

O processo de generalizar: Um estudo com futuros professores

The process of generalizing: A study with prospective teachers

Margarida Rodrigues¹, Lurdes Serrazina², Lina Brunheira³

Resumo: Este artigo tem como objetivo analisar como futuros professores se envolveram num processo de generalização, ao resolverem uma tarefa proposta no âmbito de uma experiência de formação. Os dados foram recolhidos através da observação participante apoiada por gravação áudio e vídeo enquanto os futuros professores resolviam a tarefa em trabalho autónomo, organizados em grupo, mas também durante a discussão coletiva. Os futuros professores mostraram capacidade de generalizar, embora nem todos o tenham feito com o mesmo nível de sofisticação. Grande parte mostrou preocupação em apresentar o resultado utilizando a linguagem algébrica, embora a linguagem natural tivesse também um importante papel. De notar ainda, o papel do processo de exemplificar como apoio ao processo de generalizar.

Palavras-chave: raciocínio matemático, generalizar, exemplificar, formação inicial de professores

Abstract: *The aim of this paper is to analyse how prospective teachers had been involving in a generalization process, when solving a task, included in a teaching experiment. Data were collected through participant observation supported by audio and video recordings, while the prospective teachers solved the task in autonomous work, organized in groups, but also during the whole class discussion. Prospective teachers show the ability to generalize, although with different levels of sophistication. Most of them were concerned with presenting the result using algebraic language, although natural language also played an important role. Also to be noted the role of the process of exemplifying as support to the generalizing process.*

Keywords: *mathematical reasoning, generalizing, exemplifying, preservice teacher education*

Eselx-Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa & UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa,

1. margaridar@eselx.ipl.pt;

2. lurdess@eselx.ipl.pt;

3. lbrunheira@eselx.ipl.pt

Introdução

Documentos curriculares nacionais e internacionais incluem o desenvolvimento do raciocínio matemático como uma capacidade a ser desenvolvida por todos os alunos desde os primeiros anos de escolaridade (ME, 2018; NCTM, 2007). Envolver os alunos na resolução e discussão de tarefas que promovam o raciocínio matemático e a resolução de problemas, para além de permitirem diferentes abordagens e várias estratégias, conduz a um ensino eficaz da matemática (NCTM, 2017). Também aos futuros professores devem ser dadas oportunidades para compreenderem o que o raciocínio matemático envolve (Loong et al., 2017), proporcionando-lhes experiências significativas que possam mais tarde vir a desenvolver com os seus alunos (Hiebert et al., 2003). Do mesmo modo, Stylianides e Stylianides (2006) consideram ser necessário dar uma atenção especial ao raciocínio matemático na formação inicial de professores, nomeadamente à capacidade de raciocinar. Para estes autores, a ligação entre a atividade de raciocinar e provar e atribuir sentido, permite tornar as aprendizagens significativas, justificando. Deste modo, trabalhar esta dimensão poderá providenciar um maior desenvolvimento do conhecimento matemático e didático dos futuros professores dos primeiros anos, capacitando-os para conduzirem práticas promotoras do raciocínio matemático dos seus alunos.

Este artigo enquadra-se no Projeto Raciocínio Matemático e Formação de Professores (REASON), o qual visa estudar o conhecimento matemático e didático que os professores precisam para conduzir uma prática que promova o raciocínio matemático dos alunos e estudar formas de apoiar o seu desenvolvimento em professores e futuros professores dos ensinos básico e secundário. O presente artigo tem como objetivo analisar como futuros professores (estudantes do Mestrado em Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico (CEB) e de Matemática e Ciências Naturais no 2.º CEB) se envolveram num processo de generalização, ao resolverem uma tarefa proposta no âmbito de uma experiência de formação.

Raciocínio matemático e o processo de generalizar

O significado de raciocínio matemático nem sempre é consensual, havendo autores que referem pensamento matemático ou pensar matematicamente como sinónimo de raciocínio. Nesta comunicação, seguimos a perspetiva de Ponte et al. (2020) para quem o “raciocinar” matematicamente é mais restrito do que “pensar”, considerando raciocínio matemático como “realizar inferências de forma fundamentada, ou seja, partir de informação dada para obter nova informação através de um processo justificado” (p. 7).

