

## **Polígonos e poliedros: trabalhar a relação 2D-3D**

Joana Conceição

*Instituto de Educação, Universidade de Lisboa*

Margarida Rodrigues

*CIED, Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa & UIDEF,*

*Instituto de Educação, Universidade de Lisboa*

Nos últimos anos têm surgido trabalhos de investigação que sugerem a importância de trabalhar a bidimensionalidade e a tridimensionalidade de forma integrada (Johnston-Wilder & Mason, 2005; Sinclair, Mamolo & Whiteley, 2011). O trabalho integrado 2D-3D permite aprofundar as relações que os alunos são capazes de estabelecer dentro de cada representação para depois utilizarem essas relações no trabalho entre as duas representações. Segundo Johnston-Wilder e Mason (2005), para que os alunos se familiarizem com as figuras geométricas e estabeleçam relações entre as diferentes formas de representação, é necessário que manipulem essas figuras, analisando-as, explorando-as e estabelecendo relações que, à medida que são compreendidas, são também percebidas como propriedades. Apesar de haver uma tendência para considerar que os alunos mais novos devem começar pelas figuras tridimensionais, trabalhando depois as figuras bidimensionais, estes autores referem que um dos caminhos possíveis é trabalhar a geometria espacial e a geometria plana de forma integrada.

Neste artigo, temos como objetivo compreender como é que os alunos do 1.º ano do ensino básico relacionam poliedros e os polígonos presentes nas suas faces, em particular que tipo de relações estabelecem entre representações 2D e 3D de poliedros.

### **Desafios na relação 2D-3D**

Tradicionalmente, a aprendizagem da geometria nos primeiros anos baseia-se na classificação pelo aspeto visual das figuras, sem um trabalho consistente na exploração de relações, passando depois para um formalismo excessivo (Gutiérrez, 1998). Esta falta de exploração da estrutura das figuras associada a uma abordagem de figuras 2D independente de figuras 3D tem levado a que surjam dificuldades na interpretação de diferentes representações.

Hallowell, Okamoto, Romo e La Joy (2015) identificaram algumas dificuldades que os alunos de 1.º ano revelam ao relacionar representações 2D de figuras bidimensionais correspondentes aos componentes de sólidos (como por exemplo, o retângulo enquanto componente do prisma reto ou do cilindro) ou de figuras 3D correspondentes a sólidos (cubo, esfera, prisma reto, pirâmide e cilindro) com os manipulativos físicos representativos dessas figuras 2D (em papel fino) ou 3D. As dificuldades evidenciadas foram: a tendência para sobrevalorizar as partes pontiagudas, nomeadamente as triangulares, sem reconhecerem outros componentes, ou a dificuldade em imaginar representações planificadas de figuras tridimensionais (por exemplo, imaginar o retângulo como representação da superfície lateral do cilindro). Estes alunos recorriam a aspetos visuais, quando não conheciam a estrutura e as propriedades dos objetos. Neste estudo, Hallowell et al. (2015) adiantam que o facto de os alunos não explorarem as figuras de modo a apropriarem-se das diferentes partes, para depois as poderem relacionar com o todo, torna esta relação, entre as partes e o todo, um aspeto desafiante.

### **Estruturação espacial e raciocínio espacial**

O estabelecimento de relações entre representações bidimensionais e tridimensionais implica que os alunos estruturem espacialmente as figuras, isto é, que criem um modelo

mental, estabelecendo relações entre componentes e compostos e entre estes e o todo (Battista & Clements, 1996). Essas relações contribuem para o raciocínio espacial, que é definido por Battista (2007) como a “capacidade de 'ver', examinar e refletir sobre objetos espaciais, imagens, relações e transformações, envolvendo gerar e analisar imagens, transformar e operar com imagens, e colocá-las ao serviço de outras representações mentais” (p. 843). Davis, Okamoto e Whiteley (2015) apresentam uma definição de raciocínio espacial assente em processos que estão organizados em duas partes interligadas: *compreender*, numa dimensão mental; e *transformar*, numa dimensão física. Nos primeiros anos, o trabalho de composição e decomposição de figuras tridimensionais, associado ao processo de transformar, permite reconhecer relações na estrutura de uma figura, que podem ser articuladas com representações bidimensionais (Conceição & Rodrigues, 2019). Estas relações emergem na transformação 2D-3D, através de processos de raciocínio espacial. Para isso, o processo de estruturação espacial é fundamental. A estruturação pode ser local, se as relações são apenas entre componentes ou entre compostos, ou global se as relações são estabelecidas entre componentes, compostos e o todo.

