# Estratégias usadas pelos alunos para lidar com a generalidade em tarefas de proporcionalidade direta

**Maria da Luz Infante*** **e Ana Paula Canavarro****

Escola EB 2, 3 de Moura*, Universidade de Évora e UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa**

luxainfante@hotmail.com*, apc@uevora.pt**

**RESUMO**

O foco deste artigo são as estratégias usadas pelos alunos para lidar com tarefas de proporcionalidade direta, no contexto da exploração de tarefas com carácter algébrico que apelam, inicialmente, ao estudo de casos particulares e, posteriormente, à generalização. Procuramos responder à seguinte questão: Que estratégias usam os alunos para lidar com a generalidade em tarefas de proporcionalidade direta?

Apresentamos um estudo de caso de uma turma de 6.º ano de escolaridade, realizado no quadro de uma experiência de ensino, envolvendo uma sequência de doze tarefas que apelavam à generalização, estavam ancoradas na realidade próxima dos alunos e que foram exploradas no contexto de uma cultura de aula onde se valorizou a comunicação matemática.

Concluímos que na resolução das tarefas de proporcionalidade direta, no estudo de casos particulares, os alunos usaram de forma mista estratégias multiplicativas, escalares e funcionais, e estratégias aditivas de construção, denominadas vulgarmente por building-up. Contudo, na busca da generalização, verificou-se o abandono das estratégias aditivas e a adoção generalizada de estratégias multiplicativas inerentes à relação de proporcionalidade direta.

Palavras-chave: Pensamento algébrico; Generalização; Estratégias; Proporcionalidade direta.

**INTRODUÇÃO**

Este artigo ancora-se a um estudo mais abrangente (Infante, 2014), relacionado com o pensamento algébrico, concretamente no que se refere ao uso das representações matemáticas e às estratégias dos alunos para lidar com a generalidade, no contexto da exploração de tarefas com carácter algébrico. Procuramos aqui responder, em concreto, à seguinte questão: Que estratégias usam os alunos para lidar com a generalidade em tarefas de proporcionalidade direta?

Nos últimos anos, cresceu a atenção relativamente ao desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. A discussão em torno da Álgebra escolar tem apontado, como sua essência, lidar com o que é geral, de um modo transversal e aberto, e não de um modo restrito e baseado na aplicação de procedimentos, como foi usual durante décadas (Ponte, 2006). A importância de se utilizarem formas de expressão que não sejam limitadoras e que ampliem o horizonte dos símbolos convencionais da Matemática tem vindo a ser reconhecida e justifica a pertinência da investigação neste domínio.

## REVISÃO DE LITERATURA

### A centralidade da generalização

A literatura de investigação tem vindo a associar o pensamento algébrico àquilo que é geral numa dada situação matemática e à expressão dessa generalização (Verschaffel, Greer & De Corte, 2007). Mason (2005) considera que a Álgebra é muito mais do que um conjunto de procedimentos que envolvem os símbolos em forma de letra e sublinha a importância do desenvolvimento de recursos para representar o que é geral nas relações matemáticas. Assim, a generalização algébrica não tem de ser necessariamente sintetizada através de linguagem matemática simbólica, podendo inclusivamente ser expressa por linguagem natural (Canavarro, 2009; Carraher & Schliemann, 2007; Kieran, 2007).

Kaput (1999) aponta caminhos que podem culminar numa Álgebra acessível a todos e em fusão com os outros temas do currículo. Defende a generalização e a expressão dessa generalização desde o início, independentemente da representação usada, utilizando linguagens progressivamente mais formais – quando se começa a generalizar em Aritmética, em situações de modelação, na Geometria e em praticamente toda a Matemática, a partir dos primeiros anos de ensino e atravessando os diferentes temas do currículo.

Kieran apresenta uma visão semelhante, destacando a importância da generalização e encarando a Álgebra como uma forma de pensamento:

> Álgebra não é apenas um conjunto de procedimentos envolvendo os símbolos em forma de letra, mas consiste também na atividade de generalização e proporciona uma variedade de ferramentas para representar a generalidade das relações matemáticas, padrões e regras. (Kieran, 2007, p. 5)

Matos, Silvestre, Branco e Ponte (2008) dão, também, uma visão alargada sobre o pensamento algébrico, referindo-o como a capacidade de estabelecer generalizações e relações, interpretar situações e resolver problemas. Esta visão encontra-se longe da perspetiva tradicional em que a Álgebra é encarada como a simples manipulação de expressões e equações (Ponte, 2006).

**Estratégias usadas pelos alunos para lidar com situações de proporcionalidade direta**

Várias fontes da literatura, baseadas em estudos cujo foco é o raciocínio proporcional, como os realizados por Lesh, Post, e Behr (1988); Costa (2007); Fernández, Llinares, Dooren, Bock e Verschaffel (2010), distinguem estratégias de natureza multiplicativa e aditiva.

