

INSTITUTO POLITÉCNICO DE LISBOA
INSTITUTO SUPERIOR DE CONTABILIDADE
E ADMINISTRAÇÃO DE LISBOA



ISCAL

SUPER-EFICIÊNCIA NA
METODOLOGIA DA DEA
APLICAÇÃO AO SETOR DOS SEGUROS

Inês Catarina Duarte Fernandes

Lisboa, outubro de 2018

INSTITUTO POLITÉCNICO DE LISBOA
INSTITUTO SUPERIOR DE CONTABILIDADE E
ADMINISTRAÇÃO DE LISBOA

SUPER-EFICIÊNCIA NA
METODOLOGIA DA DEA
APLICAÇÃO AO SETOR DOS SEGUROS

Inês Catarina Duarte Fernandes

Projeto de dissertação submetido ao Instituto Superior de Contabilidade e Administração de Lisboa para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Contabilidade e Gestão das Instituições Financeiras, realizado sob a orientação científica do Professor Doutor José Manuel de Oliveira Pires, Professor-Coordenador, da área científica de Matemática.

Constituição do Júri:

Presidente: Prof.^a Doutora Marina Antunes

Arguente: Prof.^a Doutora Ana Paias

Vogal: Prof. Doutor José Manuel Oliveira Pires

Lisboa, outubro de 2018

Declaro ser a autora desta dissertação, que constitui um trabalho original e inédito, que nunca foi submetido (no seu todo ou qualquer das suas partes) a outra instituição de ensino superior para a obtenção de um grau académico ou outra habilitação. Atesto ainda que todas as citações estão devidamente identificadas. Mais acrescento que tenho consciência de que o plágio – a utilização de elementos alheios sem referência do autor – constitui uma grave falta de ética, que poderá resultar na anulação da presente dissertação.

Agradecimentos

O alcance desta etapa não seria possível sem o carinho, dedicação e auxílio de várias pessoas ao longo do meu percurso académico e, como tal, quero aproveitar esta oportunidade para demonstrar a minha gratidão para com todos aqueles que, direta ou indiretamente, contribuíram para a minha chegada até aqui.

Em primeiro lugar quero agradecer aos meus pais por acreditarem nas minhas capacidades e pelo esforço que fizeram para que pudesse alcançar esta esta etapa.

Em segundo, agradeço aos professores, tanto da licenciatura como do mestrado, pelos conhecimentos que me transmitiram durante este meu percurso no ISCAL. Agradeço especialmente ao meu orientador, o professor José Oliveira Pires, pela ajuda, dedicação, incentivo e disponibilidade, durante o período de elaboração da minha dissertação. Sem ele não teria sido possível.

Quero agradecer ainda aos meus colegas e amigos pelo companheirismo, amizade e apoio, especialmente a Cláudia Feitor e a Eduarda Freitas, por serem as pessoas fantásticas que são, que acreditaram em mim até ao fim. Muito obrigada!

E por último, mas não menos importante, quero agradecer ao meu namorado, Rodolfo Reis, por toda a compreensão, amor, apoio e paciência em todos os momentos difíceis.

Resumo

Tendo em consideração que as organizações estão cada vez mais inseridas num ambiente hipercompetitivo, a avaliação de desempenho tem assumido um papel de grande importância nas mesmas pois, permite não só avaliar a empresa em si, como compará-la às suas concorrentes e, conseqüentemente, aumentar a eficiência e a produtividade das mesmas de forma a superar a concorrência.

Dado que as organizações têm distintos mecanismos de avaliação, é necessário usar uma ferramenta que seja transversal a todas as organizações. Assim sendo, a metodologia DEA é a mais utilizada nestas situações pois, permite combinar múltiplos *inputs* para produzir múltiplos *outputs*, usualmente designadas por DMUs (*Decision Making Units*).

Os modelos tradicionais da DEA identificam muitas DMUs como eficientes e, por forma a estabelecer um *ranking* das mesmas, recorrem-se a vários modelos.

Este trabalho tem como objeto de estudo os modelos de super-eficiência e os problemas de inadmissibilidade que deles advém.

Palavras-Chave: Avaliação de desempenho; Metodologia DEA; Super-eficiência; Problemas de inadmissibilidade.

Abstract

Considering that organizations are increasingly inserted in a hypercompetitive environment, the performance evaluation has assumed a very important role in them, since it allows not only to evaluate the company itself, but also to compare it with its competitors and, consequently, increase their efficiency and productive to overcome competition.

Given that organizations have different evaluation mechanisms, it's necessary to use a tool that is transversal to all organizations. Therefore, the Data Envelopment Analysis (DEA) methodology is the most used in these situations because it allows to combine multiple inputs to produce multiple outputs, usually referred to as Decision Making Units (DMUs).

The traditional DEA Models identify many DMUs as efficient and, to establish a ranking of them, several models are used.

This work has as object of study the models of super-efficiency and the problems of inadmissibility that come from them.

Key-words: *Performance evaluation; DEA methodology; Super-efficiency; Problems of inadmissibility.*

Índice

Índice.....	vii
Índice de Tabelas.....	viii
Índice de Figuras.....	ix
Lista de Abreviaturas.....	x
1. Introdução.....	1
2. Metodologia DEA.....	3
2.1. Introdução.....	3
2.2. Um pouco de história e evolução da DEA.....	4
2.3. Aplicações da DEA.....	6
2.4. Modelos clássicos da metodologia DEA.....	7
2.4.1. Modelos clássicos orientados para <i>inputs</i>	8
2.4.2. Modelos clássicos orientados para <i>outputs</i>	15
2.5. Vantagens e Desvantagens da DEA.....	19
3. Super-eficiência na DEA.....	21
3.1. Introdução.....	21
3.2. Super eficiência baseada nos modelos clássicos.....	22
3.3. Impossibilidade nos modelos clássicos de super eficiência.....	26
3.4. Modelos para contornar a impossibilidade na super-eficiência.....	28
4. Estudo de um caso prático.....	36
4.1. Introdução.....	36
4.2. Seleção dos dados e escolha dos modelos.....	36
4.3. Resultados e respetiva análise.....	39
5. Conclusões.....	46
Referências Bibliográficas.....	48

Índice de Tabelas

Tabela 4.1 – Dados referentes aos <i>inputs</i> e aos <i>outputs</i> (valores em milhões de euros).	38
Tabela 4.2 - Resultados obtidos pelo modelo CCR orientado para <i>inputs</i>	40
Tabela 4.3 - Resultados obtidos pelo modelo SE-CCR orientado para <i>inputs</i>	40
Tabela 4.4 - Resultados obtidos pelo modelo BCC orientado para <i>inputs</i>	41
Tabela 4.5 - Resultados obtidos pelo modelo SE-BCC orientado para <i>inputs</i>	42
Tabela 4.6 - Resultados obtidos pelos modelos de Lovell e Rouse (2003), Cook <i>et al.</i> (2009) e Chen e Liang (2011) para a segurador 05 (Fidelidade Mundial)	43
Tabela 4.7 - <i>Rankings</i> obtidos pelos modelos de super-eficiência com orientação para <i>inputs</i> ...	44

Índice de Figuras

Figura 2.1 - Representação Gráfica das fronteiras VRS e CRS.....	11
Figura 2.2 - Representação de DMUs exibindo os vários tipos de eficiência	14
Figura 3.1 - Super-eficiência no modelo BCC orientado para <i>inputs</i>	24
Figura 3.2 - Super-eficiência no modelo BCC orientado para <i>outputs</i>	25
Figura 3.3 - Modelo SE-BCC impossível.	27

Lista de Abreviaturas

DEA – *Data Envelopment Analysis*

BCC - Banker, Charnes e Cooper

CCR - Charnes, Cooper e Rhodes

CRS - *Constant Returns to Scale*

VRS - *Variable Returns to Scale*

DMU'S – *Decision Making Units*, Unidades de tomada de decisão

PL – Programação Linear

EUA – Estados Unidos da América

1. Introdução

Com o passar do tempo, o ambiente competitivo vivido nos mercados tem vindo a aumentar. Por forma a que as organizações conseguissem melhorar a sua *performance* financeira, as mesmas tiveram a necessidade de buscar outras formas de avaliar o seu desempenho.

Tradicionalmente, as organizações optavam pela utilização de indicadores financeiros, análise das demonstrações financeiras e interpretação dos rácios financeiros para a realização da sua avaliação de desempenho. No setor segurador, eram utilizados como principais rácios a sinistralidade, as despesas, o investimento e os rácios combinados. Contudo, estes rácios não permitem obter uma visão global da *performance* da organização.

Para contornar as limitações dos rácios financeiros, têm-se aplicado um método não paramétrico baseado na programação linear, a *Data Envelopment Analysis* (DEA). Esta metodologia foi desenvolvida por Charnes, Cooper e Rhodes (1978) tendo como base os princípios de Farrell (1957).

A DEA tem tido um crescimento significativo por parte das organizações pois, permite avaliar entidades homogéneas fornecendo um índice de eficiência obtido a partir dos *inputs* e dos *outputs* das referidas entidades. Desta forma, obtêm-se resultados mais fidedignos, o que origina uma maior capacidade de adaptabilidade às novas exigências do mercado e também as torna mais competitivas face às suas concorrentes.

Dado que os modelos clássicos da DEA ostentam algumas limitações, como por exemplo, a existência de um número elevado de DMUs consideradas eficientes, outros modelos para contornar estas limitações foram desenvolvidos, nomeadamente a metodologia da super-eficiência na DEA, sobre a qual recai este estudo.

O objetivo deste trabalho é apresentar um estudo sobre a metodologia DEA, fazendo menção às suas características, alguns modelos, importância na tomada de decisão e avaliação de desempenho organizacional e ainda, mostrar a sua aplicabilidade a uma situação real através de um estudo de caso. Para tal, foi necessário efetuar uma revisão da literatura existente sobre o tema. Primeiramente foi realizada uma pesquisa sobre a DEA e, seguidamente, sobre alguns modelos da mesma, nomeadamente modelos clássicos e modelos de super-eficiência.

Esta dissertação encontra-se dividida em cinco capítulos. No capítulo 2 é apresentada uma introdução sobre a metodologia DEA, um pouco da sua história e evolução, aplicações da metodologia, modelos clássicos e algumas das suas vantagens e desvantagens.

No capítulo 3, apresenta-se a metodologia da super-eficiência na DEA, os seus modelos clássicos, algumas impossibilidades originadas por esta metodologia e modelos para contornar as mesmas.

No capítulo 4 é elaborado o estudo de um caso prático cujo objetivo é avaliar o desempenho de 18 seguradoras que operavam em Portugal no ano de 2016, utilizando alguns dos modelos apresentados nos capítulos anteriores. Apresenta-se ainda a seleção dos dados e respetiva análise.

Por fim, no capítulo 5, são apresentadas as principais conclusões obtidas com a realização desta dissertação.

2. Metodologia DEA

2.1. Introdução

A *Data Envelopment Analysis* é uma metodologia relativamente recente que se destina a avaliar o desempenho das organizações, permitindo colmatar as ineficiências dos modelos tradicionais, que se baseiam exclusivamente em indicadores financeiros. A metodologia DEA insere-se na área da Investigação Operacional e baseia-a na programação linear (PL).

Esta metodologia destina-se a avaliar o desempenho de diversas entidades independentes e homogéneas, isto é, entidades que utilizam o mesmo tipo de recursos (*inputs*) para produzir o mesmo tipo de produtos (*outputs*). As referidas entidades permitem a conversão de múltiplos *inputs* em múltiplos *outputs* e podem ter a mais diversa natureza (social, empresarial, governamental, etc). São por isso denominadas de *Decision Making Units* (DMUs), que podem ser, por exemplo, seguradoras, bancos, escolas, lojas, entre outras.

A metodologia DEA permite a determinação de um índice de eficiência para cada DMU sob avaliação, o que possibilita, naturalmente, distinguir as DMUs entre eficientes e ineficientes. As DMUs eficientes delimitam uma fronteira não paramétrica de eficiência e permitem identificar o conjunto das DMUs que são referência para as DMUs ineficientes.

Farrel (1957) foi o primeiro autor a abordar o conceito da fronteira não paramétrica e, foi também, o primeiro a chamar a atenção para a importância de se considerar múltiplos *inputs* e múltiplos *outputs* na avaliação da eficiência técnica. A eficiência técnica, ou produtiva, tem como objetivo a redução do desperdício através do aumento da produção utilizando a mesma quantidade de *inputs* ou, manter o nível da produção com uma quantidade inferior de *inputs*.

A DEA tem como principais objetivos comparar a *performance* de DMUs que realizem atividades semelhantes, determinar as DMUs eficientes e as ineficientes e, para estas últimas, determinar as que são referência para se tornarem eficientes. É por isso uma importante ferramenta de auxílio à tomada de decisão.

O objetivo deste capítulo passa por apresentar os modelos clássicos da metodologia DEA que servirão de base para os métodos apresentados no capítulo 3. Assim, na secção 2.2, apresenta-se um pouco da história da DEA. Na secção 2.3 apresentam-se algumas aplicações desta metodologia. Na secção 2.4, são apresentados os modelos clássicos da DEA. Por fim, na secção

2.5, referem-se algumas das suas vantagens e desvantagens, que fundamentam o surgimento de novos modelos apresentados no capítulo 3.

2.2. Um pouco de história e evolução da DEA

A metodologia DEA teve origem em 1978 com o trabalho desenvolvido por Edward Rhodes no âmbito da sua tese de doutoramento supervisionada por W. W. Cooper e que foi apresentada na *Carnegie Mellon University's School of Urban & Public Affairs*. Esta tese debruçou-se sobre a avaliação de programas de educação de estudantes carenciados (na sua maioria afro-americanos e hispânicos) em escolas públicas dos EUA, apoiados pelo governo. O principal objetivo era comparar a *performance* dos alunos das escolas participantes desses programas com a *performance* dos alunos de outras escolas que não participavam nesses programas.

No âmbito deste trabalho, surgiu assim o artigo apresentado por Charnes *et al.* (1978), com o qual se deu o início formal da metodologia DEA tendo como base os princípios do modelo de Farrell (1957). Este modelo, como já foi referido, visava medir a eficiência de unidades de produção idênticas, que utilizam múltiplos *inputs* para produzir múltiplos *outputs*.

Contudo, outros trabalhos sobre eficiência foram apresentados anteriormente. Pareto (1906) apresentou um critério de eficiência no contexto da economia e do bem-estar que revelou os limites entre os quais é possível comparar o bem-estar social preservando a neutralidade e a ética. Assim nasceu o critério “Superioridade de Pareto” e o critério “Ótimo de Pareto”. Segundo o primeiro critério, um estado é superior ao outro se for possível aumentar o bem-estar de pelo menos um indivíduo sem prejudicar o dos outros. Já o segundo, só se verifica quando não existe forma de melhorar o bem-estar de um indivíduo sem prejudicar o dos outros.