Ponte et al. (2020) referem três tipos de raciocínio: dedutivo, indutivo e abdução. No raciocínio dedutivo, um conjunto de asserções são encadeadas de forma lógica, justificando esse encadeamento e, se essa cadeia de deduções não contiver erros, obtém-se uma conclusão necessariamente verdadeira. Este tipo de raciocínio é muitas vezes considerado o raciocínio matemático. No entanto, Polya (1990) veio dar um relevo especial ao raciocínio indutivo em matemática, consid-

erando que ele está presente quando se chega a uma regra a partir da observação do que acontece em diferentes casos particulares, por exemplo, quando através da observação de uma regularidade se estabelece uma generalização. No que se refere ao raciocínio abduutivo, este aparece muitas vezes associado ao raciocínio indutivo. Silva (2009), referindo-se ao trabalho de Pierce, considera abdução como “um processo de inferência que parte de um facto insólito ou invulgar e que procura uma explicação para a sua ocorrência” (p. 39). Para esta autora, abduzir é levantar hipóteses, como formas de explicar fenómenos surpreendentes que se observam. Oliveira (2008), a partir da análise do trabalho de diferentes matemáticos, considera o raciocínio dedutivo fundamental quando se conclui uma investigação matemática. Normalmente, a prova é precedida por uma fase exploratória onde se experimentam tentativas, avanços e recuos, analogias ou intuições, emergindo tipos de raciocínio indutivo e abduutivo associados ao processo de generalizar.

Para Jeannotte e Kieran (2017), os tipos de raciocínio antes referidos incluem-se no aspeto estrutural do raciocínio. Para além deste, estas autoras identificam o aspeto processual do raciocínio matemático envolvendo os processos de procura por semelhanças e diferenças (generalizar, conjecturar, identificar um padrão, comparar e classificar) e os processos relacionados com a validação (justificar e provar). Ponte et al. (2020) destacam conjecturar, generalizar e justificar como processos essenciais do raciocínio matemático, sendo conjecturar central no raciocínio abduutivo, generalizar, ou seja, formular conjecturas de natureza geral, um processo-chave dos raciocínios indutivo e abduutivo e justificar, um processo essencial do raciocínio dedutivo.

Para Lanin et al. (2011), o processo de generalizar ocorre quando um indivíduo identifica pontos comuns em casos diferentes ou quando estende o raciocínio além do domínio em que foi generalizado. De uma forma consistente, para Jeannotte e Kieran (2017), generalizar consiste em inferir afirmações sobre um conjunto de objetos, ou uma relação sobre esses objetos, a partir da análise de um subconjunto desses objetos. As autoras consideram ainda o processo de exemplificar como apoio aos outros processos de raciocínio matemático, nomeadamente ao processo de generalizar.

É fundamental desenvolver o processo de generalizar desde o início da escolaridade, enfatizando a construção de significados e a compreensão (Cusi & Malara, 2007; Kaput, 1999). Este processo tem o potencial de contribuir para o aprofundamento da compreensão da Matemática. Para Warren e Cooper (2007), a descrição de uma dada regularidade através da linguagem natural é de grande importância para os alunos conseguirem, depois, exprimir a generalização através de notação simbólica.

O estudo de Ponte e Branco (2013), com futuros professores dos primeiros anos, aponta para a necessidade de a formação inicial promover a produção de generalizações, bem como a compreensão do significado de variável e da simbologia algébrica. Contudo, além de desenvolverem a sua própria capacidade de generalizar, Melhuish et al. (2020) referem que se

desejamos que os professores promovam a capacidade de generalizar dos seus alunos, devemos proporcionar oportunidades para analisarem evidências desses processos durante a sua formação.

Metodologia

O presente estudo seguiu uma abordagem qualitativa-interpretativa (Patton, 2002; Quivy & Campenhoudt, 2008.), incidindo nos processos e nos significados dos participantes, futuros professores. Foi desenvolvido no contexto de uma experiência de formação, correspondendo ao 1.º ciclo da Investigação Baseada em Design (Cobb et al., 2003), e conduzida pela primeira autora, com futuros professores, estudantes do Mestrado em Ensino do 1.º CEB e de Matemática e Ciências Naturais no 2.º CEB, na Unidade Curricular de Didática da Matemática no 1.º e no 2.º CEB. Estes futuros professores (num total de 31) constituíam a turma do 1.º ano desse mestrado, numa das instituições do Projeto.

A experiência, realizada no início do funcionamento da Unidade Curricular, contemplou seis aulas – uma por semana com a duração de 2h 30 min. Nestas aulas, foram exploradas e discutidas tarefas de formação que se propunham desenvolver nos futuros professores o conhecimento das práticas de ensino promotoras do desenvolvimento do raciocínio nos alunos. Todas as tarefas foram inicialmente exploradas autonomamente pelos futuros professores, organizados em oito grupos, sendo posteriormente discutidas pelo coletivo da turma.

Este artigo contempla a tarefa *Chupa-chupas*¹, a segunda tarefa proposta na experiência de formação, incidindo na parte inicial (Figura 1), a qual visou o primeiro contacto com processos de raciocínio ilustrados em resoluções de alunos do 1.º CEB. A disponibilização da tarefa aos futuros professores foi feita em duas partes. Primeiro, foi distribuída a tarefa proposta a alunos do 1.º CEB (item 1) e só depois a tarefa integral, incluindo a tabela com resoluções de alunos do 1.º CEB.

1. Tarefa adaptada da tarefa “Lots of Lollies”, disponível em: <https://nrich.maths.org/2360>

Considere a seguinte tarefa.

