuras noutras a partir do corte da figura inicial ou, mediante o uso de materiais manipulativos adequados como, por exemplo, o *Tangram*, que permitam compor, decompor e sobrepor figuras para comparar áreas.

Van de Walle (2004) refere que atividades de comparação das áreas – sobretudo quando não são dadas indicações sobre que estratégias utilizar para essa comparação – permitem ao professor avaliar que tipo de conceitos é que os alunos já possuem sobre a grandeza área.

Uma das ideias iniciais que os alunos devem construir – muito antes de surgirem as fórmulas – é que medir a área de uma figura é pavimentá-la com base numa unidade de medida adequada. Van de Walle (2004) realça também a importância da estimativa surgir antes da medição, realçando, no entanto, que o processo de estimação de áreas é substancialmente mais difícil do que a estimação de unidade de medida de comprimento.

No entanto, penso que é também importante ressaltar uma ideia que Van de Walle deixa clara:

“It is important to stress that filling areas with units to determine a measure has almost no impact on student’s understanding of formulas such as $l \times w$ for determining area. The filling process does not help them focus on the dimensions or on multiplying as a mean of counting units. The only goal of these activities is to understand the meaning of measurement.” (Van de Walle, 2004, p.326)

De facto, outros autores como Outhred e Mitchelmore (2000, p.146) afirmam – referindo NCTM, 1989; Dickson, 1989; Hart & Sinkinson, 1988 – que,

“Activities in which students cover rectangular figures with concrete materials have often been suggested for building up an

understanding of the area formula. However, research suggests that such activities may not be effective.”

Estes autores (Outhred e Mitchelmore, 2000) apontam ainda duas razões possíveis para tal ineficácia. A primeira, porque os materiais manipulativos utilizados podem *esconder* as relações que pretendiam ilustrar. A segunda, porque os alunos podem não ser capazes de relacionar os materiais manipulativos utilizados com os conceitos matemáticos que tais materiais supostamente representam.

Apesar de tal perspectiva, os autores deixam, no entanto, implícita a importância de promover junto dos alunos um trabalho consistente em torno da estrutura retangular, num sistema de análise por linhas e colunas. Realçando que a medição de áreas é um processo particularmente interessante uma vez que envolve a coordenação de duas dimensões.

“The experiential origin of the area formula is the action of physically covering a rectangle with unit squares. But whereas this action is one-dimensional and multiplicative. Children must therefore switch from an intuitive approach that emphasizes the covering of the surface to a more formal approach that relies on relating the area to the linear dimensions of the figure – the link being the structure of the rectangular array formed by the covering unit squares.” (Outhred e Mitchelmore, 2000, p.145)

A ideia de uma abordagem com sentido da grandeza área, que vise um uso compreensivo das fórmulas para calcular áreas, tem de ser trabalhada explícita e intencionalmente e os alunos precisam de ser levados a relacionar a figura com a grandeza e com a unidade de medida escolhida com a fórmula geradora da medida da área.

Outhred e Mitchelmore (2000) referem ainda alguns erros comuns que os alunos tendem a cometer e/ou dificuldades que o desenvolvimento do conceito de área implica que, penso, importa listar.

- Confundir os conceitos de área e perímetro;
- Aplicação da fórmula para calcular a área de retângulos a outras figuras geométricas;

- Conhecimentos pouco consolidados sobre as relações entre a adição e a multiplicação;
- A estrutura de arranjos retangulares não é intuitiva nem imediata para os alunos.

2. A área como grandeza geométrica: conceitos fundamentais

Tal como outras grandezas – como o comprimento e o volume, por exemplo – a área é considerada uma grandeza geométrica, uma vez que lhes subjazem processos de medida que põem em causa propriedades geométricas, propriedades das figuras e relações entre figuras.

De facto, se analisarmos etimologicamente a palavra *Geometria* [*geo+metria*] verificamos que a sua origem nos remete para a ideia da “*medida da terra*”. E a medida geométrica é, portanto, uma parte importante da vida real de qualquer indivíduo, o que só por si – na perspetiva de Sarama e Clements (2009) – justifica uma ênfase que deve ser dada a este tema matemático ao nível dos currículos escolares.

Estes autores definem área como uma superfície a duas dimensões contida num limite fechado e tal como no caso do sentido do número, também no caso da área, desde muito cedo, as crianças revelam uma intuição bastante desenvolvida para o conceito.

No entanto, e tal como outras vozes, Sarama e Clements (2009) referem que as experiências escolares dos alunos neste campo são redutas. De acordo com alguns projetos de investigação, alunos do 1.º, 2.º e 3.º quando lhes é pedido que indiquem a área de um quadrado ou de um retângulo, usam a régua e medem o comprimento da figura para dar a resposta (cerca de 41%), outros assumem que não sabem (22%) e apenas 11% dos alunos são capazes de seleccionar uma unidade de área para cobrir a figura apresentada. Mesmo quando dispunham de materiais manipulativos (quadrados de papel), 22% dos mesmos alunos continuaram a tratar a área como se tratasse da grandeza comprimento e a usar os lados dos quadrados dados como unidade de iteração de comprimento.

Para os autores Sarama e Clements (2009) a compreensão da grandeza área envolve a compreensão e coordenação de várias ideias ou conceitos:

- Conceito de transitividade (1);

- Relação entre os números e a medida (2);
- Compreensão do atributo *área* (3);
- Compreensão da ideia de partição equitativa (4)
- Compreensão acerca das unidades de medida de área e de iteração de unidades (5);
- Compreensão das ideias de acumulação e aditividade (6);
- Compreensão sobre estruturação espacial e disposições retangulares (7);
- Conceito de conservação (8);

De seguida debruçar-me-ei especificamente sobre cada um destes conceitos.

O conceito de transitividade (1) implica compreender que se a área de um objeto x é igual (ou maior ou menor) à de um objeto y e que o objeto y tem a mesma área (ou maior ou menor) que um objeto z , então o objeto x e z têm a mesma (ou maior ou menor) área.

Relativamente às relações entre os números e a medida (2), os alunos têm, em primeiro lugar, de reorganizar as suas perspetivas sobre a contagem. Na maioria das suas experiências anteriores, as contagens dos alunos são relativas a quantidades discretas e, no caso da medida do atributo área, eles passam a operar com uma quantidade contínua. Os alunos têm, portanto, de compreender as relações entre as unidades e o número de unidades contadas para que possam compreender as situações de medida que lhes são propostas. Por exemplo, se duas regiões com a mesma área forem cobertas com quadrados de papel de diferentes tamanhos e portanto uma tiver mais quadrados de papel que a outra, os alunos têm de compreender que o número de quadrados de papel usados não influencia a área das regiões consideradas. Isto implica, claro, o conhecimento sobre a relação de proporcionalidade inversa que existe entre o tamanho da unidade de área considerada e a medida de área obtida.

No que respeita à compreensão do atributo *área* (3) é estruturante a ideia da atribuição de uma quantidade mensurável a uma superfície limitada. Segundo os autores Sarama e Clements (2009), nos primeiros anos as comparações que as crianças fazem de duas figuras em termos da sua área é meramente visual e/ou baseada na análise de uma das dimensões da figura ou pode ainda ser feita por comparação direta através de sobreposição. Só depois dos oito anos de idade é que os alunos começam a ser capazes

de estruturar mentalmente um sistema organizado por filas e colunas e fazer um uso formal da multiplicação.

A compreensão da ideia de partição equitativa (4) implica o ato mental de dividir uma região em partes com a mesma área. Muitas vezes, as crianças persistem em recorrer à contagem para compararem duas regiões, não usando o método da partição equitativa.

Relativamente à iteração de uma unidade de medida para preencher uma superfície de área (5), segundo Stephan et al. (2003) – autor citado por Sarama e Clements (2009) – muitos alunos não são capazes de compreender a necessidade de subdividir uma unidade de área quando tal é necessário para preencher completamente uma determinada figura e, portanto, consideram indiscriminadamente unidades com diferentes tamanhos que usaram para preencher uma região.

A compreensão das ideias de acumulação e aditividade (6) implica que os alunos compreendam o processo de somas sucessivas em causa no processo de cálculo da área de uma figura.

Compreensão sobre estruturação espacial e disposições retangulares (7) relaciona-se com a operação mental de construção de uma organização de um objeto ou conjunto de objetos no espaço. É uma forma de abstração que implica os processos mentais de seleção, coordenação, unificação e registo em memória dos objetos ou ações espaciais. Segundo Battista e Clements (1996), Battista et al. (1998) e Outhred e Mitchelmore (1992) – autores referidos por Sarama e Clements (2009) este tipo de estruturação espacial deve preceder o uso compreensivo de disposições retangulares usadas no trabalho acerca da área. De acordo com inúmeros estudos de autores já referidos, o desenvolvimento de estruturas retangulares caracteriza-se pela existência de diferentes níveis de desenvolvimento:

- a. Pre-reconhecimento da área (*Area pre-recognizer*) – os alunos não conseguem estruturar uma região bidimensional;
- b. Cobertura incompleta (*Incomplete coverer*) – os alunos compreendem que o objetivo é pavimentar uma superfície, mas ainda não denotam capacidade para organizar, coordenar e estruturar um espaço bidimensional;
- c. Cobertura primitiva (*Primitive coverer*) – os alunos são capazes de representar a pavimentação de uma região na sua totalidade, sem espaços ou sobreposições, mas sem considerar um sistema alinhado de linhas e colunas:

- d. Cobertura primitiva e contagem (*Primitive coverer and counter*) – os alunos continuam a representar pavimentações como as referidas no nível anterior, embora já sejam capazes de levar a cabo uma contagem mais precisa;
- e. Estrutura linear parcial (*Partial row structer*) – neste nível os alunos já são capazes de representar filas na sua estrutura retangular, com compreensão sobre a necessidade de o fazer de forma colinear e sabendo que cada linha tem de ter o mesmo número de quadrados;
- f. Estrutura em linhas e colunas (*Row and column structer*) – os alunos já são capazes de efetuar contagens baseadas na iteração de linhas e fazer coincidir linhas e colunas num sistema organizado;
- g. Disposição retangular (*Array structer*) – Neste nível as crianças são capazes de compreender que as dimensões de um retângulo indicam o número de quadrados por linhas e colunas e podem, desta forma, calcular a área de uma figura de uma forma compreensiva a partir da medida do comprimento e largura do retângulo.

Por último, há que referir o conceito de conservação (8) que implica que os alunos compreendam que se uma determinada região for dividida e reorganizada numa figura com outra forma, a sua área permanece inalterada

3. Desenvolvimento do raciocínio geométrico e espacial

Battista (2007, p.891) – um outro autor de referência no que respeita ao tema em questão – afirma que “The concept of measurement is woven throughout the fabric of geometric conceptualization, reasoning, and application”.

Ou seja, não podemos olhar a Medida sem perspectivá-la como intimamente relacionada com a Geometria – com o conhecimento sobre figuras que nos rodeiam e a forma como se relacionam no plano e no espaço.

No entanto, e à semelhança daquilo que já vem sendo referido, Battista preocupa-se também com os fracos resultados que os alunos evidenciam nesta área.

Numa investigação levada a cabo com alunos de uma turma do 8.º ano de escolaridade apenas 14% dos alunos foi capaz de determinar o número de quadrados de

papel necessários para pavimentar uma figura com uma dada dimensão e somente 25% dos alunos foram capazes de determinar a área das faces de um sólido retangular (Sowder et al., 2004).

Numa investigação de Martin & Strutchens (2000) apenas 35% dos alunos de uma turma do 12.º ano de escolaridade e 27% dos alunos de uma turma do 8.º ano de escolaridade afirmaram e foram capazes de explicar por que é que um quadrado e um triângulo retângulo com a mesma altura e o dobro do comprimento do quadrado têm a mesma área.

Battista (2007) afirma que os baixos resultados dos alunos se devem – na sua maioria – a uma rutura entre o raciocínio espacial e o raciocínio numérico, ou seja, muitos alunos não conseguem estabelecer uma relação entre a medida numérica e processos de medida por iteração de uma unidade-base.

Relativamente ao uso de fórmulas, o autor refere que mesmo aqueles alunos que são capazes de aplicar bem as fórmulas em situações *clássicas* – por exemplo, calcular a área de um retângulo ou o volume de um prisma retangular –, não são capazes as compreender ou aplicá-las a problemas menos convencionais.

Aliás, este autor chama à atenção que perante problemas menos convencionais os alunos têm de ser capazes de dois processos críticos:

- a) Estruturar uma noção espacial da situação;
- b) Coordenar a sua noção espacial com um esquema numérico adequado.

Battista (2007) refere ainda que é muito comum os alunos ignorarem e/ou revelarem muitas dificuldades no primeiro processo.

O autor associa a toda esta problemática uma introdução prematura dos procedimentos numéricos na abordagem à medida. Afirma que os alunos têm poucas oportunidades para refletirem sobre a adequação dos processos numéricos que utilizam e, por outro lado, têm experiências muito pobres e insuficientes no trabalho com estruturas retangulares e no desenvolvimento de noções espaciais.

“In fact, the traditional premature instructional focus on computational formulas seems to interfere with student’s concept development in geometric measurement.” (Battista, 2007, p.893)

Battista (2007) relembra que existem vários tipos de abstração e que são fundamentais no trabalho com grandezas geométricas – tais como a área.

Em primeiro lugar, os alunos têm de ser capazes de abstrair sobre qual o atributo que vão medir e distingui-lo de outros atributos do objeto. Para que isto ocorra, os alunos devem ser expostos perante diferentes e variadas situações que promovam tal abstração e têm de interagir com outros (pares e/ou professores) que já dominam este processo e estão despertos para ele. Só deste modo os alunos serão levados a refletir sobre as suas eventuais conceptualizações erradas e a agir sobre elas.

Segundo Battista (2007) – e apesar de já existirem algumas investigações que se debruçaram especificamente sobre a aprendizagem de conceitos relacionados com as grandezas comprimento, área ou volume – o conhecimento académico ainda não produziu uma teoria compreensiva acerca da abordagem/aprendizagem das grandezas geométricas como um todo.

Este autor destaca, sobretudo, a necessidade de perceber como se relacionam dois tipos de raciocínio: um não baseado na medida e outro, pelo contrário, baseado na medida.

Para Battista os dois tipos de raciocínio – baseado na medida e não baseado na medida – são desenvolvidos pelos alunos em paralelo, embora não em simultâneo.

Kordaki e Potari (2002) – autores referidos por Battista – contrariam esta visão, avançando com uma teoria que podemos considerar em quatro fases. (1) Primeiro os alunos devem explorar áreas espacialmente, para depois (2) compararem/transformarem áreas recorrendo a materiais concretos e/ou representações pictóricas, sem o uso dos números. De seguida, (3) devem usar unidades de medida e, finalmente, (4) usar fórmulas.

Apesar de realçar a necessidade de mais investigações nesta área que ajudem a esclarecer como é que os alunos operam com os dois tipos de raciocínio acima referidos, o autor – Battista – faz uma primeira tentativa de desenvolver uma teoria global sobre as grandezas geométricas. As conjeturas de Battista são sintetizadas no Quadro 1, apresentado seguidamente (traduzido do original).

De acordo com Van de Walle (2004:347) o sentido espacial – temática central no que respeita ao desenvolvimento do pensamento geométrico – pode ser definido como “an intuition about shapes and the relationships among shapes”. Segundo este

autor indivíduos com um bom sentido espacial têm intuição para os aspetos geométricos do meio envolvente.

O sentido espacial inclui, portanto, a capacidade para visualizar mentalmente objetos e relações entre objetos; ser capaz de descrever geometricamente objetos e posições; ser capaz de usar ideias geométricas pra descrever e analisar o mundo.

Segundo Van de Walle (2004) todos os alunos deveriam desenvolver estas capacidades a partir de experiências ricas no capítulo das figuras geométricas e do sentido espacial de forma consistente e sistemática. Realçando, no entanto que cada um de nós raciocina geometricamente de modo diferente. Aliás, relembra o trabalho de Pierre van Hiele e Dina van Hiele-Geldof, que desenvolveram uma teoria – Níveis de Van Hiele – sobre os diferentes níveis do raciocínio geométrico e de como esses diferentes estádios influenciam a capacidade dos indivíduos operarem com ideias geométricas. No âmbito deste documento não me parece, no entanto, relevante debruçar-me sobre esta teoria de um modo específico, referindo cada um dos cinco níveis propostos pelo casal van Hiele.

| | Baseado na Medida | Não Baseado na Medida |
|----------------|--|--|
| Nível 1 | <p>Estratégias de iteração (repetição) de unidades com uso desconecto dos números</p> <p>Os alunos usam a contagem para determinar as medidas, no entanto, as suas contagens não se baseiam na repetição de uma unidade apropriada.</p> | <p>Comparação de formas (visualizadas de um modo holístico)</p> <p>O raciocínio dos alunos é baseado na aparência dos objetos e é holístico. O raciocínio dos alunos é holístico porque consideram o objeto como inteiro, não considerando as suas partes. As estratégias são muitas vezes imprecisas e vagas. Os conceitos de conservação e transitividade ainda não estão consolidados e desenvolvem-se gradualmente.</p> |
| Nível 2 | <p>Iteração (repetição) e enumeração de unidades</p> <p>Os alunos usam unidades de medida adequadas e por repetição (iteration) e enumeração pavimentam a forma que querem medir. Numa primeira fase, por dificuldades relacionadas com a coordenação das unidades entre si e com o objeto que está a ser medido, há lugar a erros: espaços em branco (<i>gaps</i>), sobreposições, uso de diferentes unidades. Gradualmente estas dificuldades vão sendo ultrapassadas.</p> | <p>Comparação visual de formas por decomposição/recomposição.</p> <p>Os alunos decompõem e recompõem as figuras em regiões mais pequenas (podem fazê-lo física ou mentalmente), depois comparam as regiões recompostas diretamente. Neste processo não está envolvida a enumeração de unidades ou quantidades medidas, por isso não acontece raciocínio baseado na medição. Quando decompõem formas, os alunos podem comparar o todo recomposto, ou podem comparar as formas região por região.</p> |
| Nível 3 | <p>Operando com medidas numéricas</p> <p>Os alunos medem sem necessitarem de usar o processo de iteração (repetição) de unidades. Neste nível, a iteração (repetição) da unidade considerada recai para segundo plano; considera-se que este processo já está consolidado.</p> | <p>Comparação de formas através da conservação das suas propriedades e/ou de transformações/decomposições</p> <p>Os alunos decompõem as formas e, por translação (<i>sliding</i>), rotação (<i>turning</i>) ou reflexão (<i>flipping</i>) das partes, fazem inferências baseadas nas propriedades da forma ou da transformação sobre a congruência das duas formas. Os alunos não tornam, necessariamente, explícito as propriedades geométricas (congruência de figuras, segmentos ou ângulos) ou transformações (<i>sliding</i>, <i>turning</i> ou <i>flipping</i>) em causa, mas o seu raciocínio é consistente com tais propriedades e/ou transformações.</p> |
| Nível 4 | <p>Integração do Raciocínio Não Baseado na Medida com o Raciocínio Baseado na Medida</p> <p>Os alunos operam com a medida sem usarem o processo de iteração (repetição) de unidades. Os alunos são capazes de fazer inferências complexas baseadas nas propriedades visuais das figuras para as medirem, normalmente fazem-no a partir de transformações e/ou propriedades das formas geométricas. Neste nível de competência de raciocínio, os alunos conseguem integrar e aplicar o processo de nível 3 do raciocínio não baseado na medida com o raciocínio baseado na medida. A diferença entre o raciocínio não baseado na medida de nível 3 e o nível 4 é que no nível 4 os alunos fazem inferências acerca da medida numérica e não acerca das formas. Por exemplo, os alunos conseguem desenvolver um uso compreensivo e justificarem procedimentos e/ou fórmulas para calcular áreas/volumes de formas não retangulares.</p> | |

Quadro 1 – Níveis de desenvolvimentos de dois tipos de raciocínio sobre quantidades geométricas mensuráveis de Battista (2007)

Opções Metodológicas

Neste capítulo pretendo explicitar as opções metodológicas desta investigação, enquadrando-as à luz da perspetiva paradigmática que orientará este estudo.

Parece-me fundamental começar por justificar, ainda que de um modo breve, as opções metodológicas tomadas no âmbito de uma investigação no campo das ciências da educação e as especificidades que tal acarreta.

Neste capítulo caracterizarei também o meu papel enquanto professor-investigador, ponderando as vantagens de tal papel no decurso da investigação.

Farei também uma caracterização sumária dos participantes – vendo-os sempre como parte integrante do universo grupo-turma no cenário pedagógico específico em que se incluem.

De um modo mais pormenorizado debruçar-me-ei sobre caracterização dos alunos escolhidos para o estudo de caso, justificando a escolha dos indivíduos objeto de estudo com base nos critérios de seleção previamente definidos, que apresentarei.

Referir-me-ei também às tarefas que foram elaboradas e/ou adaptadas com vista à recolha de dados, referindo intenções pedagógicas e outras questões tidas em conta aquando da sua elaboração/seleção.

Finalmente, deter-me-ei no processo de recolha dos dados, bem como ao da sua análise, focando o processo de criação dos critérios de análise que orientaram toda a investigação, mas, sobretudo os capítulos quarto e quinto, respetivamente, relativos ao desenvolvimento das tarefas e conclusões.

1. *Justificação das opções metodológicas*

Importa, no contexto desta investigação, fazer uma breve contextualização acerca da discussão atual sobre o emprego dos diferentes métodos, em função do paradigma a que a investigação está associada.

Segundo Carmo e Ferreira (1998, p.193) “A distinção entre paradigmas diz respeito à produção do conhecimento e ao processo de investigação”. Estes autores fazem uma breve referência relativamente ao modo como a postura paradigmática tem vindo a ser encarada em investigações em Ciências Sociais ao longo do tempo.

Tradicionalmente, referem, a distinção assentava sobretudo ao nível do método empregado.

“[Atualmente] têm sido objeto de discussão não só as vantagens e inconvenientes relativos à adequada utilização de métodos quantitativos e de métodos qualitativos em trabalhos de investigação em Ciências Sociais, como tem sido encarada a possibilidade de utilizar uma articulação entre ambos.” (Carmo e Ferreira, 1998, p.193).

Portanto, deve ficar claro que a associação de uma investigação a um determinado paradigma depende fortemente de uma orientação global, estruturante e não dos procedimentos pelos quais se opta.

Segundo Erikson (1986) – autor citado por Hébert et al (2005),

“[a] investigação interpretativa (...) partilha um interesse fulcral pelo significado conferido pelos actores às acções nas quais se empenharam. Este significado é o produto de um processo de interpretação que desempenha um papel-chave na vida social”.

O mesmo autor refere ainda que “o seu interesse pelas metodologias qualitativas se situa sobretudo de um ponto de vista epistemológico e ontológico”, relegando para segundo plano os aspetos técnicos.

Segundo Vara (1995), as conceções básicas que definem um paradigma de investigação podem ser sintetizadas através da resposta a três grandes questões:

- Qual é a forma e a natureza da realidade e o que se pode conhecer dela?
- Qual é a natureza das relações entre aquele que conhece, ou quer conhecer, e aquilo que pode ser conhecido?
- Como procede aquele que quer conhecer para descobrir o que crê que pode ser conhecido?

Assim, importa realçar que neste estudo assumo uma postura que se enquadra no paradigma interpretativo e que assentará numa metodologia qualitativa.

De acordo com os objetivos do estudo e com o tipo de resultados que pretendo alcançar, o estudo foi orientado para o processo, pelo acesso aos significados,

procurando compreender as diferentes perspetivas dos intervenientes. Teve em conta os contextos pessoais e sociais na sua globalidade, que mobilizei na interpretação e compreensão dos fenómenos estudados.

Daqui se conclui, este estudo não ambicionava a generalização de resultados, procurando, sim, a descrição e compreensão dos processos vivenciados.

Segundo Bogdan e Biklen (1994) – autores citados por Carmo e Ferreira (1998, p.199),

“a preocupação central não é a de saber se os resultados são susceptíveis de generalização, mas sim a de que outros contextos e sujeitos a eles podem ser generalizados.”

Em suma, uma abordagem deste tipo – qualitativo – caracteriza-se, segundo Bogdan e Biklen (1994) por:

1. a fonte direta dos dados ser o ambiente natural, em que o investigador surge como instrumento privilegiado de recolha de dados. O investigador qualitativo preocupa-se com o contexto onde a investigação decorre;
2. os dados obtidos são descritivos e incluem transcrições de entrevistas, notas de campo, vídeos, documentos pessoais e outros registos oficiais;
3. o investigador interessa-se mais pelo processo do que pelos resultados ou produtos;
4. a análise dos dados é feita de forma indutiva, ou seja, partindo do particular, por meio de uma observação criteriosa dos fenómenos concretos da realidade e das relações existentes entre eles, para se chegar a eventuais conclusões;
5. o investigador interessa-se pelo ponto de vista dos participantes e pelo modo como os significados são interpretados.

Em termos de metodológicos, nesta investigação optei por realizar Estudos de Caso, uma vez que pretendo estudar um fenómeno – acendendo aos significados – que está necessariamente imiscuído num contexto pedagógico e social específico.

Pretendo sobretudo questionar os *comos* e os *porquês* para alcançar uma visão abrangente e holística, em que importam os contextos sociais globais em que os indivíduos estão inseridos e dos quais não podem ser vistos como dissociados. (Yin, 2005)

Centrar-me-ei no estudo do caso único e particular de dois alunos de uma turma de terceiro ano de escolaridade, inseridos numa realidade concreta e complexa, recorrendo à observação empírica.

2. O professor-investigador

Esta investigação decorreu numa turma do terceiro ano de escolaridade – da qual sou professora titular –, num externato particular da cidade de Lisboa, durante o ano letivo 2011-2012.

Não acompanhei este grupo desde do primeiro ano, tendo sido professora deles apenas a partir do terceiro ano de escolaridade.

Uma vez que o estudo foi realizado na turma de que sou professora titular, há algumas questões que importa ponderar, já que acumulei as funções de professora – com todas as implicações e preocupações pedagógicas que tal papel acarreta – com as de investigadora.

Penso que é pertinente deter-me – ainda que brevemente – sobre o papel específico que é o do professor-investigador, realçando alguns aspetos fundamentais sobre a investigação do ensino pelos seus *profissionais do terreno*.

De acordo com a literatura, o conceito de professor-investigador remonta aos anos sessenta e surge associado a Stenhouse. É nesta *localização histórica* que surge de uma forma mais estruturada a ideia de que a investigação das salas de aula deve caber aos professores e que será essa investigação de conduzirá a um desenvolvimento curricular de qualidade, com um sentido útil, de união da teoria à prática.

Por *investigação* – Stenhouse (1975, p.174), citado por Alarcão (2001) – entende “a predisposição para examinar a sua própria prática de uma forma crítica e sistemática”.

Outros autores referidos por Alarcão (2001) acrescentam que este tipo de investigação é “[um processo de] pesquisa intencional e sistemática realizada pelos professores” (Cochram-Smith, 1993, p.7). Realçando, nesta definição, que este tipo de investigação decorre da motivação intrínseca dos professores para atribuírem sentido às práticas profissionais, pondo, contudo, em relevo o carácter planeado e não espontâneo

das investigações dos professores, que necessariamente recorrem a processos organizados de recolha, tratamento e análise dos dados.

Maria do Céu Roldão – autora portuguesa que se tem dedicado à clarificação e desenvolvimento do conceito de *Currículo* – refere o “currículo como campo de acção do professor” (2000:15), e ainda que “os professores [são os] principais especialistas do currículo” (2000:17). O que culmina na ideia de que:

“pensar curricularmente significa tão só assumir conscientemente uma postura reflexiva e analítica face ao que constitui a sua prática quotidiana, concebendo-a como campo de saber próprio a desenvolver e aprofundar e não como normativo que apenas se executa sem agir sobre ele” (2000, p.17).

Por tudo o que foi referido, parece-me evidente que as investigações levadas a cabo por professores se caracterizam por visarem – segundo Alarcão (2001) – um corpo de conhecimentos mais integrado, mais holístico, mais ligado à prática, mais orientado para a busca de soluções que visam o melhoramento das práticas educativas.

Termino, com a convicção que um professor nunca investigará desligando-se do seu papel e preocupações pedagógicas enquanto professor, nunca ignorará o conhecimento profundo que tem sobre a realidade que investiga, próprio de alguém que está “mergulhado” nela.

A sua postura ética de um professor-investigador será sempre de um grande compromisso para com os seus alunos, para com a melhoria das suas práticas profissionais e para com o – modesto – aprofundamento de conhecimentos específicos sobre o currículo e sobre o processo de ensino-aprendizagem.

“O papel do professor como investigador deve estar intimamente relacionado com o papel do professor como professor” (Stenhouse, 1975, citado por Alarcão, 2001).

3. Os participantes

3.1 Caracterização do grupo-turma

Embora tomando o *design* de estudo de caso de dois alunos, importa, ainda que de um modo breve, fazer uma caracterização do grupo-turma do qual estes alunos não podem ser dissociados e também do cenário pedagógico e modelo educativo que orientou o trabalho curricular com este grupo.

A turma era composta por vinte e um alunos, doze rapazes e nove raparigas, todos com idades compreendidas entre os oito e nove anos e todos frequentaram o terceiro ano de escolaridade pela primeira vez.

No que respeita à postura e dinâmica do grupo – e em síntese daquilo que é referido no Projeto Curricular de Turma – globalmente, é um grupo com vários elementos muito imaturos, que ainda precisam de uma regulação muito presente na regulação do seu trabalho e na gestão dos conflitos entre si.

É um grupo com pouca capacidade de atenção aos momentos coletivos – estes momentos têm de ser curtos e intercalados com outras situações de trabalho para que os alunos continuem atentos.

Há grandes discrepâncias curriculares individuais, o que requer uma grande aposta na rotina diária Tempo de Trabalho Autónomo, uma vez que é neste momento e em apoio específico e diferenciado com o professor, que muitos dos alunos consolidam conteúdos fundamentais, mesmo alguns que já foram trabalhados em coletivo.

3.2 Caracterização do cenário pedagógico

No que respeita ao cenário pedagógico, importa ainda fazer referência ao modelo educativo que regeu a minha prática educativa no trabalho com este grupo ao longo do ano e referir que ele é baseado nos princípios e práticas do Movimento da Escola Moderna.

No interesse desta investigação, referir-me-ei apenas à forma como são estruturados os momentos de trabalho em matemática.

A abordagem aos conteúdos matemáticos é baseada na apresentação e “desconstrução” do programa desta disciplina junto dos alunos. Ao longo de todo o ano, é planificado o trabalho com os alunos em conselhos de cooperação educativa, em que se reflete sobre aquilo que no seio do grupo faz mais sentido ser trabalhado em cada momento, e os conteúdos do programa que ainda não foram trabalhados. Assim se definem as abordagens que são feitas em momentos coletivos.

