



INSTITUTO SUPERIOR DE ENGENHARIA DE LISBOA

Departamento de Engenharia Mecânica

**Análise de variabilidade em perfis de paredes finas
construídos em materiais compósitos**

JORDAN BRANCO DA SILVA
(Licenciado em Engenharia Mecânica)

Dissertação para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica

Orientador(es):

Doutora Maria Amélia Ramos Loja

Doutora Alda Cristina Jesus Valentim Nunes de Carvalho

Júri:

Presidente: Doutor Pedro Miguel De Abreu e Silva

Vogais:

Doutora Ana Alexandra Antunes Figueiredo Martins

Doutora Maria Amélia Ramos Loja

Novembro 2023



INSTITUTO SUPERIOR DE ENGENHARIA DE LISBOA

Departamento de Engenharia Mecânica

Análise de variabilidade em perfis de paredes finas construídos em materiais compósitos

JORDAN BRANCO DA SILVA

(Licenciado em Engenharia Mecânica)

Dissertação para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica

Orientador(es):

Doutora Maria Amélia Ramos Loja

Doutora Alda Cristina Jesus Valentim Nunes de Carvalho

Júri:

Presidente: Doutor Pedro Miguel De Abreu e Silva

Vogais:

Doutora Ana Alexandra Antunes Figueiredo Martins

Doutora Maria Amélia Ramos Loja

Novembro 2023

Agradecimentos

Quero agradecer aos meus pais por todo o apoio fornecidos nestes duros anos de estudos, sem eles nada disto seria possível, nem teria conseguido chegar até este nível.

Um obrigado aos meus orientadores, a Professora Amélia Loja, e a Professora Alda Carvalho, pois sem esta ajuda constante este trabalho não teria sido possível. Quero também agradecer a Professora Ana Martins pela ajuda na melhoria do documento. A constante preocupação com o meu trabalho fez com que o trabalho fosse feito de uma forma mais agradável. Recomendo fortemente!

Resumo

Os materiais compósitos são extremamente versáteis, pelas suas propriedades diversificadas, e pela possibilidade de se adequarem aos requisitos de uma dada estrutura e/ou componente, pelo que estes constituem fortes candidatos para a melhoria de vários tipos de estrutura existentes. Com isto, é de grande importância entender a influência de diferentes parâmetros que constituem uma estrutura em compósito, têm no seu comportamento.

O comportamento mecânico das estruturas constituídas por estes materiais pode ser alterado através da seleção de diferentes materiais onde se inclui o ângulo das fibras em cada camada do laminado, bem como por alterações que se efetuem à sua geometria, como o comprimento da(s) alma(s) e de banzos e as espessuras destes elementos, pensando no caso concreto das estruturas estudadas neste trabalho.

A determinação das propriedades mais adequadas para estruturas de paredes finas analisadas neste trabalho, é, portanto, um aspeto fundamental para que esta possa suportar as solicitações impostas sem diminuição dos requisitos de funcionamento. Este trabalho visa proceder a uma análise sobre a variabilidade de perfis de paredes finas quando submetidos a solicitações de tipo torção, estudo esse que terá também uma componente estatística que permitirá relacionar as variáveis de entrada, que não são mais do que características materiais e/ou geométricas do problema com as variáveis de saída que correspondem aos comportamentos destas estruturas nas referidas condições de carregamento.

A implementação deste trabalho no setor dos compósitos pode ser um ponto importante e decisivo para a melhoria da qualidade e eficiência na escolha da geometria de uma estrutura de paredes finas.

Palavras-chave: Materiais compósitos; Fibras Longas; Perfis de paredes finas; Regressão linear; Variabilidade

Abstract

Composite materials are extremely versatile, due to their diverse properties and the possibility of adapting to the requirements of a given structure and/or component, which makes them strong candidates for the improvement of various types of existing structures. With this, it is of great importance to understand the influence of different parameters that constitute a composite structure, will have on its behavior.

The mechanical behavior of structures made from these materials can be altered by selecting different materials, including the angle of the fibers in each layer of the laminate, as well as by changes made to its geometry, such as the length of the web(s) and flanges and the thickness of these elements, considering the case of the structures studied in this work.

Determining the most suitable properties for thin-walled structures analyzed in this work is, therefore, a fundamental aspect so that it can withstand the imposed demands without reducing the operating requirements. This work aims to carry out a study of the behavior of thin-walled profiles subjected to pure torsion, a study that will also have a statistical component that will allow relating the input variables, which are nothing more than material and/or geometric characteristics of the problem with the output variables that correspond to the behavior of these structures under the referred loading conditions.

The implementation of this work in the composite sector can be an important and decisive point for improving the quality and efficiency in choosing the geometry of a thin-walled structure.

Keywords: Composite materials; Long Fibers; Thin-walled profiles; Linear regression; Variability

Resumé

Les matériaux composites sont extrêmement polyvalents, en raison de leurs propriétés diverses et de la possibilité de s'adapter aux exigences d'une structure et/ou d'un composant donné, ils sont donc de bons candidats pour l'amélioration de divers types de structures existantes. Avec cela, il est d'une grande importance de comprendre l'influence des différents paramètres qui constituent une structure composite, aura sur son comportement.

Le comportement mécanique des structures constituées de ces matériaux peut être modifié en sélectionnant différents matériaux, qui comprennent l'angle des fibres dans chaque couche du stratifié, ainsi que par des modifications apportées à sa géométrie, telles que la longueur des âme(s), des semelles et l'épaisseur de ces éléments, en considérant le cas concret des structures étudiées dans ce travail.

La détermination des propriétés les plus appropriées pour les structures à parois minces analysées dans ce travail est donc un aspect fondamental pour qu'elles puissent résister aux exigences imposées sans réduire les exigences d'exploitation. Ce travail vise à réaliser une étude du comportement de profilés à parois minces soumis à une torsion pure, étude qui aura également une composante statistique qui permettra de mettre en relation les variables d'entrée, qui ne sont que des caractéristiques matérielles et/ou géométriques de le problème avec les variables de sortie qui correspondent au comportement de ces structures dans les conditions de chargement visées.

La mise en œuvre de ces travaux dans le secteur des composites peut être un point important et décisif pour améliorer la qualité et l'efficacité dans le choix de la géométrie d'une structure à parois minces.

Mots clés: Matériaux composites; fibres longues; Profils à parois minces; Régression linéaire; Variabilité

Índice

Agradecimentos	v
Resumo	vii
Abstract.....	ix
Resumé.....	xi
Índice	xiii
Índice de Tabelas	xv
Índice de Figuras.....	xvii
Índice de Acrónimos	xix
Índice de Nomenclaturas	xxi
1. Introdução e Objetivos.....	1
1.1 Enquadramento	1
1.2 Objetivos da dissertação.....	1
1.3 Motivação.....	2
1.4 Estrutura da dissertação.....	2
2. Estado da Arte.....	4
3. Fundamentos Teóricos.....	11
3.1 Materiais compósitos	11
3.1.1 Vantagens e Desvantagem de cada reforço	16
3.1.2 Tipo de geometria dos reforços	17
3.2 Materiais compósitos fibra longa de carbono	22
3.2.1 Características gerais das fibras longas	22
3.2.2 Relações Constitutivas da Lâmina e do Laminado.....	25
3.2.3 Perfis de paredes finas	30
Torção secção aberta.....	32
Torção secção fechada.....	36

3.3	Simulação de dados experimentais	40
3.4	Modelo regressão linear múltipla.....	41
3.4.1	Análise de Variância.....	42
3.4.2	Coefficiente de Determinação.....	44
3.4.3	Teste à Significância individual dos Coeficientes do Modelo.....	45
4.	Casos de Estudo.....	46
4.1	Simulação e obtenção de amostra	46
4.2	Perfil simétrico de secção aberta.....	49
4.3	Perfil antissimétrica de secção aberta	57
4.4	Perfil duplamente simétrico de secção fechada	61
4.5	Análise dos dados com ferramentas estatísticas.....	66
4.5.1	Análise do caso de estudo 1 (Secção aberta simétrica)	68
4.5.2	Análise estatística para o caso de estudo 2 (Secção aberta antissimétrica) ...	77
4.5.3	Análise estatística para o caso de estudo 3 (Secção fechada duplamente simétrica)	81
5.	Conclusões e Trabalhos futuros.....	84
	Referências.....	88
	Anexos A – Desenhos de linha ajustado e Histogramas do caso de estudo 2	92

Índice de Tabelas

Tabela 3.1 – Propriedades desejáveis para os materiais da matriz (Adaptado de (Moreira, 2008)).....	15
Tabela 3.2 – Vantagens e desvantagens dos reforços de fibra.....	16
Tabela 3.3 – Vantagens/desvantagens de Prepreg	22
Tabela 3.4 – Constantes de elasticidade de um laminado simétrico (Adaptado de (DATOO, 1991)).....	29
Tabela 3.5 – Tabela ANOVA	43
Tabela 4.1 – Parâmetros para geração de uma amostra de número aleatórios	47
Tabela 4.2 – Amostra de números aleatória obtida com uma distribuição normal	48
Tabela 4.3 – Amostra de números aleatória obtida com uma distribuição uniforme	49
Tabela 4.4 – Propriedades da fibra de carbono usada neste trabalho	50
Tabela 4.5 – Coeficientes de rigidez elástica reduzidos da fibra de carbono utilizada	50
Tabela 4.6 - Coeficientes de rigidez elástica reduzidos transformados	51
Tabela 4.7 – Matrizes A e D para um laminado de 8 camadas a 30°.....	51
Tabela 4.8 - Referencial para as camadas do laminado.....	51
Tabela 4.9 – Cálculos das membranas de deformações e flexões	52
Tabela 4.10 – Constantes elásticas equivalentes do laminado com 8 camadas a 30°.....	52
Tabela 4.11 – Propriedades elásticas para cada angulo numa distribuição normal	52
Tabela 4.12 – Variáveis de entrada para o caso de estudo 1 (Distribuição normal).....	54
Tabela 4.13 – Resumo dos resultados obtidos para o caso de estudo 1.....	56
Tabela 4.14 – Variáveis de entrada para o caso de estudo 2 (Distribuição normal).....	58
Tabela 4.15 – Resumo dos resultados obtidos para o caso de estudo 2.....	61
Tabela 4.16 – Variáveis de entrada para o caso de estudo 3 (Distribuição normal).....	62
Tabela 4.17 – Resumo dos resultados obtidos para o caso de estudo 3.....	65
Tabela 4.18 – Regressão linear múltipla para o ângulo de torção unitário com dados obtidos por distribuição uniforme e normal	67
Tabela 4.19 – Regressão linear múltipla para a rigidez torsional no caso de estudo 1.....	68
Tabela 4.20 – Regressão linear múltipla para o ângulo de torção unitário no caso de estudo 1	71
Tabela 4.21 – Regressão linear múltipla para a tensão de corte no caso de estudo 1.....	72
Tabela 4.22 – Regressão linear múltipla para o Deslocamento A no caso de estudo 1.....	74

Tabela 4.23 – Regressão linear múltipla para o Deslocamento B no caso de estudo 1	75
Tabela 4.24 – Regressão linear múltipla para a rigidez torsional no caso de estudo 2.....	78
Tabela 4.25 – Regressão linear múltipla para o ângulo de torção unitário no caso de estudo 2	78
Tabela 4.26 – Regressão linear múltipla para a tensão de corte máxima no elemento 1 no caso de estudo 2	79
Tabela 4.27 – Regressão linear múltipla para a tensão de corte máxima no elemento 2 no caso de estudo 2	79
Tabela 4.28 – Regressão linear múltipla para a Deslocamento A no caso de estudo 2	80
Tabela 4.29 – Regressão linear múltipla para a Deslocamento B no caso de estudo 2	80
Tabela 4.30 – Regressão linear múltipla para a rigidez torsional no caso de estudo 3.....	81
Tabela 4.31 – Regressão linear múltipla para a Deslocamento B no caso de estudo 3	82
Tabela 4.32 – Regressão linear múltipla para a Deslocamento D no caso de estudo 3	82

Índice de Figuras

Figura 3.1 - Classificação dos materiais compósitos (Adaptado de (Moreira, 2008))	12
Figura 3.2- Representação de laminados de fibra curta (a) e fibra longa (b) (adaptado de (KOBELÉV, 2019)).....	12
Figura 3.3 - Representação esquemática de compósito FGM (Adaptado de (DIACENCO & PAVANELLO, 2021)).....	13
Figura 3.4 - Representação esquemática de compósito sandwich (adaptado de (FRIEDRICH & ALMAJID, 2012))	14
Figura 3.5 – Tecido <i>Plain</i> ((LATTEIER, 2019)).....	18
Figura 3.6 – Fenómeno de concentração de tensões do tecido plano (Adaptado de (LATTEIER, 2019))	18
Figura 3.7 – Tecido <i>Twill 2x2</i> e tecido <i>Twill 4x4</i> respetivamente ((LATTEIER, 2019)) .	19
Figura 3.8 – Tecido <i>harness satin 4HS, 5HS e 8HS</i> ((LATTEIER, 2019))	20
Figura 3.9 – Exemplificação do tecido <i>Spread Tow</i> (Adaptado de (LATTEIER, 2019)) ...	20
Figura 3.10 – Exemplificação do reforço unidirecional ((LATTEIER, 2019)).....	21
Figura 3.11 – Tipos de materiais ortotrópicos (adaptado de (DATOO, 1991)).....	23
Figura 3.12 – Sistema de eixo do material compósito (adaptado de (DATOO, 1991))	25
Figura 3.13 – Sistema de eixo referência (adaptado de (DATOO, 1991)).....	26
Figura 3.14 – Referência de cada lâmina e a referencial global ((REDDY, 1997)).....	28
Figura 3.15 – Referencial para as camadas do laminado ((DATOO, 1991)).....	29
Figura 3.16 – Perfis usados para análise de dados.....	31
Figura 3.17 – Carregamentos positivos e eixos positivos (Adaptado de (DATOO, 1991))	31
Figura 3.18 – Variação do fluxo de corte numa secção aberta com torção livre (DATOO, 1991).....	32
Figura 3.19 – Estrutura de paredes finas dum conjunto de placas (Adaptado de (DATOO, 1991)).....	34
Figura 3.20 – Propriedades relacionadas com os deslocamentos se secções abertas para materiais isotrópicos e ortotrópicos ((DATOO, 1991)).....	35
Figura 3.21 – Exemplo de um perfil de secção fechada (Adaptado de (DATOO, 1991)) ..	37
Figura 3.22 – Variação do fluxo de corte num elemento de secção fechado à torção livre (DATOO, 1991).....	38
Figura 4.1 – Primeiro caso de estudo (Secção aberta simétrica)	53

Figura 4.2- Resultado dos deslocamentos.....	56
Figura 4.3 – Segundo caso de estudo (Secção aberta Antissimétrica).....	58
Figura 4.4 – Esquematização dos deslocamentos obtidos nesta secção	60
Figura 4.5 – Perfil do caso de estudo 3 (secção fechada duplamente simétrica).....	62
Figura 4.6 – Análise da secção do caso de estudo 3 (adaptado de (DATOO, 1991))	64
Figura 4.7 – Esquematização dos deslocamentos esperados numa secção fechada duplamente simétrica (adaptado de (DATOO, 1991))	65
Figura 4.8 – Histograma dos resíduos padrão para a rigidez torsional do caso 1.....	69
Figura 4.9 – Desenho da linha ajustada para as variáveis independentes (θ) e (t) do caso de estudo 1	70
Figura 4.10 – Histograma dos resíduos padrão para a taxa de rotação do caso 1.....	71
Figura 4.11 – Desenho da linha ajustada para a variável independente (t) do caso de estudo 1	72
Figura 4.12 – Histograma dos resíduos padrão para a tensão de corte do caso 1.....	73
Figura 4.13 – Desenho da linha ajustada para a variável independente (t) da tensão de corte máxima do caso de estudo 1	74
Figura 4.15 – Histograma dos resíduos padrão para o deslocamento em A do caso 1.....	76
Figura 4.14– Histograma dos resíduos padrão para o deslocamento em B do caso 1	76
Figura 4.16 – Desenho da linha ajustada para a variável independente (t) do deslocamento em A do caso de estudo 1	77
Figura 4.17 – Desenho da linha ajustada para a variável independente (t) do deslocamento em B do caso de estudo 1.....	77

Índice de Acrónimos

FGM - Functionally graded materials

CUS (Circunferencialmente Uniform Stiffness) e **CAS** (Circunferencialmente Asymmetric Stiffness).

CFRP (Carbon Fiber-Reinforced Plastic)

MEF (Método Dos Elementos Finitos)

PFA – Progressive Failure Analysis

CZM – Cohesive Zone Model

HS - Harness Satin

Índice de Nomenclaturas

E - Módulo de elasticidade

E_1 – Módulo de elasticidade na direção longitudinal da fibra

E_2 – Módulo de elasticidade na direção transversal da fibra

G_{12} – Módulo de corte da fibra interlaminar

ν_{12} – Coeficiente de poisson da fibra

Q_{ij} – Coeficientes de rigidez reduzidos

\bar{Q}_{ij} – Coeficientes de rigidez reduzidos transformados

θ – Ângulo de direção da fibra num referencial específico

z_k – Localização da espessura das camadas de um laminado num referencial específico

E_x – Módulo de elasticidade na direção x do referencial do laminado

E_y – Módulo de elasticidade na direção y do referencial do laminado

G_{xy}^b – Módulo de corte do laminado em modo flexão

G_{xy}^m – Módulo de corte do laminado em modo membrana

t – Espessura do laminado

b_1 – Comprimento dos banzos

b_2 – Comprimento das almas

T – Binário

GJ – Rigidez torsional

f – Tensão de corte máxima

t^* – Espessura equivalente

A – Área da secção do perfil

$w(s)$ – Coordenada setorial

q – fluxo de corte

W_s – O valor de deformação em qualquer ponto s no elemento em questão

W_0 – O valor de deformação na origem para s (em $s = 0$)

y – Valor esperado (variável dependente)

X – Variável independente

β – Ordenada na origem do modelo de regressão linear

ε – Erro ou resíduo

α – Valor de significância do modelo

R^2 – Coeficiente de determinação amostral

1. Introdução e Objetivos

1.1 Enquadramento

Nos últimos anos, o mercado dos materiais compósitos tem vindo a crescer de forma equilibrada e está a preparar-se para um aumento exponencial nos próximos anos. Este crescimento é devido à tendência crescente da utilização de componentes mais leves na indústria automóvel e aeroespacial, para reduzir as emissões de carbono, e por consequência devido à necessidade de aumentar a eficiência destes sistemas de transportes. Por outro lado, é também de assinalar a utilização de compósitos na construção civil e no sector das energias renováveis, o que contribui para a previsão de um crescimento significativo.