André e Rute receberam um saco de chupa-chupas. Partilharam os chupa-chupas entre si e sobrou 1. Tinham acabado de fazer esta partilha quando chegaram os seus amigos, Ana, Rui e António que também queriam chupa-chupas. Decidiram então partilhá-los novamente e sobraram 2 chupa-chupas. Quantos chupa-chupas podiam estar no saco?

1. Resolva a tarefa.

2. Analise as resoluções de alguns alunos e os processos de raciocínio associados a essa resolução.

Resoluções	Processos de raciocínio
Maria: Podem estar 7 rebuçados.	Exemplificar: Maria dá um exemplo.
António: Podem estar 7, 17 e 27. Podem estar todos os ímpares	Exemplificar: António dá três exemplos. Generalizar: António identifica aspetos comuns em casos diferentes e estende o raciocínio para todos os números ímpares.
Miguel: Podem estar 7, 17 e 27. Podem estar todos os números que terminam em 7.	Exemplificar: Miguel dá três exemplos. Generalizar: Miguel identifica aspetos comuns em casos diferentes e estende o raciocínio para todos os números terminados em 7.
Manuela: Não podem ser os números pares pois não sobra 1 quando são partilhados por 2. Não podem ser todos os ímpares porque, por exemplo, o 15 não dá pois não sobram 2.	Generalizar: Manuela identifica aspetos comuns em casos diferentes e estende o raciocínio além do domínio em que foi generalizado. Justificar: Manuela apresenta um argumento lógico baseado em ideias matemáticas e recorre a um contraexemplo para refutar uma afirmação.
José: Não podem ser pares porque sobra 1. Não pode ser 5 porque não sobram 2. Pode ser 7 porque sobra 1 e 2.	Justificar: José apresenta um argumento lógico baseado em ideias matemáticas. Exemplificar: José dá um exemplo.
Catarina: Podem ser ímpares. Dos ímpares não podem ser os que terminam em 1, 3 e 5. Só os que terminam em 7.	Generalizar: Catarina identifica aspetos comuns em casos diferentes e estende o raciocínio para todos os números ímpares terminados em 7.

Identifique os processos de raciocínio que usou na sua resolução e compare-os com os usados por estes alunos.

Figura 1. Parte inicial da tarefa *Chupa-chupas*.

Foram selecionados, para serem objeto de gravação do seu trabalho autónomo, dois dos grupos de futuros professores (Grupos 1 e 2), tendo em conta a forma como interagiram durante o trabalho autónomo e a sua participação ativa na discussão coletiva. A recolha de dados foi realizada através da observação das aulas recorrendo à gravação áudio e vídeo, com posterior transcrição, e à observação participante de elementos da equipa do projeto. Os documentos produzidos pelos futuros professores, durante a resolução das tarefas, foram também recolhidos. Todos os futuros professores assinaram o termo de consentimento livre e esclarecido, relativamente aos métodos de recolha de dados, e são tratados por nomes fictícios, respeitando o critério ético de confidencialidade.

No âmbito deste artigo, foram analisadas, através de análise de conteúdo (Bardin, 2010) as produções dos oito grupos, bem como as discussões ocorridas no seio dos grupos 1 e 2. Além das resoluções dos itens 1 e

2, apresentamos situações de discussão do item 2 no Grupo 2, pois foi apenas neste Grupo que se verificou uma discussão centrada no processo de generalizar.

Resultados

Exploração autónoma da tarefa

Os estudantes, futuros professores, começaram por realizar o item 1 da tarefa, em grupo, usando os seus próprios procedimentos, já que não foi solicitado que pensassem em estratégias de resolução próprias de alunos do 1.º CEB. Todos os grupos resolveram corretamente o item, sendo que, dos oito grupos, cinco usaram notação algébrica, registando o seu significado. Os Grupos 3, 4 e 6 resolveram a tarefa, estabelecendo, primeiro, o número mínimo e, em seguida, generalizaram, usando a linguagem natural. Passamos a apresentar o registo final da resolução do Grupo 4 (Figura 2).