Estes momentos de trabalho são sempre pautados pela voz que é dada aos alunos para partilha e discussão das suas estratégias e das dos seus pares, cabendo ao professor ir mediando, orientado e sistematizando essas discussões – os conceitos e conteúdos vão sendo construídos pelo grupo em abordagens variadas e diversificadas. Em termos de modalidade de trabalho, nestes momentos, os alunos oscilam muito entre momentos de trabalho a pares e/ou pequenos grupos e momentos de discussão coletiva.

Um momento de trabalho curricular fundamental na dinâmica desta turma é também a rotina diária – com a duração aproximada de uma hora por dia – de trabalho autónomo.

Neste tempo de trabalho, cada aluno – regulado por um Plano Individual do Trabalho negociado com o grupo e comigo – trabalha os conteúdos que a cada momento se avalia (e/ou autoavalia) serem aqueles em que tem de investir mais porque ainda não domina. São marcados apoios individualizados e específicos entre pares e com os professores. É durante estes apoios que são feitas abordagens que vão ao encontro das dificuldades específicas dos alunos. É um momento privilegiado de consolidação e treino das dificuldades específicas de cada um e que – uma vez que cada aluno está a trabalhar autonomamente – liberta o professor para efetivar a diferenciação pedagógica. Para concretizar o trabalho dos alunos, estão permanentemente disponíveis na sala de aula ficheiros de apoio ao trabalho curricular dos alunos. São ficheiros temáticos – organizados por área curricular e por assunto ou tema – que os alunos utilizam autonomamente mediante aquilo que planificaram no seu Plano Individual de Trabalho.

Há ainda a destacar outras modalidades de trabalho – em que não me deterei em detalhes – mas que são momentos rápidos e rotineiros de cálculo mental, contagens ou outras questões que requeiram um treino sistemático.

Há ainda a destacar a abordagem que é feita a determinados conteúdos e competências matemáticas durante a elaboração de projetos interdisciplinares.

Finalizo, referindo que, no cumprimento de questões de ética profissional, todos os alunos tiveram conhecimento antecipado sobre os contornos e objetivos desta

investigação, bem como os seus encarregados de educação que autorizaram por escrito a participação dos respetivos educandos no estudo.

4. Critérios de escolha dos alunos para objeto de estudo de caso e caracterização dos alunos escolhidos

A escolha dos alunos objeto dos estudos de caso baseou-se, por um lado, em critérios pragmáticos relacionados com as competências orais destes alunos, nomeadamente no que respeita à sua capacidade de explicitação oral dos raciocínios – competência fundamental num trabalho de investigação desta natureza.

Por outro lado – e agora realçando algumas das minhas opções enquanto investigadora – a escolha dos dois alunos teve também em conta a minha intenção de estudar dois alunos que embora revelassem competências curriculares sólidas e consistentes – transversalmente nas diferentes áreas curriculares e em particular na área da matemática – se distinguissem em “estilo”.

Assim, um dos alunos – à frente designado por Vicente – caracteriza-se pela facilidade na aquisição de conhecimentos e conteúdos na área da matemática e um gosto particular por esta área curricular. É um aluno extremamente empenhado, organizado e trabalhador, com conhecimentos consolidados no que respeita aos diversos conteúdos trabalhados na área da matemática e em particular no campo da geometria e medida. Para o Vicente a aprendizagem é um processo que ocorre com muita naturalidade e facilidade. Este aluno evidencia um raciocínio abstrato já bastante desenvolvido. No momento da recolha dos dados, este aluno tinha nove anos e frequentava o terceiro ano de escolaridade pela primeira vez.

A aluna designada por Alice é eficaz na área da matemática, revelando uma boa compreensão dos conteúdos trabalhados, embora esta não seja a sua área de predileção. É uma aluna muito criativa e – embora evidencie um gosto especial pela área da Língua e das artes – tal criatividade revela-se também em raciocínios alternativos que mobiliza para resolver algumas tarefas matemáticas.

Apesar de competente, a Alice é mais distraída que o Vicente e, embora seja empenhada, muitas vezes ainda precisa do apoio do professor para que não se disperse e/ou para relembrar alguns conteúdos e/ou conceitos porventura já abordados. À

semelhança do Vicente, também esta aluna – à data do estudo - tinha nove anos e frequentava o terceiro ano de escolaridade pela primeira vez.

Portanto, desta caracterização realço a ideia que comecei por salientar, da minha intenção de escolher dois alunos com características semelhantes nalguns aspetos – neste caso, no que respeita à sua competência matemática no global – mas que se distinguissem na postura enquanto alunos perante a resolução de tarefas matemáticas e, porventura até na matemática enquanto área disciplinar.

5. As propostas de trabalho

5.1 A elaboração dos materiais e as intenções pedagógicas

A recolha dos dados foi orientada por um conjunto de tarefas previamente preparadas e apresentadas ao grupo-turma sob a forma de um ficheiro de trabalho de apoio ao momento de trabalho autónomo anteriormente descrito. Este ficheiro estava disponível na sala para todos os alunos.

As tarefas foram selecionadas e/ou adaptadas por mim tendo por referência tarefas e cadeias de tarefas publicadas em diversos documentos por vários autores. No entanto, houve um documento normativo que orientou criticamente as minhas intenções e decisões pedagógicas aquando da elaboração deste ficheiro e que foi o *Programa de Matemática para o Ensino Básico*.

Os objetivos pedagógicos deste ficheiro prenderam-se, sobretudo, com o desenvolvimento do conceito de área como o espaço no plano ocupado por uma figura; uso flexível e compreensivo de diferentes unidades de medida de área; decomposição e comparação de figuras geométricas; construção do conceito de figuras equivalentes; uso de materiais manipulativos diversificados como forma de concretização de conceitos e ideias mais abstratas.

A seguir deter-me-ei mais especificamente sobre cada uma das tarefas apresentadas aos alunos.

As tarefas n.º1 e 2 (Anexo 1 e 2, respetivamente) foram – por esta ordem – as primeiras tarefas a serem apresentadas aos dois alunos em estudo. Estas tarefas foram adaptadas de NCTM (2005), *Navigating Through Measurement In Grades 3-5* (Principles and Standards for School Mathematics Navigations Series). Constituem-se objetivos específicos em relação a estas tarefas:

- Desenvolver a noção de área como o espaço no plano ocupado por uma figura;
- Considerar uma unidade de medida apropriada;
- Comparar a área das figuras por sobreposição.

A tarefa n.º 3 (Anexo 3) foi adaptada de Serrazina (1996) *O Geoplano na sala de aula*. APM e tinha como objetivos curriculares:

- Decompor uma figura em outras;
- Comparar áreas de figuras por sobreposição;
- Justificar o seu raciocínio com base em factos geométricos conhecidos.

A tarefa n.º 4 (Anexo 4) foi adaptada da Cadeia de tarefas: Grandezas e Medidas (publicada pela ESELx) e tinha por objetivos:

- Construir figuras com as peças do *Tangram*;
- Considerar uma unidade de área dada;
- Construir figuras mobilizando conhecimentos acerca da composição e decomposição de figuras;
- Justificar o seu raciocínio com base em factos geométricos conhecidos.

A tarefa n.º 5 (Anexo 5) foi também adaptada da Cadeia de tarefas: Grandezas e Medidas (publicada pela ESELx) e tinha por objetivos:

- Desenvolver a noção de figura equivalente;
- Escolher e considerar uma unidade de área adequada;
- Justificar o seu raciocínio com base em factos geométricos conhecidos.

As tarefas n.º 6 e 7 (Anexo 6 e 7, respetivamente) – elaboradas pelos alunos por esta ordem – também se basearam na Cadeia de tarefas: Grandezas e Medidas (publicada pela ESELx) e os objetivos de ambas as tarefas eram:

- Construir figuras no Geoplano dada uma determinada área;
- Construir figuras mobilizando conhecimentos acerca da composição e decomposição de figuras.

As tarefas n.º 8 e 9 (Anexo 8 e 9, respetivamente) – aplicadas por esta ordem – foram adaptadas da cadeia de tarefas: Geometria (ESELx: Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores do 1º e 2º ciclo do Ensino Básico [não publicada]) e tinham como objetivos:

- Pavimentar figuras com as peças dos blocos-lógicos;
- Considerar uma unidade de área dada para calcular a área de figuras.

6. A recolha dos dados

Uma das questões que me parecem fundamentais a propósito da recolha dos dados prende-se com uma ideia referida por Teixeira (2008), citando Yin (1989):

“É importante num estudo como o presente, que a recolha de dados não se limite apenas a uma fonte de evidência, é desejável que se recorra a um leque alargado de fontes de informação”

Assim, tendo em mente esta questão, a recolha dos dados foi feita a partir de diferentes e variadas fontes de informação, a fim de poder garantir um maior e melhor acesso às diferentes perspetivas, processos e significados. Este estudo foi desenvolvido com base em quatro fontes fundamentais de recolha de dados:

1. Observação participante;
2. Entrevistas aos alunos;
3. Análise de registos audiovisuais;
4. Análise de documentos escritos (produções dos alunos).

No contexto de uma investigação de carácter interpretativo, penso que as fontes de recolha de dados que utilizei são aquelas que melhor se adequam ao acesso aos significados e processos que pretendia estudar.

Enquanto observador participante, “[posso] compreender o mundo social do interior, pois [partilho] a condição humana dos indivíduos que [observo]” Hébert (2005, p.155).

Ao longo do trabalho com os dois alunos em estudo de caso, situei-me numa perspetiva que encontra eco nas palavras de Pourtois e Desmet (1988, p.123) – autores citados por Hébert (2005, p.155) – quando afirmam que o observador participante pretende mais do que uma descrição objetiva, pretende descobrir o sentido, a dinâmica e os processos dos atos e dos acontecimentos do cenário em que *mergulhou* e dos sujeitos com quem *mergulhou*.

A recolha dos dados prolongou-se por dez sessões de trabalho com os alunos, duas por semana, com durações bastante distintas, que dependiam do número de questões colocadas aos alunos e/ou do nível de dificuldade das questões. As sessões decorreram entre fevereiro e março de 2011.

Os alunos resolveram ao mesmo tempo, mas individualmente – e sem outras interferências para além das minhas – e pela mesma ordem as tarefas que lhe propus. A elaboração das tarefas foi realizada durante o momento de trabalho autónomo, o que me permitiu a mim estar sempre próxima dos alunos ao longo da elaboração de todas as tarefas.

Estive, no entanto, sempre ciente das precauções que um investigador observador participante deve ter no sentido de não deixa afetar a objetividade e fiabilidade dos dados que recolhe – embora assumo, na qualidade de professora-investigadora, intervenções junto dos alunos e durante a elaboração das tarefas que me pareceram fundamentais para que os alunos fossem capazes de avançar e consolidar conceitos estruturantes.

O recurso à técnica da entrevista surgiu como um complemento natural deste cenário de observação participante que descrevi.

“a entrevista permite ao observador participante confrontar a sua percepção do significado atribuído pelos sujeitos aos acontecimentos com aquela que os próprios sujeitos exprimem. Consideram que a técnica da entrevista é não só útil e complementar à observação participante mas também necessária quando se trata de recolher dados válidos sobre as crenças, as opiniões e as ideias dos sujeitos observados.” (Werner e Schoepfle, 1987 – autores citados por Hébert, 2005, p.160)

Olhando o carácter das entrevistas como que um *continuum* de estruturação, ou seja, desde entrevistas abertas a entrevistas fechadas, no contexto deste estudo e considerando os dados que pretendo obter, situei-me numa abordagem em que a entrevista serviu o propósito de melhor aceder e esclarecer os significados, as percepções e processos vivenciados pelos alunos. Para tal, estive sempre consciente da necessidade destas entrevistas se pautarem por algum grau de estruturação mas, ao mesmo tempo, sendo flexíveis no sentido de decorrerem de questões que os próprios alunos foram levantando.

O processo de observação participante, visto como indissociado das entrevistas feitas aos alunos foram ambos registados por meios audiovisuais e por escrito, em notas de campo – e todo este material foi alvo de uma análise documental, bem como algumas produções dos alunos que se afiguraram pertinentes no âmbito da investigação.

7. A análise dos dados e a criação de categorias de análise

A análise dos dados foi baseada em contributos provenientes da revisão da literatura sobre o assunto em investigação neste estudo e, esteve necessariamente orientada para os objetivos e questões de investigação formulados.

Para tal, foi necessário criar categorias de análise que guiassem a dita análise dos dados recolhidos.

As categorias de análise consideradas foram orientadas, sobretudo, segundo dois grandes vetores teóricos:

- 1. compreensão sobre o processo de medição;**
- 2. tipo de raciocínio a que o aluno recorre para medir a área das figuras.**

As tarefas elaboradas pelos alunos estavam perspectivadas de forma a integrarem estes dois grandes focos de análise ao longo da elaboração de todo o ficheiro proposto aos alunos.

Foi realizada uma análise vertical – tarefa a tarefa – de cada aluno separadamente. As tarefas foram analisadas pela ordem em que foram realizadas pelos alunos, uma vez que alguns contributos anteriormente abordados com as primeiras tarefas foram evocados quer pelos alunos, quer por mim como meio de mobilização de conhecimentos.

Foi feita uma análise interpretativa acerca da forma como os alunos desenvolveram conceitos e competências, num processo ilustrado por evidências ilustrativas dos raciocínios dos alunos e das suas interações comigo ao longo das sessões de trabalho.

7.1 Categorias de análise

As duas grandes categorias de análise desdobraram-se em critérios mais precisos e objetivos que passo a apresentar:

1. O aluno revela compreensão sobre o processo de medição:

- Identifica/distingue o atributo mensurável em estudo;
- Seleciona a unidade de medida adequada;
- Compara a unidade de medida selecionada como o objeto a medir, concluindo sobre a sua medida.

2. O tipo de raciocínio a que o aluno recorre para medir a área das figuras é (ver Quadro 1, p.19):

2.1. Baseado na medida, recorrendo a:

- Estratégias de iteração de unidades com uso desconecto dos números;
- Iteração e enumeração de unidades;
- Operação com medidas numéricas.

2.2. Não baseado na medida, recorrendo a:

- Comparação de formas (visualizadas de um modo holístico);
- Comparação visual de formas por decomposição/recomposição;
- Comparação de formas através da conservação das suas propriedades e/ou de transformações/decomposições.

2.3. Integração do raciocínio não baseado na medida com o raciocínio baseado na medida

O Desenvolvimento das Tarefas

Neste capítulo descrevo e interpreto os dados empíricos recolhidos à luz das perspetivas teóricas apresentadas anteriormente.

Farei uma análise vertical dos dois estudos de caso – Vicente e Alice, nomes fictícios pelos quais os alunos serão referidos – pondo em evidência o percurso individual de cada aluno na realização das propostas e, portanto, no desenvolvimento do conceito de área e do raciocínio geométrico.

As tarefas sugeridas aos alunos serão, portanto, analisadas uma a uma, e no final – ou sempre que pertinente – será feita uma análise global do percurso do aluno a partir das evidências – imagens ou esquemas e transcrições de diálogos – consideradas pertinentes e ilustrativas do raciocínio dos alunos. Exceção feita às tarefas 1 e 2 que serão analisadas em conjunto, uma vez que o tipo de raciocínio envolvido é em tudo semelhante e que as tarefas foram realizadas pelos alunos em momentos temporais muito próximos.

Começarei por analisar o percurso do aluno aqui designado por Vicente e, depois, analisarei o percurso do aluno aqui designado por Alice.

Estudo de Caso: Vicente

Tal como referi na caracterização dos alunos escolhidos para os estudos de caso, o Vicente foi um aluno que demonstrou sempre empenho e entusiasmo durante as sessões de trabalho.

Assumi sempre uma postura entusiasta e crítica.

No cumprimento dos meus deveres éticos, relembro que ambos os alunos conheciam os objetivos do estudo.

TAREFAS 1 e 2

Os objetivos desta tarefa prendiam-se com o desenvolvimento da noção de área como o espaço no plano ocupado por uma figura e implicava que os alunos fossem capazes de comparar áreas por sobreposição de figuras. Ver ANEXO 1 e 2

Após uma primeira leitura do enunciado, o aluno demonstrou interesse e exprimiu que as tarefas eram fáceis.

O Vicente exprimiu que iria usar o quadrado como unidade de área:

Vicente – É para usar as figuras do envelope? As que eu quiser?

Professora – Sim.

Vicente – Então vou usar só os quadrados e ver...

Rapidamente este aluno sobrepôs os quadrados que usou como unidade de medida nas figuras apresentadas na tarefa e concluiu sobre a área das figuras.

Para o Vicente foi claro o atributo mensurável em questão – a área –, foi capaz de selecionar uma unidade de medida adequada e compará-la com cada uma das figuras que ia trabalhando, para, finalmente comparar cada par de figuras e afirmar qual a que tinha maior área.

Em ambas as tarefas – 1 e 2 –, mesmo nas figuras que eram compostas também por triângulos, o aluno compreendeu imediatamente que teria de contabilizar dois triângulos como uma unidade de área. Não revelou qualquer dificuldade em colocar espacialmente as peças triangulares e em contabilizá-las para comparar as áreas, como se pode observar na imagem seguinte (figura 1) e avaliar pela forma como exprime por escrito que tinha de conjugar os dois triângulos e contabilizá-los como uma unidade de área (figura 2).

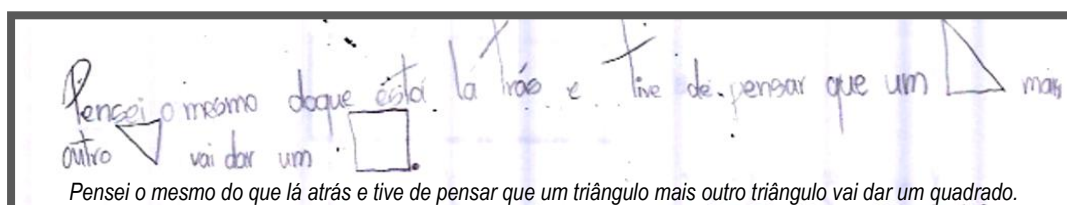
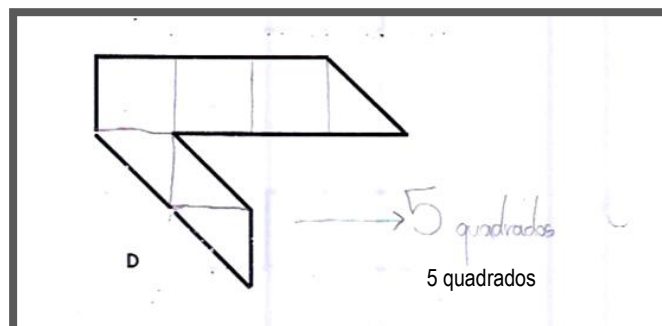


Figura 1 (em cima) e figura 2 (em baixo) – Registos escrito do Vicente

TAREFA 3

Esta tarefa tinha como objetivo decompor uma figura em outras, com o intuito de comparar as suas áreas por sobreposição. Ver ANEXO 3

Esta tarefa revelou-se um desafio para o aluno. Depois de ler o enunciado atentamente e começar a observar as figuras, o aluno parecia entusiasmado.

O Vicente começou a trabalhar a figura A. De forma intuitiva, alinhou a grelha quadriculada do trapézio com a do quadrado (figura 3), visualizando dois triângulos laterais “excedentes” que compensavam os espaços em falta. Cortou os triângulos laterais e recompôs a figura, concluindo que o quadrado tinha a mesma área que o trapézio (figura 4).

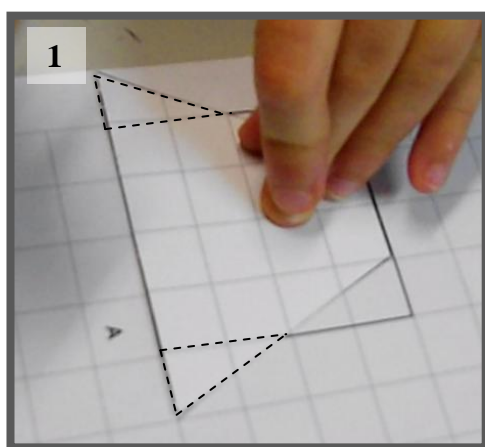


Figura 3 – Estratégia do Vicente para figura A

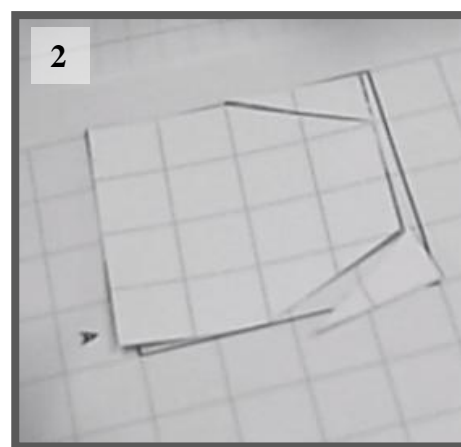


Figura 4 – Estratégia do Vicente para a figura A (composição final)

O aluno mobilizou um tipo de raciocínio que não envolve a enumeração de unidades – consideradas unidade de medida – mas sim a ideia de decomposição e (re)composição de partes de uma figura, apesar das figuras estarem desenhadas sobre uma grelha quadriculada o que podia ter induzido a um raciocínio baseado na ideia de iteração de uma unidade (quadricula) base.

Parece evidente que este aluno já denota alguma competência no que respeita à comparação visual de formas por decomposição/recomposição.

Para a figura B, este aluno tentou seguir o mesmo tipo de raciocínio que tinha usado para a primeira figura, alinhando as linhas da grelha das figuras e começando a cortar as partes das figuras que excediam os lados do losango.

Os seus cortes não eram, no entanto, baseados em nenhuma estratégia rigorosa – eram apenas “mais ou menos” orientados pelas linhas da grelha (Figura 5).

Intervim quando me pareceu que a sua estratégia estava a começar a não resultar: os cortes estavam a ser pouco rigorosos e, por outro lado, estávamo-nos a afastar do tipo de estratégia que implicava decomposição e composição de figuras. Sugeri cortar um triângulo como ilustrado na figura 6.

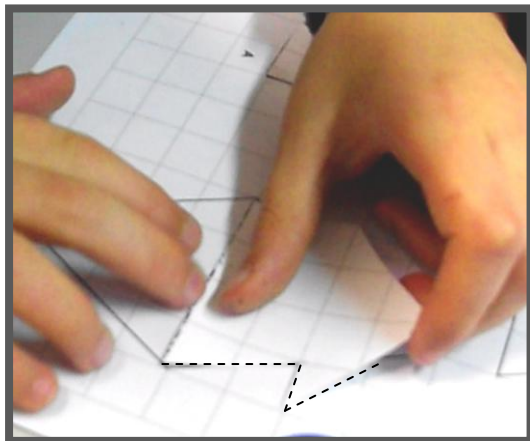


Figura 5 – Estratégia pouco rigorosa do Vicente

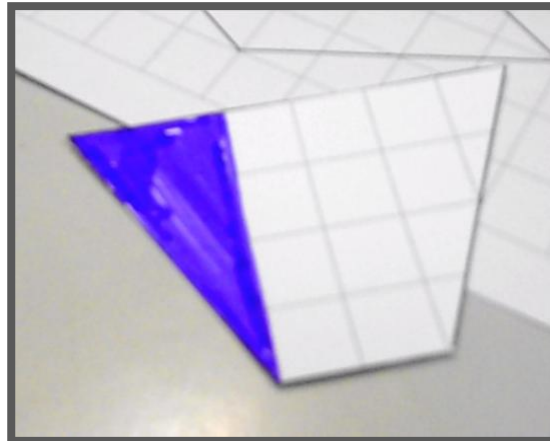


Figura 6 – Sugestão de decomposição do trapézio

Professora – Eu, ao olhar para o trapézio, vejo aqui um triângulo [demarquei-o e pintei-o]. A mim, isto ajudava-me: decompor a figura a partir desta ideia. Corta lá este triângulo.

Vicente – Vou tentar...

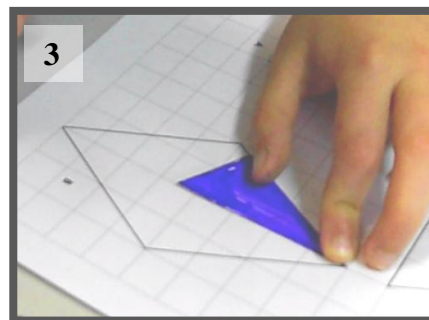
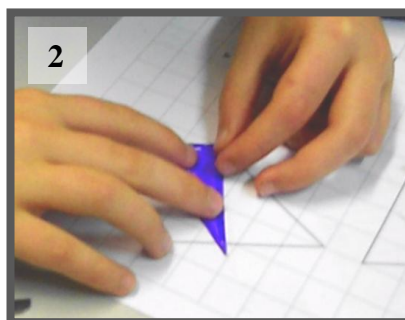
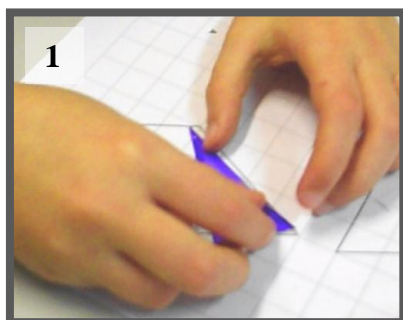
O aluno cortou o triângulo e fez várias tentativas, mostrando alguma dificuldade na colocação da nova “peça” numa posição que lhe permitisse estudar a área da figura em questão (figuras 7, 8, 9).

Foi necessária a minha intervenção para que o aluno fosse explorando aquela estratégia:

Professora – Experimenta de várias formas... Podes fazer o que quiseres à peça.

[Enquanto ia rodando a peça e experimentando várias posições, o aluno ia comentando...]

Vicente – Assim não dá jeito...



Figuras 7, 8 e 9 – Tentativas do Vicente

Finalmente chegou à posição ilustrada na figura 10:

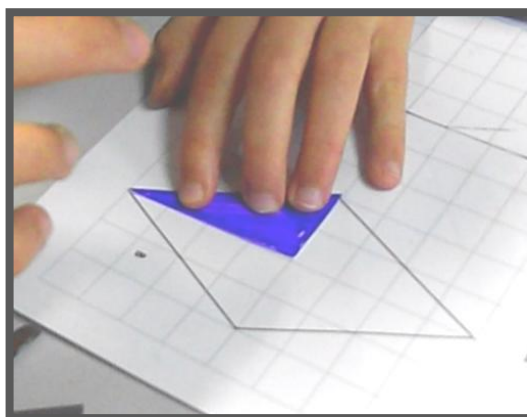


Figura 10 – Posição de referência encontrada pelo Vicente

Vicente – Hum...

Professora – Hum? O que é que esse “Hum...” significa? Tiveste alguma ideia?

Vicente – Posso cortar mais três triângulos para fazer isto [e aponta para o losango].

Professora – Então tenta lá encontrar esses três triângulos que te faltam... Mas faz isso pensando... Primeiro pensa e até podes fazer como eu: pintar primeiro e depois é que cortas.

O Vicente conseguiu visualizar mais um triângulo no trapézio inicial e cortou-o. Perante a figura que lhe restou – um retângulo – não foi capaz de visualizar mais triângulos e abandonou a estratégia centrada na decomposição de figuras noutras (Figura 11).

Depois, bastante hesitante, enveredou por uma estratégia que se baseou na repetição de unidades de medida iguais – a quadrícula da grelha. Tentou cobrir o losango a partir de cortes bastante imprecisos que ia fazendo no retângulo de papel.

Não obstante, fê-lo de uma forma bastante minuciosa – isto é, sem perder nenhum pedaço de papel e fazendo cortes relativamente adequados, ainda que imprecisos – o Vicente conseguiu cobrir todo o losango, concluindo que este tinha uma área igual à do trapézio inicial (Figura 12).

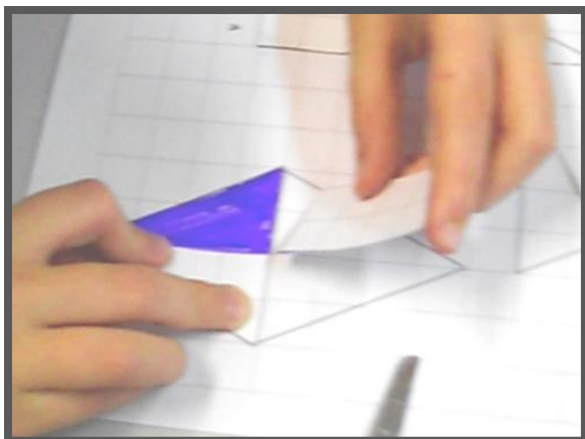


Figura 11 – Tentativas do Vicente para a figura B

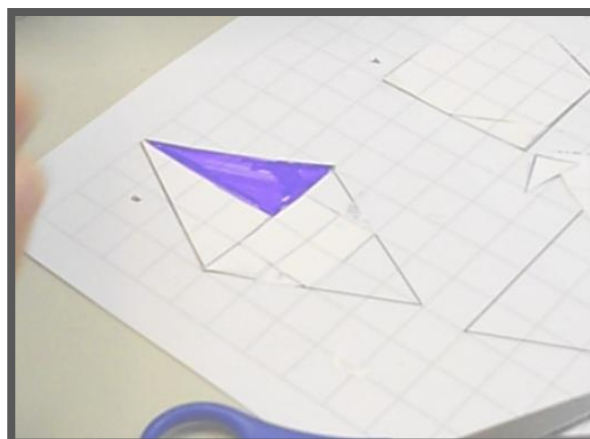


Figura 12 – Estratégia final para a figura B³⁸

TAREFA 4

Esta tarefa tinha como objetivos que, a partir da manipulação do material *Tangram*, se construíssem figuras mobilizando conhecimentos sobre a composição e decomposição de figuras e que explorasse o uso de diferentes unidades de medida. Ver ANEXO 4

Por meio de experiências de tentativa-erro, o Vicente construiu vários quadrados a partir das peças do *Tangram* e registou-os – não construiu, no entanto, o maior quadrado possível, utilizando as sete peças do *Tangram*.