A melhoria da tecnologia de produção de estruturas em compósitos, a par dos benefícios que estes apresentam, permite antever um elevado crescimento no uso destes materiais em inúmeros campos de aplicação industrial, e isto resultará adicionalmente na diminuição dos seus custos ao longo do tempo. Um importante desafio para quem desenvolve a sua atividade nestas áreas, é o elevado investimento inicial em equipamentos para o processamento da matéria-prima, bem como a necessidade de garantir a observação de requisitos de qualidade, dado tratar-se de áreas estritamente reguladas.

Assim, a caracterização dos efeitos que a variabilidade em parâmetros geométricos e materiais poderá introduzir no comportamento mecânico de estruturas de paredes finas em compósitos é de extrema importância. O conhecimento desta influência permitirá efetuar uma previsão mais representativa do comportamento destas estruturas laminadas às solicitações impostas à estrutura.

1.2 Objetivos da dissertação

Como existe uma elevada variabilidade nas propriedades dos materiais compósitos, é indispensável conseguir efetuar uma previsão credível não só das propriedades destes materiais como das respostas previsíveis. Para tal seria útil efetuar testes mecânicos ao material compósito de laminado de fibras longas, e com as propriedades elásticas obtidas poder proceder à sua utilização em simulações, e resolução de problemas. Mas ainda assim, ir-se-ia constatar uma variabilidade significativa, por exemplo devido a incertezas

inerentes aos múltiplos parâmetros envolvidos no processo de produção do laminado. Em relação às causas prováveis da variabilidade, (POTTER, 2009) apresenta uma visão geral dessas causas, associadas ao processamento de materiais compósitos. Da incerteza das propriedades do material à orientação da fibra ao processo de fabricação, o autor lista mais de 60 causas principais de defeitos e variabilidades relacionadas ao produto, destacando a existência de variabilidade não quantificada.

Assim, esta dissertação tem por objetivo caracterizar a variabilidade no comportamento à torção, de estruturas/perfis de paredes finas construídas com materiais compósitos. Para isso é necessário inicialmente identificar as propriedades e correspondente variabilidade do material e a sua geometria, dado que se sabe serem parâmetros que irão condicionar a resposta da estrutura. As propriedades mecânicas das estruturas constituídas por estes materiais são afetadas pela sua geometria, como o comprimento da(s) alma(s) e de banzos, espessuras destes troços, bem como pelas características materiais dependentes do ângulo das fibras em cada camada do laminado. Em qualquer destes casos estamos a falar do que mais adiante neste trabalho designaremos de variáveis de entrada.

1.3 Motivação

Sempre tive um grande interesse sobre os materiais compósitos, antes mesmo de ter iniciado a licenciatura em Engenharia Mecânica, isto porque são usados em aplicações onde é necessário alto rendimento. Com isto, tinha todo o gosto em finalizar o mestrado com uma dissertação ligada aos compósitos. Portanto, como existe sempre uma elevada procura no melhoramento de materiais ligados a estruturas de o nosso dia-a-dia, achei interessante proceder ao estudo da variabilidade em perfis de paredes finas.

1.4 Estrutura da dissertação

O trabalho encontra-se planificado em quatro capítulos distintos. É importante no primeiro capítulo, introduzir o tema dos materiais compósitos de fibras longas e de como estes são caracterizados. É apresentada uma breve descrição dos tipos de fibras longas, as suas propriedades, disposições e quais as vantagens da sua aplicação face aos materiais conhecidos como convencionais. São apresentados factos históricos acerca da utilização destes materiais e como estes têm vindo a ganhar lugar em diferentes sectores industriais.

Este capítulo também tem como alvo apresentar, de um modo geral, os principais objetivos a alcançar neste trabalho.

Na segunda parte, descrevem-se os conceitos e metodologias usados neste trabalho. São descritas e apresentados, por exemplo, conceitos acerca dos cálculos das propriedades mecânicas de um laminado, a apresentação dos perfis em estudo, e o carregamento considerado nos diferentes perfis. Serão também abordadas as metodologias estatística para determinar os pesos das variáveis de entrada nas variáveis de saída.

As principais contribuições deste trabalho são expostas no terceiro capítulo, no qual todos os conceitos apresentados no capítulo anterior são postos em prática. Este está dividido em diferentes secções, sendo que cada uma delas descreve um caso de estudo distinto. O primeiro caso de estudo é um exemplo de resolução de uma estrutura em compósito, com um carregamento à torção num perfil simétrico de secção aberto. O segundo caso de estudo será semelhante, com a diferença do carregamento estar aplicado num perfil antissimétrico de secção aberto. O terceiro caso de estudo trata-se de um perfil de secção fechada duplamente simétrico. Por fim, o último caso de estudo visa correlacionar as variáveis de entrada com as de saída dos diversos perfis em estudo com modelos probabilísticos na tentativa de caracterizar a distribuição de variabilidade intrínseca dos perfis. Resumindo e tal como já se exemplificou atrás, as variáveis de entrada poderão ser o ângulo da fibra, a espessura do laminado, e os comprimentos dos componentes/elementos dos diversos perfis em estudo. As variáveis de saída serão por exemplo os deslocamentos de certos pontos nos perfis e a rigidez torsional

No último capítulo, são apresentadas as conclusões do trabalho. As conclusões serão divididas consoante a análise de cada caso de estudo. Para terminar, sugerem-se possíveis futuros estudos a prosseguir na sequência deste trabalho.

2. Estado da Arte

A modelação de estruturas feitas de materiais compósitos, bem como esses materiais por si só, tem envolvido um grande trabalho de pesquisa, principalmente no que diz respeito à sua modelação. Embora este investimento esteja em andamento há vários anos, continua sendo um tema muito atual e a complexidade de sua abordagem levou ao desenvolvimento de novas metodologias de modelação, descrever suas propriedades mecânicas e comportamento.

Neste capítulo, é feita uma breve referência às principais contribuições encontradas na literatura que se relacionam com os objetivos deste trabalho, bem como as contribuições que foram utilizadas no âmbito deste trabalho.

Ao longo dos anos, foram realizados vários estudos em estruturas em compósito de paredes finas, isto porque este tipo de estrutura tem uma elevada importância para a evolução de diferentes indústrias em diferentes sectores de atividade.

De forma cronológica, foi apresentado um estudo por (SONG, LIBRESCU, & JEONG, 2001) sobre uma solução analítica resultante da resposta estática de uma viga em I, com a extremidade livre, usando dois mecanismos de acoplamento, CUS (circunferencially uniform stiffness) e CAS (circunferencially asymmetric stiffness). Concluíram que realmente existe uma vantagem usar materiais compósitos em vigas comparando com vigas metálicas, obtendo resultados muito superiores devido à possibilidade de alterar a direção das fibras consoante o carregamento.

Mais tarde, (KIM, SHIN, & KIM, 2006), apresentaram pela primeira vez as soluções exatas para análise de torção de vigas em compósito de secção aberta de paredes finas com uma laminação do laminado arbitrária. Para isso, uma teoria geral de vigas em compósito de paredes finas para qualquer laminado é desenvolvida pelas suposições de Vlasov's e as equações de equilíbrio e as relações força-deformação são derivadas do princípio da energia. São derivadas as funções de deslocamento, aplicando o vetor de estado de deslocamento que consiste em 14 parâmetros de deslocamento e os deslocamentos nodais em ambas as extremidades da viga. A matriz de rigidez para a análise de torção é determinada usando as relações força-deformação. Por fim, é desenvolvido um modelo de elementos finitos baseado no polinômio de interpolação Hermitiana. Para demonstrar a validade e precisão deste estudo, as soluções numéricas

são apresentadas e comparadas com os resultados de elementos finitos usando os elementos de viga Hermitiana e os elementos de tipo casca do software ABAQUS.

De seguida, foi realizado um estudo sobre vibração livre, numa viga de parede fina de tipo caixa em material compósito por (VO & LEE, 2007). O modelo foi baseado na teoria clássica dos laminados. Foi desenvolvido um modelo de elemento finito unidimensional baseado em deslocamento para prever a frequência natural e os seus modos de vibração. As equações de movimento são derivadas pelo princípio de Hamilton's. Os resultados numéricos são obtidos relacionando o ângulo da fibra, o módulo de Young e as condições fronteiras do compósito.

Posteriormente, (SHEIKH & THOMSEN, 2008), apresentam um elemento de viga condensado totalmente acoplado para vigas em compósito de paredes finas de secções abertas e fechadas. Uma técnica analítica é usada para derivar a rigidez transversal da viga de forma sistemática considerando todas as deformações e seus acoplamentos. Uma aproximação de elementos finitos eficiente é adotada para a deformação transversal por corte, que ajudou a implementar convenientemente a formulação contínua C^1 exigida pela deformação torsional devido à incorporação de deformação por empenamento. O desempenho do elemento é testado através da solução de exemplos numéricos envolvendo vigas de seção aberta em I e em C e, vigas de seção fechada de tipo caixa sob diferentes condições de carregamento, para comparar os resultados obtidos com o modelo, bem como resultados experimentais disponíveis na literatura.

Logo depois, (KIM & SHIN, 2009), desenvolvem um método numérico que avalia exatamente a matriz de rigidez de cada elemento, para vigas em compósito de paredes finas com seções unicelulares e bicelulares, introduzindo catorze parâmetros de deslocamento. A teoria desenvolvida por este estudo é validada pela comparação de várias respostas de torção deste método com aquelas do modelo de viga dos elementos finitos usando polinômios Hermitianos de terceira ordem para todos os parâmetros de deslocamento e resultados de análises bidimensionais usando os elementos de casca do ABAQUS. Foi obtido uma excelente correlação para vigas tipo caixa com vários esquemas de laminação e condições de fronteira. É demonstrado que o efeito da condição de fronteira no ângulo de torção de vigas tipo caixa com seções unicelulares e multicelular submetidas a um momento de torção é desprezível.

Mais tarde, (FEO & MANCUSI, 2010), realizaram uma análise numérica sobre o comportamento estático de vigas de paredes finas em compósito reforçado com fibra. Os estudos foram obtidos por meio do modelo cinemático proposto por (ASCIONE, FEO, & MANCUSI, 2000), representa uma generalização da teoria clássica de Vlasov's. O trabalho também apresenta uma abordagem geral para modelar deformabilidade por corte em vigas em compósitos de paredes finas com base em monômios. As comparações com as soluções de Vlasov's foram fornecidas. Em geral, a teoria proposta prevê significativamente maior deflexões e deslocamentos rotacionais em comparação com os dados pela teoria de Vlasov's. Isso se deve à forte influência da deformabilidade por corte acomodada na teoria proposta.

Mais adiante, (SARAVIA, MACHADO, & CORTÍNEZ, 2011), apresentam um elemento finito de viga geometricamente não linear para vigas em compósito de seção fechada e paredes finas considerando deslocamentos e rotações arbitrários. As equações do trabalho são escritas como uma função de nove componentes de deformação generalizada, que são parametrizados em termos do campo diretor e seus derivados. O elemento finito apresentado é válido para materiais isotrópicos e anisotrópicos. A abordagem proposta pode ser atraente para ser usada em problemas de otimização de vigas em compósitos de paredes finas com deformação finita, como pás de rotores de helicópteros e pás de turbinas eólicas. A proposta formulada teve uma excelente correlação em elementos finitos de tipo casca.

Posteriormente, (WANG & LIU, 2016), apresentam uma simulação de tolerância para a deformação de deslocamento ao longo do comprimento da viga em compósito de seção em C de paredes finas (TC2B). A pré-carga induziu mudanças na deformação, portanto é considerada na simulação de tolerância. Com base no modelo numérico de TC2B e no modelo torsor de pequenos deslocamentos, é obtida a distribuição de probabilidade da pré-carga modificada do desvio de deformação. O conjunto reduzido da montagem (*Wingbox*) ilustra o efeito do pré-carregamento na montagem do TC2B. Os resultados mostraram que a simulação de tolerância com a distribuição de probabilidade modificada é mais precisa do que a distribuição normal.

Sem tardar, é investigado o comportamento estático de vigas em compósito, de seção transversal fechada de paredes finas, com rigidez variável por (GÜNAY & TIMARCI, 2017). O modelo analítico usado considera o acoplamento flexo-torção e efeitos de deslocamento, bem como a rigidez variável ao longo do contorno da seção transversal da

viga. A rigidez variável é adquirida pela construção dos laminados com configurações diferentes. As equações de equilíbrio são derivadas pelo uso do princípio da energia potencial mínima. Embora a formulação dada possa ser aplicada para qualquer secção transversal fechada, os resultados numéricos preliminares são apresentados apenas para vigas de tipo caixa. Um deslocamento baseado método de elementos finitos é desenvolvido para resolver o modelo analítico e prever deslocamentos e rotações sob o efeito de diferentes tipos de condições de carregamento. Resultados numéricos são obtidos para diferentes configurações de laminados e comparados com as soluções disponíveis na literatura.

De seguida, (PURČAR, PROKIĆ, & BEŠEVIĆ, 2019), expuseram um novo modelo descrevendo a deformação por cisalhamento (*Shear Lag*) de vigas em compósitos de paredes finas de secção aberta. Deslocamentos em secções transversais abertas ou fechadas é definido por parâmetros de deslocamento em nós selecionados. A suposição de Vlasov's de negligenciar as deformações por cisalhamento no meio da superfície não é necessária e as tensões podem ser calculadas diretamente a partir das deformações. A abordagem geral para a solução do problema é baseada no método de elemento finito e a matriz de rigidez linear foi derivada usando o princípio de deslocamentos virtuais. Por fim foi desenvolvido um programa computacional e obteve-se resultados numéricos para vigas laminadas de paredes finas com secção aberta. Concluíram que o presente modelo reduz os graus de liberdade sem perder precisão na avaliação dos estados de tensão.

Posteriormente, é proposto por (ASADI, SHEIKH, & THOMSEN, 2019), uma técnica de modelação eficiente, baseada na análise de elemento finito de viga unidimensional (1D), para instabilidade de vigas em compósitos de paredes finas com secções abertas/fechadas. A formulação obtida tem generalidade suficiente para qualquer sequência de empilhamento do laminado para cada secção da viga, e inclui todos os acoplamentos possíveis entre os modos de deformação axial, corte, flexão e torção. A incorporação da deformação teve um problema na implementação de elementos finitos da cinemática de viga proposta, mas isso é resolvido com adotando um novo conceito de modelação. São apresentados os resultados numéricos obtidos para os casos de amostra de secções abertas em I e vigas de tipo caixa com secção fechada. Os resultados numéricos são comparados com os dados disponível na literatura, e conclui-se que o modelo proposto é validado. Por fim, é apresentado um estudo sobre o efeito na instabilidade da vida de parede fina, com carregamento axial e à flexão na extremidade da viga, com atuação combinada ou

separada. Prevê-se que os resultados deste último estudo sejam úteis como referência para futuras pesquisas na área.

Uns anos depois, (ROZYLO & DEBSKI, 2020), investigam a influência da carga compressiva excêntrica na instabilidade (Buckling), pós-instabilidade e a capacidade de suporte de carga de vigas em compósito de paredes finas. As vigas foram feitas em fibra de carbono CFRP (carbon fiber-reinforced plastic). O laminado é constituído por um empilhamento simétrico, e este é curado em autoclave. O estudo apresentado envolveu a realização de testes experimentais em perfis reais, bem como cálculos numéricos usando a análise MEF (Método dos elementos finitos) no software ABAQUS®. Os ensaios experimentais foram realizados em toda a faixa de carregamento, até a falha da estrutura (caminhos de equilíbrio pós-instabilidade e sinais de emissão acústica foram medidos). A respeito da análise MEF, foram feitos cálculos não lineares usando o método de Newton-Raphson. A iniciação do dano no material compósito foi estimada com base na teoria de Hashin, enquanto a evolução do dano é descrita pelo critério de energia (análise de falha progressiva). Por fim, concluem que os resultados numéricos da carga compressiva excêntrica em instabilidade e a capacidade de carga das vigas em compósito estão de acordo com os resultados experimentais.

Pouco tempo depois, (HUANG & P, 2020), apresentam um estudo sobre a instabilidade em vigas curvas em I, de paredes finas em compósito, com alma na horizontal ou vertical. As equações diferenciais governantes de vigas curvas em compósito de paredes finas são derivadas do princípio do deslocamento virtual. O efeito de curvatura é totalmente considerado, e vários componentes de deslocamento de vigas curvas são acopladas. A função do deslocamento característico para vigas curvas com pinos é usada para descrever os comportamentos da instabilidade no plano e fora do plano (espacial). É obtido a solução de forma fechada para análise de instabilidade de vigas curvas de seção I sob um carregamento à compressão e momento fletor. A precisão da presente solução de forma fechada é verificada comparando com soluções disponíveis na literatura e os resultados numéricos do método dos elementos finitos usando o ABAQUS. Finalmente, um estudo paramétrico é conduzido para avaliar o efeito do ângulo central, comprimento do arco, raio de curvatura e ângulo da fibra do laminados no comportamento de instabilidade de vigas curvas de seção I com a alma horizontal ou vertical.