Por uma questão de facilidade, ilustramos as estratégias, aplicando-as a uma situação que a seguir transcrevemos, proposta aos alunos na investigação realizada e denominada "Uma questão de misturas":

| |
|---|
| O chefe dos escuteiros sugeriu que se preparasse sumo de laranja, misturando duas doses de concentrado de laranja com três doses de água.<br><br>A Mariana ofereceu-se para preparar o sumo e colocou num recipiente seis doses de concentrado de laranja. Quantas doses de água deverá juntar para obter um sumo exatamente com o mesmo sabor do da receita sugerida pelo chefe? Explica o teu raciocínio. |

Figura 1- Enunciado da tarefa "Uma questão de misturas"

Em seguida, recorrendo à situação/ exemplo (fig. 1), descrevemos possíveis estratégias e abordagens distintas que podem ser empregues na resolução de situações de proporcionalidade direta.

Para resolver este problema, e considerando os resultados dos estudos já referidos (Lesh, Post, & Behr, 1988; Costa, 2007; Fernández et al., 2010), os alunos podem recorrer a estratégias de natureza multiplicativa, em que dois dos valores indicados estão relacionados multiplicativamente, sendo essa relação aplicada a um terceiro valor. Estas estratégias admitem abordagens escalares e funcionais.

Abordagem escalar: baseada em relações internas, ou seja, relações entre quantidades da mesma natureza. De acordo com o exemplo sugerido é possível comparar as doses de concentrado sugeridas pelo chefe com as doses de concentrado usadas pela Mariana, e verificar que a mistura da Mariana contém 3 vezes mais doses de concentrado do que a que foi usada pelo chefe, logo, para que se mantenha o mesmo sabor serão necessárias 3 vezes mais doses de água, ou seja, $3\times 3 = 9 \text{ doses de água}$.

Abordagem funcional: considerando relações externas, ou seja, relações entre quantidades de diferentes naturezas. Na mistura sugerida pelo chefe foram usadas 2 doses de concentrado de laranjas para 3 doses de água, as doses de água podem ser encontradas através da multiplicação do número de doses de concentrado de laranja por 1,5, uma vez que, $2 \text{ doses de concentrado} \times 1{,}5 = 3 \text{ doses de água}$, logo, para encontrar o número de doses de água, basta que a Mariana multiplique o número de doses de concentrado de laranja que utilizou pelo mesmo valor e assim obter o número de doses de água necessária, ou seja, doses de concentrado $6 \times 1{,}5 = 9 \text{ doses de água}$.

Abordagem ao fator unidade: é considerada, em alguns dos estudos citados, como uma variante à abordagem funcional e baseia-se no valor da unidade de uma das quantidades referidas. A mistura inicialmente proposta tem 2 doses de concentrado de laranja para 3 doses de água, logo, uma mistura com 1 dose de concentrado de laranja teria 1,5 doses de água. Então, a quantidade de doses de água necessárias para a nova mistura poderia ser encontrada através do produto entre o número de doses de concentrado de laranja e 1,5, ou seja, 6 doses de concentrado $\times\ 1{,}5 = 9$ doses de água.

O recurso a estratégias de natureza aditiva, para lidar com a relação de proporcionalidade direta é, segundo os autores mencionados, um fenómeno comum, que não abrange apenas os alunos mais jovens. Estas estratégias podem apresentar duas nuances distintas, uma baseada na adição repetida e de certo modo relacionada com o raciocínio multiplicativo, normalmente designada por building-up, e uma outra denominada como diferença constante, que conduz a conclusões erradas (Baxter & Junker, 2001).

A adição repetida, ou building-up, revela traços elementares que estão na base do raciocínio multiplicativo. Tomando como ponto de partida o exemplo anterior, em que temos uma mistura inicial com 2 doses de concentrado de laranja e 3 doses de água, é possível encontrar o número de doses de água para a nova mistura da Mariana, através do seguinte processo: 2+2+2 = 6 doses de concentrado usadas na nova mistura, então, repetindo o mesmo número de vezes as doses de água é possível encontrar a resposta para a situação proposta, ou seja, 3+3+3 = 9 doses de água.

Por outro lado, a diferença constante consiste em estabelecer uma relação dentro de uma razão que é calculada subtraindo um termo do outro, sendo essa diferença, em seguida, aplicada à outra razão. Por exemplo, é considerada a diferença entre o número de doses de água e de concentrado da mistura inicial, $3-2=1$ e, em seguida, essa diferença é aplicada à outra razão, permitindo obter o termo em falta, $6 + 1 = 7$ doses de água. Esta abordagem admite ainda outro raciocínio ao considerar-se que a mistura da Mariana tem 4 vezes mais doses de concentrado de laranja que a mistura inicial, dado que 6 - 2 = 4. Então, e de acordo com esta perspetiva, também é necessário adicionar 4 doses de água à mistura inicial, ou seja, 3+4=7 doses de água. Estes raciocínios de natureza aditiva, baseados na diferença constante, conduzem a uma resposta errada que não satisfaz as condições propostas no problema. Contudo, alguns estudos têm demonstrado que são usados não apenas por alunos com pouca experiência com a relação multiplicativa em relações proporcionais, como também por alunos mais velhos, na resolução de problemas mais complexos (Baxter & Junker, 2001).