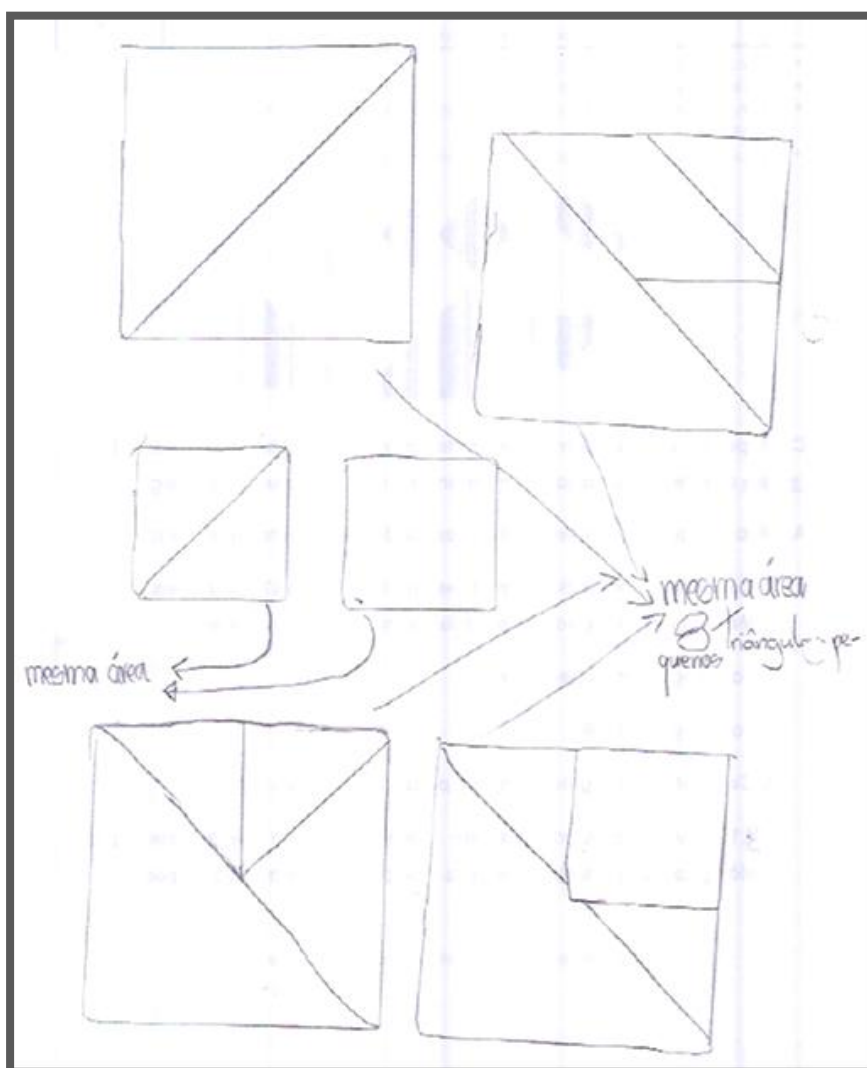


Figura 13 – Quadrados construídos pelo Vicente e agrupamento dessas figuras segundo o critério área

Há a destacar que para construir vários quadrados com as peças do *Tangram*, foi evidente que para o Vicente algumas transformações/movimentos são mais intuitivos que outros. Nomeadamente, os movimentos de deslizamento e de rotação parecem

surgir de uma forma bastante imediata, enquanto que a reflexão de figuras e/ou peças são menos óbvias para este aluno.

Relativamente às figuras construídos pelo aluno, os quadrados que surgiram primeiro foram aqueles que se obtêm a partir de dois triângulos – os maiores triângulos e os mais pequenos. Para este aluno parece ser bastante intuitiva a ideia de que dois triângulos iguais das peças do *Tangram* formam um quadrado. Como dispõe do material manipulativo, é fácil provar que visualmente, numa determinada posição, os dois triângulos iguais formam um quadrado. No entanto, não me parece que este aluno o faça consciente das características específicas que dois triângulos têm de ter para que tal aconteça noutros casos, sem as peças do *Tangram* como apoio manipulativo.

De seguida, começaram a surgir outros quadrados, obtidos a partir de composições de mais peças do *Tangram* – os quadrados foram obtidos a partir de um sistema de tentativa-erro e/ou baseados em experiências anteriores com este material, portanto não baseado em qualquer tipo de raciocínio que envolvesse relações entre as figuras (peças). No entanto, o Vicente mostrou bastante agilidade na construção dos quadrados.

Perante a questão que pedia que o aluno agrupasse os quadrados com a mesma área, o Vicente identificou visualmente, prontamente e sem dificuldade os quadrados com a mesma área (ver Figura 13 acima).

Vicente – Têm a mesma área porque são iguais. Olha!

No caso deste aluno, parece-me que a forma como explicita o conceito de congruência de figuras é bastante consolidado.

Quando teve de medir a área de todos os quadrados construídos usando como unidade de medida o triângulo mais pequeno (alínea 2 da tarefa 4), o Vicente usou dois triângulos pequenos para compor um quadrado e usou-o para comparar e medir a área dos quadrados médios que tinha construído com as peças do *Tangram*. O aluno parece ter visualizado o quadrado médio dividido em quatro quadrados mais pequenos iguais e usou o quadrado que compôs a partir de dois triângulos pequenos para verificar e medir a área. Cada vez que usava esse quadrado para medir o maior, considerava duas unidades de cada vez, uma vez que a unidade de medida pedida no enunciado era o triângulo pequeno (ver Figura 14). Esta estratégia indicia claramente que o aluno já é capaz de manipular com bastante à vontade a ideia da composição e decomposição de

figuras em situações que tal estratégia lhe pode ser útil. Denota também uma capacidade de visualização espacial desenvolvida.

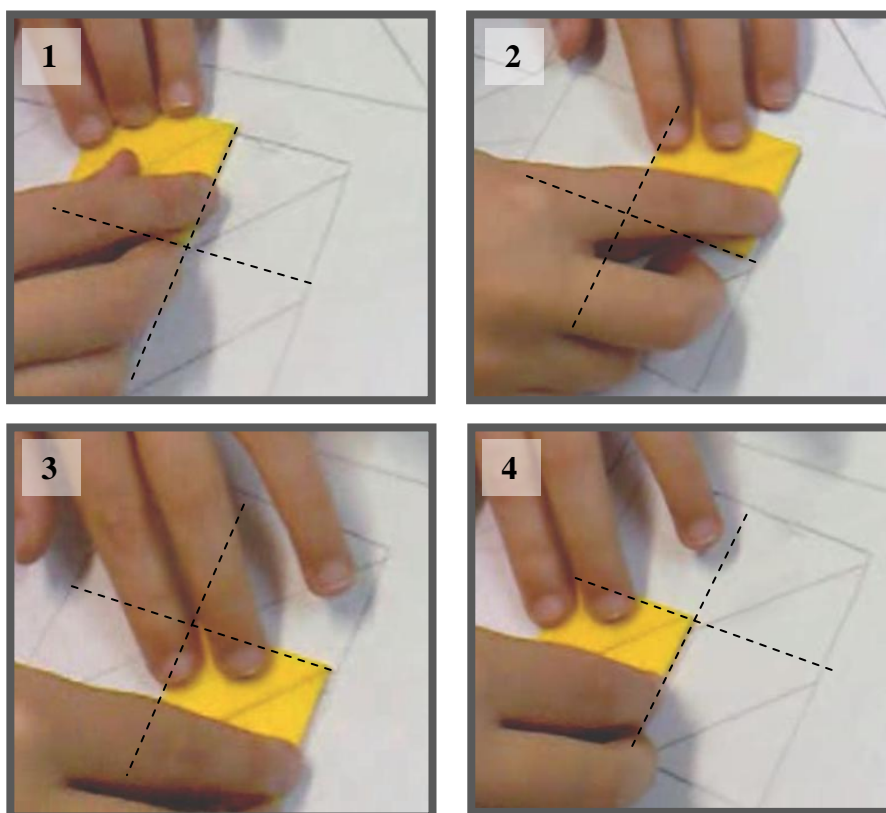


Figura 14 – Estratégia do Vicente para medir a área das figuras construídas com as peças de *Tangram*

Durante a medição da área do quadrado tomando como unidade de medida o triângulo pequeno, o aluno exprimiu – de uma forma muito imediata e segura – que quando fosse medir a área do mesmo quadrado mas tomando como unidade de medida o triângulo médio, a área iria ser metade.

Vicente – Ah! Agora com os triângulos médios vão ser a metade disto.

Professora – Porquê? Explica-me lá melhor isso.

Vicente – Ah... A próxima vai ser 4. É a mesma coisa que um oitavo e um quarto... Ai os quartos são muito maiores que os oitavos...

Professora – Sim, mas és capaz de me explicar isso... Ah... Por que é que disseste logo “então se aqui é oito – se medir com triângulos pequenos é oito” – como é que me disseste logo que com estes triângulos [aponta o triângulo médio] é quatro? ”

Vicente – Porque... Ah... Porque esse triângulo deve ser dois dos pequenos...

Realce-se que este aluno não precisou de concretizar este raciocínio com materiais manipulativos para chegar a conclusões – parece ser um raciocínio baseado na sua capacidade de visualização espacial e que revela também muita segurança no processo de medição, manuseando diferentes unidade de medida – relacionando-as entre si, com o objeto a medir e com o resultado obtido.

[Insisto para que o aluno experimente com material a tese que está a defender relativamente às relações entre o triângulo pequeno e médio do material *Tangram*. O aluno tenta fazer coincidir dois triângulos pequenos com o médio para comparar as áreas.]

Vicente – É. [com segurança mas depois de várias tentativas]

Professora – Então, e isto diz-nos o quê?

Vicente – Diz-nos que isto [aponta para o triângulo médio] é o dobro destes coisos [aponta para os triângulos pequenos] ...

Professora – “Coisos” não sei o que é...

Vicente – Este triângulo é o dobro destes dois triângulos.

Professora – O quê desse triângulo? O comprimento? O peso?

Vicente – A área deste triângulo!

Professora – Ah! OK! Então, se medirmos estes quadrados com triângulos pequenos precisamos de...

Vicente – 8!

Professora – Se for com estes [triângulos médios], que têm o dobro da área dos pequenos, precisamos de...

Vicente – 4!

Professora – Que é a...

Vicente – Metade!

Relativamente a esta tarefa, o Vicente parece já muito ágil a lidar com as mudanças de unidades de medida e a relacioná-las com sentido e estabelecendo lógicas nessas relações.

Seguidamente, passámos para a última questão do enunciado que pedia para justificar se algum dos quadrados anteriormente construído tinha a mesma área que o triângulo formado a partir de sete peças.

O aluno, em vez de construir um triângulo com as sete peças do *Tangram*, construiu um quadrado. Talvez por não ter lido o enunciado com a devida atenção, ou por causa de outras experiências de atividades com este material.

No entanto, sugeri-lhe que a partir do quadrado – sem desmanchar tudo – construísse o triângulo de sete peças.

Vicente – Era para construir um triângulo?! Oh não!

Professora – Mas pensa lá...Pensa um bocadinho... Como é que vais fazer daí um triângulo?
Como é que se pode pensar para transformar um quadrado num triângulo?

O aluno sente a necessidade de voltar a construir o maior quadrado do *Tangram* a partir do seu registo e tenta mover algumas peças – os dois triângulos maiores – para obter um triângulo.

Num processo de tentativa, obtém outras figuras que não o triângulo e só consegue descobrir a posição correta das peças que está a mover para formar o triângulo, quando eu faço girar todo o “puzzle” de modo a que um dos lados da figura fique na horizontal virada para o aluno, na posição mais estereotipada dos triângulos. Dessa forma foi capaz de colocar imediatamente as peças que faltavam para completar o maior triângulo (ver figura 15).

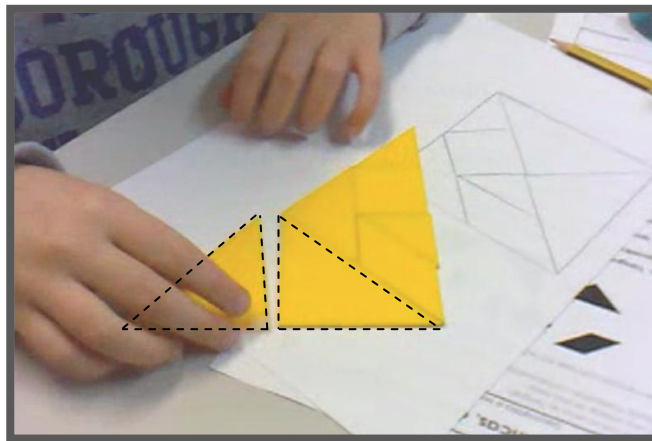


Figura 15 – Construção do triângulo com as sete peças do *Tangram*

Professora – Então já temos o nosso triângulo! Estás a ver que dá ler as coisas à pressa? Mas foi a pensar que lá chegaste.

Vicente – Em quê?

Professora – A passar do quadrado para o triângulo! Como é que pensaste?

Vicente – Ah... Bem... Se eu pusesse estes dois triângulos para ali [e aponta o movimento]

Professora – Pois, dividiste o quadrado em dois triângulos iguais e com eles fizeste o triângulo maior...

O Vicente já parece ser capaz de decompor e compor figuras a partir de um raciocínio que implica algum conhecimento sobre figuras geométricas de referência e relações importantes entre elas.

Professora - Bom, então voltando à questão da tarefa... Algum destes quadrados que construístes (ver figura 13 p.39) tem a mesma área que o triângulo das sete peças?

Vicente – Ah... Não, impossível!

Professora – Porquê?

Vicente – Porque, por exemplo, estas duas peças [pega nos dois triângulos maiores] já conseguem formar um quadrado destes [quadrados médios] e mais isto [apontando para as restantes peças do triângulo maior], que é muito mais, não vai conseguir ter a mesma área.

A noção de área parece ser um conceito claro e consolidado para o aluno e a comparação visual de figuras baseia-se na análise de partes que a compõem – o aluno compara as peças em termos das decomposições feitas anteriormente para as obter.

Professora – E será que há alguma relação entre a área do triângulo grande, o maior, e a destes quadrados [médios]? Já que pensaste por aí... Se logo com os dois triângulos grandes dá para fazer um quadrado destes, o que é que nos sobra?

Vicente – Isto tudo [e aponta para as peças restantes do triângulo maior].

Professora – E isso tudo dava para fazer o quê?

Vicente – Acho que dava para fazer outro quadrado...

Professora – Como?

Vicente – Hum, hum... Dava para fazer outro! [enquanto verifica, fazendo sobrepor duas metades do triângulo maior]. Se eu sei que um quadrado destes faz um e fui comparar este triângulo a este das duas peças – juntei-os – e vi que os dois têm a mesma área... Então é impossível estes [os quadrados médios] terem mais área que este triângulo [o maior triângulo].

Professora – Sim. Então e será que há alguma relação entre a área deste triângulo [maior triângulo] e a deste quadrado [quadrado médio]?

Vicente – Há! Este quadrado é metade deste triângulo!

Professora – Pronto! É isso mesmo!

O Vicente é capaz de relacionar as peças entre si e usar esse conhecimento para concluir sobre a área.

Ao longo deste diálogo torna-se, mais uma vez evidente, que o Vicente já lida com a composição e decomposição de figuras de uma forma muito ágil e denota já conceitos muito sólidos acerca da congruência de figuras embora, claro, não explicita esta ideia de uma forma consciente e/ou formal.

TAREFA 5

Esta tarefa tinha como objetivos o desenvolvimento da noção de figuras equivalentes, bem como a mudança de unidades de medida consideradas. Ver ANEXO 5

O aluno começou a construir figuras a partir das quatro “peças” triangulares dadas e mediante as indicações expressas no enunciado.

Na imagem seguinte estão as figuras que o aluno construiu.

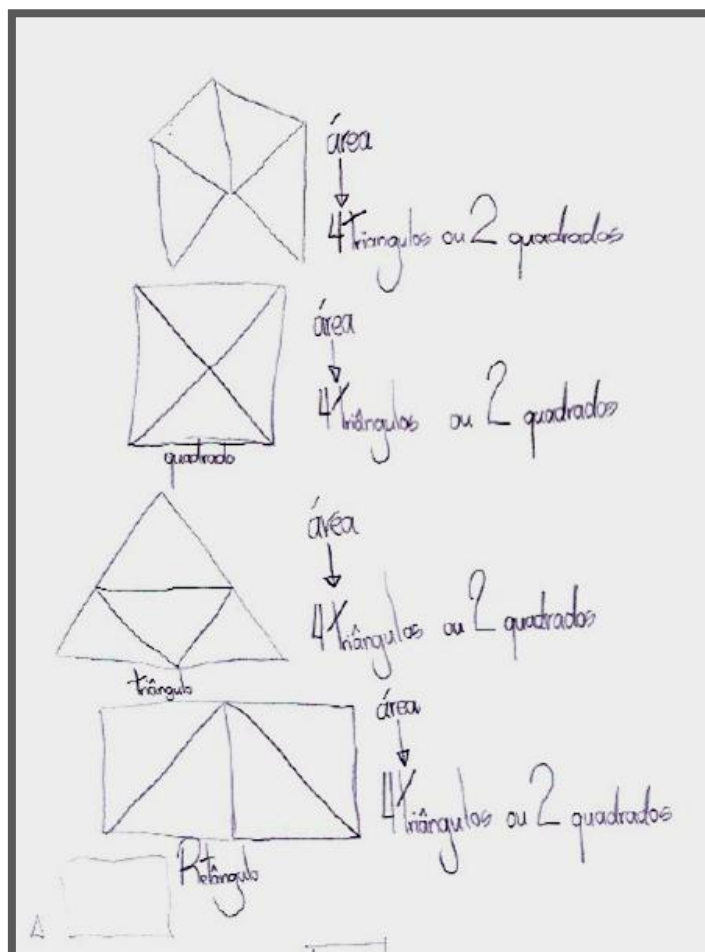


Figura 16 – Registos do Vicente

Na terceira questão deste enunciado era pedido ao aluno que investigasse a área das figuras de forma a retirar daí algumas conclusões.

Propositadamente, e ao contrário de outras tarefas que o Vicente já tinha trabalhado, não era indicada nenhuma unidade de medida com que devesse trabalhar. Desta forma, eu pretendia observar como é que este aluno ultrapassava esta dificuldade e que conceitos já tinha desenvolvido sobre o processo de medição de áreas e que tal

procedimento implica, antes de mais, a definição de uma unidade de medida adequada e a comparação da unidade de medida com a figura a medir.

Nesta questão, o aluno mostrou algumas dúvidas iniciais sobre o que tinha de fazer:

Vicente – Tenho de construir a área?! [parece confuso]

Professora – Tens de investigar a área dessas figuras.

Vicente – Destas? [e aponta para as figuras que tinha construído a partir dos triângulos]

Professora – Sim, tens de dizer quanto é que essas figuras têm de área.

Vicente – Têm... Então, isto é um quadrado, isto é outro quadrado, outro quadrado e outro quadrado. [enquanto aponta para os triângulos que compõem uma figura das que construiu]

Professora – Quadrado?

Vicente – Quadrados daqueles que nós fizemos na área... Nas outras fichas...

Professora – Sim, mas a área tem de ser sempre medida com quadrados?

Vicente – Sim... Mas...

Professora – Faz lá então como tu achas. Diz lá qual é a área destas figuras.

Vicente – Ah... Então eu acho que... Então como é que se mede a área sem quadrados? Como é que tu conseguias medir a área desta sala?

Professora – Pois, quando nós queremos medir a área o que é que temos de definir?

Vicente – A área... Podíamos ir aí buscar material...

Parece-me interessante realçar que a primeira tendência do aluno foi medir a área da figura em quadrados, quando o mais intuitivo seria medi-la em triângulos.

Tal, como ele explicita, tal poderá ocorrer motivado por experiências anteriores relacionadas com a enumeração de quadrados como unidade de área. O aluno evoca também a medição da área da sala de aula, que foi realizada com quadrados de papel.

O aluno parece ainda não ter percebido que precisa de definir uma unidade de medida adequada e é interessante sentir a necessidade de usar material que o ajude na concretização desta tarefa.

Professora – Quando nós queremos medir a área de uma coisa qualquer – seja desta sala, do tampo da mesa ou destas figuras – há sempre alguma coisa que temos de decidir antes de começar a medir...

Vicente – Que tipo de material... Temos ali material!

Professora – Que material é que usarias para medir, por exemplo, o tampo desta mesa?

Vicente – Um metro!

Professora – Como é que fazias?

Vicente – Ah pois... o metro é para medir a medida...

Professora – O comprimento... Podíamos medir quanto é que isto [uma das dimensões do tampo da mesa] mede daqui até aqui com a fita. Mas para medir a área?

Vicente – A área... A área? Hum...

Professora – Se eu quisesse medir a área desta mesa, por exemplo, em folhas A_5 , como é que fazia?

Vicente – Ah... então eu posso medir em triângulos! [referindo-se às figuras do seu registo]

Este diálogo ilustra que o Vicente precisava de ser levado a refletir sobre diferentes unidades de medida com que podia medir a área de determinado objeto ou figura. Parece ter tomado consciência sobre a necessidade de definir uma unidade de medida adequada para a tarefa em causa.

Professora – Pronto, era isso que eu estava a dizer. Nós temos sempre de decidir “*Vou medir a área em quê?*”. Posso medir esta mesa com folhas A_5 e ver quantas folhas é que preciso para preencher a mesa toda. Posso usá-las também para medir a sala – ia dar uma grande trabalhadeira, mas posso... E para medir estas figuras [aponto para a folha de registo] o que é que achas mais adequado?

Vicente – O mais adequado... Bem, o mais fácil agora é em triângulos.

Professora – Com triângulos. Então, considerando esses triângulos como unidade de área, diz lá a área dessas figuras.

O aluno registou que todas as figuras mediam quatro triângulos de área. Realço, mais uma vez, que neste diálogo se torna evidente que a ideia da definição de uma unidade de medida de área adequada ainda é um processo que levanta dúvidas para o Vicente, embora pareça que conseguiu compreender, por fim, esta ideia fundamental.

No sentido de compreender melhor com que entendimento é que o Vicente ficou sobre a unidade de medida ter de ser ou não um quadrado – e não esquecendo as preocupações pedagógicas que o papel de professora-investigador acarreta – continuámos a explorar esta ideia, a propósito da mesma tarefa, usando as figuras anteriormente construídas.

Finalmente, indo ao encontro da última questão do enunciado:

Professora – Então, olhando para estas figuras... O que podes concluir?

Vicente – Que a sua área pode ser em triângulos e é 4 ou em quadrados e é 1...

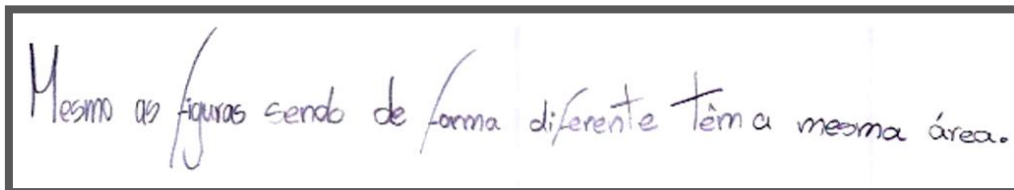
Professora – Sim, exatamente... Mas olha lá bem para a forma delas...

Vicente – São todas diferentes...

Professora – Então... Conclusão?

Vicente – Podem ser diferentes e a área ser a mesma... Sim, podem...

O aluno registou por escrito as suas conclusões.



Mesmo as figuras sendo de forma diferente têm a mesma área.

Figura 17 – Registos escritos do Vicente.

O conceito de equivalência de figuras era o foco principal desta tarefa e, nesse aspeto, o Vicente aparenta ter uma conceção bastante consolidada desta ideia geométrica – ele não parece levantar questões relativamente à ideia de duas figuras diferentes em forma poderem ter a mesma área.

Os conceitos trabalhados com esta tarefa foram muito importantes. Pareceu-me fundamental para que este aluno tomasse consciência acerca da possibilidade de utilizar diferentes unidades de medida e desconstruísse a ideia de ter de tomar sempre um quadrado como unidade – não obstante esta ideia ser também ela muito forte na passagem para uma análise de figuras (quadriláteros) baseada num sistema coordenado de linhas e colunas. O conceito de congruência de figuras é também uma ideia fundamental no estudo da grandeza área e, embora o aluno não explicita esta conceção – nem se espera que o faça – o seu raciocínio é consistente com ela.

TAREFA 6

Os objetivos desta tarefa prendiam-se com a utilização do material Geoplano para construir figuras dada a área e mobilizando conhecimentos sobre a composição e decomposição de figuras. Ver ANEXO 6

Os primeiros exercícios no Geoplano – que pediam a construção, respetivamente, de retângulos com 3, 8 e 4 de área – não levantaram qualquer dificuldade para este aluno.

Vejamos, no entanto, em pormenor, como este aluno raciocinou para construir um retângulo com oito unidades de área:

Professora – Como é que pensaste, Vicente?

Vicente – Isto é três, não é? [apontando para a construção anterior que tinha feito no Geoplano]

Então meti aqui mais um quadrado e depois meti o dobro disto que é mais quatro.

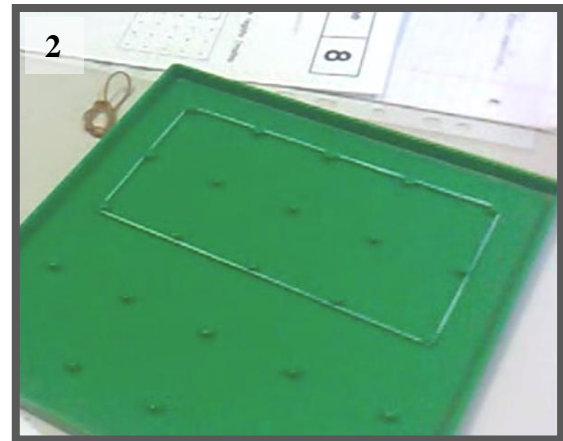
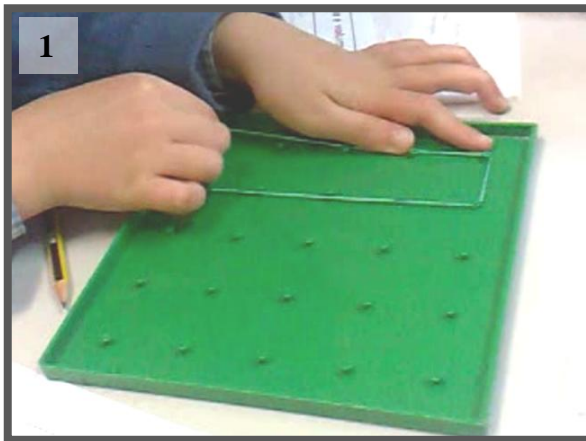


Figura 18 e 19 – Sequência de construção do retângulo com 8 unidades de área.

Professora – Então e como é que construiste o retângulo de quatro [unidades de área]?

Vicente – Então, isto era oito, foi só tirar uma fila...

O Vicente mostra que já opera com agilidade no que respeita a relações matemáticas fundamentais e faz uso de materiais como o Geoplano baseado nessas relações básicas, em vez de usar estratégias assentes em contagens unitárias para construir figuras neste suporte.

A construção de um triângulo com meia unidade de área também não levantou qualquer problema para o Vicente.

Após algumas tentativas, o Vicente conseguiu também construir facilmente um triângulo com uma unidade de área.

Professora – Como é que pensaste para construir esse?

Vicente – Pensei que... Então, vi como é que era a metade deste [como é que era um triângulo com meia unidade de área] e estas duas metades conseguem fazer uma unidade!

A construção de um triângulo com uma unidade e meia de área começou a levantar algumas questões e deu origem a uma discussão interessante e ao desenvolvimento de conceitos fundamentais.

O aluno construiu a seguinte figura:

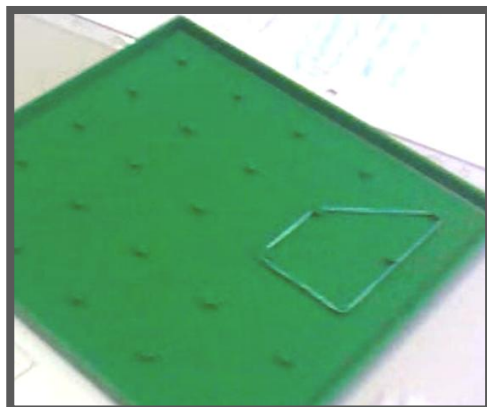


Figura 20 – Tentativa de construção de um triângulo com uma unidade e meia de área.

Professora – OK. Esta figura tem uma unidade e meia de área... Mas é um triângulo?

Vicente – Ah... Pois... Isso é que já vai ser *muita* difícil!

O aluno fez várias tentativas de construção de triângulos com unidade e meia de área: a sua estratégia era sempre baseada na construção de um triângulo e análise da sua área, por decomposição em algumas regiões, mas de forma bastante imprecisa. Resolvi intervir a propósito de uma construção do aluno.

Professora – Porque é que experimentaste essa forma?

Vicente – Porque esta tem espacinhos pequeninos e esses espacinhos é que vão dar as décimas... Professora – Hum... Olha, vou dar uma pistazinha... Deixa estar o elástico que puseste aí.

[Construo o retângulo visível na Figura 22.]

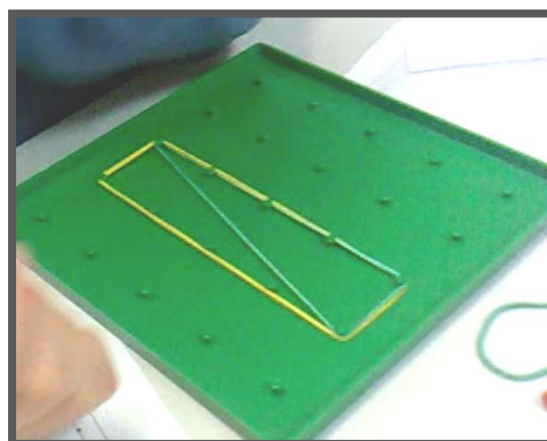
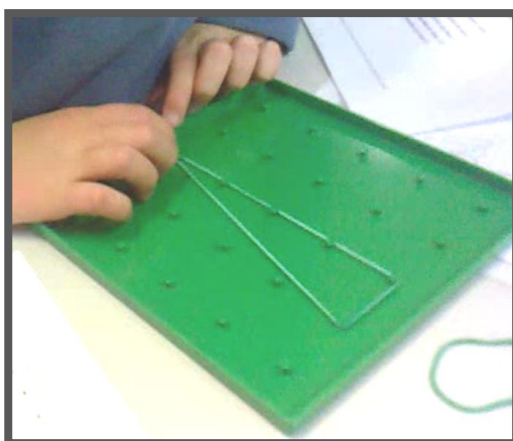


Figura 21 (à esquerda) e 22 (à direita) – Sugestão de estratégia de construção do triângulo com duas unidades de área (sequência)

P

Professora – O que é que eu construí?

Vicente – Tu construístes um retângulo... E metade desse retângulo [e aponta para o triângulo inscrito no retângulo] tem dois!

Professora – Esse retângulo que eu construí tem quanto de área?

Vicente – Tem quatro de área! E isto [aponta para o triângulo] é metade deste retângulo então tem dois de área... E eu quero...

O aluno parece – a partir do exemplo dado – ter conseguido compreender a estratégia em causa e foi capaz de mobilizá-la para a figura que lhe era pedida.

Professora – Tu queres o quê? Vai lá ver de novo à ficha... Tu queres um triângulo com uma unidade e meia de área...

Vicente – Ah... Então só tenho de perceber uma coisa... Tenho de ir ao três [constrói um retângulo com três unidades de área] e fazer metade disto!

Professora – Então esse triângulo tem quanto?

Vicente – Tem um vírgula cinco, porque este tem três.

Professora – Tem um e meio de área... Então regista.

Usar a ideia da decomposição de figuras para construir outras com determinada área pedida, parece ser uma estratégia intuitiva nalgumas situações e com materiais manipulativos.

No caso do Vicente, e concretamente no trabalho com o Geoplano, usar a ideia – já abordada em experiências anteriores com outros materiais – da decomposição do retângulo em dois triângulos retângulos iguais, para usar o sistema de dobros/metades na obtenção de determinados triângulos, não foi imediata para este aluno. Torna-se necessário que o professor “mostre” este caminho, tornando explícita esta estratégia.