Mais tarde, Koopmans (1951) propôs o conceito de eficiência técnica adaptando o “critério de Pareto” à produção. Este conceito de eficiência, denominado frequentemente por eficiência de Pareto-Koopmans, defende que uma DMU é *pareto*-eficiente se, e só se, não se conseguir melhorar qualquer *input* ou *output* sem prejudicar alguns dos outros *inputs* ou *outputs* (Cooper, Seiford & Tone, 2006).

O autor pioneiro a fazer referência à fronteira de eficiência foi Farrel, em 1957, na obra *The Measurement of Productive Efficiency in The Journal of the Royal Statistical Society*. Farrel propôs medir a eficiência de organizações semelhantes produzindo um *output* utilizando dois *inputs*. Apenas as combinações de *inputs* e *outputs* presentes na fronteira de produção é que são consideradas eficientes, segundo o autor.

A abordagem apresentada por Farrell foi considerada inovadora na altura pois, ao contrário das abordagens tradicionais, a abordagem do autor considera funções de produção empíricas, com recolha de dados empíricos, que afasta a inflexibilidade da confrontação teórica, permitindo assim a determinação da eficiência relativa. Por sua vez, as abordagens tradicionais, avaliam eficiência através de funções de produção teóricas, que proporcionam inúmeras vezes análises distorcidas da eficiência (unidades produtivas eficientes eram consideradas ineficientes, e vice-versa).

Desde o seu início, vários trabalhos têm vindo a ser desenvolvidos na área da metodologia DEA com o intuito de superar as várias limitações que os modelos e os métodos desenvolvidos anteriormente ostentam. Como se refere em Liu, Lu, Lu e Lin (2013b), a maior parte da pesquisa sobre trabalho realizado na DEA incide sobre metodologias como é o caso dos trabalhos apresentados por: Seiford e Thrall (1990), que faz uma revisão do desenvolvimento da DEA na sua fase inicial; Seiford (1996) que traça evolução da DEA para o período de 1978-1995; Cooper, Seiford e Tone (2007) fez uma avaliação de alguns modelos e medida da DEA; Cooper e Seiford (2009) fez uma pesquisa abrangente sobre 30 anos de desenvolvimento da DEA desde 1978; Liu , Lu, Lu e Lin (2013a, 2013b) que apresentou uma pesquisa baseada em citações e uma descrição dos principais caminhos do desenvolvimento da DEA. Pouco trabalho bibliográfico tem sido realizado sobre a DEA.

Emrouznejad, Parker e Tavares (2008) apresentaram um estudo bibliográfico sobre os 30 anos da DEA onde constam as principais referências publicadas na área da DEA até ao final do ano de 2006, inclusive, e algumas do ano 2007 (embora não entrem para as estatísticas apresentadas nesse mesmo artigo). Neste artigo os autores dizem ter encontrado mais de 4000 artigos publicados em revistas científicas ou capítulos de livros, incluindo os publicados em atas de conferências, mas não incluindo trabalhos de pesquisa publicados como documentos internos.

Num outro estudo do mesmo tipo, embora com ênfase nas aplicações da DEA, apresentado por Liu *et al.* (2013), refere-se que desde o primeiro artigo publicado por Charnes, *et al.* (1978) até agosto de 2010 foram publicados 4936 sobre a DEA segundo dados retirados da base de dados ISI Web of Science (WOS).

Mais recentemente, Emrouznejad e Yang (2018) apresentaram um trabalho de pesquisa e análise dos primeiros 40 anos de literatura DEA reportada ao período de 1978 a 2016. Os autores referem que durante este período foram publicados 10300 artigos sobre a DEA e que nos quatro

anos deste período foram publicados cerca de 1000 artigos por ano. Relacionado com o número de artigos publicados, os autores classificam o desenvolvimento em três fases: a primeira, entre 1978 e 1994, onde o crescimento de artigos publicados é relativamente lento; o segundo, entre 1995 e 2003 onde esse crescimento é relativamente estável com uma média de cerca de 134 artigos por ano; o terceiro, entre 2004 e 2016, onde esse crescimento é exponencial com uma média de 680 artigos por ano e com uma tendência, nos últimos anos, de cerca de 1000 artigos por ano.

2.3. Aplicações da DEA

Como se referiu na secção anterior têm sido muitas as pesquisas realizadas na literatura sobre a DEA, embora a distinção entre documentos metodológicos e documentos de aplicações não seja feita. A exceção está no trabalho apresentado por Liu *et al.* (2013) que constitui a primeira pesquisa bibliográfica a focar-se nas várias aplicações que a DEA pode ter. Segundo os referidos autores, cerca de dois terços dos documentos sobre a DEA englobam dados empíricos enquanto que o restante um terço refere-se a documentos puramente metodológicos, que dominaram os primeiros 20 anos do desenvolvimento da DEA.

Em Liu *et al.* (2013), é possível concluir que o número acumulado de artigos referentes a aplicações da DEA superou o número acumulado de artigos puramente metodológicos/teóricos a partir de meados de 2002.

Após a publicação do estudo de Charnes *et al.* (1978), que o domínio das aplicações da DEA cresceu significativamente. O crescimento foi tal, que foi quase impossível acompanhar o seu desenvolvimento, nomeadamente no que respeita às aplicações da DEA no mundo real.

Segundo Emrouznejad *et al.* (2008), as áreas de maior aplicabilidade são a banca, a educação, a saúde e a eficiência hospitalar. Em Liu *et al.* (2013) referem-se as várias áreas onde a metodologia DEA tem sido aplicada, sendo as áreas de maior aplicação têm sido a banca, a assistência médica, a agricultura, o transporte e a educação. Todavia, recentemente, as áreas da energia e do meio ambiente e a área das finanças apresentaram um enorme crescimento. Emrouznejad e Yang (2018) referem que as áreas da agricultura, banca, cadeias de abastecimento, transportes e de políticas públicas constituem o top 5 das áreas de aplicação da DEA com o maior número de artigos publicados durante os anos de 2015 e 2016.

2.4. Modelos clássicos da metodologia DEA

Os modelos da metodologia DEA podem ser classificados segundo vários pontos de vista. Uma das classificações mais importantes refere-se ao tipo de retornos de escala considerado, sendo o de retornos constante de escala e o de retornos variáveis de escala os mais usuais. O primeiro tipo ocorre quando qualquer variação nos *inputs* produz uma variação proporcional nos *outputs*. O segundo, substitui o axioma da proporcionalidade pelo axioma da convexidade, isto é, uma variação nos *inputs* produz uma variação maior ou menor do que o proporcional nos *outputs*, permitindo que DMUs com baixos valores de *inputs* tenham retornos crescentes de escala e DMUs com altos valores de *inputs* tenham retornos decrescentes de escala.

Outra classificação importante é baseada na orientação para *inputs* ou para *outputs*. Quando o modelo é orientado para *inputs* a eficiência é atingida minimizando os *inputs* mantendo a quantidade de *outputs*, quando o modelo é orientado para *outputs* a eficiência é atingida aumentando os *outputs* sem incrementar os *inputs*. A seleção da orientação dos modelos normalmente varia consoante os objetivos da organização, do controlo que a mesma detém sobre os *inputs* e *outputs* e do contexto económico em que a mesma se insere.

O primeiro modelo da DEA, o modelo CCR, proposto por Charnes *et al.* (1978), considera retornos constantes de escala e é por isso também referido por modelo CRS (*Constant Returns to Scale*). O modelo BCC, proposto por Banker, Cooper e Charnes (1984), como uma extensão do modelo CCR, considera retornos variáveis de escala e é também referido como modelo VRS (*Variable Returns to Scale*). Como se referiu antes, ambos os modelos podem ser orientados para *inputs* ou para *outputs*. Estes modelos são geralmente conhecidos por modelos clássicos ou modelos básicos da DEA.

Para descrever os modelos acabados de referir, considere-se que existem n DMUs homogéneas que se desejam avaliar e que cada DMU produz s *outputs* utilizando m *inputs*. Mais especificamente, cada DMU_j ($j = 1, \dots, n$) produz a quantidade Y_{rj} do *output* r ($r = 1, \dots, s$) utilizando a quantidade X_{ij} do *input* i ($i = 1, \dots, m$); X_{ik} e Y_{rk} designam, respetivamente, as quantidades de *input* e de *output* para a DMU_k ($k \in \{1, \dots, n\}$). Assume-se, ainda, que $X_{ij} \geq 0$, $Y_{rj} \geq 0$ e que para cada DMU existe, pelo menos, um *input* e um *output* com valores positivos.

2.4.1. Modelos clássicos orientados para *inputs*

No modelo CCR orientado para *inputs*, o objetivo passa por minimizar os *inputs* garantindo um determinado nível de *outputs*. Para além dos dados descritos anteriormente, considerem-se as variáveis de decisão, não negativas, v_i ($i = 1, \dots, m$) e u_r ($r = 1, \dots, s$) que representam os pesos associados aos *inputs* e aos *outputs*, respetivamente. O modelo CCR orientado para *inputs*, na forma fracionária, que permite avaliar a eficiência relativa da DMU_k ($k \in \{1, \dots, n\}$), é então dado pelo seguinte modelo de programação linear fracionária:

$$E_k = \max \frac{\sum_{r=1}^s Y_{rk} u_r}{\sum_{i=1}^m X_{ik} v_i} \quad (2.1)$$

$$s. a. \frac{\sum_{r=1}^s Y_{rj} u_r}{\sum_{i=1}^m X_{ij} v_i} \leq 1 \quad j = 1, \dots, n \quad (2.2)$$

$$v_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (2.3)$$

$$u_r \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (2.4)$$

A função objetivo (2.1) fornece o valor da eficiência, E_k , obtido pela maximização do quociente entre a soma ponderada dos *outputs* e a soma ponderada dos *inputs* para a DMU_k, isto é, para a DMU em avaliação. As restrições (2.2) indicam que esse quociente é inferior ou igual a 1 para cada uma das DMUs, incluindo a DMU em avaliação. As restrições (2.3) e (2.4) indicam a natureza, não negativa, das variáveis de decisão.

De referir que, devido às restrições (2.2), tem-se $E_k \leq 1$, isto é, o índice da eficiência da DMU_k, é inferior ou igual a 1. Quando esse índice é inferior a 1, diz-se que a DMU_k é ineficiente; quando é igual a 1, diz-se que a DMU_k está na fronteira de eficiência. Este último caso será clarificado mais à frente.

O modelo (2.1) – (2.4) é, como já foi mencionado, um modelo de programação linear fracionária que admite um número infinito de soluções ótimas, uma vez que se (u^*, v^*) é solução ótima então $(\alpha u^*, \alpha v^*)$ é também solução ótima, para todo $\alpha > 0$, como se refere, por exemplo, em

Cooper, Seiford e Zhu (2011). Contudo, usando a transformação de Charnes e Cooper (1962) para problemas de programação linear fracionária, é possível selecionar uma dessas soluções e, deste modo, obter um modelo de programação linear. Assim, igualando a 1 o denominador da função objetivo (2.1), o modelo anterior é equivalente ao seguinte modelo de programação linear:

$$E_k = \max \sum_{r=1}^s Y_{rk} u_r \quad (2.5)$$

$$s. a. \sum_{i=1}^m X_{ik} v_i = 1 \quad (2.6)$$

$$-\sum_{i=1}^m X_{ij} v_i + \sum_{r=1}^s Y_{rj} u_r \leq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (2.7)$$

$$v_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (2.8)$$

$$u_r \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (2.9)$$

Este modelo é conhecido como modelo CCR, orientado para *inputs*, na forma dos multiplicadores. Trata-se de um modelo de programação linear, como já foi referido, de fácil resolução, cuja solução ótima permite obter os pesos associados aos *inputs* e *outputs* os quais permitem obter o valor da eficiência, para a DMU_k, dado pelo correspondente valor ótimo. Este modelo permite assim determinar o contributo de cada *input* e de cada *output* para a formação do índice de eficiência.

Sabe-se, da programação linear, que associado ao modelo anterior existe um outro modelo, designado de modelo dual que permite obter informação adicional importante. Para obter tal modelo, considere-se a variável real θ_k associada à restrição (2.6) e as variáveis não negativas λ_j ($j = 1, \dots, n$) associadas às restrições (2.7). O dual do modelo anterior é então dado pelo seguinte modelo de programação linear:

$$\theta_k^* = \min \theta_k \quad (2.10)$$

$$s. a. \sum_{j=1}^n X_{ij} \lambda_j \leq X_{ik} \theta_k \quad i = 1, \dots, m \quad (2.11)$$

$$\sum_{j=1}^n Y_{rj} \lambda_j \geq Y_{rk} \theta_k \quad r = 1, \dots, s \quad (2.12)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (2.13)$$

$$\theta_k \in \mathbb{R} \quad (2.14)$$

O modelo anterior é designado na literatura da especialidade por modelo CCR, orientado para *inputs*, na forma do envelope. Da dualidade sabe-se que o valor ótimo obtido por este modelo é igual ao valor ótimo obtido pelo correspondente modelo na forma dos multiplicadores, isto é, $\theta_k^* = E_k$. Então θ_k^* é o índice de eficiência para a DMU_k e indica o valor pelo qual os *inputs* desta DMU, no caso ser ineficiente, devem ser multiplicados de modo a que se torne eficiente, originando assim uma redução no valor dos seus *inputs*. As restrições (2.11) garantem que essa redução não ultrapassa a fronteira definida pelas DMUs eficientes. Por sua vez, as restrições (2.12) garantem que tal redução não implica uma redução do nível dos *outputs* para a DMU_k, isto é, para a DMU em avaliação. As restrições (2.13) e (2.14) indicam a natureza das variáveis.

Os valores das variáveis λ_j ($j = 1, \dots, n$) na solução ótima do modelo anterior permitem identificar o conjunto das DMUs que são referência (*benchmark*) para que uma dada DMU_k que seja ineficiente se torne eficiente. Este conjunto, representado por R_k , é chamado conjunto de referência da DMU_k e é constituído pelos índices correspondentes aos valores positivos de λ_j^* , isto é,

$$R_k = \{j : \lambda_j^* > 0\} \quad j \in \{1, \dots, n\} \quad (2.15)$$

De referir que um valor de λ_j^* igual a zero significa que a correspondente DMU não é referência para a DMU_k em avaliação. O conjunto de referência pode ser constituído por um ou mais elementos. Quando é constituído por mais de um elemento, os valores de λ_j^* permitem determinar a importância da correspondente DMU_j para que uma DMU_k que seja ineficiente se torne eficiente. Assim, a importância da DMU_j será tanto maior quanto maior for o valor de λ_j^* . É claro que se uma DMU_k é eficiente, então é referência de si própria, obtendo-se, neste caso, $\lambda_k^* = 1$ e $\lambda_j^* = 0$, para $j \neq k$, e, conseqüentemente, $R_k = \{k\}$.