Autores como Cramer e Post (1993) apontam, ainda, outros caminhos que é possível seguir na resolução de situações proporcionais. Estes autores fazem referência a quatro estratégias distintas:

(i) A utilização da taxa unitária, já referida anteriormente como fator unidade e que possui como base o valor da unidade de uma das quantidades referidas; (ii) A utilização do fator de mudança, em que são utilizados os múltiplos para estabelecer relações, por exemplo, e, voltando a recorrer ao exemplo sugerido anteriormente, se a Mariana utilizou o triplo das doses de concentrado de laranja, relativamente às que foram gastas na mistura inicial, terá que usar o triplo das doses de água para obter um sumo com o mesmo sabor; (iii) A utilização das razões como frações, quando as razões são tratadas como frações, aplicando-se-lhes o princípio da equivalência de frações; (iv) A utilização do algoritmo do produto cruzado, que consiste em estabelecer uma proporção, efetuar o produto cruzado e resolver a equação resultante.

Cramer e Post (1993) alertam para o uso abusivo da utilização deste algoritmo que, embora eficiente, é, muitas vezes, utilizado de forma inadequada e desprovido de qualquer significado. A sua utilização na resolução de situações não proporcionais como surge expresso em alguns estudos (Cramer & Post, 1993) revela os traços opacos das suas características. Estes autores defendem, ainda, a utilização dos métodos mais intuitivos, taxa unitária e fator de mudança, no início do estudo da proporcionalidade direta, uma vez que a sua natureza apela à análise contextual de cada problema, possibilitando encará-los como situações singulares.

## OPÇÕES METODOLÓGICAS

Considerando a natureza do objetivo de investigação, optámos por uma metodologia que se inscreve num paradigma interpretativo, com uma abordagem qualitativa, onde os processos e significados criados pelos participantes assumem um papel crucial (Bogdan & Biklen, 1994).

Estudámos o caso duma turma de 6.º ano de uma escola básica do interior alentejano, com alunos entre os onze e os quinze anos. A investigadora, primeira autora deste artigo, era a professora de Matemática desta turma pelo segundo ano consecutivo. Os dados foram recolhidos em ambiente natural de sala de aula, no decurso do ensino regular da disciplina de Matemática, em 2013/2014.

O estudo apoiou-se numa experiência de ensino com uma sequência de doze tarefas, incidindo sobre proporcionalidade direta e outras regularidades. As tarefas apelavam à generalização, eram contextualizadas na realidade próxima dos alunos, e foram exploradas segundo uma cultura de aula onde se valorizou a comunicação matemática e onde se contemplaram quatro momentos de um modelo exploratório para a organização do ensino (Canavarro et al., 2012). Um primeiro momento, dedicado ao lançamento da tarefa, em que os alunos deveriam expressar a sua compreensão acerca do que se pretendia com a mesma. Um segundo momento, voltado para a exploração da tarefa pelos alunos, seguindo-se um outro, em que foram apresentados e discutidos os resultados obtidos, pelos grupos à turma, culminando num último momento dedicado à sistematização e formalização dos conceitos, com base nas conjeturas formuladas pelos alunos.

Com vista a uma análise sustentada em evidências de qualidade, reunimos diversos dados complementares: as produções escritas dos alunos resultantes da exploração das tarefas e as gravações vídeo e áudio das discussões coletivas.

A análise de dados foi realizada considerando categorias emergentes da revisão da literatura, sintetizadas na tabela 1:

Tabela 1 - Categorias consideradas na análise de dados

| **Estratégias usadas pelos alunos para lidar com situações de proporcionalidade direta**<br>Costa (2007), Cramer & Post (1993), Fernández et al (2010), Lesh, Post, & Behr (1988) | |
|---|---|
| • Multiplicativas | • Escalares (baseadas em relações internas, entre quantidades da mesma natureza);<br>• Funcionais (baseadas em relações externas, entre quantidades de naturezas distintas);<br>• Abordagem ao fator unidade (estratégia funcional, baseada no valor da unidade de uma das quantidades referidas) |
| • Aditivas | • Adição repetida/ building-up;<br>• Diferença constante (relativa ao estabelecimento de uma relação dentro de uma razão, calculada subtraindo um termo do outro, sendo essa diferença, em seguida, aplicada à outra razão) |
| • Fator de mudança | • Utilização dos múltiplos para estabelecimento de relações; |
| • Utilização da razão como fração | • Aplicação do princípio de equivalência de frações; |
| • Produto cruzado | • Estabelecimento de uma proporção, efetuando o produto cruzado e resolvendo a equação resultante. |

## RESULTADOS

Os episódios relatados neste artigo referem-se apenas a duas tarefas selecionadas da sequência realizada, onde é explorada a relação de proporcionalidade direta, pois a sua análise é suficiente para ilustrar os resultados e sustentar as conclusões. Para cada tarefa, apresentamos a análise das estratégias usadas pelos alunos no estudo de casos particulares e na expressão da generalidade.

**TAREFA 3**

**Um percurso pedestre**

Na manhã seguinte teve lugar um percurso pedestre, era a oportunidade dos escuteiros conhecerem a zona envolvente do acampamento. O percurso incluía trilhos muito estreitos e devido à dimensão do grupo, trinta escuteiros, o chefe propôs que se dividissem em dois grupos. O grupo dos Exploradores e o grupo dos Pioneiros. Todos se prepararam para iniciar a caminhada levando consigo água e alguns alimentos. O grupo dos Exploradores foi o primeiro a partir tendo iniciado o percurso às 10 horas e 45 minutos, o grupo dos Pioneiros partiu meia hora depois.