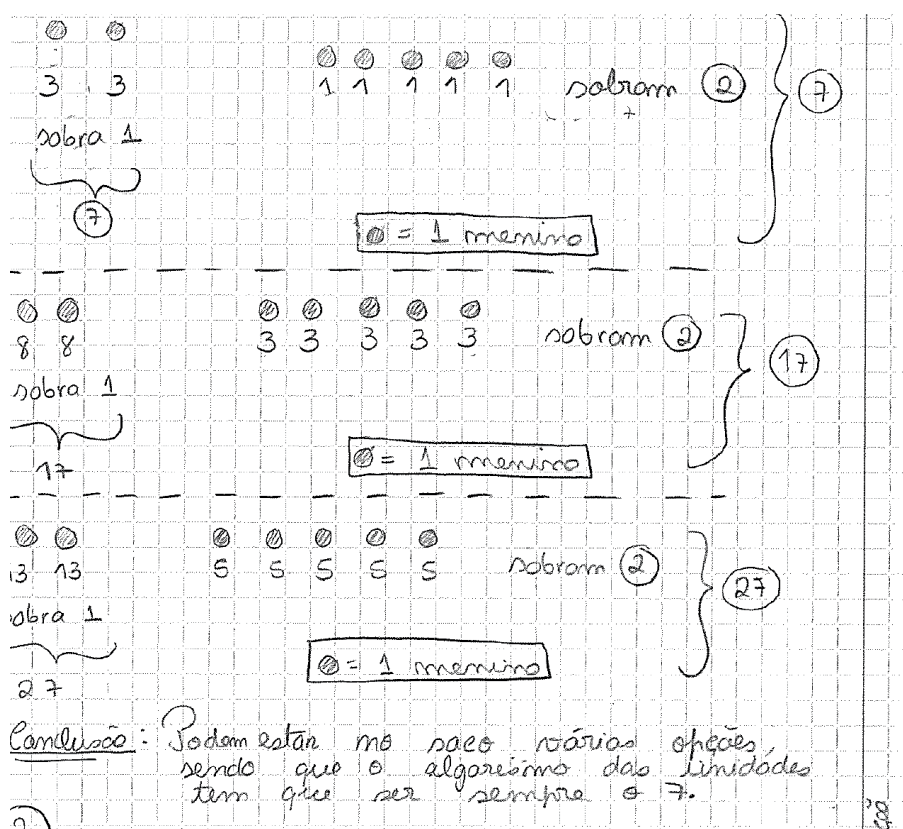


Figura 2. Resolução do Grupo 4 do item 1.

Este grupo usou representações icónicas na modelação da situação proposta, concretizando quantos chupa-chupas receberia cada menino nas primeiras três possibilidades, partindo do 7 como número mínimo. Esta resolução parece evidenciar o processo de exemplificar como tendo sido importante para os futuros professores conseguirem formular uma generalização, verificando, primeiro, uma propriedade comum a essas três possibilidades e estendendo, em seguida, essa propriedade à infinidade dos números ("sempre") embora não a expressem ("Podem

estar no saco várias opções”). Atendendo ao item 2, este grupo clarifica o seu processo de resolução. Referem que “numa primeira fase, consideramos que podiam estar 7 *chupa-chupas* no saco”. Este número respeita simultaneamente as duas condições do problema. Em seguida, atenderam apenas à situação da partilha por 2, conjecturando a primeira generalização: “talvez pudessem ser todos os ímpares”. Entretanto, verificaram alguns exemplos de números ímpares que não respeitavam a segunda situação da partilha por 5, como sejam o 15, 25 e o 35. Foi depois desta verificação que “começamos a reparar num padrão”, “através dos aspetos comuns que encontramos”: “Para este padrão o sete tem que ser obrigatoriamente o algarismo das unidades”. Assim, o processo de exemplificar fez com que a conjectura inicial, ao invés de ser completamente abandonada, fosse refinada para estabelecer quais os números ímpares que satisfaziam as duas condições do problema. Vejamos a resolução do Grupo 3.

1. Quando os *chupa-chupas* vão ser divididos pelos 2 amigos e sobra 1 *chupa-chupa*, o número total de *chupa-chupas* tem de ser ímpar.
 Quando os *chupa-chupas* vão ser divididos pelos 5 amigos e sobram 2 *chupa-chupas*, o número ~~de~~ de *chupa-chupas* tem de ser 7.
 E os próximos números ^{ímpares} possíveis são 17, 27, 37 - - , ou seja, sempre 10 ao número anterior possível, isto é todos os números terminados em 7. * mínimo

Figura 3. Resolução do Grupo 3 do item 1.

A resolução deste grupo não evidencia o uso de exemplos, para além do número mínimo. Começam por generalizar pensando unicamente na situação da partilha por 2. E, partindo da restrição de números ímpares, estabelecem o número mínimo 7. Em seguida, generalizam atendendo já à simultaneidade das duas condições: “todos os números terminados em 7”.

Quatro dos grupos, Grupos 1, 2, 5, e 7, incluíram expressões algébricas gerais representativas do número de *chupa-chupas*. Como se pode observar, estas resoluções incluíram uma abordagem formal como a determinação do termo geral $10n-3$, $n \geq 1$ (Grupo 1, Figura 4) ou $10n+7$, $n \geq 0$ (Grupo 7, Figura 5).

André e Rute → sobrou 7, ou seja, tem que ser número ímpar (2 amigos)

André, Rute, Ana, Rui e António → sobrou 2, ou seja, múltiplos de 5 + 2 = 7.

Assim, podemos dizer que o número de chupa-chupas que podem estar no saco terá sempre o número 7 nas unidades (7, 17, 27, 37, 47, 57, ...).