No entanto, quando foi pedido ao aluno que construísse um triângulo com quatro unidades de área – que podia ser facilmente obtido através desta ideia – o Vicente recorreu – novamente – a outra estratégia mais centrada na contagem unitária de unidades de medida (Figura 23).

Vicente – Temos aqui um de quatro de área! [apontando para a construção que tinha feito no Geoplano e referindo-se ao triângulo com quatro unidades de área]

Professora – Então, explica lá.

Vicente – Pode-se riscar o Geoplano?

Professora – Claro.

Vicente – Então temos aqui um quadrado, isto vale um [1]; depois temos aqui mais outro [2]; e temos aqui mais outro [3]; e temos aqui uma metade de um quadrado e outra metade de um quadrado [4].

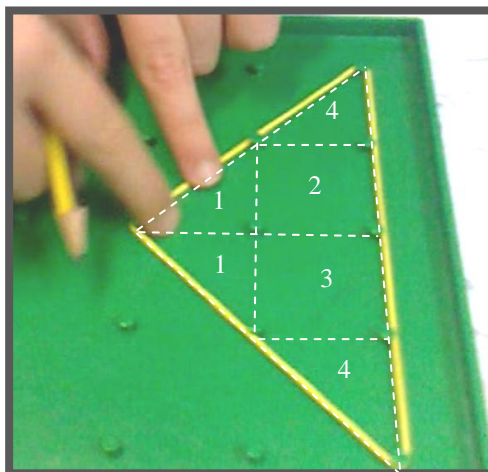


Figura 23 – Contagens unitárias realizadas pelo Vicente na construção de um triângulo com quatro unidades de área

O aluno, apesar de considerar decomposições de uma unidade de medida contabilizando as suas metades, voltou a uma estratégia centrada na contagem de unidades que compõem a figura.

Professora – Muito bem. Mas, então, não desmanches este e tenta arranjar outra forma de fazer um triângulo com quatro de área.

[O aluno, num processo de tentativa e erro e sem uma estratégia evidente tenta construir outro triângulo com a mesma área. Resolvo intervir.]

Professora – Tenta ir pelo mesmo tipo de raciocínio com que encontraste este [aponto o registo do triângulo com uma unidade e meia de área].

Com alguns avanços, recuos e algumas hesitações, o aluno fez várias tentativas baseadas nesta ideia até que, partindo da construção de um retângulo com oito unidades de área, construiu um triângulo com metade da área.

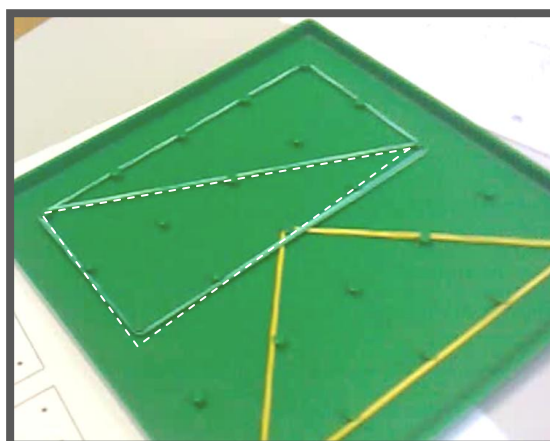


Figura 24 – Outra construção possível de um quadrado com quatro unidades de área.

Professora – Também tem quatro esse?

Vicente – Tem!

Apesar de o Vicente mostrar ser um aluno com estratégias bastante flexíveis – e que sobretudo tem capacidade de rapidamente se apropriar de novas estratégias quando essas lhe são tornadas explícitas – é evidente que o aluno, no caso desta tarefa, como noutras, tem alguma tendência para usar estratégias que implicam a enumeração de unidades de medida, ainda que revele uma grande agilidade a lidar com a ideia de composição de unidades a partir das suas partes, sobretudo, metades.

TAREFA 7

Os objetivos desta tarefa, tal como na anterior, prendiam-se com a utilização do material Geoplano para construir figuras dada a área, mobilizando conhecimentos sobre a composição e decomposição de figuras. Ver ANEXO 7

Perante a tarefa que lhe foi apresentada, o Vicente revelou o seu empenho habitual.

A construção de um quadrado com quatro e duas unidades de área não constituiu qualquer tipo de dificuldade para o Vicente.

O quadrado com oito unidades de área (Figura 25) foi *descoberto* pelo aluno através de um processo de tentativa-erro, não surgindo, portanto, a partir de uma estratégia explícita. No entanto, após a construção, a análise da figura foi mediada por mim.

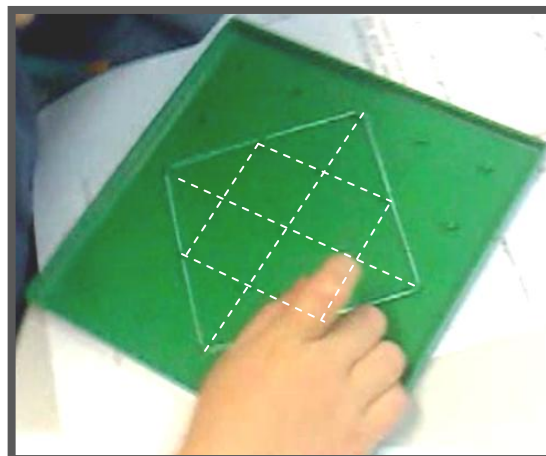


Figura 25 – Quadrado com oito unidades de área

O momento de análise de figuras parece-me fundamental e imprescindível para que se vão desenvolvendo conceitos fundamentais, sobretudo se o aluno não foi capaz de autonomamente definir uma estratégia para a construir.

Professora – Então, o que é que vês neste quadrado?

Vicente – Hum... Vejo quatro quadrinhos daqueles no meio [unidades de medida] e os triângulos dois a dois que é um... Por isso é $4 + 1 + 1 + 1 + 1$, que dá 8.

Professora – Exato. Então, temos aqui, outra vez, a ideia muito importante que aqueles dois triângulos – as metades – formam uma unidade, mesmo que não estejam na forma de quadrinho...

Foi muitas vezes necessário – e relembre-se o papel de investigador-professor que tive nesta investigação – tornar explícitas junto do aluno algumas ideias importantes e fazer o reforço de estratégias baseadas em ideias fortes acerca da composição e decomposição de figuras e/ou relacionadas com capacidades de visualização espacial.

A construção do quadrado com cinco unidades de área revelou-se um problema para o aluno. As suas estratégias tiveram de ser muito apoiadas, mas penso que o Vicente desenvolveu novas estratégias de construção de figuras no Geoplano.

Professora – Então rapaz! Como é que isso vai?

Vicente – Que coisa mais difícil... Eu já fiz isto aqui e não estou a perceber como acrescentar mais um quadrado...

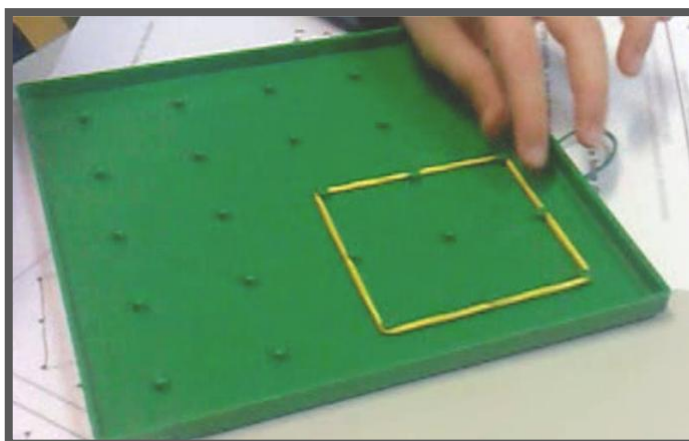


Figura 26 – Construção que suscitou dúvidas ao Vicente

Professora – OK. Então vou ajudar-te e construir aqui o quadrado a mais que tu queres! O resto “anda à volta dele”... Só tens de arranjar maneira de pôr aí mais quatro unidades de maneira que forme um quadrado...

A estratégia que tentei promover baseou-se, sobretudo, na ideia anteriormente desenvolvida da decomposição de um retângulo em dois triângulos retângulos iguais.

No entanto, apesar desta questão – que ainda não está consolidada de uma forma consistente para o Vicente – a construção do quadrado de cinco unidades de área ainda acarreta questões básicas de visualização espacial e, mais uma vez, se realça que este aluno ainda tem alguma dificuldade em visualizar alguns elementos de formas geométricas quando estas não estão numa posição estereotipada – com um dos lados na horizontal, no caso dos quadrados e triângulos.

Vejamos algumas das tentativas autónomas do aluno:

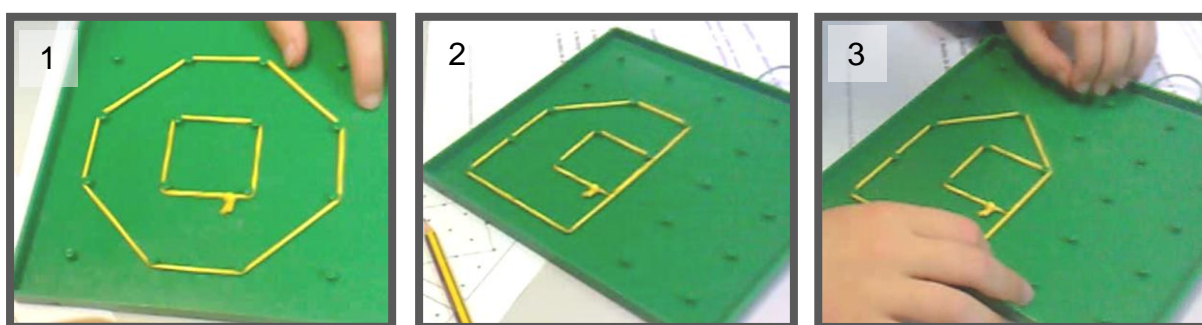


Figura 27 – Diferentes tentativas do Vicente (sequência)

Foi necessário apoiar o Vicente passo a passo numa estratégia, uma vez que o aluno estava a desanimar com várias tentativas frustradas...

Começámos a construir o quadrado com cinco unidades de área com base na ideia de triângulos com uma unidade de área obtidos a partir da decomposição de um retângulo com duas unidades de área.

Professora – Vou ajudar-te... [Construí o triângulo visível na imagem 1 da sequência ilustrada na figura 29] Qual é a área deste triângulo que eu construí?

Vicente – Um de área.

Professora – Porquê?

Vicente – Porque isto aqui, punha-se aqui e formava um quadrado. [apontando na figura a decomposição e recomposição do triângulo que estava a sugerir]

Professora – Então, já temos dois [de área]... Queremos cinco de área.

[O Vicente faz algumas tentativas ilustradas na figura 28]

Isso que construiste é um quadrado?

Vicente – Não...

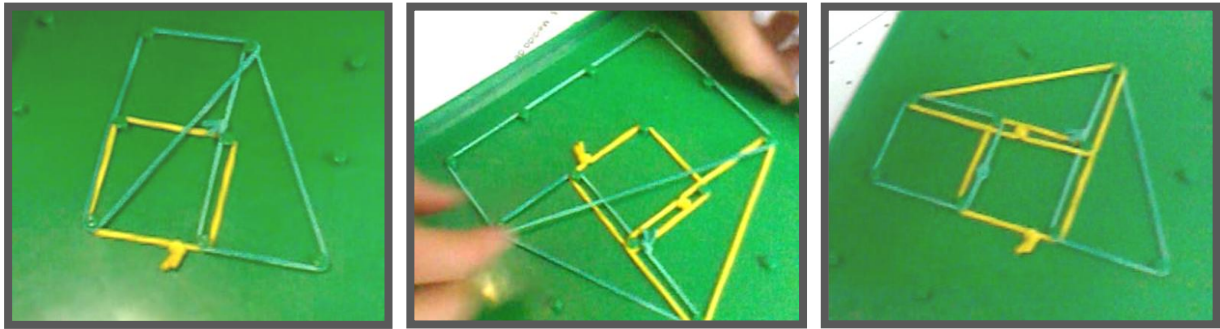


Figura 28 – Alguns erros de visualização durante a construção do quadrado (sequência)

O Vicente, com algum apoio, parecia compreender esta estratégia – as dificuldades sentidas durante este processo prenderam-se com dificuldades de visualização na colocação dos triângulos.

Professora – Então vou construir mais um triângulo igual ao de há bocado...

[Contruí a figura visível na imagem 2 da sequência ilustrada na figura 29]

Já pus mais quanto de área?

Vicente – Puseste mais um...

Professora – Então agora já consegues ver aí o tal quadrado com cinco [unidades] de área que queríamos inicialmente?

Vicente – Hum... [O aluno parecia entusiasmado e observava a figura com muita atenção]

Professora – [Ao fim de algum tempo...] Vicente, posso construir mais um triângulo daqueles?

Vicente – Sim...

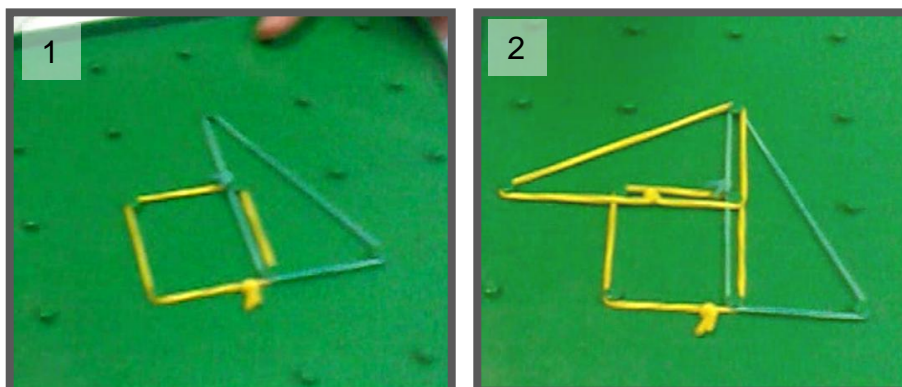
[Contruí mais um triângulo e obtive a figura visível na imagem 3 da sequência ilustrada na figura 29]

Vicente – Ah sim! Claro... Que burro!

Professora – Não digas isso... O que é que falta agora?

Vicente – Mais um triângulo destes. Vou fazer!

Eis a construção do quadrado com cinco unidades de área passo a passo:



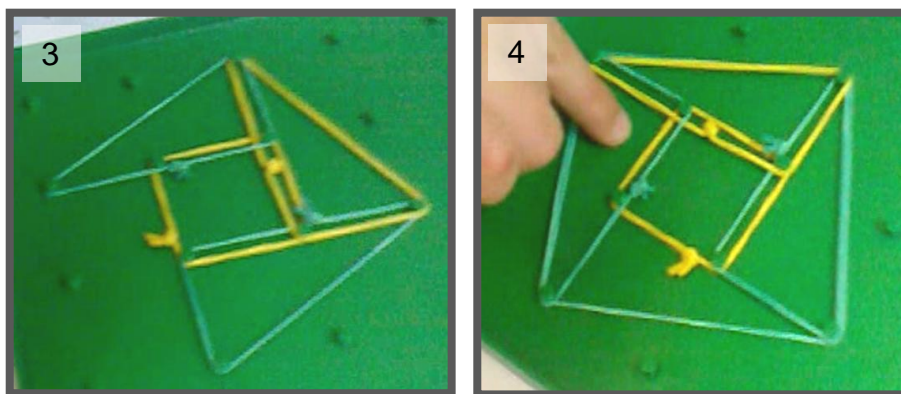


Figura 29 – Construção no Geoplano de um quadrado com cinco unidades de área, passo a passo.

No final, o aluno foi capaz de obter o quadrado com cinco unidades de área e, embora o seu trabalho tenha sido muito *andaimado* por mim, parece ter sido capaz de ir compreendendo a estratégia.

A construção do quadrado com dez unidades de área, teve por base a mesma estratégia e o Vicente voltou a mostrar as mesmas dificuldades.

Mais tarde, noutra situação de trabalho – já fora do âmbito desta tarefa e desta investigação – foi abordada em coletivo com os alunos a estratégia de enquadramento num caso semelhante ao anteriormente descrito. O Vicente parece tê-la compreendido embora continuasse a evidenciar as dificuldades de visualização já referidas.

TAREFA 8

Com esta tarefa pretendia-se que os alunos pavimentassem figuras com o material Blocos Lógicos e considerassem uma unidade de medida que lhes permitisse determinar áreas. Ver ANEXO 8

Esta tarefa revelou-se muito simples para este aluno, que a explorou com facilidade.

O Vicente sobrepôs as formas do material Blocos Padrão às figuras representadas no papel e usou um triângulo verde – unidade de medida de área.

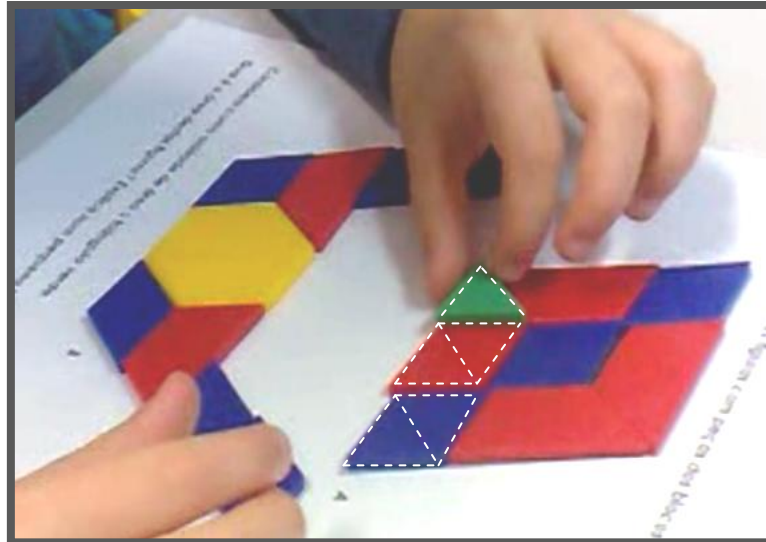


Figura 30 – Pavimentação da figura com peças do material Blocos Padrão.

Vicente – Hum... Este é três [o trapézio vermelho], este é dois [o losango azul], então é cinco... Mais dois, mais três...

O aluno continuou a contagem: à medida que apontava uma peça ia somando o número de triângulos verdes em que ela podia ser decomposta, até que chegou o resultado final de dezoito triângulos verdes de área.

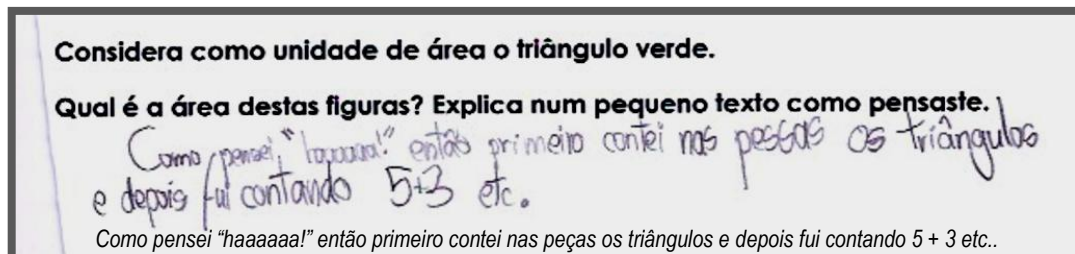


Figura 31 – Resposta escrita do Vicente

O raciocínio foi em tudo semelhante na figura B.

O Vicente revelou à vontade com a ideia de o triângulo verde ser a unidade de medida de área a considerar na medição. Verificou quantos triângulos verdes “cabiam” em cada forma e contou sequencialmente o número total de triângulos que equivaliam às peças usadas para construir as figuras A e B.

TAREFA 9

Com esta tarefa pretendia-se que os alunos pavimentassem figuras com o material Blocos Lógicos e considerassem uma unidade de medida que lhes permitisse determinar áreas. Ver ANEXO 9

Esta tarefa exigia que o aluno encontrasse uma estratégia que lhe permitisse afirmar qual das duas figuras – A ou B – tinha maior área.

Não era dada qualquer indicação sobre a unidade de medida de área a considerar, mas note-se que esta tarefa surge no seguimento da anterior – em que o triângulo verde é considerado unidade – e foram elaboradas em momentos temporalmente próximos.

O Vicente começou por compor as figuras com as peças do material Blocos Padrão, sem dificuldades.

Intuitivamente – talvez induzido pela tarefa anterior – considerou o triângulo verde como unidade de área.

Relativamente à figura B, o aluno rapidamente concluiu que a sua área era de dezoito triângulos verdes, uma vez que cada hexágono podia ser decomposto em seis triângulos.

O tipo de raciocínio que usou para medir a área da figura A baseou-se também na ideia da contagem de triângulos verdes em que as outras peças podiam ser decompostas.

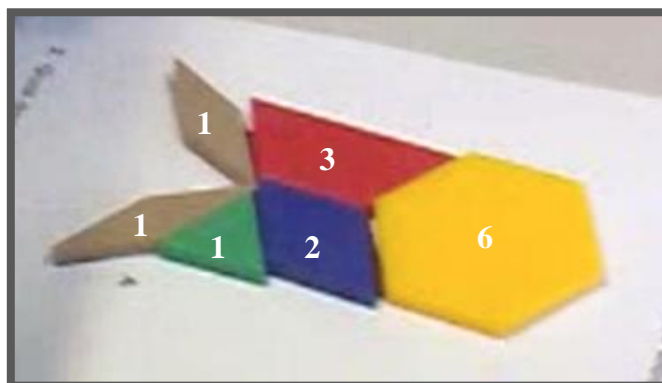


Figura 32 – Primeira medida da área da figura A

No entanto, relativamente ao losango bege, o aluno comparou esse losango com o triângulo verde – numa observação meramente visual, sem grande rigor – e concluiu que o losango bege equivalia a uma unidade de área.

Vicente – Muito interessante porque... Hum... Se o dividir ao meio estes dois triangulozinhos dão um [referindo-se ao losango bege]. OK, é um!

Professora – Vicente, preciso que me expliques uma coisa... Este [losango bege] tem área de quanto?

Vicente – De um! [prontamente]

Professora – Como é que sabes? Como é que tens a certeza?

Vicente – Tenho a certeza porque conseguimos ver que este triângulo que é um de área e que este coiso, este losango... Eu posso pôr aqui [faz sobrepor as duas peças] e vejo que vai a metade... Então, eu sei que sobra isto aqui – vou fazer um risco na peça para dividir ao meio – e as duas juntas faz um!

Professora – Vicente, então eu vou juntar duas peças destas [losangos bege] e vou riscá-las para dividi-las ao meio, como tu fizeste.

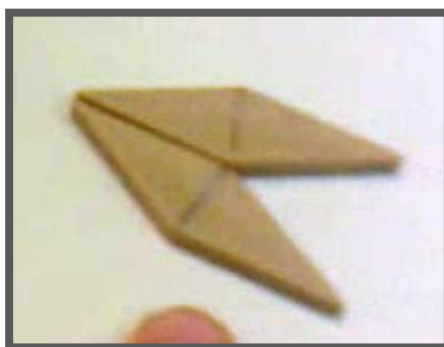


Figura 33 – Detalhe da composição feita com o material Blocos Padrão

Professora – Agora põe lá o triângulo aí em cima a ver se coincide...

Vicente – Sim, isto vai fazer um triângulo...

Professora – Observa com atenção... O que é que está a acontecer?

[O Vicente observa as peças com muita atenção durante algum tempo]



Figura 34 – Comparação da unidade de medida com os losangos bege

Vicente – Hum! Só querem me enganar! [risos]

Professora – Parecia, não parecia?

Vicente – Sim... Então vai ter de ser “um vírgula cinco”... Não... “um vírgula qualquer coisa”...

Após tomar consciência que o losango bege não valia exatamente um de área, o aluno faz uma estimativa da medida do losango bege referindo um número decimal – revelando uma noção bastante consolidada sobre o assunto.

Professora – Sim, mas olha, de qualquer das formas aqui perguntam-te qual das figuras tem maior área, não te perguntam qual é a área de cada uma... Perguntam-te qual é que é maior...

Vicente – Esta. [aponta prontamente para a figura B]

Professora – Porquê?

Vicente – Porque as peças desta figura [figura A] todas juntas nunca podem fazer dezoito [área da figura B em triângulos verdes] como na figura B.

Professora – Mesmo com aquele bocadinho de losango, que ainda agora vimos, a mais?

Vicente – Mesmo com aquele bocadinho a mais... Porque olha aqui a diferença... [entre a área de uma figura e da outra] São quatro de diferença...

Professora – Hum, hum... Já percebi a tua ideia.

O aluno rapidamente compreende que apesar do losango bege não equivaler exatamente a uma unidade de área, a figura A nunca poderá ter maior área que a B, na qual contou mais triângulos considerados como unidade-base.

Eis a forma como o explicita por escrito.

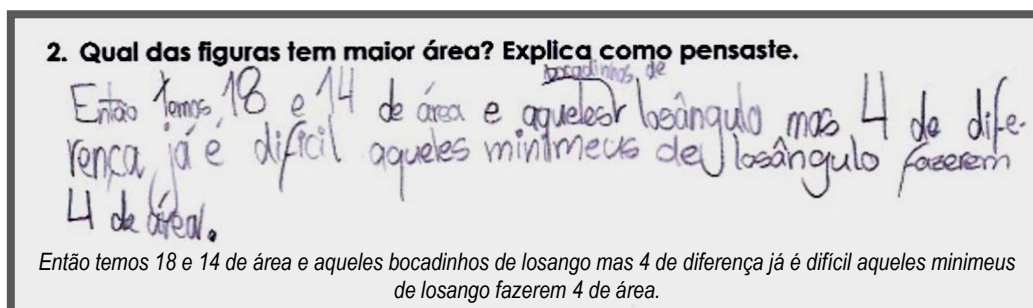


Figura 35 – Registo escrito do aluno.

Síntese do percurso do caso Vicente

O percurso do Vicente fica caracterizado pelo empenho e grande envolvimento com que participou em todas as sessões. O que – tal como referido anteriormente na caracterização dos participantes no estudo – é uma *marca* deste aluno no que respeita ao trabalho escolar em geral, e em particular na área da matemática.

É um aluno que sente prazer em situações de descoberta matemática e que é persistente perante tarefas que se constituem para ele como um desafio, como algumas das que foram anteriormente apresentadas.

O Vicente é globalmente um aluno que revela competências matemáticas transversais e específicas bastante consolidadas e revelou uma grande capacidade de mobilização de conhecimentos e estratégias a novas situações.

Pode afirmar-se que o percurso do aluno foi evolutivo e que progrediu nas suas aprendizagens e na exploração de diferentes tipos de raciocínios fundamentais no desenvolvimento de tarefas e problemas relacionados com grandezas geométricas como a área. Tal fundamenta-se na descrição feita anteriormente sobre a forma como o Vicente explorou cada uma das tarefas e nas evidências – imagens e transcrições de diálogos – que me pareceram ilustrativas e pertinentes.

Uma das questões fundamentais que no âmbito desta investigação importa referir prende-se com a ideia da definição de uma unidade de medida adequada e a mudança de unidade. Estas são ideias matemáticas em que o aluno parece ter alargado e consolidado o seu conhecimento. Na tarefa 5, por exemplo, apesar de ter evidenciado alguma dificuldade ao início em compreender que teria de definir uma unidade de medida adequada para medir a área das figuras, e em considerar uma unidade de medida que não fosse um quadrado, no fim, o aluno foi capaz de compreender a necessidade de definir uma unidade de medida. Realce-se que este aluno nunca evidenciou dificuldades em considerar unidades compostas, como no caso das tarefas 1 e 2. Na tarefa 4 o aluno evidencia que já é capaz de realizar com facilidade mudanças de unidade e compreender o efeito que tal tem no resultado obtido.

Relativamente ao uso da composição e decomposição de figuras geométricas para o estudo da área, o Vicente evidenciou ser capaz de utilizar este tipo de raciocínio com compreensão.

Apesar de ter demonstrado um bom entendimento global sobre este tipo de raciocínio e uma boa capacidade de visualização espacial, realço que houve muitas vezes a necessidade de pôr em prática o meu papel pedagógico de professora e promover explicitamente esta estratégia junto dele. Por exemplo durante a realização da tarefa 6, na construção de alguns dos triângulos pedidos ou na tarefa 4 quando o Vicente teve de transformar o quadrado que tinha construído com as sete peças do *Tangram* num triângulo, entre outras situações já descritas neste capítulo.

Não obstante, em algumas situações em que era requerido que decompusesse figuras o aluno revelou algumas dificuldades. Por exemplo na tarefa 3 – quando lhe foi pedido que comparasse a área do trapézio com a do losango: não conseguiu visualizar que devia decompor o retângulo em dois triângulos retângulos iguais para obter a figura que pretendia.

O aluno evidenciou alguma tendência para enveredar por estratégias baseadas na ideia da enumeração de unidades de medida, como podemos observar na tarefa 6 quando lhe foi pedido que construísse um triângulo com quatro unidades de área.

Estudo de Caso: Alice

Tal como referido na caracterização dos alunos escolhidos para os estudos de caso, a Alice foi uma aluna que, ao longo das sessões, demonstrou um empenho oscilante. Ainda assim, assumiu uma postura de trabalho, embora, por vezes, caracterizada por alguma distração.

No cumprimento dos meus deveres éticos, relembro, também a Alice conhecia os objetivos do estudo.

TAREFAS 1 e 2

Os objetivos desta tarefa prendiam-se com o desenvolvimento da noção de área como o espaço no plano ocupado por uma figura e implicava que os alunos fossem capazes de comparar áreas por sobreposição de figuras. Ver ANEXO 1 e 2

Perante as primeiras tarefas, a Alice evidenciou um raciocínio em tudo semelhante ao descrito anteriormente relativamente ao aluno Vicente.

Escolheu para unidade de medida de área o quadrado disponível no envelope, mediu cada uma e concluiu sobre a área das figuras.

No entanto, perante figuras compostas também por triângulos, a Alice contou indiscriminadamente os triângulos e os quadrados como unidade de área.

No entanto, rapidamente percebeu, quando chamada à atenção, que os dois triângulos juntos formavam um quadrado e que, portanto, dois triângulos contavam como um de área.

Professora – Estás a medir a área dessa figura com que unidade?

Alice – Quadrinhos [respondeu prontamente].

Professora – Então volta a medir a área com atenção...

Alice – Ah! Dois triângulos conta um [juntou os triângulos de forma a formarem um quadrado]. Então já sei! Estava mal!

Apesar da sua precipitação, a Alice pareceu compreender rapidamente que teria de considerar os quadrados e composições de outras figuras que tivessem a mesma área que um quadrado.