Mais tarde, (SHEIKH, BENNETT, & THOMSEN, 2020), apresentam uma nova técnica de modelação que para prever com precisão o comportamento complexo de vigas de

paredes finas, de seção aberta e fechada, feitas de materiais compósitos reforçados. Esta nova técnica é significativamente mais eficiente, em termos computacionais do que a modelação de elementos finitos. Nesta técnica, o problema de análise completo de tensão 3D, consiste em decompor todos os efeitos e seus acoplamentos em um problema 2D aplicado à secção da viga, e de um problema 1D aplicado ao longo do comprimento da viga. Esta técnica não é apenas adequada para vigas de paredes finas, mas é também aplicável para modelação de vigas com seções sólidas de paredes espessas, bem como vigas em compósito de paredes finas/espessas, com materiais de preenchimento. Para analisar vigas com qualquer geometria de seção transversal, um modelo 2D de elementos finitos (FE) é usado para resolver o problema da secção 2D, enquanto o problema 1D é para a resposta da carga global das vigas, e é resolvido por um Modelo FE 1D utilizando os parâmetros de rigidez seccional obtidos do modelo 2D. A técnica proposta é validada por meio de resultados experimentais e numéricos, que mostram o excelente desempenho do modelo.

A estabilidade de estruturas aeroespaciais em compósitos de paredes finas é uma questão chave na análise de segurança. Por isso, (CZAPSKI, JAKUBCZAK, BIENIAS, URBANIAK, & KUBIAK, 2020), têm como objetivo investigar a influência dos parâmetros de cura na instabilidade (Buckling) de vigas de paredes finas em fibra de vidro. Sob inspeção foi realizado um laminado de oito camadas pelo processo de compressão para uma viga de secção transversal quadrada. O compósito foi curado em dois ciclos em autoclave. O primeiro é um ciclo de cura nominal em um mandril de alumínio oco, enquanto o segundo é um ciclo de cura modificado em um mandril de alumínio maciço. Para verificar a qualidade do compósito fabricado, foi realizada uma avaliação da microestrutura. Em seguida, foram realizados ensaios de compressão e elaborados dois modelos de elementos finitos, com e sem a inclusão de tensões residuais no material. Adicionalmente, para efeitos do segundo modelo de elementos finitos, foram determinados experimentalmente os coeficientes de dilatação térmica do laminado. A comparação dos dois modelos de elementos finitos com dados experimentais levaram à conclusão de que as tensões residuais não são desprezíveis e devem ser levadas em consideração na modelação de modelos de elementos finitos para vigas com seção transversal fechada.

De seguida, (ROZYLO, 2020), investiga a estabilidade e a falha de estruturas em compósito de paredes finas com uma seção transversal em U comprimida axialmente. Os

perfis testados foram feitos de material compósito (CFRP) em autoclave. A pesquisa incluiu testes experimentais de amostras reais e análise numérica pelo elemento finito utilizando o programa Abaqus. Foram realizados testes experimentais e análises numéricas em toda a faixa de carregamento até a falha da estrutura. Durante os testes, caminhos de equilíbrio pós-instabilidade, e emissão de sinais acústicos foram medidos, o que permitiu uma análise abrangente de falha para as estruturas em estudo. Cálculos numéricos foram realizados por análise de falha progressiva (PFA – Progressive Failure Analysis), considerando o início da falha sob a teoria de Hashin e a evolução da falha com base no critério de energia. Além disso, o modelo de coesão de zona (CZM – Cohesive Zone Model) foi usado para simular a delaminação. Comparando os resultados numéricos e experimentais, verifica-se uma excelente correlação. Além disso, os resultados revelam uma relação interessante entre a carga compressiva e a instabilidade, pós-instabilidade e rotura das estruturas analisadas.

3. Fundamentos Teóricos

Esta seção apresenta os fundamentos teóricos necessários para a realização do trabalho apresentado, quer do ponto de vista da caracterização da resposta mecânica das estruturas quer do ponto de vista da análise estatística efetuada.

3.1 Materiais compósitos

No ramo da engenharia existe sempre a necessidade de inovar, para melhorar processos existentes, ou para criar novos processos. Os materiais compósitos têm tido um papel importante neste contexto. Estes materiais permitem reduzir o peso de certos componentes, como também produzir geometrias complexas, o que se enquadra tanto no mercado aeronáutico como na automóvel. Procura-se exaustivamente reduzir o peso de componentes para que estas estruturas sejam mais leves, eficientes e que causem menos impacto através de uma redução do consumo de combustíveis, deste modo contribuindo para uma maior sustentabilidade. Por outro lado, o mercado industrial tem também vindo à procura destes materiais de forma a obter alguma diferenciação e assim alcançar uma liderança em termos de competitividade de mercado. Assim, a compreensão destas tendências é importante para melhor compreender os objetivos a alcançar e deste modo definir um plano de estudo mais adequado às necessidades de cada caso mais específico.

Os compósitos são fortes candidatos à substituição de materiais tradicionais. Os materiais compósitos proporcionam múltiplas combinações de características diferentes por resultarem da junção de vários tipos de materiais, o que possibilita juntar os pontos fortes de cada material.

Os materiais compósitos são usualmente organizados em três classes distintas, tal como ilustrado na (Figura 3.1).

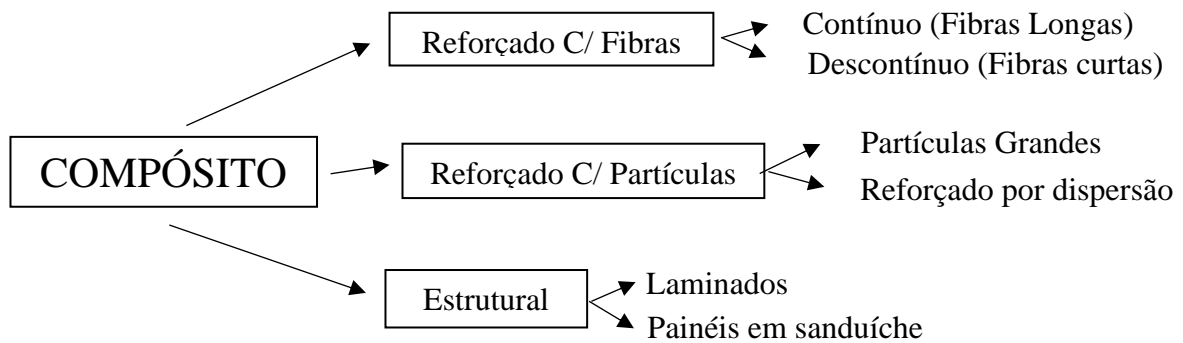


Figura 3.1 - Classificação dos materiais compósitos (Adaptado de (Moreira, 2008))

Os materiais compósitos de fibra são compostos por dois ou mais materiais, em que um deles (se forem só dois materiais) é o reforço, habitualmente apresentado sob a forma de fibras, que poderão ser fibras longas (Figura 3.2 (b)) ou curtas (Figura 3.2 (a)). A matriz, é a outra fase material, que por sua vez garante a ligação das fibras. Num laminado de fibras longas, estas possuem uma orientação bem definida, já no caso dos laminados de fibra curtas isto não acontece. Estes tipos de laminados, permitem de diferentes maneiras, obter propriedades mecânicas adaptadas às necessidades de diferentes tipos de aplicações.

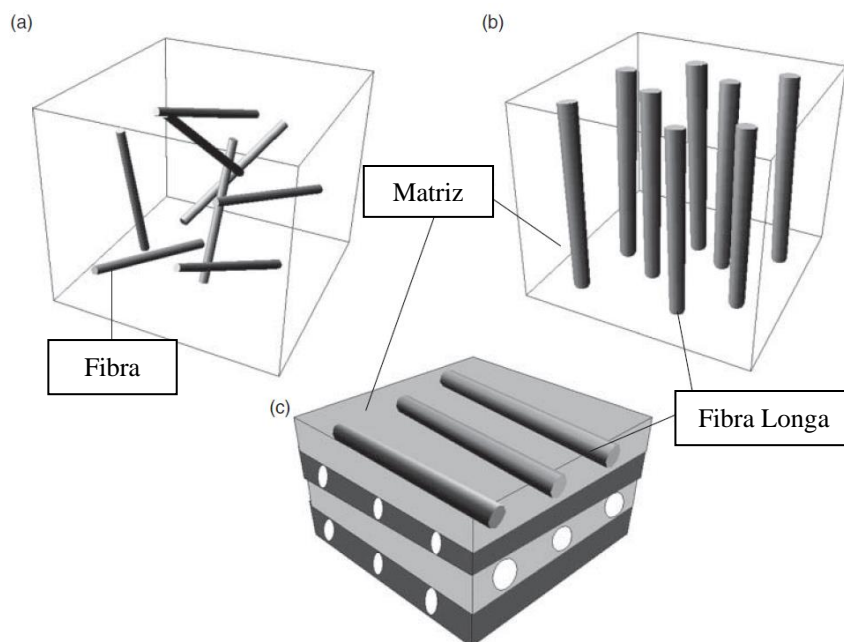


Figura 3.2- Representação de laminados de fibra curta (a) e fibra longa (b) (adaptado de (KOBELÉV, 2019))

Os materiais compósitos de fibras longas são conhecidos pelo seu comportamento ortotrópico, ou seja, é possível obter um laminado especialmente concebido para uma solicitação mecânica, apenas mudando a orientação das fibras. Com isto, é possível obter uma estrutura eficiente na relação peso/rendimento.

Existem também materiais compósitos de partículas, resultando neste caso da mistura de macro ou micropartículas de um certo material envolvido noutra. Este tipo de compósito é usado quando é necessário trabalhar com propriedades químicas ou térmicas localizadas em pontos diferentes do laminado. Exemplo deste tipo de compósitos são os materiais com gradiente funcional cuja composição material é função de uma ou mais coordenadas espaciais. A (Figura 3.3) ilustra esquematicamente um material com gradiente funcional segundo a coordenada z associada à espessura do compósito. De notar que a variação gradual da cor representa a variação contínua da mistura das fases materiais constituintes.



Figura 3.3 - Representação esquemática de compósito FGM (Adaptado de (DIACENCO & PAVANELLO, 2021))

Os laminados são o resultado de uma estrutura em compósito que constitui mais de uma camada de materiais iguais ou diferentes. Nos laminados podem combinar-se vários tipos de materiais nas suas diferentes camadas, com isto é possível obter uma estrutura adequada em termos de custos, peso e para que suporte as solicitações impostas durante o funcionamento da estrutura. Existe um tipo de laminado muito usado na indústria, é uma classe especial de materiais compósitos fabricados pela união de duas camadas finas, mas rígidas, a um núcleo leve, mas espesso. O material do núcleo é normalmente de baixa

resistência, mas sua maior espessura fornece à estrutura alta rigidez à flexão com baixa densidade no geral. Os núcleos mais usados são as espumas, madeiras, honeycomb de alumínio, e outros. Estes laminados permitem reduzir o custo quando se pretende um laminado com uma elevada espessura, isto é, aproximadamente superior a 10mm. Adicionando um núcleo como os honeycomb de alumínio obtém-se uma elevada rigidez sem aumentar o peso. A (Figura 3.4) exemplifica os compósitos sandwich.

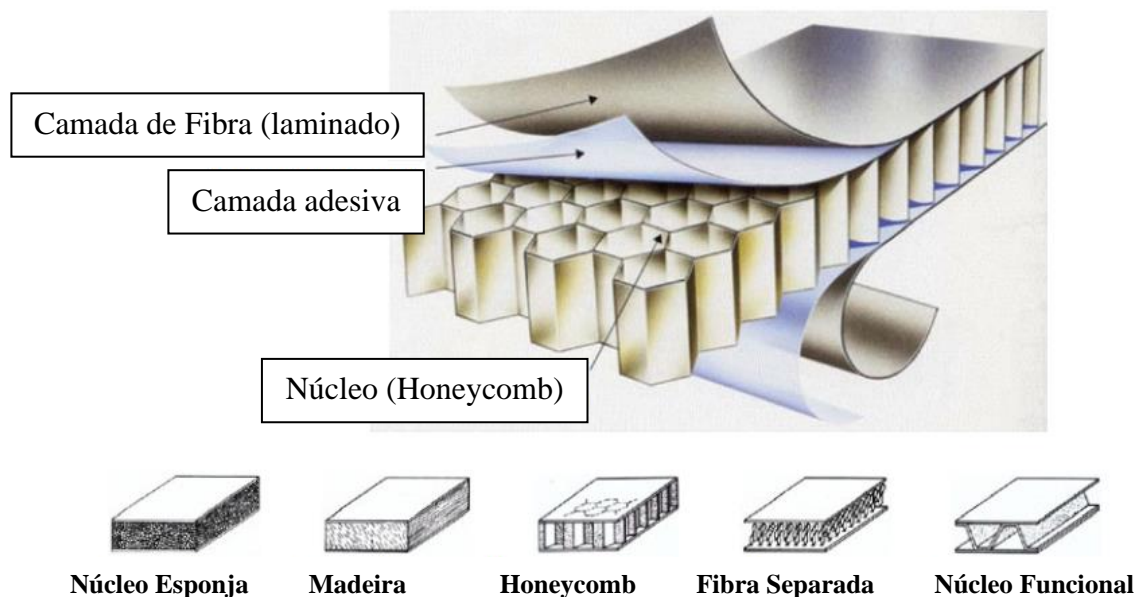


Figura 3.4 - Representação esquemática de compósito sandwich (adaptado de (FRIEDRICH & ALMAJID, 2012))

A junção dos materiais depende da aplicação do material compósito, devendo ter-se em conta vários fatores como:

- Resistência a corrosão
- Rigidez
- Peso
- Resistência à fadiga
- Expansão térmica
- Propriedades eletromagnéticas
- Condutibilidade térmica
- Comportamento acústico
- Aspeto

Elevadas relações entre resistência e rigidez e o correspondente peso, continuam sendo a combinação que coloca os materiais compósitos em novos campos de aplicação, e a alta capacidade de amortecimento e o baixo coeficiente de expansão térmica são propriedades que podem ser adaptadas a aplicações específicas. Como por exemplo em estruturas do tipo viga em aplicações ligadas à construção civil. Outras vantagens dos materiais compósitos são a resistência a temperaturas extremas, corrosão e desgaste, o que pode resultar na redução dos custos do ciclo de vida do produto.

Como foi dito anteriormente, a matriz de um material compósito garante a ligação das fibras. Esta vem sobre a forma de resina. Deve então manter a coesão das fibras e garantir as seguintes preocupações:

- Proteger as fibras do meio envolvente;
- Proteger as fibras do dano durante o manuseamento;
- Distribuir o carregamento pelas fibras;
- Redistribuir o carregamento pelas fibras resistentes em caso de rutura

A tabela seguinte ilustra os principais requisitos esperados pela matriz.

Tabela 3.1 – Propriedades desejáveis para os materiais da matriz (Adaptado de (Moreira, 2008))

Propriedades Mecânicas	<ul style="list-style-type: none"> • Elevada resistência à tração • Ductilidade • Resistência ao corte • Tenacidade • Resistência ao impacto
Propriedades Térmicas	<ul style="list-style-type: none"> • Resistência a temperaturas elevadas • Coeficiente de dilatação térmica próxima do da fibra • Baixa condutividade térmica
Propriedades Químicas	<ul style="list-style-type: none"> • Boa adesão entes fibras • Resistência à degradação em ambientes quimicamente agressivos • Baixa absorção de humidade
Outras Propriedades	<ul style="list-style-type: none"> • Baixo custo • Solidificação ou curas rápidas

Num laminado, os reforços como foi dito anteriormente são habitualmente as fibras do compósito. Na indústria usam-se com muita frequência 3 tipos de reforço, a fibra de vidro, fibra de aramida e fibra de carbono. Cada uma delas tem vantagens e desvantagens, sendo

que o uso destas difere perante a aplicação e as solicitações exercidas na estrutura em estudo.

A fabricação da fibra de vidro é obtida fundido vidro que é entregue através de canais que o conduzem a tubos rotativos, onde é mantido a cerca de 1250C, permitindo a fundição por gravidade, criando fios de alguns décimos de milímetro de tamanho; esses filamentos são arrefecidos na saída da fieira, primeiro por radiação e depois por injeção de água. As fibras primárias sofrem um acabamento superficial obtido por revestimento.

As fibras de aramidas são fibras de origem orgânica e sintética, estas são criadas por trefilagem poliamidas aromáticas (benzeno). A nível comercial estas fibras são designadas por Kevlar. Estas fibras são muito usadas na indústria da Defesa, para revestimentos balísticos.

As fibras de carbono são obtidas a partir de componentes orgânicos que já se encontram em forma de fio, que depois sofrem processos de oxidação, carbonação e grafitização.

3.1.1 Vantagens e Desvantagem de cada reforço

Quando se pretende usar materiais compósitos na fabricação de uma estrutura mecânica, é necessário escolher o tipo de fibras que irá se adequar ao ambiente e às solicitações aplicadas à estrutura. Para isso, deve-se analisar as vantagens e desvantagens de cada reforço. A tabela seguinte apresenta esse resumo (Moreira, 2008).

Tabela 3.2 – Vantagens e desvantagens dos reforços de fibra

Reforço	Vantagem	Desvantagem
Fibra de vidro	<ul style="list-style-type: none">• Elevada resistência à tração e compressão• Baixo custo relativamente às outras fibras• Elevada resistência química• Elevada resistência ao fogo• Boas propriedades de isolamento acústico, térmico e eléctrico	<ul style="list-style-type: none">• Módulo de elasticidade reduzido;• Elevada massa específica• Sensibilidade à abrasão• Sensibilidade a temperaturas elevadas• Baixa resistência à fadiga

Reforço	Vantagem	Desvantagem
Fibra de Aramida	<ul style="list-style-type: none"> • Baixa massa específica. • Elevada resistência à tração. • Elevada resistência ao impacto. • Baixa condutividade elétrica. • Elevada resistência química exceto a ácidos e bases concentrados. • Elevada resistência à abrasão. • Boa resistência ao fogo com capacidade de autoextinção. • Excelente comportamento sob temperaturas • Elevadas de serviço. 	<ul style="list-style-type: none"> • Baixas resistência à compressão. • Degradação lenta sob luz ultravioleta; por exemplo. • Elevada absorção de humidade. • Má adesão às resinas. • Custo relativamente elevado. • Elevada durabilidade.
Fibra de Carbono	<ul style="list-style-type: none"> • Elevada resistência à tração • Elevado módulo de elasticidade longitudinal • Baixa massa específica • Elevada condutibilidade elétrica • Elevada estabilidade dimensional; • Baixo coeficiente de dilatação térmica • Bom comportamento a elevadas temperaturas de serviço • Inércia química exceto em ambientes fortemente oxidantes • Boas características de amortecimento estrutural 	<ul style="list-style-type: none"> • Reduzida resistência ao impacto • Elevada condutibilidade térmica • Fratura frágil • Baixa deformação antes da fratura • Baixa resistência à compressão • Custo elevado

3.1.2 Tipo de geometria dos reforços

Após escolher o reforço é necessário escolher a geometria do reforço. Num laminado pode ter-se várias camadas com várias geometrias de fibra, cada uma com as suas vantagens e desvantagens.

