



ISEL

INSTITUTO SUPERIOR DE ENGENHARIA DE LISBOA
Área Departamental de Engenharia Mecânica



Testes de Ajuste a Distribuições Estatísticas e Métodos para Estimação dos Parâmetros em Análises de Fiabilidade

Filipe de Salvador Fernandes
(Engenheiro Mecânico)

Trabalho Final de Mestrado para obtenção do grau de Mestre
em Engenharia Mecânica

Orientadores:

Doutor José Augusto da Silva Sobral
Doutora Alda Cristina Jesus Nunes de Carvalho

Júri:

Presidente: Prof. Doutora Maria Teresa Moura e Silva

Vogais:

Prof. Doutora Iola Maria Silvério Pinto
Prof. Doutor José António Rocha Almeida Soares
Prof. Doutor José Augusto da Silva Sobral
Prof. Doutora Alda Cristina Jesus N. de Carvalho

Setembro de 2013

“A arte da previsão consiste em antecipar o que acontecerá e depois explicar o porque não aconteceu.”

Winston Churchill

Agradecimentos

Quero agradecer ao meu pai, a pessoa mais brilhante e ao mesmo tempo mais simples e modesta que conheço. Foste a inspiração e motivação por detrás de cada palavra que escrevi.

Quero agradecer à minha mãe e ao meu irmão por sempre terem estado presentes quando necessitei.

Quero agradecer aos meus orientadores, à Professora Alda que me apoiou neste desafio e a projecta-lo para outros âmbitos. De igual forma, quero agradecer ao Professor Sobral pela sua ajuda a elaborar este documento.

Quero ainda agradecer ao meu colega Carlos Antunes pela sua preciosa ajuda a introduzir Visual Basic na aplicação de Excel.

Apenas tu sabes o quanto custa conciliar a vida laboral com a vida académica e por isso quero agradecer-te especialmente a ti, Susana, pelo apoio diário incondicional, pelo conforto físico e psicológico que nunca deixaste que me faltasse.

Finalmente, quero agradecer-te a ti, Vicente, por seres o meu bebé de Ouro e por teres tido a capacidade de perceber a ausência do pai.

“Todos temos momentos brilhantes e a maioria deles são graças ao estímulo de outra pessoa.”

George Adams

Resumo

O presente trabalho visa mostrar a importância das análises estatísticas para a realização de estudos de fiabilidade. Nesse sentido foram descritos os princípios em que esses estudos se baseiam, apresentadas definições e conceitos relacionados com a fiabilidade, assim como algumas especificidades desta matéria.

Posteriormente foram apresentadas as principais distribuições estatísticas frequentemente usadas em estudos de fiabilidade, sendo descritos alguns métodos para estimação dos seus parâmetros e alguns testes para indicar qual a distribuição que melhor se ajusta a um conjunto de elementos, neste caso representativos dos tempos até à falha de um determinado bem..

Existem diversos programas informáticos, comercializados e utilizados em estudos de fiabilidade, que incluem as potencialidades enumeradas nos parágrafos anteriores. O trabalho agora desenvolvido tem por objectivo mostrar toda a teoria que se encontra por trás dos algoritmos usados nos programas informáticos. Como complemento, foi desenvolvida em Microsoft Excel uma aplicação que automatiza os testes de ajuste a partir de dados amostrais, baseando-se nos modelos teóricos enunciados. Esta aplicação pode ser considerada uma mais valia do presente trabalho, funcionando como um interface de ajuda aos utilizadores aquando de estudos de fiabilidade baseados em análises estatísticas.

Palavras-chave

Fiabilidade, distribuição estatística, estimação de parâmetros, teste de ajuste

Abstract

This document aims to show the relevance of statistical analysis in reliability studies. The principles on which these studies are based were looked into, definitions and concepts related to reliability, as well as some specifics of this matter were presented.

Subsequently were presented the main statistical distributions commonly used in reliability studies, and described some methods for parameter estimation and some tests to indicate which distribution best fits a set of elements, in this case representing the time to failure of a particular good.

There are several computer programs marketed and used in reliability studies, which include the potential listed in the previous paragraphs. The work now developed is intended to show all the theory that lies behind the algorithms used in these computer programs. As a supplement, an application in Microsoft Excel was developed that automates the goodness of fit tests from sample data, based on the theoretical models listed. This application can be considered an asset of this work, functioning as an interface to help users during reliability studies based on statistical analysis.

Keywords

Reliability, statistical distributions, parameter estimation, goodness of fit

Índice

Agradecimentos	II
Resumo	III
Palavras-chave	III
Abstract.....	IV
Keywords.....	IV
Índice	V
Índice de Tabelas	VI
Índice de Figuras	VII
Glossário.....	VIII
1 - Introdução.....	1
2 – Fiabilidade	3
3 – Distribuições Estatísticas em Fiabilidade	14
3.1 - Distribuição Normal	16
3.2 - Distribuição Lognormal.....	21
3.3 - Distribuição Exponencial	24
3.4 - Distribuição de Weibull.....	26
4 – Caracterização da distribuição	31
4.1 - Método dos mínimos quadrados.....	33
4.2 - Método dos momentos	39
4.3 - Método da máxima verosimilhança.....	43
5 – Selecção da distribuição	48
5.1 - Testes de ajuste Qui-Quadrado.....	55
5.2 - Teste de Ajuste Kolmogorov-Smirnov	58
5.3 - Teste de ajuste Anderson-Darling e Cramer-Von Mises.....	61
5.4 - Ordenação	66
6 – Conclusões e trabalhos futuros	72
Referências	74
Definições.....	76
Apêndice.....	78

Índice de Tabelas

Tabela 1 - Amostra de dados do exemplo 1 [2]	7
Tabela 2 - Amostra de dados do exemplo 2 [2].	31
Tabela 3 - Amostra de dados do exemplo 2 ordenada e numerada.	32
Tabela 4 - Ranks Medianos [2][14].....	35
Tabela 5 - Estimadores do método dos mínimos quadrados [2][14].....	38
Tabela 6 - Estimadores do método dos momentos [2] [14].....	42
Tabela 7 - Estimadores do método da máxima verosimilhança [2] [14].....	46
Tabela 8 – Frequência observada, Intervalo considerado e agrupamento de classes do exemplo 2.	53
Tabela 9 - Expressão da frequência esperada para cada distribuição[2].	54
Tabela 10 - Frequência esperada, Intervalo considerado e agrupamento de classes para o exemplo 2.	54
Tabela 11 – Constantes críticas Qui Quadrado [2].....	56
Tabela 12 - Constantes críticas de Anderson-Darling e Cramer-Von Mises [2].....	63
Tabela 13 - Tabela de decisões baseada no método de Neyman-Pearson.....	66
Tabela 14 - Tabela de decisões baseada no método de Neyman-Pearson e no p-value.	67
Tabela 15 – Amostra de dados do exemplo 3 [2].....	67
Tabela 16 - Tabela de decisão baseada no p-value para o exemplo 3.....	68

Índice de Figuras

Figura 1 - Exemplo de uma curva da banheira.....	5
Figura 2 - Histograma do exemplo 1.....	8
Figura 3 - <i>Output</i> do Geogebra da amostra do exemplo 1.....	8
Figura 4 - Boxplot dos dados da amostra do exemplo 1.....	9
Figura 5 – Fdp de uma distribuição exponencial.....	10
Figura 6 - fda da distribuição exponencial anterior.....	11
Figura 7 – Curva da fiabilidade do modelo anterior.....	12
Figura 8 - Obtenção da fiabilidade de um bem.....	13
Figura 9 - Distribuição normal com $t = 2$ variando σ	17
Figura 10 – Fiabilidade provinda da distribuição normal com $t = 2$ variando σ	17
Figura 11 - Distribuição normal com $\sigma = 0.5$ variando t	18
Figura 12 - Fiabilidade provinda da distribuição normal com $\sigma = 0,5$ variando t	18
Figura 13 - Distribuição normal padronizada.....	19
Figura 14 - Distribuição lognormal com $t' = 1$ variando σ	22
Figura 15 - Fiabilidade provinda da distribuição lognormal com $t' = 1$ variando σ	22
Figura 16 - Distribuição lognormal com $\sigma = 2$ variando t	23
Figura 17 - Fiabilidade provinda da distribuição lognormal com $\sigma' = 2$ variando t'	23
Figura 18 - Distribuição exponencial variando λ	25
Figura 19 - Fiabilidade provinda da distribuição exponencial variando λ	25
Figura 20 - Distribuição de Weibull de três parâmetros com $\eta = 1, \gamma = 1$ variando β	27
Figura 21 - Fiabilidade provinda da distribuição de Weibull com $\eta = 1, \gamma = 1$ variando β	27
Figura 22 - Distribuição de Weibull de três parâmetros com $\eta = 1, \beta = 2$ variando γ	28
Figura 23 - Fiabilidade provinda da distribuição de Weibull com $\eta = 1, \beta = 2$ variando γ	28
Figura 24 - Distribuição de Weibull de três parâmetros com $\gamma = 1, \gamma\beta = 2$ variando η	29
Figura 25 - Fiabilidade provinda da distribuição de Weibull com $\gamma = 1, \gamma\beta = 2$ variando η	29
Figura 26 - Regressão linear em y.....	33
Figura 27 - Curva normal com parâmetros estimados pelo mmq do exemplo 2.....	37
Figura 28 - Curva normal com parâmetros estimados pelo método dos momentos do exemplo 2.....	41
Figura 29 - Curva normal com parâmetros estimados pelo mmv.....	45
Figura 30 - Histograma de dados agrupados.....	48
Figura 31 – Exemplo de uma boa adequação da função aos dados.....	49
Figura 32 – Exemplo de uma má adequação da função aos dados.....	49
Figura 33 - Histograma comparativo das frequências estudadas.....	54
Figura 34 - Teste de Qui Quadrado na aplicação de Excel.....	57
Figura 35 - Distâncias de KS para o exemplo 2.....	59
Figura 36 - Teste de Kolmogorov Smirnov na aplicação de Excel.....	60
Figura 37 - Testes de Anderson-Darling e Cramer Von-Mises na aplicação de Excel.....	64
Figura 38 - Folha de entrada da aplicação de Excel.....	65
Figura 39 - Resultados da aplicação de Excel para o exemplo 3.....	68
Figura 40 – Adequação da distribuição aos dados do exemplo 3.....	69
Figura 41 - Fda de falha do exemplo 3.....	69
Figura 42 - Curva da fiabilidade representativa da amostra do exemplo 3.....	70
Figura 43 - Interpretação da fiabilidade do exemplo anterior.....	70
Figura 44 - <i>Workflow</i> da dissertação.....	72

Glossário

A_N^2 - Valor observado no teste de ajuste Anderson-Cramer

A_{Cr}^{2*} - Valor crítico no teste de ajuste Anderson-Cramer

α - Nível de significância para os testes de ajuste

β - Parâmetro de forma da distribuição de Weibull

D_{Cr} - Valor crítico no teste de ajuste Kolmogorov-Smirnov

D_{Max} - Valor observado no teste de ajuste Kolmogorov-Smirnov

ε - Escala mínima de leitura

γ - Parâmetro de localização da distribuição de Weibull

$\Gamma(x)$ - Função Gamma obtida para um determinado valor de x

λ - Taxa de avarias

m - Tempo médio entre falhas

n - Dimensão da amostra ou número de testes realizados

N - Dimensão da população

η - Parâmetro de escala da distribuição de Weibull

r - Amplitude da amostra

σ - Desvio padrão

σ' - Desvio padrão do logaritmo natural do tempo até à falha

$\hat{\sigma}$ - Desvio padrão estimado do tempo até à falha

t - Tempo até à falha na amostra

T - Tempo até à falha na população

t' - Logaritmo natural do tempo até à falha

\hat{t} - Média aritmética estimada do tempo até à falha

\bar{t} - Média aritmética do tempo até à falha

\bar{t}' - Logaritmo natural da média do tempo até à falha

w - Amplitude de classe

W_N^2 - Valor observado no teste de ajuste Cramer-Von Mises

W_{Cr}^{2*} - Valor crítico no teste de ajuste Cramer-Von Mises

χ_0^2 - Valor observado no teste de ajuste Qui-Quadrado

χ_{Cr}^2 - Valor crítico no teste de ajuste Qui-Quadrado

1 - Introdução

O presente trabalho visa abordar o tema da fiabilidade, mostrando a importância das análises estatísticas para o alcançar dos objectivos delineados nesses estudos.

Através de exemplos, será ilustrado o caminho a percorrer para estimar a fiabilidade de um bem. Começar-se-á por contextualizar a fiabilidade e afluente a sua evolução. Tendo em conta que a fiabilidade de um bem é uma probabilidade a um dado instante e esta probabilidade varia consoante o tempo de utilização, esta será caracterizada por uma função. Para chegar a esta função há que perceber qual a distribuição estatística subjacente aos elementos disponíveis (dados de tempo até à falha). Com base na sua função densidade de probabilidade e na sua integração matemática será possível chegar à função fiabilidade desejada. Para tal, serão apresentadas numa primeira fase as distribuições e as expressões matemáticas que as caracterizam. Numa segunda fase propõe-se validar quais as distribuições estatísticas viáveis para descrever o comportamento desejável através de testes de ajuste. Posteriormente será determinado qual delas melhor descreve o modelo requerido. Finalmente, escolhida a distribuição estatística, obter-se-á a fiabilidade propriamente dita do bem.

No segundo capítulo desta tese será apresentado o conceito de fiabilidade, começando por fornecer a sua definição e explicando o seu objectivo.

No terceiro capítulo, serão abordadas as distribuições estatísticas mais utilizadas em análise de fiabilidade que segundo Edimu et al. [1] são as seguintes: distribuição normal, lognormal, exponencial, e Weibull. As distribuições serão brevemente introduzidas com ênfase nos seus parâmetros (neste documento, a palavra parâmetros vai se referir às constantes presentes nas equações das distribuições estatísticas) e na forma que podem assumir graficamente.

A estimação de parâmetros das distribuições vai ser alvo de análise no quarto capítulo com alguns dos métodos mais utilizados. Vão ser abordados os métodos sugeridos por Kececioglu, Dimitri [2], ou seja, o método dos mínimos quadrados, o método dos momentos e finalmente o método da máxima verosimilhança.

No quinto capítulo, vão ser apresentados os testes de ajuste que vão constar na aplicação de Excel. Vão ser abordados os testes de ajuste Qui Quadrado, de Kolmogorov-Smirnov, de Anderson-Darling e de Cramer-Von Mises que segundo Abd-El Fattah, A. M. (2010) [3] são os mais relevantes. Estes dois últimos serão analisados em paralelo visto apresentarem semelhanças. Ainda no quinto capítulo irá ser analisada a forma de ordenar as distribuições para que seja possível distinguir (das que não foram rejeitadas nos testes de ajuste) a que melhor nos servirá.

Acompanhando a abordagem teórica, vai ser estudado um caso com a ajuda da aplicação de Excel, demonstrando o seu funcionamento.

2 – Fiabilidade

Desde sempre existiu a necessidade de tentar adivinhar o futuro, quer fosse através dos ventos, dos pássaros ou movimento das árvores. Esta necessidade prendeu-se sempre com a vontade de tentar antecipar acontecimentos, quase sempre conotados negativamente, para que se pudesse evitar as suas consequências.

Assim, nesse sentido foram desenvolvidas ao longo do tempo várias metodologias e ferramentas, tentando-se diminuir a incerteza associada a cada processo ou estudo efectuado.

Normalmente a grande dificuldade no campo da engenharia da fiabilidade é partir de um conjunto de tempos até à falha de um dado bem ou conjunto de bens semelhantes, recolhidos em ambiente laboratorial ou industrial e, com base nesses elementos, saber qual o comportamento desse bem (ou conjunto de bens semelhantes) ao longo do tempo, nomeadamente a sua probabilidade de falha ou de sucesso.

Esta probabilidade de sucesso é que normalmente se designa por Fiabilidade, sendo complementar da probabilidade de falha (acumulada).

A definição que mais se encontra na literatura dedicada a este tema e que Davis [4] da Ford Motor Company subscreve é: *A fiabilidade é a probabilidade de um sistema se encontrar no seu correto funcionamento num determinado período temporal sob conhecidas condições de operação*. Talvez se possa complementar esta definição referida por Davis substituindo “sistema” por “bem” ou, de acordo com recentes desenvolvimentos nesta matéria, por “activo físico”. Segundo a Norma NP EN 13306:2007 entende-se por fiabilidade a *aptidão de um bem para cumprir uma função requerida sob determinadas condições, durante um dado intervalo de tempo*. Mais concretamente, em Engenharia, a fiabilidade define-se por uma probabilidade (de sucesso).

Fazendo uma analogia ao ser humano, é de senso comum que a partir de determinada idade é necessário que sejam realizados certos exames médicos e análises clínicas a fim de verificar qual o presente estado de saúde do mesmo e assim tentar antecipar alguns acontecimentos indesejáveis. Esta prevenção não é feita ao acaso, determinou-se em tempos que a probabilidade de determinada doença se manifestar a partir daquela idade era superior a um valor crítico e daí então ser aconselhado um rastreio.

O conceito de fiabilidade data dos anos 1800 onde apareceu pela primeira vez. A revolução social, cultural e tecnológica que ocorreu impulsionou a necessidade da existência de uma estrutura racional e de um tratamento quantitativo da fiabilidade de bens, culminando com a criação de engenharia de fiabilidade como disciplina científica [5].

Os estudos relativos à fiabilidade de bens têm vindo a tornar-se ao longo dos últimos anos uma área bastante importante e aliciante no ambiente industrial pois permite que as organizações comecem a possuir um conhecimento mais profundo acerca da probabilidade de falha dos seus activos físicos que representam o conjunto de bens que formam o seu património. O termo “avaria” está definido pela Norma NP EN 13306:2007 como: *avaria é a manifestação da inaptidão de um dado item realizar um determinado padrão de desempenho previamente especificado*. Para as empresas, o conhecimento desta probabilidade poderá suportar tomadas de decisão visando obter reduções de custos e aumento da disponibilidade de bens. Devido a este facto, em grande parte da indústria é comum a existência de um Departamento de Manutenção cuja base para a tomada de decisões assenta em estudos e análises de fiabilidade.

Idhammar [6] aponta os principais entraves da manutenção nas empresas e neste âmbito, verifica que o grande valor de uma empresa é atribuído aos lucros directos, sendo ignorado o que se poderia ter lucrado caso tivesse sido implementado um sistema de manutenção adequado. Para tal, é necessário que o responsável da manutenção apresente um conjunto de argumentos fortes à gestão de topo, convencendo estes elementos da redução de custos que daí advirá. A correta quantificação dos custos é em grande parte conseguida através de estudos de fiabilidade dos bens, tendo repercussões em termos da quantidade de falhas, custos, diminuição do risco, aumento da disponibilidade dos equipamentos, etc. Grande parte destas análises de fiabilidade tem como base de partida os tempos até à avaria registados no passado, aplicando aos mesmos métodos de análise estatística para conhecer o comportamento presente e futuro dos respectivos bens.

Isto leva ao maior constrangimento que a análise de fiabilidade enfrenta, ou seja, a inexistência de dados fidedignos relativos às falhas ocorridas (também chamado de histórico) sendo que também se verifica que existe uma deficiente aplicação de ajuste aos dados a distribuições estatísticas, assim como uma deficiente determinação dos seus parâmetros.

Quando se realizam análises de fiabilidades aos bens em serviço pretende-se prever quando um determinado modo de falha poderá ocorrer. Pretende-se saber qual a probabilidade de sucesso (fiabilidade) ou de falha associada a uma determinada idade ou tempo de funcionamento. A maior

parte dos componentes reparáveis (bem) ou sistemas (vários bens formando um conjunto para o desempenho de uma função) seguem a Curva da Banheira. O comportamento desta curva é o seguinte; numa primeira fase, a taxa de avaria (que exprime o número de avarias por unidade de tempo) é elevada no início de vida dos componentes ou sistemas (mortalidade infantil) devido maioritariamente a defeitos de fabrico, montagem deficiente, etc. Esta curva decresce e estabiliza logo de seguida no período de utilização normal (vida útil) e volta a aumentar no seu fim de vida (desgaste ou envelhecimento) devido aos efeitos da idade e tempo de funcionamento.

A curva da banheira pode ser apresentada em diversos formatos, tendo em conta o tipo de bens em estudo. A Figura 1 mostra a curva da banheira típica, onde as três fases anteriormente referidas se encontram representadas. Segundo Edimu et al. [1] podem ser analisadas distribuições estatísticas para modelar cada uma destas fases.

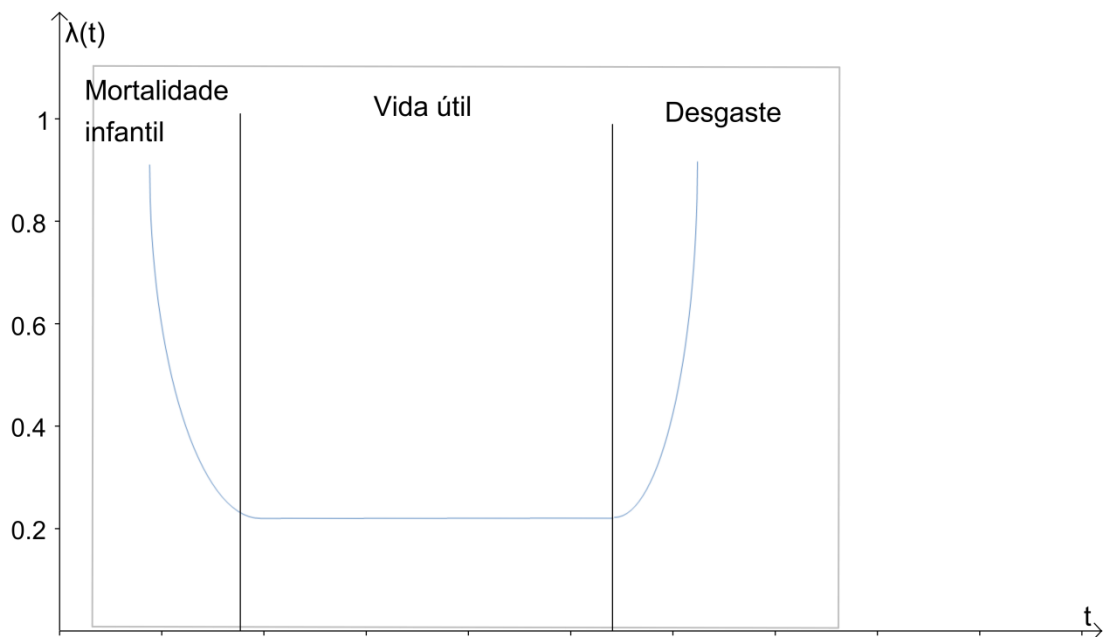


Figura 1 - Exemplo de uma curva da banheira.

Na vasta bibliografia existente sobre a matéria é comum encontrar algumas variantes à curva da banheira tradicional mostrada na Figura 1, sendo normalmente efectuada uma tipificação de acordo com o bem em estudo (electrónico, mecânico, etc...). Naturalmente que essa tipificação é baseada em estudos e testes efectuados, devidamente provados e validados.