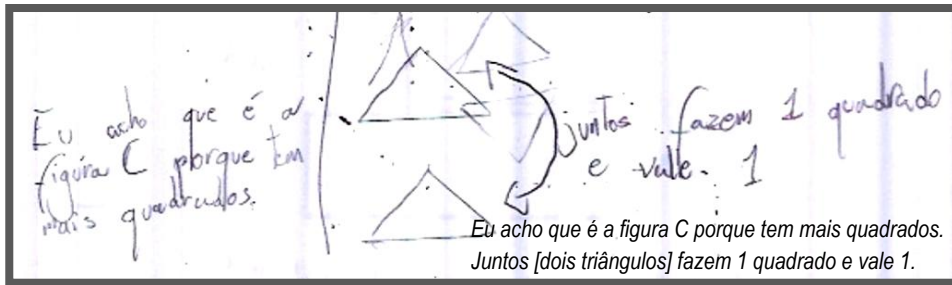


Figura 36 – Registo escrito da aluna.

O conceito de área parece ser claro para a aluna, embora o processo de medição tenha ficado marcado por um erro que indicia que a Alice ainda não lida de uma forma ágil com unidades de medida decompostas.

TAREFA 3

Esta tarefa tinha como objetivo decompor uma figura em outras, com o intuito de comparar as suas áreas por sobreposição. Ver ANEXO 3

A Alice começou por tentar provar que o losango teria a mesma área que o trapézio. Iniciou o seu trabalho com uma estratégia muito semelhante à estratégia inicial do aluno Vicente para esta figura: alinou os lados das figuras e começou a cortar as partes que excediam os lados do losango. Os seus cortes não eram baseados em nenhuma estratégia rigorosa.

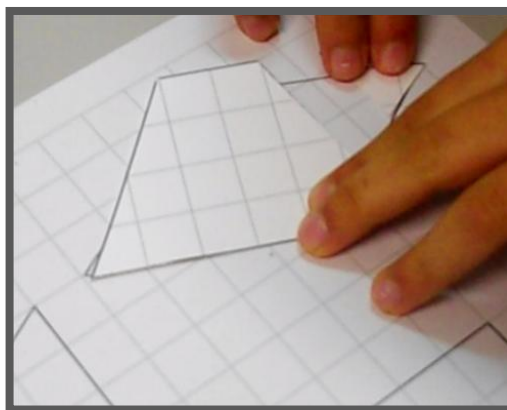


Figura 37 – Estratégia inicial da Alice para a figura B

Autonomamente tomou consciência da imprecisão desta estratégia e abandonou-

a.

Alice – Eu afinal vou cortar todos os quadrinhos do trapézio.

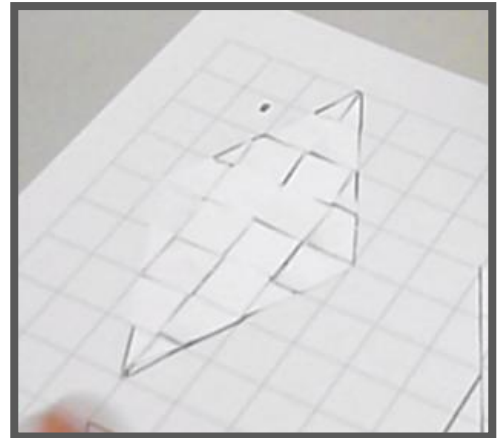
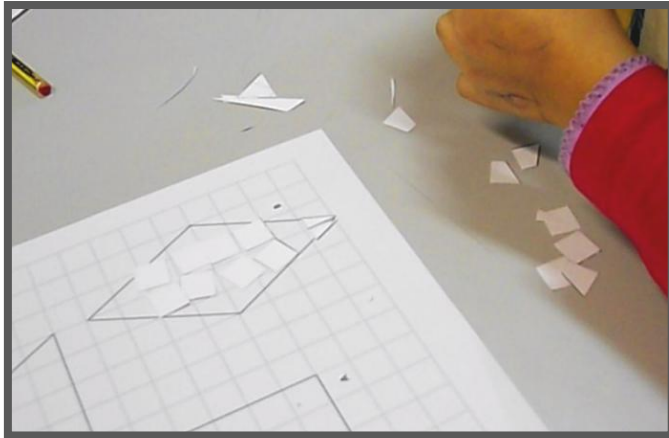


Figura 38 (à esquerda) e 39 (à direita) – Estratégia de construção do losango da Alice (sequência)

Conseguiu concluir que o trapézio e o losango tinham, portanto, a mesma área (Figura 39).

A estratégia que a aluna seguiu baseava-se na ideia de “reduzir” o trapézio à unidade-base que a aluna considerou ser um quadrado da grelha e não através de uma estratégia que assentasse na decomposição do trapézio noutras figuras úteis.

Apesar de ter sido possível para Alice provar que ambas as figuras tinham a mesma área, foi uma estratégia que se revelou morosa e com algum grau de imprecisão.

Para o quadrado – figura B – a aluna voltou a começar por alinhar os lados das figuras. Eu intervim e sugeri que alinhasse pela quadrícula – intervim na tentativa de a conduzir a uma estratégia diferente da anterior, tentando que fosse mais focada na decomposição do trapézio em figuras de referência.

Desta feita, a Alice conseguiu rapidamente visualizar um triângulo (Figura 40) que recortou e usou para compor o quadrado. Depois de recortado, teve alguma dificuldade em visualizar em que posição devia colocar o triângulo, uma vez que teve de o “virar ao contrário” (Figura 41), mas no fim conseguiu concluir que o trapézio e o quadrado tinham a mesma área.

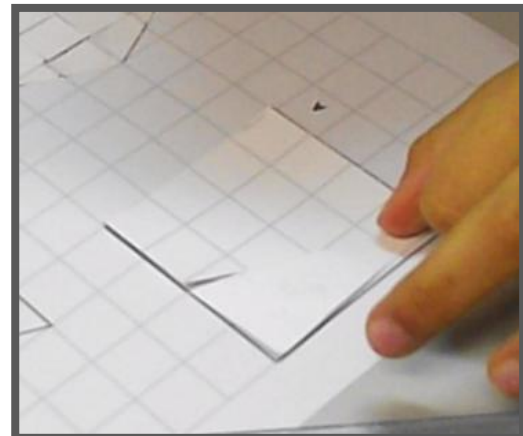
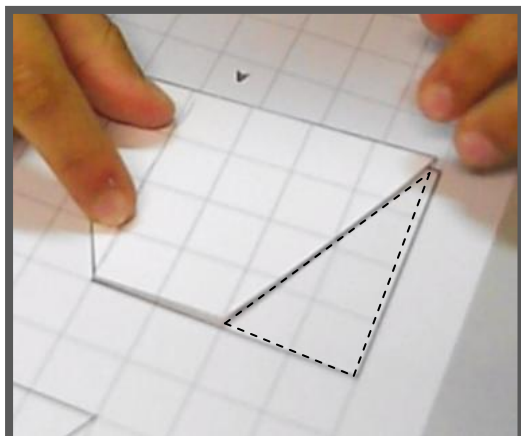


Figura 40 (à esquerda) e 41 (à direita) – Estratégia da Alice para a figura A

Realce-se mais uma vez a dificuldade da aluna em visualizar e concretizar algumas transformações e movimentos das figuras para compor outras.

Com esta tarefa, a aluna pôde explorar dois tipos de raciocínios diferentes: relativamente ao losango usou uma ideia baseada na iteração de uma unidade-base para construir a figura. No caso do quadrado, decompôs a figura dada noutras e recompôs-las de modo a provar que ambas as figuras tinham a mesma área.

TAREFA 4

Esta tarefa tinha como objetivos que, a partir da manipulação do material *Tangram*, se construíssem figuras mobilizando conhecimentos sobre a composição e decomposição de figuras e que explorasse o uso de diferentes unidades de medida. Ver ANEXO 4

Aparentemente num processo de tentativa-erro, a Alice começou a construir vários quadrados possíveis com as peças do *Tangram* (Figura 42).

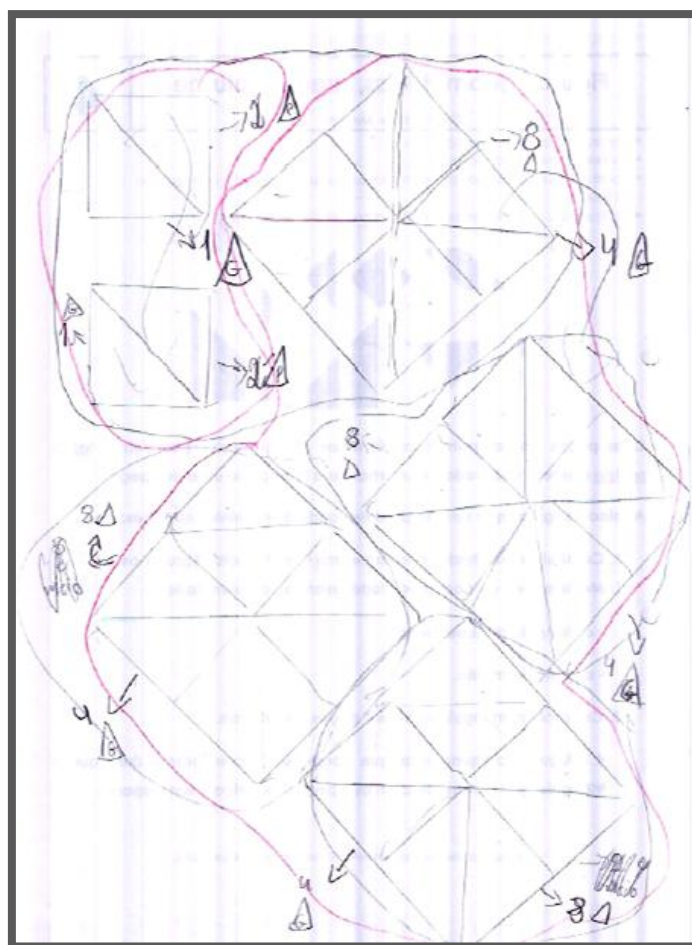


Figura 42 – Registo dos quadrados construídos com as peças do *Tangram*.

Quando analisou as figuras para investigar se algumas teriam a mesma área, começou por agrupar figuras construídas com o mesmo número de peças, não considerando, portanto, a grandeza área.

Professora – O que é a área, Alice?

Alice – Espera lá! Eu estou baralhada!

Professora – O que é que tu estavas a pensar [ao fazeres esses agrupamentos]?

Alice – Estava a fazer... Estava a contar tudo [apontando para cada peça].

Professora – Estavas a contar o número de peças? Então, vou voltar a fazer a pergunta: quais é que têm a mesma área?

[Desta vez, a aluna assinalou os conjuntos de quadrados com a mesma área sem hesitar e sem se enganar.]

Professora - Esses grupos que fizeste têm o quê?

Alice – Têm a mesma área!

Tal como referido na caracterização desta aluna, o seu trabalho é várias vezes perturbado por alguma distração. Rapidamente, mais uma vez, com apenas uma pequena chamada de atenção, mostra que afinal tem consciência do conceito de área.

Para medir a área de cada quadrado, usando como unidade o triângulo mais pequeno (segunda questão da tarefa), a Alice usou um dos triângulos para medir a área de todos os quadrados que tinha desenhado. Registou a área de todos os quadrados considerando como unidade de medida o triângulo mais pequeno do *Tangram*, sem dificuldade e revelando uma boa competência de visualização e segurança no processo de medição que estava a efetuar (Figura 43).

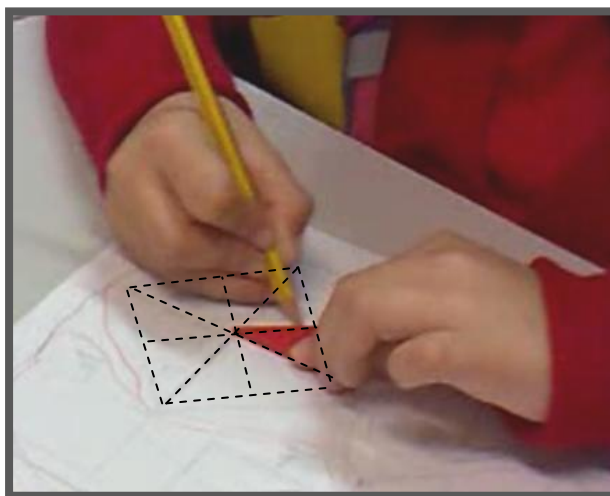


Figura 43 – Medição da área das figuras construídas considerando o triângulo mais pequeno como unidade.

Quando começou a medir os quadrados considerando como unidade de medida o triângulo médio, começou pelo quadrado representado a cinzento no esquema seguinte, sobrepondo-lhe o triângulo que estava a servir como unidade de medida.

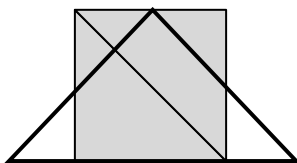


Figura 44 – Esquema da estratégia usada pela Alice

Alice – Eu podia cortar estes “coisos” aqui [referindo-se aos triângulos excedentes].

Professora – E se fizesses isso, se desse para cortar, o que é que ia dar [de área]? Não vamos cortar, mas podes riscar a peça.

[A aluna risca a peça, evidenciando dois triângulos mais pequenos – como no esquema acima].

Professora – Isso diz-nos que a área dessa figura é quanto?

[A aluna parecia baralhada]

Professora – Vou reformular a questão: Esta figura [aponto para o quadrado] medida com triângulos destes [aponto para o quadrado que estávamos a usar como medida de área] qual é a sua área?

Alice – Um! [prontamente]

Nesta tarefa, a aluna, ao comparar a figura a medir com a unidade de medida, já aparenta compreensão sobre a ideia de que a unidade de medida não tem de ter necessariamente a mesma forma da figura a medir.

Para os restantes quadrados, foi fácil para a Alice medir a área com os triângulos médios, uma vez que correspondia a um quarto da figura.

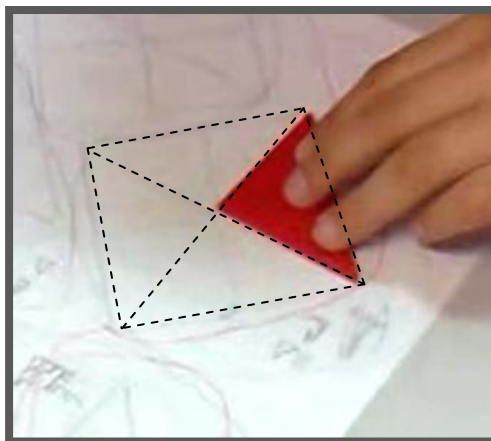


Figura 45 – Medição da área dos quadrados construídos com as peças do *Tangram*

Concluiu muito prontamente, sem hesitações, que todos os quadrados “*daquele tamanho*” tinham quatro unidades de área.

Para melhor avaliar como é que esta aluna compreendia e lidava com a mudança de unidade, questionei-a sobre o mesmo quadrado ter de área 8 unidades – se medido com os triângulos mais pequenos – e 4 unidades de área se medido com o triângulo médio:

Professora – Por que é que a área era oito com os triângulos pequenos e, agora, é quatro com os triângulos médios? A área muda assim?!

Alice – Porque os triângulos mais pequenos são o dobro de mais pequenos que este triângulo... [referindo-se ao médio].

Professora – Eu acho que estou a perceber, mas explica-me melhor isso com as peças.

Alice - Porque 8 é dobro de 4. Então... hum... é quatro vezes mais pequeno....

A aluna é capaz de justificar o que acontece à área de uma figura se a medirmos com unidades de medidas diferentes e, mais importante, é capaz de relacionar as unidades de medida entre si e com a medida obtida. Embora, na tentativa de melhor se explicar, tenha cometido um erro ao dizer que o triângulo pequeno seria quatro vezes mais pequeno que o triângulo médio.

Professora – Qual é que é quatro vezes mais pequeno? Não percebi... Explica-me outra vez. Usa as peças. Vou-te dar um triângulo médio e dois triângulos pequeninos.

[A aluna cobre o triângulo médio com dois triângulos pequenos]

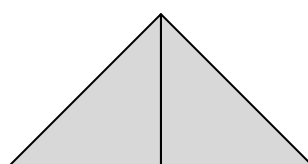


Figura 46 – Esquema que evidencia a comparação das diferentes unidades de medida

Professora – Hum... Estou a perceber. Só tenho dúvidas em relação àquela questão do quatro vezes mais pequeno... Quantas vezes mais pequeno é que o triângulo pequeno é em relação ao médio (aponto para as peças)?

[A aluna vai buscar uma régua para medir um dos lados do triângulo médio e compara-o com o lado do triângulo pequeno. Digo-lhe para abandonar essa estratégia. Insisto, apontando para as peças]

A aluna estava a abandonar uma estratégia baseada nas figuras e nas suas relações e estava a optar por um raciocínio baseado na medida linear.

Professora – Quantas vezes é que o triângulo médio é maior que o pequeno? Ou seja, de quantos triângulos pequenos precisas para fazer um dos médios?

Alice – Dois. [responde prontamente].

Professora – Então, ele [o triângulo médio] é quantas vezes maior?

Alice – Duas.

Professora – Pois! Se precisamos de dois triângulos pequenos para fazer um médio, é porque esse triângulo é duas vezes maior que os pequenos!

No final, foi capaz de concluir sobre as relações de dobro e metade envolvidas na medição dos quadrados tomando como unidade de medida dois dos triângulos no material *Tangram*.

TAREFA 5

Esta tarefa tinha como objetivos o desenvolvimento da noção de figuras equivalentes, bem como a mudança de unidades de medida consideradas. Ver ANEXO 5

A aluna começou a construir figuras com as peças triangulares dadas tendo em conta e respeitando as indicações expressas no enunciado. Obteve as seguintes figuras:

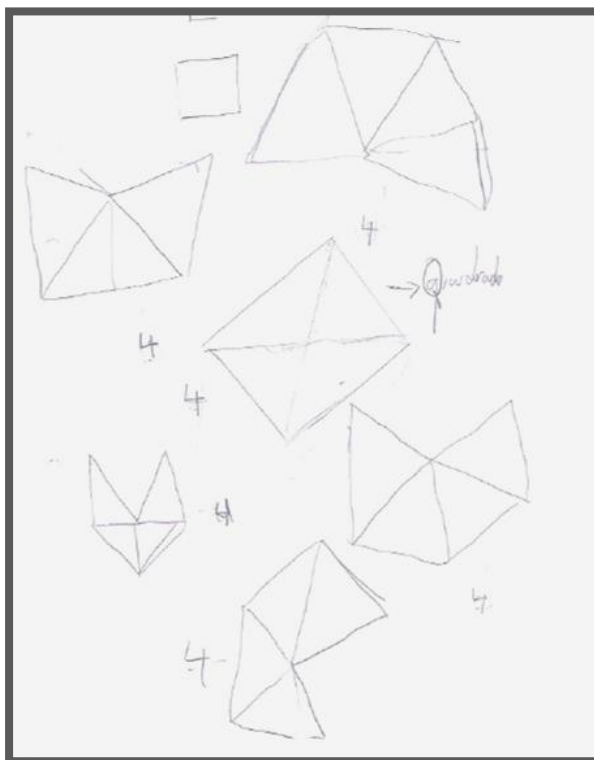


Figura 47 – Registo das figuras construídas pela Alice

Note-se que a aluna considerou com diferentes figuras iguais mas colocadas noutras posições espaciais.

Seguidamente era pedido à aluna que investigasse a área das figuras que tinha obtido e que concluísse sobre esse tema.

Relembro que, ao contrário de outras tarefas realizadas pela Alice, nada era indicado no enunciado sobre que unidade de medida usar.

Rapidamente a aluna, e sem verbalizar nada, registou que todas as figuras mediam 4 de área. O que aponta para que tenha considerado um triângulo como unidade-base.

Após isto levantei alguma discussão no intuito de chegarmos e conclusões.

Professora – Então o que é que podes concluir sobre estas figuras?

Alice – Que... [instala-se o silêncio]

Professora – Têm todas o quê? O que é que elas têm em comum?

Alice – Têm 4 peças...

Professora – E então têm todas 4 de área... Mas elas são todas iguais? A forma das figuras é igual?

Alice – Não...

Professora – Então o que é que nós podemos dizer sobre isto? O que é que podemos concluir?

Alice – Que têm a mesma área mesmo sendo diferentes! [após pensar um pouco]

Professora – São diferentes – a forma é diferente mas a área é a mesma. Isso mesmo!

A aluna parece ter compreendido a noção de figuras equivalentes, com base nesta situação concreta. Vejamos a forma como o registou por escrito.

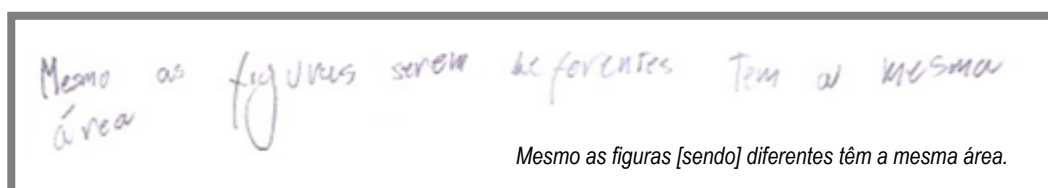


Figura 48 – Registo escrito da aluna

Como a aluna parecia perceber o conceito de figuras equivalentes envolvido, resolvi pô-la perante a situação inversa.

Professora – E pode haver... [desenho dois quadrados de dimensões diferentes] Que figuras são estas?

Alice – São quadrados...

Professora – Têm a mesma forma?

Alice – Têm... Mas os lados são maiores...

Professora – Então a área destas duas figuras – apesar delas terem a mesma forma – é igual?

Alice – Não! [Prontamente]

Professora – Pois não!

Relativamente ao exemplo apresentado, a Alice parece bastante à vontade com o conceito de equivalência de figuras e, da mesma forma, perante situações em que a forma é a mesma, mas a área é diferente.

TAREFA 6

Os objetivos desta tarefa prendiam-se com a utilização do material Geoplano para construir figuras dada a área e mobilizando conhecimentos sobre a composição e decomposição de figuras. Ver ANEXO 6

As primeiras construções no Geoplano não constituíram dificuldade para a aluna. A Alice conseguiu compreender bem que o menor quadrado possível do Geoplano seria a unidade de medida de referência e conseguiu, sem dificuldades construir os retângulos pedidos na ficha com três, oito e quatro unidades de área, respetivamente.

Relativamente à segunda parte da ficha que implicava a construção de triângulos com $\frac{1}{2}$; 1; 1,5 e 4 unidades de área, vejamos que estratégias e dificuldades foram sentidas pela aluna.

Relativamente ao primeiro triângulo pedido (com meia unidade de área), rapidamente a aluna construiu o seguinte triângulo, de uma forma muito intuitiva e imediata.

Alice – Então... É só partir o quadrado ao meio...

Professora – Sim, exatamente e ficas com um triângulo com meia unidade de área.

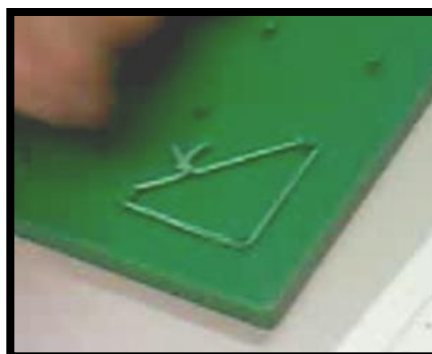


Figura 49 – Triângulo com meia unidade de área

Para construir o triângulo com 1,5 unidades de área, foi necessário, antes de mais, garantir que a aluna era capaz de relacionar aquele número racional não negativo na forma decimal com o contexto de construção de figuras com determinada área.

Alice – Agora vou construir um com *um vírgula cinco* de área... [a aluna parecia pouco segura e confusa].

Professora – *Um vírgula cinco* é o quê?

Alice – *Um vírgula cinco* não... [a Alice parecia cada vez mais baralhada]

Professora – *Um vírgula cinco* em termos de área o que é que significa? Cinco quê?

Desse *um vírgula cinco*, que cinco é esse?

Alice – É uma metade...

Professora – Exatamente! Então a figura que queremos tem um [de área] e mais uma metade! Então vá... Pensa lá.

Parece-me que foi fundamental para a Alice que tivesse sido levada a refletir sobre aquele número e o que ele representaria em termos de área para que pudesse avançar nas suas tentativas de construção do triângulo pedido no Geoplano. Agora, a aluna já sabia o que era pretendido.

Não obstante isto, a aluna sentiu grandes dificuldades na construção do triângulo pedido. Eis uma das suas tentativas:

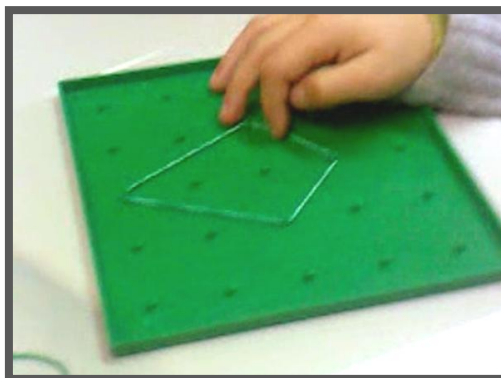


Figura 50 – Tentativa da Alice

A aluna nem estava a ser capaz de conjugar as duas indicações do enunciado da tarefa: que tinha de ser um triângulo e ter uma unidade e meia de área. Nas suas tentativas, a Alice parecia estar apenas focada na quantidade de área e não na forma das figuras que ia obtendo. Intervim novamente.

Professora – O que é que te estão a pedir no enunciado?

Alice – Para fazer um quadrado e mais um bocadinho...

Professora – Esse bocadinho é quanto?

Alice – É meio?

[A Alice continuava a mostrar insegurança, respondendo de forma interrogativa.]

Professora – Sim. Alice, temos de construir um triângulo com um e meio de área. Eu vou ajudar-te a pensar.

Construí no Geoplano a seguinte figura:

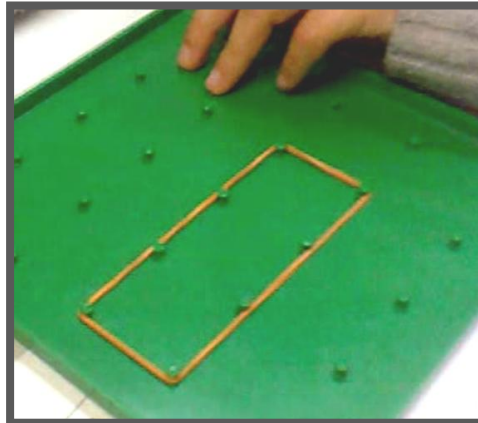


Figura 51 – Figura construída por mim no Geoplano

Professora – O que é que eu construí?

Alice – Um retângulo...

Professora – Com quanto de área?

Alice – Três...

Professora – Pois... Então, vê lá se isso te ajuda nalguma coisa...

A aluna faz algumas tentativas, mas não é capaz de usar o retângulo com três unidades de área para chegar ao triângulo pedido.

Professora – Alice, se essa figura tem três [de área], quanto é que é metade de três?

Alice – Hum... [A aluna hesita muito]

O conhecimento sobre a metade de um número ímpar, que implica reconhecer que o resultado será um número decimal, parece ter sido um problema para a aluna – parece estar a comprometer a sua capacidade de raciocinar em termos da área da figura pedida

Professora – Então se tu tiveres três coisas e quiseres dividi-las por duas pessoas, vais dar metade a cada uma...

Alice – Uma e meia? [algum tempo depois e muito hesitante e insegura]

Professora – Sim! Claro! Pronto e há alguma relação entre a área deste [aponto para o retângulo com 3 de área que tinha construído] e a área que tu queres que é 1,5?

Alice – Ai... Não sei...

Professora – Então... Se este retângulo tem três e nós queremos metade dessa área...

Podemos dividir o retângulo ao meio e ficar com 1,5 de área?

Alice – Sim...

Professora – E como é que vamos dividir o retângulo ao meio para dar um triângulo?

Com ajuda, a aluna chegou à seguinte figura:

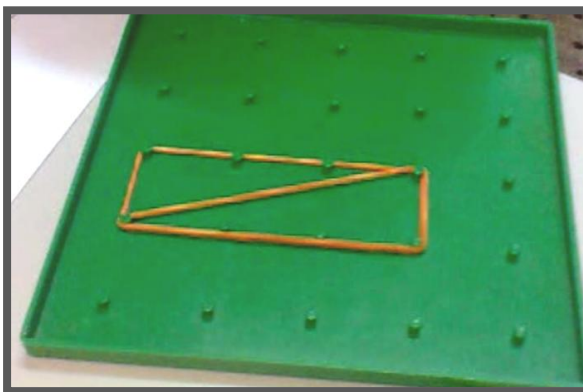


Figura 52 – Construção a que a Alice chegou

Professora – Esse triângulo que temos aqui [aponto para o triângulo obtido a partir da metade do quadrado] qual é a área dele?

Alice – 2... Não... Ai... [A aluna está muito baralhada]

Professora – Alice, quanto é que tinha o retângulo?

Alice – Três...

Professora – Então e quanto é metade de três? É que nós dividimos o retângulo ao meio e ficámos com dois triângulos... Cada um deles tem o quê [referindo-me à área]?

Alice – Ah... Acho que é 1,5!

Professora – Sim... Se nós tínhamos um retângulo com três e o dividimos ao meio... Vamos ficar com metade da área... Que é 1,5!

A aluna revelou muita dificuldade em compreender este raciocínio baseado na decomposição de uma figura – um retângulo – para obter triângulos com metade da área do retângulo inicial. Parecia não ser visualmente óbvio que os triângulos que se obtinham da decomposição – a partir dos vértices diagonalmente opostos – do retângulo correspondia a metades do mesmo.

Para além desta questão, creio que a aluna se sentia desconfortável e pressionada com a gravação que estava a ser feita do seu trabalho e que isso a terá perturbado, não estando calma e à vontade na relação comigo – professora/investigadora.

Relativamente ao último triângulo que a aluna tinha de construir, com quatro de medida de área, sugeri-lhe que seguisse o mesmo tipo de raciocínio usado anteriormente.

Construí a seguinte figura no Geoplano – um retângulo com 8 unidades de área:

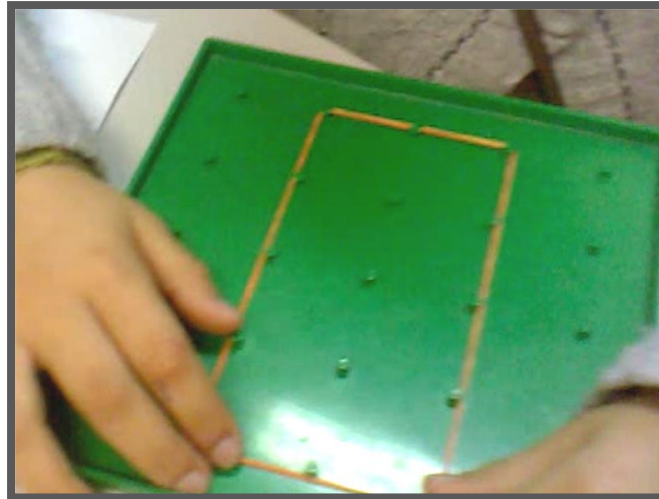


Figura 53 – Figura construída por mim no Geoplano

Professora – Qual é a forma desta figura?