O esquema mostra o percurso pedestre realizado pelos grupos dos Exploradores e Pioneiros.

1. Compara o tempo gasto por cada um dos grupos ao longo do percurso pedestre. Investiga se encontras alguma relação entre a distância percorrida e o tempo que foi gasto para a percorrer? Regista as tuas conclusões.
2. Se o percurso pedestre tivesse 6000 m, seria possível prever o tempo que cada um dos grupos precisaria para o concluir? Explica como pensaste.
3. Consegues encontrar uma regra que te permita determinar o tempo gasto pelos grupos, num percurso pedestre com qualquer número de metros? Explica como pensaste.

Figura 2 – 3ª tarefa: Um percurso pedestre (Inspirada em Silvestre, 2012)

Nesta tarefa (fig. 2), e nos exemplos selecionados os grupos optaram por representar os dados em tabelas, estabelecendo, posteriormente, relações entre as variáveis.

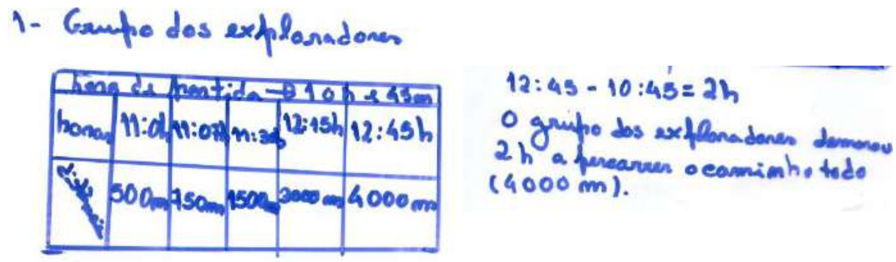



Figura 3 – Produções do Grupo I

Os elementos do Grupo I explicaram o modo como organizaram os dados na tabela (fig. 3) e determinaram o tempo gasto no percurso, não estabelecendo relações de natureza interna ou externa entre as variáveis. O episódio que se segue contempla intervenções de outros elementos da turma que questionam o grupo acerca do facto de terem ou não identificado possíveis relações. Estas intervenções pertinentes enriqueceram o momento de discussão plenária. Bernardo estabelece uma relação aditiva no que se refere às distâncias e Rui, para esclarecer a necessidade dos 30 segundos omissos (representação usada na tabela: 11:07, em vez de: 11:07:30), estabelece igualmente relações de natureza aditiva.

> **Rui** – E vocês, encontraram relações?
>
> **Bernardo** – Para se perceber melhor podiam ter colocado uma seta dos 500 para os 750 metros com mais 250 metros, dos 750 metros para os 1500 metros, mais 750 metros,...
>
> **João** – Eu não sei se vai destoar muito, mas eles não meteram ali nas 11 horas e 7 minutos os segundos...
>
> **Rui** – Eu posso ir aí explicar (...) Os exploradores começaram às 10:45 e às 11 fizeram os 500 metros, das 10:45 para as 11 vão 15 minutos, então quer dizer que os 15 minutos são 500 metros. Nos 750 metros como é que é? É metade de 500, mais 500, por isso é 15 mais metade, e a metade de 15 é sete e meio, por isso ali não estava bem assim (referindo-se à omissão dos 30 segundos), pois sete mais sete daria 14 (e não os 15 necessários para se manter a relação)

Nas representações usadas pelo Grupo 111 (fig. 4) é possível identificar relações internas estabelecidas entre as variáveis.

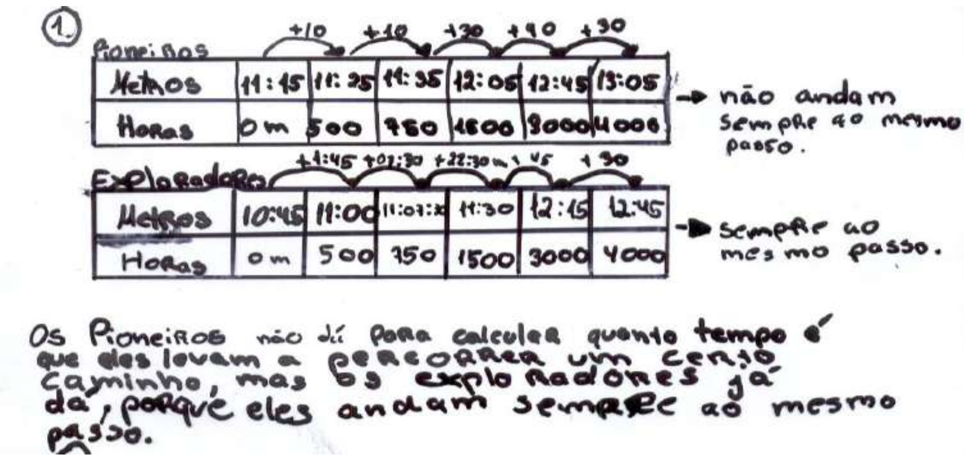



Figura 4 - Produções do Grupo III

A verbalização das relações encontradas pelo Grupo III explicita um raciocínio de natureza multiplicativa, baseado na relação de covariação entre as variáveis no grupo dos Exploradores e a sua ausência no caso dos Pioneiros.