O início deste estudo passa obrigatoriamente pela recolha de dados. É necessário extrair de uma população N (conjunto total de bens) uma amostra n que irá toda ser testada até à falha. Por exemplo, se um construtor de rolamentos pretender determinar a fiabilidade de um determinado tipo de rolamento que comercializa, deverá possuir um mecanismo que simule o funcionamento para o qual o rolamento está destinado (velocidade, cargas aplicadas, etc.). De seguida, do seu volume total de produção N , deverá retirar aleatoriamente uma amostra n de rolamentos que irá submeter a estes testes. Deverá levar toda a sua amostra até à falha e registar o tempo que os rolamentos levaram até à sua avaria (t_i), neste caso, em horas. Este levantamento de dados é fundamental e será a base de partida para a obtenção da fiabilidade.

Como este é um contexto não determinístico, ou seja, não se sabe qual o tempo de vida dos componentes, são utilizadas variáveis aleatórias visto que para todo o evento aleatório, é possível associar uma ou mais variáveis ditas variáveis aleatórias. A variável aleatória irá tomar os valores do período até que um bem apresente uma falha cuja unidade poderá ser horas, minutos, segundos, dias, ciclos, revoluções, etc. Para cada variável aleatória (ou conjunto de variáveis aleatórias) é possível encontrar uma função que descreva a distribuição de probabilidades para a referida variável (ou conjunto de variáveis), dita função densidade de probabilidade [7]. Esta função densidade, fdp ou pdf (*probability density function*) é uma função não negativa que representa a distribuição de probabilidade da variável aleatória contínua. Normalmente esta é representada em minúsculas por $f(t)$ [2].

Posteriormente, é necessário obter a função distribuição acumulada (também denominada de função distribuição, fda ou cdf - *cumulative distribution function*). É a função que devolve a probabilidade de uma variável aleatória ser inferior ou igual à variável independente ou vi (incógnita x de uma função $y = f(x)$) de uma função [2].

Apresenta-se de seguida um exemplo retirado da bibliografia de Kececioglu [2] que tem como objectivo mostrar todo o percurso necessário para chegar à fiabilidade de um bem, a partir de um conjunto de dados.

A variável aleatória em análise é T = tempo, em horas, de funcionamento sem falha de um determinado bem.

Neste exemplo foram recolhidas $n = 49$ observações, que se encontram na tabela seguinte:

Tabela 1 - Amostra de dados do exemplo 1 [2]

Identificação da falha	Tempo até à falha (horas)	Identificação da falha	Tempo até à falha (horas)	Identificação da falha	Tempo até à falha (horas)
1	1,2	18	49,3	35	150,6
2	1,5	19	53,2	36	151,6
3	2,8	20	55,6	37	152,6
4	4,9	21	62,7	38	164,2
5	6,8	22	72,4	39	166,8
6	7	23	73,6	40	178,6
7	12,1	24	76,8	41	185,21
8	13,7	25	83,8	42	187,1
9	15,1	26	95,1	43	203
10	15,2	27	97,9	44	204,3
11	23,9	28	99,6	45	229,5
12	24,3	29	102,8	46	233,1
13	25,1	30	108,5	47	254,1
14	35,8	31	128,7	48	291,7
15	38,9	32	133,6	49	304,4
16	47,9	33	144,1		
17	48,9	34	147,6		

Perante um conjunto de observações t_i , um primeiro passo consiste em fazer uma análise preliminar dos dados. Usualmente, este tipo de estudo é apoiado fortemente por uma componente computacional, que vai desde as representações gráficas ao cálculo de medidas descritivas. Uma vez que se pretende chegar à expressão da fiabilidade, e esta é determinada a partir de um modelo de probabilidade, gráficos como histogramas ou caule e folhas mostram como é a distribuição dos dados amostrais. O histograma não representa os valores t_i *per si* mas sim a quantidade de vezes que eles constam no intervalo representado (frequência acumulada). Cada barra do histograma representa a frequência acumulada dividida pelo tamanho da amostra n (frequência relativa).

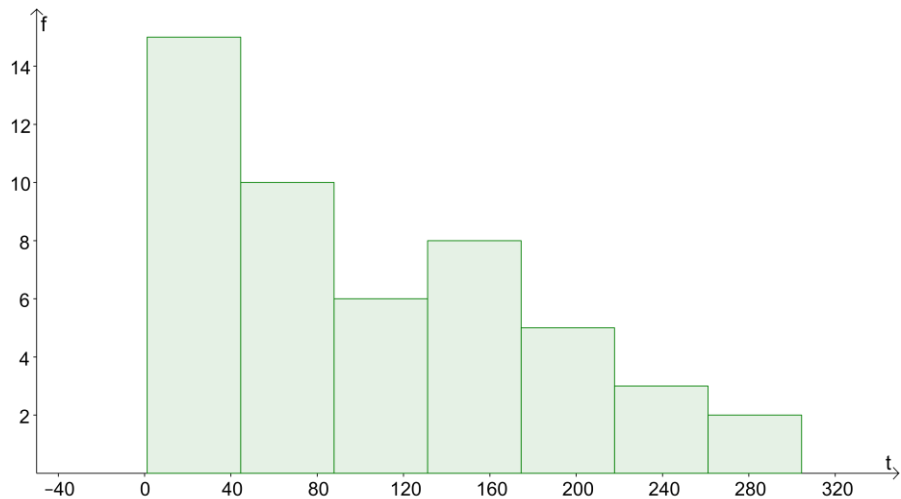


Figura 2 - Histograma do exemplo 1

O resumo das estatísticas amostrais é também importante quando se faz uma análise preliminar de dados. Através das medidas de localização como a média e quartis, é possível ter uma ideia sobre a distribuição dos dados; através de medidas de dispersão como o desvio padrão ou amplitude interquartil. Usualmente este *output* está disponível na maioria dos programas informáticos do tema.

n	49
Média	101.3716
σ	81.7644
s	82.6118
Σx	4967.21
Σx^2	831119.8641
Min	1.2
Q1	24.7
Mediana	83.8
Q3	158.4
Max	304.4

Figura 3 - Output do Geogebra da amostra do exemplo 1

Uma vez calculados os extremos e quartis de uma amostra, é possível representar graficamente a amostra no diagrama de extremos e quartis ou boxplot. Através do boxplot, é possível identificar e classificar *outliers* (valores que se destacam da tendência da amostra). Esta identificação é extremamente importante pois muitas vezes trata-se de erros e a sua permanência na amostra pode levar à rejeição de um modelo de probabilidade adequado.

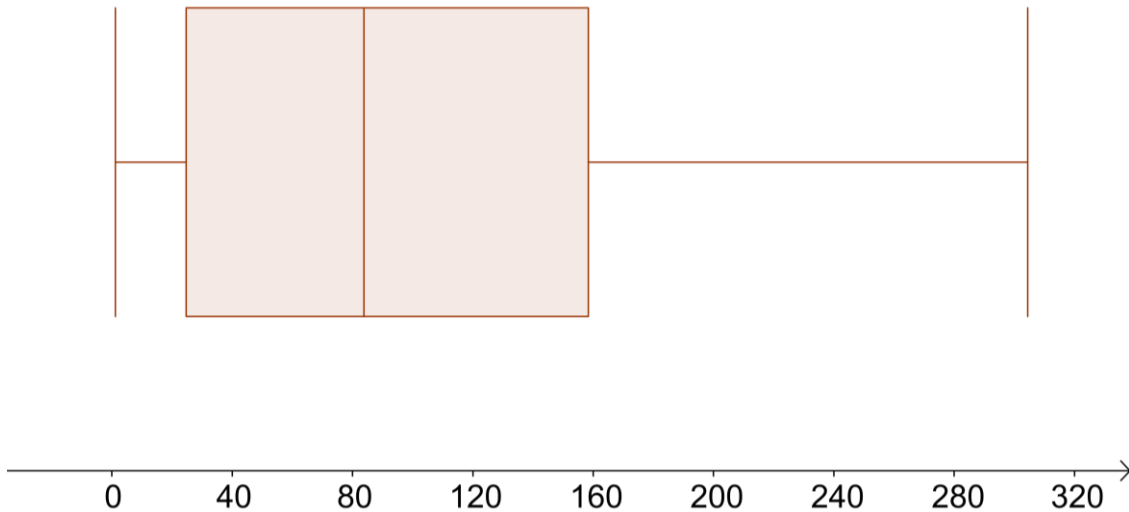


Figura 4 - Boxplot dos dados da amostra do exemplo 1

Após a análise dos gráficos, pode ver-se há uma tendência de decaimento na frequência á medida que o tempo de funcionamento aumenta, sugerindo uma distribuição exponencial. Este modelo será apresentado de forma mais detalhada no capítulo 3, neste momento servirá como exemplo para a obtenção da fiabilidade de um bem.

Apresenta-se então a expressão da fdp da distribuição exponencial:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, t > 0 \quad (2.1)$$

Verifica-se na Figura 5 a representação gráfica da função distribuição de probabilidade de falha de uma distribuição exponencial:

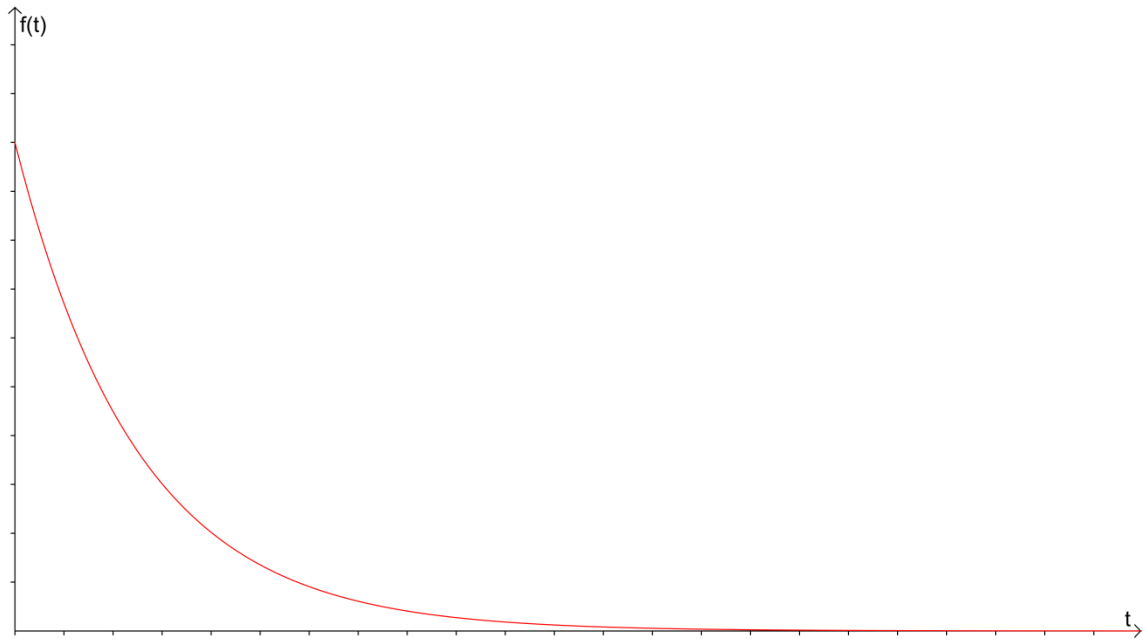


Figura 5 – Fdp de uma distribuição exponencial.

A expressão da função distribuição acumulada obtém-se integrando a função densidade de probabilidade da distribuição escolhida:

$$F(t) = \int_0^t f(t)dt = \int_0^t \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda t}, t > 0 \quad (2.2)$$

A representação gráfica da função distribuição acumulada pode ser verificada na Figura 6 e é interessante referir que a assíntota em $F(t) = 1$ representa no eixo das ordenadas representa o máximo que a função de probabilidade poderá atingir (1 ou 100%):

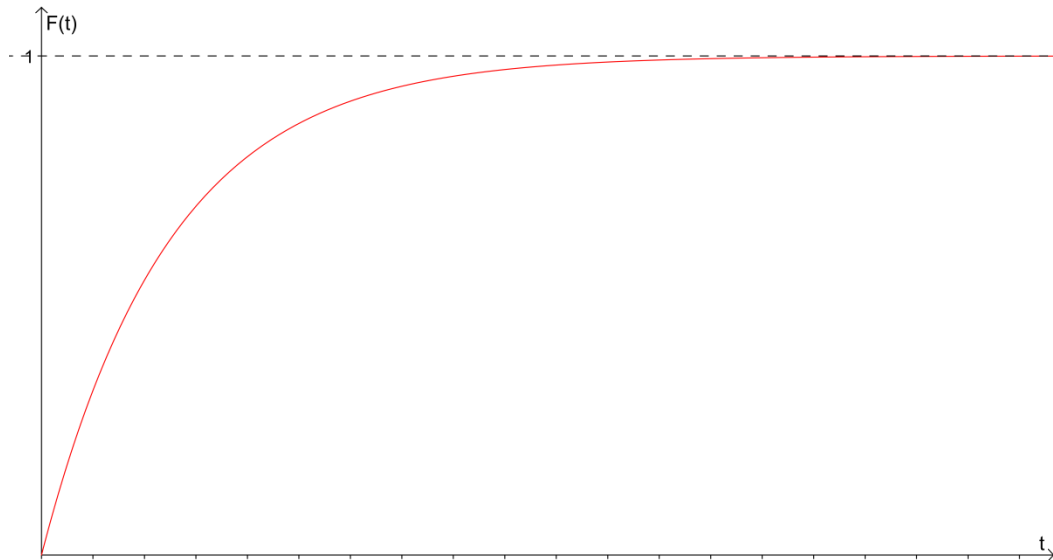


Figura 6 - fda da distribuição exponencial anterior.

Através desta função distribuição acumulada é possível prever a falha de um determinado activo físico ou sistema, ou seja, já existe informação para quantificar a probabilidade de falha num determinado instante temporal.

Usualmente, este não é o resultado requerido, ou seja, é mais interessante saber a fiabilidade ou a probabilidade de sucesso a um dado instante portanto, tendo em conta que estas duas funções são complementares, pode-se aplicar a relação seguinte:

$$R(t) = 1 - F(t) \quad (2.3)$$

Ou ainda para a distribuição exponencial,

$$R(t) = 1 - \int_0^t f(t)dt = \int_t^{\infty} f(t)dt = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t} \quad (2.4)$$

Esta relação de complementaridade pode ser observada na Figura 7:

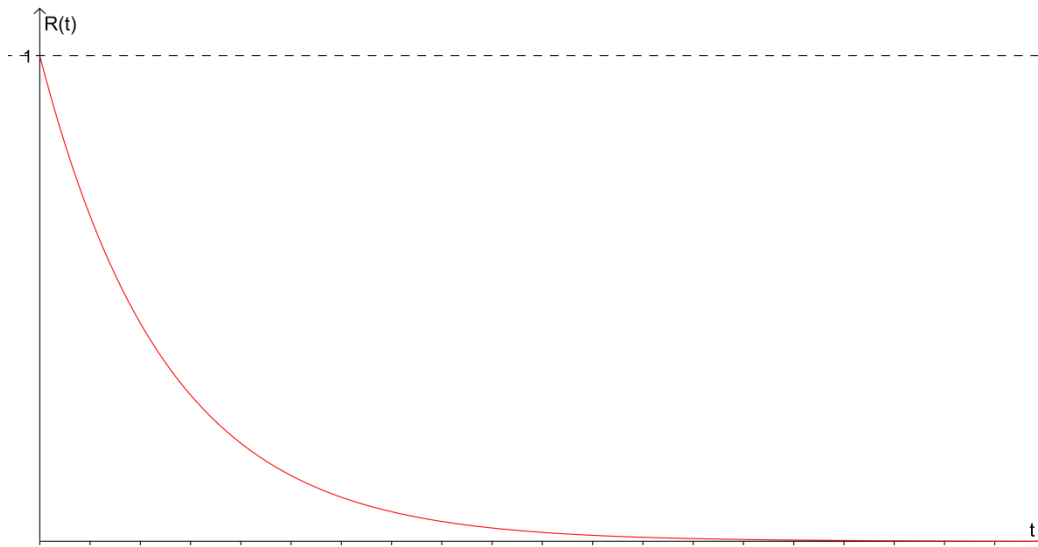


Figura 7 – Curva da fiabilidade do modelo anterior.

Com uma leitura directa da Figura 7 obtém-se a fiabilidade de um bem num determinado instante. Para o efeito, basta escolher o tempo pretendido no eixo das abcissas, verificar o ponto correspondente da curva da fiabilidade e determinar qual a sua ordenada.

Este processo encontra-se exemplificado na Figura 8; é escolhido o valor temporal em A, e através da intersecção com a curva representativa da evolução da fiabilidade em B, obtém-se o valor de fiabilidade em C.

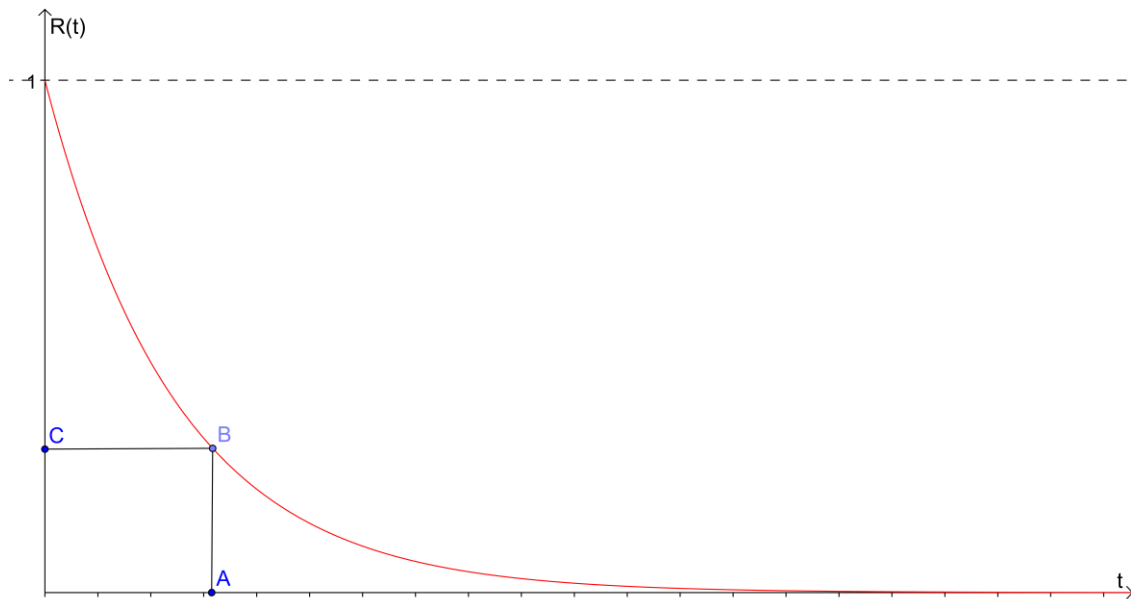


Figura 8 - Obtenção da fiabilidade de um bem.

Foi referido todo o necessário para chegar à fiabilidade começando pela distribuição estatística. As operações matemáticas são relativamente simples pelo que se verifica que o mais complexo é a escolha da distribuição *per si*, ou seja, verificar qual das distribuições escolhidas irá conduzir a uma curva de fiabilidade mais fidedigna em relação ao comportamento real dos dados recolhidos e consequentemente, da população.

Uma vez que se pretende modelar o tempo até à falha, é importante conhecer as distribuições de probabilidade mais usuais em fiabilidade pelo que serão abordadas no seguinte capítulo.

3 – Distribuições Estatísticas em Fiabilidade

As distribuições que irão ser alvo de análise têm capacidades diferentes de representar um modelo, diferindo nas suas medidas de dispersão, localização e forma. Quanto às medidas de localização, salienta-se a média (aritmética) do tempo até à falha \bar{t} obtida pela expressão:

$$\bar{t} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n t_i \quad (3.1)$$

Quanto às medidas de dispersão, são normalmente representadas pelo desvio padrão que fornece a informação de quanto uma amostra está concentrada em relação à média. Um desvio padrão diminuto transparece que os dados estão concentrados em torno da média e por consequente, um desvio padrão elevado refere que a amostra está dispersa relativamente a esta. Ainda relativamente ao desvio padrão, é relevante referir que existe o desvio padrão (σ) e o desvio padrão corrigido (S):

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2} \quad (3.2)$$

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^N (t_i - \bar{t})^2} \quad (3.3)$$

A diferença de utilização destes dois desvios padrão apresentados consiste no seguinte; o desvio padrão *tout court* é normalmente utilizado em conjuntos de dados com elevada ocorrência e o desvio padrão corrigido deve ser utilizado quando não estão disponíveis volumes elevados de dados.

É ainda importante referir que em estatística, é comum utilizar maiúsculas para a população e minúsculas para a amostra. O desvio padrão populacional (S) pode ser estimado com base numa amostra através do estimador (s):

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^N (t_i - \bar{t})^2} \quad (3.4)$$

Ao contrário da nomenclatura em estatística, quando o desvio padrão é referido no âmbito da fiabilidade, a notação mais frequente na literatura é σ para o desvio padrão corrigido. Tendo em conta que o tema desta tese é precisamente a fiabilidade, será esta nomenclatura que irá ser adoptada. Concluindo, a expressão que será assumida para o desvio padrão corrigido (estimador) da amostra é:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^N (t_i - \bar{t})^2} \quad (3.5)$$

Com o mesmo valor de média e desvio padrão, podem obter-se distribuições completamente distintas. Isto deve-se ao facto de existirem parâmetros de forma. Existem mais medidas, nomeadamente medidas de escala e irão ser referidas mais à frente no seu devido contexto.

Vão ser apresentadas de seguida as distribuições estatísticas mais frequentemente usadas em fiabilidade, nomeadamente a distribuição normal, lognormal, exponencial, e Weibull. Irá ser introduzido para cada um destes modelos a influência das medidas supra referidas, apresentar-se-á a respectiva expressão correspondente à função densidade de probabilidade, a sua representação gráfica, a fiabilidade associada e algumas outras características.

3.1 - Distribuição Normal

A distribuição normal ou curva de Gauss é a distribuição mais utilizada em estatística. Esta distribuição foi apresentada por Carl Friedrich Gauss (1777-1885), considerado por muitos uma das mentes mais brilhantes de todos os tempos [8]. A distribuição é graficamente representada por uma curva em forma Gaussiana (ou de sino) e simétrica relativamente à média. Esta distribuição é biparamétrica e a sua função densidade de probabilidade (de falha) é descrita por:

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\bar{t}}{\sigma}\right)^2} \quad (3.6)$$

$$-\infty < t < \infty, -\infty < \bar{t} < \infty, \sigma > 0$$

Dada a sua natureza, esta distribuição é característica de bens que avariaram em torno de um valor, sendo a sua dispersão simétrica em relação ao mesmo. Este é o caso, por exemplo, de lâmpadas cuja duração é normalmente conhecida, podendo falhar algumas horas antes ou depois. Pode se ler no *site* oficial da Comissão Europeia o seguinte texto:

“O tempo de vida de uma lâmpada corresponde ao período durante o qual a mesma funciona correctamente e é expresso em horas. Considera-se que, em média, uma lâmpada é utilizada 1000 horas por ano, ou seja, 3 horas por dia. Uma lâmpada pode durar entre 1000 horas, no caso das lâmpadas incandescentes tradicionais, a 15 000 horas, no caso das melhores lâmpadas fluorescentes compactas e das lâmpadas LED. (...) Uma lâmpada que dura mais é também uma lâmpada que tem de ser substituída menos vezes, um aspecto a ter em conta quando se compara o preço das várias alternativas.” [9]

O valor de 1000 e 15000 horas provêm de estimativas cuja distribuição é possivelmente a distribuição normal. É fundamental a noção de “*compara o preço das várias alternativas*” pois como se referiu anteriormente, o que se pretende com fiabilidade é precisamente a redução de custos.