Após a produção da fibra, estas são agrupadas em fitas que são identificados pelo número de filamentos de carbono. As classificações comuns são 3k, 6k, 12k e 15k. O “k” refere-se a mil, então uma fita de 3k é feito de 3.000 filamentos de carbono. Este grande número de fibras de alta resistência agrupadas são o que torna estes reforços tão resistentes (LATTEIER, 2019).

De forma geral no caso das fibras longas, podemos ter dois tipos de geometria de reforço, sob a forma de tecido ou do tipo unidirecional.

A fibra de carbono geralmente vem na forma de um tecido, o que facilita o trabalho e pode fornecer resistência estrutural adicional, dependendo dos requisitos da aplicação. Devido a isso, existem muitos tecidos diferentes usados para tecido de fibra de carbono, sendo os mais comuns os *Plain*, *Twill*, *Spread Tow* e *Harness Satin*.

O reforço tecido *Plain* (*Plain Weave*), está representado na Figura 3.5, tem um aspeto simétrico, na forma de um xadrez, sendo que neste tipo de tecido os filamentos estão dispostos por cima e por baixo do padrão. Este tipo de geometria permite uma elevada estabilidade, o que implica não poder ser usado em geometrias complexas, e não tem tanta flexibilidade quanto comparado com outras geometrias. Geralmente é usado para produzir placas ou tubos.

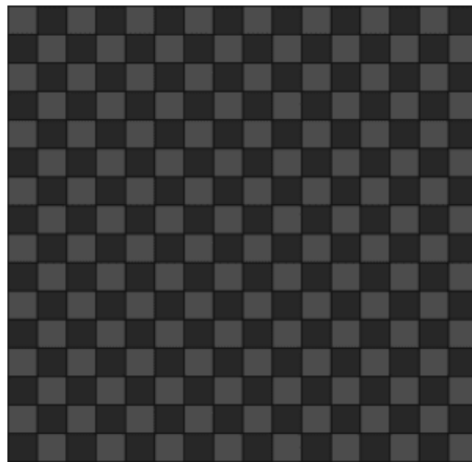


Figura 3.5 – Tecido *Plain* ((LATTEIER, 2019))

Um dos pontos negativos deste tipo de tecido é o ângulo acentuado no entrelaçamento das fibras, o que provoca concentrações de tensões o que pode resultar em pontos de fragilidade com o decorrer do tempo. A Figura 3.6 exemplifica este fenómeno.

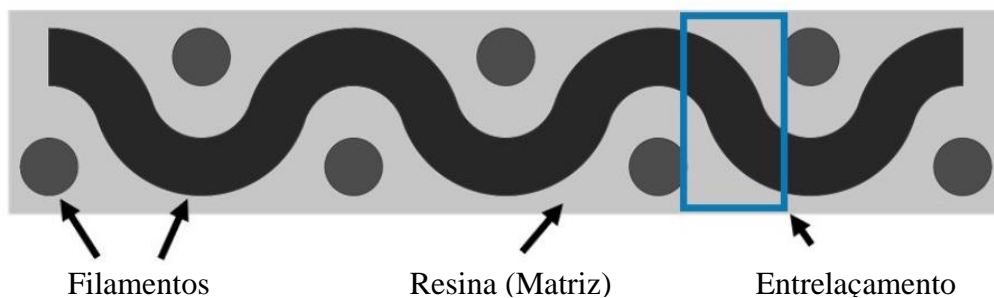


Figura 3.6 – Fenómeno de concentração de tensões do tecido plano (Adaptado de (LATTEIER, 2019))

O tecido *Twill* é um tipo de tecido que se situa entre o tecido *Plain* e o tecido *Satin* que será analisado de seguida. Este tipo de geometria tem alta flexibilidade, o que permite ser usado em geometria complexas, tem maior estabilidade que o tecido *Satin* mas não tem tanta estabilidade quanta ao tecido *Plain*, ou seja, o tecido *Plain* é a que tem maior capacidade de manter a sua geometria. Ao seguir um filamento deste tipo de tecido, este passa por cima e por baixo um certo número de fita. Esta filosofia faz com que o tecido tenha um aspeto característico diagonal (Figura 3.7).

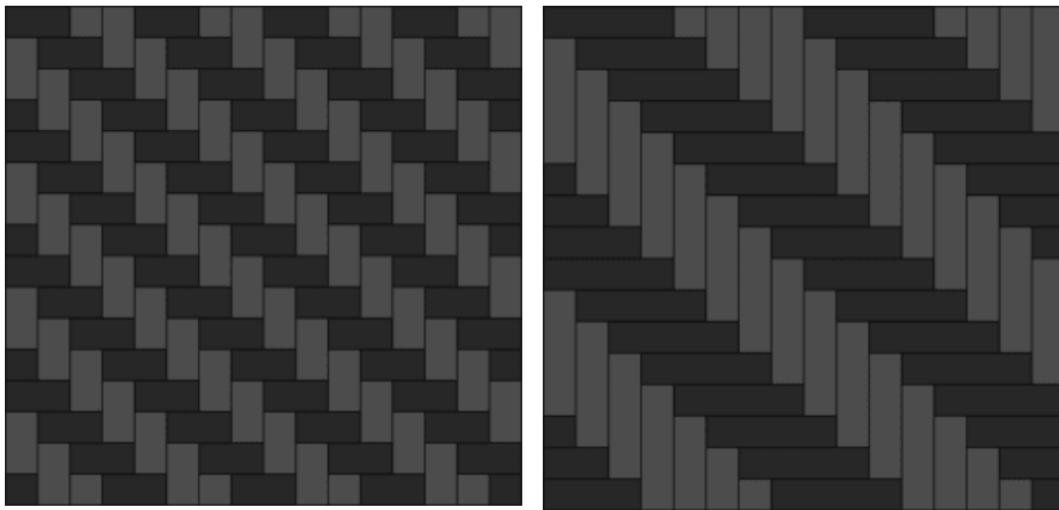


Figura 3.7 – Tecido Twill 2x2 e tecido Twill 4x4 respetivamente ((LATTEIER, 2019))

Este tecido é muito utilizado pelo seu elevado grau de formabilidade e sua estabilidade moderada. Quanto mais filamentos passam por fitas maior a formabilidade, mas por consequência menor será a sua estabilidade, ou seja, maior será a probabilidade de existir distorção da fibra quando usado em geometria complexas, o que resulta em laminados com pontos enfraquecidos, que pode levar à falha da estrutura quando esta se encontrará em funcionamento. O tecido *Harness Satin* foi projetado há milhares de anos atrás para o fabrico de roupa, este tecido tem uma formabilidade excelente, o que resulta na pior estabilidade dos restantes tipos de tecidos. Os tecidos *Harness Satin* mais comum são os 4HS, 5HS e 8HS (HS- *Harness Satin*) (Figura 3.8). Ao aumentar o número, aumenta a sua formabilidade.

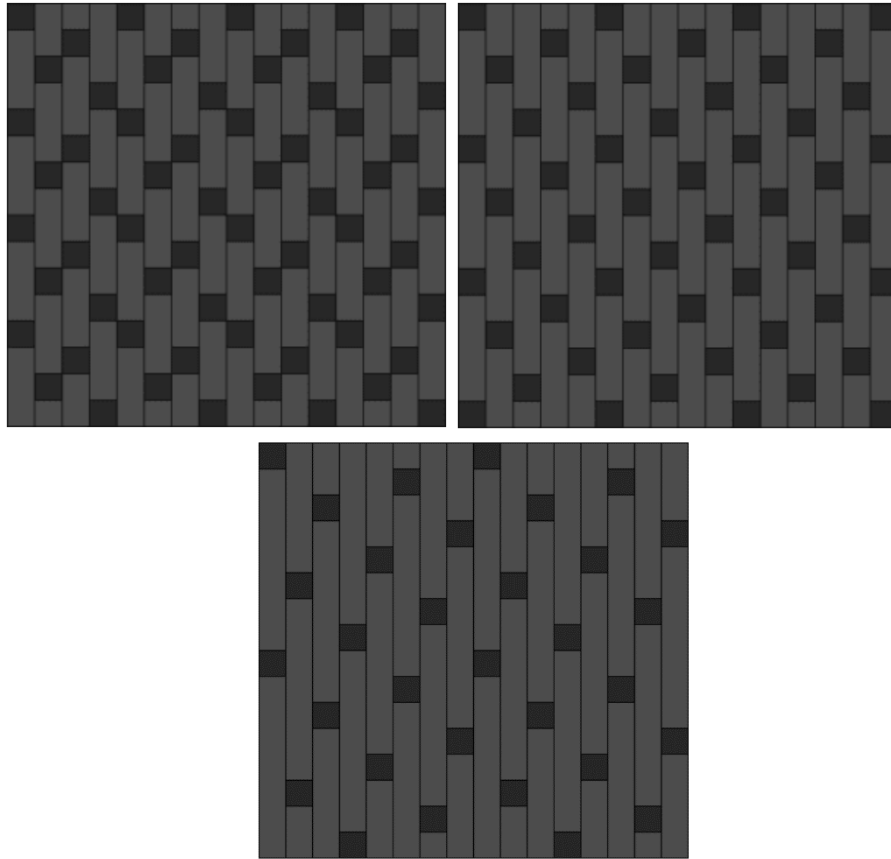
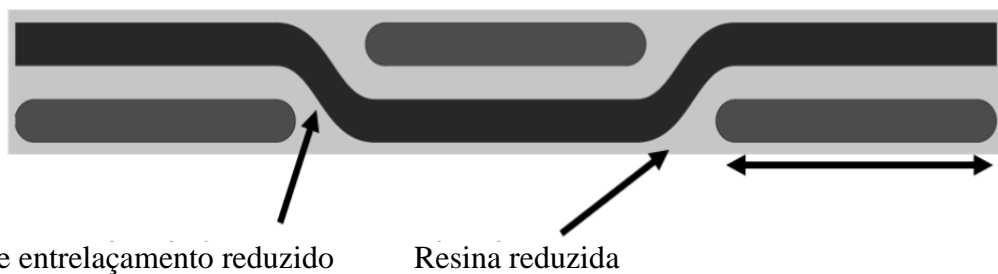


Figura 3.8 – Tecido *harness satin* 4HS, 5HS e 8HS ((LATTEIER, 2019))

Por fim existe o tecido *Spread Tow*, a geometria deste tecido pode ser igual à *Plain*, e *Twill*, apenas tem um ângulo de entrelaçamento menor que os standards (Figura 3.9), o que reduz a concentração de tensões. Reduz também os defeitos superficiais do tecido. Este pode ser um bom compromisso entre as fibras unidirecionais e os tecidos tradicionais. Alargando a distância entre os entrelaçamentos origina numa redução de excesso de resina.



Ângulo de entrelaçamento reduzido

Resina reduzida

Figura 3.9 – Exemplificação do tecido *Spread Tow* (Adaptado de (LATTEIER, 2019))

Por fim, o reforço unidirecional é um reforço em que todas as fibras estão alinhadas na mesma direção (Figura 3.10), resultando este facto numa grande vantagem em termos de resistência mecânica nessa direção. Este tipo de reforço não tem entrelaçamentos, portanto não existem pontos fracos provocados por concentrações de tensões. Outro benefício é a capacidade que este tem de se adaptar para melhor permitir obter as características desejadas para o desempenho do laminado. As bicicletas são um bom exemplo para demonstrar a possibilidade de ajustamento das propriedades mecânicas da estrutura (neste caso o quadro da bicicleta). Onde é necessário em certos pontos alta flexibilidade, enquanto noutros alta rigidez torsional, etc...

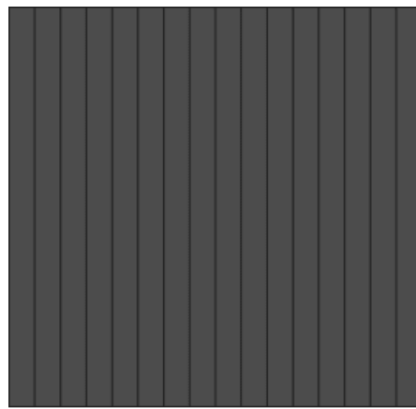


Figura 3.10 – Exemplificação do reforço unidirecional ((LATTEIER, 2019))

Um ponto negativo deste tipo de reforço é sua fraca formabilidade, tem tendência a desfazer-se, como não tem entrelaçamentos que permitem estabilizar o reforço. Portanto, este reforço é sempre usado em conjugação com reforços de tipo tecido.

Todos estes reforços podem ser adquiridos na forma de Prepreg. Designa-se um reforço por Prepreg quando este foi previamente impregnado de resina sob a forma de uma camada. Este método tem algumas vantagens perante a forma tradicional de juntar a resina e a fibra de forma manual. Na Tabela 3.3 estabelecem-se vantagens e desvantagens do uso de reforços sob a forma de Prepreg.

Tabela 3.3 – Vantagens/desvantagens de Prepreg

Reforço	Vantagem	Desvantagem
Reforço Prepreg	<ul style="list-style-type: none"> • Resistência mecânica máxima • Uniformidade e repetibilidade da peça • Menos desordem e menos desperdício • Tempo de cura reduzida • Aspetto cosmético excelente 	<ul style="list-style-type: none"> • Custo elevado • Validade limitada • Cura apenas com aquecimento

3.2 Materiais compósitos fibra longa de carbono

Os materiais compósitos bifásicos de fibra longa consideram fibras longas como elemento de reforço, sendo as fibras mais usadas as de vidro, carbono e aramida. Neste trabalho serão considerados compósitos de fibras longas unidirecionais, e serão usadas fibras unidirecionais de carbono de alto módulo de elasticidade.

A matriz utilizada neste trabalho será uma matriz polimérica. Existem essencialmente dois tipos de polímeros, os termoplásticos e termoendurecíveis. Um plástico termoplástico pode ser reciclado, recuperando a sua forma sólida, enquanto os plásticos termoendurecíveis aguentam altas temperaturas, mas não são recicláveis, deteriorando-se após ultrapassar uma dada temperatura. As matrizes termoplásticas, como por exemplo as matrizes epoxídicas, possuem propriedades mais resistentes ao impacto, tendo para além disso várias outras características favoráveis tais como:

- Boa aderência com o reforço.
- Baixa contração durante a cura, reduzindo as tensões residuais.
- Propriedades mecânicas excelentes comparado com outros polímeros.
- Estável num largo intervalo de temperaturas.

3.2.1 Características gerais das fibras longas

Os materiais compósitos de fibra longa são ortotrópicos, isto é, as suas propriedades mecânicas, diferem ao longo de cada direção de um referencial cartesiano. Portanto, um reforço tem geralmente três módulos de elasticidade distintos, um associado a cada direção, X, Y e Z. Alguns tipos de reforços terão o eixo X e Y com as mesmas propriedades, como poderá ser o caso dos reforços de tipo tecido.

Adicionalmente os materiais podem ser considerados como homogéneos ou heterógenos, o que poderá depender da escala a que se pretende trabalhar. Neste contexto pretende-se trabalhar a uma escala macro mecânica; sendo que deste modo o material será considerado homogéneo, isto é, as propriedades numa direção serão as mesmas para qualquer ponto nessa direção particular. A uma escala micromecânica, o material poderá ser considerado heterogéneo, considerando a possibilidade dessas propriedades variarem em pontos diferentes dessa direção. A (Figura 3.11) sintetiza esta informação.

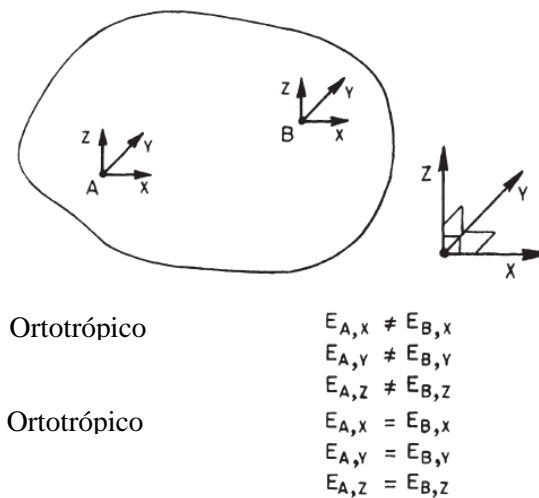


Figura 3.11 – Tipos de materiais ortotrópicos (adaptado de (DATOO, 1991))

O estudo estrutural de materiais compósitos de fibra longa é habitualmente efetuado a dois níveis, ao nível da micromecânica e ao da macromecânica. A micromecânica é o domínio onde se considera a separadamente o reforço e a matriz, como entidades diferentes, com isto considerando-se o material heterogéneo. Por outro lado, e tal como no caso deste trabalho, a macromecânica avalia o compósito como um só, onde não se diferenciam os seus componentes (fibra e resina). Com isto, o compósito é assumido como sendo um matéria homogéneo, onde as suas propriedades não se alteram de ponto para ponto numa direção particular. Na maioria dos casos, a análise de laminados é considerada no domínio da macroescala atendendo ao nível de detalhe requerido num grande número de situações.

Uma folha pré impregnada de resina (Prepreg) com fibras alinhadas numa direção particular é designado por uma camada ou uma lâmina. Se a lâmina tiver as fibras todas

alinhas na mesma direção, esta designa-se por camada unidirecional, se for uma lâmina com um reforço de tipo tecido terá fibras alinhadas em duas direções diferentes e será considerada uma camada de tecido. No presente trabalho, o laminado será apenas constituído por lâminas de fibra unidirecionais. Irá também ser considerado que cada lâmina unidirecional tem uma espessura em termos médios, de 0,125mm e por outro lado uma lâmina de tecido tem em termos médios uma espessura de 0,25mm.