Para além de fornecer uma melhor compreensão quanto à sua orientação, o modelo (2.10) – (2.14) permite ainda determinar facilmente o intervalo de variação para o índice de eficiência de uma qualquer DMU_k uma vez que $0 < \theta_k^* \leq 1$, como se mostra em Cooper *et al.* (2007).

Como já foi referido anteriormente, o modelo BCC difere do modelo CCR por considerar retornos variáveis de escala, em vez de retornos constantes de escala. Por forma a ilustrar a diferença entre os dois tipos de modelos considere-se a figura 2.1 onde se apresenta a representação gráfica da fronteira CRS, gerada pelo modelo CCR, e a fronteira VRS, gerada pelo modelo BCC.

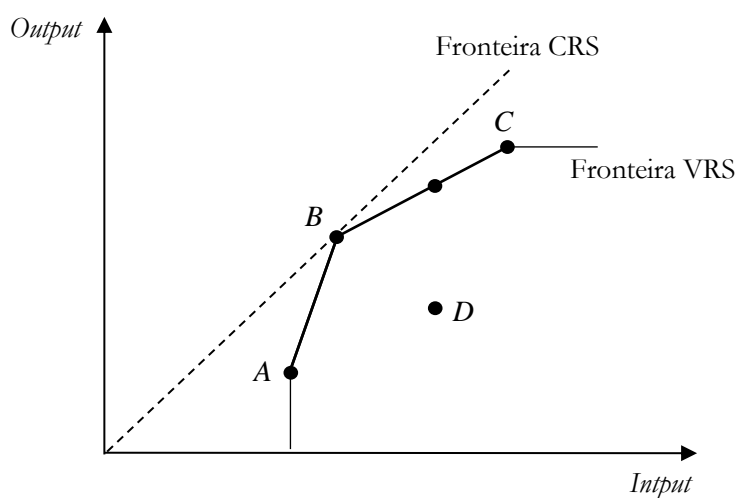


Figura 2.1 - Representação Gráfica das fronteiras VRS e CRS

Fonte: Adaptado de Cooper *et al.* (2007)

A fronteira CRS é representada pela semi-reta que contém a origem dos eixos e o ponto B que representa a DMU_B. Esta DMU opera sob retornos constantes de escala uma vez que corresponde à produtividade máxima. A fronteira VRS é constituída pelos segmentos de reta [AB] e [BC] e por todos os pontos à direita de C com o mesmo *output* de C e todos os pontos abaixo de A com o mesmo *input* de A. Em relação a esta fronteira, a DMU_A e as DMUs correspondentes a pontos situados entre A e B têm retornos crescentes de escala porque uma alteração nos *inputs* implica uma alteração maior do que o proporcional nos *outputs*. Por sua vez, as DMUs correspondentes aos pontos situados entre B e C, incluindo o C, têm retornos decrescentes de escala porque uma alteração nos *inputs* implica uma alteração menor do que o proporcional nos *outputs*.

O conjunto dos pontos limitado pelo eixo dos *inputs* e pela fronteira de eficiência é designado por conjunto de possibilidades de produção. No caso do modelo CCR orientado para *inputs*, tal conjunto, representado por T_{CCR} , é definido por

$$T_{CCR} = \left\{ (\mathbf{X}, \mathbf{Y}): \mathbf{X} \geq \sum_{j=1}^n \mathbf{X}_j \lambda_j, \mathbf{Y} \leq \sum_{j=1}^n \mathbf{Y}_j \lambda_j, \lambda_j \geq 0 \ (j=1, \dots, n) \right\} \quad (2.16)$$

onde (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) representa uma atividade, isto é, um par de vetores de *inputs* $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^m$ e *outputs* $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^s$ admissíveis, e $\mathbf{X}_j = [X_{1j} \ X_{2j} \ \dots \ X_{mj}]^T$ e $\mathbf{Y}_j = [Y_{1j} \ Y_{2j} \ \dots \ Y_{sj}]^T$ representam os vetores de *inputs* e *outputs* da DMU_j. Note-se que este conjunto é exatamente o conjunto das soluções admissíveis do modelo (2.10) – (2.14).

No caso do modelo BCC orientado para *inputs*, que gera uma fronteira de eficiência VRS, o conjunto de possibilidades de produção é um conjunto convexo que difere do conjunto T_{CCR} pelo facto de incluir a restrição

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \quad (2.17)$$

que conjuntamente com as desigualdades $\lambda_j \geq 0 \ (j=1, \dots, n)$ impõem a condição de convexidade. Representando por T_{BCC} o conjunto de possibilidades de produção para o modelo BCC orientado para *inputs* tem-se

$$T_{BCC} = \left\{ (\mathbf{X}, \mathbf{Y}): \mathbf{X} \geq \sum_{j=1}^n \mathbf{X}_j \lambda_j, \mathbf{Y} \leq \sum_{j=1}^n \mathbf{Y}_j \lambda_j, \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0 \ (j=1, \dots, n) \right\} \quad (2.18)$$

Então, o modelo BCC orientado para *inputs* na forma do envelope é obtido do modelo CCR orientado para *inputs*, na mesma forma, introduzindo neste último a restrição (2.18).

A introdução desta restrição na forma do envelope do modelo CCR equivale a adicionar uma variável real na função objetivo (2.5) e no primeiro membro das restrições (2.7) na forma dos multiplicadores deste modelo. Designando essa variável por u^k , o modelo BCC orientado para *inputs*, na forma dos multiplicadores, obtém-se do correspondente modelo CCR orientado para *inputs* substituindo a função objetivo (2.5) por

$$E_k = \max \sum_{r=1}^s Y_{rk} u_r + u^k \quad (2.5a)$$

e as restrições (2.7) por

$$-\sum_{i=1}^m X_{ij} v_i + \sum_{r=1}^s Y_{rj} u_r + u^k \leq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (2.7a)$$

Em consequência, a forma fracionária do modelo BCC orientado para *inputs* é obtida da mesma forma do correspondente modelo CCR substituindo a função objetivo (2.1) por

$$E_k = \max \frac{\sum_{r=1}^s Y_{rk} u_r + u^k}{\sum_{i=1}^m X_{ik} v_i} \quad (2.1a)$$

e as restrições (2.2) por

$$s. a. \frac{\sum_{r=1}^s Y_{rj} u_r + u^k}{\sum_{i=1}^m X_{ij} v_i} \leq 1 \quad j = 1, \dots, n \quad (2.2a)$$

A estes dois últimos modelos deve ainda ser acrescentada a restrição

$$u^k \in \mathbb{R} \quad (2.19)$$

que indica a natureza da variável u^k .

A variável u^{k*} fornece informação sobre o tipo de retorno de escala em que a DMU_k opera. Assim, se $u^k > 0$ tal significa que a referida DMU_k opera sob retorno crescente de escala; se $u^k < 0$ então a DMU_k opera sob retorno decrescente de escala; por fim, se $u^k = 0$ então a DMU_k opera sob retorno constante de escala.

No seguimento do que já foi referido, uma DMU_k para a qual $\theta_k^* < 1$, ou equivalentemente $E_k < 1$, diz-se ineficiente. Se $\theta_k^* = 1$, ou equivalentemente $E_k = 1$, diz-se que a DMU_k se encontra na fronteira de eficiência, podendo ser fortemente eficiente ou fracamente eficiente. Diz-se que a DMU_k é fortemente eficiente quando $\theta_k^* = 1$ e todas as variáveis de desvio nas restrições (2.11) e (2.12) são iguais a zero ou, através das condições de complementaridade forte, quando $E_k = 1$ e os pesos associados aos *inputs* e aos *outputs* são todos positivos. Por outro lado, diz-se que a DMU_k é fracamente eficiente se $\theta_k^* = 1$ e existem, naquelas restrições, variáveis de desvios diferentes de zero ou, através das condições de complementaridade, quando $E_k = 1$ e existem pesos associados aos *inputs* e/ou *outputs* iguais a zero. A eficiência fraca é também conhecida como eficiência técnica, eficiência de Farrell ou eficiência radial (Cooper *et al.*, 2007).

Num contexto de classificações de DMUs, Charnes, Cooper e Thrall (1991) referem que um conjunto de DMUs pode ser particionado em quatro conjuntos E , E' , F e N . O conjunto E é constituído pelas DMUs extremo eficientes, ou fortemente eficientes na terminologia anterior, correspondentes a pontos (vértices) da fronteira de eficiência. O conjunto E' é formado pelas DMUs eficientes que não correspondem a pontos extremos. Note-se que as DMUs pertencentes ao conjunto E' podem ser expressas como combinações lineares convexas de DMUs pertencentes ao conjunto E . O conjunto F é formado pelas DMUs fracamente eficientes. Finalmente, o conjunto N é constituído pelas DMUs ineficientes, isto é, pelas DMUs que não estão na fronteira de eficiência, contrariamente ao que acontece com as que pertencem aos três primeiros conjuntos.

Para ilustrar o exposto no parágrafo anterior considere-se a figura 2.1 onde estão representadas seis DMUs (A, B, C, D, E e F), que utilizam um *input* para produzir um *output*, e em que a fronteira de eficiência é determinada pelas DMUs A, B, C e D.

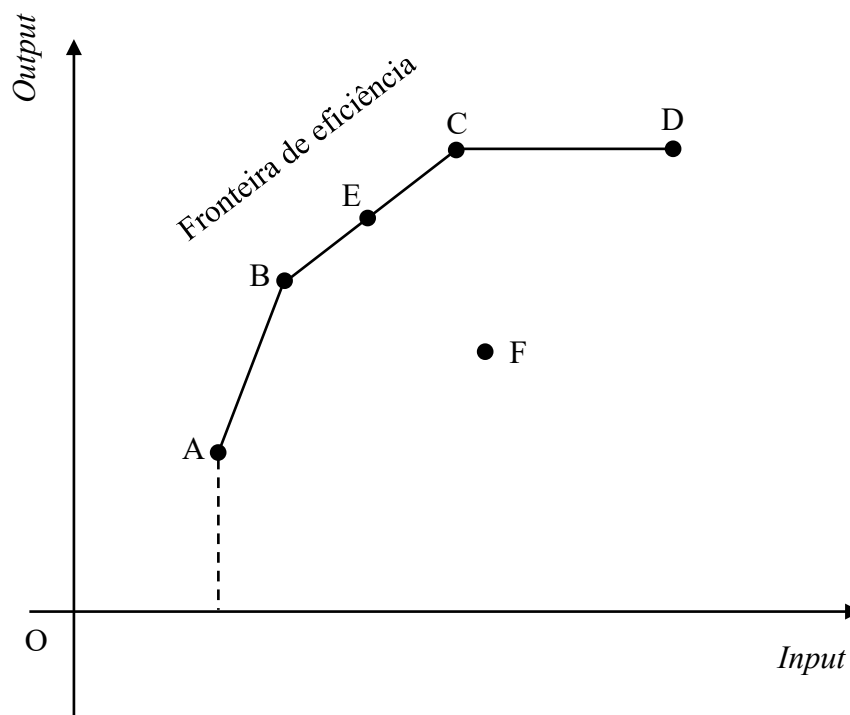


Figura 2.2 - Representação de DMUs exibindo os vários tipos de eficiência

Fonte: Adaptado de Chandrababu e Hariprasad (2015).

As DMUs A, B e C são extremo eficientes. A DMU E é eficiente mas não extremamente uma vez que pode ser expressa como combinação linear convexa das DMUs B e C. A DMU D é

fracamente eficiente na mediada em que existem DMUs capazes de produzir a mesma quantidade de *output* utilizando uma menor quantidade de *input*. Por fim, a DMU F é ineficiente.

Considerando a forma do envelope dos modelos CCR e BCC orientados para *inputs* e atendendo ao modo como este último foi obtido do primeiro, isto é, através da introdução de uma restrição, tem-se que o conjunto das soluções admissíveis do modelo BCC é um subconjunto do conjunto das soluções admissíveis do modelo CCR. Isto implica que o índice da eficiência obtido pelo modelo BCC é sempre não inferior ao índice da eficiência obtido pelo modelo CCR.

2.4.2. Modelos clássicos orientados para *outputs*

Nos modelos orientados para *outputs*, o objetivo é maximizar os *outputs* sem que isso implique qualquer aumento nos *inputs*. A forma fracionária do modelo CCR orientado para *outputs* é obtida da forma fracionária da versão orientada para *inputs* trocando o numerador pelo denominador na função objetivo e nas restrições, e minimizando a função objetivo. Assim, usando a mesma notação da versão orientada para *inputs* quanto aos parâmetros e quanto às variáveis de decisão, o modelo CCR orientado para *outputs* na forma fracionária é dado por

$$F_k = \min \frac{\sum_{i=1}^m X_{ik} v_i}{\sum_{r=1}^s Y_{rk} u_r} \quad (2.20)$$

$$s. a. \frac{\sum_{i=1}^m X_{ij} v_i}{\sum_{r=1}^s Y_{rj} u_r} \geq 1 \quad j = 1, \dots, n \quad (2.21)$$

$$v_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (2.22)$$

$$u_r \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (2.23)$$

A função objetivo (2.20) indica que se pretende minimizar o quociente entre a soma ponderada dos *inputs* e a soma ponderada dos *outputs* da DMU_k, isto é, da DMU em avaliação. As restrições (2.21) indicam que esse quociente é superior ou igual a 1 para cada uma das DMUs, incluindo a DMU em avaliação. As restrições (2.22) e (2.23) indicam a natureza, não negativa, das variáveis de decisão. Note-se que neste caso, por força das restrições (2.21), o valor de F_k é sempre superior ou igual a 1.

Recorrendo novamente à transformação Charnes e Cooper (1962), o modelo anterior pode ser linearizado, à semelhança do que foi feito na versão orientada para *inputs*. Assim, igualando a 1 o denominador da função objetivo (2.20), o modelo anterior é equivalente ao seguinte modelo de programação linear:

$$F_k = \min \sum_{i=1}^m X_{ik} v_i \quad (2.24)$$

$$s. a. \sum_{r=1}^s u_r Y_{rk} = 1 \quad (2.25)$$

$$\sum_{i=1}^m X_{ij} v_i - \sum_{r=1}^s Y_{rj} u_r \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (2.26)$$

$$v_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (2.27)$$

$$u_r \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (2.28)$$

Este modelo é conhecido como modelo CCR orientado para *outputs* na forma dos multiplicadores. Associando a variável real ρ à restrição (2.25) e as variáveis não negativas μ_j ($j = 1, \dots, n$) às restrições (2.26) do modelo anterior, obtém-se o dual desse modelo, dado por:

$$\rho^* = \max \rho_k \quad (2.29)$$

$$s. a. \sum_{j=1}^n X_{ij} \mu_j \leq X_{ik} \quad i = 1, \dots, m \quad (2.30)$$

$$\sum_{j=1}^n Y_{rj} \mu_j \geq Y_{rk} \rho_k \quad r = 1, \dots, s \quad (2.31)$$

$$\mu_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (2.32)$$

$$\rho_k \in \mathbb{R} \quad (2.33)$$

O modelo (2.29) – (2.33) constitui a forma do envelope do modelo CCR orientado para *outputs*. Neste modelo, ρ_k^* indica o valor pelo qual devem ser multiplicados os *outputs* de uma DMU_k sem aumentar os seus *inputs*, por forma a que essa DMU seja eficiente no caso de ser ineficiente, produzindo, assim, um aumento no valor dos *outputs*. As restrições (2.30) garantem que tal aumento não produz qualquer aumento no valor dos *inputs*. Por sua vez, as restrições (2.31)

garantem que esse aumento não ultrapassa a fronteira de eficiência. As restrições (2.32) e (2.33) indicam a natureza das variáveis.