Os dois parâmetros que caracterizam a distribuição normal são a média e o desvio padrão. Pode-se observar nas Figuras 9 e 11 a influência dos parâmetros na função densidade de probabilidade;

quanto menor for o desvio padrão, ou seja, quanto menor for a variação entre os valores medidos, mais estreita e elevada se torna a curva.

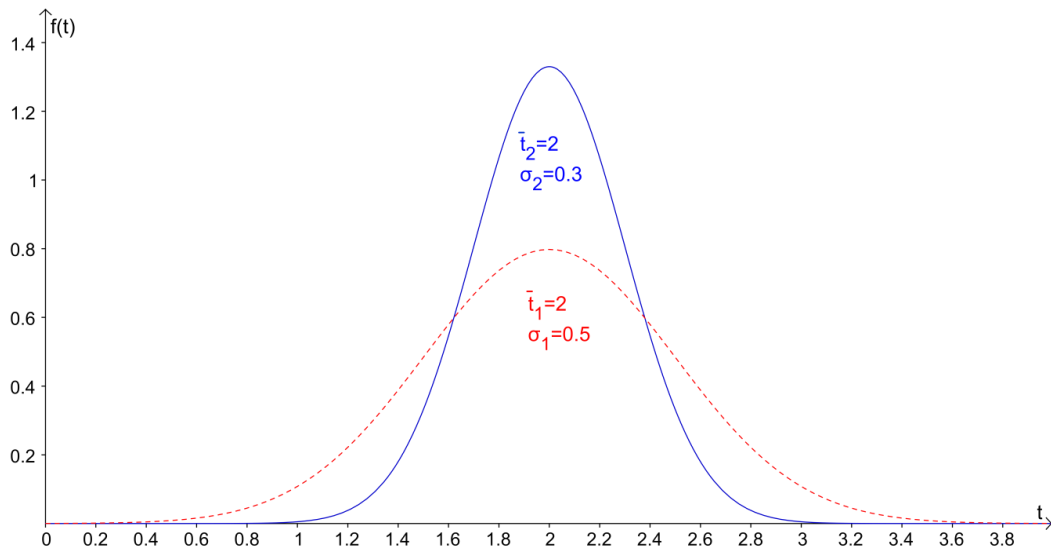


Figura 9 - Distribuição normal com $\bar{t} = 2$ variando σ .

Observe-se na Figura 10 o efeito da variação do desvio padrão na fiabilidade associada a esta função distribuição de probabilidade obtida pela equação (2.4):

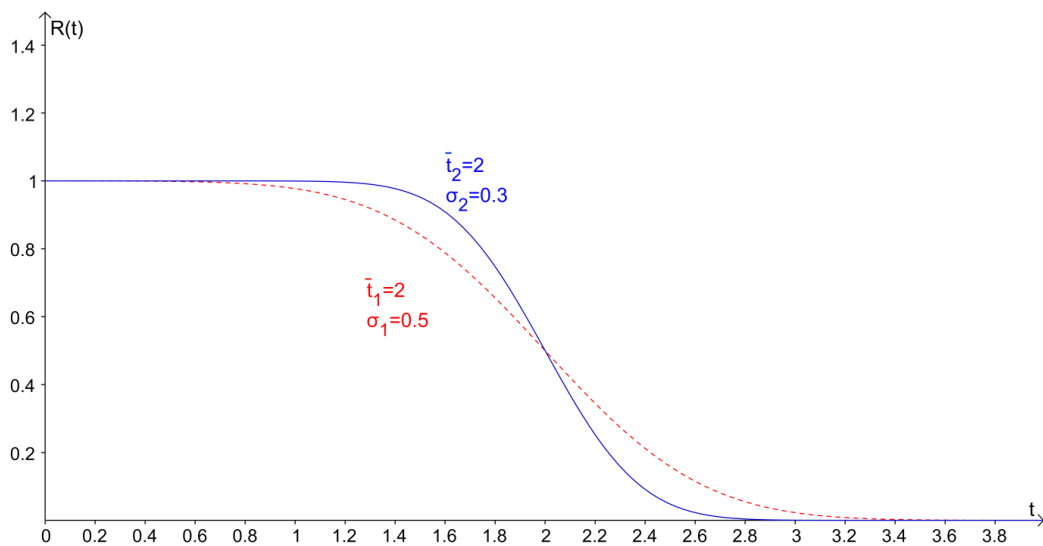


Figura 10 – Fiabilidade provinda da distribuição normal com $\bar{t} = 2$ variando σ

Verifica-se que a variação do desvio padrão resulta numa variação mais ou menos abrupta da fiabilidade do bem estudado. Isto quer dizer que vai existir maior concentração de ocorrências de avarias em torno da média. Um bem caracterizado por um desvio padrão mais reduzido vai significar que os custos de substituição de componentes avariados irão estar concentrados num espaço temporal mais curto. Observe-se agora o efeito da variação da média:

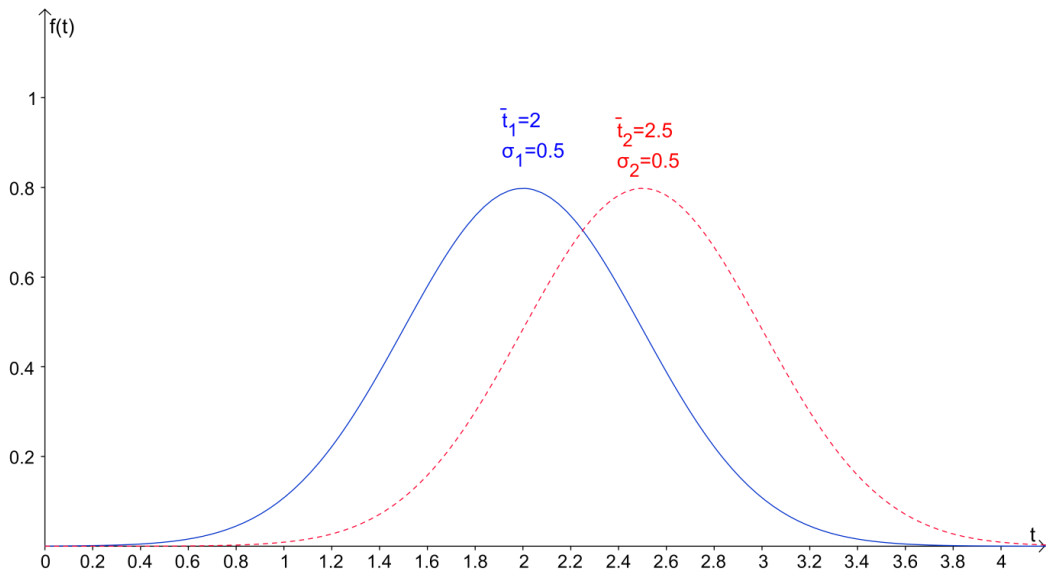


Figura 11 - Distribuição normal com $\sigma = 0.5$ variando \bar{t} .

A distribuição mantém uma forma idêntica mas desloca-se no sentido positivo das abcissas com o aumento da média. Observe-se agora a variação de fiabilidade associada:

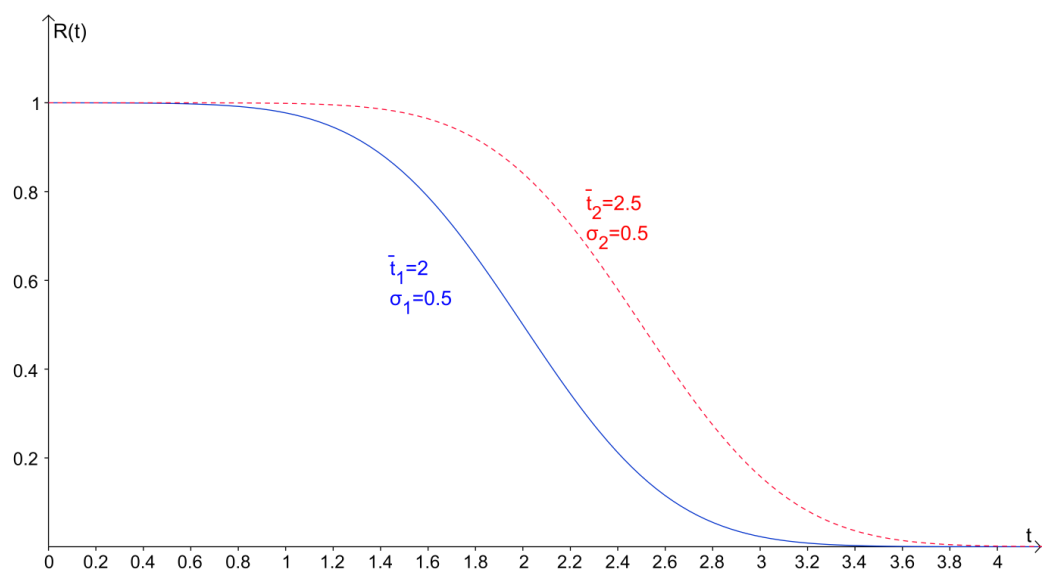


Figura 12 - Fiabilidade provinda da distribuição normal com $\sigma = 0,5$ variando \bar{t}

A curva da fiabilidade também mantém a sua forma, sofrendo uma deslocação no sentido do eixo das abcissas. Em termos fiabilísticos, significa que os tempos de avarias vão ocorrer mais tarde (com o aumento da média) no seu intervalo temporal. Pode afirmar-se então que em termos fiabilísticos, é desejável obter uma média mais elevada.

Existe uma simplificação da distribuição normal que facilita a obtenção de probabilidades requeridas. Aplicando uma mudança de variável z como se pode observar na equação (3.7), consegue-se que a distribuição tenha média igual a 0 e desvio padrão igual a 1. A distribuição obtida por esta mudança de variável chama-se de distribuição normal padronizada ou reduzida.

$$Z = \frac{T - \bar{t}}{\sigma} \quad (3.7)$$

A distribuição normal padronizada tem portanto o seguinte aspecto:

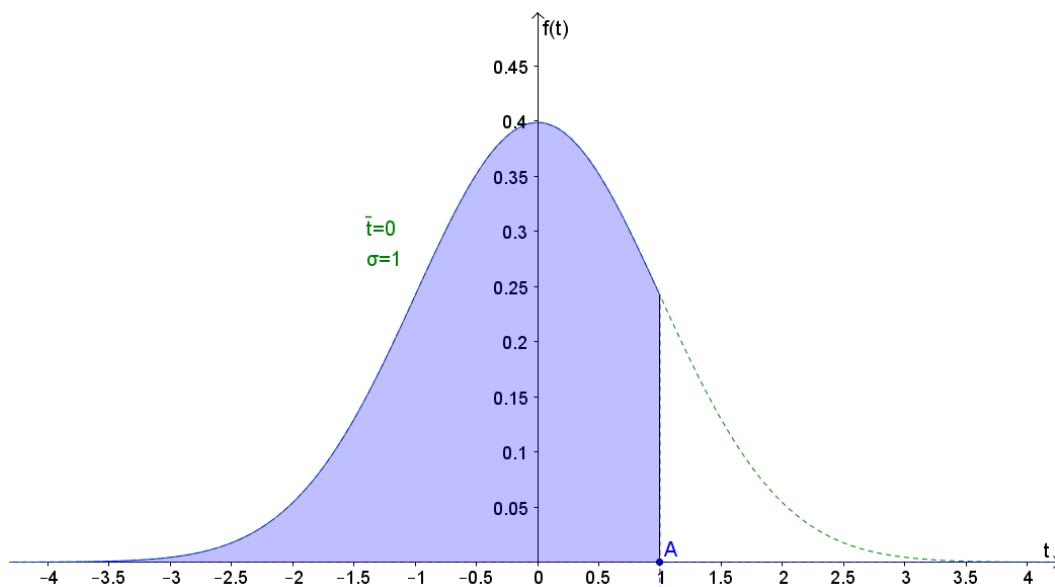


Figura 13 - Distribuição normal padronizada

Como a curva normal representa a probabilidade de um evento, a sua área total é igual a 1. A probabilidade de um determinado evento ocorrer é a área à esquerda desse valor na distribuição normal. Concretizando no exemplo da Figura 13, a probabilidade do valor 1 ocorrer é igual à área

sombreada representada a azul. Utilizando os valores da distribuição a vermelho tracejado do exemplo que consta da Figura 11 ($\bar{t} = 2,5$ e $\sigma = 0,5$) e aplicando a mudança de variável, obtém-se:

$$z = \frac{T - 2,5}{0,5}$$

Consegue-se assim obter o valor de z para cada valor que se pretenda saber a probabilidade associada. Foram criadas tabelas que devolvem a probabilidade de um determinado valor de z (Apêndice A). Para qualquer valor de t , existe um valor de z associado que irá devolver na tabela do Apêndice A a probabilidade de t ocorrer. Para $t = 3$:

$$z = \frac{3 - 2,5}{0,5} = 1$$

Cruza-se a primeira coluna da tabela do apêndice A, com a segunda coluna (que diz respeito à primeira casa decimal de z que é igual a 0) obtém-se um valor de 0,8413. Isto quer dizer que a probabilidade de $t = 3$ ocorrer é de 83,13%, ou melhor:

$$P(T < 3) = P(Z < 1) = 83,13\%$$

3.2 - Distribuição Lognormal

A distribuição lognormal aparece na literatura tendo sido considerada inicialmente em 1879 por Francis Galton. Apenas em 1930 foi considerada por Gibrat como sendo um pilar para a aleatoriedade [10]. A distribuição lognormal é graficamente representada por uma curva em forma de lomba. Sendo assimétrica, a distribuição lognormal não se adequa bem a bens que avariam em torno de um valor (ao contrário da distribuição normal). As características desta curva auferem-lhe boas capacidades de modelar bens cuja taxa de avarias vai aumentando sempre ao longo do tempo de utilização, como por exemplo, fadiga de equipamentos mecânicos.

Esta distribuição é biparamétrica e a sua função densidade de probabilidade (de falha) é descrita por:

$$f(t) = \frac{1}{\sigma' \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{t - \bar{t}'}{\sigma'} \right)^2} \quad (3.8)$$

$$t \geq 0, -\infty < \bar{t}' < \infty, \sigma' > 0,$$

Pode observar-se nas Figuras 14 e 16 como a função densidade probabilidade da distribuição lognormal se altera com a variação destes dois parâmetros; o logaritmo do desvio padrão representa a forma que a distribuição vai tomar:

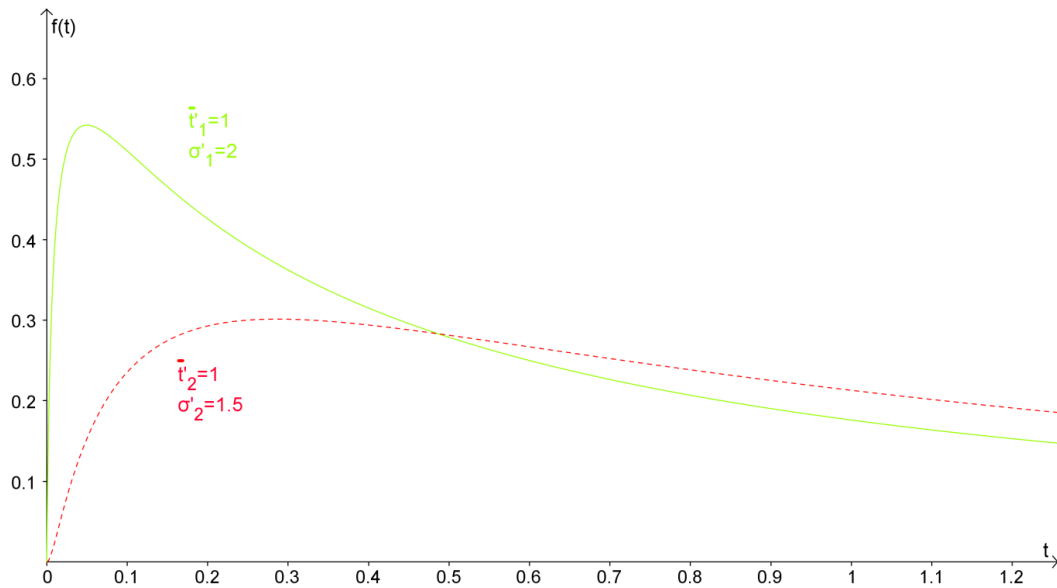


Figura 14 - Distribuição lognormal com $\bar{t} = 1$ variando σ .

Observe-se a influência do desvio padrão na curva da fiabilidade representado na Figura 15:

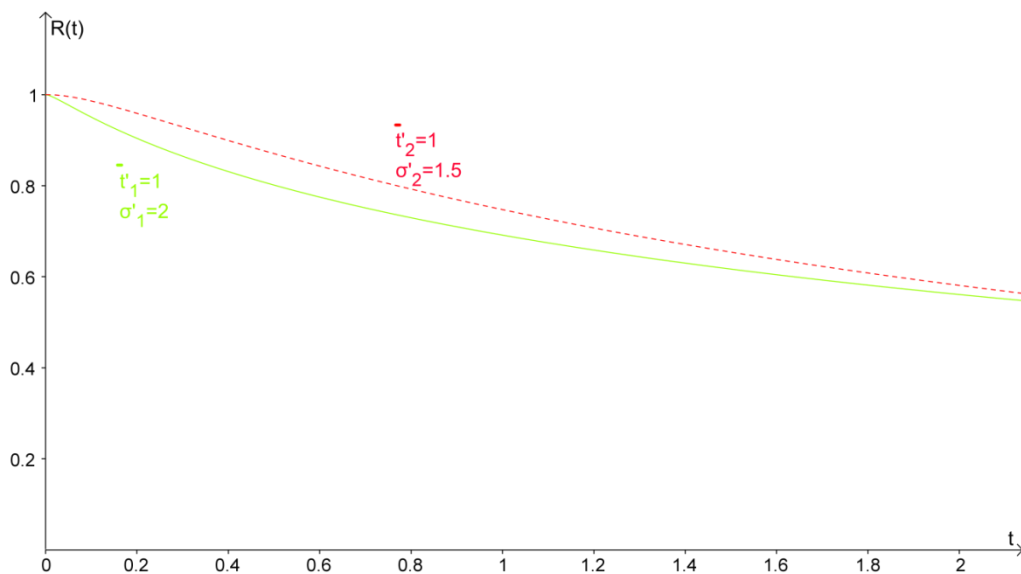


Figura 15 - Fiabilidade provinda da distribuição lognormal com $\bar{t} = 1$ variando σ

Quanto menor for o desvio padrão mais a curva se aproxima da vertical. A curva obtém maior declive com valores mais elevados do desvio padrão. No que diz respeito à fiabilidade e segundo o que foi referido, é desejável que o desvio padrão seja mais diminuto (idilicamente aspira-se a que a curva da fiabilidade seja constante e igual a 1).

No que diz respeito à média, verifica-se que quanto menor o logaritmo da média do tempo até à falha, mais estreita e elevada se torna a curva, sendo um factor de escala.

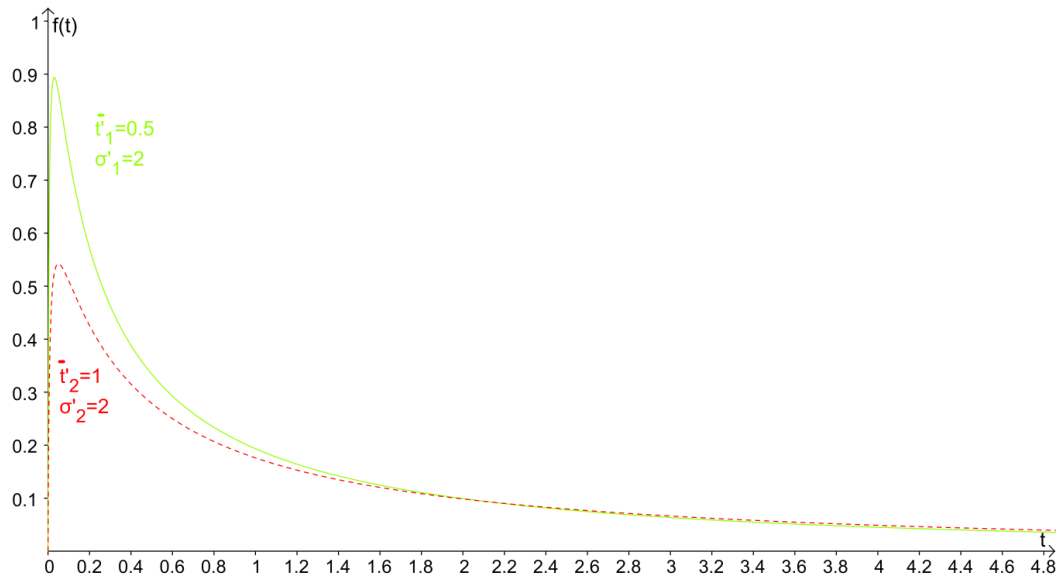


Figura 16 - Distribuição lognormal com $\sigma = 2$ variando \bar{t} .

Observe-se a influência deste parâmetro na curva da fiabilidade:

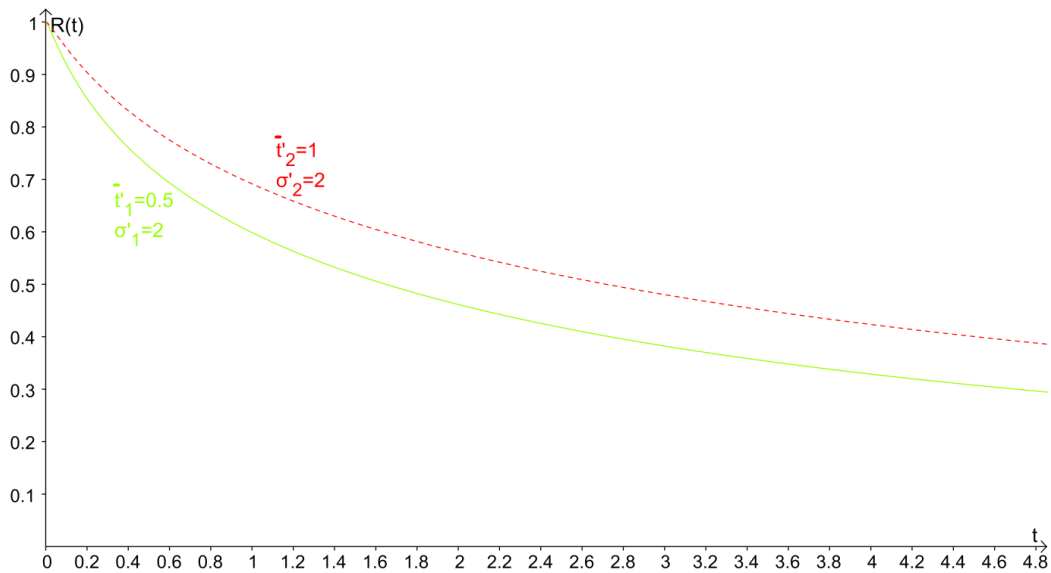


Figura 17 - Fiabilidade provinda da distribuição lognormal com $\sigma' = 2$ variando \bar{t}

Verifica-se que a média não afecta a forma da curva mas sim a sua escala. Quanto maior o valor da média, mais concava vai ser a curva da fiabilidade e menos interessante será a curva da fiabilidade (em termos de fiabilidade de bens).