Quando se trata de materiais compósito, em que estes são ortotrópicos por natureza, é necessário ter algum cuidado na definição das direções das fibras, da aplicação de cargas, das tensões, e deformações daí decorrentes. Como as propriedades do material mudam com a direção, e, portanto, de camada para camada, será utilizado um referencial cartesiano consistente e único.

Os eixos do referencial do material (Figura 3.12) são definidos como um conjunto de direções com direções paralela e perpendiculares às direções da fibra. Os eixos do referencial do laminado não estão necessariamente alinhados com os eixos dos referenciais do material em cada camada. A direção da fibra é designada como direção 1, e a direção perpendicular no plano da lâmina é designada por direção 2. A direção da fibra também é conhecida como direção longitudinal e a direção perpendicular à fibra no plano da lâmina é designada também como direção transversal no plano. É necessário mais de uma camada para formar um laminado. Desta forma, um laminado é um conjunto de lâminas. Quando todas as camadas são do mesmo material, o compósito é simplesmente chamado de laminado. Se, no entanto, forem usados materiais diferentes dentro do laminado, ou todas as camadas com o mesmo material compósito, mas tipos diferentes, como por exemplo uma mistura de pré-impregnados unidirecionais e tecidos, então o laminado é chamado um laminado híbrido.

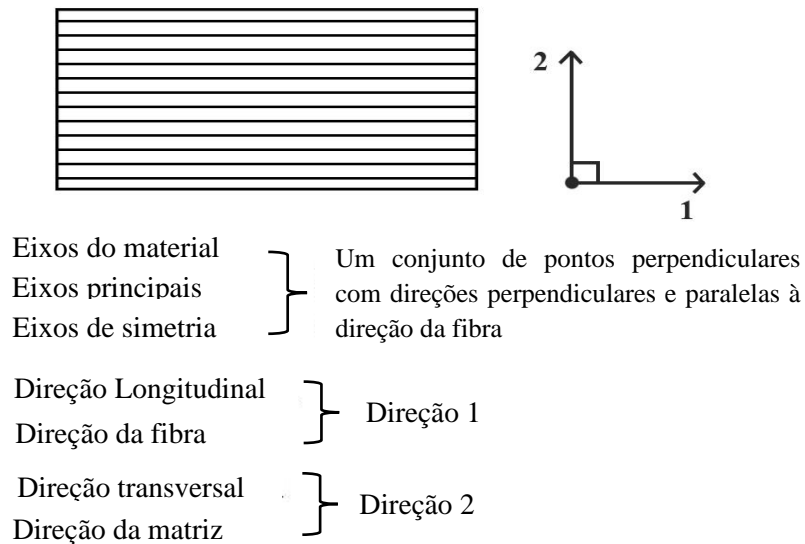


Figura 3.12 – Sistema de eixo do material compósito (adaptado de (DATOO, 1991))

Num laminado, as camadas podem ser orientadas em diferentes direções para conferir a rigidez e resistência mecânica desejada em uma determinada direção. (Figura 3.12) representa-se esquematicamente um laminado em que cada camada tem uma direção diferente, portanto, é necessário definir um sistema de eixo comum.

Este sistema de eixos comum é designado de sistema de eixos de referência ou global ou ainda de referencial do laminado. Por vezes por uma questão de simplicidade, uma das direções desse referencial é considerada coincidente com a direção de algum carregamento externo, sendo que esta abordagem poderá ser extensiva a outras direções dependendo das características das solicitações o permitirem ou não. (DATOO, 1991).

3.2.2 Relações Constitutivas da Lâmina e do Laminado

As relações constitutivas estabelecidas ao nível de uma dada lâmina em particular são definidas tendo por base o referencial do material em qualquer lâmina. Neste trabalho considera-se como já foi referido que as estruturas possuem paredes finas e como tal estaremos perante compósitos laminados de espessura fina.

Assim sendo, serão usadas as relações constitutivas baseadas na teoria clássica dos laminados, que assenta num conjunto de pressupostos (MOTA SOARES & FREITAS, 2000), designadamente:

- A lâmina é inicialmente plana;
- A lâmina é contínua e não apresenta qualquer tipo de defeito;
- A lâmina apresenta um comportamento linear elástico;

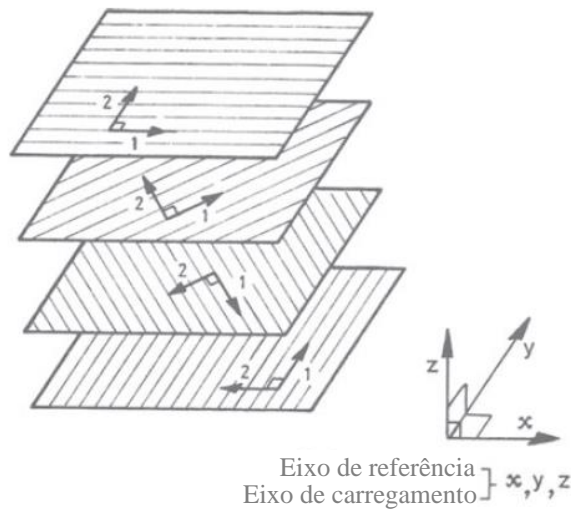


Figura 3.13 – Sistema de eixo referência (adaptado de (DATOO, 1991))

Verificados os pressupostos anteriores, o de inextensibilidade em espessura e deformações de corte transversais também nulas ($\epsilon_3 = \epsilon_4 = \epsilon_5 = 0$) bem como considerada a tensão normal transversal nula ($\sigma_3 = 0$ (REDDY, 1997), ter-se-ão as seguintes relações:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_6 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Em que os σ são as tensões, ϵ as extensões, os Q_{ij} são os coeficientes de rigidez elástica reduzidos, em que (i) e (j) assumem os valores 1,2 e 6. No caso de um material ortotrópico, os coeficientes de rigidez de cada lâmina devem ser transformados para o referencial do laminado e se necessário de seguida para o referencial da estrutura. Para isso, os coeficientes de rigidez elástica reduzidos são determinados da seguinte forma, por (REDDY, 1997):

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12} * \nu_{21}} ; \quad (2)$$

$$Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12} * \nu_{21}} ; \quad (3)$$

$$Q_{12} = \frac{\nu_{12} * E_2}{1 - \nu_{12} * \nu_{21}} = \frac{\nu_{12} * E_1}{1 - \nu_{12} * \nu_{21}} ; \quad (4)$$

$$Q_{66} = G_{12} \quad (5)$$

Em que E_1 é o modulo de elasticidade na direção longitudinal da fibra e E_2 é o modulo de elasticidade na direção transversal da fibra. Os ν_{12} e ν_{21} são os coeficientes de poisson na direção longitudinal e transversal. Os coeficientes de rigidez elástica reduzidos transformados são calculados da seguinte forma por (REDDY, 1997):

$$\overline{Q}_{11} = Q_{11} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2 * Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta \quad (6)$$

$$\overline{Q}_{12} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \quad (7)$$

$$\overline{Q}_{22} = Q_{11} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2 * Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta \quad (8)$$

$$\overline{Q}_{16} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \quad (9)$$

$$\overline{Q}_{26} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta \quad (10)$$

$$\overline{Q}_{66} = (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \quad (11)$$

em que θ representa o ângulo entre o sentido positivo da direção 1 do referencial do material (cada lâmina) e o sentido positivo da direção x do referencial do laminado. Os coeficientes de rigidez elástica reduzidos transformados possibilitam transpor as propriedades do referencial da lâmina para o referencial do laminado (Figura 3.14).

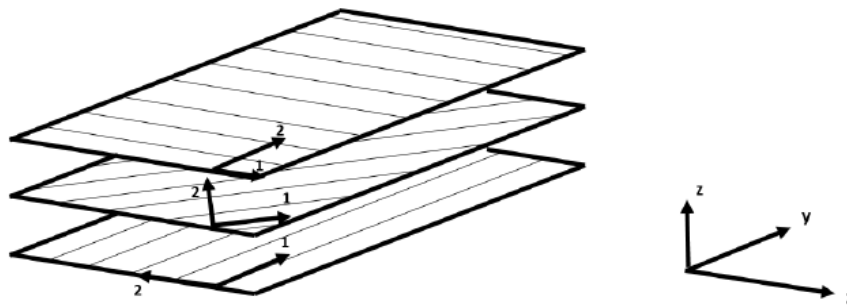


Figura 3.14 – Referência de cada lâmina e o referencial global ((REDDY, 1997))

Por fim, de modo a quantificar a rigidez do laminado para assim calcular as propriedades mecânicas do laminado, são definidas as matrizes A, B e D. Estas matrizes relacionam as forças e momentos resultantes por unidade de comprimento no laminado em função das deformações do mesmo. Neste trabalho, estas matrizes apenas serão usadas para calcular as propriedades mecânicas do material, como o módulo de corte e módulo de elasticidade para assim prosseguir para os casos práticos das estruturas de perfis de paredes finas, com matérias compósitas de fibras longas.

Considerando que tal como é o caso do presente estudo, os coeficientes de rigidez elástica reduzidos transformados são constantes em cada camada, estas matrizes são calculadas de acordo com as seguintes expressões (REDDY, 1997):

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N \overline{Q}_{ij}^k * (z_{k+1} - z_k) ; \quad (12)$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} * \sum_{k=1}^N \overline{Q}_{ij}^k * (z_{k+1}^2 - z_k^2) ; \quad (13)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} * \sum_{k=1}^N \overline{Q}_{ij}^k * (z_{k+1}^3 - z_k^3) ; \quad (14)$$

Na equação anterior, os z_k são as coordenadas que definem as superfícies inferior e superior de cada camada no referencial do laminado, encontrando-se habitualmente associado à superfície média do laminado, tal como se ilustra na Figura 3.15. Os índices (i) e (j) continuam a assumir os valores 1,2 e 6.

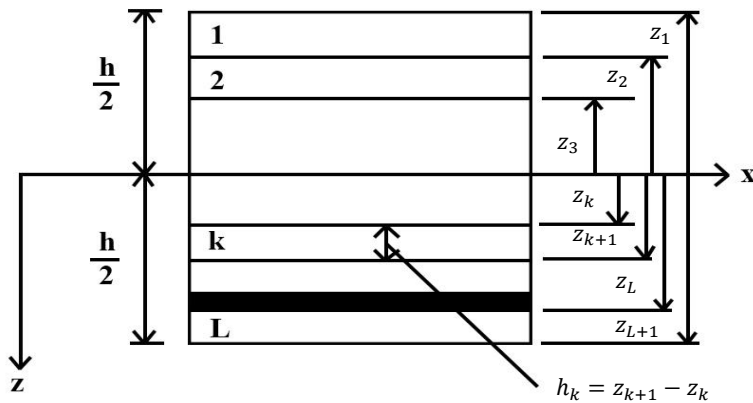


Figura 3.15 – Referencial para as camadas do laminado ((DATOO, 1991)

Por fim, após a obtenção das matrizes A, B e D, podem-se determinar as constantes elásticas equivalentes do laminado. Na tabela seguinte apresentam-se as relações que são obtidas para o caso particular de um laminado simétrico.

Tabela 3.4 – Constantes de elasticidade de um laminado simétrico (Adaptado de (DATOO, 1991))

	Modo Membrana	Modo Flexão
E_x	$1/(ta_{11})$	$12/(t^3d_{11})$
E_y	$1/(ta_{22})$	$12/(t^3d_{22})$
G_{xy}	$1/(ta_{33})$	$12/(t^3d_{33})$
ν_{xy}	$-a_{12}/a_{11}$	$-d_{12}/d_{11}$
ν_{yx}	$-a_{12}/a_{22}$	$-d_{12}/d_{22}$

a_{ij} : Deformações de membrana

d_{ij} : Deformações de flexão

t: Espessura do laminado

Os diferentes coeficientes que permitem o cálculo das constantes de elasticidade, são obtidos a partir das matrizes A, B e D de acordo com:

$$AA = A[1,1] * A[2,2] - (A[1,2])^2 \quad (15)$$

$$DD = D1[1,1] * D1[2,2] * D1[3,3] + 2D1[1,2] * D1[2,3] * D1[1,3] - D1[2,2] * (D1[1,3])^2 - D1[3,3] * (D1[1,2])^2 - D1[1,1] * (D1[2,3])^2 \quad (16)$$

$$a_{11} = \frac{A[2,2]}{AA} \quad (17)$$

$$a_{22} = \frac{A[1,1]}{AA} \quad (18)$$

$$a_{33} = \frac{1}{A[3,3]} \quad (19)$$

$$d_{33} = \frac{D1[1,1] * D1[2,2] - (D1[1,2])^2}{DD} \quad (20)$$

Em que as Eq.(15) e Eq.(16) são cálculos auxiliares para os coeficientes de deformação. Sendo este cálculo efetuado para situações de resposta do tipo membrana ou do tipo flexão consoante a natureza da secção transversal do perfil submetido a torção pura.

3.2.3 Perfis de paredes finas

Este trabalho teve como objeto de estudo estruturas de paredes finas, laminadas com reforços de fibras longas, submetidas a solicitações de torção pura. Conforme se verá mais à frente foram considerados casos de estudo relacionados com três perfis de paredes finas diferentes, um perfil de secção aberta simétrico, um perfil de secção aberta antissimétrico e um perfil de secção fechada duplamente simétrico (Figura 3.16).

Cada caso de estudo tem um número de variáveis de entrada diferente devido a diferente geometria de cada estrutura. Assim as variáveis de entrada nestes casos são a orientação das fibras longas no laminado, a espessura dos elementos constituintes da secção transversal e os comprimentos dos mesmos. As variáveis de saída são a rigidez torsional, a tensão máxima de corte, o módulo de elasticidade médio, a coordenada do ponto na estrutura em que o deslocamento da estrutura é nulo, e os deslocamentos nos vértices da geometria da secção transversal do perfil. No caso do perfil de secção fechada duplamente simétrico, as variáveis de saída consideradas são o fluxo de corte, a rigidez torsional, e o deslocamento em pontos estratégicos do perfil em estudo.

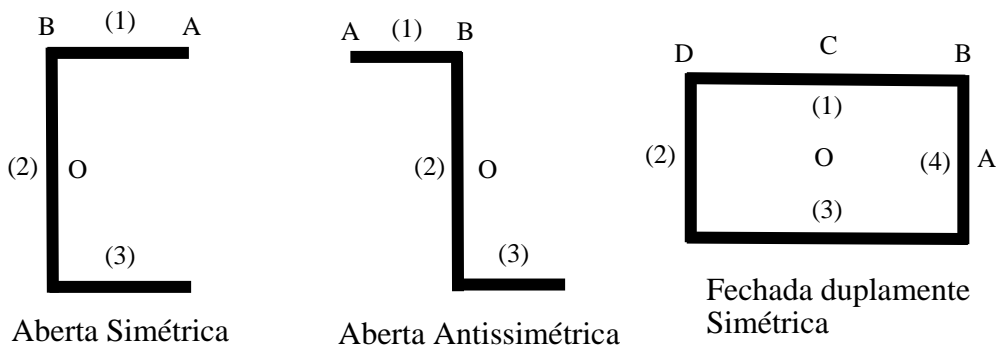
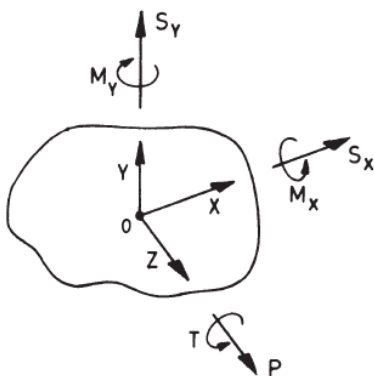


Figura 3.16 – Perfis usados para análise de dados

Na análise das secções submetidas a torção, considera-se que as secções planas não permanecerão necessariamente planas após a aplicação da torção, apresentando deslocamentos axial na direção do eixo Z. Na (Figura 3.17) apresenta-se uma secção genérica e a sua relação com o sistema de coordenadas usado.



- P , Força axial, na direção Z
- S_x , Força de corte, na direção X
- S_y , Força de corte, na direção Y
- T , Torque em torno de Z
- M_x , Momento em torno de X
- M_y , Momento em torno de Y

Figura 3.17 – Carregamentos positivos e eixos positivos (Adaptado de (DATOO, 1991))

Os deslocamentos axiais nas secções podem ocorrer sem restrições impostas a esses deslocamentos. A tensão de corte nos elementos na secção aberta é então determinada pela teoria de torção de St. Venant, enquanto nas secções fechadas, aplica-se a teoria de Bredt-Batho (DATOO, 1991). No entanto a torção pode ser restringida se o deslocamento for restringido em algum ponto do elemento submetido a torção. Em termos gerais, para previsões iniciais em projeto, é considerado o caso de torção não restringida, no qual se

aplicam a teoria de torção de St. Venant em seções abertas e a teoria de Bredt-Batho em seções fechadas. Neste trabalho será considerada esta primeira situação (DATOO, 1991).

Estes deslocamentos podem ser de dois tipos. No primeiro caso, temos os deslocamentos primários, que variam ao longo do contorno da seção, de elemento/troço para elemento/troço, mas assumindo-se que permanecem constantes ao longo da espessura do elemento. No segundo caso, os deslocamentos secundários, variam ao longo da espessura do elemento. Em seções onde o deslocamento primário é zero, o deslocamento secundário torna-se significativo, mas para seções que possuem deslocamento primário, o deslocamento secundário torna-se menos significativo sendo habitualmente desprezado. A torção em seções abertas e em seções fechadas será analisada separadamente, pois como se sabe as distribuições de tensões de corte e as distribuições de deslocamentos nessas seções são muito diferentes.

Torção seção aberta

A primeira diferença no estudo da torção pura, não restringida, de uma seção de material isotrópica e uma de material ortotrópico está na determinação da rigidez torsional GJ da seção. No caso de uma seção isotrópica, o valor do módulo de corte não muda de elemento para elemento, enquanto numa seção de material ortotrópico ou de um material compósito laminado, o módulo de corte pode variar de elemento para elemento, dependendo da configuração do laminado.