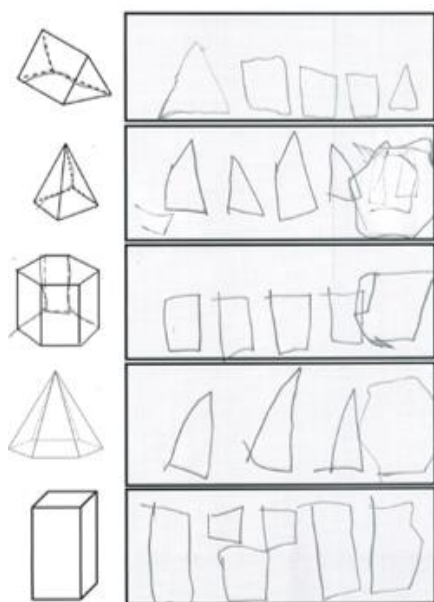
Para além da relação entre a bidimensionalidade e a tridimensionalidade se apresentar como uma conexão crítica (Francis & Whiteley, 2015), a fluência entre representações 2D e 3D é essencial para o raciocínio. Francis e Whiteley (2015) atribuem o desenvolvimento do raciocínio espacial a experiências com figuras tridimensionais, à exploração das respetivas representações bidimensionais, onde os desenhos das figuras 3D têm uma importância significativa, mas também à interação entre pares e com o professor. Para isso, e dado que o raciocínio espacial implica justificações, é importante valorizar, na sala de aula, diferentes formas de comunicação não-verbal, como gestos ou desenhos, por serem meios de expressão do raciocínio espacial (Conceição & Rodrigues, 2019; Whiteley, Sinclair & Davis, 2015).

### **Experiência de ensino**

Num estudo que desenvolvemos com uma turma de 24 alunos do 1.º ano do ensino básico em conjunto com a professora titular, incidente no processo de estruturação espacial, foi-lhes proposta uma tarefa em que relacionassem polígonos e poliedros: “*O que vocês vão ter de descobrir é(...) que figuras é que ela [a Joana] usou para construir esses sólidos*”. Para isso, foi-lhes dado um conjunto de sólidos 3D construídos em papel e um conjunto de polígonos, também em papel, correspondentes às faces dos sólidos, para que estabelecessem essa relação, registando depois as suas descobertas na folha de trabalho.

### **Estruturação local e estruturação global nas relações 2D-3D**

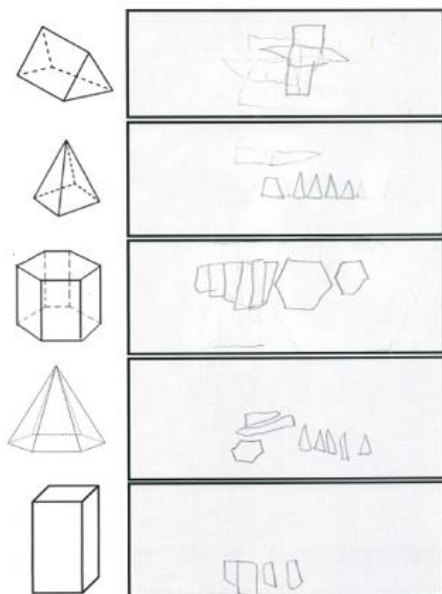
Raquel, como outros colegas utiliza, inicialmente, a sobreposição para relacionar os polígonos com as faces dos poliedros, mas, ao reconhecer a sua congruência, passa a contar as faces iguais. Por vezes, surgem erros na contagem, possivelmente associados ao facto de Raquel ainda não ter um modelo mental que relacione as partes e o todo. Raquel parece assim associar os polígonos às faces dos sólidos, mas o seu registo (Figura 1) ainda não evidencia uma relação entre os polígonos, nem uma relação entre estes e o todo, o que sugere que a aluna faz uma estruturação local.



**Figura 1- Registo do trabalho realizado por Raquel**

Ao longo da tarefa, Raquel usa alternadamente as duas pirâmides, parecendo reconhecê-las pelo aspeto global. Associa os triângulos às faces laterais, mas parece ter dificuldade em relacionar o número de faces laterais com o polígono da base. No caso dos prismas, a aluna desenha as duas bases para os primas triangular e quadrangular, mas, para o prisma hexagonal, regista apenas uma base numa figura semelhante ao quadrado, mostrando dificuldade em desenhar o hexágono. Mesmo podendo manipular os sólidos, Raquel analisa com frequência a representação 2D, o que poderá ser desafiante, dado que a aluna parece ainda não dominar a relação entre as duas representações. Na estratégia de Raquel, diferentes processos de raciocínio espacial estão presentes, como relacionar e localizar, associados a compreender e transformar respetivamente, quando a aluna sobrepõe polígonos às faces do poliedro e quando reconhece a congruência das faces. A decomposição é também um processo de raciocínio aqui evidente.