3.3 - Distribuição Exponencial

A distribuição exponencial é considerada das mais simples em termos matemáticos. A função densidade de probabilidade é sempre decrescente, monoparamétrica e a sua função densidade de probabilidade (de falha) é dada por:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} = \frac{1}{m} e^{-\frac{1}{m}t} \quad (3.9)$$

$$t \geq 0, \lambda > 0, m > 0$$

e

$$\lambda = \frac{1}{m} \quad (3.10)$$

Esta distribuição é das mais aplicadas em estudos de fiabilidade, uma vez que é representativa de bens em vida útil, pelo que em muitos estudos se assume este pressuposto e se ajustam os dados cegamente a esta distribuição [1].

Esta curva representa o tempo até à falha de determinados bens com uma taxa de avarias constante ao longo do seu tempo operacional.

Pode observar-se na Figura 18 que a intersecção da distribuição com o eixo das ordenadas ocorre no valor de λ :

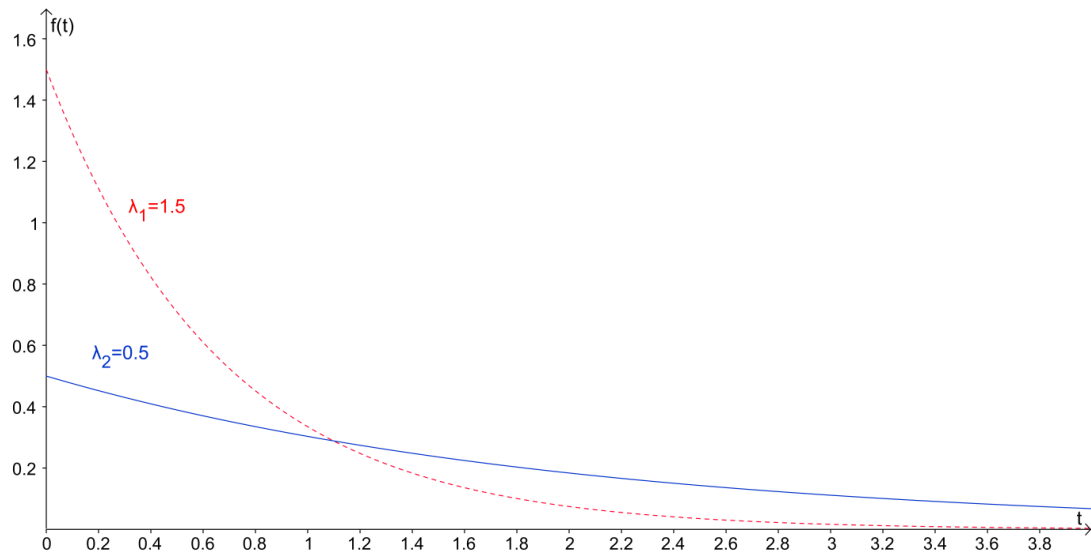


Figura 18 - Distribuição exponencial variando λ .

Quanto à influência do valor de λ na fiabilidade, pode ser observado na Figura 19:

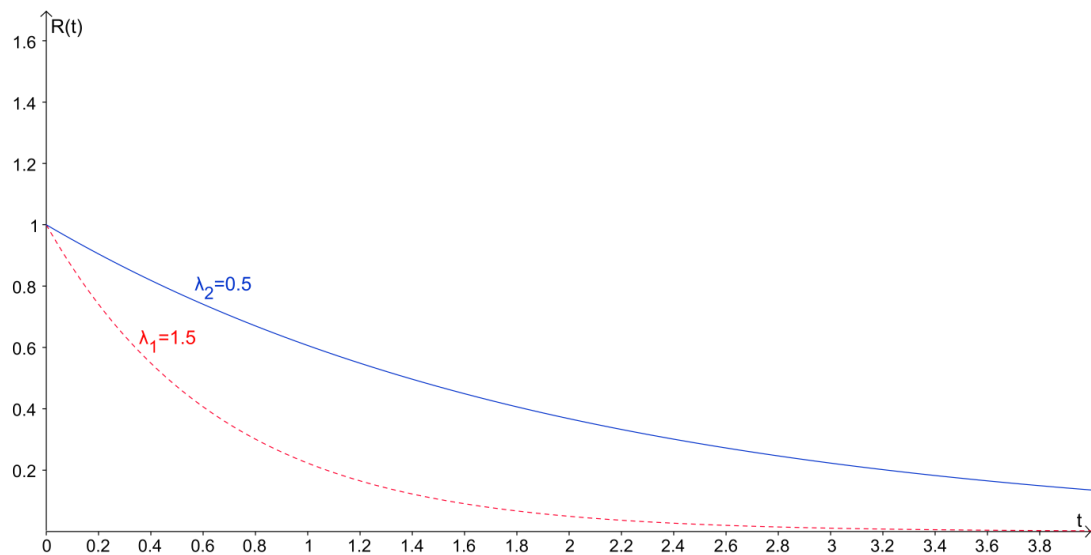


Figura 19 - Fiabilidade provinda da distribuição exponencial variando λ

No caso da distribuição exponencial, o valor de λ influencia a escala da curva da fiabilidade sendo que é preferível um λ elevado, o que significa que a fiabilidade decresce mais lentamente com o tempo.

3.4 - Distribuição de Weibull

A distribuição de Weibull foi utilizada pela primeira vez por Waloddi Weibull em 1939 nos seus estudos de resistência de materiais. Esta distribuição é muito utilizada em análise de fiabilidade por ser capaz de se adaptar à grande maioria das situações práticas devido à sua flexibilidade, bastando fazer variar algum dos seus parâmetros. Por isto mesmo consegue modelar uma grande diversidade de tipos de dados para variados tempos de vida [11].

Esta distribuição é triparamétrica e os seus parâmetros são β , γ e η que representam respetivamente o fator de forma, o fator de localização e o fator de escala, também designado por vida característica. Esta distribuição é expressa pela seguinte função densidade de probabilidade (de falha):

$$f(t) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t - \gamma}{\eta} \right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^\beta} \quad (3.11)$$

$$t \geq 0, \beta \geq 0, \eta \geq 0, \gamma \geq 0$$

Pode observar-se na Figura 20 os seguintes comportamentos do parâmetro β , factor de forma:

- $0 < \beta < 1$: A função é decrescente e não tem moda.
- Para $\beta = 1$ a distribuição transforma-se n distribuição exponencial.
- $\beta > 1$: A função cresce até à sua moda e decresce até chegar ao valor nulo.

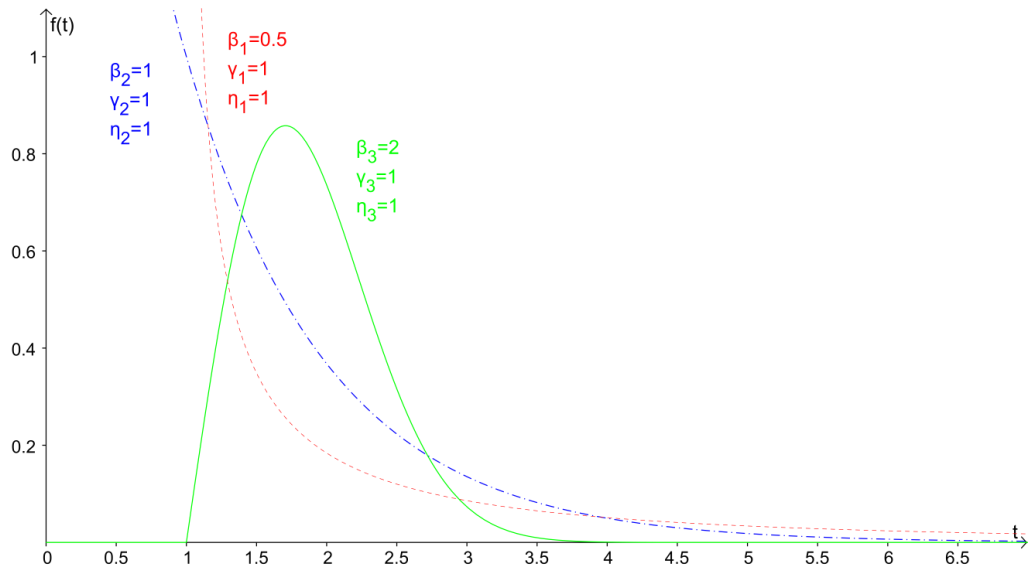


Figura 20 - Distribuição de Weibull de três parâmetros com $\eta = 1, \gamma = 1$ variando β .

Observe-se agora a influência da variação de β na curva da fiabilidade:

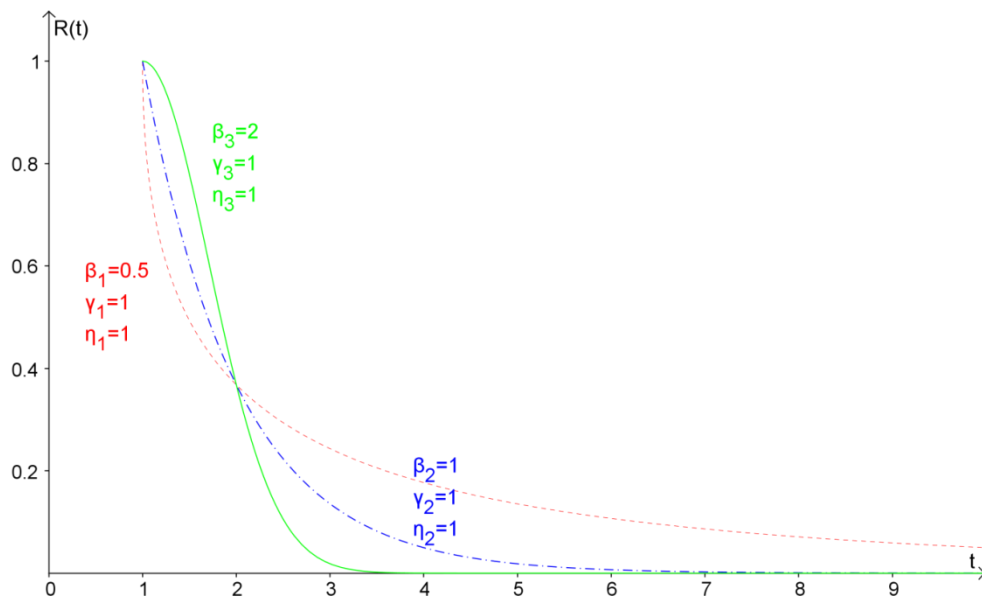


Figura 21 - Fiabilidade provinda da distribuição de Weibull com $\eta = 1, \gamma = 1$ variando β .

Para um β mais elevado, a fiabilidade de um bem tem um decréscimo mais suave no início de operação e abrupto de seguida. Para um valor de β mais pequeno, a fiabilidade é muito decrescente logo no início de operação mas com tendência a suavizar este decréscimo com o tempo.

O parâmetro γ é o factor de posição ou localização (Figura 22). Quanto maior for este parâmetro, mais a função densidade de probabilidade se desloca para o sentido positivo do eixo das abcissas, mantendo a sua forma inalterável.

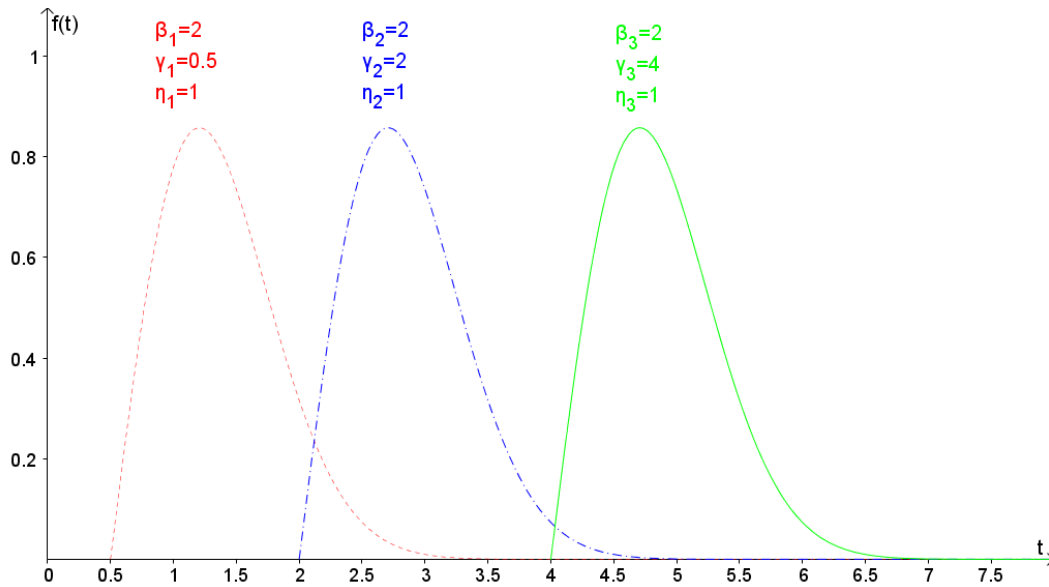


Figura 22 - Distribuição de Weibull de três parâmetros com $\eta = 1$, $\beta = 2$ variando γ .

Pode se observar este comportamento na curva da fiabilidade:

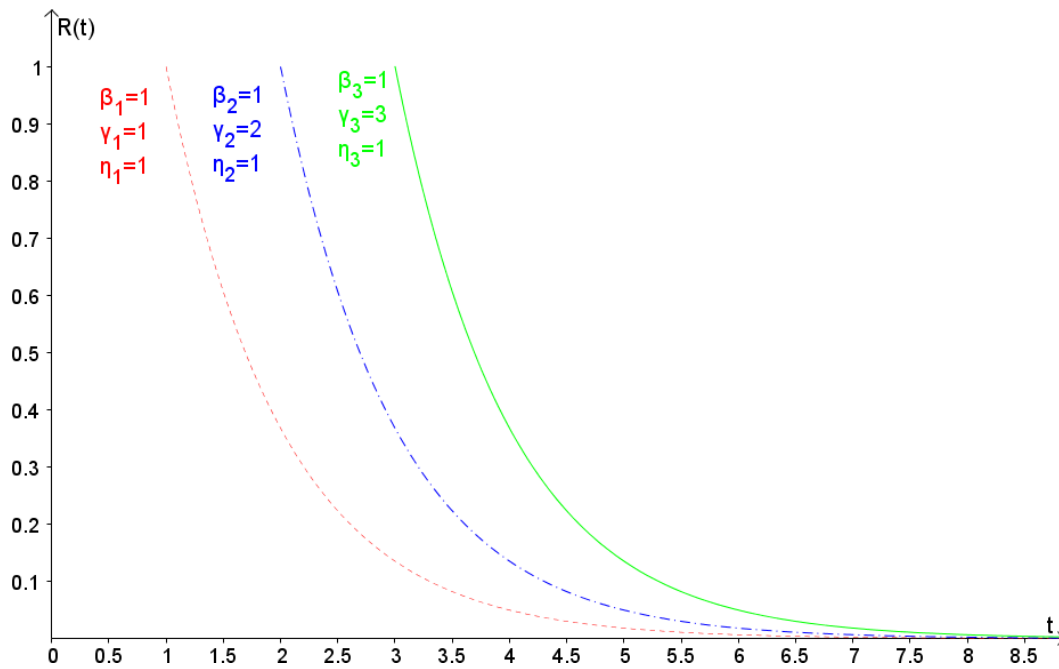


Figura 23 - Fiabilidade provinda da distribuição de Weibull com $\eta = 1$, $\beta = 2$ variando γ .

Também nesta representação se observa que o parâmetro γ se trata de um factor de localização. Um valor de γ mais elevado indica que até um determinado tempo de operação, a fiabilidade de um bem não se altera e se mantém máxima.

O valor de η condiciona a escala da função. Quanto maior for este parâmetro, mais a função tenderá a planificar-se, como se pode observar na Figura 24.

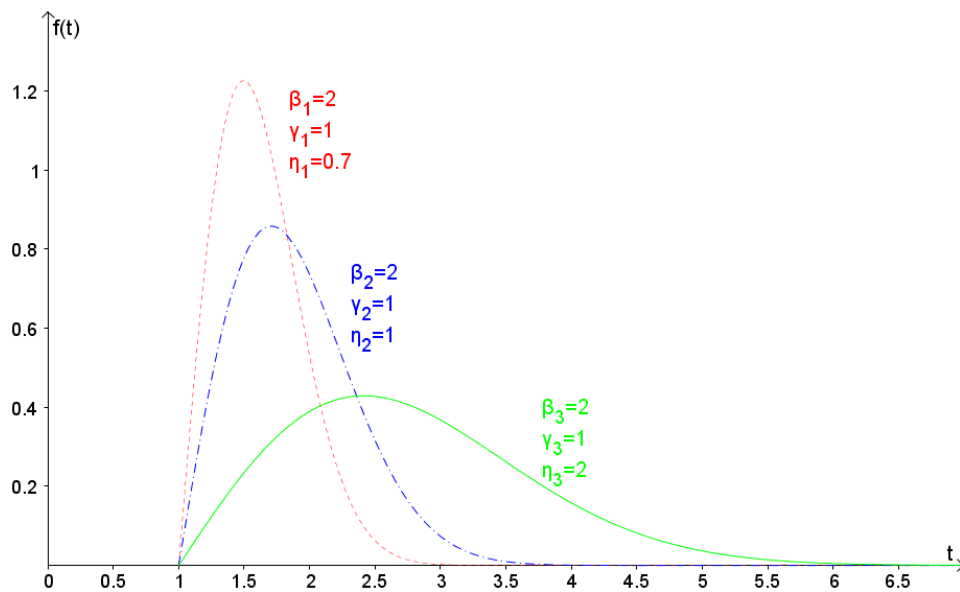


Figura 24 - Distribuição de Weibull de três parâmetros com $\gamma = 1, \gamma\beta = 2$ variando η .

A influência do valor de η pode ser verificada na Figura seguinte:

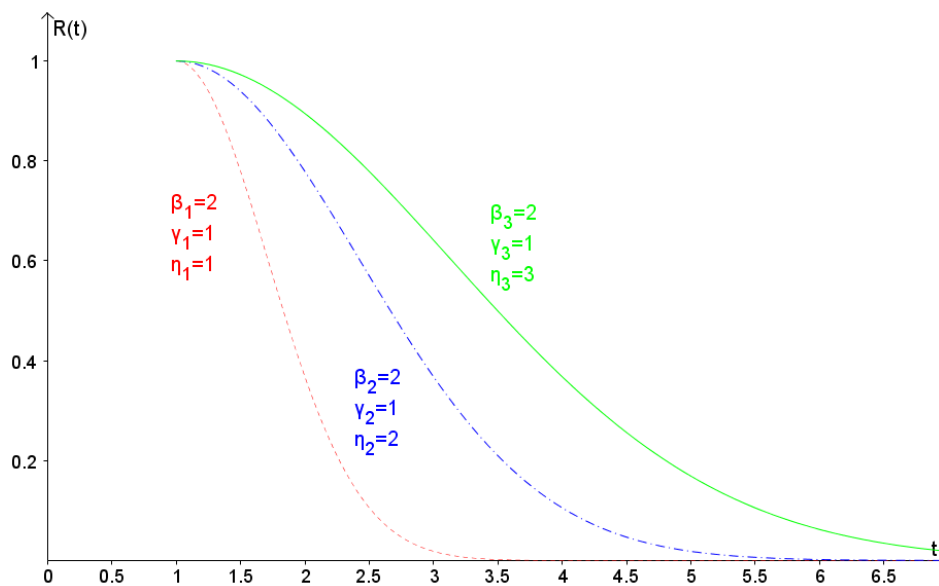


Figura 25 - Fiabilidade provinda da distribuição de Weibull com $\gamma = 1, \gamma\beta = 2$ variando η .

É seguro referir que o parâmetro η também se refere à escala da função fiabilidade, sendo que para valores mais elevados de η a função toma uma forma mais alargada. No que diz respeito a fiabilidade, um η mais elevado demonstra um comportamento mais suave no decréscimo da fiabilidade.

Observando a consequência dos três parâmetros da distribuição de Weibull na curva da fiabilidade, parece seguro referir que, pelo menos isoladamente, é preferível que os três parâmetros tenham valores elevados.

Quando na posse de dados de tempo até à falha de um determinado bem, o grande desafio é saber qual das distribuições é a que melhor se ajusta. Desta forma, existem alguns testes que se podem realizar no sentido de aferir qual a distribuição que mais se adequa a um conjunto de dados de tempos até à falha.

4 – Caracterização da distribuição

Quando se pretende verificar se uma determinada distribuição é ou não adequada para estudo requerido, é necessário saber quais os parâmetros que a definem. Através de estimadores (função utilizada para estimar parâmetros) serão obtidos os valores estimados para cada um dos parâmetros das distribuições. A este estudo chama-se estimação de parâmetros. O objectivo deste estudo é de obter um valor numérico para os parâmetros desconhecidos de tal forma que esses valores sejam representativos dos parâmetros da população. Assim sendo, os parâmetros da população serão estimados através dos estimadores amostrais.

Existem vários métodos para o fazer, sendo que serão estudados os três que Kececioglu, Dimitri [2] categoriza como mais relevantes nesta área: o método dos mínimos quadrados, o método dos momentos e o método da máxima verosimilhança.

Para facilitar a visualização da estimação de parâmetros, será utilizado um exemplo que consta na literatura do mesmo autor e que será ilustrado pela folha de Excel criada para o efeito cuja amostra se representa de seguida. O exemplo 2 retrata uma amostra de 24 transístores que se testaram até à falha, sendo que o tempo até à falha (em horas) vai ser a nossa variável aleatória.

Tabela 2 - Amostra de dados do exemplo 2 [2].

Tempo até à falha (horas)		
1880	920	260
2130	930	350
530	780	420
580	820	1050
680	840	1060
440	710	1270
480	740	1340
480	1370	1070

Antes da descrição dos métodos de estimação de parâmetros, apresentam-se alguns passos do estudo descritivo.

Numa primeira fase, os dados são ordenados e numerados:

Tabela 3 - Amostra de dados do exemplo 2 ordenada e numerada.

Designação da falha	Tempo até à falha (horas)	Designação da falha	Tempo até à falha (horas)	Designação da falha	Tempo até à falha (horas)
1	260	9	680	17	1050
2	350	10	710	18	1060
3	420	11	740	19	1070
4	440	12	780	20	1270
5	480	13	820	21	1340
6	480	14	840	22	1370
7	530	15	920	23	1880
8	580	16	930	24	2130

De seguida, serão obtidos alguns valores, começando pelo tamanho da amostra, $n = 24$ e pela média da amostra como indicado na equação (3.1):

$$\bar{t} = \frac{1}{24} \sum_{i=1}^{24} t_i = 880,42h$$

É também necessário obter o desvio padrão como referido na equação (3.5):

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{24 - 1} \sum_{i=1}^{24} (t_i - 880,42)^2} = 465,06h$$

$t_{Max} = 2130h$ é o valor máximo da amostra e $t_{Min} = 260h$ é o valor mínimo da mesma.

Nas seguintes secções serão abordados os três métodos de estimação de parâmetros propostos inicialmente.

4.1 - Método dos mínimos quadrados

O método dos mínimos quadrados (mmq) consiste em minimizar o quadrado da distância (segundo uma determinada direcção) de uma recta aos pontos representativos da curva que se pretende caracterizar. Esta distância entre a recta e cada ponto é chamada de resíduo. Também apelidado de regressão linear, este método pode ser aplicada em x ou em y . Como o processo é semelhante em cada uma delas, apenas será apresentada a regressão em y . No exemplo representado na Figura 26 estão representados 4 pontos. Observando a figura, é possível verificar que quanto menor a distância na vertical entre a recta estimada representada e os pontos (A, B, C e D), ou melhor, quanto menor forem os resíduos em y , mais a equação da recta se ajusta ao comportamento que os pontos descrevem. A recta que se encontra representada é estimada a partir da amostra e é aquela para qual a soma dos resíduos ao quadrado é mínima.