Neste caso, tem-se $\rho_k^* \geq 1$, ou equivalentemente $F_k \geq 1$, pelo que o índice de eficiência é dado por $1/\rho^*$, ou equivalentemente, por $1/F_k$. É óbvio que nestas circunstâncias a DMU_k está na fronteira de eficiência quando esses valores são iguais a 1 ou é ineficiente quando são superiores a 1, sendo tanto mais ineficiente quanto maior for o valor de ρ_k^* ou de F_k . Quando a DMU_k está na fronteira de eficiência, pode ser fortemente ou fracamente eficiente de acordo com as condições estabelecidas para a versão orientada para *inputs*.

Relativamente às variáveis μ_j , o seu valor na solução ótima, isto é, μ_j^* , fornece o mesmo tipo de informação fornecido por λ_j^* na versão orientada para *inputs*, descrita anteriormente.

À semelhança do que acontece na versão orientada para *inputs*, o modelo BCC orientado para *outputs* na forma do envelope é obtido do modelo CCR orientado para *outputs*, na mesma forma, introduzindo neste último a restrição

$$\sum_{j=1}^n \mu_j = 1 \quad (2.34)$$

Similarmente ao que acontece com a versão orientada para *inputs*, a introdução desta restrição na forma do envelope do modelo CCR orientado para *outputs* equivale a adicionar uma variável real na função objetivo (2.24) e no primeiro membro das restrições (2.26) deste modelo na forma dos multiplicadores. Designando agora essa variável por v^k , o modelo BCC orientado para *outputs*, na forma dos multiplicadores, obtém-se do correspondente modelo CCR substituindo a função objetivo (2.24) por

$$F_k = \min \sum_{i=1}^m X_{ik} v_i + v^k \quad (2.24a)$$

e as restrições (2.26) por

$$\sum_{i=1}^m X_{ij} v_i - \sum_{r=1}^s Y_{rj} u_r + v^k \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (2.26a)$$

Em consequência, a forma fracionária do modelo BCC orientado para *outputs* é obtida da mesma forma do correspondente modelo CCR substituindo a função objetivo (2.20) por

$$F_k = \min \frac{\sum_{i=1}^m X_{ik} v_i + v^k}{\sum_{r=1}^s Y_{rk} u_r} \quad (2.20a)$$

e as restrições (2.21) por

$$s. a. \frac{\sum_{i=1}^m X_{ij} v_i + v^k}{\sum_{r=1}^s Y_{rj} u_r} \geq 1 \quad j = 1, \dots, n \quad (2.21a)$$

A estes dois últimos modelos deve ainda ser acrescentada a restrição

$$v^k \in \mathbb{R} \quad (2.35)$$

que indica a natureza da variável v^k .

Também, nesta versão, a variável v^{k*} fornece informação sobre o tipo de retorno de escala em que a DMU_k opera. Neste caso, se $v^k > 0$ tal significa que a referida DMU_k opera sob retorno decrescente de escala; se $u^k > 0$ então a DMU_k opera sob retorno decrescente de escala; por fim, se $v^k = 0$ então a DMU_k opera sob retorno constante de escala.

A partir da forma do envelope dos modelos CCR e BCC orientados para *outputs*, e de modo idêntico ao que foi feito nas versões orientadas para *inputs*, pode definir-se o conjunto de possibilidades de produção para cada um destes modelos.

Similarmente à comparação feita anteriormente entre as versões orientadas para *inputs* dos modelos CCR e BCC também nesta versão é fácil verificar que, na forma do envelope o conjunto das soluções admissíveis do modelo BCC é um subconjunto do conjunto das soluções admissíveis do modelo CCR. Neste caso, isto implica que o valor ótimo obtido pelo modelo BCC é sempre não superior ao valor ótimo obtido pelo modelo CCR. Atendendo a que na versão orientada para *outputs* o índice de eficiência de cada um dos modelos é dado pelo inverso daqueles valores ótimos, tem-se que, também nesta versão, o índice da eficiência obtido pelo modelo BCC é sempre não inferior ao índice da eficiência obtido pelo modelo CCR.

Em consequência pode afirmar-se que o índice de eficiência das DMUs que operam sob retornos variáveis de escala é sempre não inferior ao índice de eficiência das DMUs que operam sob retornos constantes de escala.

Por fim, refira-se que, como se mostra em Cooper *et al.* (2007), os índices de eficiência fornecido pelas versões orientadas para *inputs* e para *outputs* do modelo CCR são iguais, apesar de fornecerem soluções ótimas diferentes. Estes autores mostram também como obter a solução de uma das variantes conhecida a solução ótima da outra variante.

2.5. Vantagens e Desvantagens da DEA

À semelhança do que acontece com todos os modelos, também os modelos clássicos da metodologia DEA ostentam algumas vantagens e desvantagens. Como vantagens apontam-se as seguintes:

- Determina um valor para a eficiência de cada DMU;
- Permite distinguir entre DMUs eficientes e ineficientes;
- Possibilita a definição de uma fronteira de eficiência e determina as DMUs eficientes que servem de referência (*benchmark*) para as DMUs ineficientes, o que permite à empresa melhoras a *performance* destas;
- Auxilia na tomada de decisões, pois se uma DMU é ineficiente, podem ser tomadas as decisões necessárias para a tornar eficiente;
- Permite realizar uma avaliação relativa de DMUs sem se definir previamente uma função produção;
- Possibilita a utilização de *inputs* e *outputs* da mais variada natureza, ou seja, os dados utilizados não necessitam obrigatoriamente de ser de natureza financeira;
- Flexibilidade, pois permite a cada DMU escolher os pesos que mais a favorecem, o que se revela de grande importância na identificação das DMUs ineficientes;
- Versatilidade, uma vez que pode ser aplicada a todos os tipos de organização e a vários períodos temporais, o que permite a análise da evolução da eficiência organizacional.

Como desvantagens ou limitações referem-se as seguintes:

- A existência de um número elevado de DMUs eficientes, originado pela flexibilidade na determinação dos pesos, principalmente quando o número de DMUs sob avaliação não é suficientemente grande comparativamente com o número total de *inputs* e *outputs*;

- Distribuição não realista dos pesos quando a eficiência de algumas DMUs é atingida à custa de valores muito elevados/baixos para pesos relativos aos *outputs/inputs*, e
- Cada DMU é tratada como uma caixa negra, ignorando processos internos e, deste modo, torna difícil identificar a origem da ineficiência para as DMUS ineficientes.

3. Super-eficiência na DEA

3.1. Introdução

Como foi mencionado no capítulo anterior, uma das desvantagens associadas à metodologia DEA é a existência, em geral, de mais do que DMU avaliada como eficiente. Nestas circunstâncias, uma questão que se coloca ao decisor é estabelecer um *ranking* para as DMUs classificadas como eficientes. No sentido de contornar tal desvantagem, vários métodos e modelos têm sido propostos na literatura da especialidade por forma a distinguir as DMUs classificadas como eficientes.

Entre eles realçam-se os métodos baseados em restrições aos pesos, os modelos baseados na programação linear multiobjectivo, o método da eficiência cruzada e o método da super-eficiência. Para além de permitirem estabelecer um *ranking* entre DMUs, os três primeiros permitem também contornar o problema do fraco poder de discriminação e da distribuição irrealista dos pesos referidos no capítulo anterior.

Os métodos baseados nas restrições aos pesos consistem em introduzir nos modelos clássicos restrições sobre os pesos associados aos *inputs* e aos *outputs*. Estas restrições traduzem juízos de valor alicerçados em pontos de vista ou em informação relativa às DMUs, feitos por especialistas (ver, por exemplo, Allen, Athanassopoulos e Thanassoulis, 1997). Estes métodos envolvem alguma subjetividade e requerem o conhecimento *a priori* sobre os referidos pesos, o que não acontece com os outros métodos/modelos referidos no parágrafo anterior.

Relativamente aos modelos multiobjectivo, Li e Reeves (1999) foram os primeiros a proporem um tal modelo baseado num modelo equivalente ao modelo CCR orientado para *inputs*, na forma dos multiplicadores, onde as variáveis de desvio associadas às restrições de desigualdade do modelo CCR são explicitadas e usadas para obter o índice de eficiência de cada DMU. Sobre o conjunto de restrições deste modelo, os autores consideram três funções objetivo correspondendo cada uma delas a um conceito de eficiência. São assim considerados três conceitos de eficiência, o conceito clássico, o conceito minisoma e o conceito minimax, sendo os dois últimos mais restritivos do que o primeiro e deste modo permitirem um maior poder de discriminação entre as DMUs eficientes e também uma distribuição mais realista dos pesos associados aos *inputs* e *outputs* (Li & Reeves, 1999).

O método da eficiência cruzada (*Cross efficiency*), ou da avaliação cruzada, foi proposto por Sexton, Silkman e Hogan (1986) e posteriormente desenvolvido por Doyle e Green (1994). A

filosofia deste método consiste em realizar uma avaliação de conjunto em vez da avaliação individual, ou autoavaliação, realizada pelos modelos clássicos da DEA. Para tal, para cada DMU é feita uma avaliação de conjunto envolvendo a autoavaliação e a avaliação feita pelas restantes DMUs. Este método tem-se tornado muito popular para estabelecer um *ranking* das DMUs.

Um outro método, igualmente popular, para estabelecer um *ranking* sobre as DMUs classificadas como eficientes, com base nos resultados obtidos através dos modelos CCR e BCC, é o método da super-eficiência, proposto por Andersen e Petersen (1993). Este método consiste em excluir do conjunto de referência a DMU em avaliação, permitindo que uma DMU classificada como extremo-eficiente obtenha um índice de eficiência, em geral, maior do que 1, sendo, por isso, designada de super-eficiente.

Como se refere, por exemplo, em Chen (2005), para além de permitir estabelecer um *ranking* entre as DMUs eficientes, a super-eficiência tem também sido usada na análise de sensibilidade na DEA (Charnes *et al.*, 1992; Zhu 1996, 2002), em jogos de eficiência da relação de duas pessoas (Rousseau & Semple, 1995), na deteção de observações influentes (Banker *et al.*, 1989; Wilson, 1995), e em regras de decisão de aceitação (Seiford & Zhu, 1998c), entre outras. Em Zhu (2001) refere-se ainda que a super-eficiência pode também ser usada para classificação de DMUs.

No presente capítulo apresenta-se um estudo sobre a super-eficiência na metodologia DEA. Assim, na secção 3.2, apresentam-se os modelos de super-eficiência baseados nos modelos clássicos da metodologia DEA apresentados no capítulo 2. Na secção 3.3, referem-se os problemas de impossibilidade que podem ocorrer nos modelos de super-eficiência referidos na secção anterior assim como são referidas algumas condições de impossibilidade. Na secção 3.4, apresentam-se alguns modelos que permitem contornar tais problemas.

3.2. Super eficiência baseada nos modelos clássicos

Os modelos de super-eficiência baseados nos modelos clássicos diferem destes pelo facto de a DMU em avaliação ser excluída do conjunto de referência. Deste modo, os modelos de super-eficiência são baseados numa fronteira de eficiência formada pelas restantes DMUs eficientes.

Note-se que, como se refere em Seiford e Zhu (1999), se uma DMU pertence a um dos conjuntos E' (eficiente mas não extremo-eficiente), F (fracamente eficiente) ou N (não eficiente) e é excluída do conjunto de referência então a fronteira de eficiência, determinada pelas DMUs

em E (extremo-eficiente), permanece inalterável e, conseqüentemente, os modelos de super-eficiência são sempre possíveis e equivalentes aos modelos clássicos da DEA.

Nos modelos de super-eficiência baseados nos modelos clássicos, a exclusão do conjunto de referência da DMU em avaliação corresponde a excluí-la do primeiro membro das restrições dos modelos clássicos na forma do envelope. Assim, o modelo de super-eficiência, sob retornos variáveis de escala orientado para *inputs*, para uma DMU_k ($k \in \{1, \dots, n\}$), isto é, o modelo de super-eficiência baseado no modelo BCC orientado para *inputs*, denotado por SE-BCC, é dado por (Seiford & Zhu, 1999):

$$\theta_k^{SE*} = \min \theta_k^{SE} \quad (3.1)$$

$$s. a. \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n X_{ij} \lambda_j \leq X_{ik} \theta_k^{SE} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.2)$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n Y_{rj} \lambda_j \geq Y_{rk} \quad r = 1, \dots, s \quad (3.3)$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_j = 1 \quad (3.4)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n ; j \neq k ; \quad (3.5)$$

$$\theta^{SE} \in \mathbb{R} \quad (3.6)$$

A remoção da restrição (3.4) no modelo anterior permite obter o modelo de super-eficiência, sob retornos constantes de escala orientado para *inputs*, para uma DMU_k, que é precisamente o modelo de super-eficiência baseado no modelo CCR orientado para *inputs*. Tal modelo será denotado por SE-CCR orientado para *inputs*.

Como se mostra em Seiford e Zhu (1999), no modelo anterior, ou $\theta_k^{SE*} > 1$, ou o modelo é impossível. Quando a DMU_k, isto é, a DMU em avaliação, é extremo-eficiente e o modelo é possível, $\theta_k^{SE*} > 1$ indica que os *inputs* da DMU_k são incrementados para atingir a fronteira de eficiência determinada pelas restantes DMUs eficientes. Então a super-eficiência é expressa em termos de incremento dos *inputs* e o valor θ_k^{SE*} pode ser usado como índice de super-eficiência (Cook, Liang, Zha & Zhu, 2009). Este incremento de *inputs* pode ser visto como uma poupança do nível de *input* alcançado pela DMU_k quando comparada com as restantes DMUs, ou uma

combinação linear convexa das mesmas, para produzir um determinado nível de *output* (Chen, 2005).

Para uma melhor compreensão do referido no parágrafo anterior considere-se a figura 3.1 onde estão representadas 3 DMUs A, B e C, a operarem sob retornos variáveis de escala, em que cada uma delas utiliza um *input* para produzir um *output*.