> **Tó** – Para os Pioneiros, vimos que começaram às 11:15 que era mais meia hora do que as 10:45, depois fizemos uma tabela e vimos que eles demoravam o mesmo tempo a percorrer 500 metros do que 250 metros, vimos que eles não andavam

sempre ao mesmo passo. Aqui (referindo-se à tabela onde registaram as distâncias e tempos percorridos pelos exploradores) estivemos a relacionar e vimos que demoravam 15 minutos a percorrer 500 metros, e metade de 15 minutos é 7,5 minutos, então percorreram, nesse tempo, metade de 500 metros que eram 250 metros.

**Inês** – Chegámos à conclusão de que os Pioneiros não dava para calcular quanto tempo demoravam a percorrer um certo caminho, porque eles não andavam sempre ao mesmo passo, mas os Exploradores já dava porque eles andam sempre ao mesmo passo.

Na busca da generalidade, as estratégias usadas tiveram sempre implícitas relações multiplicativas de natureza escalar.

O Grupo I utilizou razões entre o tempo e a distância e entre a distância e o tempo (fig. 5), usando um procedimento multiplicativo de natureza funcional, baseado em relações externas entre quantidades de naturezas distintas. Contudo, não tiram partido das mesmas para identificar a regularidade no Grupo dos Exploradores e a sua ausência no Grupo dos Pioneiros.

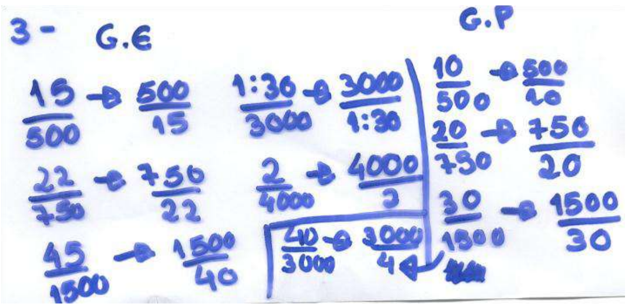



Figura 5 - Produções do Grupo I

Para expressar a regra que lhes permitiria calcular o tempo gasto para percorrer qualquer distância, o Grupo II efetuou o quociente entre o tempo e a distância, determinando, deste modo, a constante de proporcionalidade à qual atribuem um significado.

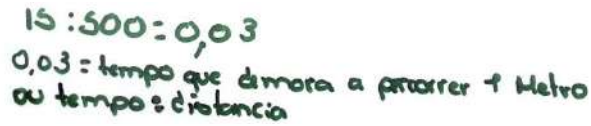



Figura 6 - Produções do Grupo II

O Rui explica a estratégia utilizada pelo grupo:

**Rui** – 15 minutos é o tempo que demoram a fazer os 500 metros, se dividirmos os 15 minutos pelos 500 metros, que era o tempo a dividir pela distância, dá 0,03, e 0,03 é igual ao tempo que demoram a percorrer 1 metro.

A expressão numérica e a constante de proporcionalidade encontrada através da relação funcional que estabeleceram entre as variáveis abrem caminho à introdução da expressão algébrica formal (y = kx, neste contexto: t = 0,03d).

O Grupo VI usa expressões algébricas (fig. 7) que traduzem a regra, recorrendo a procedimentos de natureza multiplicativa inerente à relação de proporcionalidade direta.

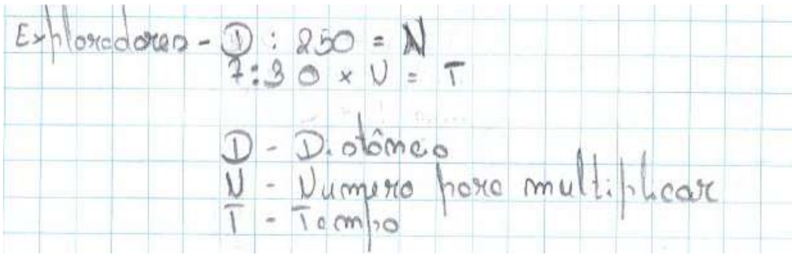



Figura 7 - Produções do Grupo VI

**TAREFA 4**

**Aluguer de canoas**

No dia seguinte teve lugar um passeio de canoas pelo grande lago de Alqueva, alguns membros do grupo estavam muito entusiasmados com a oportunidade que tinha surgido. Finalmente iam poder experimentar e praticar canoagem...
Consultaram as tabelas de preços de duas empresas:

| Momentos de Aventura | |
|---|---|
| Tempo (minutos) | Preço (euros) |
| 30 | 5 |
| 45 | 7,5 |
| 60 | 10 |
| 90 | 15 |

| Amieira Desportos | |
|---|---|
| Tempo (minutos) | Preço (euros) |
| 40 | 5 |
| 60 | 10 |
| 90 | 16 |
| 180 | 28 |

1. **Será possível prever, com exatidão, o preço a pagar pelo aluguer das canoas, durante cinco horas, para cada uma das empresas? Justifica a tua resposta.**
2. **Consegues encontrar uma regra que te permita determinar o preço a pagar para qualquer número de minutos, para cada uma das empresas? Explica o teu raciocínio.**

Figura 8 – 4.ª tarefa: Aluguer de canoas

Para responder à primeira questão da 4ª tarefa (fig. 8), e depois de verificarem a existência de proporcionalidade direta entre o preço e o tempo na empresa Momentos de Aventura, este grupo representa os dados numa nova tabela, estabelecendo uma correspondência direta entre o preço e o tempo de 1, 2, 3, 4 e 5 horas, respetivamente (fig. 9).