Podemos chegar ao termo geral:

$$\begin{array}{cccc} 7 & 17 & 27 & 37 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ +70 & +70 & +70 & \end{array}$$

Termo geral de qualquer sequência: $U_n = an + b$

$$\begin{aligned} U_n &= an + b \\ 7 &= 10 + b \quad (1) \\ 17 &= 20 + b \quad (2) \\ (1) - (2) &= b - b \\ 7 - 17 &= 10 - 20 \\ -10 &= -10 \end{aligned}$$

ou seja, o termo geral é $U_n = 10n - 3$.

Figura 4. Resolução do Grupo 1 do item 1.

Tal como os grupos reportados atrás, o Grupo 1 estabelece duas generalizações, recorrendo à linguagem natural; a de serem números ímpares, atendendo à partilha por dois, e a do 7 no algarismo das unidades, conjugando as duas condições. A partir da observação da sequência com os quatro primeiros termos, e da expressão $un=an+b$, o Grupo 1 parece atribuir a a o significado da razão desta progressão aritmética. Assim, parte do 1.º termo substituindo n por 1, para assim determinar o valor de b , e obter então o termo geral.

1.	André	+ Rute				$x + y + 1$
	André	+ Rui	+ António	+ Ana	+ Rute	$x + y + z + u + v + 2$
1	1	1	1	1	1	$+ 2 = 7$
2	2	2	2	2	2	$+ 2 = 12$
3	3	3	3	3	3	$+ 2 = 17$
5	5	5	5	5	5	$+ 2 = 27$
7	7	7	7	7	7	$+ 2 = 37$
	André	+ Rute				$2n + 1$
	A	+ R	+ An	+ Ana	+ Rute	$(2n + 1) + 2$
						$5n + 2, n = 2n + 1$
						$5(2n + 1) + 2 = 10n + 7$
						Total de chupas no saco, para $n \geq 0$.

Figura 5. Resolução do Grupo 7 do item 1

Tal como o Grupo 4, também o Grupo 7 (Figura 5) começa por exemplificar com números concretos de *chupas* a distribuir. No entanto, concretiza apenas para a situação de partilha pelos 5 amigos, seguindo inicialmente a ordem dos números naturais (1, 2), e após assinalar como excluída a solução 12, por não respeitar a condição da primeira situação, passa a seguir a ordem dos números ímpares (3, 5, 7) até à solução 37. A análise da parte restante do registo escrito permite-nos inferir que o grupo entendeu a impossibilidade de, na segunda situação, dar um número par de *chupa-chupas* a cada uma das crianças. Em seguida, o grupo incide na modelação do problema através de expressões algébricas. Nesta fase, começa por traduzir números ímpares da primeira situação por uma expressão algébrica $(2n+1)$. Na modelação da segunda situação, parece ter presente já a sua conjugação com a primeira situação, ao registar primeiro $(2n+1)+2$, parecendo, assim, assumir que o número total de *chupa-chupas* distribuídos pelos 5 amigos teria que ser ímpar. Seguidamente, regista $5n+2$, assumindo n como número ímpar, e por fim, substitui, nessa expressão, n pela expressão que representa número ímpar, obtendo assim o termo geral, para $n \geq 0$.

O Grupo 2 determinou $5n+2$ (Figura 6), tal como o Grupo 5.

① André e Rute $\rightarrow 2 + 1 = 3$
 André + Rute + Ana + Rui + António $\rightarrow 5 + 2 = 7$
 Teriam de existir pelo menos 7 *chupa-chupas*.
 Generalizando: $5n + 2$, n é ímpares
 P: No saco poderia estar ~~quantas~~ o número de rebuçados resultante da soma de 2 com qualquer múltiplo de 5, em que n é um número ímpar.

Figura 6. Resolução do Grupo 2 do item 1

O Grupo 2, nesta resolução, tal como outros grupos, começa por determinar qual o número mínimo de *chupa-chupas*. Nessa determinação, parece atender às duas situações de forma independente, começando por verificar o número total, para cada situação, se fosse dado um *chupa-chupa* a cada criança. No entanto, atende à conjugação das situações quando estabelece o 7 como número mínimo. Quando determina uma expressão geral simbólica, parece apoiar-se na expressão concretizada para $n=1$, relativa à partilha por 5: $5+2=7$. Assim, inferimos que o grupo generalizou que só seria possível cada criança receber um número ímpar de *chupa-chupas*, ao considerar n como um número ímpar, atribuindo, assim, à variável n , um sentido distinto do usual em matemática. Parece ter seguido um raciocínio análogo ao do Grupo 7, embora não tenha concluído o processo de transformar a expressão numa compatível com o significado matemático de n . Analisando os diálogos ocorridos no seio do Grupo 2, durante a exploração autónoma da tarefa, verificamos que foi no decurso da análise das respostas dos

alunos (item 2) que o grupo se deu conta da impossibilidade de números pares como solução do problema e que a fórmula $5n+2$, registada inicialmente para n designando qualquer número natural, só se aplicaria à segunda situação do problema. Vejamos o respetivo extrato:

Daniela: Há aqui um que diz que não podem ser números pares.