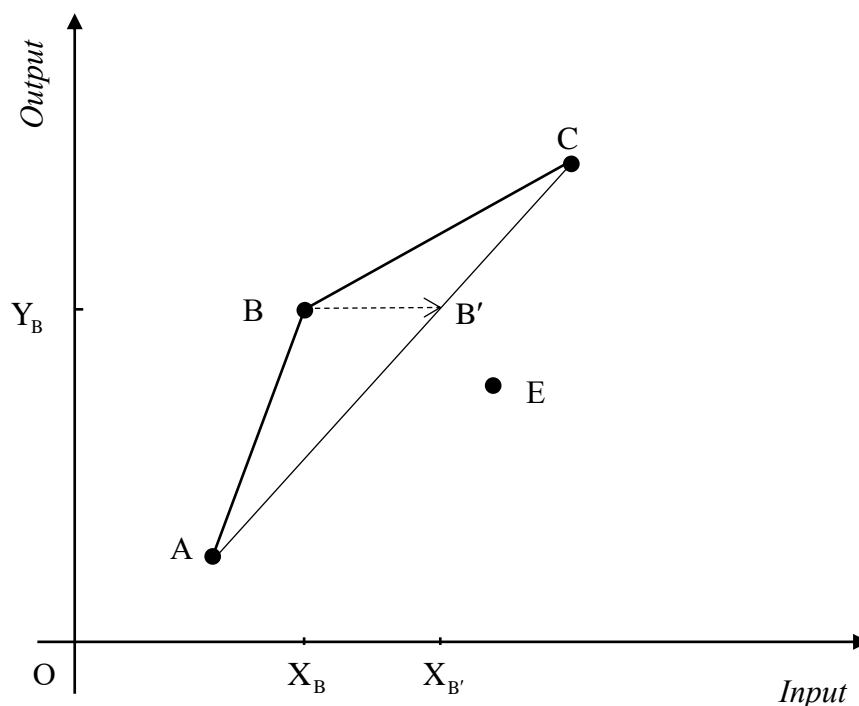


Figura 3.1 - Super-eficiência no modelo BCC orientado para *inputs*

Fonte: Adaptado de Seiford e Zhu (1999) e Chandrababu e Hariprasad (2015).

Na figura anterior, a remoção da DMU B terá como consequência uma nova fronteira de eficiência definida pelas DMUs A e C. Aplicando o modelo anterior à DMU B obtém-se $\theta_B^{SE*} > 1$ indicando que, para produzir a mesma quantidade de *output* (Y_B), o *input* da DMU B (X_B) é incrementado para o nível de *input* usado pela DMU B' ($X_{B'} = \theta_B^{SE*} X_B$) por forma a atingir a nova fronteira de eficiência formada pelas restantes DMUs. Nestas circunstâncias, a DMU B é dita super-eficiente porque para produzir a mesma quantidade de *output* necessita de menos *input* do que a DMU B', que é uma combinação linear convexa das DMUs A e C. Existe assim uma poupança de *input* associada à super-eficiência da DMU B dada por $(\theta_B^{SE*} - 1)X_B$.

A versão orientada para *outputs* do modelo de super-eficiência, sob retornos variáveis de escala, isto é, baseada no modelo BCC orientado para *outputs*, e será denotada por SE-BCC orientado para *outputs*. Para a DMU_k ($k \in \{1, \dots, n\}$), tal modelo é dado, na forma do envelope, por (Seiford & Zhu, 1999):

$$\phi_k^{SE*} = \max \phi_k^{SE} \quad (3.7)$$

$$s. a. \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n X_{ij} \mu_j \leq X_{ik} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.8)$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n Y_{rj} \mu_j \geq \phi_k^{SE} Y_{rk} \quad r = 1, \dots, s \quad (3.9)$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \mu_j = 1 \quad (3.10)$$

$$\mu_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.11)$$

$$\phi_k^{SE*} \in \mathbb{R} \quad (3.12)$$

Também nesta variante, a remoção da restrição (3.10) permite obter o modelo de super-eficiência, sob retornos constantes de escala orientado para *outputs*, para uma DMU_k que é precisamente o modelo de super-eficiência baseado no modelo CCR orientado para *outputs*. Tal modelo é denotado por SE-CCR orientado para *outputs*.

Como se mostra em Seiford e Zhu (1999), no modelo anterior, ou $\phi_k^{SE*} < 1$, ou o modelo é impossível. Quando a DMU_k é extremo-eficiente e o modelo anterior é possível, $\phi_k^{SE*} < 1$ indica que os *outputs* da DMU_k são reduzidos para atingir a fronteira de eficiência determinada pelas restantes DMUs. Neste caso, a super-eficiência é expressa em termos de redução de *outputs* e é dada por $\frac{1}{\phi_k^{SE*}} \geq 1$. Esta redução de *outputs* pode ser interpretada como ganho de *output* alcançado pela DMU_k quando comparada com as restantes DMUs, ou uma combinação linear convexa delas, para um determinado nível de *input*.

Para ilustrar o que foi acabado de referir em relação ao modelo SE-BCC orientado para *outputs*, observe-se a figura 3.2 onde estão representadas 3 DMUs extremo-eficientes A, B e C, à semelhança do que foi feito para a versão orientada para *inputs*.

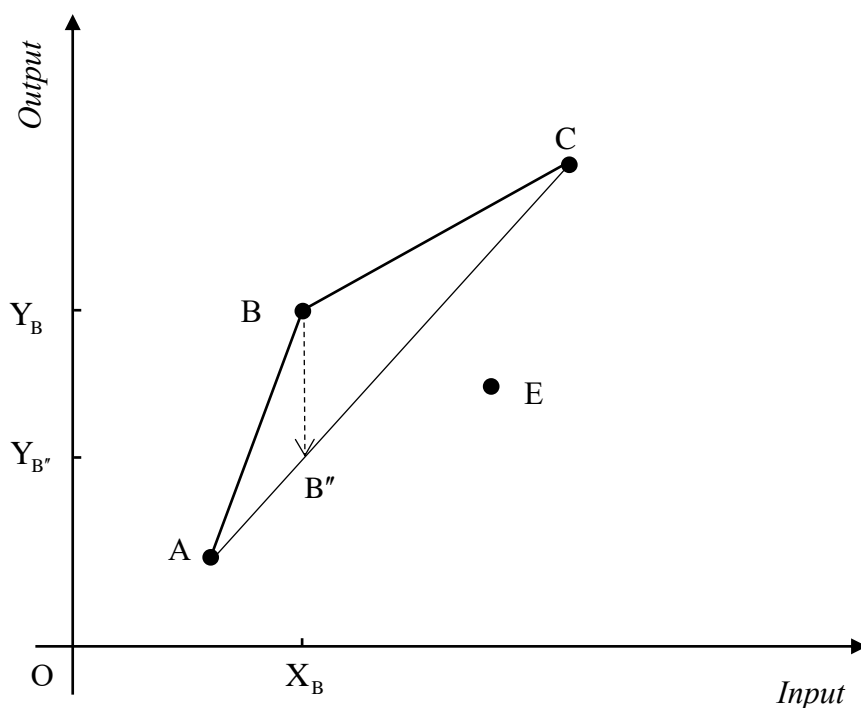


Figura 3.2 - Super-eficiência no modelo BCC orientado para *outputs*.

Fonte: Adaptado de Seiford e Zhu (1999) e Chandrababu e Hariprasad (2015).

Aplicando agora o modelo (3.7) – (3.12) à DMU B obtém-se $\phi_B^{SE*} < 1$ indicando que, utilizando a mesma quantidade de *input* (X_B), o *output* da DMU B (Y_B) será de reduzido para o nível de *output* produzido pela DMU B'' ($Y_{B''} = \phi_B^{SE*} Y_B$) por forma a atingir a nova fronteira de eficiência determinada pelas restantes DMUs. Nestas circunstâncias, a DMU B é dita super-eficiente porque utilizando a mesma quantidade de *input* produz mais *output* do que a DMU B'' , que é uma combinação linear convexa das DMUs A e C. Existe assim um ganho de *output* associado à super-eficiência da DMU B dada por $(1 - \phi_B^{SE*}) Y_B$.

3.3. Impossibilidade nos modelos clássicos de super eficiência

Os modelos de super-eficiência apresentados anteriormente são usualmente conhecidos por modelos clássicos de super-eficiência. Estes modelos apresentam um inconveniente pelo facto de, em determinadas situações, se tornarem em modelos impossíveis quando uma DMU extremo-eficiente é excluída do conjunto de referência.

Thrall (1996) chamou a atenção para o facto de o modelo de super-eficiência (AP), proposto por Andersen e Petersen (1993) e baseado em retornos constantes de escala, poder resultar num modelo impossível quando alguns *inputs* assumem valores próximos de zero. No mesmo sentido, Zhu (1996) mostrou que a impossibilidade em modelos de super-eficiência baseados em retornos constantes de escala ocorre se, e só se, um certo tipo de dados com zeros nos *inputs* e *outputs* existirem, por exemplo, a DMU_k tem alguns *inputs* iguais a zero que são positivos nas restantes, ou a DMU_k tem alguns *outputs* positivos que são iguais a zero para as restantes $DMUs$ (Seiford & Zhu, 1999).

No caso dos modelos de super-eficiência baseados em retornos variáveis de escala, isto é, no caso dos modelos SE-BCC, o problema de os modelos se tornarem impossíveis pode também ocorrer mesmo quando os dados são positivos. Tal acontece quando não é possível atingir a fronteira de eficiência, formada pelas restantes $DMUs$ eficientes, através de um incremento de *inputs* ou de uma redução de *outputs* consoante se trate do modelo orientado para *inputs* ou para *outputs*, respetivamente, como foi descrito na secção anterior (ver, por exemplo, Cook, Liang, Zha & Zhu, 2011). Para ilustrar esta situação considere-se a figura 3.3 onde estão representadas três $DMUs$ A, B e C, extremo-eficientes que formam a fronteira de eficiência.

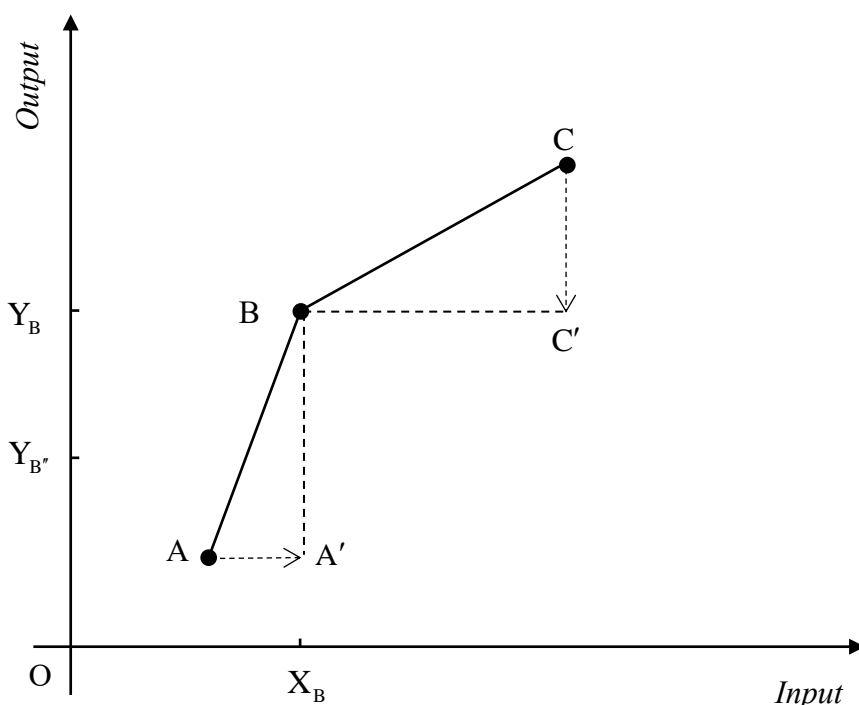


Figura 3.3 - Modelo SE-BCC impossível.

Fonte: Adaptado de Seiford e Zhu (1999)

Da observação da figura, e em conformidade com o que foi referido na secção anterior, a aplicação do modelo SE-BCC orientado para *inputs* à DMU A fornece um valor $\theta_A > 1$ que permite incrementar o *input* da DMU A para o *input* da DMU A' e deste modo atingir a nova fronteira de eficiência. Note-se que tal não é possível quando o modelo SE-BCC orientado para *inputs* é aplicado à DMU C. Similarmente, quando o modelo SE-BCC orientado para *outputs* é aplicado à DMU C obtém-se um valor $\phi_C < 1$ que permite reduzir o *output* da DMU C para o da DMU C' atingindo assim a nova fronteira de eficiência. Também, neste caso, tal não é possível quando o modelo SE-BCC orientado para *outputs* é aplicado à DMU A. Note-se que o modelo torna-se impossível para a DMU A e para a DMU C situadas no início e no fim da fronteira de eficiência determinada pelo modelo BCC (Seiford e Zhu, 1999).

Do exposto resulta que existem situações em que o modelo SE-BCC, quer orientado para *inputs* quer orientado para *outputs*, se torna impossível não permitindo assim estabelecer um *ranking* entre todas as DMUs extremo-eficientes. Assim, condições para a impossibilidade dos modelos SE-BCC têm sido estabelecidas por vários autores (Dulá & Hilkmann, 1997; Seiford & Zhu, 1999; Zhu, 1996 e Xue & Harker, 2002) como se refere em Lovell e Rouse (2003).

Uma condição necessária para que um modelo SE-BCC se torne impossível é que a DMU excluída seja extremo eficiente. Uma condição suficiente é que tenha pelo menos um *output* superior ao correspondente *output* de qualquer uma das restantes DMUs no conjunto de referência, no caso do modelo orientado para *inputs*, ou pelo menos um *input* inferior ao correspondente *input* de qualquer uma das outras DMUs no conjunto de referência, no caso modelo orientado para *outputs* (Lovell & Rouse, 2003).

Estes autores estabelecem assim que uma condição necessária e suficiente para que o modelo SE-BCC se torne impossível é que a DMU excluída seja “super-eficiente” no sentido de que no modelo orientado para *inputs* tenha pelo menos um *output* superior à combinação convexa daquele *output* entre todas as DMUs no conjunto de referência, ou, no caso do modelo orientado para *outputs*, tenha pelo menos um *input* inferior à combinação convexa daquele *input* entre todas as DMUs no conjunto de referência.

3.4. Modelos para contornar a impossibilidade na super-eficiência

Com o objetivo de contornar o problema de os modelos SE-BCC se tornarem impossíveis em determinadas situações, vários modelos têm sido propostos por diversos autores nomeadamente

por Lovell e Rouse (2003), Chen (2005), Cook, Liang, Zha e Zhu (2009), Lee, Chu e Zhu (2011) e Chen e Liang (2011).

