INSTITUTO POLITÉCNICO DE LISBOA
INSTITUTO SUPERIOR DE CONTABILIDADE
E ADMINISTRAÇÃO DE LISBOA

EVIDÊNCIA DE *CLUSTERS* DE VOLATILIDADE: UMA ABORDAGEM APLICADA AOS ÍNDICES BOLSISTAS

Patrícia Bizarro Gomes

Lisboa, março de 2025

INSTITUTO POLITÉCNICO DE LISBOA
INSTITUTO SUPERIOR DE CONTABILIDADE E ADMINISTRAÇÃO DE LISBOA

EVIDÊNCIA DE *CLUSTERS* DE VOLATILIDADE: UMA ABORDAGEM APLICADA AOS ÍNDICES BOLSISTAS

Patrícia Bizarro Gomes

Dissertação submetida ao Instituto Superior de Contabilidade e Administração de Lisboa para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Análise Financeira, realizada sob a orientação científica da Professora Doutora Sónia Margarida Ricardo Bentes.

Constituição do Júri:

Presidente: Doutor Ricardo Correia

Arguente: Doutor José Carlos Teixeira

Orientador: Doutora Sónia Bentes

Lisboa, março de 2025

Dissertação elaborada ao abrigo do projeto IPL/IDI&CA2023/RISKFIN_ISCAL

AGRADECIMENTOS

Ao longo desta jornada académica, muitas pessoas desempenharam um papel fundamental no meu desenvolvimento pessoal, e é com grande gratidão que dedico este espaço para reconhecer o seu apoio inestimável.

Em primeiro lugar, quero agradecer aos meus pais. A vossa dedicação, amor incondicional e apoio constante foram o alicerce que me permitiu chegar até aqui. Desde os meus primeiros passos até os desafios mais complexos da vida. A vossa capacidade de encorajar-me a perseguir os meus sonhos e a enfrentar os obstáculos com coragem é algo que levarei comigo para sempre. Obrigado por serem os meus maiores fãs e por me ensinarem a importância da perseverança e da humildade.

A minha melhor amiga, Inês, que merece um agradecimento especial. Ao longo dos anos, temos partilhado não apenas alegrias e conquistas, mas também momentos de incerteza e ansiedade. A tua presença constante, o teu apoio inabalável e a tua capacidade de me fazer rir, mesmo nos dias mais difíceis, foram cruciais para o meu bem-estar durante esta jornada. Obrigado por seres uma amiga tão incrível e por me inspirares a ser a melhor versão de mim mesma.

Por fim, mas não menos importante, quero expressar o meu agradecimento à minha professora e orientadora, Sónia Bentes. A sua orientação e conhecimento foram cruciais para o desenvolvimento desta tese. Agradeço a sua paciência e a sua disponibilidade para esclarecer dúvidas, bem como o incentivo constante que me proporcionou. O seu entusiasmo pelo tema e a forma como me desafiou a pensar criticamente fizeram toda a diferença na minha formação académica. Agradeço também ao IPL – Instituto Politécnico de Lisboa que através do projeto de investigação IPL/IDI&CA2023/RISKFIN_ISCAL apoiou esta dissertação.

RESUMO

A volatilidade é um conceito muito importante no contexto financeiro e económico, uma vez que se refere a uma medida de flutuação no preço ou na taxa de retorno de um ativo ao longo do tempo. É considerado um dos aspetos mais importantes a ter em conta para quem quer investir no mercado financeiro, uma vez que relaciona a maneira como o preço de um determinado ativo se comporta no mercado.

A previsão da volatilidade é crucial para qualquer pessoa que esteja inserida no mercado financeiro, uma vez que proporciona *insights* para a gestão do risco, tomada de decisões de possíveis investimentos e execução de estratégias de negociação eficazes.

Este estudo pretende analisar o padrão da volatilidade dos mercados de ações do índice S&P500 e PSI-20 para o período de 7 de janeiro de 2013 a 29 de dezembro de 2023. A relevância deste estudo centra-se na possibilidade de verificação da existência de *clusters* de volatilidade, ou seja, se existem períodos de grande volatilidade de um ativo financeiro a serem seguidos por outros períodos de igual oscilação, através da aplicação de um modelo de heterocedasticidade condicionada *GARCH – Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedaticity Model.*

Palavras-chave: Volatilidade, S&P500, PSI-20, Modelo *GARCH, clusters*

ABSTRACT

Volatility is a fundamental concept in the financial and economic context, as it refers to a measure of fluctuation in the price or rate of return of an asset over time. It is considered one of the most important aspects to take into account for anyone who wants to invest in the financial market, as it relates to how the price of a particular asset behaves in the market.

Predicting volatility is crucial for anyone involved in the financial market, as it provides insights for managing risk, making decisions about possible investments, and executing effective trading strategies.

This study aims to analyze the volatility pattern of the S&P500 and PSI-20 stock markets for the period January 7, 2013 to December 29, 2023. The relevance of this study lies in the possibility of verifying the existence of volatility *clusters*, i.e. whether there are periods of high volatility in a financial asset followed by other periods of equal oscillation, through the application of a *Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity* (*GARCH*).

Keywords: Volatility, S&P500, PSI-20, *GARCH* model, *clusters*

ÍNDICE

AGRADECIMENTOS 5

RESUMO 6

ABSTRACT 7

LISTA DE TABELAS 10

LISTA DE FIGURAS 11

LISTA DE ABREVAITURAS 12

1. INTRODUÇÃO 13

2. ENQUADRAMENTO TEÓRICO 15

2.1 Conceito de Volatilidade 15

2.1.1 Volatilidade Histórica ou Estatística 16

2.1.2 Volatilidade Futura ou Previsional 17

2.2 *Clusters* de Volatilidade 17

2.3 Teorias sobre os *Clusters* de volatilidade 19

2.3 Fatores Determinantes dos *Clusters* de Volatilidade 21

3. METODOLODIA 23

3.1 Modelo *GARCH* 23

4. RESULTADOS EMPÍRICOS 25

4.1 Definição e características dos índices bolsistas 25

4.1.1 PSI-20 25

4.1.2 S&P 500 26

4.2 Recolha e tratamento de dados 27

4.3 Descrição da amostra 27

4.3.1 Evolução da cotação dos índices bolsistas 27

4.3.2 Evolução das rendibilidades dos índices bolsistas 30

4.3.4 Análise Estatística 32

4.3.5. Análise de Histogramas 34

4.4 Estimação do modelo 36

4.4.1 Testes de Estacionariedade 36

4.4.3 Testes de Autocorrelação 38

4.4.4 Testes de Heterocedasticidade 42

4.4.5 Estimação do modelo AR(1)-GARCH(1,1) 46

5. CONCLUSÃO 49

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 51

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1: Estatísticas descritivas e teste de Jarque-Bera 32
Tabela 4.2: Testes de estacionariedade 37
Tabela 4.3: Correlograma para as rendibilidades do índice PSI-20 entre 2013 e 2023 . 39
Tabela 4.4: Correlograma para as rendibilidades do índice S&P 500 entre 2013 e 2023 40
Tabela 4.5: Resultados do teste BG para a ausência de autocorrelação nas rendibilidades diárias dos índices durante o período de 2013 a 2023 41
Tabela 4.6: Resultados do teste à ausência de heterocedasticidade nos resíduos dos modelos obtidas no teste ARCH-LM para o PSI-20 e S&P500 durante o período entre 2013 e 2023 43
Tabela 4.7: Correlograma do quadrado dos resíduos do modelo aplicado às rendibilidades do índice PSI-20 entre 2013 e 2023 44
Tabela 4.8: Correlograma do quadrado dos resíduos do modelo aplicado às rendibilidades do índice S&P500 entre 2013 e 2023 45
Tabela 4.9: Resultados do modelos AR(1)-GARH(1,1) para as rendibilidades do índice PSI-20 46
Tabela 4.10: Resultados do modelos AR(1)-GARH(1,1) para as rendibilidades do índice S&P500 47

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 Níveis de Volatilidade 16

Figura 4.1: Evolução das cotações diárias do índice PSI-20 entre 07/01/2013 e 29/12/2023..... 28

Figura 4.2: Evolução das cotações diárias do índice S&P 500 entre 07/01/2013 e 29/12/2023..... 29

Figura 4.3: Evolução das rendibilidades do PSI 20 no período entre 07/01/2013 e 29/12/2023..... 31

Figura 4.4: Evolução das rendibilidades do S&P 500 no período entre 07/01/2013 e 29/12/2023..... 32

Figura 4.5: Histogramas da rendibilidade diária dos índices bolsistas em estudo, no período entre 07/01/2013 e 29/12/2023 35

LISTA DE ABREVAITURAS

ADF – Augmented Dickey Fuller

AR - Autoregressive

ARCH - Autoregressive Conditional Heteroscedasticit

BG – Breusch-Godfrey

EUA – Estados Unidos da América

GARCH – Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity

JB – Jarque-Bera

KPSS - Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin

NYSE – New York Stock Exchang

PSI – Portuguese stock índex

S&P 500 - Standard & Poor's 500

1. INTRODUÇÃO

A tema da volatilidade é um termo comum no mercado financeiro, e é considerada como uma das informações mais revelantes para os investidores dos mercados bolsistas, uma vez que retrata a variância do preço de um ativo. Os investidores observam a volatilidade dos ativos para determinar como o seu valor costuma oscilar em diferentes cenários económicos. Embora este índice não seja uma garantia de que o título ou ação gera bons rendimentos futuros, é considerada uma boa estratégia para saber o risco que apresentam. A volatilidade desempenha um papel essencial como indicador financeiro, auxiliando na previsão de ganhos e perdas, o que possibilita ao investidor adotar estratégias para mitigar os riscos e proteger a sua carteira de ativos. Esta previsão acima mencionada, possibilita a captação de momentos de incerteza no mercado, de modo a antecipar estratégias de retorno.

Existem modelos para determinar a evolução da volatilidade, embora não seja fácil saber qual o melhor modelo a aplicar. Pretende-se com este estudo, realizar uma abordagem teórica aprofundada dos dois modelos de volatilidade *ARCH* (Modelo de Heterocedasticidade Condicional Autorregressiva) e *GARCH* (Modelo de Heterocedasticidade Condicional Autorregressiva Generalizado), sendo que o método estatístico utilizado neste estudo será o modelo *GARCH*. Tendo em conta o conceito de volatilidade condicionada, este modelo permite a modelagem dos *clusters*, que emergem a partir da presença de informação passada na volatilidade.

Por fim, e de forma a completar a relevância deste tema, é essencial aplicá-lo também a índices de referência para o mercado português em comparação com o mercado internacional, neste caso os índices PSI-20 e S&P 500 por várias razões, principalmente pela representatividade que ambos têm no mercado, o PSI-20 representa as principais empresas listadas na Bolsa de Valores de Lisboa em Portugal, enquanto o S&P 500 representa as 500 maiores empresas listadas nas bolsas dos Estados Unidos.

Mais concretamente pretende-se verificar a existência de *Clusters* de Volatilidade para estes mesmos índices, ou seja, se existem períodos de grande volatilidade de um ativo financeiro a serem seguidos por outros períodos de igual oscilação.

A presente dissertação encontra-se estruturada em cinco capítulos. Após esta introdução, o segundo capítulo é dedicado enquadramento teórico, no qual são apresentados os principais conceitos e definições que fundamentam o tema abordado neste estudo. O terceiro capítulo aborda a metodologia utilizada, com a descrição e estimação do modelo utilizado (*GARCH*), assim como os principais resultados empíricos obtidos com base nos dados da amostra e na aplicação do modelo. Por último, serão apresentadas as principais conclusões tendo por base os resultados obtidos, bem como as limitações e sugestões para investigações futuras.