Por isso, a questão que se coloca está relacionada com o uso correto do módulo de corte (G), considerando a resposta do tipo membrana ou do tipo flexão que a seção submetida à torção, irá apresentar. No caso de seções abertas, o momento de torção é equilibrado pelas tensões de corte desenvolvidas no interior da espessura do elemento, que variam linearmente como se observa na (Figura 3.18).

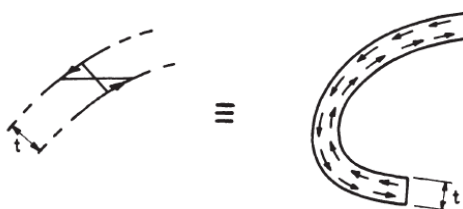


Figura 3.18 – Variação do fluxo de corte numa seção aberta com torção livre (DATOO, 1991)

Nestas situações, o valor do módulo de corte correspondente deve ser o valor correspondente ao modo de flexão (Tabela 3.4). Este pode ser calculado a partir da (Tabela 3.4), sendo necessário para o efeito calcular igualmente o termo d_{33} , tal como se apresenta de seguida:

$$G_{xy}^b = \frac{12}{t^3 * d_{33}} \quad (21)$$

Para uma secção em compósito, o valor do módulo de corte pode mudar de elemento para elemento, portanto, não pode ser excluído do domínio da soma, considerando a variação dos diferentes parâmetros envolvidos. Assim, a rigidez torsional para uma secção de material compósito é genericamente dada por:

$$GJ = \sum \frac{G_{xy}^b b t^3}{3} \quad (22)$$

O ângulo de torção unitário de um perfil submetido a um momento de torção T, é dado pela relação fundamental da torção:

$$\frac{d\theta}{dZ} = \frac{T}{GJ} \quad (23)$$

Conhecido o ângulo de torção unitário, do perfil construído com material compósito, a tensão de corte de St. Venant, no plano do elemento/troço (no plano X-Y) será dada pela equação seguinte:

$$f_{xy} = 2G_{xy}^b n \frac{d\theta}{dZ} \quad (24)$$

O módulo de corte G_{xy}^b é o módulo para o elemento em que se pretende determinar a tensão de corte, e onde n é a distância do plano médio do elemento e varia do valor de $-t/2$ a $+t/2$, em que t é a espessura do elemento. A tensão de corte apresenta uma distribuição linear, variando de um valor positivo em uma superfície do elemento a um valor negativo na outra superfície, sendo zero no seu plano médio. Assim, a tensão de corte máxima é dada por:

$$(f_{xy})_{max} = 2G_{xy}^b \left(\pm \frac{t}{2} \right) \frac{d\theta}{dZ} \quad (25)$$

$$(f_{xy})_{max} = \pm 2G_{xy}^b t \frac{d\theta}{dZ}$$

A rigidez axial de cada elemento é descrita pelo termo $E_z t$ para cada elemento, mas como a direção Z é paralela a todas as direções X dos elementos, então a rigidez da membrana do elemento em questão é o valor $E_x t$. A Figura 3.19 ilustra esta situação.

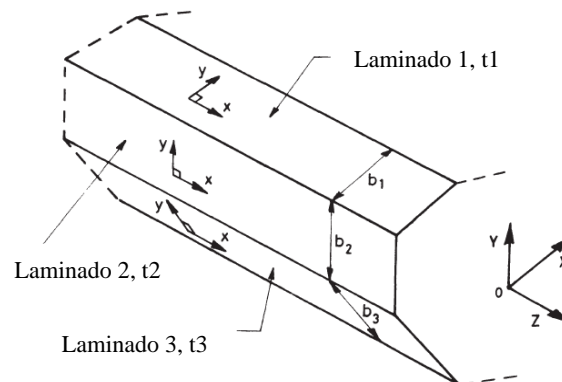


Figura 3.19 – Estrutura de paredes finas dum conjunto de placas
(Adaptado de (DATOO, 1991))

O valor da coordenada (E) onde o deslocamento é nulo, identifica a posição do centro de corte do perfil e dos pontos de deslocamento nulo na secção. As expressões apresentadas pela Figura 3.20 são modificadas para levar em consideração a rigidez axial dos elementos. Isso é feito substituindo cada parâmetro de espessura (t) na expressão para determinar os pontos de deslocamento nulo por uma espessura equivalente t^* (Eq. (26)), que leva em consideração a rigidez axial relativa do elemento (no eixo X do elemento ou eixo Z da estrutura) em relação à rigidez axial da secção (no eixo X do elemento ou eixo Z da estrutura).

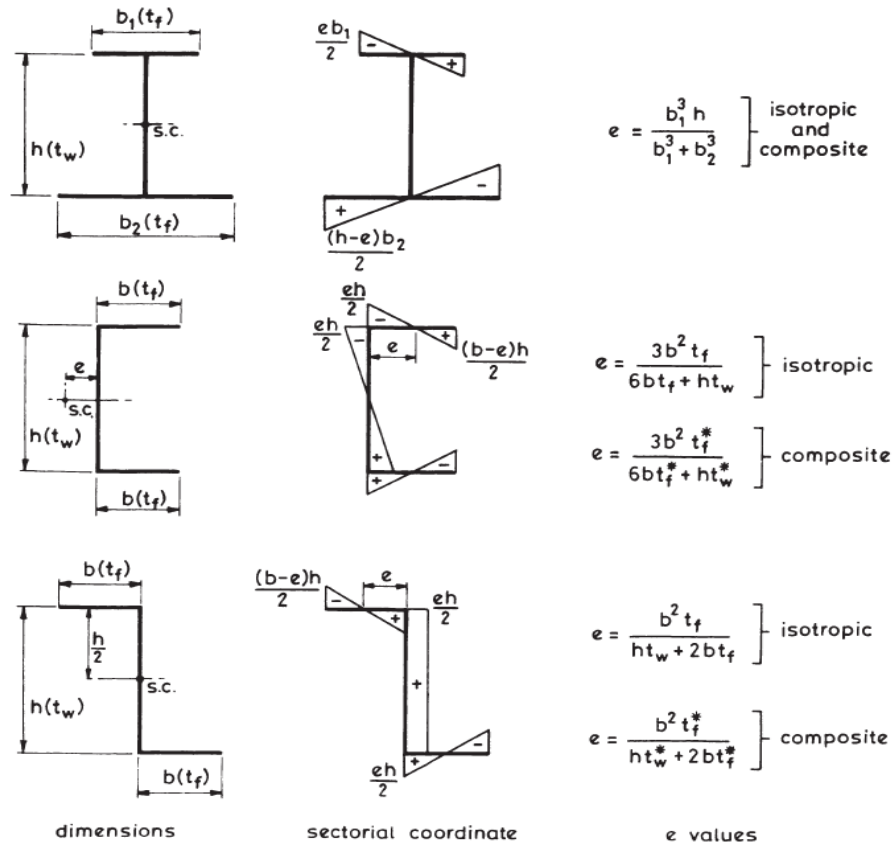


Figura 3.20 – Propriedades relacionadas com os deslocamentos se secções abertas para materiais isotrópicos e ortotrópicos ((DATOO, 1991))

$$t^* = t \frac{E}{E_{avg}} \quad (26)$$

...Na Eq. (26), E é o valor E_x do elemento, t é a espessura do elemento/troço, e E_{avg} é o módulo de elasticidade médio (Eq. (28) obtido a partir do cálculo da rigidez axial (AE) da secção, dada pela Eq. (27). Esta rigidez axial é a soma de todos os valores de rigidez axial para cada elemento na secção, onde A é a área da seção transversal do elemento e E é o valor do módulo de elasticidade na direção axial. Estamos preocupados com a direção axial, a direção Z da estrutura ou a direção X local do elemento, então E é efetivamente E_x (ou E_z) neste caso. A área da secção transversal para cada elemento é o valor (bt) (como se observa na Figura 3.19) onde b é a largura do elemento e t é a espessura.

$$AE = \sum_{i=1}^n (AE)_i = \sum_{i=1}^n (btE)_i \quad (27)$$

$$E_{avg} = \frac{\sum_{i=1}^n (btE)_i}{\sum_{i=1}^n (bt)_i} \quad (28)$$

Onde, n é o número de elementos da estrutura.

As expressões modificadas para determinar os pontos de deslocamento nulos em secções compostas também são fornecidas na Figura 3.20. Finalmente, conhecendo os valores das coordenadas setoriais da secção, os deslocamentos podem então ser determinados pela Eq. seguinte:

$$W = w(s) \frac{d\theta}{dZ} \quad (29)$$

Em que $w(s)$ se encontra descrito na Figura 3.20 na coluna das coordenadas setoriais, dependendo da localização do ponto pretendido no elemento da estrutura.

Torção secção fechada

As secções fechadas que iremos analisar são secções simétricas. Assim, considere-se um conjunto de placas planas (no plano XY) de modo a formar uma secção fechada, como se ilustra a Figura 3.21, onde (s) é a distância ao redor do contorno da secção e 0 é o centro de corte. Seja (s) a distância traçada ao redor da secção e (p) a distância perpendicular do centro de corte ao elemento em questão.

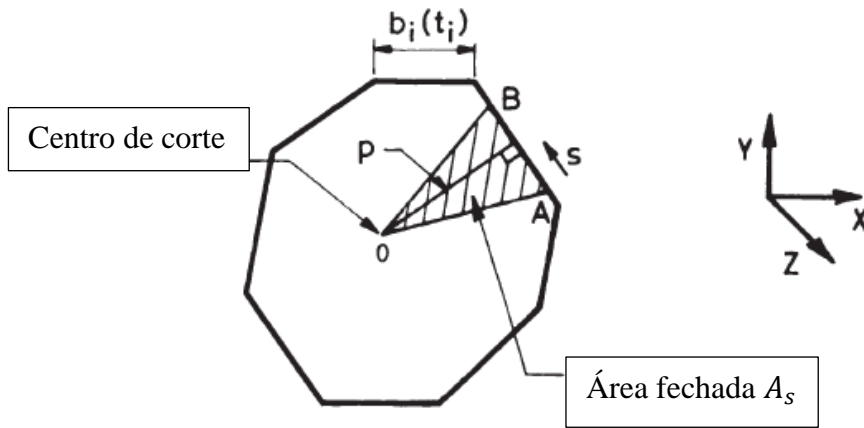


Figura 3.21 – Exemplo de um perfil de secção fechada (Adaptado de (DATOO, 1991))

A relação entre o fluxo de corte (q) criado pela aplicação do torque é constante ao redor da secção e é dado pela expressão:

$$T = \int_s pq ds \quad (30)$$

Onde \int_s , é o integral associado ao contorno da secção, e como (q) é constante, então:

$$T = q \int_s p ds \quad (31)$$

Mas, $\int_s p ds = 2A$ onde A é a área fechada do perfil fechado. Por isso:

$$T = 2Aq \quad (32)$$

Esta expressão é geralmente conhecida como a fórmula de Bredt-Batho. Portanto, observe-se que em seções fechadas, a aplicação de um momento de torção, sem restrições, resulta numa distribuição de fluxo de corte constante ao longo da secção. O ângulo de torção unitário da viga para materiais isotrópicos é dado como:

$$\frac{d\theta}{dZ} = \frac{q}{2A} \int_s \frac{ds}{Gt} \quad (33)$$

Em secções fechadas, o fluxo de corte induzido devido à torção (Eq. (32)) é constante ao longo da espessura do elemento, portanto, é uma resposta do tipo membrana (ver Figura 3.22). Agora o módulo de corte associado a esta resposta do tipo de membrana (G_{xy}^m), para um elemento laminado é obtido da Eq. (34):



Figura 3.22 – Variação do fluxo de corte num elemento de secção fechado à torção livre (DATOO, 1991)

$$G_{xy}^m = \frac{1}{ta_{33}} \quad (34)$$

$$a_{33} = \frac{1}{A[3,3]}$$

Para um perfil em compósito, onde G_{xy}^m é o módulo de corte equivalente no modo membrana, obtém-se:

$$\frac{d\theta}{dZ} = \frac{q}{2A} \int_s \frac{ds}{G_{xy}^m t} \quad (35)$$

Esta expressão é válida desde que o parâmetro G_{xy}^m seja deixado dentro do domínio do integral, dado que este módulo pode mudar de elemento para elemento, dependendo da sequência de empilhamento do laminado. Como $q = \frac{T}{2A}$, então o ângulo de torção unitário dado pela Eq. (33) é válido, desde que o termo do módulo de corte G_{xy}^m seja usado e não seja excluído do domínio integral:

$$\frac{d\theta}{dZ} = \frac{T}{4A^2} \int_s \frac{ds}{G_{xy}^m t} \quad (36)$$

Resolvendo esta expressão em ordem ao momento de torção, obtém-se:

$$T = \frac{4A^2}{\int_s} \frac{ds}{G_{xy}^m t} \frac{d\theta}{dZ} \quad (37)$$

Relacionando esta expressão com a relação fundamental da torção, obtém-se sucessivamente os resultados:

$$T = GJ \frac{d\theta}{dZ} \quad (38)$$

$$T = \frac{4A^2}{\int_s} \frac{ds}{G_{xy}^m t} \frac{d\theta}{dZ} \quad (39)$$

$$GJ = \frac{4A^2}{\int_s} \frac{ds}{G_{xy}^m t} \quad (40)$$

Após a obtenção da rigidez torsional GJ (Eq. (40)), pode obter-se a distribuição de deslocamentos. Tal como se referiu, o módulo de corte G_{xy}^m deve sempre permanecer dentro do integral, pois pode mudar de elemento para elemento em uma dada secção. Desta forma:

$$W_s - W_o = \int_0^s \frac{q ds}{G_{xy}^m t} - \frac{A_s}{A} \int_s \frac{q ds}{G_{xy}^m t} \quad (41)$$

Onde:

- W_s = O valor de deslocamento em qualquer ponto s no elemento em questão;
- W_o = O valor de deslocamento na origem para s (em s = 0);
- A_s = A área delimitada pela linha de referência OA, onde s = 0, até a linha OB, a uma distância s (área sombreada na Figura 3.21);
- A = A área total do perfil da estrutura de secção fechada;

3.3 Simulação de dados experimentais

Foi realizado uma simulação de dados experimentais para cada variável de entrada dos perfis em estudo. Para tal, usou-se o método Monte Carlo.

O método de Monte Carlo é uma grande classe de algoritmos computacionais que depende de amostragem aleatória repetida para produzir resultados numéricos. O conceito básico é usar a aleatoriedade para resolver problemas que podem, em princípio, ser determinísticos. Estes são usados em problemas físicos e matemáticos e são mais úteis quando é difícil ou impossível usar outras abordagens (KROESE, BRERETON, & TAIMRE, 2014).

A ideia principal por trás desse método é que os resultados sejam calculados com base em amostragem aleatória repetida. As simulações de Monte Carlo são tipicamente caracterizadas por muitos parâmetros desconhecidos, muitos dos quais são difíceis de obter experimentalmente. Muitas das técnicas usam sequências determinísticas e pseudoaleatórias, facilitando o teste e a repetição de simulação.

(SAWILOWSKY, 2003) lista as características de uma simulação de Monte Carlo de alta qualidade:

- O gerador de números (pseudoaleatórios) tem certas características (por exemplo, um longo "período" antes que a sequência se repita);
- O gerador de números (pseudoaleatórios) produz valores que passam nos testes de aleatoriedade;
- Há amostras suficientes para garantir resultados precisos;
- A técnica de amostragem adequada é usada;
- O algoritmo usado é válido para o que está sendo modelado;

Neste trabalho, usou-se as distribuições gaussiana e uniforme. Escolheu-se a distribuição normal por esta ser das distribuições mais usadas para modelar fenômenos naturais, e repetiu-se os estudos com a distribuição uniforme. Desta forma poder-se-á comparar dados por duas distribuições diferentes, e tentar correlacionar os dados obtidos. A aplicação do método Monte Carlo foi efetuada a partir do software Excel, onde é necessário determinar o número de variáveis e o total de números aleatórios para ambas as distribuições. Na distribuição uniforme será escolher um intervalo com um limite

inferior e superior, enquanto na distribuição normal será escolher um valor médio, e um desvio padrão, isto para cada variável.

3.4 Modelo regressão linear múltipla

Esta explicação foi baseada no livro (MONTGOMERY & RUNGER, 2003). A forma de relacionar linearmente duas variáveis X e Y é definida por $Y = \beta_0 + \beta_1 X$. Numa abordagem probabilística, assume-se que o valor esperado da variável dependente Y é uma função linear da variável independente X , ou seja, difere por uma quantidade aleatória do valor esperado da variável Y . O modelo de regressão linear simples possui os parâmetros β_0 , β_1 e σ^2 , fica então:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \epsilon \quad (42)$$

onde β_0 representa a ordenada na origem, β_1 o declive da reta e ϵ , por norma conhecido por erro ou resíduo, é uma variável aleatória que se assume habitualmente distribuída com média nula e variância constante, isto é, $N \sim (0, \sigma)$.

Os parâmetros β_0 , β_1 e σ^2 são incógnitas, mas podem ser calculados a partir de um conjunto de observações independentes $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$. Em praticamente qualquer estudo ligado à engenharia, existirá mais de uma variável para construir contextos. Nesses casos, ainda temos uma variável dependente, mas o número de variáveis independentes aumenta. Essa metodologia, conhecida como regressão linear múltipla, pode ser utilizada como forma de relacionar a resposta estática/dinâmica do modelo às propriedades do material.

Para a regressão linear múltipla considera-se agora que existem k variáveis dependentes ($k \geq 2$), X_1, \dots, X_k . Vem então a equação:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \dots + \beta_k X_k + \epsilon \quad (43)$$

Onde 'k' é o número de variáveis independentes envolvidas, e 'n' o número de observações da amostra.