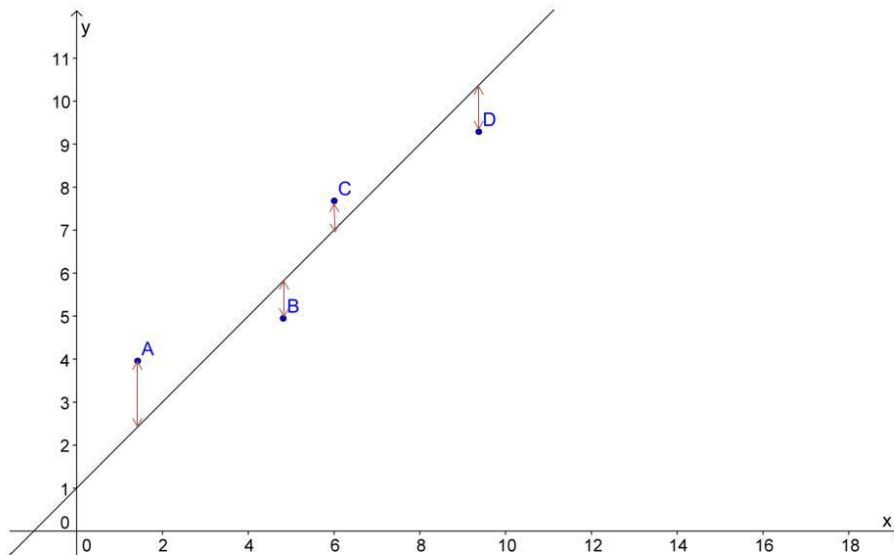


Figura 26 - Regressão linear em y .

A equação da recta real (desconhecida) pode ser representada por:

$$S = \sum_{i=1}^n (a + bx_i - y_i)^2 \quad (4.1)$$

Para obter os estimadores, pretende-se que a soma das distâncias na vertical entre os pontos representados e a recta seja mínima, ou seja:

$$\sum_{i=1}^n (\hat{a} + \hat{b}x_i - y_i)^2 = \min(a, b) \sum_{i=1}^n (a + bx_i - y_i)^2 \quad (4.2)$$

Onde \hat{a} corresponde ao valor estimado de a (inclinação da recta) e \hat{b} é o valor estimado b (onde a recta cruza o eixo das ordenadas).

A soma a minimizar passa a ser:

$$S = \sum_{i=1}^n (a + bx_i - y_i)^2 \quad (4.3)$$

Finalmente, para obter os estimadores basta derivar a equação (4.3) em ordem a a e a b respectivamente e igualar estas derivadas parciais ao valor nulo. Resolvendo este sistema de equações obtêm-se os seguintes estimadores (para uma regressão em y):

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} - \hat{b} \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (4.4)$$

E

$$\hat{b} = \frac{N \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{N \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \quad (4.5)$$

É importante introduzir o valor de $Q(t_i)$ obtidos através dos *ranks* medianos. O valor do *rank* mediano para a i -gésima falha numa amostra de N testes é tal que a probabilidade da i -gésima falha ocorrer antes do período temporal t_i é de 50%. É o valor que a probabilidade de falha $Q(t_i)$ deve ter na altura t_i com um grau de incerteza de 50% [2].

A título de exemplo, para uma amostra de 10 falhas, a tabela é a seguinte:

Tabela 4 - *Ranks* Medianos [2][14].

Designação na amostra	Tamanho da amostra: N=10 50% (median rank)
1	0,06697
2	0,16226
3	0,25857
4	0,35510
5	0,45169
6	0,54831
7	0,64490
8	0,74143
9	0,83774
10	0,93303

Para simplificar o cálculo dos *ranks* medianos, pode-se usar a aproximação de Bernard [2]:

$$Q(t_i) = \frac{i - 0,3}{n + 0,4} \quad (4.6)$$

Onde i é a designação da falha e n é o tamanho da amostra. Existem várias tabelas com várias dimensões de amostra mas no exemplo 2 irá constar a equação de Bernard visto ser mais fácil de introduzir na aplicação em Excel. Assim sendo, para o valor de t_3 do exemplo 2, $Q(t_3)$ é calculado da através da equação (4.6):

$$Q(t_3) = \frac{3 - 0,3}{24 + 0,4} = 0,1107$$

Quando se pretende estimar os parâmetros da distribuição normal através do método dos mínimos quadrados, o valor de y_i é dado por [2]:

$$y_i = \varphi^{-1}(Q(t_i)) \quad (4.7)$$

Onde $\varphi^{-1}(Q(T_i))$ devolve o valor de $Q(T_i)$ aplicando a distribuição normal padronizada. Este valor pode ser obtido através da seguinte expressão (expressão (3.6) aplicada ao valor do rank mediano da falha):

$$\varphi^{-1}(Q(T_i)) = \frac{Q(T_i) - \overline{Q(T_i)}}{\sigma_{Q(T_i)}} \quad (4.8)$$

Onde $Q(T_i)$ é o valor do rank mediano da falha i , $\overline{Q(T_i)}$ é a média de todos os valores de ranks medianos e $\sigma_{Q(T_i)}$ é o desvio padrão corrigido aplicado ao conjunto de *ranks* medianos.

Pode agora ser fornecido o valor de y_3 do exemplo 2:

$$y_3 = -1,3435$$

O valor de x_i é dado por:

$$x_i = t_i \quad (4.9)$$

Assim sendo e seguindo o exemplo 2:

$$\hat{b} = \frac{24 \times 9985,1 - 21130 \times 0}{24 \times 23577700 - 21130^2} \approx 0,002007$$

$$\hat{a} = \frac{-1,99 \times 10^{-15}}{24} - 0,002007 \frac{21130}{24} \approx -1,767$$

Montgomery et al. [14] chegaram às seguintes expressões dos estimadores da distribuição normal de dois parâmetros:

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{\hat{b}} \quad (4.10)$$

$$\hat{t} = -\hat{a} \times \hat{\sigma} \quad (4.11)$$

Aplicando estes estimadores ao exemplo 2:

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{0,002007} \approx 498,19h$$

$$\hat{t} = -(-1,767) \times 498,2 \approx 880,42h$$

Finalmente, é possível representar a distribuição normal com os parâmetros estimados pelo método dos mínimos quadrados para o exemplo 2:

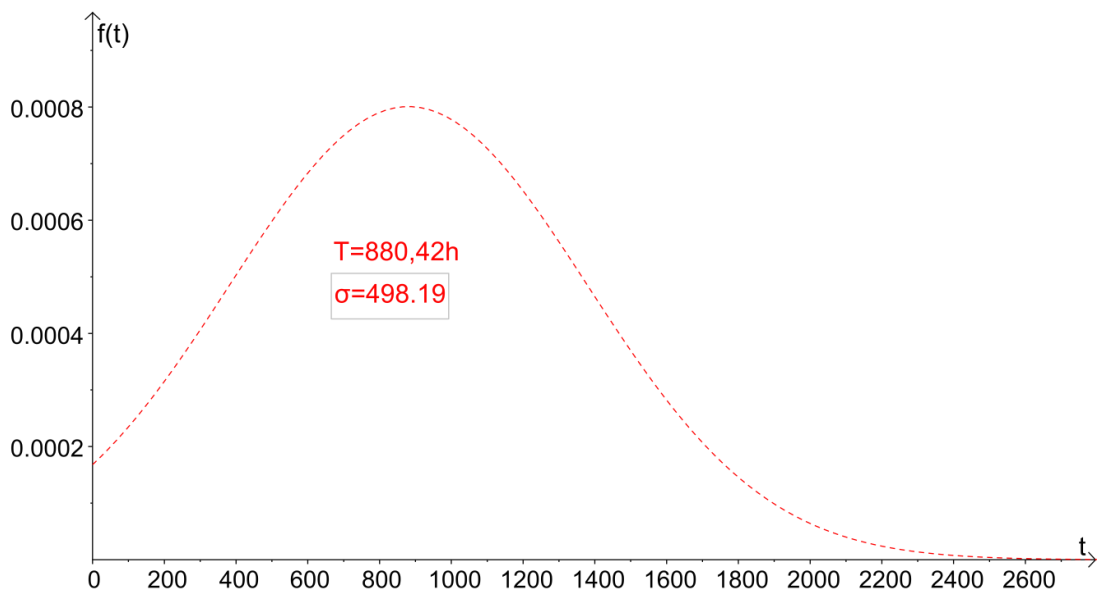


Figura 27 - Curva normal com parâmetros estimados pelo mmq do exemplo 2.

O raciocínio é idêntico para as restantes distribuições estudadas. O valor de y_i e os respetivos estimadores estão representados na Tabela 5.

Tabela 5 - Estimadores do método dos mínimos quadrados [2][14].

Distribuição	x_i	y_i	Parâmetros	
Normal	$x_i = t_i$	$y_i = \varphi^{-1}\{Q(t_i)\}$	$\hat{\sigma} = \frac{1}{\hat{b}}$	$\hat{t} = -\hat{a} \times \hat{\sigma}$
Lognormal	$x_i = \log_e t_i$	$y_i = \varphi^{-1}\{Q(\log_e t_i)\}$	$\hat{\sigma}' = \frac{1}{\hat{b}'}$	$\hat{t}' = -\hat{a} \times \hat{\sigma}'$
Exponencial	$x_i = t_i$	$y_i = \log_e\{1 - Q(t_i)\}$	$\hat{\lambda} = -\hat{b}$	
Weibull	$x_i = \log_e t_i$	$y_i = \log_e\left\{\log_e\left(\frac{1}{1 - Q(t_i)}\right)\right\}$	$\beta = b$	$\eta = e^{-\frac{a}{b}}$

4.2 - Método dos momentos

O método dos momentos foi proposto em 1900 por Karl Pearson [20], e consiste em igualar momentos populacionais com os respectivos momentos amostrais resolvendo o sistema de equações resultante. Para um determinado conjunto de dados $(t_1; t_2; \dots; t_n)$, a função densidade de probabilidade é: $f(t, \theta_1; \theta_2; \dots; \theta_k)$ onde $\theta_1; \theta_2; \dots; \theta_k$ são k parâmetros que necessitam de ser estimados.

Os primeiros k momentos amostrais são dados por:

$$m'_r = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n t_i^r, r = 1, 2, \dots, k \quad (4.12)$$

Os primeiros k momentos populacionais são dados por:

$$\mu'_r = E(t^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^r f(t, \theta_1; \theta_2; \dots; \theta_k) dt, r = 1, 2, \dots, k \quad (4.13)$$

Resolvendo a equação em simultâneo para $\theta_1; \theta_2; \dots; \theta_k$, obtêm-se os estimadores $\hat{\theta}_1; \hat{\theta}_2; \dots; \hat{\theta}_k$:

$$m'_r = \mu'_r \quad (4.14)$$

Aplicando o método anterior à distribuição normal, verifica-se:

- Expressão do primeiro momento populacional:

$$\mu'_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dx \quad (4.15)$$

- Expressão do segundo momento populacional:

$$\mu'_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dx \quad (4.16)$$

- Expressão do primeiro momento amostral:

$$m'_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i, \quad (4.17)$$

- Expressão do segundo momento amostral:

$$m'_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^2 \quad (4.18)$$

Resolvendo o sistema de equações:

$$\begin{cases} m'_1 = \mu'_1 \\ m'_2 = \mu'_2 \end{cases} \quad (4.19)$$

O resultado final é:

$$\hat{t} = \bar{t} \quad (4.20)$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2} \quad (4.21)$$

Aplicando ao exemplo 2:

$$\hat{t} = \frac{1}{24} \sum_1^{24} t_i = 880,42h$$

E

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{24-1} \sum_{i=1}^{24} (t_i - 880,42)^2} = 465,06h$$

É agora possível observar graficamente a distribuição do exemplo 2 cujos parâmetros foram estimados pelo método dos momentos:

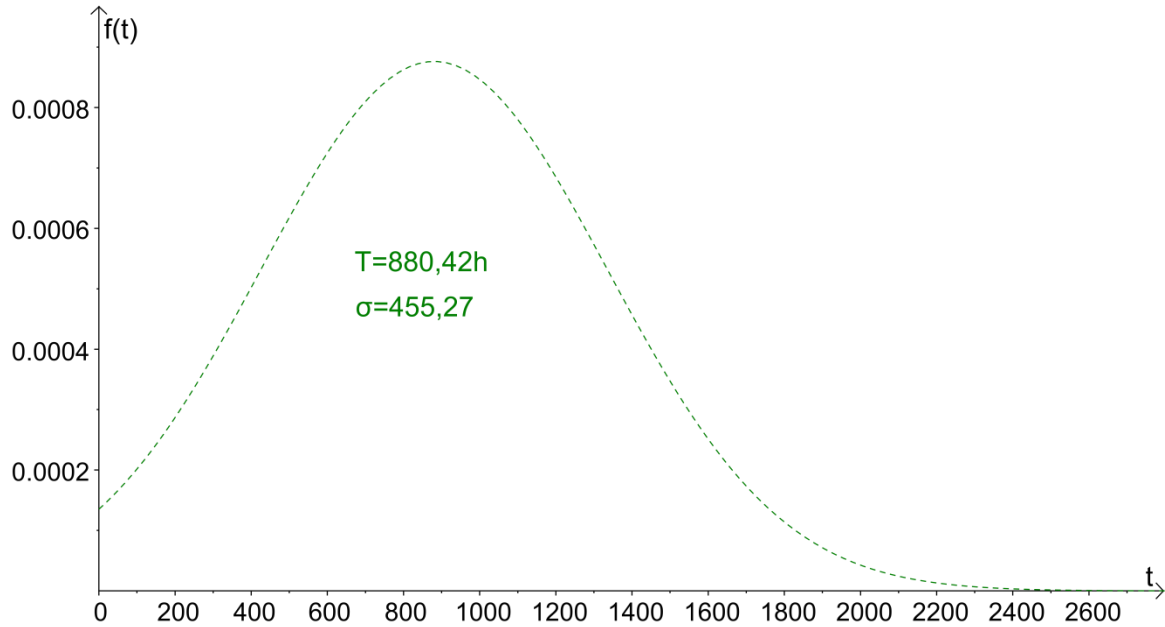


Figura 28 - Curva normal com parâmetros estimados pelo método dos momentos do exemplo 2.

A distribuição de Weibull, é um caso particular deste raciocínio, chegar-se-á aos seguintes estimadores:

$$\hat{t} = \eta \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) \quad (4.22)$$

E

$$\hat{\sigma}_T^2 = \eta^2 \left[\Gamma\left(\frac{2}{\beta} + 1\right) - \Gamma^2\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) \right] \quad (4.23)$$

Não é possível obter directamente os parâmetros estimados através destas equações. Teimouri et al. (1994) [11] e Gaeddert, Joseph D. (2005) [16] referem sobre esta impossibilidade que a estimação de parâmetros da distribuição de Weibull pelo método dos momentos deve ser feita através de análise computacional, além do que estes estimadores não serão eficientes.

Kececioglu, Dimitri, [2] refere uma possível solução recorrendo ao coeficiente de variação ou *COV* (medida de dispersão relativa) definido pela seguinte relação entre o desvio padrão e a média:

$$COV = \frac{\sigma}{\bar{t}} \quad (4.24)$$

O valor de σ e \bar{t} já foram calculados para o exemplo 2. Através da tabela presente no Apêndice B, obtém-se o valor de $\hat{\beta}$ para o *COV* calculado. Calcula-se facilmente o valor de η :

$$\hat{\eta} = \frac{\hat{t}}{\Gamma\left(\frac{1}{\hat{\beta}} + 1\right)} \quad (4.25)$$

Com

$$\hat{t} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i \quad (4.26)$$

Os restantes parâmetros das distribuições seguem o mesmo método da normal e os seus parâmetros estão descritos na Tabela 6.

Tabela 6 - Estimadores do método dos momentos [2] [14].

Distribuição	Estimadores	
Normal	$\hat{t} = \bar{t}$	$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2}$
Lognormal	$\hat{t}' = \bar{t}'$	$\hat{\sigma}' = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (t'_i - \bar{t}')^2}$
Exponencial	$\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{t}}$	
Weibull	-	-

4.3 - Método da máxima verosimilhança

Para explicar o raciocínio que está por trás do método da máxima verosimilhança, foi decidido que fosse introduzido com o seguinte exemplo: Se for pedido para escolher de um conjunto de valores de soluções $S = \{45; 78; 1\}$ o valor que mais se assemelhe com a média do conjunto $A = \{-4; 0; 5\}$, a escolha reverteria para o valor 1 dadas as diferentes grandezas. É desta forma que, através de um modelo matemático, o método da máxima verosimilhança (mmv) trata de estimar os respectivos parâmetros.

Para um determinado conjunto de dados $(x_1; x_2; \dots; x_n)$, a função densidade de probabilidade é: $f(x, \theta_1; \theta_2; \dots; \theta_k)$ onde $\theta_1; \theta_2; \dots; \theta_k$ são k parâmetros que necessitam de ser estimados.

A função do método de máxima verosimilhança é dada por:

$$L = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k), i = 1, 2, \dots, n \quad (4.27)$$

O logaritmo da função L é dada por:

$$\Lambda = \log_e L = \sum_{i=1}^n \log_e f(x_i; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) \quad (4.28)$$

As soluções dos parâmetros θ são dadas pelas k equações:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \theta_j} = 0 \text{ com } j = 1, 2, \dots, k. \quad (4.29)$$

O objectivo desta operação é o de maximizar a função Λ para obter a estimação mais aproximada do parâmetro real.

Para obter os parâmetros das várias distribuições em estudo, substitui-se $f(x_i)$ pela função densidade de probabilidade de cada uma das distribuições.

Aplicando o supra mencionado à distribuição normal:

$$\Lambda = \log_e L = \log_e \left(\frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^N} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i - \bar{t}}{\sigma}\right)^2} \right) \quad (4.30)$$

$$\Lambda = -\frac{n}{2} \log_e(2\pi) - n \log_e(\sigma) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i - \bar{t}}{\sigma}\right)^2 \quad (4.31)$$

Retiram-se as derivadas parciais e igualam-se a zero para obter os valores estimados dos dois parâmetros:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \bar{t}} = 0 \quad (4.32)$$

Ou

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t}) = 0 \quad (4.33)$$

E

$$-\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2 = 0 \quad (4.34)$$

Finalmente:

$$\hat{\bar{t}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i \quad (4.35)$$

E

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^N (t_i - \bar{t})^2} \quad (4.36)$$

Verifica-se que o método da máxima verosimilhança e o método dos momentos chegam à mesma expressão para a distribuição normal e portanto, irão assumir os mesmos valores: $\hat{t} = 880,42h$ e $\hat{\sigma} = 455,27h$.

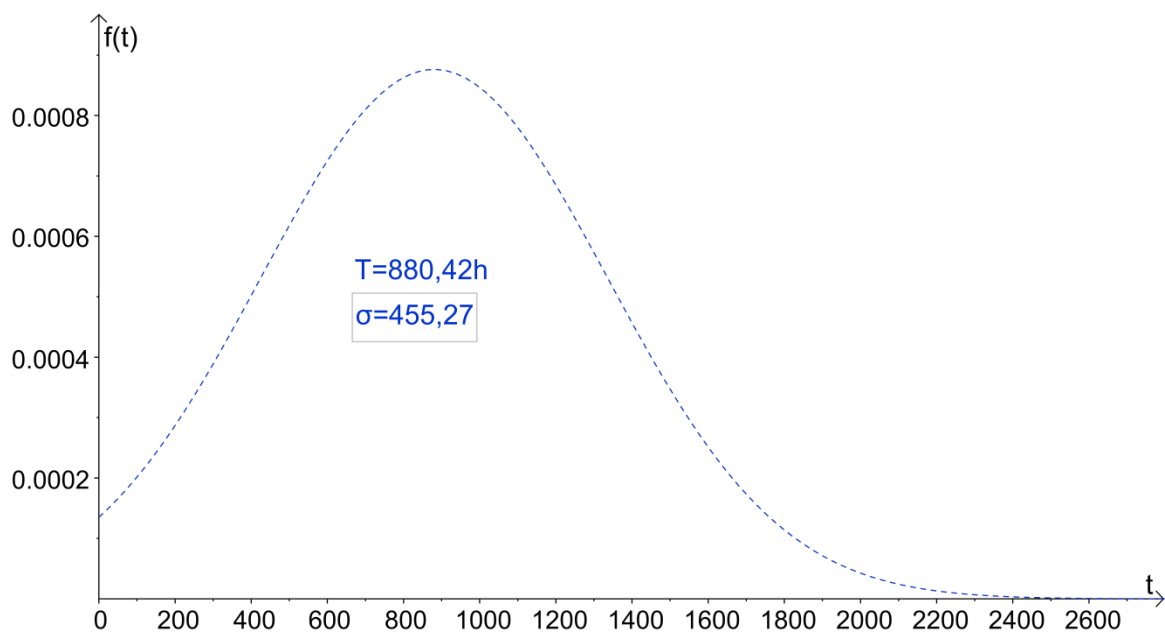


Figura 29 - Curva normal com parâmetros estimados pelo mmv.

Aplicando o método da máxima verosimilhança às distribuições propostas, obtêm-se os estimadores que se encontram representados na Tabela 7.

Tabela 7 - Estimadores do método da máxima verosimilhança [2] [14].

Distribuição	Estimadores	
Normal	$\hat{t} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i$	$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2}$
Lognormal	$\hat{t}' = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i'$	$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (t_i' - \bar{t}')^2}$
Exponencial	$\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^N t_i}$	
Weibull	*	*

* Não foi encontrada a expressão correspondente para os estimadores do método de máxima verosimilhança para a distribuição de Weibull. Gourdin et al. (1994) [15] e Gaeddert, Joseph D. (2005) [16] referem que não é possível obter uma expressão directa para os estimadores de máxima verosimilhança para a distribuição de Weibull. O método a adoptar é iterativo e consta na literatura referida.

Montgomery et al. [14] concluíram que no que diz respeito ao método dos mínimos quadrados, pode ser referido que é um método bastante eficaz para funções que podem ser linearizadas pois os seus cálculos são simples. Por outro lado, para algumas distribuições complexas é por vezes difícil ou até mesmo impossível de utilizar.

Em relação ao método dos momentos, é importante referir que os estimadores são normalmente de fácil cálculo, no entanto, caso sejam pretendidos momentos mais elevados, as expressões dos estimadores são exageradamente grandes e difíceis de utilizar. Segundo Kececioglu, Dimitri [2], este método é geralmente ineficiente e é apenas utilizado no caso de não existirem outros estimadores. Gaeddert, Joseph D. (2005) [16] refere que este método apenas representa uma pequena parte do total da amostra pelo que não fornece precisão no que diz respeito a distribuições muito estreitas, ou seja, que estejam concentradas em torno de uma assíntota vertical.

Finalmente, o método da máxima verosimilhança é de modo geral consistente e preciso. Kumphon, Bungon, (2012) [17] refere no seu estudo que este método pode apresentar alguns problemas em distribuições tripamétricas. Nestas últimas, o método da máxima verosimilhança não é adequado quando as variáveis representativas do factor de forma assumem o valor exacto onde a forma se altera, por exemplo, $\beta = 1$ para a distribuição de Weibull.