2. ENQUADRAMENTO TEÓRICO

2.1 Conceito de Volatilidade

A volatilidade é um fenómeno que faz parte dos mercados financeiros, refletindo a instabilidade e as variações no preço dos ativos ao longo do tempo. Devido à sua relevância na análise de riscos e no desenvolvimento de estratégias de investimento, têm surgido diversas metodologias para a sua quantificação e estudo. Estas abordagens variam desde os modelos estatísticos clássicos, que recorrem a ferramentas como o desvio padrão e a variância, até métodos mais avançados, que consideram a distribuição dos retornos e as interações entre diferentes ativos (Engle, 1982; Bollerslev, 1986).

A crescente complexidade dos mercados financeiros, aliada ao progresso das tecnologias de informação e das ferramentas analíticas, tem impulsionado a investigação sobre a volatilidade. Este cenário originou uma série de modelos que procuram não só medir a volatilidade, como também clarificar os seus padrões e comportamentos em diferentes contextos de mercado (Cont, 2001; Andersen et al., 2003). Compreender essas abordagens é crucial para que investidores, analistas e investigadores possam interpretar as flutuações do mercado e tomar decisões mais informadas.

A volatilidade é utilizada para quantificar e analisar o risco envolvido ao deter um ativo que opera no mercado financeiro durante um intervalo de tempo, avaliando a dispersão dos seus rendimentos e o próprio mercado (Brooks, 2002).

Para a análise dos resultados, recorre-se ao desvio padrão (σ), um dos métodos mais utilizados, pois corresponde à raiz quadrada da variância e apresenta uma interpretação acessível, uma vez que a sua unidade é a mesma da variável analisada. Muitos investidores preferem este método, já que os preços da maioria dos ativos costumam seguir uma distribuição normal. É importante ressaltar que um ativo com um desvio padrão elevado indica uma maior volatilidade no mercado. O desvio padrão (σ) é compreendido como um valor que indica a dispersão percentual em relação à média de uma variável aleatória. Quando o seu valor é reduzido, aproximando-se de zero, os resultados tendem a ser mais homogéneos (Alexander, 2002).

Como demonstrado na Figura 1, quando mais elevado for o valor do desvio, mais afastados estão os valores da média (e vice-versa), ou seja, o ativo será mais volátil, e consequentemente apresenta maior risco.

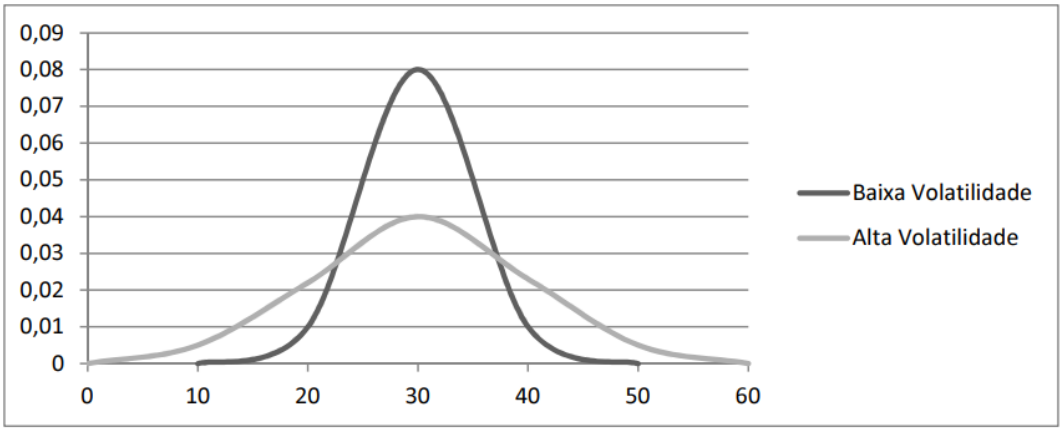


Figura 2.1 Níveis de Volatilidade

Fonte: Ferreira (2009:352)

2.1.1 Volatilidade Histórica ou Estatística

A volatilidade histórica também conhecida como volatilidade estatística, analisa e avalia as variações passadas nos preços, e é utilizada como indicador de risco total associado a esse ativo financeiro. Esta volatilidade é medida por meio da variância ou desvio padrão dos resultados observados.

O desvio padrão (σ) é calculado usando a seguinte fórmula:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{n}(Xt - \bar{X})^2}{n-1}} \qquad (2.1)$$

Onde N representa o número de observações, Xt corresponde ao logaritmo natural do quociente entre duas cotações sucessivas (ln (Pt / Pt-1)) e $\bar{X}$ é a média aritmética de Xt-1.

A estimação da volatilidade histórica ou estatística apresenta uma limitação significativa, uma vez que os valores históricos observados dificilmente se repetem. No entanto, a volatilidade histórica pode desempenhar um papel importante na previsão de valores

futuros, uma vez que ajuda na formação de expectativas. Há que ter em atenção a necessidade de os dados históricos serem tratados de forma diferente, visto que os acontecimentos mais recentes devem ter mais peso do que os acontecimentos mais antigos. Esta necessidade, pode ser corrigida através da incorporação de ponderados.

Por outro lado, os valores a utilizar também trazem problemas aos analistas, dado que estes não sabem se devem utilizar apenas os preços de fecho das sessões, ou se outras cotações (abertura, máximas ou mínimas) devem também ser consideradas (Ferreira, 2009).

Pode-se com isto dizer que a volatilidade histórica ou estatística apenas nos dá insights relativamente a como os mercados se poderão comportar no futuro, sendo o ponto de partida para estimar a volatilidade futura.

2.1.2 Volatilidade Futura ou Previsional

A volatilidade futura, também denominada de volatilidade previsional, refere-se à expectativa de variações futuras nas cotações. É considerada pelos especialistas a mais difícil de estimar, dado a sua complexidade na previsão do preço do ativo subjacente para o período da opção até ao seu termo. Para estimar o valor da volatilidade, são utilizados alguns métodos, não existindo uma abordagem que possa ser considerada como o mais correta a utilizar. Geralmente, são utilizadas variantes dos modelos heterocedásticos *ARCH/GARCH* como forma de modelar e prever o valor da volatilidade.

2.2 *Clusters* de Volatilidade

O fenómeno de *clusters* de volatilidade é amplamente reconhecido na área das finanças desde que Mandelbrot (1963) referiu que «*large changes tend to be followed by larges changes […] and small changes tend to be followed by small changes*», quer isto dizer, que existem períodos de alto (ou baixa) volatilidade a serem seguidos por outros períodos de igual ou idêntica oscilação, tal como os períodos de menores oscilações nos preços são consecutivamente seguidos por períodos também de baixa volatilidade (Campbell et al., 1997).

Segundo Fama (1965) a possível existência de *clusters* de volatilidade resulta da capacidade dos investidores em avaliar novas informações que chegam ao mercado, as quais não são interpretadas com precisão. Durante períodos de choque do mercado, os investidores demonstram uma sensibilidade acentuada a novas informações, o que leva a um aumento de volatilidade, criando-se uma reação adicional nos mercados.

Brock et al. (1992) afirma que a presença deste fenómeno numa série constitui um indicativo claro de heteroscedasticidade e que essa constatação foi um dos principais motores para o desenvolvimento dos modelos *ARCH* e *GARCH.*

Ding, Granger e Engle (1993) afirmam que em mercados eficientes, a chegada de novas informações influencia o preço dos ativos. Contudo, se essas informações forem transmitidas de forma parcial ou em grupos, o retorno pode não depender das rendibilidades passadas o que significa que não há obrigatoriamente uma correlação entre eles.

Segundo Brooks (2002), o nível de volatilidade presente na atualidade tende a apresentar uma correlação positiva com o nível de volatilidade dos períodos imediatamente anteriores.

Na literatura diversos investigadores têm abordado o fenómeno dos *clusters*. Bentes (2008) conduziu uma investigação no qual são analisadas diversas situações e estudos que evidenciam o comportamento de *clusters* na volatilidade. Os autores, Haan e Spear (1998) assim como Siklos e Skoczylas (2002), através dos seus estudos, obtiveram evidências da presença de *clusters* na volatilidade de taxas de juro. Foi igualmente identificado por Santis e Imrohoroglu (1997) a formação de *clusters* nos índices bolsistas dos mercados emergentes à Europa/Médio Oriente (Grécia, Turquia), Ásia (Índia, Coreia, Malásia, Filipinas, China e Tailândia) e América do Sul (Brasil, Argentina, Chile, Venezuela). Este fenómeno, frequentemente observado em mercados mais desenvolvidos, indica um nível de volatilidade consideravelmente superior nesses países quando comparado com os mercados maduros.

2.3 Teorias sobre os *Clusters* de volatilidade

Na ultima década, surgiram diversas abordagens para a representação do fenómeno da volatilidade. Essas metodologias variam em complexidade e fundamentação teórica, refletindo a diversidade de perspetivas sobre a dinâmica dos mercados. A evolução dessas abordagens é crucial para uma melhor compreensão e análise do risco associado à flutuação do preço dos ativos.

Bentes et al. (2012), sugeriu o conceito de entropia para estudar a volatilidade nos mercados de ações. A entropia é um conceito da alternativa ao desvio padrão, e quando aplicada à volatilidade, serve como uma medida de incerteza ou desordem nos preços dos ativos ao longo do tempo. Em termos simples, quanto maior for a entropia, maior a incerteza ou desordem presente. Em vez de depender de pressupostos específicos sobre a distribuição dos retornos, a entropia permite avaliar a variabilidade dos preços de forma mais flexível. Essa abordagem pode revelar informações sobre o comportamento do mercado, identificando padrões e dinâmicas que não seriam capturados por medidas tradicionais, como o desvio padrão.

Tseng e Lie (2011) analisaram um conjunto de factos estilizados e apresentaram um índice quantitativo para medir os *clusters* em grandes flutuações, permitindo assim a extração de mais informações de séries temporais em comparação com os métodos convencionais anteriores. De forma geral, concluíram que as grandes perdas de rendibilidade estariam associadas a *clusters* de volatilidade mais significativos do que os grandes ganhos nos mercados financeiros. Adicionalmente, observaram que o comportamento de decaimento lento nas funções de autocorrelação das rendibilidades absolutas está diretamente relacionado ao grau de *clusters* de grandes flutuações de uma série financeiras.

Piskorev et al. (2014) apresentaram um índice que atua como um indicador de volatilidade de mercado financeiro. Chen et al. (2015) desenvolveram um modelo baseado na interação entre agentes, com o objetivo de investigar a estrutura do setor do mercado e os *clusters* da volatilidade nas bolsas de valores de Nova Iorque e Hong Kong. He et al. (2016) criaram um modelo de ativos simples com dois tipos de *traders* - *traders* racionalmente limitados e *traders* de ruido – e procuraram analisar o mecanismo endógeno e a perceção económica sobre os *clusters* de volatilidade. Posteriormente,

Schmitt e Westerhoff (2017) recomendaram um modelo em que os especuladores seguem um conjunto de regras para a execução das suas ordens. Através dessa abordagem, verificaram que o *cluster* de volatilidade emerge como resultado do comportamento de "rebanho" dos especuladores.

Trinidad Segovia et al. (2019), desenvolveram uma nova abordagem ao introduzir um índice de auto-similaridade para a série de volatilidade dos ativos, o que possibilitou a identificação de *clusters* de volatilidade. O estudo levou às seguintes conclusões: Em primeiro lugar, a presença de *clusters* de alta ou baixa volatilidade na série eleva o expoente de Hurt de volatilidade. Em segundo lugar, à medida que aumenta o número de períodos considerados para o cálculo do expoente de auto-similaridade, o gráfico da série de volatilidade torna-se mais suave, resultando num expoente maior, o que indica uma maior probabilidade de ocorrência dos *clusters* de volatilidade.