3.4.1 Análise de Variância

A análise de variância (ANOVA) é um procedimento de análise da qualidade do modelo de regressão que se apoia em dividir a variabilidade total de Y (variável dependente) (PEDROSA, 2018). Os valores dos coeficientes β_i estimados não dão informação acerca da qualidade do ajustamento através do modelo linear múltiplo. Portanto, é necessário desenvolver uma dimensão que mede o grau de relação linear entre as variáveis independentes X_i e a dependente Y. Desta forma avalia-se a qualidade do modelo ajustado, para tal tem que se quantificar a variabilidade total das observações de Y. Geralmente designada por SST, essa variabilidade é adquirida em função da soma dos quadrados dos desvios totais da variável dependente, ou seja, a soma das diferenças $(Y - \hat{Y})^2$. A variabilidade total pode ser dividida em duas partes: a variabilidade relacionada aos resíduos (SSE) e da variabilidade esclarecida pela regressão (SSR), tal como expõe a Eq. (44).

$$SST = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = SSE + SSR \quad (44)$$

onde y_i exibe cada observação da variável dependente e \bar{y} advém da média das observações da variável dependente. A variabilidade ligada aos resíduos, variabilidade não explicada, é alcançada pela soma dos quadrados dos resíduos (Eq. (45)).

$$SSE = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = SSE + SSR \quad (45)$$

Onde \hat{y}_i é o valor estimado através do modelo. Por fim, falta definir a variabilidade do modelo de regressão (SSR). Esta calcula a variabilidade explicada através da regressão linear entre os x_i e o Y, quanto maior for o SSR, maior será a qualidade do ajustamento do modelo.

$$SSR = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 \quad (46)$$

Outra noção relevante é a média dos quadrados dos desvios (MQR) originada do quociente entre a soma dos quadrados da regressão e o número de graus de liberdade.

$$MQR = \frac{SSR}{k - 1} \quad (47)$$

Onde k representa o número de variáveis independentes e $k - 1$ o número de graus de liberdade relacionado ao cálculo da média dos quadrados dos desvios elucidados pela regressão (MQR). Esta subtração deve-se ao cálculo anterior da média amostral.

$$MQE = \frac{SSE}{n - k} \quad (48)$$

Portanto, n representa a dimensão da amostra e $n - k$ o número de graus de liberdade relacionado ao cálculo da média dos quadrados dos resíduos (erros de ajuste do modelo (MQE)). Esta subtração deve-se ao número de restrições colocadas pela estimativa dos coeficientes do modelo. Por isso, vem a Tabela 3.5. O valor da estatística de teste F , possibilita deduzir sobre a significância do modelo de regressão linear múltipla.

Tabela 3.5 – Tabela ANOVA

Fonte de variação	SQ	gl	MQ	Estatística de teste F
Regressão	SSR	$k - 1$	MQR	$\frac{MQR}{MQE}$
Erro	SSE	$n - k$	MQE	—
Total	SST	$n - 1$	—	—

Por um teste de hipóteses, conhecido por teste de Snedecor ($F - test$), avalia a hipótese nula H_0 : o modelo não é significativo contra a hipótese alternativa H_1 : o modelo é significativo. Este teste refere-se ao modelo no seu global e não num coeficiente em concreto.

$$\begin{aligned}
 H_0: \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_{k-1} = \beta_k = 0 \\
 vs \\
 H_1: \exists \beta_j \neq 0
 \end{aligned} \quad (49)$$

A estatística de teste ($F - Snedecor$) é apresentada pela equação:

$$F = \frac{MQR}{MQE} \sim F_{(k-1; n-k)} \quad (50)$$

O ($p - value$) do teste ($F - Snedecor$) conseguido corresponde ao valor de significância (α) a partir do qual se rejeita a hipótese nula, neste caso, rejeitar H_0 exprime que o modelo é significativo. Com isto, sabe-se que existe pelo menos um coeficiente significativo, portanto, pelo menos uma das variáveis independentes é significativa na explicação da variabilidade de Y.

3.4.2 Coeficiente de Determinação

Para avaliar a qualidade do ajustamento do modelo, é feito através do coeficiente de determinação amostral R^2 . Este coeficiente calcula a percentagem de variabilidade de Y que é explicada pelo modelo (PEDROSA, 2018). O valor deste coeficiente varia entre 0 e 1, sendo 1 para uma explicação perfeita e 0 para o caso em que a correlação linear entre variáveis não se verifica.

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} = \frac{SST - SSE}{SST} = \frac{SST}{SST} - \frac{SSE}{SST} = 1 - \frac{SSE}{SST} \quad (51)$$

No entanto, o valor de R^2 varia dependendo na aplicação. Em engenharia, por norma $R^2 > 0,8$ é usualmente validada como indicador de um bom ajustamento (MONTGOMERY & RUNGER, 2003). O valor do coeficiente de determinação R^2 pode ser afetado pelo número de variáveis independentes dentro do modelo de regressão. Por norma, quanto maior o número de variáveis, maior é a explicação da variável dependente, por isso, maior será o coeficiente de determinação. Consequentemente, na regressão linear múltipla, geralmente analisa-se o coeficiente de determinação corrigido:

$$R_{corr}^2 = 1 - \frac{MQE}{SST * \frac{1}{n-1}} = R^2 - \frac{k(1 - R^2)}{n - k - 1} \quad (52)$$

O coeficiente de determinação corrigido (R_{corr}^2) só altera com a adição de variáveis caso haja um melhor ajustamento do modelo aos dados da amostra.

3.4.3 Teste à Significância individual dos Coeficientes do Modelo

A ANOVA expõe conclusões acerca da significância do modelo como um todo. Para avaliar de forma quantitativa a significância individual de cada coeficiente de declive parcial, e de seguida determinar qual ou quais as variáveis independentes mais significativas na variabilidade da variável dependente, tem de se proceder ao teste de hipóteses da Eq. (53), de forma independente para cada coeficiente. Este teste é conhecido como o teste de Student (*t – student*).

$$\begin{aligned} H_0: \beta_j &= 0 \\ vs \\ H_1: \beta_j &\neq 0 \end{aligned} \tag{53}$$

O teste (*t – student*) é apresentado na equação:

$$\frac{\beta_j}{\sqrt{MQE * C_{ii}}} \sim t_{(n-k)} \tag{54}$$

Onde C_{ii} correspondente ao elemento i da diagonal da matriz $(X^t X)^{-1}$. O p-value do teste t indica o valor de significância a partir do qual se rejeita a hipótese nula H_0 (usualmente se este é menor de 0,05). Esta rejeição leva à aceitação da hipótese alternativa, ou seja, o coeficiente B_j em estudo é significativo na explicação da variabilidade de Y e, por consequência a variável X_j deve fazer parte do modelo (MONTGOMERY & RUNGER, 2003).

4. Casos de Estudo

Os casos de estudo deste capítulo têm como objetivo, numa primeira parte o estudo de um perfil de secção aberta simétrica à torção livre, numa segunda parte o estudo com um perfil de secção igualmente aberta, mas antissimétrica solicitada com uma carga à torção livre, na terceira parte deste capítulo será o estudo de um perfil de secção fechada duplamente simétrica com uma carga igualmente de torção aplicada no perfil.

Na quarta parte deste capítulo é apresentado um estudo sobre a variabilidade deste tipo de material, demonstrando que determinados parâmetros de entrada dos modelos têm maior influência na caracterização do material. Utilizando ferramentas estatísticas, é apresentado um modelo probabilístico que relaciona os parâmetros de entrada do modelo aos seus parâmetros de saída.

4.1 Simulação e obtenção de amostra

Para dar início aos casos de estudo, é necessário criar uma amostra para cada variável de entrada. Decidiu-se que seria suficiente uma amostra de sessenta números aleatórios pelo método Monte Carlo, gerada recorrendo ao software Excel. Para a simulação da amostra deve-se escolher um tipo de distribuição. Usaram-se as distribuições gaussiana e uniforme, para as variáveis de entrada que são a espessura (t), comprimento do laminado de cada elemento da estrutura em estudo (b_1 , b_2 , b_3), e o ângulo das fibras no empilhamento dos laminados (θ).

As três estruturas têm sempre pelo menos dois elementos diferentes com comprimentos, e espessuras diferentes (ver Figura 3.16). Os dois primeiros perfis em estudo, que são os perfis simétricas e antissimétricas de secções abertas, são compostas por três elementos, dois elementos mais conhecido por banzos, e um elemento mais conhecido por alma. O comprimento da alma é sempre maior que as dos banzos. O terceiro perfil, de secção fechada duplamente simétrica, é constituído por quatro elementos, de tipo retangular, com os comprimentos laterais menores.

Portanto, teremos nas variáveis de entrada um comprimento que designamos por comprimento mínimo, que são aos banzos dos perfis, e um comprimento máximo que são as almas.

Em relação à espessura, esta terá um máximo de 15mm, mais que isso não fará muito sentido economicamente. A espessura das fibras unidirecionais são de 0,125mm, esta é a que será usada no estudo deste trabalho.

A variável de entrada do ângulo da fibra irá variar entre -90° a 90° , isto porque não fará sentido repetir os estudos para ângulos que resultam na mesma direção, mas com sentidos opostos. Como foi dito anteriormente, os laminados serão compostos por camadas com fibras orientadas na mesma direção para facilitar a análise.

Na distribuição uniforme é necessário escolher um limite inferior e superior, enquanto na distribuição normal será necessário um valor médio e um desvio padrão. A tabela seguinte representa todos estes valores considerados para cada parâmetro de entrada.

Tabela 4.1 – Parâmetros para geração de uma amostra de número aleatórios

Parâmetros de Entrada	Distribuição Uniforme		Distribuição Normal	
	Limite inferior	Limite superior	Valor médio	Desvio Padrão
Ângulo	-90°	90°	0°	$22,5^\circ$
Espessura	0,125mm	15mm	7,562mm	1,859mm
Comp. Mínimo	40mm	100mm	70mm	7,5mm
Comp. Máximo	100mm	300mm	200mm	25mm

As tabelas seguintes são os valores obtidos com distribuição normal e uniforme respectivamente, para a resolução dos problemas para os três casos de estudo.

Tabela 4.2 – Amostra de números aleatória obtida com uma distribuição normal

Ângulo [°]	Espessura [mm]	Comprimento min. [mm]	Comprimento max. [mm]
-2,18506	4,153	59,213	162,657
22,1946	5,892	82,408	149,547
-11,2029	8,749	74,158	185,231
-3,70264	6,426	73,921	230,47
30,3713	10,497	62,184	181,174
-51,0801	4,769	68,039	186,128
-8,59457	10,381	77,119	206,979
-17,651	5,473	72,106	193,662
-35,7339	4,906	74,194	194,7
-1,74621	6,752	70,555	220,068
-17,3436	8,649	77,007	175,944
-24,6945	6,542	77,979	217,192
39,10416	6,375	55,188	211,459
-38,9492	5,268	63,394	222,203
23,99601	6,988	76,989	190,581
4,052029	7,045	72,28	194,092
-6,03117	8,143	67,294	175,06
-20,1267	7,2	71,629	226,098
-36,2599	5,529	71,943	190,78
-22,2226	6,769	78,088	186,742
27,5727	5,749	69,655	136,126
-1,06498	7,897	90,398	166,663
-31,5237	8,352	61,015	186,242
3,369797	10,373	77,568	204,683
5,524157	7,596	73,493	221,957
8,295393	4,481	76,136	173,475
17,45271	10,219	57,15	207,746
16,62046	7,431	72,835	195,885
-5,70173	9,121	78,919	213,529
20,97563	10,228	63,885	236,466

Tabela 4.3 – Amostra de números aleatória obtida com uma distribuição uniforme

Ângulo [°]	Espessura [mm]	Comprimento min. [mm]	Comprimento max. [mm]
31	1,623	42,001	210,953
-72	13,853	51,07	172,151
79	4,203	84,307	114,88
67	10,449	56,243	182,229
44	11,003	96,57	270
-3	1,232	43,989	107,892
9	2,278	96,118	278,801
75	11,151	47,835	247,715
-16	10,668	44,596	189,736
53	7,528	59,896	236,429
17	10,082	83,241	120,96
-51	3,106	57,505	164,918
-55	14,763	55,701	126,203
4	6,929	46,518	105,383
63	3,107	62,731	251,268
-71	1,215	63,43	245,652
1	13,137	77,361	219,437
24	8,054	65,371	168,184
-33	13,582	48,23	188,882
1	9,734	60,09	194,235
-9	10,021	49,887	271,068
54	14,13	74,296	176,302
7	6,354	79,881	110,321
-7	9,72	96,085	288,25
-43	11,505	70,444	126,917
30	2,952	42,924	256,37
-79	7,806	95,413	143,22
3	5,533	68,327	122,235
-25	14,299	87,953	171,047
-32	7,053	95,457	253,251

4.2 Perfil simétrico de secção aberta

Antes de iniciar o estudo deste perfil simétrico de secção aberta, devemos primeiro obter as propriedades mecânicas do laminado. Para tal, necessitamos das propriedades da fibra de carbono unidirecional. A tabela seguinte apresenta as propriedades da fibra usada neste trabalho.

Tabela 4.4 – Propriedades da fibra de carbono usada neste trabalho

E1 [GPa]	E2 [GPa]	v12	v21	G12 [GPa]
1,40E+11	1,00E+10	0,3	0,3	5,00E+09

Estes cálculos para as propriedades serão repetidos sessenta vezes, porque temos 30 ângulos diferentes obtidos com a geração de números aleatórios com as distribuições uniforme e normal.

Após a obtenção das propriedades da fibra, pode-se adquirir os coeficientes de rigidez elástica reduzidos (ver Eq. (2) a Eq. (5)).

Tabela 4.5 – Coeficientes de rigidez elástica reduzidos da fibra de carbono utilizada

Q11	Q12	Q22	Q66	Q11
1,53846E+11	3296703297	10989010989	5000000000	1,53846E+11

Com os coeficientes de rigidez elástica obtidos, deve-se escolher o empilhamento do laminado, neste trabalho para facilitar a análise dos dados com as ferramentas estatísticas, decidiu-se ter laminados unidirecionais, ou seja, todas as camadas terão a mesma orientação da fibra. Num contexto prático não seria possível, devido ao tipo de fibra unidirecional, esta necessita sempre um reforço de tipo tecido para esta não colapsar. Para um exemplo de cálculo de um laminado escolheu-se um ângulo de 30°, com oito camadas.

Agora é necessário calcular os coeficientes de rigidez elástica reduzidos transformados, isto é, passar do referencial de cada camada para um referencial global do laminado (Ver Figura 3.14).

As Eq.) a Eq. (11) são usadas para estes cálculos, e a tabela seguinte tem os resultados obtidos para então um laminado de 8 camadas com fibras orientadas a 30°. Como as fibras são todas orientadas na mesma direção, o número de camadas não tem qualquer significado, porque o módulo de elástico e de corte serão iguais perante o número de camadas.

Tabela 4.6 - Coeficientes de rigidez elástica reduzidos transformados

θ	$Sen \theta$	$cos \theta$	\overline{Q}_{11}	\overline{Q}_{12}	\overline{Q}_{22}	\overline{Q}_{16}	\overline{Q}_{26}	\overline{Q}_{66}
30°	0,5	0,866	9,22E+10	2,92E+10	2,08E+10	4,59E+10	1,60E+10	3,09E+10

Por fim, de modo a quantificar a rigidez do laminado para assim calcular as propriedades mecânicas do laminado, são obtidas as matrizes A, B e D (Eq. (12)), a tabela seguinte ilustra os resultados obtidos. Para usar as matrizes devemos então criar um referencial específico das camadas (Figura 3.15), a Tabela 4.8 ilustra o referencial das camadas do laminado para o cálculo das matrizes.

Tabela 4.7 – Matrizes A e D para um laminado de 8 camadas a 30°

Matriz A					
A_{11}	A_{12}	A_{22}	A_{16}	A_{26}	A_{66}
92211538,46	29217032,97	20782967,03	45894588,02	15964369,39	30920329,67
Matriz D					
D_{11}	D_{12}	D_{22}	D_{16}	D_{26}	D_{66}
7,684294872	2,434752747	1,731913919	3,824549002	1,330364116	2,576694139

Tabela 4.8 - Referencial para as camadas do laminado

z0	z1	z2	z3	z4	z5	z6	z7	z8
0,0005	0,000375	0,00025	0,000125	0	-0,000125	-0,00025	-0,000375	-0,0005

Por fim, após a obtenção das matrizes A e D, pode se determinar as constantes elásticas equivalentes do laminado (Ver a Tabela 3.4). Serão também necessário as Eq. (15) a Eq. (20), para complementar os cálculos. As tabelas seguintes são então os cálculos intermediário (membranas de deformações e flexões) e as constantes de elasticidade equivalente do laminado obtidas, respetivamente.

Tabela 4.9 – Cálculos das membranas de deformações e flexões

AA	DD	a_{11}	a_{22}	a_{33}	d_{33}	$t_{laminado}$
1,06279E+15	4,860384325	1,9555E-08	8,67633E-08	3,23412E-08	1,518504673	1

Tabela 4.10 – Constantes elásticas equivalentes do laminado com 8 camadas a 30°

$E_x \left[\frac{kN}{mm^2} \right]$	$E_y \left[\frac{kN}{mm^2} \right]$	$G_{xy}^m \left[\frac{kN}{mm^2} \right]$	$G_{xy}^b \left[\frac{kN}{mm^2} \right]$
51137,75847	11525,61129	30920,32967	7902,511078

Este processo é repetido cada vez que o laminado tem um ângulo diferente, e não camadas, porque estas estão todas orientadas na mesma direção para facilitar a análise com ferramentas estatísticas. A tabela seguinte são as propriedades calculadas para cada ângulo, para a distribuição normal, foi feito a mesma operação para a distribuição uniforme.