Após escolher o método de estimação de parâmetros pretendido, as expressões das distribuições encontram-se disponíveis. Já é possível realizar testes de ajuste a todas as distribuições enunciadas para validar se de facto se ajustam aos dados da amostra. No próximo capítulo apresentam-se quatro tipos de testes de ajuste: o teste de ajuste Qui-Quadrado, o de Kolmogorov-Smirnov, o de Anderson-Darling e finalmente o teste de ajuste de Cramer-Von Mises.

5 – Seleção da distribuição

Depois de obter uma amostra de tempos até à falha, é recomendado construir um histograma com estes dados. Verifica-se no histograma representado na figura 30, que existe uma maior tendência para que a frequência seja mais elevada ao centro e mais diminuta nas laterais. Este comportamento é semelhante à distribuição normal ou talvez à distribuição de Weibull. Dificilmente este histograma seria modelado por uma distribuição exponencial visto que a sua representação gráfica é muito diferente.

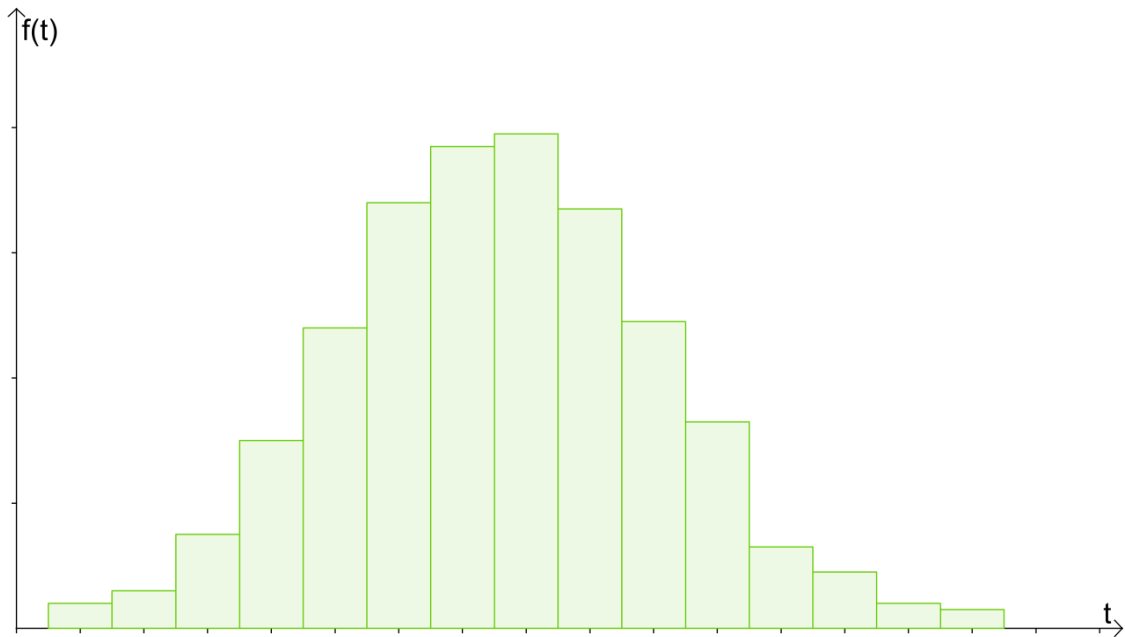


Figura 30 - Histograma de dados agrupados

Estas são opiniões que se podem tecer sobre o histograma da Figura 30. É importante referir que os modelos das distribuições são teóricos e tenta-se ajustar à realidade mas em casos reais é muito difícil que estes dois coincidam. Pode observar-se graficamente na Figura 31 um bom ajustamento dos dados da amostra á distribuição escolhida.

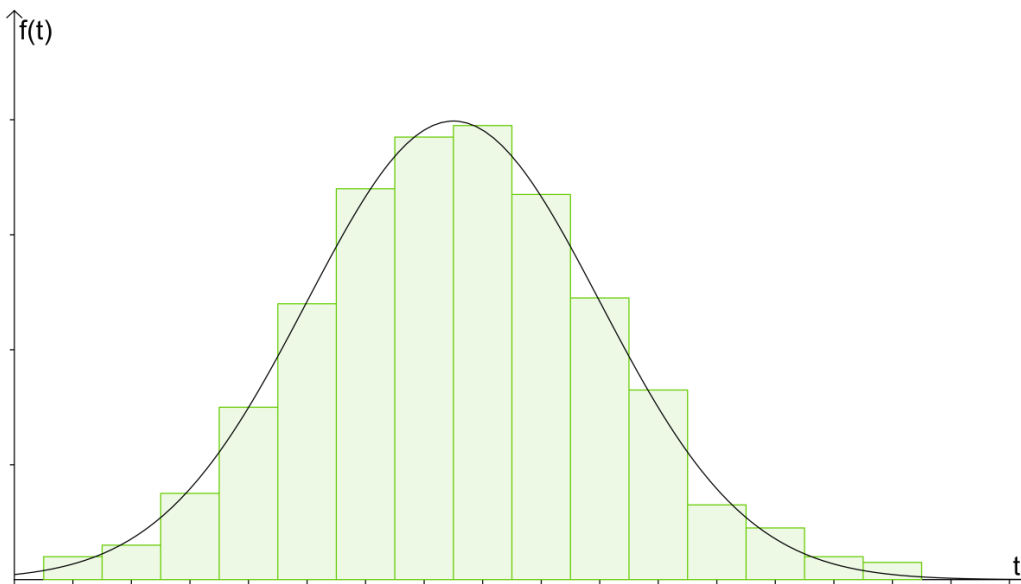


Figura 31 – Exemplo de uma boa adequação da função aos dados.

Analogamente, na Figura 32 verifica-se que a a mesma distribuição não parece ser adequada para o conjunto de dados de outra amostra. O histograma desta figura talvez pudesse ser representado por um modelo não simétrico, como a distribuição lognormal.

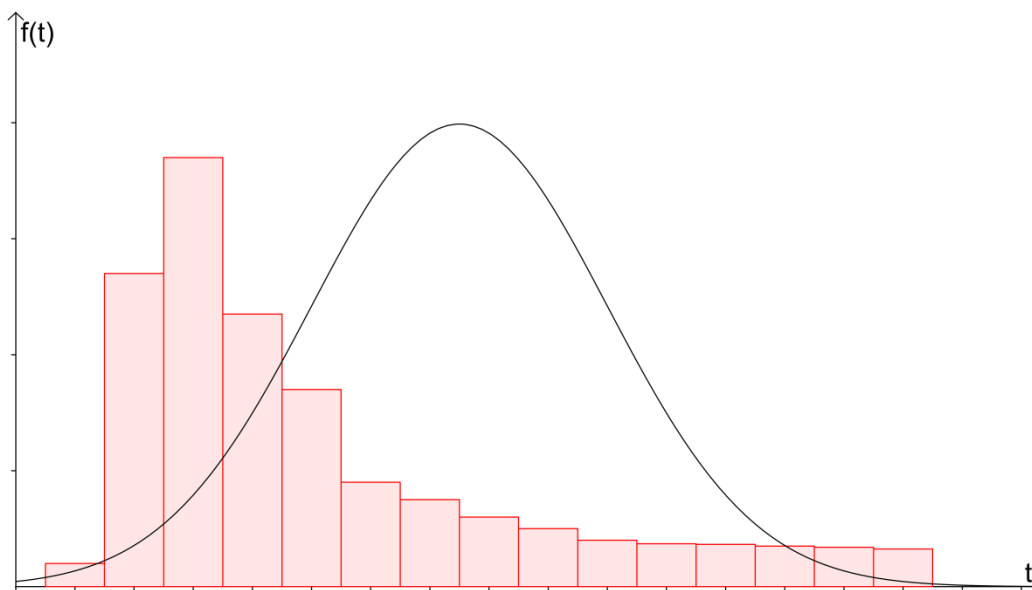


Figura 32 – Exemplo de uma má adequação da função aos dados.

A análise feita anteriormente foi baseada apenas numa inspeção gráfica dos dados e numa amostra em concreto. Para poder generalizar este resultado, isto é, atribuir uma confiança ao facto de decidir se uma distribuição se adequa ou não aos nossos dados, é necessário recorrer à inferência estatística. Define-se inferência estatística como uma vertente da estatística cujo propósito é generalizar para a população os resultados de uma determinada amostra. É, no entanto, necessário quantificar a incerteza associada a estas afirmações. Tanto a estimação de parâmetros como os testes de hipóteses fazem parte da inferência estatística [14]. Os testes de hipóteses podem ser paramétricos ou não paramétricos consoante o que se pretende testar. Os testes paramétricos são utilizados para testar parâmetros propriamente ditos, por exemplo, se quisermos testar a hipótese de um fabricante que afirma que o seu produto dura, em média, mais de 5000 horas. Já os testes não paramétricos permitem testar outro tipo de hipóteses que não apenas sobre parâmetros populacionais, ou seja, considerações que se pretendem tecer sobre o comportamento de um determinado objecto alvo.

Dentro dos testes não paramétricos existem vários testes, como por exemplo testes de aleatoriedade, independência, homogeneidade, ajustamento, etc. Uma vez que o objectivo deste trabalho é determinar a fiabilidade de um bem a partir de um modelo de probabilidade teórico, serão estudados os testes de ajuste, uma vez que o objectivo é escolher um modelo a partir de um conjunto de dados. Estes testes servem para testar a hipótese de que uma determinada amostra aleatória foi extraída de uma população que segue uma distribuição especificada. Na aplicação Excel desenvolvida foram implementados os testes de Qui-Quadrado, Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling e Cramer-Von Mises que Abd-El Fattah [3] refere serem os mais relevantes para validar o ajustamento de distribuições estatísticas.

Os testes estão baseados na teoria de teste de hipóteses desenvolvida por Jerzy Neyman e Egon Pearson [18] [21] e ajudam a determinar se uma hipótese, chamada nula - H_0 é ou não rejeitada. O teste é desenvolvido admitindo que a hipótese nula é verdadeira e, uma vez que as hipóteses são complementares, a rejeição de H_0 tem como consequência aceitar H_1 .

$$H_0: T \sim F \quad vs \quad H_1: T \not\sim F$$

Para exemplificar, admitindo que é pretendido verificar se a distribuição normal pode ser usada para modelar tempos até à falha. Seja T o tempo até à falha de uma população de transístores, formulam-se as seguintes hipóteses:

$H_0 - T$ tem distribuição normal com um grau de incerteza de 5%

$H_1 - T$ não tem distribuição normal com um grau de incerteza de 5%

Para construir o histograma, é ainda necessário agrupar os dados por classes da seguinte forma:

- O número ideal de intervalos ou classes (k) é dado pela regra de Sturges (existem outras, tais como a regra do quadrado mas optou-se por detalhar a regra de Sturges):

$$k = 1 + 3.322 * \log_{10}(n) \quad (5.1)$$

Para o caso específico do exemplo que tem vindo a ser seguido, virá:

$$k = 1 + 3.322 * \log_{10}24 \approx 6$$

- A amplitude da classe w é obtida por:

$$w = \frac{r}{k} \quad (5.2)$$

Onde

$$r = t_{Max} - t_{Min} \quad (5.3)$$

Assim sendo,

$$r = 2130 - 260 = 1870$$

E

$$w = \frac{1870}{6} = 312$$

- Os valores de início das classes são determinados começando pelo valor mínimo da amostra e somando a amplitude de classe. Os valores de fim de classe são obtidos adicionando ao valor de início de classe a quantidade ($w - \varepsilon$) onde ε é a escala mínima da nossa leitura. O limite inferior

de cada classe é obtido subtraindo a quantidade $\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ ao valor de início de classe e o limite superior de cada classe é calculado somando a quantidade $\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ ao valor de fim de classe. Esta última operação serve para englobar os valores extremos.

Chegar-se-á a uma quantidade de classes (k) descritas por:

Classe 1:]*Limite inferior 1*; *Limite superior 1*];

Classe2:]*Limite inferior 2* ; *Limite superior 2*];

...

Classe k:]*Limite inferior k* ; *Limite superior k*].

Ou

Limite inferior 1 = $260 - \frac{1}{2} = 259,5$ Como se devem estender as classes ao domínio das distribuições, irão ser necessários acertos. Quando se verificar a frequência esperada, por exemplo, para a normal, o limite inferior da primeira classe deve ser igual a $-\infty$ e a última igual a $+\infty$.

$$\textit{Limite superior 1} = 260 + 312 - 1 - \frac{1}{2} = 571,5$$

Ou seja,

Classe 1:] $-\infty$; 571,5];

Classe 2:]571,5; 883,5];

... ;

Classe 6:]1819,5; $+\infty$ [

- Para saber a frequência de observação por classe é necessário contar todos os valores da nossa amostra que estão compreendidos entre o limite inferior e o limite superior de cada classe. Caso o valor de frequência de observação numa classe seja inferior a 5, é necessário agrupar esta classe com a classe anterior somando os valores de frequências de observação e por conseguinte

aumentando a amplitude da classe. Se ainda assim esta soma for inferior a 5, é necessário continuar a agrupar classes até obter um valor de observações igual ou superior a 5. Esta foi a tarefa mais complicada de modelar na aplicação de Excel e foi necessário recorrer a Visual Basic para a realizar.

Tabela 8 – Frequência observada, Intervalo considerado e agrupamento de classes do exemplo 2.

Intervalo considerado	Frequência observada O_i		Intervalo considerado	Frequência observada O_i
]259,5;571,5]	7	→] 259,5;571,5]	7
]571,5;883,5]	7]571,5;883,5]	7
]883,5;1195,5]	5]883,5;1195,5]	5
]1195,5;1507,5]	3]1195,5;2131,5]	5
]1507,5;1819,5]	0			
]1819,5;2131,5]	2			

- A frequência esperada (E_i), ou seja, a teórica obtém-se pela expressão:

$$E_i = N \times Q_E(t_i) \quad (5.4)$$

Onde $Q_E(t_i)$ é a probabilidade teórica de cada uma das classes assumindo que H_0 é verdadeira, logo, depende do modelo que está na hipótese. Apresentam-se na Tabela 9 as várias expressões de frequência esperada para cada distribuição:

Tabela 9 - Expressão da frequência esperada para cada distribuição[2].

Distribuição	expressão de $Q_E(t_i)$
Normal	$\varphi\left(\frac{t_i - \bar{t}}{\sigma}\right)$
Lognormal	$\varphi\left(\frac{\log_e t_i - \bar{t}}{\sigma}\right)$
Exponencial	$1 - e^{-\frac{t_i}{m}}$
Weibull	$1 - e^{-\left(\frac{t_i - \gamma}{\eta}\right)^\beta}$

Aplicando esta tabela ao exemplo 2:

Tabela 10 - Frequência esperada, Intervalo considerado e agrupamento de classes para o exemplo 2.

Intervalo considerado	Frequência esperada E_i
$]-\infty; 571,5]$	6,07
$[571,5; 883,5]$	5,98
$[883,5; 1195,5]$	5,96
$[1195,5; \infty[$	5,90

Observe-se a diferença entre as duas frequências no histograma seguinte:

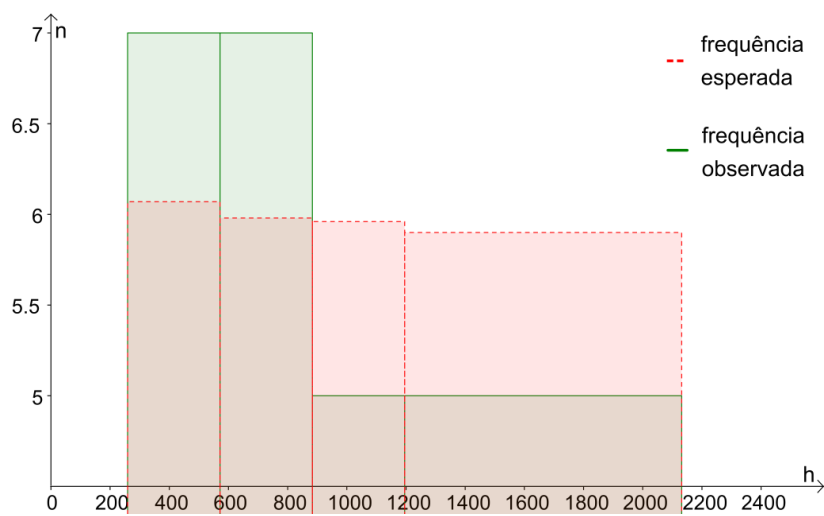


Figura 33 - Histograma comparativo das frequências estudadas.

Serão apresentados de seguida os testes de ajuste que irão determinar para cada distribuição (cujos estimadores foram apresentados no capítulo 4) se é possível ou não utilizar uma determinada distribuição para modelar os tempos de vida.

5.1 - Testes de ajuste Qui-Quadrado

O teste de ajuste Qui-Quadrado foi desenvolvido por Karl Pearson e completado por Ronald Fisher no início do século XX [20]. O teste de ajuste Qui-Quadrado serve para testar a hipótese que as observações seguem uma determinada distribuição, discreta ou contínua, com ou sem parâmetros conhecidos. Este teste consiste na comparação da densidade com a função distribuição de probabilidades.

Numa primeira fase é necessário que seja calculado um valor observado de χ_0^2 (Qui-quadrado) para que seja posteriormente comparado a um valor crítico χ_{Cr}^2 (Qui-quadrado crítico). Através desta comparação, será permitido afirmar que a distribuição a ser testada se ajusta (ou não) aos dados da amostra, com um determinado nível de confiança.

Toda a informação para aplicar o teste Qui-Quadrado está agora disponível. Este é um método sequencial [2] que se apresenta de seguida, aplicado ao exemplo 2:

- Deve ser obtida a estatística de teste desta amostra através da expressão:

$$\chi_0^2 = \sum_{i=0}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \quad (5.5)$$

$$\chi_0^2 = \frac{(7 - 6,07)^2}{6,07} + \frac{(7 - 5,98)^2}{5,98} + \frac{(5 - 5,96)^2}{5,96} + \frac{(5 - 5,90)^2}{5,90} = 0,607$$

O valor da estatística de teste é sempre positivo ou nulo. Caso seja nulo, significa que existe um ajuste perfeito. Analogamente, quanto maior o valor de χ_0^2 , maior será a sua diferença e menos a distribuição escolhida se adequa à nossa amostra. Neste caso, deve ser estabelecido um limite de χ_0^2 para que seja possível afirmar que a distribuição escolhida se adequa ou não à amostra. Este valor (χ_{cr}^2) é obtido a partir da tabela de valores críticos de Qui quadrado (Tabela 11), cujas entradas são α (nível de risco) e o grau de liberdade n , obtido por:

$$n = k - 1 - m \tag{5.6}$$

m é o número de parâmetros estimados da amostra e k o número de classes.

No exemplo 2, os parâmetros representados são o desvio padrão e a média, logo, $m = 2$.

$$n = 4 - 1 - 2 = 1$$

Tabela 11 – Constantes críticas Qui Quadrado [2]

Nível de incerteza (%)										
n	0,005	0,01	0,025	0,05	0,1	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995
1	7,879	6,635	5,024	3,841	2,706	0,016	0,004	0,001	0,000	0,000
2	10,597	9,210	7,378	5,991	4,605	0,211	0,103	0,051	0,020	0,010
3	12,838	11,345	9,348	7,815	6,251	0,584	0,352	0,216	0,115	0,072
4	14,860	13,277	11,143	9,488	7,779	1,064	0,711	0,484	0,297	0,207
5	16,750	15,086	12,833	11,070	9,236	1,610	1,145	0,831	0,554	0,412

Finalmente, o valor crítico é:

$$\chi_{cr}^2 = 3,841$$

Se $\chi_0^2 < \chi_{cr}^2$, não se rejeita a hipótese que a distribuição escolhida se ajusta à nossa amostra, com uma percentagem de $1 - \alpha$ de nível de confiança.

No exemplo em questão, $\chi_0^2 = 0,607 < \chi_{Cr}^2 = 3,841$, logo, H_0 não é rejeitada e portanto não existe evidência de que a distribuição normal não se adequa a este conjunto de dados.

Todo este processo está automatizado na aplicação de Excel e apresenta-se na Figura 34:

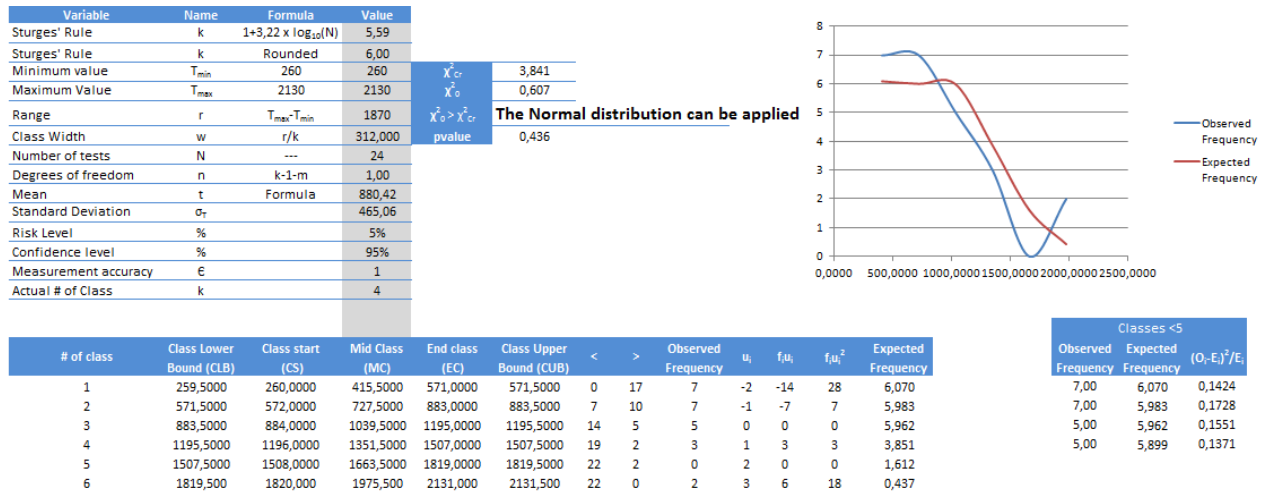


Figura 34 - Teste de Qui Quadrado na aplicação de Excel

O teste de Qui Quadrado é um teste simples de utilizar pelo que é comum ver a sua aplicação. Não é recomendada a aplicação do teste Qui Quadrado para amostras inferiores a 25 testes. Isto deve-se ao facto de que a amostra deve ser tratada em classes de pelo menos 5 observações, caso contrário, irá resultar na perda de informação valiosa [3].

5.2 - Teste de Ajuste Kolmogorov-Smirnov

O teste de ajuste de Kolmogorov-Smirnov consiste em encontrar a distância máxima entre a função distribuição acumulada esperada e a observada. Para tal, é necessário obter uma distância máxima entre as duas (D_{Max}). Posteriormente, irá ser confrontada com um valor teórico (D_{Cr}). Só assim, através deste teste é possível afirmar que a distribuição que está a ser testada se ajusta à nossa amostra, com o nível de confiança requerido.

Adverte-se que é necessário ter cuidado com os *outliers* pois podem levar a conclusões erradas. Esta é uma ressalva importante pois está a ser utilizada uma estatística de teste que utiliza um máximo.