O modelo proposto por Xue-Zhong et al. (2022) oferece uma visão mais sofisticada e realista do comportamento dos mercados financeiros, ao integrar a incerteza de informação e a interação social entre os investidores. O estudo revela que, quando existe uma forte interação social no processo de negociação, isso pode gerar efeitos importantes nas dinâmicas de preços dos ativos, especialmente no que diz respeito à volatilidade e ao *momentum* (a tendência de os preços continuarem a subir ou descer com base em tendências passadas). De acordo com este modelo, as escolhas de crenças dos investidores são influenciadas por essas interações sociais e podem ter um impacto direto nas flutuações dos preços dos ativos, criando o que os autores chamam de *clusters* de volatilidade. Estes *clusters* representam períodos em que a volatilidade se agrupa em determinadas fases, afetando os rendimentos dos ativos.

No modelo de Xue-Zhong et al., o comportamento do mercado é seguido por dois regimes persistentes, que se alternam conforme as expectativas dos investidores e o nível de informação disponível. Esses regimes afetam a volatilidade das rendibilidades dos ativos de duas maneiras distintas:

- Regime da média elevada: Quando os investidores percebem que há uma maior informação disponível sobre o ativo, eles tendem a adotar ideias mais otimistas e, como consequência, o preço do ativo tende a ser mais estável. Nessa fase, a volatilidade nos rendimentos é reduzida, uma vez que a maior informação leva a uma maior confiança nas expectativas futuras.

- Regime da média baixa: Quando há menos informação disponível, os investidores tornam-se mais incertos sobre o futuro do ativo, o que pode gerar um preço mais volátil. Neste regime, a falta de clareza nas informações leva a uma maior instabilidade no mercado, o que se traduz numa volatilidade mais elevada nos rendimentos dos ativos.

A interação social entre os investidores, de acordo com o modelo, tem efeitos endógenos, o que significa que as variáveis do sistema (como a volatilidade e o *momentum*) são determinadas pelas próprias interações entre os investidores e as suas expectativas. Estas interações sociais e a troca de informações entre os participantes do mercado podem gerar ciclos de volatilidade elevada ou reduzida, dependendo do regime dominante no mercado naquele momento. Concluindo, o estudo revela como essas dinâmicas podem gerar *clusters* de volatilidade e *momentum* na rendibilidade dos ativos, explicando como a falta de informação ou o excesso de informação podem afetar a estabilidade do mercado. A forte interação social e a escolha de crenças dos investidores são fundamentais para entender os períodos de elevada volatilidade e as mudanças nos preços dos ativos, demonstrando a importância de se considerar os aspetos comportamentais e sociais nos modelos financeiros.

2.3 Fatores Determinantes dos *Clusters* de Volatilidade

Os *clusters* de volatilidade podem surgir devido a uma série de fatores que influenciam os mercados financeiros. Algumas das principais causas são as seguintes:

- Reações a Choques Externos: Crises financeiras, acontecimentos económicos inesperados ou eventos geopolíticos significativos podem originar flutuações acentuadas nos preços dos ativos, criando períodos de volatilidade elevada seguidos de fases de maior estabilidade, à medida que o mercado assimila e processa essa nova informação.
- Comportamento dos Investidores: Os investidores tendem a reagir de forma mais intensa a choques negativos ou sinais de risco elevado, o que amplifica a volatilidade durante períodos de crise ou incerteza. Por outro lado, em momentos de maior confiança e previsibilidade, a volatilidade tende a diminuir, gerando alternâncias entre períodos de elevada e baixa volatilidade.

- Incerteza e Assimetria de Informação: Quando a informação disponível é limitada ou não é igualmente acessível a todos os investidores, a incerteza sobre o futuro aumenta, provocando flutuações nos preços. A assimetria de informação ocorre quando apenas alguns agentes económicos têm acesso a dados relevantes, o que pode gerar períodos de maior volatilidade enquanto o mercado tenta ajustar-se à falta de clareza.

Estes fatores contribuem para a formação dos *clusters* de volatilidade, nos quais períodos de maior instabilidade nos mercados financeiros são seguidos de momentos em que a volatilidade diminui, refletindo a interação entre choques de informação, reações dos investidores e a forma como o mercado processa essas informações ao longo do tempo.

3. METODOLODIA

Este capítulo descreve a metodologia adotada para a análise da volatilidade aplicada aos mercados financeiros em estudo, com foco na utilização do modelo *GARCH* (Generalized *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*).

3.1 Modelo *GARCH*

O modelo *GARCH* foi escolhido pela sua capacidade de modelar a volatilidade condicional, um elemento essencial para a avaliação de risco em mercados financeiros, uma vez que permite capturar a dinâmica da variabilidade dos preços ao longo do tempo e a dependência da volatilidade em períodos passados.

O modelo *GARCH*, constitui uma extensão do modelo *ARCH*, sendo proposto por Bollerslev (1986). Consiste em modelar a variância condicionada em função do quadrado dos erros passados e em função dos valores passados da variância condicionada. O modelo baseia-se no pressuposto de que as previsões nas variações da variância no tempo dependem da variância passada dos ativos financeiros.

Tanto o modelo *ARCH* como o *GARCH* apresentam-se como mecanismos estocásticos, onde a volatilidade condiciona os rendimentos do futuro próximo, sendo o modelo *GARCH* um processo que inclui as variâncias passadas na explicação das variâncias futuras.

Bollerslev (1986) afirma ainda que o modelo constitui uma técnica de séries temporais que permite utilizar o modelo de dependência serial da volatilidade. Visto que existe dificuldade para estimar os coeficientes do modelo *ARCH*, dado que existe frequentemente uma ordem (q) elevada, o modelo *GARCH* vem acrescentar a dependência da variância em relação à variância passada. Ou seja, o modelo *GARCH* ou *GARCH* (p,q), formula que a variância condicional é parametrizada como uma função linear dos quadrados dos erros passados e das variâncias condicionais passadas.

Este modelo apresenta a sua fórmula através da seguinte expressão:

$$\sigma^2{}_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i u_{t-1}{}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma_{t-j}{}^2 \qquad (3.1)$$

Onde,

p – grau do processo *GARCH*

q – grau do processo *ARCH*

$u_t = \varepsilon_t \sigma_t$

Se $p = 0$, então o modelo *GARCH* (0, q) é equivalente ao modelo *ARCH* (q).

Segundo Bentes (2011), o modelo *GARCH* é aplicado na modelagem de fenómenos de grupos homogéneos ou *clusters* utilizando o conceito de volatilidade condicionada à média das rendibilidades dos erros estimados.

O conceito de volatilidade condicionada está intimamente relacionado à forma como as flutuações no mercado são influenciadas pelas observações passadas (Shehadeh e Zheng, 2023), ou seja, pressupõe que a volatilidade de um ativo não é constante, mas sim condicionada pela dependência de informação passada (Bentes, 2011). A volatilidade condicional tem a capacidade de capturar e modelar *clusters* de volatilidade, uma vez que a volatilidade num período t depende da volatilidade e dos choques passados da série temporal.

Pelo contrário, a variância incondicional é uma medida fixa independente do tempo, ou seja, não incorpora a ideia de que a volatilidade pode mudar ao longo do tempo, com base em informações passadas. Quando usamos apenas a variância incondicional, assumimos que a volatilidade é constante ao longo do tempo, o que não reflete adequadamente a realidade de muitos mercados financeiros e por esta razão, não é possível capturar o efeito dos *clusters* na volatilidade.

O modelo *GARCH* é eficiente em capturar *clusters* de volatilidade, uma vez que:

- A volatilidade elevada num período aumenta a volatilidade futura, devido à persistência no modelo, o que forma um *cluster* de alta volatilidade.
- Da mesma forma, períodos de volatilidade baixa também tendem a continuar por algum tempo, criando *clusters* de baixa volatilidade.

4. RESULTADOS EMPÍRICOS

No presente capítulo, realiza-se uma análise prática do tema em estudo. O ponto de partida para esta análise consiste no processo de recolha e tratamento dos dados das séries cronológicas referentes às cotações dos dois índices bolsistas. Será realizada uma análise aos resultados obtidos tendo em conta o modelo *GARCH*, bem como a análise à sua estimação e validação dos seus pressupostos. Por fim, discutem-se os principais resultados obtidos, incluindo a análise e interpretação dos padrões observados nos dados.

4.1 Definição e características dos índices bolsistas

4.1.1 PSI-20

O PSI, inicialmente conhecido como PSI-20, foi criado em 31 de dezembro de 1992. Inicialmente, o índice era composto pelas 20 ações mais significativas do mercado português, com base na sua dimensão e liquidez. Contudo, em 2022, houve uma reformulação do índice com a implementação de novos requisitos: passaram a ser incluídas apenas empresas com uma capitalização superior a mil milhões de euros. Este ajuste resultou na redução do número de empresas no índice e na alteração do nome para PSI-20, refletindo as mudanças nas exigências do mercado.

Devido às suas características, o PSI-20 é considerado o principal índice de referência para o mercado de capitais português, reunindo as 20 empresas de maior peso na Euronext Lisboa. O índice tem como finalidades principais ser um indicador da evolução do mercado acionista em Portugal e servir de base para a negociação de contratos de futuros, opções e produtos estruturados.

A capitalização das empresas que compõem o índice é ajustada com base no conceito de *free-Float* que leva em conta apenas as ações efetivamente disponíveis para negociação, ou seja, apenas as ações que estão efetivamente disponíveis para negociação no mercado são levadas em conta. Além disso, a ponderação de cada ação no índice não pode exceder 20% nas revisões periódicas. O PSI-20 é atualizado durante o horário de negociação regular e os seus valores são divulgados a cada 15 segundos. É importante destacar que o cálculo do PSI-20 não inclui o pagamento de dividendos, pelo que a rentabilidade do índice reflete apenas a variação dos preços das ações que o integram.

4.1.2 S&P 500

O S&P 500 é um índice essencial no contexto financeiro global, destacando-se como um dos mais importantes. Criado em 1928 pela agência de classificação financeira Standard & Poor's, o índice começou com 90 ações e, a partir de 1957, passou a incluir oficialmente o preço das 500 maiores empresas cotadas nas bolsas dos Estados Unidos – NYSE. (*New York Stock Exchange*).

O S&P 500 é calculado com base na capitalização de mercado das empresas que o compõem, ajustada ao *free float*, tal como o PSI-20. Este valor é atualizado constantemente, refletindo as flutuações diárias do mercado. Embora o índice seja ponderado pela capitalização de mercado, a sua composição é revista periodicamente, com ajustes realizados para garantir que o índice continua a representar adequadamente as maiores e mais líquidas empresas do mercado.

O S&P 500 tem como principais objetivos:

- Servir como indicador de desempenho do mercado acionista dos Estados Unidos, refletindo a evolução das 500 empresas mais representativas do país.
- Ser um *benchmark* para o desempenho de fundos de investimento, sendo que muitos investidores comparam o desempenho de seus portfólios com o S&P 500 para avaliar se estão a superar ou não o mercado.
- Suporte para produtos financeiros: O índice é a base de vários produtos financeiros, incluindo fundos de índice (ETFs), futuros e opções, que permitem aos investidores obter uma exposição diversificada ao mercado americano sem a necessidade de investir diretamente em ações individuais.

A rentabilidade do S&P 500 reflete a variação no preço das ações das empresas que o compõem, mas o índice pode ser calculado de duas formas: considerando apenas a valorização das ações ou ajustando para incluir os dividendos pagos pelas empresas (*S&P 500 Total Return*). Este último índice é muitas vezes considerado uma medida mais precisa da rentabilidade total que um investidor obteria ao reinvestir os dividendos.