Lovell e Rouse (2003) propuseram um modelo em que os *inputs* de cada DMU eficiente através do modelo BCC, orientado para *inputs*, são multiplicados por um escalar $\alpha > 1$ suficientemente grande por forma a tornar-se ineficiente no seu modelo. O modelo proposto por estes autores, orientado para *inputs*, é dado por

$$\theta_k^{LR*} = \min \theta_k^{LR} \quad (3.13)$$

$$s. a. \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n X_{ij} \lambda_j + \alpha X_{ik} \lambda_k \leq \alpha X_{ik} \theta_k^{LR} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.14)$$

$$\sum_{j=1}^n Y_{rj} \lambda_j \geq Y_{rk} \quad r = 1, \dots, s \quad (3.15)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \quad (3.16)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n ; j \neq k ; \quad (3.17)$$

$$\theta_k^{LR} \in \mathbb{R} \quad (3.18)$$

O valor de α deve ser suficientemente grande para garantir que $\theta_k^{LR*} < 1$ e $\lambda_k^* = 0$. A ideia dos autores é a de, no caso da orientação para *inputs*, multiplicar os *inputs* da DMU_k em avaliação por forma a obter *inputs* que excedem os *inputs* de todas as DMUs no conjunto de referência. Para tal, os autores seleccionam $\min X_{ij} > 0$ para remover valores iguais a zero e calculam

$$\alpha_i = \frac{\max X_{ij}}{\min X_{ij}} \quad i = 1, \dots, m ; j = 1, \dots, n ; \quad (3.19)$$

e

$$\alpha = \max_i \alpha_i + 1 \quad (3.20)$$

Lovell e Rouse (2003) mostram que o modelo anterior é sempre possível e que o índice de eficiência dado por $\theta_k^{LR*} \alpha$ é igual ao fornecido pelo modelo SE-BCC, isto é, $\theta_k^{SE*} = \theta_k^{LR*} \alpha$, quando este último modelo é possível. Quando o modelo SE-BCC é impossível o índice de eficiência é dado por α .

Lovell e Rouse (2003) propuseram igualmente a versão orientada para *outputs* do modelo anterior. Neste caso, os *outputs* de cada DMU que é eficiente pelo modelo BCC são multiplicados por um escalar $0 < \beta < 1$ suficientemente pequeno por forma a garantir que a DMU em avaliação se torne ineficiente. Tal modelo é dado por

$$\phi_k^{LR*} = \max \phi_k^{LR} \quad (3.21)$$

$$s. a. \sum_{j=1}^n X_{ij} \mu_j \leq X_{ik} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.22)$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n Y_{rj} \mu_j + \beta Y_{rk} \mu_k \geq \beta Y_{rk} \phi_k^{LR} \quad r = 1, \dots, s \quad (3.23)$$

$$\sum_{j=1}^n \mu_j = 1 \quad (3.24)$$

$$\mu_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.25)$$

$$\phi_k^{LR} \in \mathbb{R} \quad (3.26)$$

Neste caso, o valor de β deve ser suficientemente pequeno para garantir que $(\phi^*)^{-1} < 1$ e o índice de eficiência é dado por $\phi_{LR}^* \beta = \phi_{SE}^*$ à semelhança do que acontece no caso do modelo orientado para *inputs*. Neste caso, a ideia dos autores é a de multiplicar os *outputs* da DMU em avaliação por forma a obter *outputs* inferiores aos *outputs* de todas as DMUs no conjunto de referência. Para tal, os autores selecionam $\min Y_{rj} > 0$ para remover valores iguais a zero e calculam

$$\beta_r = \frac{\max Y_{rj}}{\min Y_{rj}} + 1 \quad r = 1, \dots, s ; j = 1, \dots, n ; \quad (3.27)$$

e

$$\beta = (\max_r \beta_r)^{-1} \quad (3.28)$$

Em vez de considerar a orientação para *inputs* ou para *outputs*, Chen (2005) sugeriu usar ambas as orientações para caracterizar a super-eficiência quando os modelos SE-BCC, orientados para *inputs* ou para *outputs*, se tornam modelos impossíveis.

No seguimento do trabalho realizado por Chen (2005), Cook *et al.* (2009) propuseram um modelo que considera ambas as orientações e que é uma extensão do modelo proposto por Chen (2005). Na prática, para uma dada DMU, em vez de procurar atingir a fronteira, formada pelas restantes DMUs, através do incremento de *inputs* ou através da redução de *outputs*, procura atingir essa fronteira através do mínimo movimento em ambas as direções. Tal modelo é dado por

$$\min \tau + M \times \beta \quad (3.29)$$

$$s. a. \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n X_{ij} \lambda_j \leq (1 + \tau) X_{ik} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.30)$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n Y_{rj} \lambda_j \geq (1 - \beta) Y_{rk} \quad r = 1, \dots, s \quad (3.31)$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_j = 1 \quad (3.32)$$

$$\beta \geq 0 \quad (3.33)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n ; j \neq k ; \quad (3.34)$$

$$\tau \in \mathbb{R} \quad (3.35)$$

onde M é um valor suficientemente grande. Cook *et al.* (2009) utilizaram $M = 10^5$ na aplicação dos seus modelos ao estudo da eficiência das 20 maiores companhias do Japão em 1999 e das cidades dos EUA integradas no top 15 da revista Fortune. Os autores mostram que o modelo SE-BCC orientado para *inputs* é impossível se, e só se, $\beta^* > 0$ e é possível se, e só se, $\beta^* = 0$. Neste último caso $1 + \tau^* = \theta^*$ onde θ^* é o valor de eficiência fornecido pelo modelo SE-BCC orientado para *inputs*. Os autores mostram ainda que na solução ótima do seu modelo se tem $0 \leq \beta^* < 1$ e $\tau^* > -1$ e, em consequência, quando $\beta^* > 0$ e, portanto, o modelo SE-BCC é impossível, $1/(1 - \beta^*) > 1$ e $1 + \tau^* > 0$, isto é, a DMU_k deve reduzir os seus *outputs* de modo a que o modelo seja possível. Posto isto, os autores definem ainda o índice de super-eficiência dado por

$$1 + \tau^* + \frac{1}{1 - \beta^*}$$

cujo valor é maior do que 1 e é formado por duas componentes: uma para a super-eficiência relativa aos *inputs* ($1 + \tau^* > 0$) e outra para a super-eficiência relativa aos *outputs* ($1 / (1 - \beta^*) > 1$).

Note-se que apesar da ideia dos autores ser a do movimento em direção à fronteira em considerando ambas as direções (*inputs* e *outputs*), o modelo anterior dá preferência à orientação para *inputs*. Uma outra versão dando preferência à orientação para *outputs* é também apresentada através do seguinte modelo:

$$\min \gamma + M \times \delta \quad (3.36)$$

$$s. a. \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n X_{ij} \lambda_j \leq (1 + \delta) X_{ik} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.37)$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n Y_{rj} \lambda_j \geq (1 - \gamma) Y_{rk} \quad r = 1, \dots, s \quad (3.38)$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_j = 1 \quad (3.39)$$

$$\delta \geq 0 \quad (3.40)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n ; j \neq k ; \quad (3.41)$$

$$\gamma \in \mathbb{R} \quad (3.42)$$

Também nesta versão, os autores mostram que o modelo SE-BCC orientado para *outputs* é impossível se, e só se, $\delta^* > 0$ e possível quando $\delta^* = 0$. Neste último caso tem-se $1 - \gamma = \phi_k^*$ onde ϕ_k^* é o valor de eficiência fornecido pelo modelo SE-BCC orientado para *outputs*. Os autores mostram ainda que na solução ótima do seu modelo se tem $\gamma^* < 1$ e $\delta^* > 0$. Quando $\delta^* > 0$ e, conseqüentemente, o modelo SE-BCC orientado para *outputs* é impossível, $1 / (1 - \gamma^*) > 0$, indicando que a DMU_k deve aumentar os seus *inputs* de modo a que o modelo seja possível. Para esta versão, os autores definem o índice de super-eficiência através da expressão

$$1 + \delta^* + \frac{1}{1 - \gamma^*}$$

cujo valor é maior do que 1 e é formado por duas componentes: uma para a super-eficiência relativa aos *inputs* ($1 + \delta^* > 0$) e outra para a super-eficiência relativa aos *outputs* ($1 / (1 - \gamma^*) > 1$)

. Quando $0 < \gamma^* < 1$, a DMU_k deve reduzir os seus *outputs* e incrementar os seus *inputs* por forma a atingir a fronteira de eficiência determinada pelas restantes $DMUs$, indicando que a DMU_k exibe super-eficiência em ambos os *inputs* e *outputs*. Quando $\gamma^* < 0$, a DMU_k deve incrementar os *inputs* e os *outputs* por forma a atingir a fronteira de eficiência formada pelas restantes $DMUs$ indicando que, neste caso, a DMU_k exibe super-eficiência apenas nos *inputs*.

Ainda, na direção dos trabalhos desenvolvidos por Chen (2005) e Cook *et al.* (2009), Lee *et al.* (2011) propuseram um processo de duas fases para contornar o problema da impossibilidade dos modelos de super-eficiência, o qual permite obter um valor de eficiência que caracteriza a super-eficiência em ambos os *inputs* e *outputs*, à semelhança do que acontece em Cook *et al.* (2009). O processo consiste na resolução de dois modelos de programação linear: o primeiro para determinar o potencial excedente nos *outputs* individuais e testar se o modelo SE-BCC é impossível; o segundo para obter o índice de eficiência considerando a solução ótima do primeiro, no caso de o modelo SE-BCC ser impossível.

Chen e Liang (2011) mostraram que o processo de duas fases proposto por Lee *et al.* (2011), que envolve a resolução de dois modelos de programação linear, pode ser realizado por um único modelo de programação linear dado por

$$\min \tau + M \times \sum_{r=1}^s \beta_r \quad (3.43)$$

$$s. a. \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n X_{ij} \lambda_j \leq (1 + \tau) X_{ik} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.44)$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n Y_{rj} \lambda_j \geq (1 - \beta_k) Y_{rk} \quad r = 1, \dots, s \quad (3.45)$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_j = 1 \quad (3.46)$$

$$\beta_r \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.47)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n ; j \neq k ; \quad (3.48)$$

$$\tau \in \mathbb{R} \quad (3.49)$$

onde M é igualmente um valor suficientemente grande tal como acontece em Cook *et al.* (2009). Os autores basearam-se em Cook, *et al.* (2009) e Lee *et al.* (2011) para afirmar que, usando este modelo, o modelo SE-BCC orientado para *inputs* torna-se impossível se, e só se, $\beta_r^* > 0$. Ainda baseados em Cook, *et al.* (2009), definiram o índice de eficiência dado por

$$1 + \tau^* + \frac{1}{|R|} \sum_{r \in R} \frac{1}{1 - \beta_r^*},$$

onde R é o conjunto dos $\beta_r^* > 0$.

Os autores apresentaram também um modelo, similar ao anterior, baseado na orientação para *outputs* e que congrega de modo equivalente os dois modelos do processo de duas fases baseado na orientação para *outputs* proposto por Lee *et al.* (2011). Tal modelo é dado por:

$$\min \gamma + M \times \sum_{i=1}^m \delta_i \quad (3.50)$$

$$s. a. \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n X_{ij} \lambda_j \leq (1 + \delta_i) X_{ik} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.51)$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n Y_{rj} \lambda_j \geq (1 - \gamma) Y_{rk} \quad r = 1, \dots, s \quad (3.52)$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_j = 1 \quad (3.53)$$

$$\delta_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.54)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n ; j \neq k ; \quad (3.55)$$

$$\gamma \in \mathbb{R} \quad (3.56)$$

onde M é definido como anteriormente e onde o índice de eficiência é, neste caso, dado por

$$\frac{1}{|I|} \sum_{i \in I} (1 + \delta_i^*) + \frac{1}{1 - \gamma^*}$$

sendo I o conjunto dos $\delta_i^* > 0$.

Para terminar este capítulo, refira-se que apesar da super-eficiência ser um assunto interessante na metodologia DEA, a sua aplicação sob retornos variáveis de escala não se revela fácil devido ao problema da impossibilidade nos modelos SE-BCC e a consequente necessidade de recorrer a modelos que contornem este problema. Por sua vez, o trabalho desenvolvido neste tipo de modelos tem sido pouco.

4. Estudo de um caso prático

4.1. Introdução

No capítulo 3 foi apresentado um estudo sobre a super-eficiência na metodologia DEA com base nos modelos clássicos apresentados no capítulo 2. Este capítulo tem como objetivo aplicar esse estudo, nomeadamente alguns dos modelos aí apresentados, a uma situação real, mais concretamente à avaliação de dezoito seguradoras, que operavam em Portugal no ano de 2016.

Note-se que o setor dos seguros desempenha um papel fundamental na economia de qualquer país, pois contribui significativamente para o crescimento e desenvolvimento económico quer no mercado nacional, quer no internacional. Apesar da crise vivida recentemente, este setor foi dos poucos que conseguiu manter níveis de solvência elevados, o que originou uma consciencialização por parte das organizações e das pessoas da importância de protegerem os seus ativos.

Assim, na secção 4.2, apresentam-se os dados relativos aos *inputs* e *outputs* das dezoito seguradoras bem como a forma como esses dados foram obtidos e selecionados. Nesta secção, é ainda justificada a seleção dos modelos utilizados nesta aplicação. Por último, na secção 4.3, são apresentados os resultados obtidos e é realizada uma análise dos mesmos.

4.2. Seleção dos dados e escolha dos modelos

Para a realização deste estudo, foram utilizados os dados presentes nas demonstrações financeiras dos relatórios e contas do ano de 2016 das várias seguradoras, disponibilizados pelas mesmas *online* nos respetivos *sites*. Apesar de ter sido possível recolher informação sobre 26 seguradoras, neste estudo apenas foram selecionadas dezoito pois algumas apresentavam dados negativos para determinados *outputs*.

Importa referir que o setor dos seguros se divide em dois ramos, o ramo vida e o ramo não vida. O ramo vida engloba todos os seguros em caso de morte, já o ramo não vida engloba todos os outros, como por exemplo, seguros de bens patrimoniais e seguros pessoais. Neste estudo foram consideradas as seguradoras inseridas nos dois ramos.

A seleção dos *inputs* e *outputs* teve por base os dados disponibilizados pelas seguradoras classificando um conjunto de indicadores como os mais importantes para o presente estudo. Assim, foram selecionados três *inputs* e dois *outputs*. Os *inputs* selecionados são os seguintes:

- *Input 1* - prémios adquiridos líquidos de resseguro;
- *Input 2* - custos com sinistros líquidos de resseguro;
- *Input 3* - custos e gastos de exploração líquidos.

Os prémios adquiridos líquidos de resseguro refletem a parcela dos prémios que os segurados já pagaram e para os quais a seguradora já ofereceu cobertura, e que não são assegurados novamente. São custos que as seguradoras contraem dos seus assegurados.

Os custos com sinistros líquidos de resseguro são todos os custos originados por sinistros, como por exemplo custos relacionados com invalidez, acidentes, incêndios, etc. Tal como acontece com os prémios adquiridos líquidos de resseguro, não são assegurados novamente.