Frederico, por sua vez, apresenta um registo que evidencia relações diferentes das de Raquel (Figura 2).

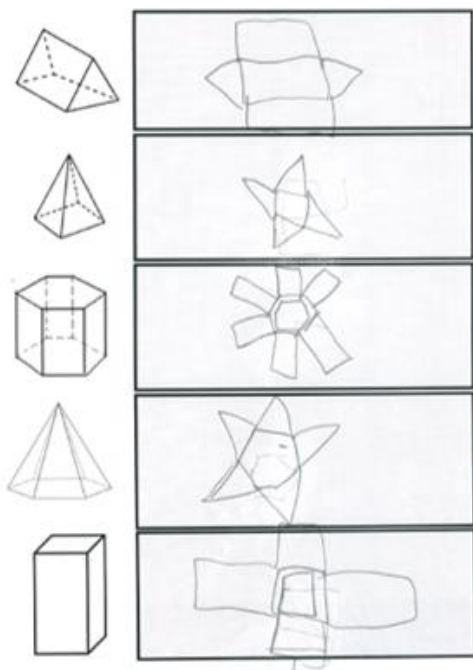


**Figura 2 – Registo de Frederico**

Este aluno regista os polígonos referentes ao prisma triangular sob a forma de planificação, parecendo mostrar que reconhece relações entre eles. Também para o prisma hexagonal, as faces laterais juntas podem indicar que o aluno reconhece uma continuidade entre elas, embora isto não se verifique para outros sólidos. No caso do prisma triangular, regista uma base oposta à outra enquanto, no prisma hexagonal, regista as bases lado a lado. Surgem também erros de contagem, nas faces laterais da pirâmide hexagonal, e falta o registo das bases do prisma quadrangular. O desempenho de Frederico sugere que o aluno já é capaz de fazer uma estruturação global dos polígonos na sua relação com os poliedros, como é o caso do prisma triangular, mas, nos outros casos, a estruturação que faz é ainda local. Possivelmente, o aluno encontra-se numa fase de transição entre níveis.

Frederico parece utilizar processos de raciocínio espacial como relacionar, decompor e reorganizar, associados a compreender, e localizar e mudar de dimensão, associados a transformar.

No registo de Luísa, é possível ver que considera todas as faces dos sólidos (à exceção da pirâmide hexagonal). No caso do prisma triangular, desenha as duas bases, em lados opostos, e, nos prismas hexagonal e quadrangular, um polígono mais pequeno dentro do maior, dando a ideia de que deve ficar mais elevado. Este registo evidencia dois tipos de relações possíveis para os prismas, uma tendo como elemento central o polígono da base, onde são “encaixadas” as faces laterais e uma segunda base, e outra mais centrada nas faces laterais que são desenhadas lado a lado, tendo as bases localizações opostas. Em ambos os casos, é evidente a identificação de que as bases se encontram em posições opostas.



**Figura 3 – Registo de Luísa**

Luísa explica à turma como pensou:

Luísa: Nós juntámos as peças deitadas na mesa e... juntámos para ver se estavam certas e depois metemos junto ao (*Aponta para o hexágono, mas não se lembra do nome.*)

Professora: Meteste deitadas na mesa, é isso? Hum...

Luísa: E depois juntei para ver se eram as peças certas ou erradas e desenhei aqui. Esta é a detrás (*Aponta para um dos hexágonos.*), esta é a da frente (*Aponta para o outro hexágono.*) e estas são as de lado (*Aponta para os retângulos.*) (*Vai mostrando no desenho e no sólido as partes a que se refere.*) Foi preciso... (*conta as faces laterais*) seis lados de retângulos... (*pausa*) (*Aponta para o hexágono.*)

Professora: Foi preciso seis lados de retângulos para construíres esse sólido, foi? (...)

Luísa: Pusemos dois hexágonos e depois... e depois...

Investigadora: Por que é que eram precisos dois hexágonos?

Luísa: Para fazer a parte de cima e a parte de baixo.

Investigadora: E havia mais algum sólido onde fosse preciso também um hexágono?

Luísa: Sim.

Investigadora: Qual?

Luísa: Este. (*Aponta para a pirâmide hexagonal.*)

Investigadora: E quantos é que eram, nesse? Quantos hexágonos?

Luísa: Um.

Investigadora: Porquê?