Alice – Retângulo...

Professora – Qual é a área deste retângulo?

Alice – Oito de área...

Professora – Então e queremos um triângulo com 4 de área... Como é que vamos fazer?

A aluna construiu a seguinte figura a partir do retângulo dado:

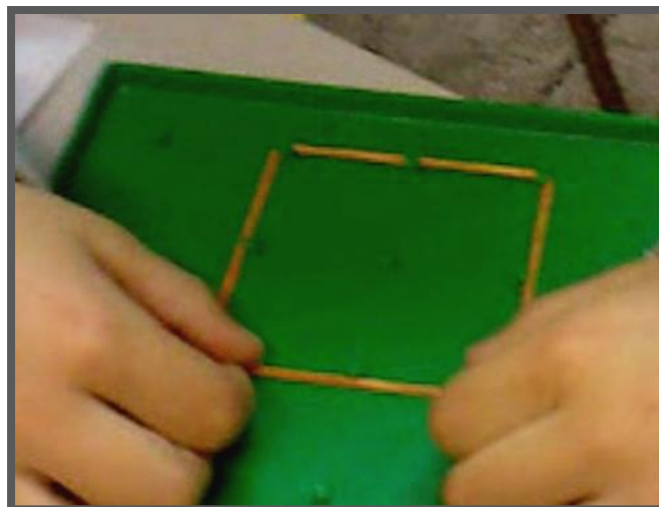


Figura 54 – Tentativa da Alice

Claramente – e tal como já existiam indícios disso na alínea anterior – a Alice só parece ser capaz de visualizar uma forma de dividir o retângulo ao meio: diminuindo para metade o comprimento de um dos pares de lados paralelos.

Professora – Isso que tu construístes também de 4 de área... Mas que forma é que tem?

Alice – Quadrado...

Professora – E nós queríamos era um triângulo... Pensa lá... Lembra-te do exercício anterior...

Num processo de tentativa-erro que, aparentemente, não estava relacionado com a estratégia de decomposição do retângulo em dois triângulos, a aluna constrói a seguinte figura, referindo que ela media 4 unidades de área.

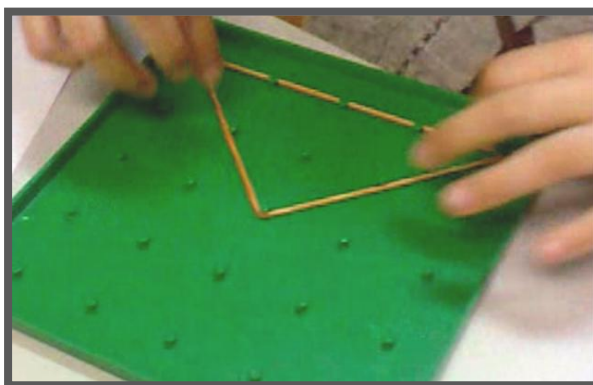


Figura 55 – Construção da Alice

A Alice revelou, ao longo desta tarefa, algumas dificuldades relacionadas com a decomposição de figuras, nomeadamente de retângulos.

Apesar de ter construído de uma forma imediata um triângulo com metade de uma unidade de área, justificando que essa figura tinha metade uma vez que era metade de um quadrado, não foi capaz de estabelecer o mesmo tipo de raciocínio perante figuras retangulares. A decomposição de retângulos a partir das diagonais parece ser, para a Alice, muito difícil. Por outro lado, revelou, ao longo da tarefa que a decomposição de retângulos a partir da diminuição para metade do comprimento de um dos pares de lados paralelos é bastante intuitiva.

TAREFA 7

Os objetivos desta tarefa, tal como na anterior, prendiam-se com a utilização do material Geoplano para construir figuras dada a área e mobilizando conhecimentos sobre a composição e decomposição de figuras. Ver ANEXO 7

Esta tarefa revelou ser difícil para a aluna. A Alice apenas foi capaz de construir os dois primeiros quadrados pedidos, respetivamente, com quatro e duas unidades de área.

Relativamente ao primeiro quadrado pedido, rapidamente a Alice chegou a uma construção com a forma de quadrado e com quatro unidades de área, ilustrada na figura seguinte:

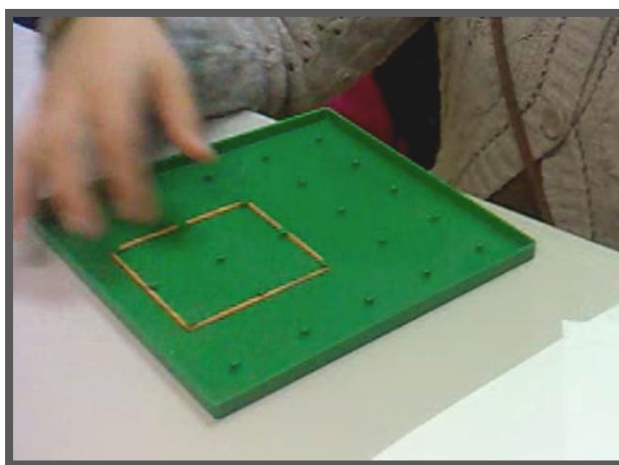


Figura 56 – Construção da Alice

Para construir o quadrado com duas unidades de área, a Alice verbaliza a dificuldade que está a sentir:

Alice – Como é que eu faço um com dois?! Se eu passar este para dois... [referindo-se ao quadrado com quatro unidades de área] Faz um retângulo...

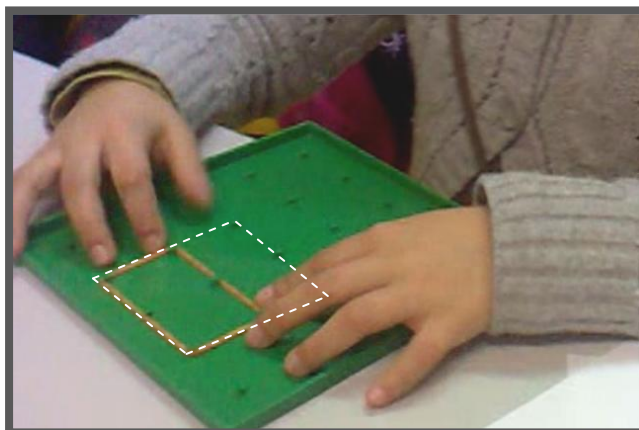


Figura 57 – Dificuldade sentida pela aluna para construir um quadrado com duas unidades de área

Professora – Pois... Mas podes pensar nas metades, por exemplo... Quantas metades precisas para fazer um quadrado com dois [unidades de área]?

Alice – Quatro... [após pensar um pouco]

Professora – Então, com quatro elásticos, tenta compor o quadrado que queres.

A aluna usou os quatro elásticos e construiu quatro triângulos com meia unidade de medida de área, que organizou da seguinte forma, obtendo o quadrado pedido, com duas unidades de medida de área.

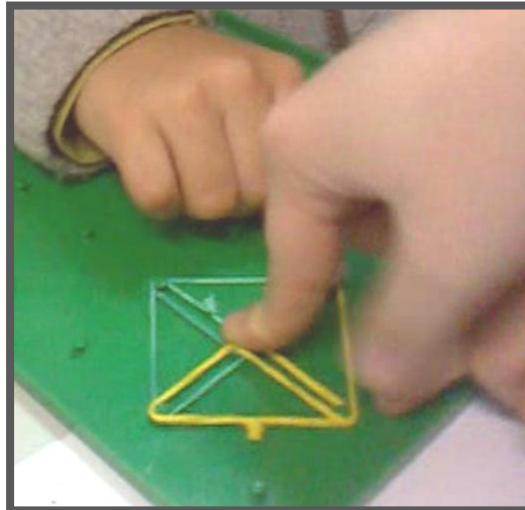


Figura 58 – Construção do quadrado com duas unidades de área

Este processo foi rápido, a Alice conseguiu obter o quadrado sem dificuldade mas, relembro, a estratégia foi sugerida por mim, uma vez que a aluna mostrava, mais uma vez, não conseguir avançar sozinha.

Professora – Bom, conclusão... Esse quadrado tem que área?

Alice – Ah... [alguma hesitação] Dois...

Professora – Porquê? Porque é constituído por...

Alice – Por quatro triângulos que dois triângulos valem um...

Professora – Pois! Então agora regista na folha.

Quando passámos para a construção do quadrado com oito unidades de área, foi evidente que a aluna não estava a ser capaz de mobilizar nenhuma das estratégias anteriormente exploradas nesta ou em tarefas anteriores e adaptá-la à construção do quadrado pedido.

Novamente – e relembro o meu papel de professora-investigadora – sugeri uma estratégia baseada na composição de dois triângulos com quatro unidades de área – pedido na tarefa anterior (n.º6) – para formar o quadrado com oito unidades de área.

A Alice parecia-me cada vez mais insegura e desmotivada, pelo que abandonámos esta tarefa.

Pareceu-me que os conhecimentos sobre a composição e decomposição de figuras da aluna eram ainda pouco elaborados e muito pouco flexíveis e que a aluna precisava de passar por mais experiências relacionadas com este aspeto da geometria, bem como por outras relacionadas com capacidades de visualização espacial.

Mais tarde, num apoio individualizado numa sessão de Tempo de Trabalho Autónomo trabalhei com ela algumas noções fundamentais de decomposição e composição de figuras e visualização.

TAREFA 8

Com esta tarefa pretendia-se que os alunos pavimentassem figuras com o material Blocos Lógicos e considerassem uma unidade de medida que lhes permitisse determinar áreas. Ver ANEXO 8

Esta tarefa não pareceu levantar dificuldades à aluna. Depois de uma breve leitura do enunciado, a Alice começou por pavimentar as figuras A e B usando apenas os losangos azuis e os trapézios vermelhos do material Blocos Padrão.

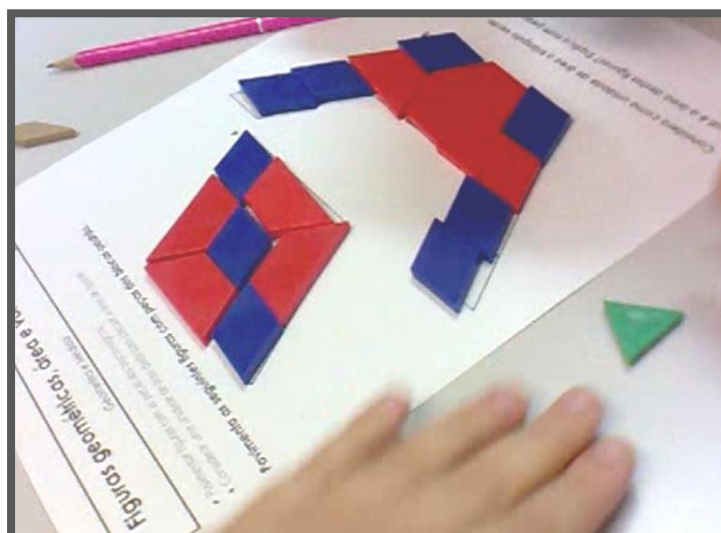


Figura 59 – Pavimentação das figuras com as peças dos Bloco Padrão

Seguidamente, a aluna usou a unidade de medida dada – o triângulo verde – para a relacionar com as peças que compunham as figuras. Rapidamente respondeu que a área da figura B era de vinte e quatro triângulos.

Professora – Como é que pensaste?

Alice – Primeiro vi que esta era 2 [referindo-se ao losango azul], e que esta era 3 [referindo-se ao trapézio vermelho]... E depois contei todos! Assim: 2, 4, 7, 9, 12, 14, 17, 20, 22, 24! É 24!

A aluna foi contando sequencialmente quantos triângulos verdes correspondiam a cada peça usada para pavimentar a figura dada.

Para a figura A – que a Alice fez em último lugar – o raciocínio foi em tudo igual. Eis o registo que a aluna fez das suas contagens de dois em dois, uma vez que esta figura era apenas composta por losangos, que podiam ser decompostos em dois triângulos verdes – a unidade de medida dada (Figura 60).

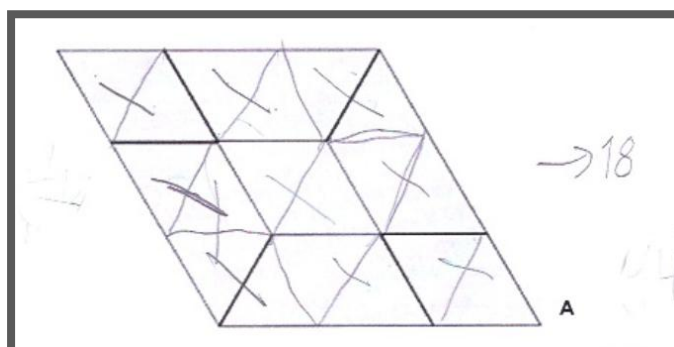


Figura 60 – Registo da aluna

Aluna explicita da seguinte forma o raciocínio utilizado:

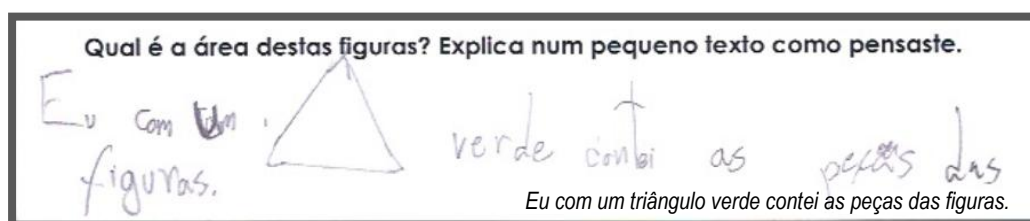


Figura 61 – Registo escrito da aluna

TAREFA 9

Com esta tarefa pretendia-se que os alunos pavimentassem figuras com o material Blocos Lógicos e considerassem uma unidade de medida que lhes permitisse determinar áreas. Ver ANEXO 9

Volto a frisar que no caso desta tarefa nada era dito sobre a unidade de medida a utilizar para comparar a área das duas figuras A e B.

A Alice começou por pavimentar as figuras da seguinte forma:

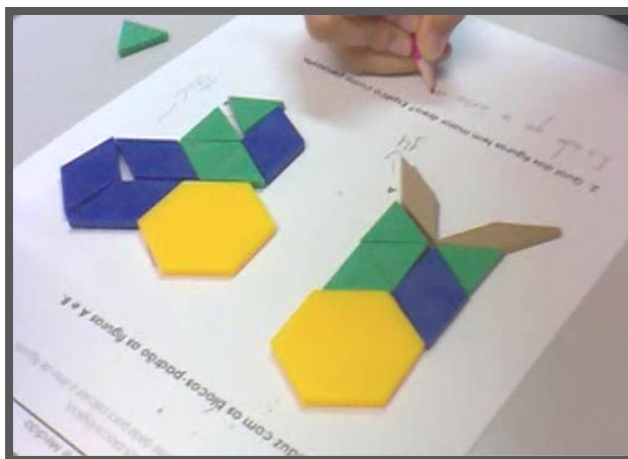


Figura 62 - Pavimentação das figuras com as peças dos Bloco Padrão

Professora – Alice, explica-me lá...

Alice – Então... Esta tem 1 amarelo [figura A], esta também [figura B]; Esta tem 4 verdes [figura A], esta também [figura B]... Agora Esta só tem 1 azul [figura A], esta tem muitos... 4! [figura B]

Professora – Então e os losangos mais pequenos que há na figura A?

Alice – Sim... Tem esses, mas esses dois não... Ah... A outra figura tem imensos azuis! Eu já contei e no total uma é 18 [figura B] e a outra só tem 14 [figura A]. Ganha a B!

A aluna optou por um raciocínio em que compara diretamente as duas figuras, pondo em evidência, peça por peça, que a figura B é composta pelas mesmas peças que a figura A mais algumas e, por isso, a figura B terá necessariamente mais área.

O raciocínio da Alice apenas é mais vago relativamente aos losangos bege. A aluna parece desprezá-los porque visualmente percebe que não são suficientes para igualar a área das figuras.

Síntese do percurso do caso Alice

Tal como referi em relação ao Vicente, também, no caso da Alice é evidente um percurso evolutivo, uma vez que a aluna pôde explorar diferentes estratégias e tipos de raciocínios importantes no estudo de grandezas geométricas como a área.

A Alice foi uma aluna que – ao contrário do Vicente – evidenciou um empenho oscilante que pode ser associado à frustração que experienciou perante determinadas questões, como foi o caso da tarefa 7. Paralelamente, esta aluna, por vezes, não se conseguiu abstrair das vídeo gravações que estavam a ser feitas sobre o seu trabalho e tal facto comprometeu muito a sua habitual postura descontraída. O seu desempenho pautou-se por alguns momentos de insegurança, frustração e/ou distração.

Apesar de globalmente, no seu percurso escolar, a aluna revelar conhecimentos matemáticos consolidados e ser uma aluna eficaz do ponto de vista dos resultados que obtém, penso que denotou algumas fragilidades específicas ao longo do desenvolvimento das tarefas alvo de análise neste estudo. Por exemplo, na tarefa 6 o desempenho da aluna parece ter sido comprometido por alguma dificuldade mais relacionada com a compreensão dos números racionais no contexto em que surgiram, do que com as ideias geométricas que estavam a ser requeridas e/ou exploradas.

Relativamente às ideias exploradas de definição de uma unidade de medida adequada e de mudança de unidade, a aluna parece ter alargado os seus conhecimentos e desenvolvido competências importantes – são exemplos disso o desempenho da aluna nas tarefas 4 e 5.

No entanto, esta aluna revelou algumas fragilidades em aspetos fundamentais. Por exemplo, nas tarefas 1 e 2, inicialmente e antes da minha intervenção, a Alice contabilizou indiscriminadamente quadrados e triângulos (com metade da área dos quadrados) como unidades de medida. Por outro lado, na tarefa n.º 4, quando lhe era pedido que agrupasse as figuras construídas de acordo com o critério da equivalência, a aluna agrupou-as segundo o critério número de peças. Estes exemplos tornam evidente algumas dificuldades conceptuais específicas relativas ao conceito de área e ao próprio processo de medida. Tal como é também evidente que muitas vezes os seus desempenhos são prejudicados por precipitações e/ou desatenções.

Globalmente, a Alice revelou dificuldade em mobilizar e adequar raciocínios e estratégias exploradas a outras situações e teve de ser mais apoiada na resolução das

tarefas que o Vicente, uma vez que os seus conhecimentos acerca das figuras e a sua capacidade de visualização espacial se revelaram menos consolidadas.

No entanto – e realçando aquilo que referi no início – considero que a aluna fez um percurso evolutivo, marcado por aprendizagens fundamentais no que respeita a ideias matemáticas específicas relevantes.

Conclusões

Dedicar-me-ei nesta fase do documento a expor as principais conclusões que se destacaram de todo o trabalho até agora descrito. Neste capítulo procurarei dar resposta às questões de investigação que defini para este estudo, com base nos referenciais teóricos, na análise do trabalho dos alunos e nas sínteses apresentadas acerca do percurso individual de cada um. Antes, no entanto, farei uma breve síntese do estudo.

Síntese do Estudo

O objetivo desta investigação era compreender o desenvolvimento do conceito de área em alunos do 3.º ano de escolaridade, com ênfase em processos de medida baseados no conhecimento de propriedades geométricas de figuras planas.

Recordando, propus, como forma de melhor objetivar o estudo, as seguintes questões de investigação:

- Como é que os alunos mobilizam conhecimentos sobre as propriedades das figuras geométricas no estudo da área de uma figura plana? A que estratégias recorrem? Que dificuldades sentem?
- Que compreensão é que os alunos têm sobre o processo de medição?
- Que ideias e/ou experiências são relevantes no desenvolvimento do conceito de área?

Foram, portanto, estas questões que orientaram a interpretação que fiz do trabalho dos dois alunos que escolhi para o Estudo de Caso e que seguidamente guiarão as principais conclusões desta investigação.

Relembro que – tal como referi no capítulo relativo às opções metodológicas – este estudo não ambiciona a generalização de resultados, ao invés disso pretende, sim, a descrição e compreensão dos processos vivenciados, por referência a categorias de análise resultantes de contributos da revisão da literatura específica. É um estudo que teve em conta os contextos pessoais e sociais como, aliás, é acontece em investigações de natureza qualitativa.

Relativamente às tarefas propostas aos alunos, elas resultaram de um processo de seleção e adaptação de materiais já existentes.

Os alunos tomados como Estudo de Caso desenvolveram as tarefas individualmente, comigo sempre presente, acompanhando os seus raciocínios e estratégias. Os dados obtidos resultaram dessa observação participante, bem como da análise de registos audiovisuais e escritos dos alunos.

A análise dos dados foi estruturada com base nas categorias criadas por referência a dois grandes tópicos: (1) compreensão sobre o processo de medição; (2) tipo de raciocínio a que o aluno recorre para medir a área das figuras.

Conclusões

1) Como é que os alunos mobilizam conhecimentos sobre as figuras e propriedades geométricas no estudo da área de uma figura plana? A que estratégias recorrem? Que dificuldades sentem?

A noção de área – que de acordo com Sarama e Clements (2009, p.293) pode ser entendida como “an amount of tow-dimensional surface that is contained within a boundary” – parece ser um conceito intuitivo e claro para os alunos.

Quer o Vicente, quer a Alice mostraram ao longo de todas as tarefas um bom entendimento empírico acerca deste conceito. Aliás, tal afirmação vai ao encontro da perspetiva dos mesmos autores, quando referem que desde muito cedo, as crianças revelam uma intuição bastante desenvolvida do conceito.

Para estes alunos não parece haver dúvidas que, no contexto das tarefas propostas, quando lhes era pedido que comparassem figuras, tinham de ter em conta o atributo *área*.

Realço que em todas as tarefas o termo *área* foi sempre usado explicitamente – sem outros subterfúgios – e que tal nunca se revelou impeditivo para os alunos, no sentido em que não soubessem o que lhes era pedido por desconhecerem e/ou confundirem o termo.

Posso interrogar-me sobre se, no quotidiano dos alunos, este é um conceito e termo que surja muitas vezes. Por exemplo, quando nos referimos à área da nossa casa,

de um terreno ou à zona do campo de futebol que é denominada por *grande área*, entre outros usos correntes que possamos fazer do termo.

Não obstante tal perspectiva, vários autores – Kouba, 1997; Lindquist e Kouba, 1989, citados por NCTM, 2008, Van de Walle, 2004 e Sarama e Clements, 2009 – atestam que os alunos revelam dificuldades de natureza variada ao lidarem com este conceito e em resolverem problemas que o envolvam.

Por que é que tal acontece? Por que experiências é que os alunos devem passar para desenvolverem os seus conhecimentos intuitivos acerca do conceito área e construir conceitos fundamentais de uma forma consistente, consolidada e compreensiva?

Relativamente ao uso da decomposição e recomposição das figuras como estratégia para o estudo da área, o Vicente evidenciou ser capaz de globalmente utilizar este tipo de raciocínio com compreensão. A Alice mostrou maiores dificuldades que o Vicente, embora também tenha recorrido a este raciocínio perante algumas das situações propostas nas tarefas.

O desenvolvimento da tarefa 3 indicia que o Vicente preteriu inicialmente um raciocínio baseado na enumeração de unidades e usou claramente uma estratégia que envolvia a decomposição e recomposição do trapézio inicial dado, para o comparar com as figuras pedidas. No entanto, na mesma tarefa – quando lhe foi pedido que comparasse a área do trapézio com a do losango, precisou de ajuda para iniciar e, a determinado ponto, não conseguiu visualizar que devia decompor o retângulo em dois triângulos retângulos iguais para obter a figura que pretendia e enveredou por uma estratégia que se baseou na repetição das unidades de medida.

A Alice também foi capaz de usar um raciocínio não baseado na medida relativamente à figura A – o quadrado. No entanto, no caso da figura B, que exigia uma capacidade de visualização mais desenvolvida, a aluna optou por mobilizar um raciocínio que envolvia a enumeração de unidades.

Muitas vezes – relativamente à tarefa 3 e outras – foi necessário exercer o meu papel pedagógico e promover explicitamente estratégias não baseadas na medida. É exemplo disto a tarefa 4, quando o Vicente teve de transformar o quadrado que tinha construído com as sete peças do *Tangram* num triângulo ou durante a realização da tarefa 6, na construção no Geoplano de alguns dos triângulos pedidos.

Embora o Vicente tenha sido um aluno que usava de um modo bastante flexível os dois tipos de raciocínios e revelava ser capaz de os integrar com bastante compreensão – mostrando por várias vezes ser capaz de utilizar um e outro – evidenciou alguma tendência para enveredar por estratégias baseadas na ideia da enumeração de unidades de medida. Tal é evidente na exploração da tarefa 6, quando lhe foi pedido que construísse um triângulo com quatro unidades de área: o aluno retomou uma estratégia mais relacionada com a enumeração de unidades.

A Alice revelou mais fragilidades no que respeita ao uso de um raciocínio baseado na decomposição (e recomposição) de figuras geométricas e em mobilizar este tipo de raciocínio em diferentes situações.

Por exemplo, na tarefa 6, a aluna revelou muitas dificuldades em compreender que poderia utilizar um raciocínio baseado na decomposição de um retângulo em dois triângulos retângulos congruentes para obter as figuras pedidas. Na mesma tarefa o raciocínio da aluna parece também ter sido perturbado por algumas noções frágeis no que respeita ao seu conhecimento sobre os números racionais não negativos, nomeadamente quando lhe é pedido que construa um triângulo com uma unidade e meia de área (1,5) – foi necessário explorar com a aluna o que aquele número significava, no contexto daquela tarefa, para que ela pudesse avançar com segurança.

Tal como referi anteriormente – no capítulo relativo às opções metodológicas – a análise do trabalho dos alunos teve como referência as conjecturas de Battista (2007) sobre dois tipos de raciocínio relativos as grandezas geométricas: um baseado na medida e outro não baseado na medida. Para este autor os dois tipos de raciocínio são substancialmente diferentes e apenas num nível de desenvolvimento mais avançado é que o autor prevê que haja integração dos dois.

A partir dos dados recolhidos nesta investigação, interrogo-me se estes tipos de raciocínios têm de ser entendidos como divergentes ou *contraponíveis*, ou se poderão ser entendidos como raciocínios que concorrem e contribuem mutuamente para a construção de um conhecimento mais amplo e flexível do conceito de área.

Parece-me que ao longo do capítulo em que descrevo e interpreto os dados são variadas as evidências que mostram que as estratégias a que os alunos mais recorrem relacionam-se, de facto, com as ideias de enumeração da unidade-base e da decomposição em figuras de referência.

Os alunos mostram que conseguem explorar cumulativamente um e outro tipo de raciocínio, adequando a sua escolha ao contexto da tarefa em questão – realce-se, no entanto, que o Vicente é capaz de o fazer com maior facilidade e agilidade que a Alice.

Não obstante, e tal como já referi anteriormente, é também evidente alguma tendência – por parte dos dois alunos – para optarem de uma forma mais imediata por um tipo de raciocínio que apela à enumeração da unidade-base.

Não tendo sido professora deste grupo durante o 1.º e 2.º anos desconheço o seu percurso relativamente a algumas questões que eventualmente seriam relevantes na interpretação do trabalho dos dois alunos em estudo.

Que experiências anteriores tiveram estes alunos? Poderão essas experiências induzir a este tipo de estratégia? Terão a medida e a geometria sido tratadas como áreas matemáticas distintas? Terão sido pouco enfatizadas as conexões matemáticas que enlaçam estas duas áreas?

Debruçar-me-ei ainda sobre um outro ponto que me parece fundamental realçar: o desenvolvimento de conceitos fundamentais relacionados com propriedades e transformações geométricas.

Em relação à tarefa 4 parece intuitivo para ambos os alunos que dois triângulos iguais do *Tangram* formam um quadrado. No entanto, o Vicente e a Alice não parecem fazê-lo conscientes de que características específicas é que dois triângulos têm de ter para que tal ocorra. Esta questão levanta a necessidade de reflexão sobre o papel do professor: ele deve fazer uso de um leque vasto de materiais manipulativos e deve gerar contraexemplos significativos, que conduzam os alunos a uma construção consolidada de conceitos importantes, a mobilizar com sentido noutros contextos.

Relativamente ao conceito de equivalência de figuras – noção que também foi amplamente trabalhada com o desenvolvimento das tarefas propostas aos alunos – parece-me importante referir que ambos revelaram uma noção intuitiva bastante consolidada desta ideia matemática.

Na tarefa 5 o Vicente e a Alice foram capazes de concluir com facilidade que – fazendo uso das suas palavras – *duas figuras podem ter a mesma área e uma forma diferente*. No entanto, Van de Walle (2004) caracteriza o conceito de equivalência de figuras como difícil.

Parece-me que do ponto de vista pedagógico, o papel do professor deve ser o de criar situações em que os conceitos de equivalência e congruência de figuras sejam

explicitamente postos em destaque. Desta forma, os alunos podem explorar estes conceitos, compará-los e distingui-los.

Acrescento ainda que uma das dificuldades sentidas pelos dois alunos – com maior expressão no caso da Alice – prende-se com a capacidade de considerar cumulativamente os critérios *forma* e *área*. Esta dificuldade fica bastante patente nas tarefas em que era usado o *Geoplano* (tarefas 6 e 7). O Vicente deparou-se muitas vezes com uma figura que tinha a área pedida, mas não a forma. A Alice pareceu sempre mais focada na área e desconsiderava facilmente o critério *forma*, sendo quase sempre necessário relembrar-lhe o que era pedido no enunciado.

Van de Walle (2004) realça a importância das atividades de comparação de duas figuras com, pelo menos, uma dimensão ou propriedade em comum, bem como aquelas que ponham em evidência o atributo *área* em figuras que tenham sido compostas e/ou decompostas. Para além destas, parece-me também fundamental promover situações em que o atributo *área* seja comum em figuras com propriedades distintas – o que, mais uma vez, retoma a importância de uma exploração consolidada do conceito de equivalência de figuras.

Por fim, acrescento ainda que, no que respeita às transformações geométricas, parece haver algumas evidências que para o Vicente e para a Alice há alguns movimentos que surgem de uma forma mais intuitiva que outros. Os movimentos de deslizamento e rotação parecem surgir de forma natural nas tentativas dos alunos, enquanto a reflexão das figuras/peças não é um movimento intuitivo.

Isto é evidente no caso da Alice, por exemplo, na tarefa 3 quando a aluna tenta recompor o quadrado a partir da decomposição que tinha feito da figura dada (o trapézio) ou na tarefa 4 ao nível da manipulação das peças do *Tangram*.

No caso do Vicente as dificuldades mantêm-se e parecem ser da mesma natureza. Sobretudo o movimento de reflexão de algumas figuras teve de ser muitas vezes sugerido por mim, para que o aluno conseguisse avançar no desenvolvimento das tarefas em questão – por exemplo na tarefa 4 a propósito das construções com o *Tangram*.

No entanto, parece-me que do ponto de vista da investigação, teria sido importante perceber de uma forma mais aprofundada como é que os alunos constroem figuras geométricas segundo condições dadas e de que forma recorrem às transformações geométricas nesse contexto.