Helena: Sim.

Nuno: Mas nós não dissemos isso, pois não?

Helena: Não.

Lara: Não.

Nuno: Mas ela generalizou?

Daniela: Não generalizou corretamente.

O grupo, ao ler uma resposta não coincidente com a sua resolução da tarefa, considera inicialmente que a resposta de Manuela relativamente aos números pares está incorreta. A análise desta resposta prossegue:

Nuno: Como é que ela diz? Não podem ser os números pares...

Helena: Pois não sobra um.

Nuno: Quando são partilhados por dois. Lá está. Sim, à partida.

Helena: Sim...

Nuno: Com o primeiro exemplo não podem ser pares.

Daniela: Exato.

Ao ler melhor esta resposta, o grupo reconsidera a apreciação inicial de incorreção da resposta de Manuela, concordando que a primeira situação do problema implica que não possam ser números pares. A discussão prossegue, no seio do grupo:

Daniela: Nós pensámos mal. O n tem que pertencer aos números ímpares. Porque tem de ser válido também para o primeiro exemplo. Para o André e para a Rute...

Helena: Ou seja, esta fórmula não pode ser só para o segundo, mas tem de dar também pro [sic] primeiro.

Assim, o grupo mantém a fórmula inicial de $5n+2$, decidindo restringir n aos números ímpares, decorrente de atender agora à conjunção das duas situações do problema. De seguida, debatem o significado de n no contexto do problema.

Lara: O n é o número de rebuçados.

Helena: É.

Nuno: Ahh...

Helena: Não.

Daniela: Não, não, não, não, não. O cinco n mais dois é que é o número de rebuçados.

Lara: A... O n é o número de pessoas? De, de, de crianças que há.

Daniela: Não.

Nuno: Não, não.

Daniela: Não. Cinco é o número de crianças que há.

Nuno: Exato.

Helena: Mais dois é os rebuçados que sobram.

Lara: Ai, então n é o quê?

(...)

Daniela: É uma generalização. O n é um número natural, neste caso tem que ser ímpar.

(...)

Lara: Porque é que o n tem de ser ímpar?

(...)

Daniela: Dá exemplos do n .

Nuno: Imagina, imagina que o n é par cinco vezes dois dez, mais dois, doze. Doze rebuçados. Se eles distribuírem pelos cinco amigos, sobram dois.

Lara: Sim.

Helena: Mas se distribuírem só pelos dois.

Nuno: Mas se distribuíssem pelos dois, só pelo André e a Rute.

Helena: Já não sobra um.

(...)

Daniela: Os rebuçados são os mesmos, percebes? Os *chupa-chupas* são os mesmos. Eles tinham os *chupa-chupas* todos dentro de um saco e dividiram primeiro pelos dois e depois quando chegaram os outros é que eles decidiram pôr outra vez tudo no saco...

(...)

Lara: Ok. Eles têm sempre um saco com os mesmos.

Lara, após considerar que n era o número de *chupa-chupas*, e de ouvir os desacordos dos colegas, interpela-os sobre o significado desta notação, questionando então se seria o número de pessoas pelas quais se distribuíam os *chupa-chupas*. Daniela esclarece-a, assumindo o uso da notação como uma generalização, e atribuindo a n um significado alterado, decorrente da restrição efetuada pelo grupo mediante a conjunção das duas situações do problema. Assim, Daniela começa por referir-se ao sentido usual de n (“O n é um número natural”) para depois se focar no sentido atribuído no contexto (“neste caso tem que ser ímpar”). Foi necessário os colegas fazerem a sugestão de exemplificar o n com valores concretos, e de contextualizar as ações referentes a voltarem a colocar os *chupa-chupas* dentro do saco, sempre que era feita uma nova distribuição por um número diferente de pessoas, para Lara compreender a expressão algébrica em causa (“Ok. Eles têm sempre um saco com os mesmos.”). No entanto, não chegam a referir que n é o número de *chupas* distribuídos a cada amigo, considerando apenas a expressão $5n+2$. Este diálogo é ilustrativo de como o processo de exemplificar apoiou a compreensão de uma generalização produzida antes. É, ainda, de destacar a preocupação de Lara em dar sentido ao trabalho produzido pelo grupo.

Discussão coletiva

Em seguida, os grupos partilharam as suas resoluções. Célia, do Grupo 7, explica como chegou ao termo geral e regista-o no quadro:

Célia: Então nós com esta expressão fizemos, visto que eram cinco amigos, fizemos cinco n , porque o n neste caso representaria o número de rebuçados por cada criança, vezes os cinco, mais os dois que sobravam e este n , sendo um número ímpar fomos substituir

pela expressão geral. Portanto, ficaria cinco vezes dois n mais um $(5(2n+1)+2)$...