4.2 Recolha e tratamento de dados

Para o desenvolvimento desta investigação, com foco na análise de observação de *clusters* de volatilidade, foram considerados dados das cotações de fechos diários dos índices bolsistas PSI20 e S&P 500. Os dados necessários foram recolhidos através da base de dados da *Bloomberg*. As amostras retiradas para os índices correspondem ao período de intervalo de tempo de dez anos, mais especificamente de 7 de janeiro de 2013 a 29 de dezembro de 2023. O total da amostra considera um total de 2864 observações diárias. A análise foi realizada com recurso ao software *EViews*.

4.3 Descrição da amostra

4.3.1 Evolução da cotação dos índices bolsistas

Entre 2013 e 2023, o índice PSI-20, que reúne as principais empresas cotadas na bolsa portuguesa, apresentou uma evolução caracterizada por uma tendência global e estagnação e declínio moderado, intercalada por períodos de volatilidade significativa. Este comportamento reflete os desafios estruturais da economia portuguesa e os impactos de eventos económicos e geopolíticos durante a última década. Após a crise económica de 2008 e a intervenção da troika (2011-2014), o PSI-20 iniciou o período em análise com um ligeiro crescimento, refletindo a recuperação económica gradual de Portugal. Contudo, entre 2013 e 2015, o índice permaneceu abaixo dos níveis pré-crise, mostrando um desempenho tímido em comparação com outros índices europeus. Este cenário resultou do impacto prolongado da crise da dívida soberana e de dificuldade específicas nas grandes empresas cotadas no índice, como os setores energético e financeiro.

Entre 2015 e 2016, o PSI-20 registou uma descida significativa, em grande parte associada à instabilidade política interna e ao impacto da reestruturação de grandes empresas, como o caso do BES (transformado em Novo Banco) e as dificuldades da PT SGPS. Estes fatores minaram a confiança dos investidores, mantendo o índice em valores baixos. A recuperação foi gradual até 2020, mas novamente interrompida pela pandemia de COVID-19. Durante os primeiros meses da pandemia, o PSI-20 sofreu uma queda acentuada devido à contração económica global e à interrupção de várias atividades comerciais. No entanto, a recuperação foi limitada em comparação com outros índices

europeus, dado o peso elevado de empresas tradicionais e menos expostas a setores de tecnologia e inovação. Em 2021, o PSI-20 recuperou parcialmente, beneficiando do alívio das restrições pandémicas e da recuperação económica global. Contudo, o índice permaneceu pressionado por desafios estruturais e pela menor atratividade da bolsa portuguesa face a outras europeias.

Em 2022, a guerra da Ucrânia trouxe nova instabilidade aos mercados globais, que afetou também o PSI-20. A subida dos preços da energia e a inflação penalizaram os setores representados no índice, particularmente o setor energético e bancário. Já em 2023, o índice apresentou sinais de estabilização, mas continuou a oscilar em resposta a eventos globais, como o conflito entre Israel e Hamas, e uma recuperação económica mais tímida no contexto europeu.

Figura 4.1: Evolução das cotações diárias do índice PSI-20 entre 07/01/2013 e 29/12/2023

Entre 2013 e 2023, o índice S&P500 apresentou uma evolução marcada por uma tendência geral de crescimento, intercalada por episódios de forte volatilidade associados a eventos económicos e geopolíticos. De 2013 ao inicio de 2018, o índice demonstrou uma valorização consistente, impulsionada pelo ambiente económico favorável e pela expansão de setores como o tecnológico. Este período foi marcado por políticas monetárias expansionistas nos Estados Unidos, que contribuíram para a valorização dos mercados acionistas. No final de 2018, registou-se uma queda acentuada de cerca de 10%

no índice, em resultado da guerra comercial entre os Estados Unidos e a China. As tarifas impostas sobre o aço e o alumínio pelo governo de Donald Trump geraram incertezas significativas nos mercados financeiros. Apesar disso, no final do ano, o índice recuperou parte das perdas com o anúncio de negociações entre os dois países.

A recuperação económica continuou até ao inicio de 2020, altura em que a pandemia de COVID-19 trouxe um novo choque. Entre fevereiro e março de 2020, o S&P500 registou uma queda abrupta, resultado das medidas de confinamento e da contração económica global. Apesar disso, a resposta rápida dos governos, com estímulos fiscais e monetários, bem como o desenvolvimento de vacinas, resultou numa recuperação expressiva. Em 2021, o índice alcançou um novo máximo histórico, registando um aumento acumulado de cerca de 27%.

Em 2022, a estabilidade foi novamente interrompida, desta vez pela guerra da Ucrânia, que destabilizou os mercados devido à crise energética e às pressões inflacionistas globais. Este período foi ainda agravado pelas políticas restritivas da Reserva Federal dos EUA, que aumentou as taxas de juro para combater a inflação. No início de 2023, o índice registou uma recuperação parcial, mas permaneceu volátil, com descidas notáveis em outubro, devido ao conflito entre Israel e o Hamas, que exacerbou as incertezas geopolíticas.

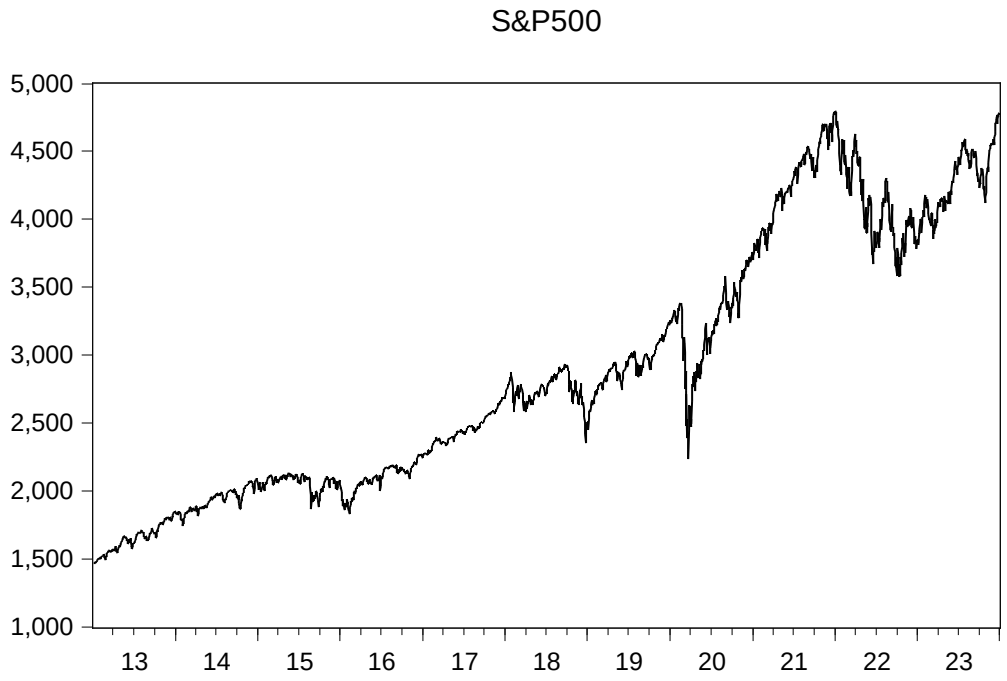


Figura 4.2: Evolução das cotações diárias do índice S&P 500 entre 07/01/2013 e 29/12/2023

4.3.2 Evolução das rendibilidades dos índices bolsistas

Uma vez que a análise seguinte se foca na avaliação das rendibilidades diárias dos índices bolsistas em vez dos preços das cotações, tornou-se essencial realizar a transformação dos preços em rendibilidades. Neste capítulo, será detalhado o processo de cálculo das rendibilidades diárias de cada índice, utilizando uma abordagem que permite captar variações percentuais entre os preços de fecho consecutivos. Para tal, recorreu-se à seguinte expressão matemática:

$$Rt = [\ln(P_t) - \ln(P_{t-1})] * 100 \tag{4.3}$$

onde Rt representa a rendibilidade diária, ln o logaritmo natura e P_t e P_{t-1} cotações dos índices no momento t e no momento t-1.

A figura abaixo representa os valores das rendibilidades verificadas no índice PSI-20 no período em estudo. Aqui é possível observar que em períodos de maior flutuação nas rendibilidades, existe a presença de *clusters* de alta volatilidade. O período entre os anos 2013 a 2015, destaca-se pelas mudanças nas condições económicas de Portugal, que possibilitaram o estabelecimento de um novo equilíbrio financeiro. Em 2020, a pandemia de covid-19 causou uma queda acentuada nas rendibilidades do PSI-20, exigindo um longo e imprevisível processo de reestruturação dos sistemas financeiros que se encontravam em vigor.

Ao comparar-se o gráfico das rendibilidades com o das cotações do índice, verifica-se uma correlação significativa, especialmente em momentos de maior equilíbrio dos preços, que são marcados por *clusters* de baixa volatilidade. Esses períodos refletem a recuperação dos efeitos de recessão, resultantes dos ajustamentos económicos, bem como a superação das limitações que impediam um crescimento mais acentuado.

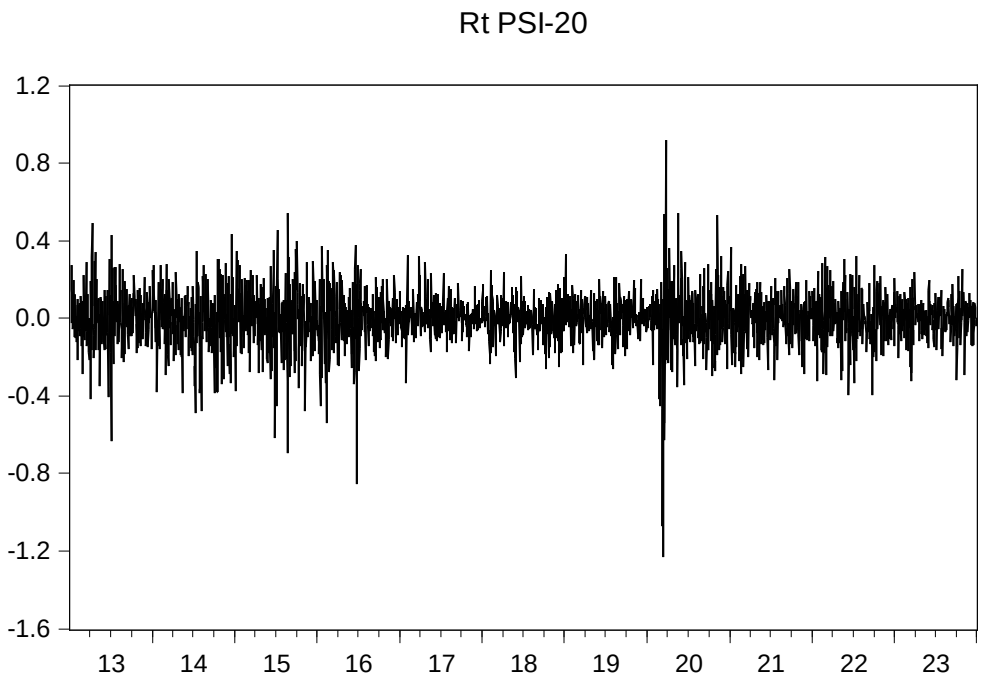


Figura 4.3: Evolução das rendibilidades do PSI 20 no período entre 07/01/2013 e 29/12/2023

A figura 4.4 mostra os valores das rendibilidades verificadas no índice S&P 500 no período em análise. No início de 2020 e em 2022 é possível observar um *cluster* de grande volatilidade seguido de outro de baixa volatilidade. Em termos gerais, verifica-se que a volatilidade a partir de 2020 é maior, do que quando observada nos anos anteriores.