2) Que compreensão é que os alunos têm sobre o processo de medição?

O ato de medir e os conhecimentos que se relacionam com este processo envolvem um raciocínio comum a medições relativas a qualquer grandeza considerada.

De acordo com o NCTM (2008), o ato de medir tem um carácter significativo para os alunos, uma vez que as suas vivências quotidianas estão repletas de situações em é dada visibilidade a tais ferramentas matemáticas.

As ideias de definição de uma unidade de medida adequada e de mudança de unidade foram questões amplamente desenvolvidas no âmbito desta investigação e, portanto, importa perceber como é que o Vicente e a Alice lidaram com este processo relativamente ao atributo *área*.

Ambos parecem ter alargado e consolidado o seu conhecimento, muito embora – e tal como já tem vindo a ser focado – o Vicente tenha mostrado sempre um conhecimento mais flexível e consistente quando era requerido que seleccionasse ou mudasse de unidade.

Os mesmos autores (NCTM, 2008) assinalam ainda que, ao longo do seu percurso escolar, os alunos deverão compreender e ampliar progressivamente o conjunto de atributos mensuráveis com que operam e usar diversos processos de medição e compreender que para medir a área de uma figura têm de utilizar uma unidade de área que pavimente a figura em causa.

Ao contrário do Vicente, a Alice, antes de eu intervir, nas tarefas 1 e 2, contabilizou indiscriminadamente quadrados e triângulos (com metade da área dos quadrados) como unidades de medida. Apesar de rapidamente a aluna se ter apercebido do seu erro, é evidente que à data da realização desta tarefa a aluna ainda revelava fragilidades neste domínio.

Stephan et al. (2003, citado por Sarama e Clements, 2009) – afirma que alguns alunos não compreendem a necessidade de subdividir uma unidade de área para preencher completamente uma determinada figura e, portanto, consideram indiscriminadamente unidades com diferentes tamanhos que usaram para preencher a região.

Na tarefa 4 torna-se evidente que tanto o Vicente como a Alice já são capazes de compreender o efeito que a mudança de unidade tem no resultado da medição, estabelecendo relações que envolvem os conceitos de dobro e metade. No caso do Vicente, ele fê-lo sem sentir necessidade de concretizar com material manipulativo as

suas conjecturas. No entanto, na tarefa 5, o Vicente manifestou alguma confusão acerca da necessidade de definir uma unidade de medida adequada e em considerar uma unidade de medida que não fosse um quadrado. Contudo, ao longo do desenvolvimento da tarefa, o aluno foi capaz compreender o raciocínio e os processos em causa.

De acordo com o NCTM (2008), deve ser um objetivo no final do 1.º Ciclo que os alunos sejam capazes de posicionar-se criticamente face ao processo de seleção de uma unidade de medida apropriada à grandeza e objeto ou figura que pretendem medir. Segundo estes autores, os alunos devem ser capazes de alcançar uma compreensão bastante consolidada sobre o papel que as próprias unidades desempenham nas medições.

Numa outra etapa do estudo seria importante perceber como é que os alunos se posicionam relativamente à passagem para o uso das unidades convencionais do sistema internacional.

3) Que ideias e/ou experiências são relevantes no desenvolvimento do conceito de área?

Ao longo do desenvolvimento das tarefas, o Vicente e a Alice contactaram com ideias e experiências muito importantes na ampliação do conceito de área. Importa aqui realçá-las e – com contributos teóricos – perceber porque foram importantes no desenvolvimento deste conceito por parte destes alunos.

Na perspetiva de vários autores – Ponte e Serrazina, 2000; Van de Walle, 2004, entre outros – a construção do conceito de área implica a compreensão da ideia de pavimentação, ou seja, corresponde à cobertura de uma determinada superfície com uma unidade de medida repetida, de forma a pavimentar essa superfície na totalidade sem deixar espaços em branco e/ou sobreposições.

O Vicente e a Alice revelaram que esta noção é intuitiva e que o ato de pavimentar surgiu como uma ideia simples, que nunca levantou dúvidas.

Nas tarefas 1 e 2, os alunos foram capazes de pavimentar as figuras dadas sem dificuldades, usando os quadrados unitários e triângulos – com metade da área dos quadrados – sempre que necessário.

A Alice revelou, como já foi referido, alguma dificuldade na contagem das unidades consideradas, uma vez que contou indiscriminadamente triângulos e

quadrados com unidade – mas tal ideia já foi problematizada anteriormente neste capítulo.

As tarefas 8 e 9 que envolviam a pavimentação das figuras dadas, também não levantaram problemas para os alunos. Mais uma vez se realça que a noção de pavimentação surge como algo intuitivo e fácil.

Van de Walle (2004) refere que a construção desta noção deve ser muito anterior à introdução de procedimentos numéricos. “Fazer pavimentação pode ser uma boa preparação para o conceito de área” (Ponte e Serrazina, 2000, p.196)

Outras experiências iniciais fundamentais relativas ao desenvolvimento do conceito de área são, de acordo com Van de Walle (2004), as atividades de comparação, já mencionadas.

Segundo este autor é importante promover variadas situações que levem os alunos a serem capazes de distinguir o atributo *área* de outros atributos ou propriedades. Destacam-se atividades de comparação de duas figuras com, pelo menos, uma dimensão ou propriedades em comum, bem como atividades de comparação que ponham em evidência o atributo área em figuras que tenham sido compostas e/ou decompostas.

Relembrando Sarama e Clements (2009), estes autores afirmam que nos primeiros anos as comparações que os alunos fazem de duas figuras é estritamente visual, ou baseada na análise de uma das dimensões da figura ou, pode ainda, ser feita por sobreposição/comparação direta.

É muito importante promover diferentes e variadas situações que envolvam abstração e em que os alunos sejam conduzidos num processo de reflexão sobre as suas conceptualizações.

Ao longo desta investigação foram trabalhados com os dois alunos conceitos relacionados com a distinção do atributo *área* de outros, e foi dada especial ênfase ao último *tipo* de atividades de comparação propostos pelo autor – o atributo *área* em figuras que tivessem sido compostas e/ou decompostas

Considero que a tarefa 3 pode ser um bom exemplo de uma atividade de comparação que envolvia a decomposição e recomposição de figuras. Quer o Vicente, quer a Alice foram capazes de mobilizar um raciocínio coerente com a teoria de Battista (2007) sobre tipos de raciocínio envolvidos no estudo de grandezas geométricas. Ambos os alunos foram capazes de comparar a figura dada inicial com as figuras A e B tomando como critério o atributo área, sem revelar dificuldades na compreensão do conceito.

A partir da tarefa que envolvia a manipulação do *Tangram* (tarefa 4) ou a tarefa 5 em que estava em evidência a construção da noção de equivalência de figuras, os alunos, globalmente, revelaram compreensão acerca deste conceito. Ambos foram capazes de agrupar os quadrados construídos segundo o critério *área* e, foram também capazes de explicitar a noção de equivalência de figuras.

Van de Walle (2004) afirma, tal como já foi referido, – relativamente ao último *tipo* de atividades de comparação que propõe – que a noção de equivalência de figuras é um conceito difícil para os alunos. O autor sugere o uso de materiais manipulativos adequados – como o *Tangram*, por exemplo – e/ou situações que envolvam o corte de uma figura inicial no trabalho em torno deste conceito.

Para o Vicente e para a Alice, as tarefas que envolviam construções de figuras no Geoplano (tarefas 6 e 7) segundo determinadas condições dadas, revelaram-se mais problemáticas, uma vez que os alunos revelaram algumas dificuldades em considerar ao mesmo tempo o atributo *área* e *forma*.

Relembrando Battista (2007), este autor afirma que o desenvolvimento destas noções nos alunos envolve uma grande capacidade de abstração: os alunos têm de ser capazes de abstrair sobre qual o atributo que vão medir e distingui-lo de outros atributos do objeto.

Limitações e recomendações

A esta investigação podem ser apontadas algumas limitações que se foram evidenciando ao longo da sua realização e que importa apresentar agora.

Uma delas prende-se com a sequência das tarefas proposta aos alunos – penso que as tarefas exploradas em último lugar (tarefas 8 e 9) deviam ter sido propostas mais cedo. Estas duas tarefas implicam conceitos e processos que se revelaram simples – e eventualmente desadequados para o nível de competência dos dois alunos. Promoviam uma abordagem ao conceito de *área* ligada à ideia de *pavimentação* que – de acordo com autores como Van de Walle (2004) e outros – deverá ser uma das primeiras noções a desenvolver junto dos alunos.

Atualmente, penso que teria sido importante ter feito uma recolha das conceções dos alunos face aos principais conceitos trabalhados – noção de *área*; conhecimentos

sobre figuras geométricas; e processo de medição – anterior ao desenvolvimento das tarefas. Essa recolha serviria o objetivo de melhor poder, agora, olhar as tarefas propostas de um ponto de vista crítico e fazê-lo com um maior grau de profundidade, no sentido de avaliar a sua pertinência relativamente ao ano de escolaridade em questão, avaliar o grau de adequabilidade ao nível de conhecimentos dos alunos deste grupo e, portanto, poder fazer sugestões que permitissem o aperfeiçoamento do percurso sugerido aos alunos com base neste ficheiro.

Por outro lado, um conhecimento teórico mais aprofundado acerca do desenvolvimento do conceito de área ter-me-ia, certamente, proporcionado uma maior capacidade de antecipação de alguns raciocínios dos alunos e, portanto, a definição de uma trajetória hipotética de aprendizagem mais adequada.

Há um outro aspeto que em termos de limitações ao meu estudo é importante referir, mas que também pode ser encarado do ponto de vista positivo como uma recomendação para o futuro: faria sentido que este estudo se orientasse, numa segunda fase, para a introdução e exploração da noção de disposição retangular. De acordo com estes autores o percurso dos alunos deve ser no sentido de progressivamente se aproximarem desta noção estrutural.

Parece-me fundamental – do ponto de vista da produção de conhecimento académico que possa ser utilizado pelos professores nas suas salas de aula – que se continuem a realizar investigações que ambicionem aprofundar e expandir o conhecimento que se tem sobre a forma como os alunos raciocinam e como se posicionam perante ideias matemáticas centrais como aquelas que estão associadas ao tema *Geometria e Medida*.

Julgo que outra das possibilidades interessantes seria continuar o estudo sobre as conexões que existem entre a Geometria e a Medida também no âmbito das figuras tridimensionais e do desenvolvimento do conceito de volume.

No entanto, a principal recomendação que me parece pertinente fazer, relaciona-se com o desenvolvimento pessoal e profissional que uma investigação desta natureza pode proporcionar.

Uma reflexão sobre o meu papel como professora-investigadora

Parece-me importante, antes de mais, realçar que este estudo me proporcionou uma oportunidade para analisar e melhor compreender os raciocínios e estratégias dos alunos que escolhi para os dois estudos de caso que desenvolvi relativamente ao tema matemático a que esta investigação se dedica.

Do ponto de vista do meu desenvolvimento profissional, esta foi uma investigação que considero muito pertinente. Permitiu-me conhecer melhor os raciocínios dos meus alunos mas, sobretudo, permitiu-me refletir e olhar a minha prática de um ponto de vista profundamente crítico. O carácter sistemático de análise e reflexão a que um trabalho desta natureza obriga a um professor, permite que este vá desenvolvendo também o seu papel de investigador.

Relembrando Stenhouse – autor referido por Alarcão (2001) – a investigação do trabalho desenvolvido com os alunos nas salas de aula deve caber aos professores e as suas investigações conduzirão a um desenvolvimento curricular de qualidade, com o sentido útil, de quem alia a teoria à prática.

Esta investigação conduziu-me através de um processo repleto de dúvidas e inseguranças, mas que ao mesmo tempo foi um caminho de procura, de reflexão sistemática, de inquietação pela profissão, pela melhoria das práticas em sala de aula, pelo trabalho de campo que é o da sala de aula, com os meus alunos.

É para mim claro que um professor nunca será capaz – nem se pretende que o seja – de se distanciar da realidade que investiga e do profundo conhecimento que tem dos alunos. As suas narrações e interpretações serão sempre marcadas pela inevitável subjetividade.

Um professor-investigador tem de assumir – do ponto de vista ético – o seu grande compromisso para com os seus alunos, que é também um compromisso para com a melhoria das suas práticas profissionais.

É um dever profissional dos professores cultivar a ânsia de querer aprender mais e conhecer mais aprofundadamente os assuntos relacionados com a sua prática profissional. Sejamos exigentes connosco e com tais práticas e aprendamos a questionarmos sempre o que nos rodeia e a autoquestionarmo-nos sempre.

Referências Bibliográficas

- Alarcão, I. (2001). Professor–investigador: Que sentido? Que formação? [www. Inafop. pt/revista/docs/texto_isabelalarcao.html](http://www.inafop.pt/revista/docs/texto_isabelalarcao.html).
- Battista, M. T. (2007). *The development of geometric and spatial thinking*. In R. Lester (Ed.). *Second Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning* (pp.843-908). Reston, Va: NCTM.
- Bell, J. (1997). *Como Realizar um Projecto de Investigação*. Lisboa: Gradiva.
- Bogdan, R., Biklen, S., (1994). *Investigação Qualitativa em Educação – uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.
- Carmo, H. & Ferreira, M. (1998). *Metodologia da Investigação: Guia para a Auto-Aprendizagem*. Lisboa: Universidade Aberta.
- Gavin, M. K., Dailey J., Stone W., Vuolo J., Anderson, N. C. (2003). *Navigating Through Measurement In Grades 3-5 (Principles and Standards for School Mathematics Navigations Series)*. NCTM.
- Léssart-Hérbert, M., Goyette, G. & Boutin, G. (2005). *Investigação Qualitativa: Fundamentos e práticas*. Lisboa: Instituto Piaget.
- Matos e Serrazina (1996). *Didáctica da matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.
- Ministério da Educação (2007). Programa de matemática do ensino básico. (disponível em <http://www.dgidec.min-edu.pt/ensinobasico/index.php?s=directorio&pid=71#i>)

- NCTM (2007) *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática (Tradução de NCTM (2000), Principles and Standards fo School Mathematics).
- Outhred, L. & Mitchelmore, M. (2000). Young Children's Intuitive Understanding of Rectangular Area Measurement, *Journal for Research in Mathematics Education*, 31 (2), 144-167.
- Pires, M. (1995) *Os conceitos de perímetro e área em alunos do 6.º ano: concepções e processos de resolução de problemas*. Tese de mestrado, Associação de Professores de Matemática.
- Ponte e Serrazina (2000). *Didáctica da matemática do 1.º ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.
- Roldão, M. C. (2000). *Formar professores. Os desafios da profissionalidade e currículo*. Aveiro: Universidade de Aveiro, CIFOP.
- Sarama, J., & Clements, D. (2009). *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. New York: Routledge.
- Teixeira, M. (2008). *O pensamento geométrico no 1º ano de escolaridade*. Tese de mestrado, Universidade Nova de Lisboa.
- Van de Walle, J.A. (2004). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally*. New York: Pearson Education, Inc.
- Yin, R. (2005). *Estudo de caso: planejamento e métodos*. Porto Alegre: Bookman. (Tradução de Yin, R. (2003), Case study research: Design and methods).

Anexos

Anexo 1

Figuras geométricas e área

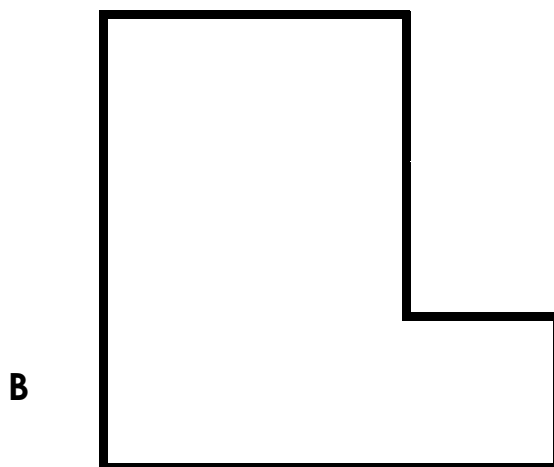
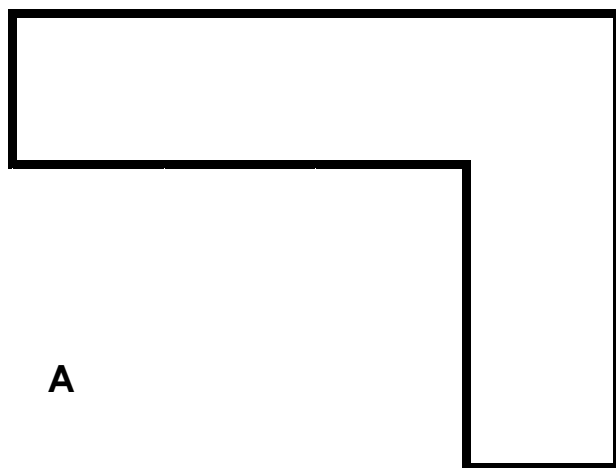
1

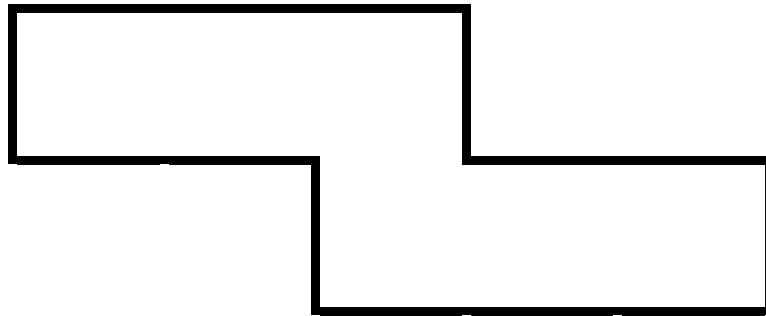
Geometria e Medida

- Desenvolver a noção de área como o espaço no plano ocupado por uma figura;
- Escolher uma unidade de medida apropriada;
- Comparar a área das figuras por sobreposição.

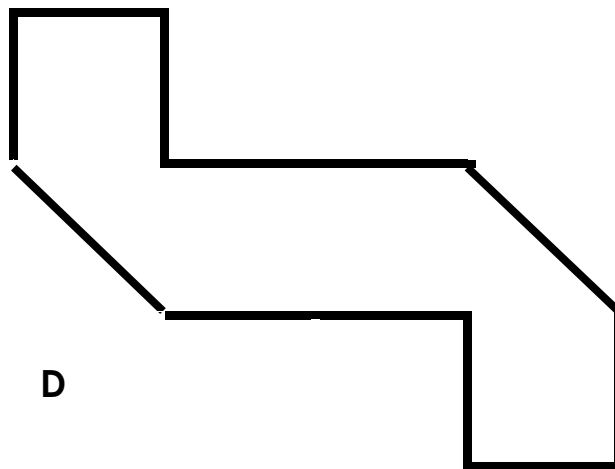
Para cada par, indica qual a figura que tem maior área usando as peças do envelope.

Justifica a tua resposta num pequeno texto e a partir dos registos que fizeres.





C



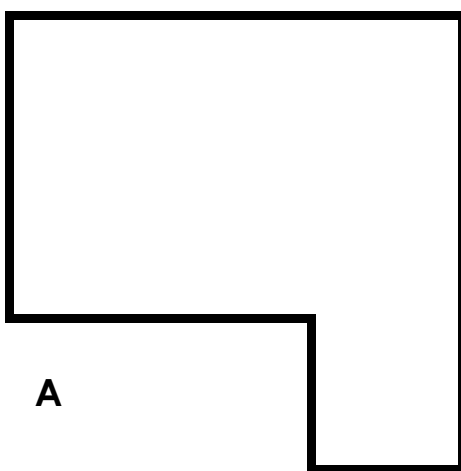
D

Anexo 2

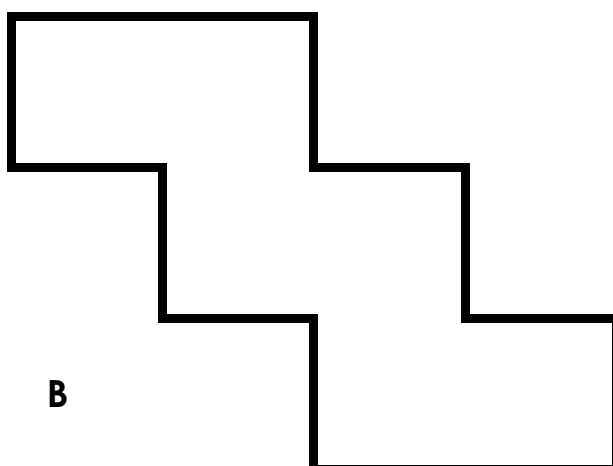
- Desenvolver a noção de área como o espaço no plano ocupado por uma figura;
- Escolher uma unidade de medida apropriada;
- Comparar a área das figuras por sobreposição

Para cada par, indica qual a figura que tem maior área usando as peças do envelope.

Justifica a tua resposta num pequeno texto e a partir dos registos que fizeres.

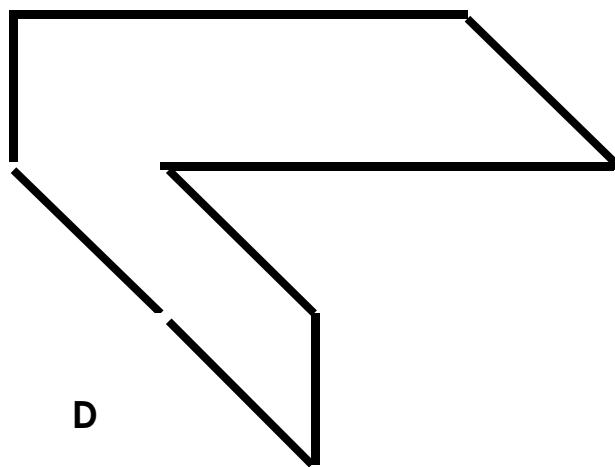
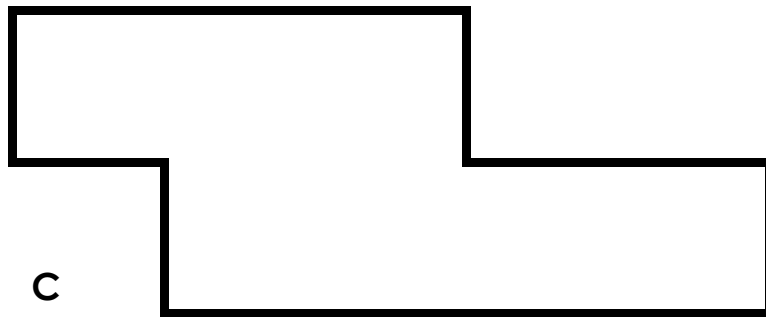


A



B

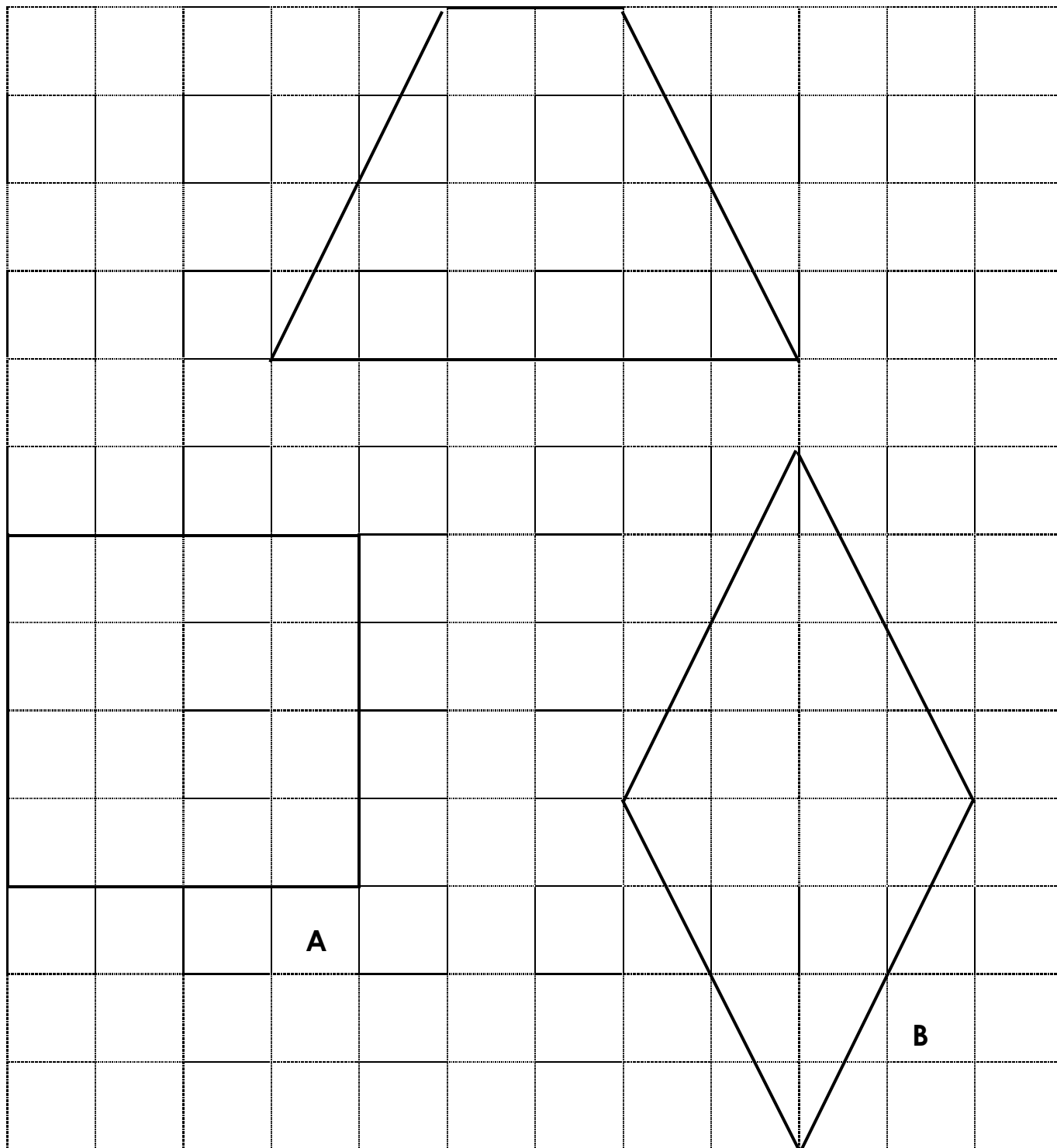




Anexo 3

- Decompor uma figura em outras;
- Comparar áreas de figuras por sobreposição;
- Justificar o seu raciocínio com base em factos geométricos conhecidos;

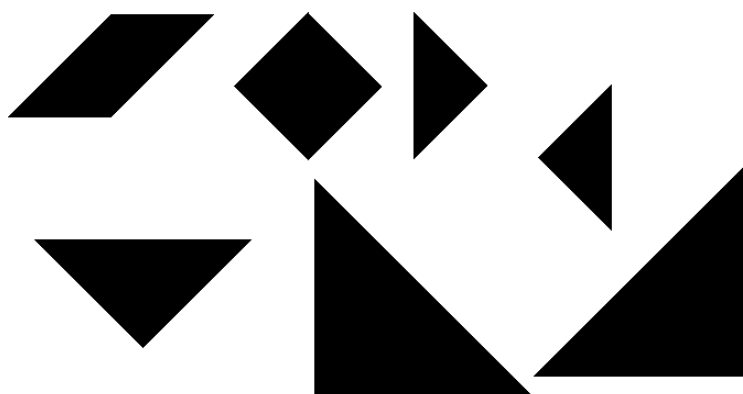
Utiliza os trapézios que estão no envelope para mostrar como a área deste trapézio é igual à área das outras duas figuras.



(Adaptado de Serrazina (???) O geoplano na sala de aula. APM)

Anexo 4

- Construir figuras com as peças do Tangram;
- Considerar uma unidade de área dada;
- Construir figuras mobilizando conhecimentos acerca da composição e decomposição de figuras
- Justificar o seu raciocínio com base em factos geométricos conhecidos;



Com peças do Tangram constrói todos os quadrados possíveis e faz o registo dos teus quadrados, contornando a lápis cada uma das peças.

Analisa as figuras que construístes e responde às seguintes questões:

1. Construístes quadrados com a mesma área? Quais? Agrupa-os.
2. Mede a área de cada quadrado, usando como unidade:
 - o triângulo mais pequeno.
 - o triângulo médio.

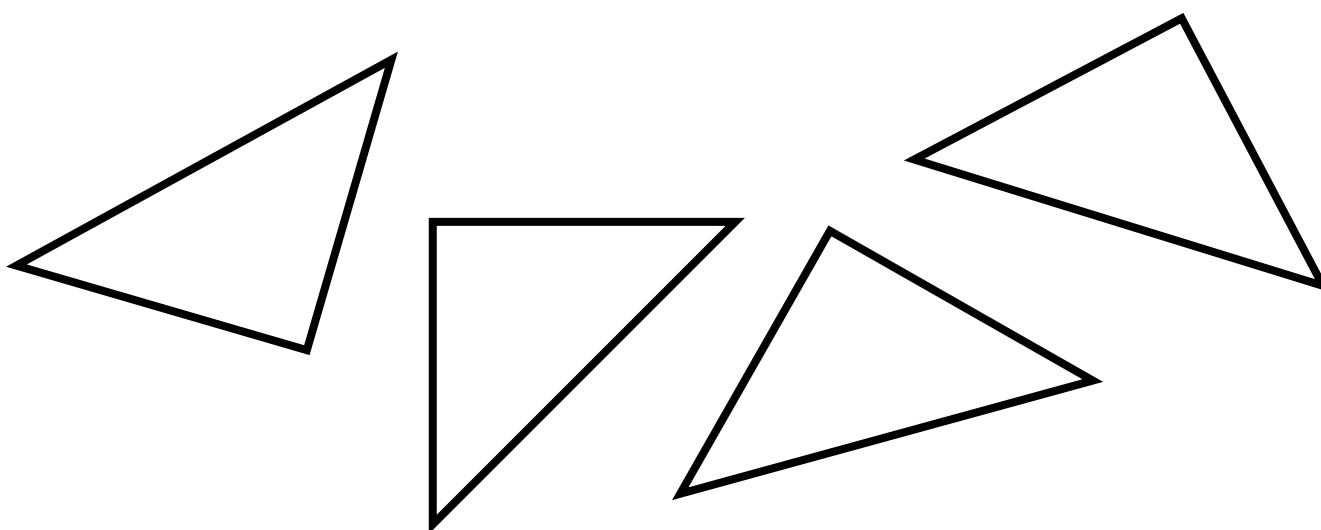
3. Constrói um triângulo com as 7 peças do Tangram.

3.1 Algum dos quadrados que construístes tem a mesma área que o triângulo que construístes com as 7 peças? Justifica a tua resposta.