Os custos e gastos de exploração, como o próprio nome indica, são todos os custos e gastos afetos à parte operacional da seguradora, ou seja, são os custos que a empresa suporta por desempenhar a sua atividade.

Para *outputs* foram selecionados os seguintes:

- *Output 1* - total do capital próprio;
- *Output 2* - resultado líquido do exercício.

O capital próprio representa o valor líquido do património das seguradoras. É a diferença entre os ativos e os passivos, isto é, representa tudo aquilo que a empresa possui e deve a terceiros. O resultado líquido do exercício representa o lucro que as seguradoras obtiveram num determinado período, ou seja, é tudo o que resta das receitas depois de deduzidos todos os custos.

Os valores dos *inputs* e *outputs* selecionados para cada DMU (seguradora) são apresentados na tabela 4.1, onde nas duas primeiras colunas são identificadas as seguradoras, nas três colunas que se seguem são apresentados os valores para os *inputs* e, por fim, nas duas últimas colunas, são apresentados os valores para os *outputs*.

Note-se que o número total de *inputs* e *outputs* selecionados verifica a condição de o número de DMUs não ser inferior ao máximo entre $m \times s$ e $3(m + s)$, onde m representa o número de

inputs e *s* o número de *outputs*. Esta condição foi sugerida em Cooper *et al.* (2007) a fim de evitar um número elevado de DMUs classificadas como eficientes através dos modelos clássicos da DEA.

Tabela 4.1 – Dados referentes aos *inputs* e aos *outputs* (valores em milhões de euros).

DMUs (Seguradoras)	<i>Input 1</i>	<i>Input 2</i>	<i>Input 3</i>	<i>Output 1</i>	<i>Output 2</i>
01 ACP Mobilidade	1 144 570	661 417	339 418	3 882 715	8 759 343
02 AEGON ST	26 632 570	6 146 397	17 764 043	13 888 574	10 096 652
03 Allianz	498 988 601	364 182 221	126 411 938	184 612 477	18 509 738
04 Caravela Comp. Seguros	24 173 679	17 159 107	8 983 195	9 064 436	8 703 036
05 Fidelidade Mundial	1 138 341 582	828 902 558	338 969 287	2 044 198 636	286 120 890
06 GNB Seguros	61 930 764	42 827 179	9 557 938	34 442 387	17 861 934
07 Groupama	97 708 070	118 435 155	3 058 195	94 546 794	10 060 436
08 Liberty Seguros	321 852 275	166 405 629	74 871 838	157 667 628	13 290 509
09 Lusitania	159 245 708	125 814 306	49 245 189	473 786 604	1
10 MAPFRE	81 215 246	64 845 194	24 839 203	70 336 863	7 863 133
11 Multicare	255 969 544	183 361 726	33 741 464	65 077 722	15 203 951
12 Nseguros Grupo MG	10 591 603	9 888 670	2 728 106	5 797 929	6 252 884
13 Occidental	99 513 172	54 941 526	24 859 400	66 779 352	22 044 197
14 OK! Teleseguros	38 421 986	31 123 740	11 020 855	21 379 144	4 607 597
15 Popular Seguros	6 094 442	4 603 558	949 080	8 464 805	9 104 431
16 Seguradoras Unidas	292 387	216 722	94 399	158 898	8 430 398
17 Victoria Seguros	35 534 586	27 015 608	8 481 192	40 753 119	8 919 144
18 Zurich	159 042 279	61 154 975	8 753 964	51 438 205	18 513 749

Fonte: Elaboração própria.

Os modelos selecionados para o presente estudo prático foram os modelos clássicos da DEA, apresentados no capítulo 2, e os modelos de super-eficiência baseados nos modelos clássicos, apresentados no capítulo 3, com orientação para *inputs*. A opção por este tipo de orientação indica que se pretende atingir a eficiência à custa da redução dos *inputs*, isto é, dos recursos utilizados pelas seguradoras.

4.3. Resultados e respetiva análise

Nesta secção, são apresentados os resultados obtidos por aplicação de alguns dos modelos de super-eficiência e, necessariamente, por alguns dos modelos clássicos apresentados nos capítulos anteriores. Para obtenção desses resultados foram usados os *softwares* MaxDEA (versão gratuita) e o módulo de programação linear, assim como o módulo OPL (*Optimization Programming Language*), do pacote *CPLEX Optimization Studio Academic Research 12.5*. O Primeiro para obter as soluções ótimas fornecidas pelos modelos CCR e BCC orientados para *inputs*, na forma do envelope, e o segundo para obter as soluções ótimas fornecidas pelos modelos de super-eficiência com orientação para *inputs* apresentados no capítulo anterior.

Na tabela 4.2 apresentam-se os resultados obtidos pelo modelo CCR orientado para *inputs*, onde nas duas primeiras colunas identificam as DMUs, isto é, as seguradoras, na terceira é apresentado o índice de eficiência obtido por cada uma das seguradoras e na quarta coluna apresentam-se as seguradoras de referência.

Da observação da referida tabela, verifica-se que existem três instituições com índice de eficiência igual a 1 e, por isso, eficientes, que são a seguradora 01 (ACP Mobilidade), a 07 (Groupama) e a 16 (Seguradoras Unidas). Todas as restantes seguradoras obtiveram um índice de eficiência inferior a 1 e diferente para todas as seguradoras sendo por isso possível diferenciar estas seguradoras em termos de *ranking*. Relativamente às seguradoras de referência para estas seguradoras verifica-se que a seguradora 16 (Seguradoras Unidas) não é referência para qualquer delas e que a seguradora 01 (ACP Mobilidade) é a que se apresenta como referência mais importante em 10 dos 15 casos e a única nos restantes casos.

A fim de diferenciar todas as seguradoras em termos de *ranking* torna-se necessário diferenciar as três seguradoras com índice de eficiência igual a 1. Para tal utilizou-se o modelo de super-eficiência baseado no modelo CCR orientado para *inputs* (SE-CCR), cujos resultados obtidos constam da tabela 4.3, cuja estrutura é a mesma da tabela 4.2.

De acordo com a tabela 4.3, verifica-se que a seguradora que apresenta maior índice de super-eficiência é 16 (Seguradoras Unidas) seguida da seguradora 07 (Groupama) que, por sua vez, é seguida da seguradora 01 (ACP Mobilidade). Estes resultados conjuntamente com os da tabela 4.2 permitem estabelecer um *ranking* para todas as seguradoras avaliadas com base no modelo CCR com orientação para *inputs*. Tais *rankings* são apresentados na tabela 4.7 conjuntamente com os *rankings* obtidos pelos modelos de super-eficiência baseados no modelo BCC orientado para *inputs* cujos resultados se analisam de seguida.

Tabela 4.2 - Resultados obtidos pelo modelo CCR orientado para *inputs*.

DMUs (Seguradoras)	Índice de eficiência	DMUs de Referência
01 ACP Mobilidade	1	ACP Mobilidade (1,000000)
02 AEGON ST	0,384926	ACP Mobilidade (3,577026)
03 Allianz	0,123435	ACP Mobilidade (45,046663); Groupama (0,102691)
04 Caravela Comp. Seguros	0,110536	ACP Mobilidade (2,334561)
05 Fidelidade Mundial	0,529368	ACP Mobilidade (526,486913)
06 GNB Seguros	0,281961	ACP Mobilidade (7,393323); Groupama (0,060671)
07 Groupama	1	Groupama (1,000000)
08 Liberty Seguros	0,181783	ACP Mobilidade (39,800613); Groupama (0,033139)
09 Lusitania	0,877045	ACP Mobilidade (122,024564)
10 MAPFRE	0,255301	ACP Mobilidade (18,115381)
11 Multicare	0,145178	ACP Mobilidade (13,064312); Groupama (0,151805)
12 Nseguros Grupo MG	0,180304	ACP Mobilidade (1,423336); Groupama (0,002872)
13 Ocidental	0,232021	ACP Mobilidade (16,872706); Groupama (0,013405)
14 OK! Teleseguros	0,168434	ACP Mobilidade (5,447199); Groupama (0,002424)
15 Popular Seguros	0,687340	ACP Mobilidade (1,770295); Groupama (0,016830)
16 Seguradoras Unidas	1	Seguradoras Unidas (1,000000)
17 Victoria Seguros	0,400540	ACP Mobilidade (9,722116); Groupama (0,031782)
18 Zurich	0,416533	ACP Mobilidade (9,271470); Groupama (0,163302)

Fonte: Elaboração própria.

Tabela 4.3 - Resultados obtidos pelo modelo SE-CCR orientado para *inputs*.

DMUs (Seguradoras)	Índice de super-eficiência	DMUs de Referência
01 ACP Mobilidade	1,8330	Lusitania (0,0078466); Seguradoras Unidas (1,039)
07 Groupama	2,7026	ACP Mobilidade (24,351)
16 Seguradoras Unidas	3,7676	ACP Mobilidade (0,96245)

Fonte: Elaboração própria.

Na tabela 4.4, cuja estrutura é a mesma da tabela 4.2, apresentam-se os resultados obtidos por aplicação do modelo BCC orientado para *inputs*, igualmente apresentado no capítulo anterior.

Tabela 4.4 - Resultados obtidos pelo modelo BCC orientado para *inputs*.

DMUs (Seguradoras)	Índice de eficiência	DMUs de Referência
01 ACP Mobilidade	1	ACP Mobilidade (1,000000)
02 AEGON ST	0,765082	ACP Mobilidade (0,994853); Fidelidade Mundial (0,004831); Lusitania (0,000315)
03 Allianz	0,187719	ACP Mobilidade (0,683194); Fidelidade Mundial (0,040791); Groupama (0,084901); Lusitania (0,191113)
04 Caravela Comp. Seguros	0,121850	ACP Mobilidade (0,989400); Fidelidade Mundial (0,000128); Lusitania (0,010473)
05 Fidelidade Mundial	1	Fidelidade Mundial (1,000000)
06 GNB Seguros	1	GNB Seguros (1,000000)
07 Groupama	1	Groupama (1,000000)
08 Liberty Seguros	0,290260	ACP Mobilidade (0,751120); Fidelidade Mundial (0,023456); Lusitania (0,225424)
09 Lusitania	1	Lusitania (1,000000)
10 MAPFRE	0,296978	ACP Mobilidade (0,860495); Fidelidade Mundial (0,001067); Groupama (0,002043); Lusitania (0,136395)
11 Multicare	0,241713	ACP Mobilidade (0,710003); Fidelidade Mundial (0,019611); Groupama (0,193087); Zurich (0,077298)
12 Nseguros Grupo MG	0,189391	ACP Mobilidade (0,993273); Groupama (0,003285); Lusitania (0,003442)
13 Ocidental	0,734087	ACP Mobilidade (0,952103); Fidelidade Mundial (0,047897)
14 OK! Teleseguros	0,192618	ACP Mobilidade (0,958252); Groupama (0,005593); Lusitania (0,036155)
15 Popular Seguros	0,878882	ACP Mobilidade (0,978433); Fidelidade Mundial (0,001180); Groupama (0,019526); Lusitania (0,000861)
16 Seguradoras Unidas	1	Seguradoras Unidas (1,000000)
17 Victoria Seguros	0,507244	ACP Mobilidade (0,907846); Fidelidade Mundial (0,002430); Groupama (0,027023); Lusitania (0,062701)
18 Zurich	1	Zurich (1,000000)

Fonte: Elaboração própria.

Da observação desta tabela resulta que, com a utilização deste modelo, existem 7 seguradoras com índice de eficiência igual a 1, isto é, classificadas como eficientes. Tais seguradoras são a 01 (ACP Mobilidade), a 05 (Fidelidade), a 06 (GNB Seguros), a 07 (Groupama), a 09 (Lusitânia), a 16 (Seguradoras Unidas) e a 18 (Zurich). Como seria de esperar, o número de seguradoras é, neste caso, superior ao caso anterior. Então, a questão da diferenciação em termos de *ranking* torna-se ainda mais pertinente com a aplicação do modelo BCC.

A aplicação do modelo de super-eficiência baseado no modelo BCC orientado para *inputs* (SE-BCC) às seguradoras classificadas como eficientes através do modelo BCC permitiu obter os resultados apresentados na tabela 4.5, que segue a mesma estrutura das tabelas 4.2, 4.3 e 4.4.

Tabela 4.5 - Resultados obtidos pelo modelo SE-BCC orientado para *inputs*.

DMUs (Seguradoras)	Índice de super-eficiência	DMUs de Referência
01 ACP Mobilidade	2,3660	Fidelidade Mundial (0,0012584); Lusitania (0,0024315); Seguradoras Unidas (0,99631)
05 Fidelidade Mundial	Impossível	
06 GNB Seguros	1,1053	ACP Mobilidade (0,72182); Fidelidade Mundial (0,023875); Zurich (0,25431)
07 Groupama	3,5136	Lusitania (0,16125); Popular Seguros (0,58121); Zurich (0,257581)
09 Lusitania	1,6519	ACP Mobilidade (0,76969); Fidelidade Mundial (0,23031)
16 Seguradoras Unidas	3,9146	ACP Mobilidade (1)
18 Zurich	1,2192	Fidelidade Mundial (0,0054011); GNB Seguros (0,89243); Groupama (0,10217)

Fonte: Elaboração própria.

Como se pode verificar na segunda coluna desta tabela, este modelo permitiu obter um índice de super-eficiência para todas as seguradoras, classificadas como eficientes pelo modelo BCC, exceto para uma, a seguradora 05 (Fidelidade Mundial), onde o modelo se torna impossível. Como os índices obtidos são todos diferentes é fácil estabelecer um *ranking* para as restantes seguradoras, faltando, no entanto, obter um índice para a seguradora 05 (Fidelidade Mundial).

Para contornar a situação de o modelo ser impossível para esta seguradora foram utilizados os modelos propostos por Lovell e Rouse (2003), Cook *et al.* (2009) e Chen e Liang (2011) apresentados no capítulo 3. Nos dois últimos modelos considerou-se $M = 10^5$, à semelhança do que foi feito por Cook *et al.* (2009). Estes modelos foram aplicados a todas as seguradoras classificadas como eficientes através do modelo BCC orientado para *inputs*, sendo que, para as seguradoras em que este modelo é possível, os resultados obtidos são iguais aos apresentados na tabela 4.5, de acordo com o que referido no capítulo 3 relativamente a estes modelos. Para o caso onde o modelo é impossível, os resultados obtidos constam da tabela 4.6.

Tabela 4.6 - Resultados obtidos pelos modelos de Lovell e Rouse (2003), Cook *et al.* (2009) e Chen e Liang (2011) para a seguradora 05 (Fidelidade Mundial)

Autores / Modelos	Índice de eficiência		DMUs de Referência
Lovell e Rouse (2003)	3894	$\alpha = 3894$	Fidelidade Mundial (1)
Cook, Liang, Zha e Zhu (2009)	14,7587	$\tau = -0,69009$ $\beta = 0,93079$	Allianz (0,634); Ocidental (0,366)
Chen e Liang (2011)		$\tau = -0,84822$ $\beta_1 = 0,76823$ $\beta_2 = 1$	Lusitania (1)

Fonte: Elaboração própria.