Quando comparamos o gráfico das rendibilidades com o das cotações do índice, verifica-se, tal como no índice PSI-20, uma forte correlação, ou seja, os picos de alta volatilidade nas rendibilidades correspondem a picos no gráfico dos preços do índice, enquanto os períodos de baixa volatilidade correspondem a descidas dos preços.

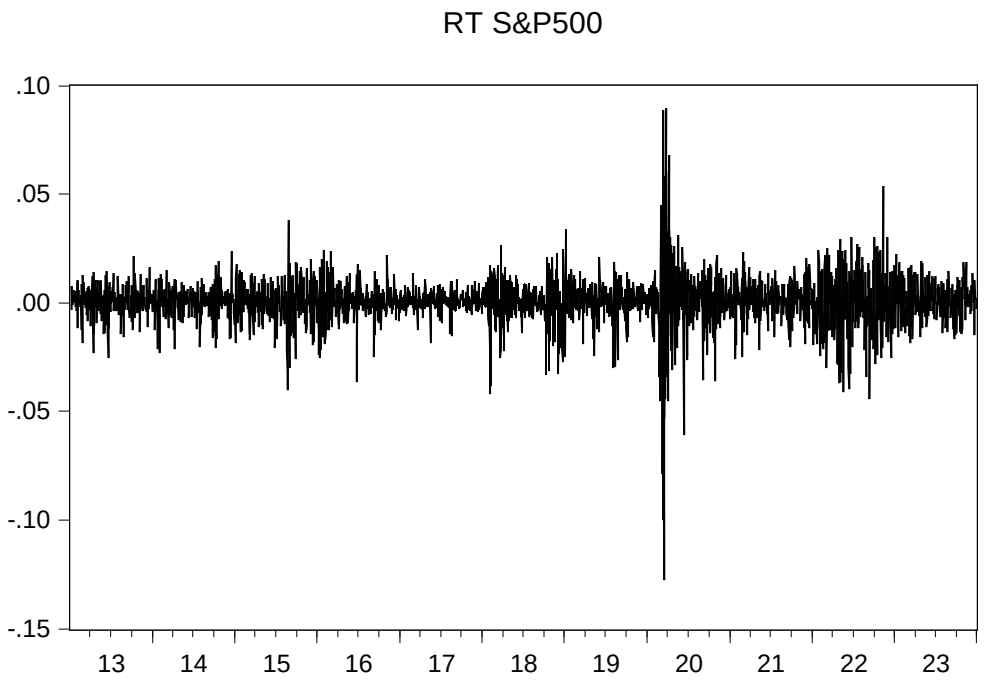


Figura 4.4: Evolução das rendibilidades do S&P 500 no período entre 07/01/2013 e 29/12/2023

4.3.4 Análise Estatística

Nesta secção de estudo, será realizada uma análise detalhada das medidas de estatística descritiva aplicadas aos índices bolsistas. As estatísticas descritivas são ferramentas essenciais para compreender a distribuição e o comportamento dos dados da amostra, e incluirão medidas como a média, desvio padrão, assimetria e curtose. Além dessas, será realizado também o teste de normalidade Jarque-Bera para avaliar se as distribuições das rendibilidades se aproximam de uma distribuição normal.

Tabela 4.1: Estatísticas descritivas e teste de Jarque-Bera

	Média	**Desvio-Padrão**	**Assimetria**	**Curtose**	**Jarque-Bera**	**Obs**
PSI-20	0,000423	0,132903	-0,717516	6,860584	5862,48**	2864
S&P 500	0,000413	0,010617	-0,869779	17,697912	37738,23**	2864

Notas: Jarque-Bera refere o teste de Jarque-Bera; ** Denota um nível de significância de 1%

Fonte: Elaboração própria

Relativamente à média das rendibilidades diárias do PSI-20 (0,000423), podemos verificar que o índice apresenta uma rendibilidade média positiva, embora pequena. De forma semelhante, o índice S&P500 apresenta uma média ligeiramente inferior (0,000413), sugerindo também uma rendibilidade média positiva, mas igualmente baixa, demonstrando uma fraca evidência estatística para ambas as medidas com valores muito próximos de 0.

O desvio padrão, que mede a volatilidade ou dispersão dos dados em relação à média, é significativamente diferente entre os dois índices. O PSI-20 apresenta um desvio-padrão de 0,132903, o que indica uma volatilidade relativamente alta em comparação com a média do índice. Isso sugere que o PSI-20 tende a ter variações mais significativas nas rendibilidades diárias. Por outro lado, o S&P 500 apresenta um desvio-padrão de 0,010617, muito menor, o que índice uma volatilidade bem mais baixa. Isto significa que, em comparação com o PSI-20, o S&P500 apresenta variações diárias muito mais suaves e menos pronunciadas.

A assimetria das distribuições das rendibilidades também difere entre os índices. O PSI-20 apresenta uma assimetria de -0,717516, indicando que a distribuição das rendibilidades é inclinada para a esquerda, ou seja, há uma maior probabilidade se de observarem rendibilidades negativas ou abaixo da média. O S&P 500, por sua vez, tem uma assimetria de -0,869779, ainda mais negativa, o que sugere que a distribuição das suas rendibilidades também tende a ser assimétrica à esquerda, com uma maior incidência de rendibilidades negativas em relação à média. Em ambos os casos, a assimetria negativa indica que os índices apresentam uma maior frequência de perdas do que de ganhos.

A curtose que descreve a altitude das caudas da distribuição, também oferece informações relevantes sobre os extremos nas distribuições dos índices. A curtose do PSI-20 é de 6,860584, valor bem superior a 3, o que indica que o SPI-20 tem caudas mais pesadas, ou seja, há uma maior probabilidade de observar grandes variações nas rendibilidades, sejam elas positivas ou negativas. O S&P 500, por sua vez, tem uma curtose ainda mais alta, de 17,697912, o que sugere uma presença ainda maior de eventos extremos, com grandes flutuações nos retornos diários. Esses valores elevados de curtose em ambos os índices indicam não só a presença de *fat tail* como também que tanto o PSI-20 quando o S&P500 têm distribuições propensas a eventos extremos, como grandes aumentos ou quedas de mercado, mais do que o esperado numa distribuição normal.

Por fim, o teste de normalidade Jarque-Bera foi aplicado para verificar se os dados seguem uma distribuição normal. Este teste é baseado em duas medidas da distribuição de uma variável: a assimetria e a curtose. O teste de Jarque-Bera combina essas duas métricas para fornecer um valor estatístico que pode ser usado para testar a hipótese de normalidade.

Os resultados do teste de Jarque-Bera para os índices PSI-20 e S&P 500 são extremamente altos, o que indica que a hipótese nula de normalidade deve ser fortemente rejeitada. Ou seja, as distribuições das rendibilidades diárias desses índices não seguem uma distribuição normal, evidenciando que ambos os índices apresentam características de assimetria (distribuições assimétricas) e caudas pesadas (alta curtose). Este resultado reforça a justificação para a aplicação de uma abordagem metodológica do tipo *GARCH*.

A rejeição da hipótese nula também é evidenciada pelos histogramas abaixo apresentados, nos quais é possível observar uma curtose alta, bem como a clara indicação de que os dados não seguem uma distribuição normal.

4.3.5. Análise de Histogramas

Como referido anteriormente, serão apresentados os histogramas de rendibilidade para os índices bolsistas em estudo, durante o período de análise. Através da análise destes histogramas, é possível identificar padrões de comportamento, verificar a presença de assimetrias nas distribuições e detetar a ocorrência de eventos extremos que podem influenciar o desempenho dos índices.

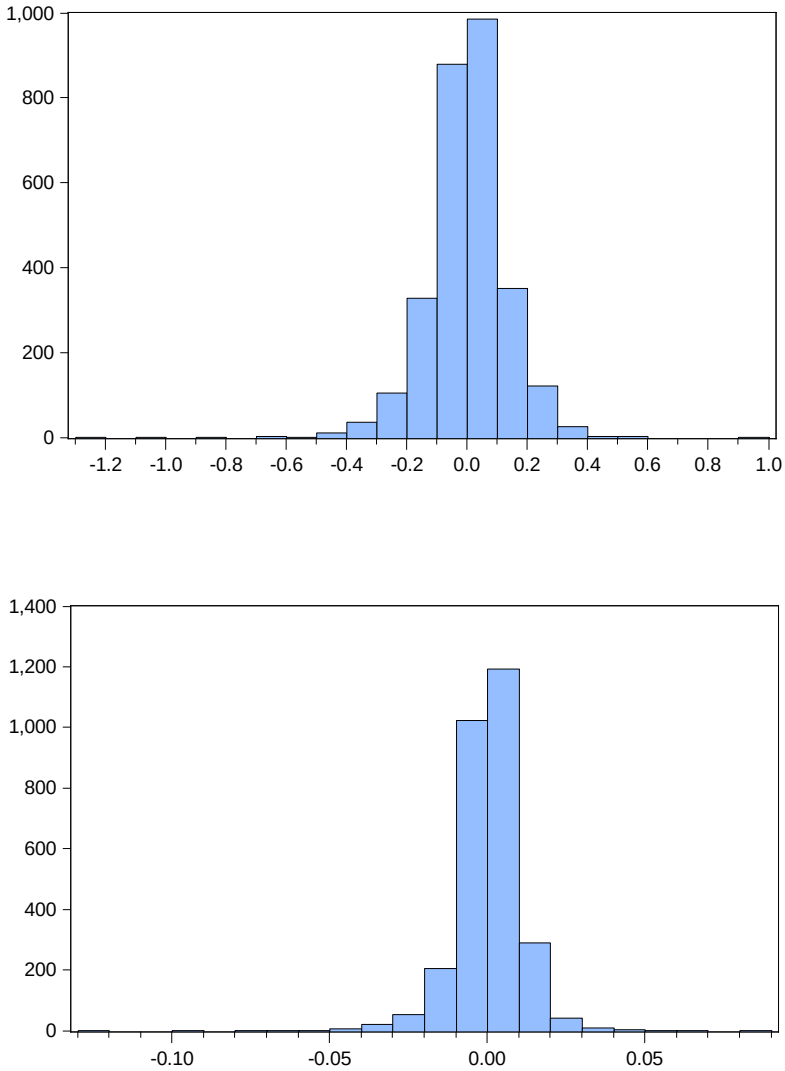


Figura 4.5: Histogramas da rendibilidade diária dos índices bolsistas em estudo, no período entre 07/01/2013 e 29/12/2023

4.4 Estimação do modelo

A etapa de estudo do modelo desempenha um papel central na análise dos dados, pois é a partir dela que se determinam os parâmetros do modelo com base nas observações. Este processo é essencial para interpretar os resultados obtidos, compreender as relações entre variações e garantir a correta aplicação das variáveis. No entanto, antes de se estimar o modelo é necessário garantir que o modelo atenda aos pressupostos específicos.

No caso de modelos com o *GARCH*, tais pressupostos incluem a presença de estacionariedade, a ausência de autocorrelação e a verificação da heterocedasticidade, característica inerente a esse tipo de modelo. A conformidade com esses requisitos pode ser validade por meio de testes estatísticos adequados, como o teste ARCH-LM para heterocedasticidade.

4.4.1 Testes de Estacionariedade

A estacionariedade é um conceito fundamental no estudo de séries temporais, utilizado para descrever o comportamento estatístico de uma série ao longo do tempo. Diz-se que uma série é estacionária quando as suas propriedades estatísticas, como a média, a variância e a autocorrelação, permanecem constantes ao longo do tempo. Ou seja, mesmo que existam alterações esperadas ou não esperadas nos valores da série, quando existe estacionariedade, estes choques desaparecem ao fim de algum tempo não persistindo por tempo indeterminado (Bentes, 2011).