Luísa: Porque depois em cima também não era preciso porque era este (*Aponta novamente para a pirâmide hexagonal.*)

Luísa mostra compreender as relações entre as diferentes faces e bases do prisma hexagonal quer na representação bidimensional quer na representação tridimensional, relacionando ainda as duas representações, ao longo da sua explicação. No caso da

pirâmide hexagonal, desenha um pentágono como base, o que pode estar relacionado com erros de contagem dos lados do polígono, ou com um registo de uma figura globalmente idêntica ao hexágono, atendendo ao aspeto visual, sem a preocupação de contar rigorosamente os lados. Ainda assim, Luísa parece perceber que a cada lado do polígono corresponde um triângulo. Mostra ainda reconhecer diferenças entre o prisma e a pirâmide, embora seja pelo seu aspeto visual, distinguindo-os sobretudo pelo número de bases, sem conseguir construir uma justificação adequada. A aluna estabelece relações diferentes e adequadas entre as faces, relacionando a sua disposição no plano com a sua posição no espaço. Luísa evidencia assim uma estruturação global, onde relaciona os polígonos entre si, na sua relação com o poliedro.

A aluna parece colocar em ação processos de raciocínio espacial como decompor, reorganizar e visualizar, associados a compreender, e dobrar, rodar e mudar de dimensão, associados a transformar.

## **Conclusões**

Estes alunos relacionam de forma adequada os polígonos com as faces dos poliedros. Estabelecem relações entre a bidimensionalidade e a tridimensionalidade com base no reconhecimento de polígonos nas faces dos poliedros, tratando-se de uma estruturação local. Dada a natureza ainda superficial das relações entre polígonos e poliedros, os alunos tendem a valorizar os aspetos visuais mais salientes que usam na distinção de sólidos. Noutros casos, as conexões 2D-3D são mais profundas, porque emergem de relações entre polígonos que, por sua vez, são influenciadas pela relação com o poliedro. Nestes casos, estamos perante uma estruturação global.

Em ambas as situações, parecem estar presentes processos associados ao raciocínio espacial quer seja pela ação de compreender ou pela ação de transformar, que contribuem para a progressão no nível de estruturação espacial. Ao mesmo tempo, um aprofundamento do tipo de relações estabelecidas, potenciado pelo desenho das faces dos poliedros, parece contribuir para o aprofundamento dos processos de raciocínio espacial.

## **Agradecimentos:**

Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia através de uma bolsa concedida à primeira autora (SFRH/BD/130505/2017).

## **Referências**

- Battista, M. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. Lester (Ed), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 843–909). Reston, VA: NCTM.
- Battista, M. T. & Clements, D. (1996). Students' understanding of three-dimensional rectangular arrays of cubes. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(3) 258–292. doi: 10.2307/749365
- Conceição, J & Rodrigues, M. (2019). Polígonos e poliedros: trabalhar as conexões dentro da geometria. In N. Amado, A. P. Canavarro, S. Carreira, R. T. Ferreira & I. Vale (Ed). Livro de atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática (EIEM 2019) (pp. 251-256). Alte, Loulé: Escola Profissional Cândido Guerreiro.
- Davis, B., Okamoto, Y., & Whiteley, W. (2015). Spatializing school mathematics. In Davis, B. (Ed.) *Spatial reasoning in the early years: Principles, assertions, and speculations* (pp. 121–136). New York: Routledge.

- Francis, K. & Whiteley, W. (2015). Interactions between three dimensions and two dimensions. In Davis, B. (Ed.) *Spatial reasoning in the early years: Principles, assertions, and speculations* (pp. 139–150). New York: Routledge.
- Gutiérrez A. (1998). Las representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales en la enseñanza de la geometría espacial. *Revista Ema*, 3(3), 193–220
- Hallowell, D. A., Okamoto, Y., Romo, L. F., & La Joy, J. R. (2015). First-graders' spatial-mathematical reasoning about plane and solid shapes and their representations. *ZDM*, 47(3), 363–375. doi: 10.1007/s11858-015-0664-9
- Johnston-Wilder, S. & Mason, J. (Eds.). (2005). *Developing Thinking in Geometry*. London: The Open University.
- Sinclair, M, Mamolo, A, & Whiteley, W.J. (2011). Designing spatial visual tasks for research: the case of the filling task. *Educational Studies in Mathematics*, 78(2), 135–371. doi: 10.1007/s10649-011-9315-4
- Whiteley, W., Sinclair, N., & Davis, B. (2015). What is spatial reasoning? In Davis, B. (Ed.) *Spatial reasoning in the early years: Principles, assertions, and speculations* (pp. 3–14). New York: Routledge.