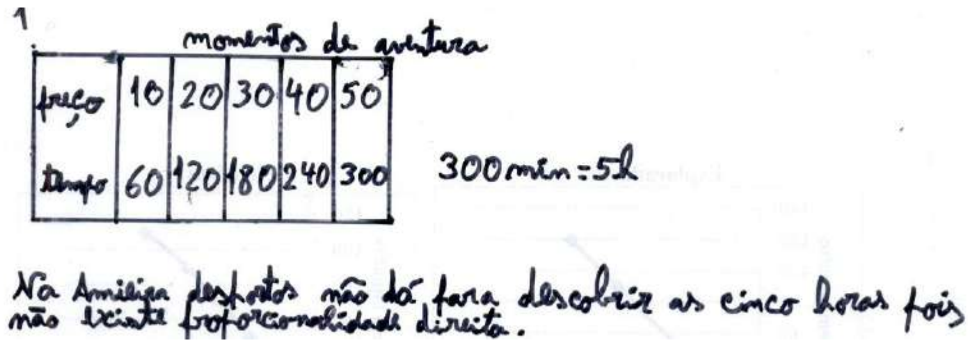



Figura 9 - Produções do Grupo I

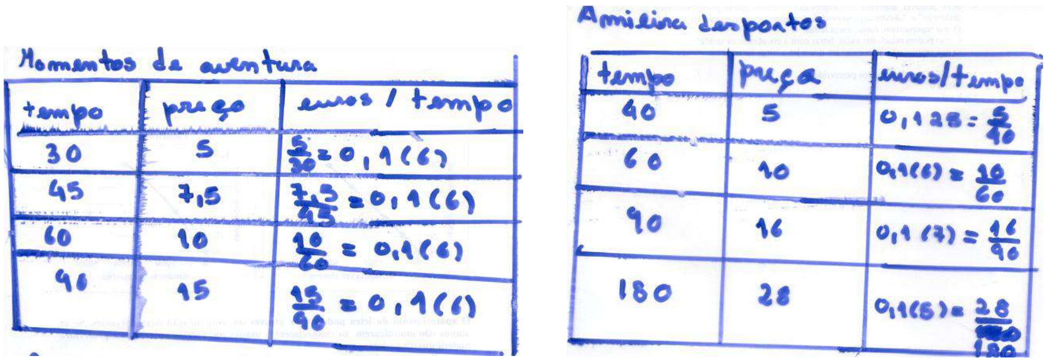
O episódio seguinte, ocorrido no momento da discussão coletiva, permite clarificar a estratégia utilizada pelos alunos, no estudo de casos particulares, para verificar a existência de proporcionalidade direta.

> **Simão** – 10€ era uma hora, 20€ duas horas, 30€ três horas, 40€ quatro horas e 50 € cinco horas.
>
> **Manel** – E como é que chegaram à conclusão de que na Amieira Desportos não havia proporcionalidade direta?
>
> **André** – Porque nós fomos ver, e do 40 para o 60 vão 20 minutos e 40 a dividir por dois é 20 minutos e 5 a dividir por dois é 2,5; daqui para aqui (apontando os tempos 40 e 60 minutos) vão 20 minutos e 20 minutos é igual a 2,5€, não dá (...) neste caso (apontando para os 40 minutos) para isto ter proporcionalidade direta tinha que ser 80 minutos e 10 de preço.
>
> **Manel** – Também podiam provar que não havia proporcionalidade direta na Amieira desportos de outra maneira, aqui (apontando para a tabela) diz que 60 minutos são 10€, se fizéssemos 60 minutos mais 60 minutos dava 120 minutos, e 10€ mais 10€ dava 20 €, e aqui (voltando a indicar a tabela) no180 minutos dava 28€ e para haver proporcionalidade direta tinha que ser 180 minutos 30€.

André explica a inexistência de proporcionalidade direta na empresa Amieira Desportos, recorrendo a procedimentos de natureza multiplicativa e utilizando uma abordagem escalar: "40 a dividir por 2 é 20 minutos e 5 a dividir por 2 é 2,5€; (...) 20 minutos é igual a 2,5€, não dá (...) neste caso (apontando para os 40 minutos) para isto ter proporcionalidade direta tinha que ser 80 minutos e 10 de preço (o dobro do tempo e o dobro do preço)." Por outro lado, o Manel utiliza na sua explicação uma abordagem de construção, de natureza aditiva, designada por building-up " (…) 60 minutos mais 60 minutos dava 120 minutos, e 10€ mais 10€ dava 20 €, e aqui, no 180 minutos, dava 28€ e para haver proporcionalidade direta tinha que ser 180 minutos 30€." Deste modo, através da adição repetida 60+60+60 obtém os 180 minutos e repetindo o mesmo número de vezes o custo de 60 minutos,10+10+10, iria obter, caso existisse proporcionalidade direta, o custo correspondente de 30€, o que não se verifica na situação proposta.

Na busca da generalização prevalecem os procedimentos de natureza multiplicativa.