Para avaliar se uma série temporal é estacionária, existem vários testes estatísticos de estacionariedade, que ajudam a determinar se as propriedades da série mudam ao longo do tempo. Estes testes são cruciais para determinar a adequação de modelos e para orientar possíveis transformações. Entre os principais testes de estacionariedade estão o Teste Augmented Dickey Fuller (ADF) e o Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (KPSS).

O teste ADF é amplamente utilizado para verificar a presença de raízes unitárias, que indicam que uma série não é estacionária. A hipótese nula (H_0) deste teste é que a série tem uma raiz unitária, ou seja, não é estacionária. A hipótese alternativa, sugere que a série é estacionária. Um valor $-p$ inferior a 0,05 (para um nível de significância de 5%) leva à rejeição da hipótese nula, indicando que a série é estacionária.

O teste KPSS complementa o ADF ao verificar a estacionariedade de uma série em torno de uma média ou de uma tendência determinística. Neste caso, a hipótese nula (H_0) é que a série é estacionária, enquanto a hipótese alternativa surge que a série não é estacionária. Este teste é útil como confirmação dos resultados obtidos pelo ADF, uma vez que ambos analisam estacionariedade sob perspetivas diferentes. Se o valor $-p$ (p *-value*) for menor que o nível de significância, a hipótese nula é rejeitada, indicando que a série não é estacionária.

Analisando os resultados obtidos, verificamos que pela aplicação do teste ADF, a hipótese nula (H_0), que afirma que a série apresenta uma raiz unitária (não é estacionária), foi rejeitada a um nível de significância de 1%. Este resultado indica que a série não apresenta evidências de não-estacionariedade. No teste KPSS, a hipótese nula (H_0), que considera que a série é estacionária, não é rejeitada.

Assim, com base nos dois testes realizados, é possível concluir que a série em análise apresenta estacionariedade. Desta forma. O pressuposto da estacionariedade é satisfeito, permitindo a aplicação do modelo previsto, sem impedimentos relacionados a esta condição.

Tabela 4.2: Testes de estacionariedade

	ADF	**KPSS**
PSI-20	- 48,925950**	0,088371**
S&P 500	- 60,747660**	0,023000**

Notas: ADF significa Augmented Dickeu-Fuller e KPSS representa Kwiatkowski, Phillips, Schmidt and Shin valores críticos de MacKinnon (1996) para a constante e tendência -3.432443 (1%) e -2.862350 (5%); número de *lags* em ambos os casos: 0. Valores críticos do teste KPSS para a constante e tendência 0,739 (1%) e 0,463 (5%); * - denota um nível de significância de 5%; ** - denota um nível de significância de 1%.

Fonte: Elaboração própria

4.4.3 Testes de Autocorrelação

A autocorrelação (também conhecida como dependência linear) é uma medida estatística que indica a relação entre os valores de uma série temporal em diferentes pontos no tempo. Por outras palavras, a autocorrelação verifica o quanto os valores passados de uma série temporal influenciam os valores futuros da mesma série. Esse conceito é fundamental para entender como as observações estão correlacionadas ao longo do tempo. Num contexto aplicado aos índices bolsistas, a autocorrelação pode ser usada para identificar se os retornos passados dos índices têm algum efeito sobre os retornos futuros. Por exemplo, se a série de retornos de um índice apresenta autocorrelação positiva, isso indica que, se o retorno num dia foi positivo, é provável que o retorno no dia seguinte também o seja. Por outro lado, a autocorrelação negativa sugere que um retorno positivo seria seguido de um retorno negativo no período seguinte. Nos índices bolsistas PSI-20 e S&P 500, a autocorrelação pode ser usada para analisar a persistência de tendência e a volatilidades dos mercados. A presença de autocorrelação pode indicar que o mercado segue certas tendências ou padrões que podem ser explorados (segundo a teoria de mercados eficientes), espera-se que a autocorrelação seja baixa, já que os preços são assumidos como imprevisíveis e refletivos de toda a informação disponível.

Neste trabalho os testes utilizados para testar a ausência da autocorrelação são o de Ljung-Box e o teste de Breusch-Godfrey (BG).

O teste estatístico de Ljung-Box é um dos testes mais utilizados para verificar a presença de autocorrelação. O objetivo principal deste teste é determinar se há autocorrelação significativa em uma ou mais desfasagens (*lags*) dos dados, ou seja, se os valores passados de uma variável influenciam os valores futuros. Este teste é frequentemente utilizado para avaliar a independência dos resíduos em modelos de séries temporais, como o modelo *GARCH*.

No teste de Ljung-Box a hipótese nula é:

H_0: Não existe autocorrelação.

Quer isto dizer, que não há autocorrelação nas desfasagens testadas. Em outras palavras, os dados são independentes (não há dependência temporal significativa).

Se o valor p do teste for baixo (abaixo de 0,05), rejeitamos a hipótese nula, indicando que a autocorrelação é diferente de zero e que existe dependência temporal nos dados. Isto implica que os retornos passados influenciam os retornos futuros, ou seja, a série temporal exibe dependência linear. Se o valor p do teste for alto (acima de 0,05), não rejeitamos a hipótese nula de que a autocorrelação é zero, ou seja, não há dependência temporal significativa. Os retornos da série seriam considerados independentes.

As tabelas 4.3 e 4.4 apresentam os resultados obtidos através da aplicação do teste LB. Os níveis de significância estatística utilizados no teste são igualmente os de 1% (**) e de 5% (*).

Tabela 4.3: Correlograma para as rendibilidades do índice PSI-20 entre 2013 e 2023

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.089	0.089	22.672	0.000
		2	0.035	0.027	26.098	0.000
		3	0.022	0.017	27.524	0.000
		4	-0.054	-0.059	35.846	0.000
		5	-0.019	-0.011	36.904	0.000
		6	-0.013	-0.007	37.382	0.000
		7	0.053	0.059	45.493	0.000
		8	-0.011	-0.023	45.841	0.000
		9	0.023	0.022	47.360	0.000
		10	-0.002	-0.010	47.375	0.000
		11	-0.065	-0.059	59.373	0.000
		12	-0.039	-0.030	63.846	0.000
		13	-0.050	-0.037	70.900	0.000
		14	0.028	0.038	73.111	0.000
		15	0.023	0.018	74.697	0.000
		16	0.009	-0.002	74.945	0.000
		17	0.011	0.001	75.273	0.000
		18	-0.040	-0.035	79.798	0.000
		19	-0.003	0.007	79.819	0.000
		20	0.000	0.010	79.819	0.000
		21	-0.008	-0.010	80.012	0.000
		22	-0.004	-0.010	80.066	0.000
		23	-0.016	-0.021	80.801	0.000
		24	-0.008	-0.012	80.972	0.000
		25	-0.003	0.004	81.005	0.000
		26	-0.009	-0.007	81.218	0.000
		27	-0.007	-0.001	81.359	0.000
		28	0.009	0.011	81.595	0.000
		29	0.004	-0.003	81.639	0.000
		30	-0.014	-0.017	82.231	0.000
		31	-0.020	-0.022	83.449	0.000
		32	-0.011	-0.003	83.773	0.000
		33	-0.017	-0.012	84.606	0.000
		34	-0.006	-0.007	84.720	0.000
		35	0.011	0.007	85.054	0.000
		36	-0.027	-0.032	87.112	0.000

Tabela 4.4: Correlograma para as rendibilidades do índice S&P 500 entre 2013 e 2023

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	-0.127	-0.127	45.932	0.000
		2	0.075	0.060	61.881	0.000
		3	-0.014	0.002	62.456	0.000
		4	-0.044	-0.051	68.132	0.000
		5	0.035	0.025	71.638	0.000
		6	-0.101	-0.089	100.75	0.000
		7	0.124	0.100	144.64	0.000
		8	-0.103	-0.070	175.00	0.000
		9	0.139	0.112	230.46	0.000
		10	-0.063	-0.038	241.98	0.000
		11	0.001	-0.009	241.99	0.000
		12	0.021	0.006	243.26	0.000
		13	-0.092	-0.060	267.77	0.000
		14	0.072	0.024	282.56	0.000
		15	-0.060	-0.007	292.94	0.000
		16	0.023	-0.026	294.49	0.000
		17	-0.007	0.017	294.64	0.000
		18	0.013	0.001	295.15	0.000
		19	-0.012	-0.019	295.55	0.000
		20	-0.027	-0.009	297.69	0.000
		21	0.012	-0.017	298.12	0.000
		22	-0.002	0.032	298.13	0.000
		23	-0.025	-0.047	299.91	0.000
		24	-0.024	-0.024	301.57	0.000
		25	0.013	0.010	302.02	0.000
		26	-0.019	-0.023	303.08	0.000
		27	-0.036	-0.039	306.81	0.000
		28	0.030	0.025	309.35	0.000
		29	-0.012	-0.008	309.77	0.000
		30	-0.022	-0.023	311.16	0.000
		31	0.007	-0.003	311.30	0.000
		32	-0.040	-0.036	315.85	0.000
		33	-0.009	-0.017	316.07	0.000
		34	-0.010	-0.009	316.35	0.000
		35	0.002	0.000	316.36	0.000
		36	-0.006	-0.008	316.48	0.000

O teste de Breusch-Godfrey é utilizado para verificar a presença de autocorrelação nos resíduos de um modelo de regressão. Em termos simples, o teste avalia se os erros (resíduos) de um modelo de regressão são independentes ou se existe algum padrão de dependência temporal entre eles. A ideia por trás do teste é verificar se os resíduos do modelo apresentam autocorrelação em desfasagens múltiplas, ou seja, se o erro num determinado período é correlacionado com o erro em períodos anteriores.

O teste de Breusch-Godfrey é uma generalização do teste de Durbin-Watson. Enquanto o teste de Durbin-Watson testa apenas a autocorrelação de primeira ordem (dependência entre o erro no tempo t e o erro no tempo $t-1$), o teste de Breusch-Godfrey permite testar a autocorrelação para várias desafasagens (*lags*), o que o torna mais flexível.

No teste de Breusch-Godfrey a hipótese nula é:

H_0: Não existe autocorrelação.

Quer isto dizer, que não há autocorrelação nos resíduos, ou seja, os resíduos são independentes.

Se o valor p for maior que o nível de significância (acima de 0,05), não rejeitamos a hipótese nula. Isto significa que não há autocorrelação significativa nos resíduos. Ou seja, os resíduos são independentes, o que indica que o modelo ajustado está bem especificado. Se o valor p for menor que 0,05, rejeitamos a hipótese nula e concluímos que há autocorrelação significativa nos resíduos. Isto sugere que o modelo não capturou toda a estrutura temporal dos dados, e será necessário ajustar o modelo para levar em conta essa autocorrelação (por exemplo, utilizando o modelo *GARCH*).

A tabela 4.5 apresenta os resultados obtidos através da aplicação do teste BG. Os níveis de significância estatística utilizados no teste são igualmente os de 1% (**) e de 5% (*).

Tabela 4.5: Resultados do teste BG para a ausência de autocorrelação nas rendibilidades diárias dos índices durante o período de 2013 a 2023

Teste Breusch-Godfrey	**Estatística *F***	**Estatística x^2**
PSI-20	4,933623 **	48,68456 **
S&P 500	17,647780 **	166,838200 **

Notas: ** Denota um nível de significância de 1%. Para calcular o valor do teste utilizaram-se dez desfasamentos.

Fonte: Elaboração própria

Com base nos resultados do teste BG para os índices PSI-20 e S&P 500, é possível observar que tanto a estatística *F* quando a estatística qui-quadrado são estatisticamente significativas. Estes valores permitem rejeitar a hipótese nula de ausência de autocorrelação nos resíduos, indicando que ambos os modelos apresentam evidências de autocorrelação. Assim torna-se necessários ajustar os modelos através da inclusão de termos autorregressivos, para mitigar este problema e garantir a fiabilidade das inferências obtidas.