Anexo 5

- Revelar noção de figuras equivalentes;
- Escolher e considerar uma unidade de área adequada;
- Justificar o seu raciocínio com base em factos geométricos conhecidos;

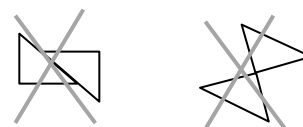
No envelope vais encontrar quatro triângulos iguais às seguintes:



Com as peças de que dispões, investiga as seguintes questões:

1. Que figuras diferentes consegues obter a partir dos triângulos?
Constrói-as e regista-as.

Nota: As figuras têm de estar totalmente unidas pelos lados.



2. Sabes o nome de alguma dessas figuras? Legenda as que conheces.
3. Investiga e regista a área das figuras que construístes. O que pudeste concluir?

Anexo 6

Figuras geométricas e área

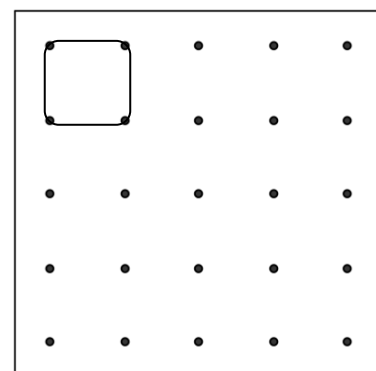
6

Geometria e Medida

- Construir figuras no geoplano dada uma determinada área;
- Construir figuras mobilizando conhecimentos acerca da composição e decomposição de figuras.

Vais precisar de um geoplano (5x5), elásticos e folhas de registo (malha pontuada).

Considera, como unidade, a área do menor quadrado que podes representar num geoplano de 5x5 e constrói/regista:



Retângulos com:

1. Medida de área 3
2. Medida de área 8
3. Medida de área 4

Triângulos com:

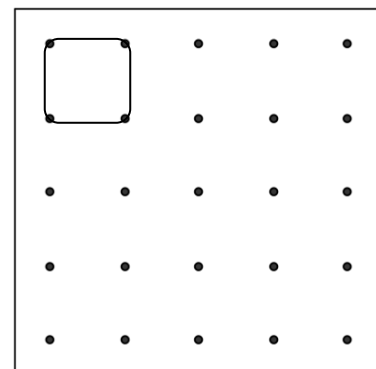
4. Medida de área $\frac{1}{2}$
5. Medida de área 1
6. Medida de área 1,5
7. Medida de área 4

Anexo 7

- Construir figuras no geoplano dada uma determinada área;
- Construir figuras mobilizando conhecimentos acerca da composição e decomposição de figuras.

Vais precisar de um geoplano (5x5), elásticos e folhas de registo (malha pontuada).

Considera, como unidade, a área do menor quadrado que podes representar num geoplano de 5x5 e constrói/regista:



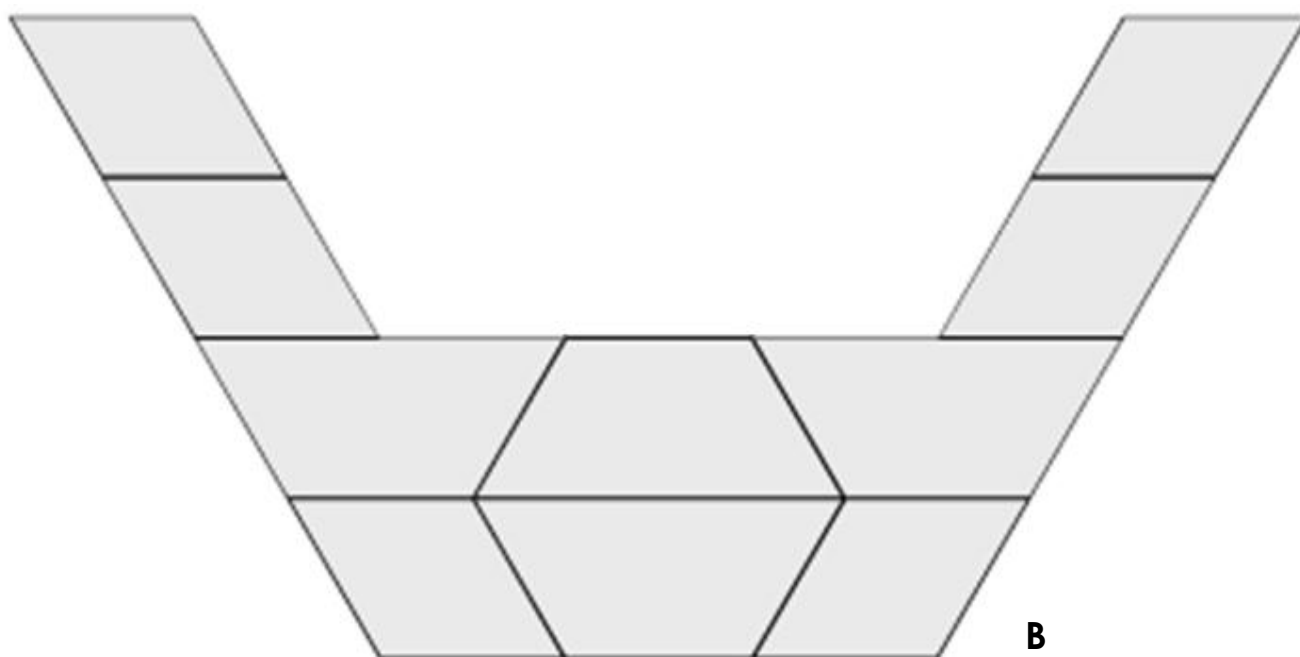
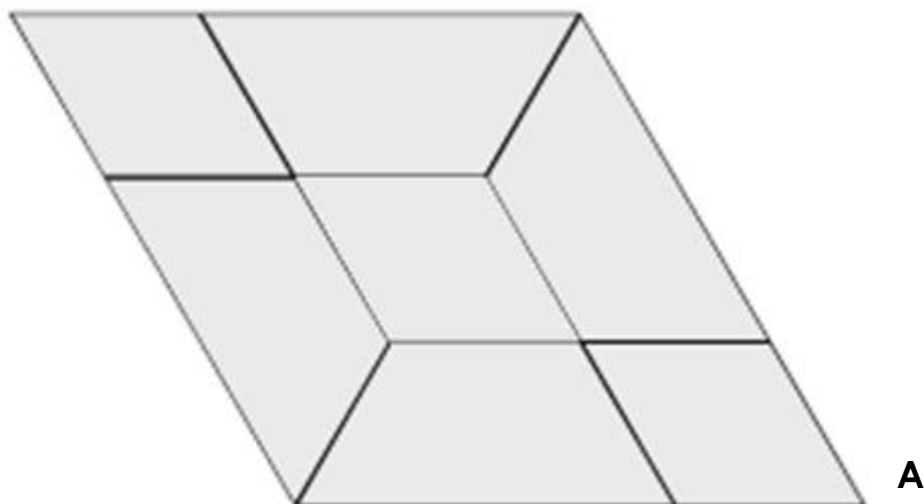
Quadrados com:

1. Medida de área 4
2. Medida de área 2
3. Medida de área 8
4. Medida de área 5
5. Medida de área 10

Anexo 8

- Pavimentar figuras com as peças dos blocos-lógicos;
- Considerar uma unidade de área dada para calcular a área de figuras.

Pavimenta as seguintes figuras com peças dos blocos-padrão.



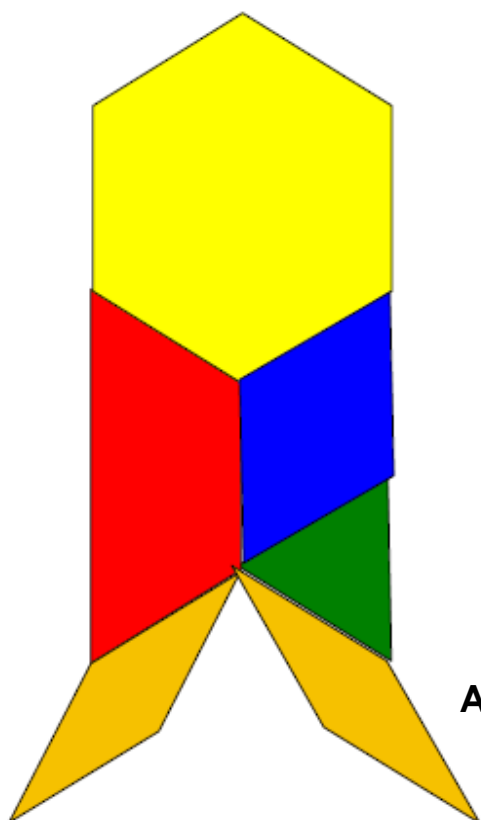
Considera como unidade de área o triângulo verde.

Qual é a área destas figuras? Explica num pequeno texto como pensaste.

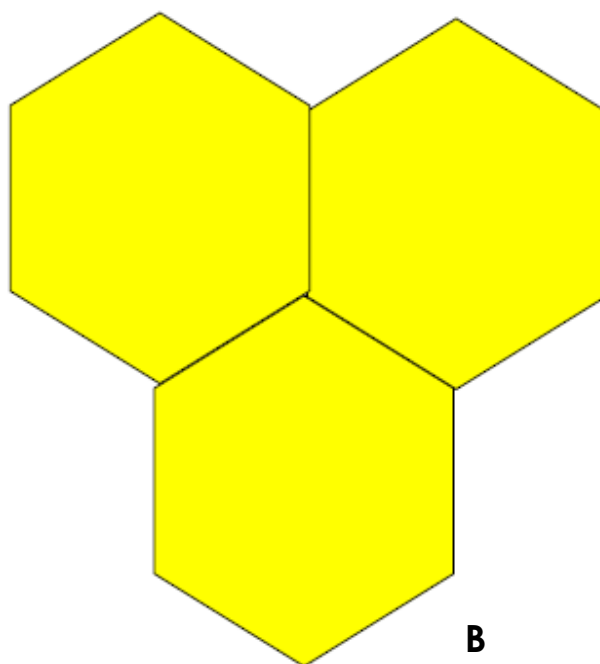
Anexo 9

- Pavimentar figuras com as peças dos blocos-lógicos;
- Considerar uma unidade de área dada para calcular a área de figuras.

1. Reproduz com os blocos-padrão as figuras A e B.



A

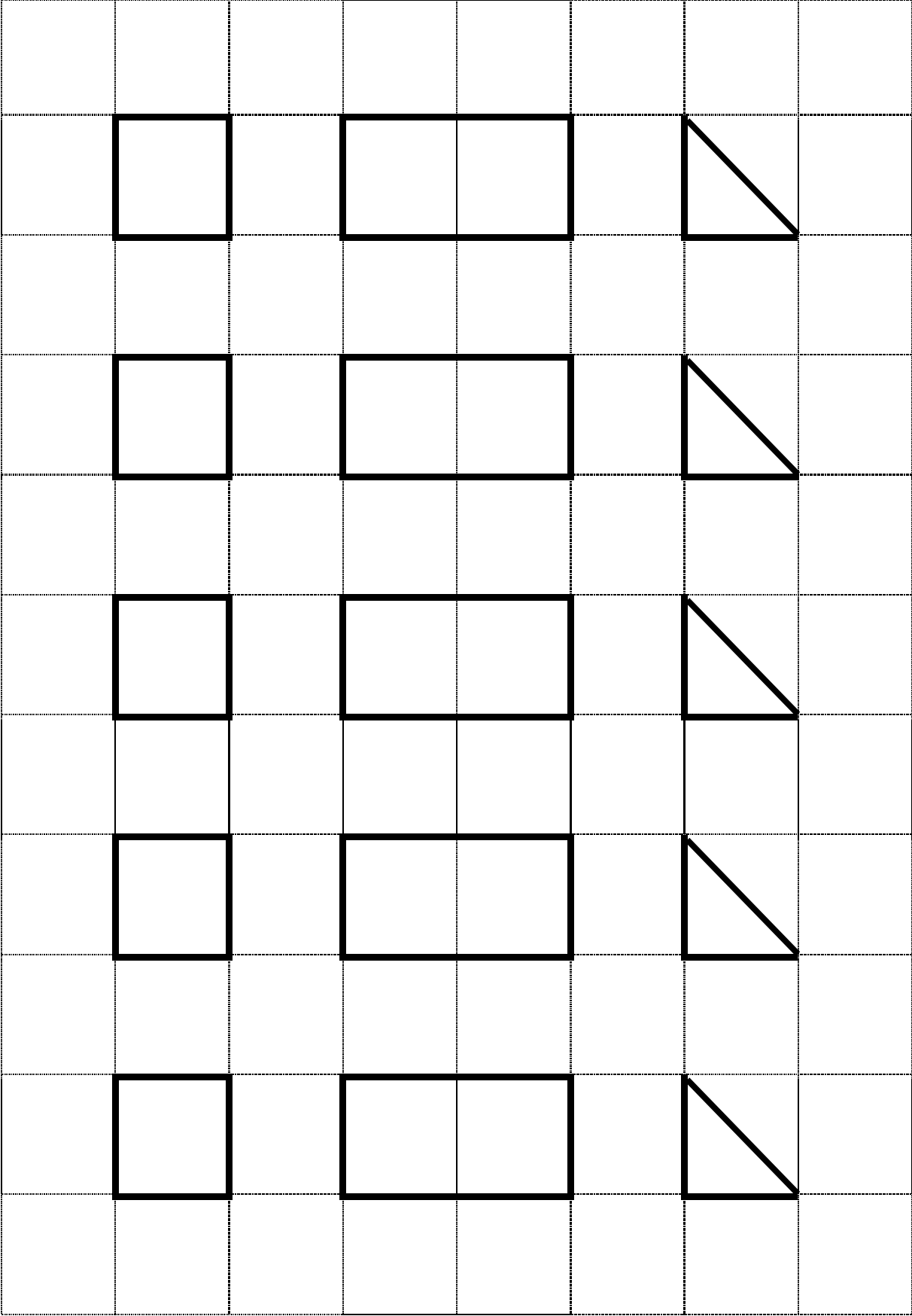


B

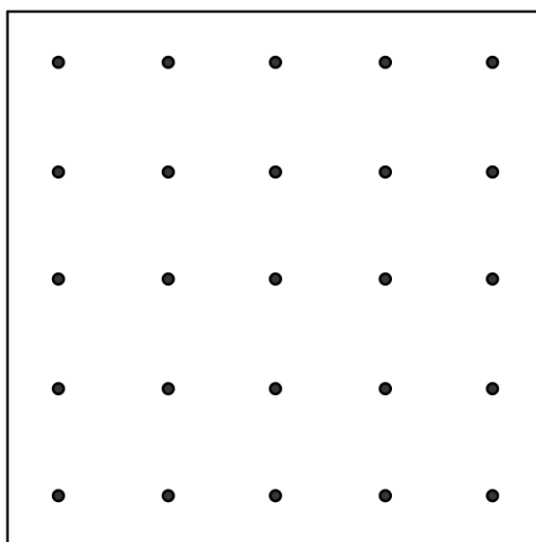
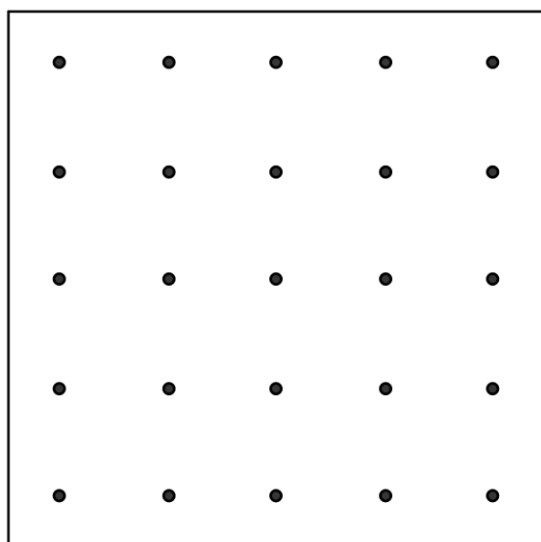
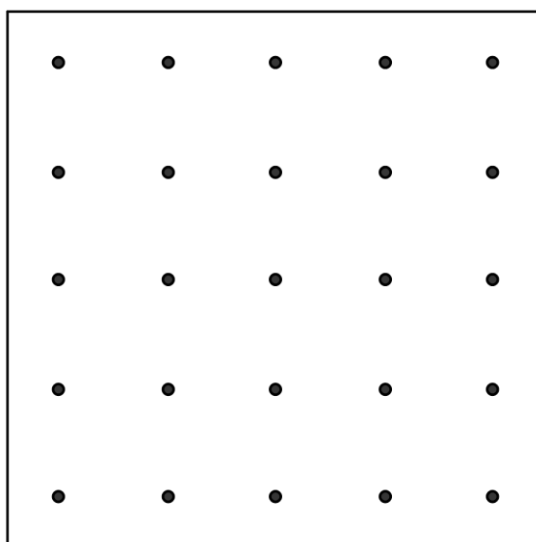
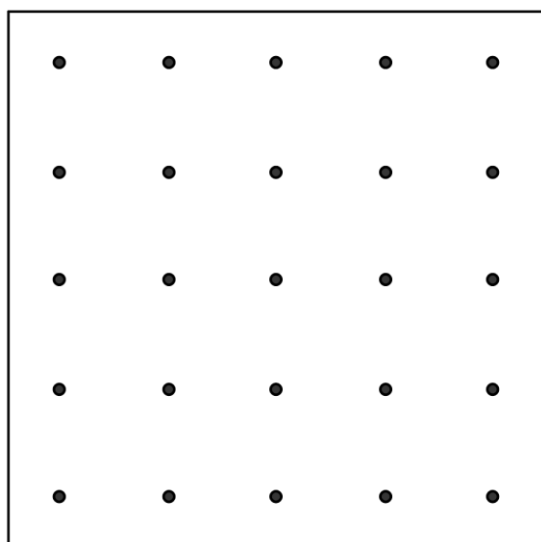
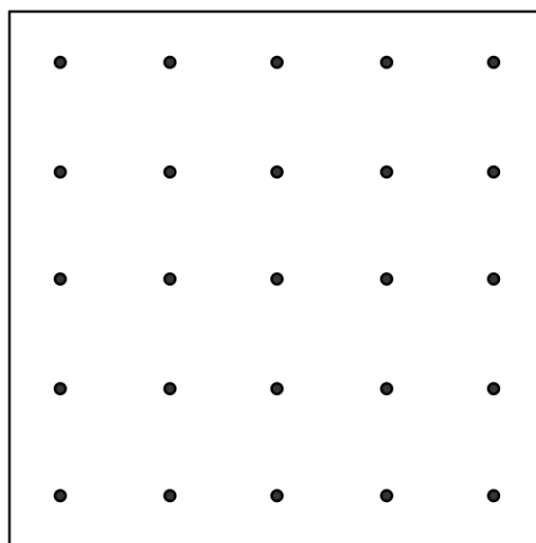
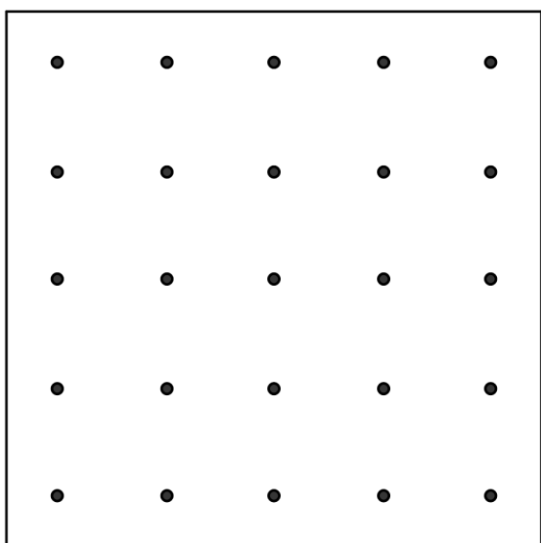
2. Qual das figuras tem maior área? Explica como pensaste.

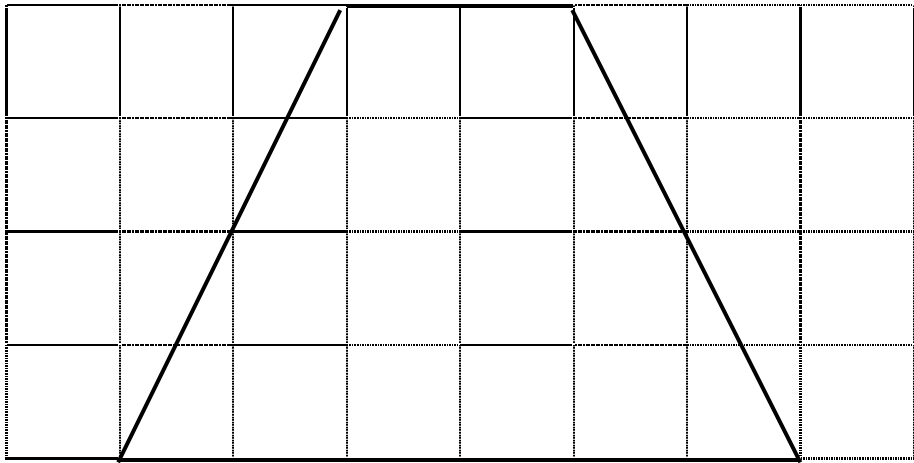
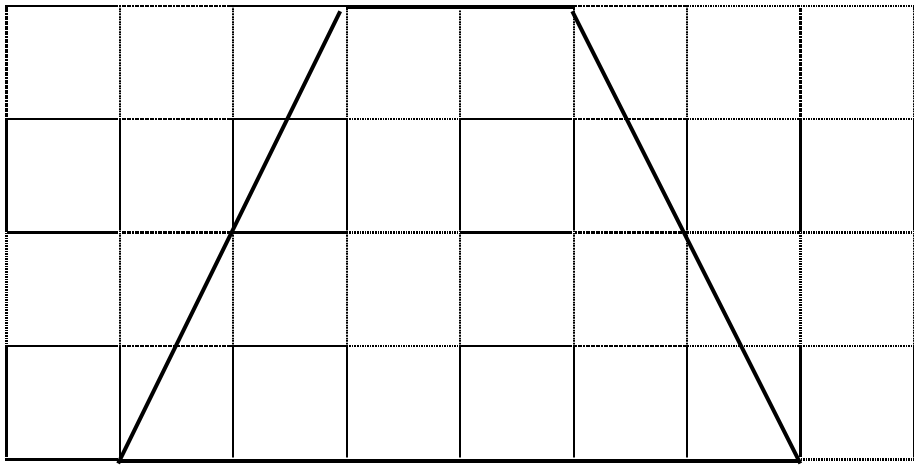
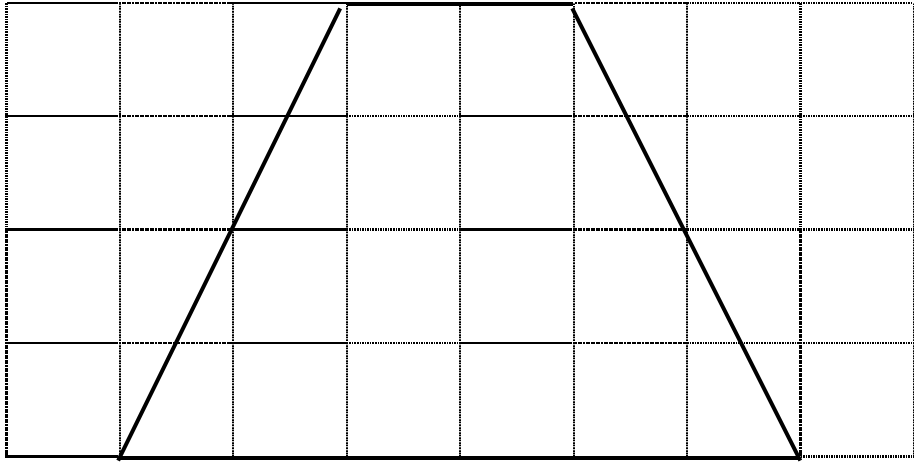
Adaptado de cadeia de tarefas: Geometria (ESELx: Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores do 1º e 2º ciclo do Ensino Básico)

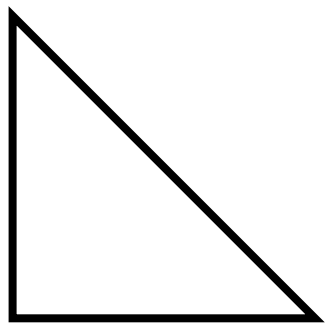
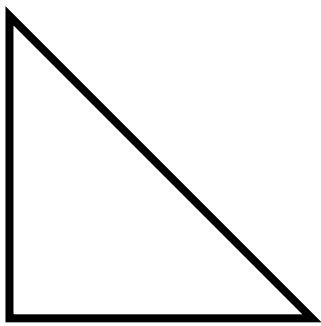
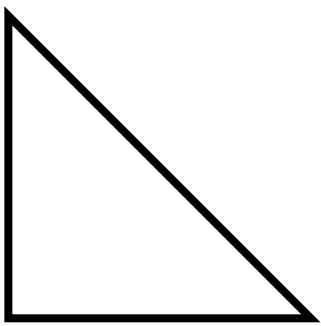
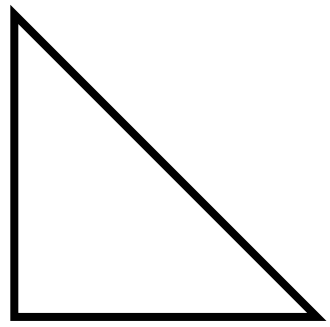
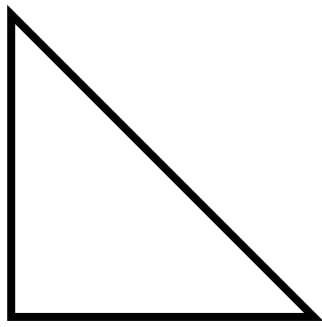
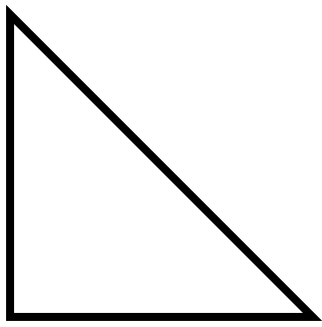
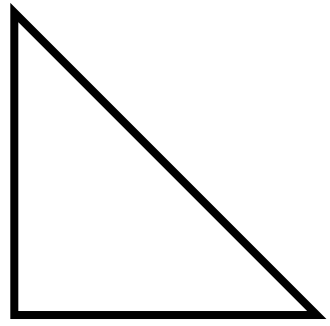
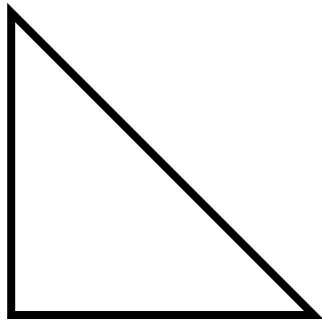
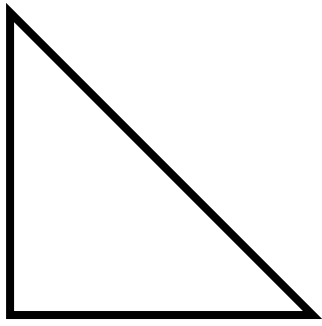
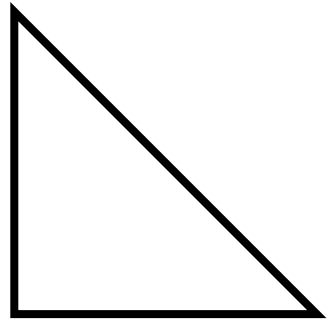
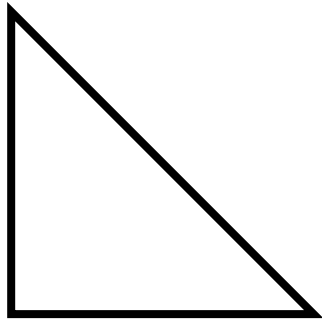
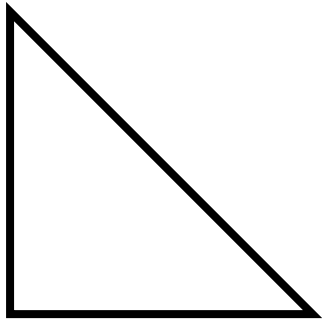
Anexo 10



Malha ponteada 5 x 5







Anexo 11

Lisboa, 16 de Novembro de 2011

Exmo. Diretor do Externato -----

No âmbito do curso de mestrado *Educação Matemática no pré-escolar e 1º/2º Ciclos do Ensino Básico* que frequento na Escola Superior de Educação de Lisboa, elaborarei durante o ano letivo de 2011/2012 a dissertação de mestrado sob a orientação da Professora Doutora Lurdes Serrazina e da Professora Cristina Loureiro.

A investigação que levarei a cabo tem como objetivo o estudo do desenvolvimento do raciocínio geométrico em alunos do 3.º ano de escolaridade e os contributos deste tipo de raciocínio na abordagem às grandezas área e volume.

É meu propósito desenvolver este estudo durante o presente ano letivo, na instituição onde atualmente desenvolvo a minha atividade profissional – Externato Fernão Mendes Pinto – tendo como objeto de estudo os alunos da turma do 3º ano de que sou a professora titular.

Venho, assim, por este meio, solicitar a autorização por parte da direção desta escola à realização da minha investigação, fazendo uso dos materiais didáticos disponíveis e outros recursos da escola. No cumprimento dos deveres éticos de uma investigação deste género, garanto, desde já, a confidencialidade da escola e dos alunos participantes.

Aguardando uma resposta, despeço-me com os melhores cumprimentos.

Anexo 12

Lisboa, 16 de Novembro de 2011

Exmo. Sr. Encarregado de Educação

No âmbito do curso de mestrado *Educação Matemática no pré-escolar e 1º/2º Ciclos do Ensino Básico* que frequento na Escola Superior de Educação de Lisboa, elaborarei durante o ano letivo de 2011/2012 a dissertação de mestrado sob a orientação da Professora Doutora Lurdes Serrazina e da Professora Cristina Loureiro.

A investigação que levarei a cabo tem como objetivo o estudo do desenvolvimento do raciocínio geométrico em alunos do 3.º ano de escolaridade e os contributos deste tipo de raciocínio na abordagem às grandezas área e volume.

É meu propósito desenvolver a investigação durante o presente ano letivo, no Externato -----, tendo sido já autorizada por parte da direção da escola.

Para o desenvolvimento da minha investigação será necessário recolher registos audiovisuais durante a abordagem aos conteúdos matemáticos, bem como das produções do vosso educando.

Neste sentido, venho por este meio solicitar a autorização para áudio-gravar o seu educando, servindo os ditos registos como material para análise. No cumprimento dos deveres éticos de uma investigação deste género, garanto, desde já, a confidencialidade da escola e dos alunos participantes.

Manifesto, ainda, a minha inteira disponibilidade para qualquer esclarecimento que considere necessário.

Com os melhores cumprimentos,

Autorização

Eu, _____,

Encarregado(a) de Educação do(a) aluno(a)

_____, da turma do 3º ano,

do Externato -----, autorizo que a Professora Sílvia

Caçador recolha por meios audiovisuais registos do meu educando,

no âmbito da investigação que me foi dada a conhecer.

(Assinatura do Encarregado de Educação)

___/___/___

(Data)