O Grupo II usa uma abordagem funcional, recorrendo a razões (fig. 10) e estabelecendo, assim, uma relação multiplicativa entre o preço e o tempo. Deste modo, colocam em evidência a relação entre o preço e o tempo através de uma razão e determinam posteriormente o quociente, que lhes fornece informação acerca do custo de um minuto em cada uma das empresas. Essa informação permitiu-lhes, ainda, identificar a relação de proporcionalidade direta na empresa Momentos de Aventura, dado que o quociente entre o preço e o tempo é um valor constante.



Momentos de aventura

| tempo | preço | euros / tempo |
|---|---|---|
| 30 | 5 | $\frac{5}{30}=0,1(6)$ |
| 45 | 7,5 | $\frac{7,5}{45}=0,1(6)$ |
| 60 | 10 | $\frac{10}{60}=0,1(6)$ |
| 90 | 15 | $\frac{15}{90}=0,1(6)$ |

Amilina desportos

| tempo | preço | euros/tempo |
|---|---|---|
| 40 | 5 | $0,125=\frac{5}{40}$ |
| 60 | 10 | $0,1(6)=\frac{10}{60}$ |
| 90 | 16 | $0,1(7)=\frac{16}{90}$ |
| 180 | 28 | $0,1(5)=\frac{28}{180}$ |

Figura 10 - Produções do Grupo II

O Grupo V efetua o quociente entre o preço e o tempo respetivo (fig. 11), recorrendo a uma estratégia funcional e, em seguida, regista algebricamente o produto entre o custo de um minuto e o tempo de aluguer pretendido para a empresa Momentos de Aventura.

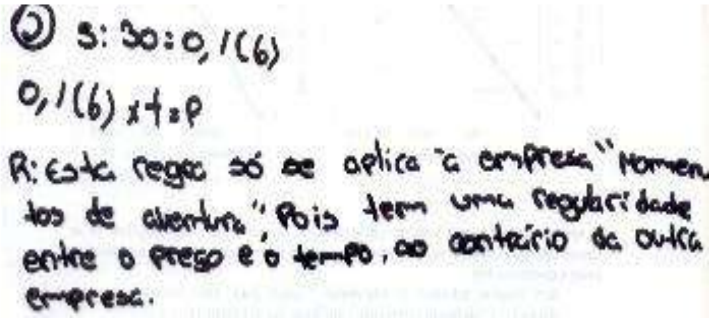

5: 30 = 0,1(6)
0,1(6) x t = P
R: Esta regra só se aplica à empresa "Momentos de aventura", Pois tem uma regularidade entre o preço e o tempo, ao contrário da outra empresa.

Figura 11 - Produções do Grupo V

No episódio seguinte justificam-se os procedimentos e esclarecem-se algumas dúvidas que parecem persistir.

> **Raul** – Para a empresa Momentos de Aventura fizemos 5€ a dividir por 30 e obtivemos 0,1(6).
>
> **Tino** – 01(6) era o que cada minuto custava.
>
> **Professora** – E como fariam para obter o preço?
>
> **Matilde** – Nós multiplicávamos o preço de um minuto vezes o tempo que nos pediam, que nos ia dar o preço que nós pagávamos.
>
> **Professora** – Mais alguma questão?
>
> **André** – E se quisermos saber o tempo?
>
> **João** – Não podia ser assim, tinha que ser 30 a dividir por 5, que ia dar 6, e 6 vezes o preço que tu querias ia dar o tempo.
>
> **Professora** – E usando este valor (indiquei-lhes o valor 0,1(6)) seria possível determinar o tempo?
>
> **Matilde** – Podia ser o preço a dividir por 0,1(6), e ia dar o tempo.

No decorrer desta última discussão, há a destacar vários aspetos: a descoberta da regra e o debate que se gerou, levando os alunos a refletir sobre o significado do quociente entre o preço e o tempo, e a olhar a situação de um ponto de vista diferente, quando confrontados com a questão: E se quisermos saber o tempo? A pergunta colocada pelo André originou, então, duas abordagens distintas, assentes no raciocínio multiplicativo inerente a situações de proporcionalidade direta, que importam sublinhar: "Não podia ser assim, tinha que ser 30 a dividir por 5, que ia dar 6, e 6 vezes o preço que tu querias ia dar o tempo."; "Podia ser o preço a dividir por 0,1(6) e ia dar o tempo."

## CONCLUSÕES

Concluímos que nas tarefas de proporcionalidade direta "Um percurso pedestre" e "Aluguer de canoas", no estudo de casos particulares, houve um misto entre a utilização de estratégias multiplicativas, escalares e funcionais, e a utilização de estratégias aditivas de construção, denominadas vulgarmente por building-up (Costa, 2007; Cramer & Post,1993; Fernández, Llinares, Dooren, Bock & Verschaffel, 2010; Lesh , Post, & Behr,1988). Contudo, na busca da generalização, verificou-se o abandono das estratégias aditivas e a adoção generalizada de estratégias multiplicativas inerentes à relação de proporcionalidade direta.