4.4.4 Testes de Heterocedasticidade

Os testes de heterocedasticidade são ferramentas estatísticas utilizadas para verificar se a variância dos erros (ou resíduos) de um modelo de regressão é constante ao longo das observações. A heterocedasticidade viola um dos pressupostos fundamentais da regressão linear clássica, que assume homocedasticidade (ou variância constante). Essa violação pode comprometer a validade dos testes de hipótese e das inferências do modelo.

A heterocedasticidade condicional ocorre quando a variância dos erros de um modelo não é constante, mas depende de valores passados ou de outras variáveis. Num contexto financeiro, isto significa que a variância dos retornos pode mudar ao longo do tempo, refletindo mudanças nos períodos de volatilidade. Quando se observa *clusters* de volatilidade, isso indica que a variância (ou volatilidade) não é constante ao longo do tempo, o que é um sinal claro de heterocedasticidade condicional.

Os testes *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity-Lagrange Multiplier* (*ARCH-LM)* de Engle (1982) e o teste de McLeod e Li (*LM-ARCH*) são amplamente utilizados para identificar a presença de Heterocedasticidade condicional em séries temporais. Estes testes são particularmente úteis em contextos financeiros, onde é comum observar variâncias que mudam ao longo do tempo, como em modelos de volatilidade.

O objetivo do teste *ARCH-LM* é verificar se os resíduos quadrados de um modelo de regressão apresentam autocorrelação nas suas desfasagens (*lags*). Se a variância dos resíduos for condicional, significa que o modelo apresenta heterocedasticidade e não é apropriado usar os métodos padrão de estimação. O teste segue uma distribuição qui-quadrado e tem como hipótese nula a ausência de heterocedasticidade condicional. Se os resíduos quadrados forem auto correlacionados (tiverem relação nas suas desfasagens),

isso índice que a variância dos erros não é constante ao longo do tempo, sugerindo a necessidade de um modelo que capture essa variabilidade, como o modelo *ARCH* ou *GARCH*. O teste *LM-ARCH* é uma extensão do teste de autocorrelação dos resíduos quadrados, que inclui um *lag* adicional na regressão. Este ajuste permite que o teste identifique padrões mais complexos de autocorrelação nos resíduos, e melhore a capacidade do teste de detetar heterocedasticidade condicional.

Tanto no teste *ARCH-LM* como no teste *LM-ARCH*, a hipótese nula é:

H_0: Não existe heterocedasticidade.

A tabela 4.6 apresenta os resultados obtidos através da aplicação do teste ARCH-LM. O nível de significância estatística aplicado é de 1% e 5%.

Para o PSI-20 e o S&P 500, o teste indica que há heterocedasticidade condicional nos resíduos. Ou seja, a variância dos resíduos não é constante ao longo do tempo, sugerindo que o modelo não captura completamente a volatilidade dos dados.

Os resultados sugerem que os resíduos apresentam variação dependente do tempo, o que é normal em séries financeiras, onde a volatilidade pode variar ao longo do tempo, formando assim *clusters* de volatilidade. Sendo assim, a hipótese nula do teste é rejeitada em ambos os casos.

Tabela 4.6: Resultados do teste à ausência de heterocedasticidade nos resíduos dos modelos obtidas no teste ARCH-LM para o PSI-20 e S&P500 durante o período entre 2013 e 2023

Teste ARCH-LM	**Estatística *F***	**Estatística x^2**
PSI-20	53,7202 **	453,5751 **
S&P 500	183,269 **	1118,658 **

Notas: Para calcular o valor do teste utilizaram-se dez desfasamentos, equivalentes aos graus de liberdade. ** Denota um nível de significância de 1%.

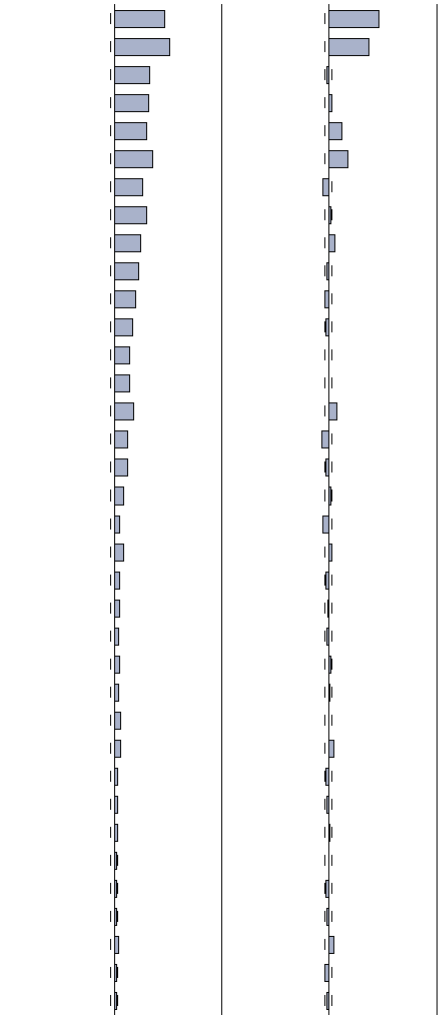
Fonte: Elaboração própria

As tabelas 4.7 e 4.8 mostram os resultados obtidos a partir da aplicação do teste Mcleod e Li. Os valores apresentados revelam-se estatisticamente significativos, permitindo assim rejeitar a hipótese nula para ambos os índices.

Tabela 4.7: Correlograma do quadrado dos resíduos do modelo aplicado às rendibilidades do índice PSI-20 entre 2013 e 2023

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.145	0.145	60.624	0.000
		2	0.126	0.107	106.11	0.000
		3	0.327	0.304	412.03	0.000
		4	0.207	0.140	535.10	0.000
		5	0.138	0.059	590.03	0.000
		6	0.156	0.025	659.95	0.000
		7	0.119	-0.008	700.47	0.000
		8	0.215	0.134	833.26	0.000
		9	0.118	0.019	873.02	0.000
		10	0.093	0.011	897.90	0.000
		11	0.160	0.037	971.84	0.000
		12	0.082	-0.028	991.13	0.000
		13	0.084	0.009	1011.5	0.000
		14	0.027	-0.085	1013.6	0.000
		15	0.028	-0.038	1015.9	0.000
		16	0.033	-0.040	1019.0	0.000
		17	0.044	0.023	1024.4	0.000
		18	0.041	0.037	1029.3	0.000
		19	0.014	-0.019	1029.8	0.000
		20	0.060	0.046	1040.4	0.000
		21	0.037	-0.002	1044.3	0.000
		22	-0.003	-0.013	1044.4	0.000
		23	0.019	-0.003	1045.4	0.000
		24	0.031	0.011	1048.2	0.000
		25	0.013	0.018	1048.7	0.000
		26	0.022	0.012	1050.1	0.000
		27	0.020	0.015	1051.3	0.000
		28	0.017	-0.013	1052.2	0.000
		29	0.019	-0.008	1053.2	0.000
		30	0.016	-0.000	1053.9	0.000
		31	0.020	0.002	1055.1	0.000
		32	0.017	0.006	1056.0	0.000
		33	0.019	0.007	1057.0	0.000
		34	0.018	0.007	1057.9	0.000
		35	0.015	-0.001	1058.5	0.000
		36	0.020	0.005	1059.7	0.000

Tabela 4.8: Correlograma do quadrado dos resíduos do modelo aplicado às rendibilidades do índice S&P500 entre 2013 e 2023



Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.486	0.486	676.03	0.000
		2	0.535	0.391	1496.3	0.000
		3	0.338	-0.016	1823.3	0.000
		4	0.328	0.035	2132.5	0.000
		5	0.314	0.129	2415.7	0.000
		6	0.376	0.190	2820.9	0.000
		7	0.277	-0.052	3041.4	0.000
		8	0.312	0.031	3321.3	0.000
		9	0.261	0.061	3517.0	0.000
		10	0.237	-0.013	3679.0	0.000
		11	0.206	-0.033	3801.2	0.000
		12	0.174	-0.032	3888.6	0.000
		13	0.155	0.008	3957.7	0.000
		14	0.151	0.001	4023.7	0.000
		15	0.191	0.081	4129.3	0.000
		16	0.125	-0.058	4174.0	0.000
		17	0.130	-0.031	4223.1	0.000
		18	0.098	0.019	4250.5	0.000
		19	0.055	-0.055	4259.3	0.000
		20	0.091	0.034	4283.1	0.000
		21	0.054	-0.026	4291.7	0.000
		22	0.056	-0.007	4300.6	0.000
		23	0.044	-0.010	4306.3	0.000
		24	0.055	0.029	4314.9	0.000
		25	0.044	0.016	4320.4	0.000
		26	0.061	0.005	4331.0	0.000
		27	0.063	0.052	4342.6	0.000
		28	0.037	-0.027	4346.7	0.000
		29	0.039	-0.010	4351.2	0.000
		30	0.040	0.014	4355.8	0.000
		31	0.030	0.002	4358.4	0.000
		32	0.029	-0.022	4360.9	0.000
		33	0.026	-0.008	4362.9	0.000
		34	0.043	0.057	4368.2	0.000
		35	0.025	-0.038	4370.0	0.000
		36	0.027	-0.016	4372.1	0.000

4.4.5 Estimação do modelo AR(1)-GARCH(1,1)

Para eliminar a autocorrelação numa série temporal, pode utilizar-se um modelo autorregressivo de ordem 1 (AR(1)). Este modelo, considera que o valor atual da série depende diretamente do valor anterior, o que ajuda a capturar e corrigir qualquer padrão de dependência temporal entre os dados. Ao estimar esse modelo, a autocorrelação é eliminada, uma vez que este ajusta a série para refletir a relação entre os dados passados e presentes, tornando os resíduos independentes. Assim, o AR(1) é uma forma eficaz de tratar e corrigir a autocorrelação em dados temporais.

Tabela 4.9: Resultados do modelos AR(1)-GARH(1,1) para as rendibilidades do índice PSI-20

Equação média		**Equação variância**	
$\hat{\mu}_0$	0.002832	$\hat{\omega}$	0.000621
$\hat{\phi}_1$	0.084074**	$\hat{\alpha}$	0.128071**
		$\hat{\beta}$	0.757903**

Notas: ** denota um nível de significância estatística de 1%.

Fonte: Elaboração própria

O valor de $\hat{\mu}_0$ no PSI-20 é o intercepto da equação média, ou seja, a tendência de longo prazos dos retornos da série temporal. A probabilidade associada a este parâmetro é 0.2101, o que indica que não é estatisticamente significativo a 1%. Isto sugere que a constante não apresenta um efeito estatisticamente relevante sobre a média da série temporal. O coeficiente $\hat{\phi}_1$ é estatisticamente significativo a 1%, o que implica que a autocorrelação dos retornos passados exerce uma influência significativa sobre os retornos atuais. A presença de $\hat{\phi}_1$ positivo indica que, quando os retornos passados são positivos, os retornos atuais tendem a ser positivos também, reforçando a ideia de persistência nos retornos.

O coeficiente $\hat{\omega}$, é o termo constante da equação de variância e é estatisticamente significativo a 1%, o que implica a presença de volatilidade base na séria temporal, em que a volatilidade não é nula mesmo sem choques passados. O coeficiente $\hat{\alpha}$, reflete o impacto dos choques passados na volatilidade atual. Este valor sugere que há um impacto considerável de choques passados sobre a volatilidade, o que é típico em séries temporais

financeiras com *clusters* de volatilidade, onde períodos de alta volatilidade são seguidos por mais volatilidade, e o mesmo ocorre em períodos de baixa volatilidade.