Ainda seguindo o exemplo 2, assumindo as mesmas hipóteses formuladas H_0 e H_1 , o teste de ajuste de Kolmogorov-Smirnov (denominado de agora em diante de teste de ajuste K-S) pode ser obtido através da seguinte sequência [2]:

- Após cada falha, determinar o número de falhas t_i observadas anteriormente. Posteriormente, deve-se dividir essa quantidade pelo número de falhas N . Cada um destes valores corresponde à probabilidade observada do teste de ajuste de KS:

$$Q_o(t_i) = \frac{f_i}{n}, i = 1, 2, \dots, n \quad (5.7)$$

$$Q_o(t_3) = \frac{3}{24} = 0,125$$

Onde f_i é o número total de observações no instante t_i .

- Calcular a probabilidade esperada através da expressão da distribuição a ser testada para cada falha: $Q_E(t_i)$ (ver subcapítulo anterior para obter as expressões matemáticas correspondentes). Da Tabela 9:

$$Q_E(t_3) = 0,1611$$

- Determinar para cada falha a diferença absoluta entre as duas quantidades supra mencionadas:

$$D_i = |Q_o(t_i) - Q_e(t_i)| \quad (5.8)$$

$$D_3 = |0,1250 - 0,161| = 0,0361$$

- Depois de determinar todas as distâncias, determina-se o valor D_{Max} correspondente ao máximo valor absoluto D_i que no presente caso exemplificativo será a D_{19} (Figura 35).

$$D_{Max} = D_{19} = 0,133$$

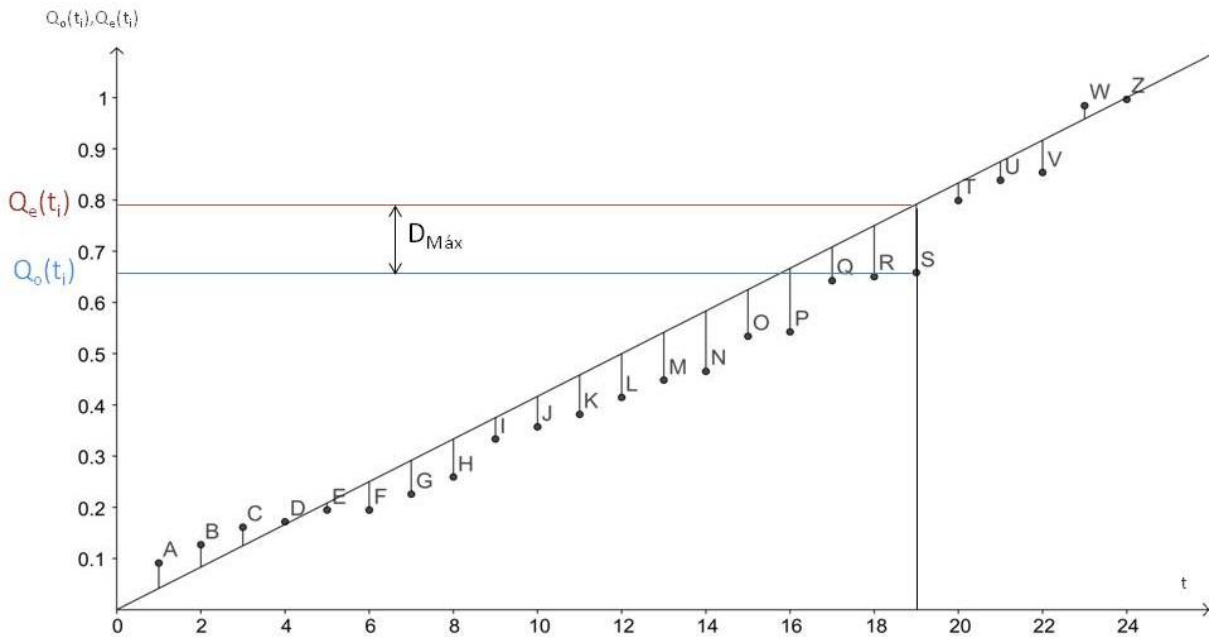


Figura 35 - Distâncias de KS para o exemplo 2.

- Determinar através da tabela de K-S (Apêndice C) qual o valor crítico D_{Cr} que não deve ser ultrapassado pelo valor D_{Max} entrando com o valor da dimensão da amostra n e com o desejado nível de confiança α .
- Se o valor D_{Max} for inferior ao valor D_{Cr} diz-se que segundo o teste de ajuste de K-S não é rejeitado H_0 .

No exemplo 2, $D_{Max} = 0,133 < D_{Cr} = 0,275$, logo, H_0 não é rejeitada e portanto não existe evidência de que a distribuição normal não se adequa a este conjunto de dados

Variable	Name	Formula	Value
Number of failures	N	--	24
Average	Tbarra		880,417
Standard Deviation	σ_c		465,062
Allowable distance	D_{Cr}		0,2748
Maximum distance	D_{Max}		0,1334

Level of significance	0,05
D_{Cr}	0,275
D_{Max}	0,133
$D_{Cr} > D_{Max}$	The Normal distribution can be applied

Failure number	Ordered data	Observed Unreliability	Expected Unreliability	Absolute difference
1	260,0000	0,0417	0,0911	0,0494
2	350,0000	0,0833	0,1270	0,0437
3	420,0000	0,1250	0,1611	0,0361
4	440,0000	0,1667	0,1718	0,0052
5	480,0000	0,2083	0,1946	0,0137
6	480,0000	0,2500	0,1946	0,0554
7	530,0000	0,2917	0,2256	0,0661
8	580,0000	0,3333	0,2591	0,0742
9	680,0000	0,3750	0,3333	0,0417
10	710,0000	0,4167	0,3570	0,0596
11	740,0000	0,4583	0,3814	0,0770
12	780,0000	0,5000	0,4145	0,0855
13	820,0000	0,5417	0,4483	0,0933
14	840,0000	0,5833	0,4654	0,1180
15	920,0000	0,6250	0,5339	0,0911
16	930,0000	0,6667	0,5425	0,1242
17	1050,0000	0,7083	0,6423	0,0660
18	1060,0000	0,7500	0,6503	0,0997
19	1070,0000	0,7917	0,6582	0,1334
20	1270,0000	0,8333	0,7989	0,0344
21	1340,0000	0,8750	0,8385	0,0365
22	1370,0000	0,9167	0,8538	0,0629
23	1880,0000	0,9583	0,9842	0,0259

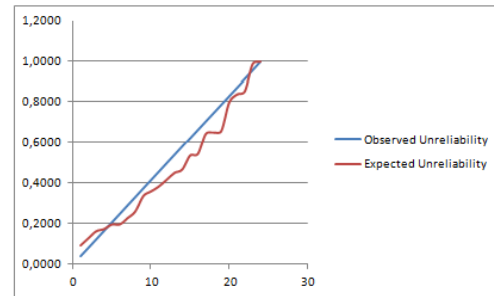


Figura 36 - Teste de Kolmogorov Smirnov na aplicação de Excel

5.3 - Teste de ajuste Anderson-Darling e Cramer-Von Mises

Existem mais testes de ajuste baseados no mesmo princípio de comparação entre valores esperados e valores observados, como por exemplo os testes de ajuste de Anderson-Darling (AD) e Cramer-Von Mises (CVM). A diferença entre estes dois testes reside na expressão do teste estatístico e consequentemente nos respectivos valores teóricos de referência. Estes dois testes apresentam bastantes semelhanças e por este motivo, irão ser tratados em paralelo. Para o teste AD, o valor crítico é A_{Cr}^2 e para o de CVM é W_{Cr}^2 .

Para aplicar os testes acima mencionados ao exemplo 2, deve-se proceder da seguinte forma [2]:

- Ordenar os dados para que $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$ de uma amostra de n dados.
- Calcular o valor da probabilidade esperada como referido nos restantes testes.
- Calcular o valor observado para o teste de AD:

$$A_N^2 = - \sum_{i=1}^n A_i^2 - n \quad (5.9)$$

Onde

$$A_i^2 = \frac{2i-1}{n} \{ \log_e [Q_E(t_i)] + \log_e [1 - Q_E(t_{n+1-i})] \} \quad (5.10)$$

Por exemplo, para a linha que corresponde a t_8 :

$$A_8^2 = \frac{2 \times 8 - 1}{24} \{ -1,3504 + (-1,1632) \} = -1,57094$$

Após calcular todos estes valores, aplica-se a equação (5.9) e obtém-se um valor observado de $A_N^2 = 1,6780$.

Para o teste de CVM:

- Calcular o valor observado para o teste de CVM

$$W_N^2 = \sum_{i=1}^n W_i^2 + \frac{1}{12n} \quad (5.11)$$

Onde

$$W_i^2 = \left[Q_E(t_i) - \frac{i - 0,5}{n} \right]^2 \quad (5.12)$$

Por exemplo, para a linha que corresponde a t_8 :

$$W_8^2 = \left[0,2591 - \frac{8 - 0,5}{24} \right]^2 = 0,004936$$

Após calcular todas estas quantidades, aplica-se a equação (5.11) obtém-se um valor observado de $W_N^2 = 0,0878$.

Para colmatar o facto dos testes de AD e CVM poderem apresentar incorrecções em amostras pequenas, Stephens [21] demonstrou teoricamente e através de Simulação de Monte Carlo que uma pequena alteração a estes parâmetros é preferível, sendo o resultado mais fiável e renomeou os mesmos para A_N^{2*} e W_N^{2*} . Para o teste de AD, apenas referiu que o tamanho da amostra deve ser igual ou superior a 5. Assim, quando se verifica a notação A_N^{2*} , entende-se que a forma de obtenção do valor observado é a mesma mas parte-se de uma premissa diferente ($N \geq 5$), portanto, $A_N^{2*} = A_N^2$ no que diz respeito ao valor numérico.

Quanto ao valor de CVM, Stephens optou por transforma-lo da seguinte forma:

$$W_N^{2*} = \left(W_N^2 - \frac{0,4}{n} + \frac{0,6}{n^2} \right) \left(1 + \frac{1}{n} \right) \quad (5.13)$$

Para o exemplo 2,

$$W_N^{2*} = \left(0,0878 - \frac{0,4}{24} + \frac{0,6}{24^2}\right) \left(1 + \frac{1}{24}\right) 0,0752$$

Finalmente, pode ser referido que as hipóteses formuladas podem ser rejeitadas ou não, aplicando o teste de ajuste de AD e CVM:

Rejeita-se H_0 se: $A_N^{2*} \geq A_{Cr}^{2*}$

Rejeita-se H_0 se: $W_N^{2*} \geq W_{Cr}^{2*}$

As constantes críticas estão representadas na Tabela 12:

Tabela 12 - Constantes críticas de Anderson-Darling e Cramer-Von Mises [2].

	α				
	15%	10%	5%	2,5%	1%
A_{Cr}^{2*}	1,610	1,933	2,492	3,070	3,857
W_{Cr}^{2*}	0,284	0,347	0,461	0,581	0,743

Como $A_N^{2*} = 1,6780 < A_{Cr}^{2*} = 2,492$, segundo o teste de ajuste de Anderson-Darling, H_0 não é rejeitada e portanto não existe evidência de que a distribuição normal não se adequa a este conjunto de dados.

Adicionalmente, como $W_N^{2*} = 0,0752 < W_{Cr}^{2*} = 0,461$, segundo o teste de ajuste de Cramer-Von Mises, H_0 também não é rejeitada, sem evidência de que a distribuição normal não se adequa a este conjunto de dados.

Este raciocínio também se encontra na aplicação de Excel como se verifica na Figura 37:

Data Input	Rank	Ignore	Variable	Name	Formula	Value
N	Failure		Number of failures	N	--	24
1	260,000	1	Average	Tbarra		880,417
2	350,000	2	Standard Deviation	σ_r		465,062
3	420,000	3	A^2_N			1,6780
4	440,000	4	W^2_N			0,087833
5	480,000	5	$W^{2,*}_N$			0,075217
6	480,000	5				
7	530,000	7				
8	580,000	8				
9	680,000	9				
10	710,000	10				
11	740,000	11				
12	780,000	12				
13	820,000	13				
14	840,000	14				
15	920,000	15				
16	930,000	16				
17	1050,000	17				
18	1060,000	18				
19	1070,000	19				
20	1270	20				
21	1340	21				
22	1370	22				
23	1880	23				
24	2130	24				

Level of significance	Value
A^2_{Cr}	0,05
W^2_{Cr}	2,492
$A^2_N > A^2_{Cr}$	0,461
$W^2_N > W^2_{Cr}$	

The Normal distribution can be applied

N+1-i	Failure number	Ordered data	(2i-1)/N	(i-0.5)/N	Expected Unreliability	Log _e (Q ₀ T)	Log _e (Q ₀ T _{N+1-i})	W _i	A _i
24	1	260,000	0,0417	0,02083	0,0911	-2,3959	-3,8712	0,004936	-0,261127971
23	2	350,000	0,1250	0,06250	0,1270	-2,0633	-2,7726	0,004164	-0,604487263
22	3	420,000	0,2083	0,10417	0,1611	-1,8258	-2,2618	0,003240	-0,851581559
21	4	440,000	0,2917	0,14583	0,1718	-1,7613	-1,9253	0,000675	-1,075261967
20	5	480,000	0,3750	0,18750	0,1946	-1,6367	-1,6740	0,000051	-1,241506218
19	6	480,000	0,4583	0,22917	0,1946	-1,6367	-1,4733	0,001193	-1,42542242
18	7	530,000	0,5417	0,27083	0,2256	-1,4891	-1,3063	0,002048	-1,514139385
17	8	580,000	0,6250	0,31250	0,2591	-1,3504	-1,1632	0,002846	-1,570939596
16	9	680,000	0,7083	0,35417	0,3333	-1,0989	-1,0380	0,000437	-1,513594238
15	10	710,000	0,7917	0,39583	0,3570	-1,0300	-0,9268	0,001507	-1,549076939
14	11	740,000	0,8750	0,43750	0,3814	-0,9640	-0,8267	0,003153	-1,566871585
13	12	780,000	0,9583	0,47917	0,4145	-0,8806	-0,7357	0,004179	-1,548982667
12	13	820,000	1,0417	0,52083	0,4483	-0,8023	-0,6523	0,005258	-1,515184148
11	14	840,000	1,1250	0,56250	0,4654	-0,7649	-0,5754	0,009434	-1,507814957
10	15	920,000	1,2083	0,60417	0,5339	-0,6275	-0,5039	0,004935	-1,367137832
9	16	930,000	1,2917	0,64583	0,5425	-0,6117	-0,4372	0,010687	-1,354786291
8	17	1050,000	1,3750	0,68750	0,6423	-0,4427	-0,3747	0,002042	-1,123888936
7	18	1060,000	1,4583	0,72917	0,6503	-0,4303	-0,3159	0,006219	-1,088155346
6	19	1070,000	1,5417	0,77083	0,6582	-0,4182	-0,2603	0,012678	-1,045983473
5	20	1270,000	1,6250	0,81250	0,7989	-0,2245	-0,2076	0,000185	-0,702255989

Figura 37 - Testes de Anderson-Darling e Cramer Von-Mises na aplicação de Excel

Enquanto o teste Qui Quadrado mede a soma total do quadrado da distância entre as duas curvas ponderado à frequência esperada, o teste de KS analisa a distância máxima entre as distribuições empírica e teórica. Os dois últimos testes, de AD e CVM partem do mesmo princípio visto que ambas integram o quadrado da distância entre as duas funções. A diferença é que o de AD difere na ponderação desta quantidade.

É interessante comparar estes testes. O teste Qui Quadrado não é fiável para amostras inferiores a 25 testes tendo em conta que devem ser tratados os dados em classes de pelo menos 5 observações. Tirando este facto, é possível afirmar que o teste é simples e fácil de aplicar e tem a vantagem de poder ser aplicado a dados contínuos e discretos [2].

O teste de Kolmogorov-Smirnov é mais eficaz que o teste Qui Quadrado. Além de poder ser utilizado para qualquer volume amostral (mesmo inferior a 25 amostras), as suas tabelas conseguem ser muito precisas para determinar a validade de uma distribuição [2].

Os testes de Anderson-Darling e Cramer-Von Mises são também mais eficazes que o Qui Quadrado, sendo que também não são influenciados negativamente por amostras reduzidas [2].

De um modo geral, é importante referir que os testes de K-S e CVM são mais eficazes a detectar variações a meio da distribuição enquanto o de AD é mais eficaz a salientar variações nas extremidades da distribuição [2].

Para não tornar a explicação dos métodos muito densa, tem-se vindo a detalhar e explicar os testes de ajuste com a ajuda de uma só distribuição. A aplicação de Excel realiza todos os testes de ajuste a todas as distribuições e fornece de imediato o resultado. Para tal, basta que o utilizador coloque a amostra que recolheu no sítio marcado para o efeito, até um máximo de $n = 1000$ por questões de limites computacionais. Apresenta-se na Figura 38 a folha de entrada da aplicação, sendo que se o utilizador não pretender observar todas as folhas intermédias, obterá de imediato toda a informação requerida. São-lhe apresentados os testes de ajuste que foram realizados e se a distribuição poderá ou não ser utilizada.

		Tests applied to the distributions				Parameters
		Chi square	Kolmogorov-Smirnov	Anderson-Darling	Cramer-Von Mises	
Distributions	Normal	Yes	Yes	Yes	Yes	$\sigma = 465,06$ $t = 880,42$
	Lognormal	No	Yes	Yes	Yes	
	Exponencial	No	No	No	No	$\lambda = 0,002$
	Weibull	Yes	Yes	Yes	Yes	$\beta = 2,222$ $\eta = 991,5$
		Yes	H_0 is not rejected and there is no evidence that the distribution doesn't fit the data			
		No	H_0 is rejected and there is evidence that the distribution doesn't fit the data			

Figura 38 - Folha de entrada da aplicação de Excel

Deixa-se como nota que não está contemplada a estimação de parâmetros na aplicação de Excel mas de qualquer forma, para os cálculos, estão a ser estimados pelo método dos mínimos quadrados.

5.4 - Ordenação

O teste de hipóteses pela abordagem de Neyman-Pearson fornece uma resposta do tipo “rejeita / não rejeita” à hipótese H_0 . Como refere Falissard, Bruno [22], no caso de se pretender uma confirmação de um ajustamento, este método é suficiente e chegar-se-á a uma conclusão parecida com a Tabela 13:

Tabela 13 - Tabela de decisões baseada no método de Neyman-Pearson.

Distribuição Testada	Resultado do teste	Conclusão do teste
Normal	Não se rejeita H_0	Pode ser utilizada
Lognormal	Rejeita-se H_0	Não pode ser utilizada
Exponencial	Não se rejeita H_0	Pode ser utilizada
Weibull	Rejeita-se H_0	Não pode ser utilizada

Analisando a Tabela 13, observa-se que, com um nível de significância de 5%, existem duas distribuições que se podem utilizar. No entanto, qual dessas distribuições é a que melhor se adequa? Para responder a esta questão, é útil recorrer ao indicador p-value [14]. Através da análise do p-value, é possível ordenar as distribuições (admitindo que mais que uma se candidatam a válidas) sabendo que se irá convergir para a mais fiável.

É de salientar que o p-value, ao contrário do que alguns autores referem, não valida a rejeição ou aceitação das hipóteses. Segundo Pandis [23], o p-value é a probabilidade de chegarmos à conclusão do estudo realizado quando a hipótese H_0 é verdadeira, ou ainda, segundo Keriazes [24], é a probabilidade da diferença entre dois testes ter ocorrido por acaso. Para o modelo em questão, quanto maior o p-value, maior é a evidência para a não rejeição da distribuição assumida como verdadeira. Keriazes ainda salienta o uso incorrecto do p-value referindo que não é lógica a abordagem de utilizar o p-value para rejeitar ou aceitar uma hipótese formulada.

Posto isto, pretende-se chegar a uma tabela de decisão parecida com aquela que consta na Tabela 14, onde foram retiradas as distribuições que foram invalidadas pelo método anterior e adicionado o indicador p-value:

Tabela 14 - Tabela de decisões baseada no método de Neyman-Pearson e no p-value.

Distribuição Testada	Resultado do teste	Conclusão do teste	p-value
Normal	Não se rejeita H_0	Pode ser utilizada	0,001
Exponencial	Não se rejeita H_0	Pode ser utilizada	0,05

Através desta análise, é possível obter uma métrica que permitirá escolher o modelo mais adequado aos dados.

Considere-se agora o exemplo 3 com a amostra presente na Tabela 15, fornecida por Kececioglu, Dimitri [2].

Tabela 15 – Amostra de dados do exemplo 3 [2]

Designação da falha	Tempo até à falha (horas)	Designação da falha	Tempo até à falha (horas)
1	2,681	11	2,726
2	2,691	12	2,728
3	2,697	13	2,73
4	2,702	14	2,736
5	2,706	15	2,739
6	2,709	16	2,744
7	2,712	17	2,747
8	2,716	18	2,754
9	2,72	19	2,763
10	2,722		

Utilizando os dados amostrais do exemplo 3 na folha de Excel, observa-se o *output* que consta na Figura 39.

		Tests applied to the distributions				Parameters	
		Chi square	Kolmogorov-Smirnov	Anderson-Darling	Cramer-Von Mises		
Distributions	Normal	Yes	Yes	Yes	Yes	$\sigma = 0,02$	$t = 2,72$
	Lognormal	Yes	Yes	Yes	Yes		
	Exponencial	No	No	Yes	No	$\lambda = 37,46$	
	Weibull	Yes	Yes	Yes	Yes	$\beta = 142,6$	$\eta = 2,733$

Yes	H_0 is not rejected and there is no evidence that the distribution doesn't fit the data
No	H_0 is rejected and there is evidence that the distribution doesn't fit the data

Figura 39 - Resultados da aplicação de Excel para o exemplo 3

Verifica-se por exemplo que para o teste Qui Quadrado existem três distribuições que se adequam aos dados. Aplicando o conceito de p-value (Tabela 16), sobressai a distribuição normal como sendo a que melhor representa a nossa amostra pois possui um p-value maior.

Tabela 16 - Tabela de decisão baseada no p-value para o exemplo 3

	Chi square	p-value
Normal	Yes	87,30%
Lognormal	Yes	59,70%
Weibull	Yes	47,20%

Apresenta-se finalmente o histograma com os dados agrupados e a distribuição completamente caracterizada:

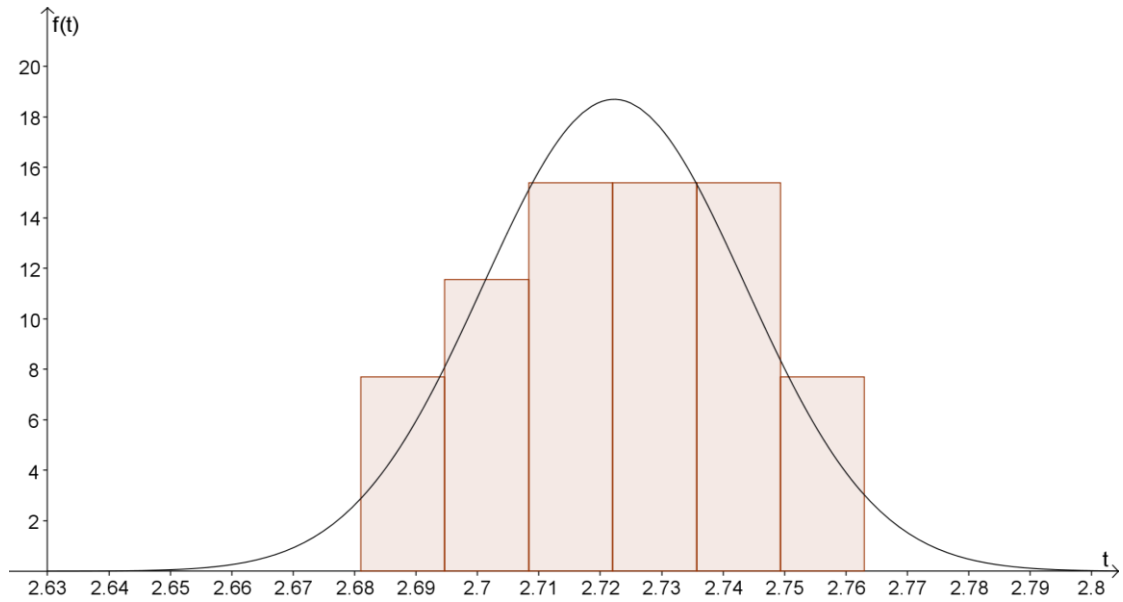


Figura 40 – Adequação da distribuição aos dados do exemplo 3.