Na tarefa "Um percurso pedestre", apesar de apenas um grupo ter conseguido expressar algebricamente uma regra que permitia determinar o tempo necessário para percorrer distâncias com qualquer número de metros, verificou-se uma utilização quase generalizada de estratégias multiplicativas funcionais para procurar expressar a generalização. Assim, nos exemplos apresentados, pode observar-se que um grupo determinou a constante de proporcionalidade, atribuindo-lhe significado, através do quociente entre o tempo e a distância, adotando uma estratégia multiplicativa funcional, baseada no valor da unidade de uma das quantidades referidas, neste caso, calculando o tempo que demoram a percorrer um metro. Outro grupo utilizou razões para expressar a relação entre o tempo e a distância e a distância e o tempo, utilizando, igualmente, uma estratégia multiplicativa funcional.

Na tarefa "Aluguer de canoas", e nas resoluções apresentadas neste artigo, adotaram na busca da generalidade procedimentos de natureza multiplicativa, determinando a constante de proporcionalidade, através do quociente entre o custo e o tempo, atribuindo-lhe significado. As estratégias adotadas foram de natureza multiplicativa funcional, baseadas no valor da unidade de uma das quantidades, nesta situação, o custo de um minuto de aluguer. Outro grupo usou razões para expressar a relação entre o custo e o tempo, determinando, através do quociente entre estas duas grandezas, a constante de proporcionalidade na empresa Momentos de Aventura, onde se verifica a relação de proporcionalidade direta ($\frac{5}{30} = 0{,}1(6); \frac{7{,}5}{45} = 0{,}1(6); \frac{10}{60} = 0{,}1(6); \ldots$). O mesmo procedimento foi adotado para provar a ausência da relação de proporcionalidade direta na empresa Amieira Desportos. Há ainda a destacar a emergência da relação tempo/custo, resultante da discussão que se gerou, no momento da discussão coletiva, permitindo olhar a situação de um ponto de vista diferente, quando confrontados com a questão: E se quisermos saber o tempo? A pergunta colocada pelo André originou a descoberta da constante de proporcionalidade 6, com o significado de 6 minutos por cada euro.

As estratégias usadas pelos alunos, quer no estudo de casos particulares, quer para procurar expressar a generalização, apresentam um caráter intuitivo que se afasta um pouco de métodos mais formais, como o produto cruzado, vulgarmente usado no estudo das relações proporcionais. Neste artigo, encontram-se evidências que nos permitem apontar vantagens para a utilização destas estratégias mais intuitivas, nomeadamente a possibilidade de os alunos usarem conhecimentos prévios, contribuindo de forma ativa para a construção do seu próprio conhecimento, e o desenvolvimento da capacidade de justificar e atribuir significado aos seus procedimentos, aspetos importantes para uma aprendizagem significativa da proporcionalidade direta.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS


Baxter, G., & Junker, B. (2001). *Designing cognitive-developmental assessments: a case study in proportional reasoning.* Paper presented at the annual meeting of the *National Council for Measurement in Education*, Seattle, Washington, April 2001.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Canavarro, A. P. (2009). O pensamento algébrico na aprendizagem da matemática nos primeiros anos. *Quadrante, 16*(2), 81-118.

Canavarro, A. P., & Santos, L. (2012). Explorar tarefas matemáticas. In A. P. Canavarro, L. Santos, A. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes & S. Carreira (Eds.), *Investigação em Educação Matemática – Práticas de ensino da Matemática: Atas do EIEM2012* (pp. 99-104). Lisboa: SPIEM.

Carraher, D., & Schliemann, A. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 669-705). Charlotte, NC: NCTM & Information Age Publishing.

Costa, S. (2007). *O raciocínio proporcional dos alunos do 2.º Ciclo do Ensino Básico*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Cramer, K., & Post, T. (1993). Connecting research to teaching proportional reasoning. *Mathematics Teacher, 86*(5), 404-407.

Fernández, C., Llinares, S., Van Dooren, W., De Bock, D., & Verschaffel, L. (2010). The development of students' use of additive and proportional methods along primary and secondary school. Hub Research Paper, November *2010*, 32.

Infante, M. L. (2014). *Desenvolvendo o pensamento algébrico no 2.º ciclo do ensino básico: O sentido dos símbolos e da generalização.* Dissertação de mestrado, Escola Superior de Educação de Lisboa.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra with understanding. Consultado a 10 de setembro de 2008 em, http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/DA/DATEXTOS/Kaput_99AlgUnd.pdf

Kieran, C. (2007). Developing algebraic reasoning: The role of sequenced tasks and teacher questions from the primary to the early secondary school levels. *Quadrante, 16*(1), 5-26

Matos, A., Silvestre, A. I., Branco, N., & Ponte, J. (2008). Desenvolver o pensamento algébrico através de uma abordagem exploratória. In R. Luengo-González, B. Gómez-Alfonso, M. Camacho-Machín & L. B. Nieto (Eds.), *Investigación en educación matemática XII* (pp. 505-516). Badajoz: SEIEM.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1988). Proportional reasoning. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 93-118). Reston: NCTM e Lawrence Erlbaum.

Ponte, J. P. (2006). Números e Álgebra no currículo escolar. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, & A. P. Canavarro (Orgs.), *Números e Álgebra na Aprendizagem da Matemática e na Formação de Professores* (pp. 5-27). Porto: SEM/SPCE.

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2007). Whole number concepts and operations. In F. K. Lester (Ed.) *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 557-628). Charlotte, NC: NCTM & Information Age Publishing.