O coeficiente $\hat{\beta}$, indica o impacto da volatilidade passada sobre a volatilidade atual. Este coeficiente é também significativo a 1%, e em conjunto com $\hat{\alpha}$, sugere que a volatilidade é fortemente persistente, ou seja, os efeitos da volatilidade do passado permanecem por períodos significativos. A soma de $\hat{\alpha} + \hat{\beta}$ (=0,885974), está muito próxima de 1, o que indica que a volatilidade da série possui uma memória de longo prazo, sendo influenciada de maneira substancial pela volatilidade anterior.

Tabela 4.10: Resultados do modelos AR(1)-GARH(1,1) para as rendibilidades do índice S&P500

Equação média		**Equação Variância**	
$\hat{\mu}_0$	0.000819	$\hat{\omega}$	0.00000384
$\hat{\phi}_1$	-0.052376**	$\hat{\alpha}$	0.212349**
		$\hat{\beta}$	0.757903**

Notas: ** denota um nível de significância estatística de 1%.

Fonte: Elaboração própria

O coeficiente $\hat{\mu}_0$ no S&P500 apresenta um valor que não é considerado estatisticamente significativo, indicando que não há efeito significativo da constante nos retornos médios da série temporal. O valor do coeficiente $\hat{\phi}_1$ indica que há uma possível autocorrelação negativa significativa nos retornos, ou seja, quando os retornos passados foram positivos, espera-se que os retornos atuais sejam negativos. O coeficiente $\hat{\omega}$ da constante na equação de variância é muito pequeno, mas significativo, isso indica que há uma volatilidade base na série, mesmo sem choques passados. A alta significância dos coeficientes $\hat{\alpha} + \hat{\beta}$ sugere que há *clusters* de volatilidade. A soma de $\hat{\alpha} + \hat{\beta}$ (=0,970252) próxima de 1, implica que a volatilidade tem uma memória longa, ou seja, choques na volatilidade afetam retornos por um longo período.

As implicações do modelo são:

- Persistência nos retornos (Equação média): A presença de $\hat{\phi}_1$ estatisticamente significativa implica que os retornos passados têm uma influência importante sobre os retornos atuais, o que pode ser útil para prever tendências a curto prazo.
- *Clusters* de volatilidade (Equação variância): A significância dos coeficientes $\hat{\alpha} + \hat{\beta}$, sugere que há presença de *clusters* de volatilidade.
- Memória de volatilidade: A soma de $\hat{\alpha} + \hat{\beta}$ próxima de 1, indica uma memória forte de volatilidade, o que sugere que choques de volatilidade podem durar longos períodos, influenciando o preço de ativos durante um intervalo significativo de tempo.

5. CONCLUSÃO

A análise de *clusters* de volatilidade nos mercados financeiros assume uma importância significativa devido à sua relação direta com a gestão de risco, a previsão de preços e os comportamentos dos investidores. Os *clusters* de volatilidade, definidos pela concentração de períodos de alta volatilidade seguidos de outros igualmente voláteis, são uma característica comum nos mercados, refletindo reações prolongadas a eventos económicos e geopolíticos.

Os resultados deste estudo confirmam a presença de *clusters* de volatilidade tanto no S&P500 como no PSI-20 no período analisado. Entre 2013 e 2023, os índices PSI-20 e S&P500 foram sujeitos a um conjunto de eventos marcantes, como a recuperação pós-crise financeira, a pandemia de COVID-19 e conflitos geopolíticos como a guerra na Ucrânia. Estas circunstâncias tornam particularmente relevante o estudo deste fenómeno, uma vez que oferece insights sobre como diferentes mercados reagem e se ajustam a estes choques. A análise da volatilidade é essencial para compreender o comportamento dos mercados financeiros, especialmente em períodos de crise. No caso do S&P500, a sua dimensão e diversificação permitem absorver choques económicos globais com maior eficiência, enquanto o PSI-20, com menor liquidez e concentração em setores tradicionais, apresenta uma maior vulnerabilidade a flutuações externas. Estudar estes padrões ajuda a identificar dinâmicas de risco e retorno e contribui para a formulação de estratégias mais eficazes na gestão de carteiras e políticas de diversificação.

A utilização de modelos econométricos como ARCH e GARCH é fundamental neste contexto, uma vez que permitem captar a heterocedasticidade presente nas séries temporais e oferecer previsões mais robustas sobre os padrões de volatilidade. A sua aplicação a estes dois índices proporciona uma análise detalhada da persistência dos choques e da forma como os mercados reagem a eventos externos e internos.

Neste estudo foram utilizadas as séries temporais de preços dos índices PSI-20 e S&P500 correspondente ao período analisado, a qual foi convertida em rendibilidades e volatilidades para possibilitar uma modelação financeira adequada. Optou-se pela aplicação do modelo GARCH, dada a sua reconhecida capacidade de representar eficazmente as características típicas de séries financeiras, como a heterocedasticidade condicional e a persistência da volatilidade.

Os resultados obtidos foram suportados por uma rigorosa validação de pressupostos, incluindo testes de autocorrelação, estacionariedade e heterocedasticidade, cujas hipóteses nulas foram consistentemente rejeitadas, demonstrando a adequação metodológica empregada.

Os resultados revelaram a presença de *clusters* de volatilidade em ambos os índices, caracterizados por períodos de alta volatilidade seguidos de períodos de menos instabilidade, evidenciando uma persistência típica de séries temporais.

Este estudo sublinha a importância de compreender os padrões de volatilidade nos mercados financeiros, com implicações práticas para investidores, reguladores e gestores de risco. Além disso, oferece uma base sólida para investigações futuras, contribuindo para o desenvolvimento de estratégias de investimento mais adaptadas às características específicas de cada mercado e aos riscos associados aos *clusters* de volatilidade. Para futuras pesquisas, seria pertinente alargar a análise a outros índices de referência global, nomeadamente o índice mundial (como o MSCI World Index), permitindo uma comparação mais abrangente entre mercados nacionais, como o português (PSI-20), o norte-americano (S&P 500) e o mercado global. Esta abordagem poderá fornecer uma perspetiva mais alargada sobre a ocorrência de *clusters* de volatilidade em diferentes contextos económicos e níveis de desenvolvimento dos mercados financeiros.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alexander, C. (2002). *Market models: A guide to financial data analysis*. John Wiley.

Araújo, M. A. (2010). *Análise de clusters e volatilidade de índices de ações* [Dissertação de mestrado, ISCAL].

Bentes, R., Menezes, S., & Ferreira, N. (2013). On the asymmetric behaviour of stock market volatility: Evidence from three countries. *International Journal of Academic Research, 5*(4), 24–32. https://doi.org/10.7813/2075-4124.2013/5-4/A.4

Bentes, S. (2007). *Ensaio sobre volatilidade das rentabilidades dos índices bolsistas: Análise comparativa do PSI20, Dow Jones, EuroStock50, SP500 e Nasdaq*. ISCAL.

Bentes, S. (2011). *Sobre a medição da volatilidade nos mercados bolsistas internacionais: Evidência dos países do G7*. Edições Colibri/Instituto Politécnico de Lisboa.

Bera, A., & Higgins, M. (1993). ARCH models: Properties, estimation and testing. *Journal of Economic Surveys, 7*, 305–366.

Bollerslev, T. (1986). Generalised autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics, 31*(3), 307–327.

Bollerslev, T., Chou, R., & Kroner, K. (1992). ARCH modeling in finance: A review of the theory and empirical evidence. *Journal of Econometrics, 52*(1), 5–59.

Box, G. E. P., & Jenkins, G. M. (1976). *Time series analysis: Forecasting and control* (2nd ed.). Holden Day.

Brooks, C. (2002). *Introductory econometrics for finance*. Cambridge University Press.

Brown, G. W., & Cliff, M. T. (2004). Investor sentiment and the near-term stock market. *Journal of Empirical Finance, 11*, 1–27.

Campbell, J. Y., & Hentschel, L. (1992). No news is good news: An asymmetric model of changing volatility in stock returns. *Journal of Financial Economics, 3*(1), 123–152.

Cont, R. (2001). Volatility clustering in financial markets: Empirical facts and agent-based models. *Centre de Mathématiques Appliquées, École Polytechnique*.

Cross, R., Grinfield, M., Lamba, H., & Seaman, T. (2005). A threshold model of investor psychology. *Physica A, 354*, 463–478.

De Long, J. B., Shleifer, A., Summers, L. H., & Waldmann, R. J. (1990). Noise trader risk in financial markets. *Journal of Political Economy, 98*, 703–738.

Engle, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica, 50*, 987–1007.

Engle, R., & White, H. (2004). Multivariate GARCH. *Econometric Theory, 20*(3), 894–922.

Ferreira, D. (2009). *Opções financeiras – Gestão de risco, especulação e arbitragem* (2.ª ed.). Edições Sílabo.

Fischer, K. L., & Statman, M. (2000). Investor sentiment and stock returns. *Financial Analysts Journal, 56*, 16–23.

Granger, C., & Machina, M. J. (2006). Structural attribution of observed volatility clustering. *Journal of Econometrics, 135*, 15–29.

Gujarati, D. N. (2022). *Basic econometrics*. Prentice Hall.

Haan, W. J., & Spear, S. A. (1998). Volatility clustering in real interest rates: Theory and evidence. *Journal of Monetary Economics, 41*, 431–453.

Hamilton, J. D., & Susmel, R. (1994). Autoregressive conditional heteroskedasticity and changes in regime. *Journal of Econometrics, 64*, 307–333.

Kendall, M. G. (1953). The analysis of economic time-series—Part I: Prices. *Journal of the Royal Statistical Society: Series A (General), 116*(1), 11–34.

Mandelbrot, B. (1963). The variation of certain speculative prices. *The Journal of Business, 36*(4), 394–419.

Neal, R., & Wheatley, S. M. (1998). Do measures of sentiment predict returns? *Journal of Financial and Quantitative Analysis, 33*(4), 523–547.

Santis, G., & Imorohoroglu, S. (1997). Stock returns and volatility in emerging financial markets. *Journal of International Money and Finance, 16*(4), 561–579.

Simon, D. P., & Wiggins, R. A. III. (2001). S&P futures markets and contrary sentiment indicators. *Journal of Futures Markets, 21*, 447–462.

Siklos, P. L., & Skoczylas, L. F. (2002). Volatility clustering in real interest rates: International evidence. *Journal of Macroeconomics, 24*, 193–209.

Solt, M. E., & Statman, M. (1988). How useful is the sentiment index? *Financial Analysts Journal, 44*, 45–55.

Suleman, M. T., McIver, R., & Kang, S. H. (2021). Asymmetric volatility connectedness between Islamic stock and commodity markets. *Global Finance Journal, 49*, 100653.

Taylor, S. J. (1994). *Modelling financial time series*. John Wiley & Sons.

Tseng, J. J., & Li, S. P. (2011). Asset returns and volatility clustering in financial time series. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications, 390*(7), 1300–1314.

Wang, C. (2001). Investor sentiment and return predictability in agricultural futures markets. *Journal of Futures Markets, 21*, 929–952.

Wang, Y. H., Keswani, A., & Taylor, S. J. (2006). The relationships between sentiment, returns and volatility. *International Journal of Forecasting, 22*, 109–123.

Wooldridge, J. M. (2006). *Introdução à econometria: Uma abordagem moderna*. Pioneira Thomson Learning.

Zhao, Z., & Zhang, X. (2022). A continuous heterogeneous-agent model for the co-evolution of asset price and wealth distribution in financial market. *Chaos, Solitons & Fractals, 155*, 111543.