Nuno, do Grupo 2, questiona Célia:

Nuno: Eu posso só colocar uma questão à Célia, porque eu percebi que ela tinha dito que o n era o número de rebuçados por pessoa, era isso?

(...)

Célia: Na expressão inicial, no cinco n mais dois o n era o número de rebuçados por cada, cada criança, porque eles multiplicavam o número de rebuçados por cada um mais o dois. No momento em que tu substituis, depois, esse n pelo número de rebuçados pela expressão do número geral, o n deixa de ser um número pertencente a cada aluno, mas sim um número maior ou igual a zero, na expressão toda é que te dá o número possível, dentro do saco, de *chupa-chupas*.

Tal como sucedera no seio do Grupo 2, o interesse pela dimensão semântica das expressões algébricas produzidas, e consequentemente, da compreensão das generalizações, suscitou discussão também no seio da turma. Como referido atrás, o Grupo 7 alcança o termo geral da sequência, partindo de um processo de exemplificar o número concreto de *chupa-chupas* a distribuir pelos cinco amigos. Talvez por isso, o grupo tenha atribuído inicialmente esse significado a n , tal como referido por Célia (“porque o n neste caso representaria o número de rebuçados (...) por cada criança, (...) e este n , sendo um número ímpar, fomos substituir pela expressão geral”). O grupo entende que no momento em que obtém o termo geral, após a substituição de n por $2n+1$, o n já não representa número ímpar nem o número de *chupa-chupas* recebido por cada criança, como inicialmente, embora revele alguma dificuldade em expressar claramente o seu significado, referindo-se aos números naturais ($n \geq 0$) sem indicar o seu significado posicional na sequência das soluções do problema. A discussão prossegue:

Nuno: Então se nós quiséssemos perguntar, se dez n mais sete, e n é? O que é que diríamos?

Célia: Isso foi uma questão também no nosso grupo, gerou aqui uma discussão incrível

(risos)

Daniela: Porque, porque a verdade é que nós quando, quando nós vamos aplicar o problema nós temos que conseguir dizer que o n é qualquer coisa.

(...)

Daniela: Exato, e se nós dissermos que o n é o número de rebuçados, nós não podemos considerar, se nós vamos distribuir os rebuçados, os rebuçados nunca podem ser zero. Porque nós temos rebuçados pra [sic] distribuir.

(...)

Ana: Por exemplo, imagina que te dão o saco tem 37 rebuçã, ahh... *chupa-chupas*, (...) então quanto é que tem cada criança? E nós fomos substituir ahhh... aquela expressão geral e achamos que o

número era, o n era três. Pronto. E depois como é que, qual é que foi a conclusão?

Professora: Agora vamos lá ver, só para distinguir aqui a questão do significado do n , portanto, questão muito pertinente (...). Reparar em que estes termos gerais estão associados a sequências, o nosso n será sempre a ordem. Portanto, o número de rebuçados por saco há de ser o termo. Temos de distinguir o n que é a ordem, dos termos. E o próprio termo, portanto, o número de rebuçados nunca será o n , mas sim o resultado desta sequência, portanto, na sequência vou ter todos os números possíveis a colocar no saco.

Nuno (vai ao quadro): Era só porque se queremos admitir que o n será o número de rebuçados por criança então poderíamos talvez se calhar... (...) A Célia tinha dito no início que o n seria o número de rebuçados por criança e pegando nessa, nessa ideia...

Célia: Do $5n+2$.

Nuno: Sim, sim, pegando até na expressão de cima. Até poderia ficar o cinco n e assim o n ficaria na mesma como sendo o número de rebuçados por criança, mais dois, mas sendo que o n pertence ao conjunto dos números ímpares. E então...

Célia: Sim, sim, (...) exatamente por o n pertencer ao conjunto dos números ímpares é que a gente foi substituir o n pela expressão do número ímpar que era para generalizar. Percebes?

No início deste segmento de discussão, Daniela refuta a ideia de n poder ser o número de *chupa-chupas* recebido por cada criança, em $10n+7$, dizendo que nesse caso, não faria sentido distribuir 0 rebuçados, como acontece no caso do primeiro termo, 7 rebuçados no saco (“se nós dissermos que o n é o número de rebuçados, (...) se nós vamos distribuir os rebuçados, os rebuçados nunca podem ser zero”). Ana, do Grupo 7, ao intervir, incidindo no caso particular de 37 *chupa-chupas* dentro do saco, parece questionar esse significado pois a substituição de n por 3 não é coerente com a distribuição de 7 *chupa-chupas* a cada um dos 5 amigos, como o grupo tinha determinado antes. A professora intervém, clarificando os significados dos números correspondentes às ordens e aos termos de uma sequência (“o nosso n será sempre a ordem. Portanto, o número de rebuçados por saco há de ser o termo”).