Da observação da tabela 4.6 verifica-se que o índice fornecido pelo modelo Lovell e Rouse (2003), para a seguradora 05 (Fidelidade Mundial) é um valor muito elevado que, como se referiu no capítulo 3, coincide com o valor de α , podendo considerar-se um valor irrealista. O índice fornecido pelo modelo de Cook *et al.* (2009) apresenta um valor para esta seguradora superior ao valor apresentado para as restantes classificadas como eficientes. Relativamente ao modelo de Chen e Liang (2011) verificou-se que na solução ótima $\beta_2 = 1$, o que faz com que o denominador de um dos termos fracionários da fórmula proposta por estes autores seja igual a zero. Se dessa fórmula excluirmos o termo correspondente a este valor obtém-se um índice igual a 4,3146, com arredondamento.

A análise feita no parágrafo anterior conduz a considerar a seguradora 05 (Fidelidade Mundial) como sendo a mais super-eficiente, obtendo assim o melhor *ranking*. Seguem-se, por ordem de melhor *ranking*, as seguradoras 16 (Seguradoras Unidas), a 07 (Groupama), a 01 (ACP Mobilidade), a 09 (Lusitania), a 18 (Zurich) e a 06 (GNB Seguros). Os *rankings* de todas as

seguradoras obtidos pelos modelos de super-eficiência usados anteriormente são apresentados na tabela 4.7, onde nas duas primeiras colunas se identificam as seguradoras, nas terceira e quarta colunas se apresentam os *rankings* obtidos pelos modelos de super-eficiência baseados nos modelos CCR e BCC orientados para *inputs*, respectivamente.

Tabela 4.7 - *Rankings* obtidos pelos modelos de super-eficiência com orientação para *inputs*.

DMUs (Seguradoras)	Modelos	
	Super-eficiência CCR <i>inputs</i>	Super-eficiência BCC <i>inputs</i>
01 ACP Mobilidade	3	4
02 AEGON ST	9	9
03 Allianz	17	17
04 Caravela Comp. Seguros	18	18
05 Fidelidade Mundial	6	1
06 GNB Seguros	10	7
07 Groupama	2	3
08 Liberty Seguros	13	13
09 Lusitania	4	5
10 MAPFRE	11	12
11 Multicare	16	14
12 Nseguros Grupo MG	14	16
13 Ocidental	12	10
14 OK! Teleseguros	15	15
15 Popular Seguros	5	8
16 Seguradoras Unidas	1	2
17 Victoria Seguros	8	11
18 Zurich	7	6

Fonte: Elaboração própria.

Nesta tabela, os valores representados a negrito nas terceira e quarta colunas indicam os *rankings* das seguradoras classificadas como eficientes através dos modelos CCR e BCC orientados para

inputs. Os restantes indicam os *rankings* das seguradoras classificadas como ineficientes através desses modelos.

Da observação da tabela verifica-se que relativamente às três seguradoras classificadas como eficientes em ambos os modelos clássicos CCR e BCC, que foram as seguradoras 01 (ACP Mobilidade), a 07 (Groupama) e a 16 (Seguradoras Unidas) verifica-se que apresentam *rankings* diferentes depois de aplicados os correspondentes modelos de super-eficiência. Não existe assim uma seguradora que tenha obtido o melhor *ranking* com base em ambos os modelos. Contudo, a diferença de *rankings* obtidos a partir dos dois modelos é apenas de 1 que pode ser justificada pelo facto de o modelo SE-BCC se tornar impossível para a seguradora 05 (Fidelidade Mundial), pois sem considerar esta seguradora os *rankings* seriam os mesmos. Note-se que, de acordo com o que foi referido no capítulo anterior, esta seguradora corresponde a um ponto extremo situado numa extremidade da fronteira de eficiência gerada pelo modelo BCC orientado para *inputs*.

Existem cinco seguradoras que têm o mesmo *ranking* tanto no modelo sob retornos constantes de escala como modelo sob retornos variáveis de escala que são as seguradoras 02 (AEGON ST), a 03 (Allianz), a 04 (Caravela Comp. Seguros), a 08 (Liberty Seguros) e a 14 (Ok! Teleseguros). Estas seguradoras são ineficientes nos modelos clássicos CCR e BCC orientados para *inputs*.

5. Conclusões

A avaliação de desempenho das organizações é de elevada importância, quer no setor segurador, que nos demais, pois, é através da avaliação de desempenho das organizações que estas podem atingir níveis de excelência, servindo assim de referência para as empresas concorrentes.

Ao longo dos anos, as organizações têm sofrido várias alterações no que respeita aos métodos de avaliação do desempenho das mesmas. Tais alterações devem-se ao facto de o mercado estar em constante mudança e, como tal, houve a necessidade de se substituir os métodos tradicionais de avaliação por novas técnicas.

Com a adoção de modelos não paramétricos, nomeadamente a DEA, as organizações alavancam a sua capacidade de adaptação às exigências do mercado, uma vez que passam a utilizar métodos de avaliação mais rigorosos e, conseqüentemente, aumentam o seu nível de eficiência. Desta forma tornam-se mais competitivas.

A metodologia DEA permite identificar o índice de eficiência relativa de entidades homogêneas, designadas por DMUs, que transformam múltiplos *inputs* em múltiplos *outputs*. Assim, as DMUs eficientes delimitam uma fronteira não paramétrica de eficiência e possibilitam a identificação de um conjunto de DMUs que servem de referência para as DMUs ineficientes. Desta maneira, o gestor da organização pode tomar as decisões necessárias que visam a melhoria de determinada DMU ineficiente.

Contudo, os modelos clássicos da metodologia DEA ostentam algumas limitações, como por exemplo, geralmente identificam mais do que uma DMU como eficiente, o que não permite distinguir entre as DMUs eficientes qual a mais eficiente. Ou seja, não permite estabelecer um *ranking*. Para contornar esta limitação, vários modelos têm vindo a ser desenvolvidos como é o caso do modelo da Super-eficiência da metodologia DEA.

O modelo da Super-eficiência, proposto por Andersen e Petersen (1993), baseia-se nos modelos CCR e BCC, e permite estabelecer um *ranking* das DMUs eficientes excluindo do *set* de referência a DMU em avaliação. Desta forma, o modelo permite que uma DMU classificada como extremo-eficiente possa alcançar um índice de eficiência superior a 1. Nesta situação, a DMU passa a ser classificada como super-eficiente.

Para obter uma melhor percepção da funcionalidade da metodologia DEA e de alguns dos seus modelos, foi feita uma aplicação prática a 18 seguradoras do ramo não vida, que operavam em

Portugal no ano de 2016. Desta forma, foi possível fazer uma avaliação de desempenho das mesmas.

Neste estudo, numa primeira fase, foram utilizados ambos os modelos clássicos orientados para *inputs*, para se proceder à avaliação da eficiência das DMUs.

Primeiramente, aplicou-se o modelo CCR-*Inputs* onde foram identificadas como eficientes 3 DMUs: 01(ACP Mobilidade), 07(Groupama) e 16 (Seguradoras Unidas). Para obter um *ranking* das mesmas aplicou-se o modelo da SE-CCR, onde se pode concluir que a DMU mais eficiente é a 16, seguida da 07 e da 01.

Seguidamente, utilizou-se o modelo BCC-*Inputs*. Desta vez, o número de DMUs eficientes ascendeu a 7. Mais uma vez, de forma a averiguar o *ranking* das mesmas, aplicou-se o modelo -SE-BCC. Ao aplicar-se este modelo, a DMU 05 (Fidelidade Mundial) passou a ter um índice de eficiência impossível. Por forma a contornar este problema, recorreu-se à aplicação de três outros modelos, Lovell e Rousse (2003), Cook *et al.* (2009) e, por fim, Chen e Liang (2011). Após a aplicação destes três modelos, chegou-se à conclusão de que a DMU 05 é a mais eficiente entre todas as outras.

Por fim, para uma melhor para uma melhor perceção dos resultados obtidos, foi elaborada uma tabela de *rankings* onde constam os modelos SE-CCR e SE-BCC orientados para *inputs*.

Referências Bibliográficas

- Allen, R., Athanassopoulos, A., Dyson, R. G., & Thanassoulis, E. (1997). Weights restrictions and value judgements in data envelopment analysis: evolution, development and future directions. *Annals of Operations Research*, 73, 13-34.
- Andersen, P., & Petersen, N. C. (1993). A procedure for ranking efficient units in data envelopment analysis. *Management science*, 73, 1261-1264.
- Banker, R. D., Charnes, A., & Cooper, W. W. (1984). Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis. *Management science*, 30(9).
- Banker, R., Das, S., & Datar, S. M. (1989). Analysis of cost variances for management control in hospitals. *RIGNA*, 5, 268-91.
- Chandrababu, D., & Hariprasad, D. (2015). A Concept of Input-Output oriented Super-efficiency in Decision Manking Units. *American Journal of Engineering Research (AJER)*, 4(1), 76-81.
- Charnes, A., & Cooper, W. W. (1962). Programming with linear fractional functional. *Naval Research Logistics (NRL)*, 9.
- Charnes, A., Cooper, W. W., & Rhodes, E. (1978). Measuring the efficiency of decision-making units. *European Journal of Operational Research*, 2, 429-444.
- Charnes, A., Cooper, W. W., & Thrall, R. M. (1991). A Structure for Classifyin and Characterizing Efficiency and Inefficiency in Data Envelopment Analysis. *The Journal of Productivity Analysis*, 2, 197-237.
- Charnes, A., Haag, S., Jaska, P., & Semple, J. (1992). Sensitivity of efficiency classifications in the additive model of Data Envelopment Analysis. *Int J Sys Sci*, 23, 789-98.
- Chen, Y. (2005). Measuring super-efficiency in DEA in the presence of infeasibility. *European Journal of Operational Research*, 161, 545-551.
- Chen, Y., & Liang, L. (2011). Super-Efficiency DEA in the presence of infeasibility: One model approach. *European Journal of Operational Research*, 213, 359-360.

- Cook, W. D., Liang, L., Zha, Y., & Zhu, J. (2009). A modified super-efficiency DEA model for infeasibility. *Journal of the Operational Research Society*, 60, 276-281.
- Cooper, W. W. (2005). Origins, Uses of, and Relations Between Goal Programming and Data envelopment Analysis. *Journal of Multi-criteria Decision Analysis*, 3, 3-11.
- Cooper, W. W., Seiford, L. M., & Tone, K. (2006). Introduction to data envelopment analysis and its uses: with DEA-solver software and references. *Springer Science & Business Média*.
- Cooper, W. W., Seiford, L. M., & Tone, K. (2007). Data envelopment analysis: A comprehensive text with models, applications, references and DEA – Solver software. *New York: Springer Science + Business Media*.
- Cooper, W. W., Seiford, L. M., & Zhu, J. (2011). Handbook on data envelopment analysis (Vol.164). *Springer Science & Business Média*.
- Doyle, J., & Green, R. (1994). Efficiency and cross-efficiency in DEA: derivations, meanings and uses. *Journal of the Operations Research Society*, 45(5), 567–578.
- Dulá, J. H., & Hickman, B. (1997). Effects of excluding the column being scored from the DEA envelopment LP technology matrix. *J Opl Res Soc*, 48, 1001-12.
- Emrouznejad, A., & Yang, G. (2018). A survey and analysis of the first 40 years of scholarly literature in DEA: 1978-2016. *Socio-Economic Planning Sciences*, 61, 4-8.
- Emrouznejad, A., Parker, B., & Tavares, G. (2008). Evaluation of research in efficiency and productivity: A survey and analysis of the first 30 years of scholarly literature in DEA. *Journal of Socio-Economic Planning Sciences*, 42, 151-157.
- Farrel, M. J. (1957). The measurement of productive efficiency. *Journal of the Royal Statistical Society*, 120(3), 253-290.
- Koopmans, T. (1951). Analysis of production as an efficient combination of activities. New York: J. Wiley.
- Lee, H., Chu, C., & Zhu, J. (2011). Super-efficiency DEA in the presence of infeasibility. *European Journal of Operational Research*, 212, 141-147.

- Li, X. B., & Reeves, G. R. (1999). A multiple criteria approach to data envelopment analysis. *European Journal of Operational Research*, 115(3), 507-517.
- Liu, J. S., Lu, W., Lu, Y. Y., & Lin, B. J. (2013a). Data envelopment analysis 1978-2010: a citation-based literature survey. *Omega - The International Journal of Management Science*, 41, 3-15.
- Liu, J. S., Lu, W., Lu, Y. Y., & Lin, B. J. (2013b).). A survey of DEA applications. *Omega*, 41, 893-902.
- Lovell, C. A., & Rouse, A. P. (2003). Equivalent standard DEA models to provide super-efficiency scores. *Journal of the Operational Research Society*, 54(1), 101-108.
- Rousseau, J., & Semple, J. (1995). Two-Person Ratio Efficiency Games. *Management Science*, 41(3), 345-341.
- Seiford, L. M. (1996). Data envelopment analysis: the evolution of the state of the art (1978-1995). *Journal of Productivity Analysis*, 7, 99-137.
- Seiford, L. M., & Thrall, R. M. (1990). Recent developments in DEA - the mathematical programming approach to frontier analysis. *Journal of Econometrics*, 46, 7-38.
- Seiford, L., & Zhu, J. (1998). Identifying Excesses and Deficits in Chinese Industrial Productivity (1953-1990): a weighted data envelopment analysis approach. *OMEGA*, 26(2), 269-279.
- Seiford, L., & Zhu, J. (1999). Infeasibility Of Super-Efficiency Data Envelopment Analysis Models. *INFOR: Information Systems and Operational Research*, 37:2, 45(9), 174-187.
- Sexton, T. R., Silkman, R. H., & Hogan, A. J. (1986). Data envelopment analysis: Critique and extensions. Em S. RH, *Measuring Efficiency: An Assessment of Data Envelopment Analysis* (pp. 73-105). San Francisco: Jossey-Bass.
- Thrall, R. M. (1996). Duality, classification and slacks in DEA. *Annals of Operations Research*, 66, 109-138.
- Tone, K. (2002). A slacks-based measure of super-efficiency in data envelopment analysis. *European Journal of Operational Research*, 143, 32-41.

- Wilson, P. (1995). Detecting influential observations in Data Envelopment Analysis. *Journal of Productivity Analysis*, 6(1), 27-45.
- Xue, M., & Harker, P. T. (2002). Note: Ranking DMUs with Infeasible Super Efficiency in DEA Models. *Management Science*, 48(5), 705-710.
- Zhu, J. (1996). Robustness of the efficient DMUs in data envelopment analysis. *European Journal of Operational Research*, 90, 451-460.
- Zhu, J. (2001). Super-efficiency and DEA sensitivity analysis. *European Journal of Operational Research*, 129, 443-455.