De seguida, apresenta-se a função distribuição acumulada de falha através da equação (2.2):

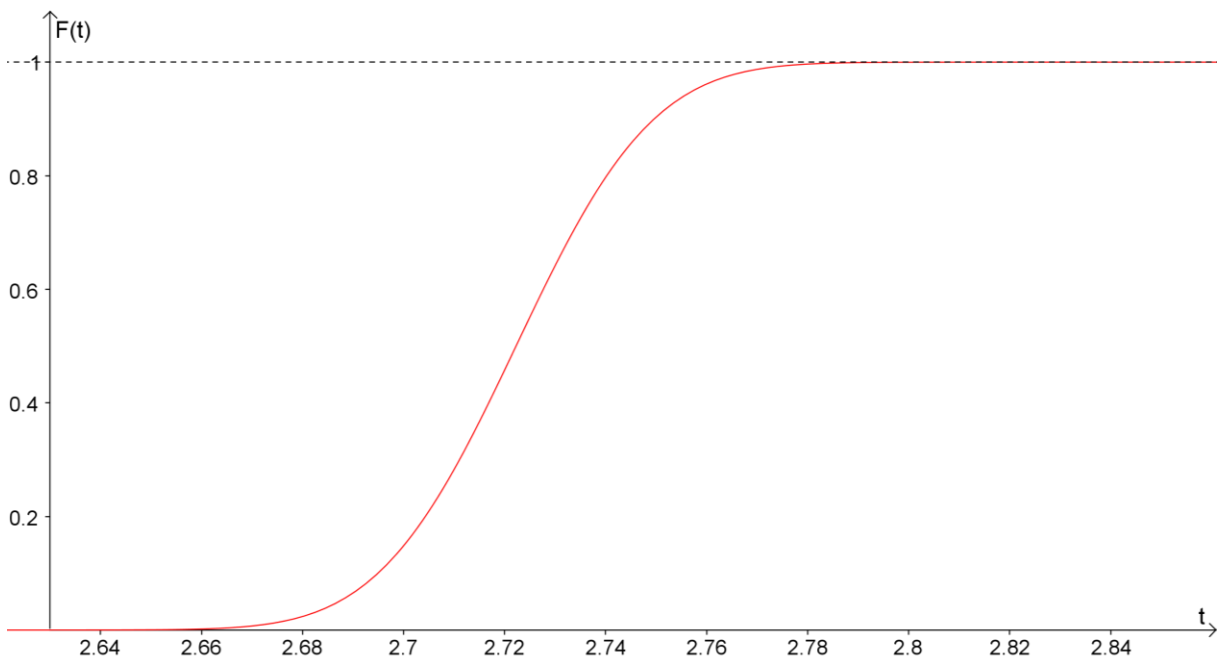


Figura 41 - Fda de falha do exemplo 3

Finalmente, aplicando a equação complementar da função distribuição acumulada (2.3), é atingido o propósito final: a fiabilidade desta amostra que é representativa da sua população:

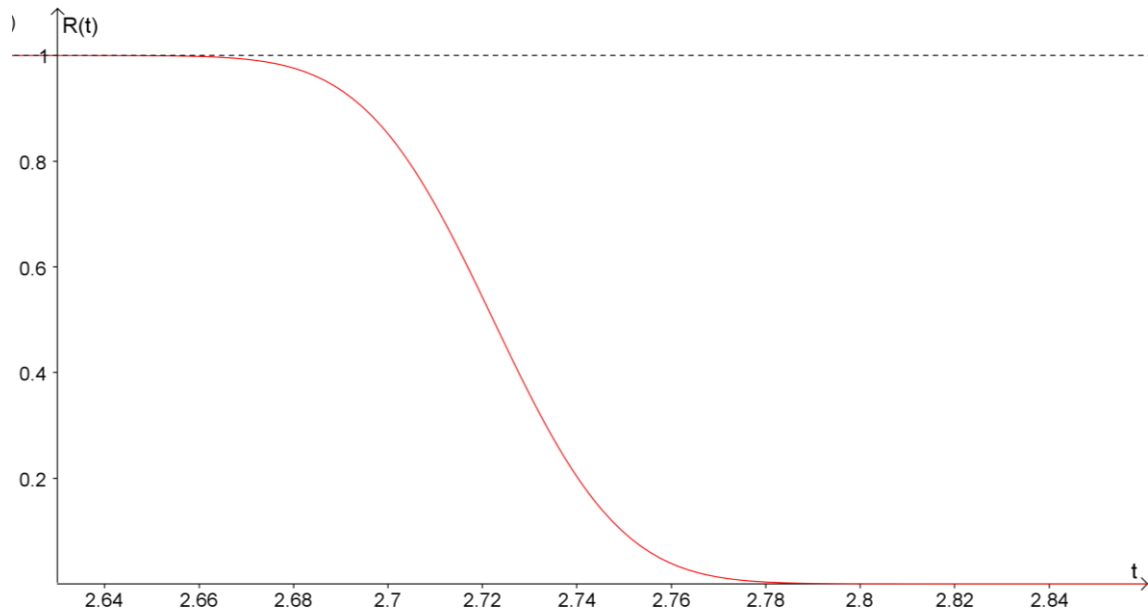


Figura 42 - Curva da fiabilidade representativa da amostra do exemplo 3

É possível agora tecer conclusões sobre esta amostra, extrapolando para a população que originou a mesma. É possível afirmar com 95% de certeza que os bens que compõem a amostra têm uma fiabilidade de 29% no instante $t = 2,74$ e de 80% no instante $t = 2,75$ de serviço:

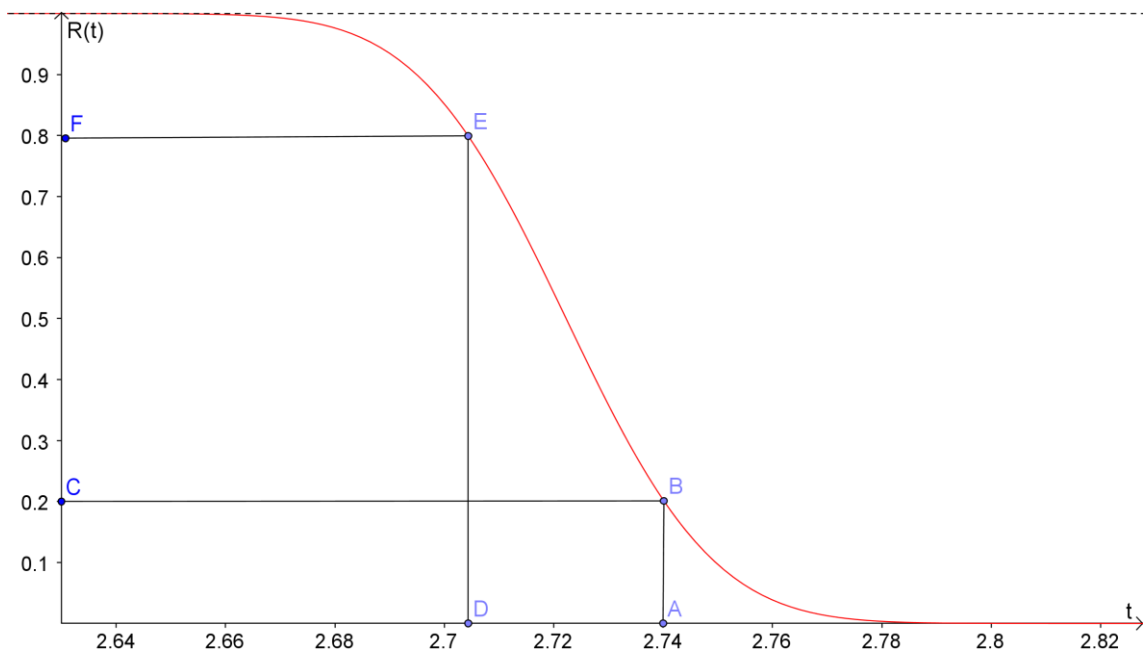


Figura 43 - Interpretação da fiabilidade do exemplo anterior.

Visto que a ordenação das distribuições não era parte integrante da proposta do Trabalho Final de Mestrado, foi tomada a decisão de não explorar a fundo esta vertente. Apenas foi referida a noção de p-value para o teste Qui Quadrado pois verificou-se de interesse para o tema e deixa-se uma porta aberta para um estudo aprofundado deste aspecto da estatística visto que já existe algum estudo associado [26].

6 – Conclusões e trabalhos futuros

Existe uma necessidade crescente de rentabilizar os activos de uma empresa e minimizar custos associados a manutenção e danos de material. Para isso, a fiabilidade tem vindo a ser cada vez mais implementada.

Verificou-se que através da obtenção de uma amostra e do estudo de várias distribuições estatísticas, é possível modelar o comportamento de falha de um activo. As distribuições que foram analisadas são a normal, lognormal, exponencial e Weibull.

Chegou-se à conclusão que através de métodos de estimação de parâmetros, nomeadamente, o método dos mínimos quadrados, dos momentos e da máxima verosimilhança, é possível caracterizar uma distribuição consoante a nossa amostra, obtendo assim uma fdp associada.

De seguida, validou-se se todas as distribuições propostas eram fiáveis aos dados obtidos na amostra através de testes não paramétricos tais como o método qui quadrado, de Kolmogorov Smirnov, de Anderson-Darling e de Cramer-Von Mises. Quando se concluiu que algumas destas distribuições eram candidatas a modelo representativo da amostra, foram ordenadas através do p-value para ditar qual ou quais seriam as distribuições mais adequadas para o objectivo enunciado.

Resume-se o supracitado no diagrama seguinte:

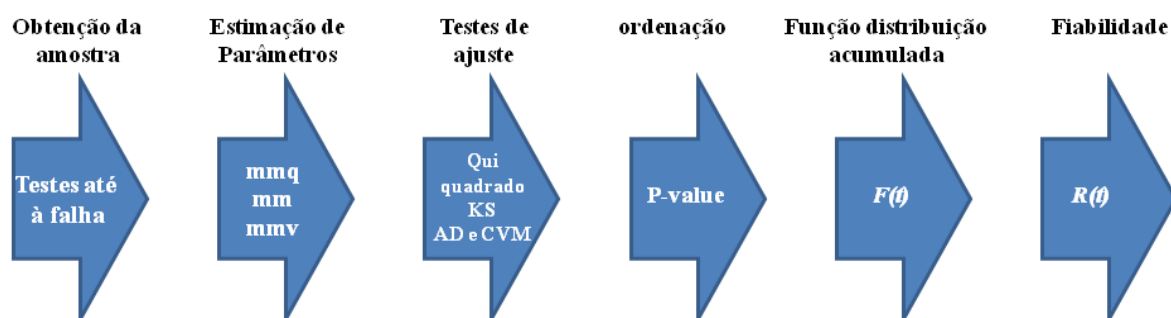


Figura 44 - Workflow da dissertação

É ainda importante referir que existe alguma margem na utilização e na fiabilidade destes dados pois é usualmente utilizado um factor de correcção, o factor de segurança. Mathieu [25] reitera a importância deste factor de segurança e aponta $n_s = 1,1$ como valor mínimo quando são referidos valores probabilísticos em fiabilidade. É claro que quanto maior o risco da falha, ou seja, quanto mais impacto tiver a falha, maior será a tendência a aumentar este factor de segurança. Uma das maiores causas que Mathieu aponta para este factor de segurança é que a fiabilidade vem de outros componentes que aquele que está a ser utilizado e não do próprio pelo que a previsão exacta do tempo da sua falha é impossível através deste método.

O ficheiro de Excel foi elaborado para automatizar os testes de ajuste às várias distribuições estatísticas. Propõe-se como trabalho futuro alargar o âmbito desta folha de cálculo para que também seja contemplada a estimação de parâmetros, assim como outros modelos de probabilidade.

Adicionalmente, propõe-se um estudo sobre a aplicação do p-value aos testes KS, AD e CVM onde se poderá começar pelos estudos dedicados a inserir os testes de KS em Excel com a ajuda de Visual Basic [26].

Ainda para trabalho futuro propõe-se a análise que foi realizada para esta tese mas com substituição de componentes. A estrutura deste trabalho poderá ser idêntica, sendo o detalhe diferente e contribuirá para um valor acrescentado a este documento.

Referências

- [1] EDIMU, M., GAUNT, C.T., HERMAN, R., Using probability distribution functions in reliability analyses - Electric Power Systems Research 81 (2011) 915–921
- [2] KECECIOGLU, Dimitri B., Reliability & Life Testing Handbook, Department of Aerospace and Mechanical Engineering, The University of Arizona, Vol. 1
- [3] ABD-ELFATTAH, A. M., Goodness of fit test for the generalized Rayleigh distribution with unknown parameters, Journal of Statistical Computation and Simulation, 2010
- [4] T. P. Davis, Science, engineering, and statistics, Appl. Stochastic Models Bus. Ind., 2006
- [5] E. Zio, Reliability engineering: Old problems and new challenges, Reliability Engineering and System Safety, 2009, Vol.94(2), pp.125-141
- [6] IDHAMMAR, Christer, A Culture Of Reliability, Pulp & Paper International, Feb, 2012, Vol.54(2), p.32(3)
- [7] PARSEN, Emanuel, Stochastic Processes, An unabridged , corrected republication of the work first published by Holden-Day, Oakland, Calif., 1962
- [8] LEFEBRE, Mário, Applied Probability and Statistics, Departement de mathematiques et de genie industriel, 2000
- [9] http://ec.europa.eu/energy/lumen/overview/howtochoose/packaging/packaging_pt.htm, Comissão Europeia, Como ler a embalagem, visto em 28-09-2013
- [10] M Rosenblatt, C Van Atta, Proceedings of a Symposium held at the University of California, San Diego (La Jolla) July 15–21, 1971.pdf
- [11] TEIMOURI, Madhi, et al., Comparison of estimation methods for the Weibull distribution, 2011
- [12] NEMES, Gergo, Generalization of Binet’s Gamma function formulas, Department of Analysis, 2012
- [13] MORTICI, Cristinel, Some completely monotonic functions relating to the gamma function, Department of Mathematics, 2011

- [14] MONTGOMERY, Douglas C., RUNGER, George, C., Applied Statistics and Probability for Engineers, Third Edition, 2003
- [15] GOURDIN, Éric et al., Finding Maximum Likelihood Estimators for the Three-Parameter Weibull Distribution, 1994
- [16] GAEDDERT, Joseph D., Parametric Estimation of Stochastic Fading, 2005
- [17] KUMPHON, Bungon, Maximum Entropy and Maximum Likelihood Estimation for the Three-Parameter Kappa Distribution, Open Journal of Statistics, 2012, 2, 415-419
- [18] BIAU, David Jean, JOLLES, Brigitte M., PORCHER, Raphael, P Value and the Theory of Hypothesis Testing, 2009
- [19] EL-ADLL, Magdy E., Predicting future lifetime based on random number of three parameters Weibull distribution, 2011
- [20] STIGLER, Stephen M., Karl Pearson and the Rule of Three, Department of Statistics, University of Chicago, 2011
- [21] M. A. Stephens, Journal of the American Statistical Association, 1974, Vol.69(347)
- [22] FALISSARD, Bruno, Statistics In Brief, When to Use and When Not to Use a Threshold P Value, 2011
- [23] PANDIS, Nikolaos, The P Value Problem, American Journal of Orthodontics and Dentofacial Orthopedics, 2013
- [24] KERIAZES, Georgia A., Misuse of the p Value for Baseline Characteristics, Pharmacotherapy, 2012
- [25] MATHIEU, Henry, Reliability, 1984
- [26] OKENIYI, Joshua Olusegun, OKENIYI, Elisabeth Toyin, Implementation of Kolmogorov-Smirnov P-Value computation in Visual Basic®: implication for Microsoft Excel® library function, 2011

Definições

Activos: Conjunto de bens que formam o património (de uma empresa ou organização).

Componente: Peça simples.

Covariância: Medida da dependência linear entre duas variáveis aleatórias [2].

Desvio padrão: O desvio padrão fornece a informação de quanto uma amostra está concentrada em relação à média. Um desvio padrão diminuto transparece que os dados estão concentrados em torno da média e por consequente, um desvio padrão refere que a amostra está dispersa relativamente à média. O desvio padrão obtém-se pela expressão:

$$\sigma = \left[\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (t_i - \bar{t})^2 \right]^{1/2}$$

Durabilidade: Tempo de vida útil de um componente ou sistema.

Estimador: Um estimador é uma função utilizada para calcular um valor estimado.

Falha: Alteração ou término da capacidade de um componente ou sistema realizar uma determinada função. Este termo é definido pela Norma NP EN 13306:2007 por: *Avaria é a manifestação da inaptidão de um dado item realizar um determinado padrão de desempenho previamente especificado.*

Função densidade de probabilidade: A função densidade de probabilidade, também chamada de função densidade ou fdp ou pdf (*probability density function*) é uma função não negativa que representa a distribuição de probabilidade de uma variável aleatória contínua. Normalmente esta é representada em minúsculas por $f(t)$ [1].

Função distribuição acumulada: A função distribuição acumulada também denominada de função distribuição, fda ou cdf (*cumulative distribution function*) é a função que devolve a probabilidade de uma variável aleatória ser inferior ou igual à variável independente de uma função [1].

Função distribuição empírica: É uma função que representa a distribuição dos valores observados de um conjunto de dados.

Média: Neste documento irá ser referida a palavra média (assumida aritmética) cuja expressão matemática é:

$$\bar{t} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N t_i$$

Moda: É o valor que aparece mais frequentemente num conjunto de dados

Parâmetros: Neste documento, a palavra parâmetros vai se referir às constantes presentes nas equações das distribuições estatísticas.

Sistema: Várias peças formando um conjunto.

Taxa e avarias: Exprime o número de avarias por unidade de utilização.

Variável aleatória: Para todo o evento aleatório, é possível associar uma ou mais variáveis ditas variáveis aleatórias e para cada variável aleatória (ou conjunto de variáveis aleatórias) é possível encontrar uma função que descreva a distribuição de probabilidades para a referida variável (ou conjunto de variáveis), dita função densidade de probabilidade. A variável aleatória é também denominada de va [7].

Variável independente: A variável independente ou vi é a incógnita x de uma função $y = f(x)$ sendo que a qualquer x corresponde uma variável dependente y .

Apêndice

Apêndice A – Tabela da normal padronizada

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5	0,504	0,508	0,512	0,516	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,591	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,648	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,67	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,695	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,719	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,758	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,791	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,834	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,877	0,879	0,881	0,883
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,898	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,937	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,975	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,983	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,985	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,989
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,992	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,994	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,996	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,997	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,998	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,999	0,999
3,1	0,999	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998

Apêndice B – relação entre o *COV* e β [2]:

COV	β	COV	β	COV	β	COV	β
429,8314	0,1	0,9102	1,1	0,5003	2,1	0,3529	3,1
47,0366	0,15	0,8718	1,15	0,4898	2,15	0,3479	3,15
15,843	0,2	0,8369	1,2	0,4798	2,2	0,343	3,2
8,3066	0,25	0,805	1,25	0,4703	2,25	0,3383	3,25
5,4077	0,3	0,7757	1,3	0,4611	2,3	0,3336	3,3
3,9721	0,35	0,7487	1,35	0,4523	2,35	0,3292	3,35
3,1409	0,4	0,7238	1,4	0,4438	2,4	0,3248	3,4
2,6064	0,45	0,7006	1,45	0,4341	2,45	0,3206	3,45
2,2361	0,5	0,679	1,5	0,4279	2,5	0,3165	3,5
1,965	0,55	0,6588	1,55	0,4204	2,55	0,3124	3,55
1,7581	0,6	0,6399	1,6	0,4131	2,6	0,3085	3,6
1,5948	0,65	0,6222	1,65	0,4062	2,65	0,3047	3,65
1,4624	0,7	0,6055	1,7	0,3994	2,7	0,301	3,7
1,3529	0,75	0,5897	1,75	0,3929	2,75	0,2974	3,75
1,2605	0,8	0,5749	1,8	0,3866	2,8	0,2938	3,8
1,1815	0,85	0,5608	1,85	0,3805	2,85	0,2904	3,85
1,113	0,9	0,5474	1,9	0,3747	2,9	0,287	3,9
1,053	0,95	0,5348	1,95	0,369	2,95	0,2838	3,9
1,00	1,0	0,5227	2	0,3634			
0,9527	1,05	0,5112	2,05	0,3581			

Apêndice C – Constantes críticas de Kolmogorov Smirnov [2]

n	α				
	20,00%	15,00%	10,00%	5,00%	1,00%
1	0,9	0,925	0,95	0,975	0,995
2	0,684	0,726	0,776	0,842	0,929
3	0,565	0,597	0,642	0,708	0,828
4	0,194	0,575	0,564	0,624	0,733
5	0,446	0,424	0,51	0,454	0,669
6	0,41	0,436	0,47	0,521	0,618
7	0,381	0,405	0,438	0,486	0,577
8	0,358	0,381	0,411	0,457	0,543
9	0,339	0,36	0,388	0,432	0,514
10	0,322	0,342	0,368	0,41	0,49
11	0,307	0,326	0,452	0,391	0,468
12	0,295	0,313	0,338	0,375	0,405
13	0,284	0,302	0,325	0,361	0,433
14	0,274	0,292	0,314	0,349	0,418
15	0,266	0,293	0,304	0,338	0,404
16	0,258	0,274	0,295	0,328	0,392
17	0,25	0,266	0,286	0,318	0,381
18	0,244	0,259	0,278	0,309	0,371
19	0,237	0,252	0,272	0,301	0,363
20	0,231	0,246	0,264	0,294	0,356
21	0,2268	0,2408	0,2592	0,2892	0,3488
22	0,2226	0,2356	0,2544	0,2844	0,3416
23	0,2184	0,2304	0,2496	0,2796	0,3344
24	0,2142	0,2252	0,2448	0,2748	0,3272
25	0,21	0,22	0,24	0,27	0,32
26	0,206	0,216	0,236	0,264	0,314
27	0,202	0,212	0,232	0,258	0,308
28	0,198	0,208	0,228	0,252	0,302
29	0,194	0,204	0,224	0,246	0,296
30	0,19	0,2	0,22	0,24	0,29
31	0,188	0,198	0,218	0,238	0,286
32	0,186	0,196	0,216	0,236	0,282
33	0,184	0,194	0,214	0,234	0,278
34	0,182	0,192	0,212	0,232	0,274
35	0,21841	0,2327	0,24903	0,27761	0,33272
36	0,21841	0,2327	0,24903	0,27761	0,33272