A intervenção de Nuno denota a intencionalidade de representar o que pode ser efetivamente distribuído por cada uma das cinco crianças, ao justificar a opção do seu grupo pela expressão $5n+2$, em que n passa a ter o significado específico de qualquer número ímpar (“sendo que o n pertence ao conjunto dos números ímpares”) representando o número de *chupa-chupas* a distribuir por cada um dos cinco amigos.

Considerações finais

Os futuros professores evidenciaram capacidade de generalizar, não se tendo verificado dificuldades, embora as generalizações produzidas revelem diferentes graus de sofisticação. A maioria dos grupos, para além da expressão da generalização em linguagem natural, preocupou-se em exprimi-la com recurso a termos gerais envolvendo notação simbólica. Tal como referem Warren e Cooper (2007), a descrição da regularidade presente em sequências de crescimento em linguagem natural é funda-

mental na sua relação com os sistemas formais de notação simbólica. O processo de exemplificar suportou o processo de generalizar (Jeannot & Kieran, 2017), na medida em que foi a identificação de propriedades comuns aos exemplos correspondentes às primeiras possibilidades, soluções do problema, que conduziu a estender essas propriedades à infinidade das soluções (Lanin et al., 2011).

É de relevar a ênfase na dimensão semântica das diferentes simbologias adotadas, decorrentes dos processos diferenciados na construção dos termos gerais, e a preocupação dos estudantes em dar sentido à representação simbólica na modelação da conjunção das duas situações propostas no problema. Tal como sustentado por diversos autores (Kaput, 1999; Cusi & Malara, 2007), tem de se partir do significado do contexto para chegar à sintaxe algébrica. No âmbito da significação das expressões simbólicas, verificou-se alguma dificuldade na distinção entre a linguagem ordinal e a cardinal. A semântica, enquanto aspecto marcante da discussão entre os futuros professores, sugere uma valorização didática da atribuição de sentido ao trabalho efetuado como um aspecto a que os futuros professores dão uma especial atenção.

Referências bibliográficas

- Bardin, L. (2010). *Análise de conteúdo* (4.ª ed). Edições70.
- Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schaube, L. (2003). Designing experiments in educational research. *Educational Researcher*, 32 (1), 9-13.
- Cusi, A., & Malara, N. A. (2007). Approaching Early Algebra: Teachers' educational processes and classroom experiences. *Quadrante*, 16 (1), 57–80. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22812>.
- Hiebert, J., Morris, A. K., & Glass, B. (2003). Learning to learn to teach: An “experiment” model for teaching and teacher preparation in mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 6 (3), 201-222.
- Jeannot, D., & Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 96 (1), 1-16. doi:10.1007/S10649-017-9761-8.
- Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new Algebra with understanding. *National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science*.
- Lannin, J. K., Elliott, R., & Ellis, A.B. (2011). *Developing essential understanding of mathematical reasoning for teaching mathematics in prekindergarten-grade 8*. NCTM.
- Loong, E. Y-K, Vale, C., Herbert, S. Bragg, L. A., Widjaja, W. (2017). Tracking change in primary teachers' understanding of mathematical reasoning through demonstration lessons. *Mathematics Teacher Education and Development*, 19 (1), 5-29.
- Melhuish, K., Thanheiser, E., & Guyot, L. (2020). Elementary school teachers' noticing of essential mathematical reasoning forms: justification and generalization. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 23 (1), 35-67.
- Ministério da Educação (2018). *Aprendizagens Essenciais*. DGE.
- NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. APM.
- NCTM (2017). *Princípios para a Ação: assegurar a todos o sucesso em Matemática*. APM.

- Oliveira, P. (2008). O raciocínio matemático à luz de uma epistemologia soft. *Educação e Matemática*, 100, 3-9.
- Patton, M. (2002). *Qualitative research & evaluation methods* (3ª ed.). Sage.
- Pólya, G. (1990). *Mathematics and plausible reasoning* (ed. orig. 1954, Vol. 1). Princeton University Press.
- Ponte, J. P., & Branco, N. (2013). Pensamento algébrico na formação inicial de professores. *Educar em Revista*, 50, 135-155.
- Ponte, J. P., Quaresma, M., & Mata-Pereira, J. (2020). Como desenvolver o raciocínio matemático na sala de aula?”. *Educação e Matemática*, 156, 7-11.
- Quivy, R., & Campenhoudt, L. (2008). *Manual de Investigação em Ciências Sociais*. Gradiva
- Silva, A. P. (2009). A problemática da descoberta e da prova. *Educação e Matemática*, 101, 37-41.
- Stylianides, A. J. & Stylianides, G. J. (2006). Content knowledge for mathematics teaching: the case of reasoning and proving. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th PME International Conference* (Vol. 5, pp. 201-208). PME.
- Warren, E., & Cooper, T. (2008). Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 year olds' thinking. *Educational Studies in Mathematics*, 67 (2), 171-185.