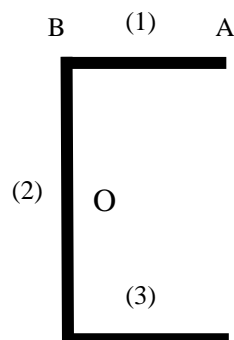
Tabela 4.11 – Propriedades elásticas para cada ângulo numa distribuição normal

θ	$E_x \left[\frac{kN}{mm^2} \right]$	$E_y \left[\frac{kN}{mm^2} \right]$	$G_{xy}^m \left[\frac{kN}{mm^2} \right]$	$G_{xy}^b \left[\frac{kN}{mm^2} \right]$
-2,18506	152325,5	10916,3	5200,667	5014,258
22,1946	88311,66	10958,61	21911,81	6575,828
-11,2029	137342,4	10877,83	10021,16	5382,998
-3,70264	151315,5	10912,53	5574,112	5041,009
30,3713	49693,22	11575,59	31305,31	7971,237
-51,0801	13868,53	26019,94	38026,94	9398,32
-8,59457	144064,2	10890,91	8018,378	5223,406
-17,651	111670,9	10877,42	16541,55	5977,595
-35,7339	32823,1	12697,21	36069,12	8932,524
-1,74621	152518,2	10917,04	5128,248	5009,103
-17,3436	113149,5	10875,28	16193,08	5942,515
-24,6945	75326,69	11061,82	24917,28	6965,988
39,10416	25688,78	13952,04	38117,18	9420,962
-38,9492	25966,8	13881,7	38041,48	9401,962
23,99601	78898,61	11027,4	24081,71	6852,946
4,052029	151005,5	10911,41	5686,817	5049,139
-6,03117	148670,8	10903,6	6509,285	5109,269
-20,1267	99178,33	10908,31	19430,18	6285,157
-36,2599	31550,26	12858,66	36442,21	9017,692

Tabela 4.11 – Propriedades elásticas para cada angulo numa distribuição normal
(continuação)

θ	$E_x \left[\frac{kN}{mm^2} \right]$	$E_y \left[\frac{kN}{mm^2} \right]$	$G_{xy}^m \left[\frac{kN}{mm^2} \right]$	$G_{xy}^b \left[\frac{kN}{mm^2} \right]$
-22,2226	88163,91	10959,48	21945,63	6579,975
27,5727	61440,2	11261,95	28272,74	7460,164
-1,06498	152731,4	10917,87	5047,739	5003,385
-31,5237	45440,75	11749,79	32460,36	8184,804
3,369797	151583,4	10913,51	5475,99	5033,953
5,524157	149365,3	10905,82	6269,219	5091,571
8,295393	144700,3	10892,47	7817,706	5207,936
17,45271	112626,9	10876	16316,46	5954,888
16,62046	116545,8	10871,45	15384,72	5862,703
-5,70173	149129,8	10905,06	6351,031	5097,588
20,97563	94735,8	10925,78	20444,71	6400,825

Com as propriedades mecânicas do laminado, pode-se agora realizar o estudo da secção em questão (Figura 4.1). É então aplicado uma torção livre no ponto O da estrutura.



Secção aberta Simétrica

Figura 4.1 – Primeiro caso de estudo (Secção aberta simétrica)

As variáveis de entrada para esta secção estão na tabela seguinte, e foram obtidas a partir da geração de números aleatórios pelo método de Monte Carlo. As variáveis de entrada são:

- Torque (T - Torção Livre)
- Espessura (t)
- Comprimento dos banzos (b1 e b3)
- Comprimento da alma (b2)

Tabela 4.12 – Variáveis de entrada para o caso de estudo 1 (Distribuição normal)

T [N mm]	t [mm]	b1 [mm]	b2 [mm]	b3 [mm]
1000	4,153	59,213	162,657	59,213
1000	5,892	82,408	149,547	82,408
1000	8,749	74,158	185,231	74,158
1000	6,426	73,921	230,47	73,921
1000	10,497	62,184	181,174	62,184
1000	4,769	68,039	186,128	68,039
1000	10,381	77,119	206,979	77,119
1000	5,473	72,106	193,662	72,106
1000	4,906	74,194	194,7	74,194
1000	6,752	70,555	220,068	70,555
1000	8,649	77,007	175,944	77,007
1000	6,542	77,979	217,192	77,979
1000	6,375	55,188	211,459	55,188
1000	5,268	63,394	222,203	63,394
1000	6,988	76,989	190,581	76,989
1000	7,045	72,28	194,092	72,28
1000	8,143	67,294	175,06	67,294
1000	7,2	71,629	226,098	71,629
1000	5,529	71,943	190,78	71,943
1000	6,769	78,088	186,742	78,088
1000	5,749	69,655	136,126	69,655
1000	7,897	90,398	166,663	90,398
1000	8,352	61,015	186,242	61,015
1000	10,373	77,568	204,683	77,568
1000	7,596	73,493	221,957	73,493
1000	4,481	76,136	173,475	76,136
1000	10,219	57,15	207,746	57,15
1000	7,431	72,835	195,885	72,835
1000	9,121	78,919	213,529	78,919
1000	10,228	63,885	236,466	63,885

O primeiro passo para realizar a análise deste perfil é determinar a rigidez torsional da secção, como foi definido na Eq. (22). Substituindo os valores da equação com os das tabelas anteriores, obtém-se as rigidezes torsionais (GJ [N mm²]).

Pode-se agora determinar o ângulo de torção unitário a partir da Eq. (23), em que o torque submetido na estrutura é dividido pela rigidez torsional calculada anteriormente.

De seguida, é necessário obter a tensão de corte máxima. Esta é determinada a partir da Eq. (24). Esta será igual para todos os elementos porque o laminado é idêntico para toda a estrutura, o que resulta num módulo de corte constante e por fim, uma tensão de corte igualmente constante.

Por conseguinte, calcula-se o módulo de elasticidade médio de secção Eq. (28), para isso deve-se recorrer à Eq. (27).

Observe-se que as configurações do laminado em todos os elementos são as mesmas, então o valor $E_{médio}$ seria naturalmente o mesmo. Além disso, como o $E_{médio}$ é o mesmo que o valor do módulo de elasticidade para todos os elementos, então a espessura equivalente t^* conforme definida pela Eq. (26) será a mesma espessura (t).

O passo seguinte será o cálculo da coordenada sectorial. É necessário observar a Figura 3.20 para poder retirar a fórmula adequada para a secção em estudo, com isto, e tendo em conta as considerações concluídas anteriormente, pode se igualmente calcular a coordenada de deslocamento nulo.

Finalmente, conhecendo os valores das coordenadas setoriais da secção e o ângulo de torção unitário, os deslocamentos podem então ser determinados pela Eq.). A tabela seguinte tem o valor de deslocamento para a posição A e B do perfil, como este é simétrico, os resultados serão iguais para o outro banzo. O resultado dos deslocamentos está esquematizado na (Figura 4.2)

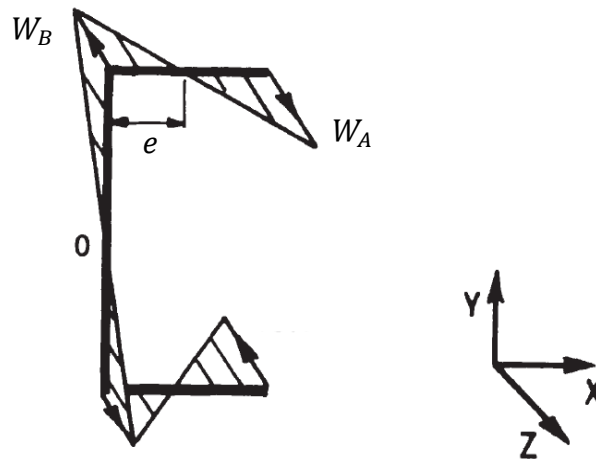


Figura 4.2- Resultado dos deslocamentos

Com os deslocamentos determinados, a estrutura fica finalizada em termos de análise na área da mecânica dos materiais, faltará interpretar os resultados obtidos para tentar estabelecer uma equação para a regressão linear múltipla, para assim, dominar os pesos das variáveis de entrada destes tipos de problema. A tabela seguinte sintetiza toda os resultados obtidos neste subcapítulo do perfil da secção aberta simétrica.

Tabela 4.13 – Resumo dos resultados obtidos para o caso de estudo 1

INPUTS				OUPUTS							
θ [°]	t [mm]	b_1 [mm]	b_2 [mm]	G_{xy}^b [kN/mm ²]	E_x [kN/mm ²]	GJ [N mm ²]	Ângulo de torção unitário [Rad/mm]	f_{xy} [N/mm ²]	e [mm]	W_B [mm]	W_A [mm]
-2,19	4,15	59,21	162,66	5,01E+03	1,52E+05	3,37E+07	2,97E-05	0,62	20,31	-0,05	0,09
22,19	5,89	82,41	149,55	6,58E+03	8,83E+04	1,41E+08	7,09E-06	0,27	31,64	-0,02	0,03
-11,20	8,75	74,16	185,23	5,38E+03	1,37E+05	4,01E+08	2,49E-06	0,12	26,18	-0,01	0,01
-3,70	6,43	73,92	230,47	5,04E+03	1,51E+05	1,69E+08	5,93E-06	0,19	24,32	-0,02	0,03
30,37	10,50	62,18	181,17	7,97E+03	4,97E+04	9,39E+08	1,06E-06	0,09	20,93	0,00	0,00
-51,08	4,77	68,04	186,13	9,40E+03	1,39E+04	1,09E+08	9,13E-06	0,41	23,37	-0,02	0,04
-8,59	10,38	77,12	206,98	5,22E+03	1,44E+05	7,04E+08	1,42E-06	0,08	26,64	0,00	0,01
-17,65	5,47	72,11	193,66	5,98E+03	1,12E+05	1,10E+08	9,06E-06	0,30	24,90	-0,02	0,04
-35,73	4,91	74,19	194,70	8,93E+03	3,28E+04	1,21E+08	8,29E-06	0,36	25,81	-0,02	0,04
-1,75	6,75	70,56	220,07	5,01E+03	1,53E+05	1,86E+08	5,39E-06	0,18	23,21	-0,01	0,03
-17,34	8,65	77,01	175,94	5,94E+03	1,13E+05	4,23E+08	2,36E-06	0,12	27,88	-0,01	0,01
-24,69	6,54	77,98	217,19	6,97E+03	7,53E+04	2,43E+08	4,12E-06	0,19	26,63	-0,01	0,02
39,10	6,38	55,19	211,46	9,42E+03	2,57E+04	2,62E+08	3,82E-06	0,23	16,84	-0,01	0,02

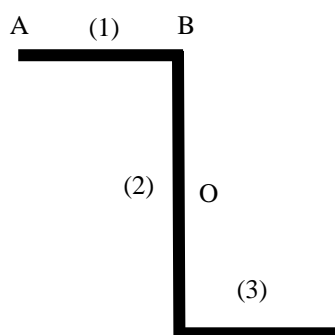
Tabela 4.13 – Resumo dos resultados obtidos para o caso de estudo 1 (Continuação)

INPUTS				OUPUTS							
θ [°]	t [mm]	b_1 [mm]	b_2 [mm]	G_{xy}^b [kN/mm ²]	E_x [kN/mm ²]	GJ [N mm ²]	Ângulo de torção unitário [Rad/mm]	f_{xy} [N/mm ²]	e [mm]	W_B [mm]	W_A [mm]
39,10	6,38	55,19	211,46	9,42E+03	2,57E+04	2,62E+08	3,82E-06	0,23	16,84	-0,01	0,02
-38,95	5,27	63,39	222,20	9,40E+03	2,60E+04	1,60E+08	6,25E-06	0,31	20,01	-0,01	0,03
24,00	6,99	76,99	190,58	6,85E+03	7,89E+04	2,69E+08	3,72E-06	0,18	27,25	-0,01	0,02
4,05	7,05	72,28	194,09	5,05E+03	1,51E+05	1,99E+08	5,02E-06	0,18	24,97	-0,01	0,02
-6,03	8,14	67,29	175,06	5,11E+03	1,49E+05	2,85E+08	3,51E-06	0,15	23,47	-0,01	0,01
-20,13	7,20	71,63	226,10	6,29E+03	9,92E+04	2,89E+08	3,46E-06	0,16	23,47	-0,01	0,02
-36,26	5,53	71,94	190,78	9,02E+03	3,16E+04	1,70E+08	5,88E-06	0,29	24,95	-0,01	0,03
-22,22	6,77	78,09	186,74	6,58E+03	8,82E+04	2,33E+08	4,29E-06	0,19	27,92	-0,01	0,02
27,57	5,75	69,66	136,13	7,46E+03	6,14E+04	1,30E+08	7,68E-06	0,33	26,27	-0,01	0,02
-1,06	7,90	90,40	166,66	5,00E+03	1,53E+05	2,85E+08	3,50E-06	0,14	34,57	-0,01	0,02
-31,52	8,35	61,02	186,24	8,18E+03	4,54E+04	4,90E+08	2,04E-06	0,14	20,22	0,00	0,01
3,37	10,37	77,57	204,68	5,03E+03	1,52E+05	6,74E+08	1,48E-06	0,08	26,94	0,00	0,01
5,52	7,60	73,49	221,96	5,09E+03	1,49E+05	2,74E+08	3,64E-06	0,14	24,44	-0,01	0,02
8,30	4,48	76,14	173,48	5,21E+03	1,45E+05	5,09E+07	1,97E-05	0,46	27,59	-0,05	0,08
17,45	10,22	57,15	207,75	5,95E+03	1,13E+05	6,82E+08	1,47E-06	0,09	17,79	0,00	0,01
16,62	7,43	72,84	195,89	5,86E+03	1,17E+05	2,74E+08	3,65E-06	0,16	25,15	-0,01	0,02
-5,70	9,12	78,92	213,53	5,10E+03	1,49E+05	4,79E+08	2,09E-06	0,10	27,20	-0,01	0,01
20,98	10,23	63,89	236,47	6,40E+03	9,47E+04	8,32E+08	1,20E-06	0,08	19,76	0,00	0,01

4.3 Perfil antissimétrica de secção aberta

Este segundo caso de estudo (Figura 4.3) alguma semelhança com o primeiro caso de estudo analisado anteriormente, mas este tem uma secção antissimétrica, com uma espessura diferente dos elementos (banzos) para o elemento (alma) da estrutura. Neste caso continuamos a aplicar a torção livre no ponto O.

As propriedades elásticas do laminado mantêm-se para cada elemento, mesmo tendo espessura diferentes, isto porque o empilhamento é unidirecional o que implica valores constante de modulo de elasticidade e de corte, mesmo alterando a espessura. Portanto, a Tabela 4.10 é igualmente usada nesta nova análise.



Secção aberta Antissimétrica

Figura 4.3 – Segundo caso de estudo (Secção aberta Antissimétrica)

A sequência de cálculo é idêntica ao caso de estudo 1, apenas irá existir duas tensões de corte diferentes, por esta depender da espessura.

As variáveis de entrada para esta secção estão na tabela seguinte, e foram igualmente obtidas a partir da geração de números aleatórios pelo método de Monte Carlo. As variáveis de entrada são:

- Torque (Torção livre)
- Espessura (t1 e t2)
- Comprimento dos banzos (b1 e b3)
- Comprimento da alma (b2)

Tabela 4.14 – Variáveis de entrada para o caso de estudo 2 (Distribuição normal)

T [N mm]	t1 [mm]	t2 [mm]	b1 [mm]	b2 [mm]
1000	4,15	2,08	59,21	162,66
1000	5,89	2,95	82,41	149,55
1000	8,75	4,37	74,16	185,23
1000	6,43	3,21	73,92	230,47
1000	10,50	5,25	62,18	181,17
1000	4,77	2,38	68,04	186,13
1000	10,38	5,19	77,12	206,98
1000	5,47	2,74	72,11	193,66
1000	4,91	2,45	74,19	194,70

Tabela 4.14 – Variáveis de entrada para o caso de estudo 2 (Distribuição normal)

(Continuação)

T [N mm]	t1 [mm]	t2 [mm]	b1 [mm]	b2 [mm]
1000	6,75	3,38	70,56	220,07
1000	8,65	4,32	77,01	175,94
1000	6,54	3,27	77,98	217,19
1000	6,38	3,19	55,19	211,46
1000	5,27	2,63	63,39	222,20
1000	6,99	3,49	76,99	190,58
1000	7,05	3,52	72,28	194,09
1000	8,14	4,07	67,29	175,06
1000	7,20	3,60	71,63	226,10
1000	5,53	2,76	71,94	190,78
1000	6,77	3,38	78,09	186,74
1000	5,75	2,87	69,66	136,13
1000	7,90	3,95	90,40	166,66
1000	8,35	4,18	61,02	186,24
1000	10,37	5,19	77,57	204,68
1000	7,60	3,80	73,49	221,96
1000	4,48	2,24	76,14	173,48
1000	10,22	5,11	57,15	207,75
1000	7,43	3,72	72,84	195,89
1000	9,12	4,56	78,92	213,53
1000	10,23	5,11	63,89	236,47

Agora pode-se determinar a rigidez torsional da secção, como foi definido na Eq. (22). Substituindo os valores da equação, com os da tabela das propriedades elásticas do laminado, e da tabela das variáveis de entrada, obtém-se as rigidezes torsionais

Pode-se agora determinar o ângulo de torção unitário a partir da Eq. (23), em que o torque submetido na estrutura é dividido pela rigidez torsional calculada anteriormente.

De seguida, é necessário obter as tensões de corte máximas, estas são determinadas a partir da Eq. (24), esta são distintas devido à espessura dos elementos da alma e dos banzos serem diferentes.

Por conseguinte, calcula-se o módulo de elasticidade médio de secção Eq. (28), para isso deve-se recorrer à Eq. (27). Com isto, obtemos a tabela seguinte com todos os resultados para cada ângulo, espessura e comprimentos obtidos na geração de números aleatórios.

Como todos os elementos têm o mesmo módulo de elasticidade, o módulo de elasticidade médio da estrutura não altera.

Observe-se que as configurações do laminado em todos os elementos são as mesmas, então o valor $E_{médio}$ seria naturalmente o mesmo. Além disso, como o $E_{médio}$ é o mesmo que o valor do módulo de elasticidade para todos os elementos, então a espessura equivalente t^* conforme definida pela Eq. (26) será a mesma espessura (t).

Para o cálculo da coordenada onde o deslocamento é nulo e a coordenada sectorial, é necessário observar a Figura 3.20 para poder retirar a fórmula adequada para a secção em estudo, com isto, e tendo em conta as considerações concluídas anteriormente, pode se igualmente calcular a coordenada de deslocamento nulo.

Finalmente, conhecendo os valores das coordenadas setoriais da secção e o ângulo de torção unitário, os deslocamentos podem então ser determinados pela Eq. (29). A tabela seguinte tem o valor de deslocamento para a posição A e B do perfil, como este é simétrico, os resultados serão iguais para o outro banzo. O resultado dos deslocamentos está esquematizado na Figura 4.4.

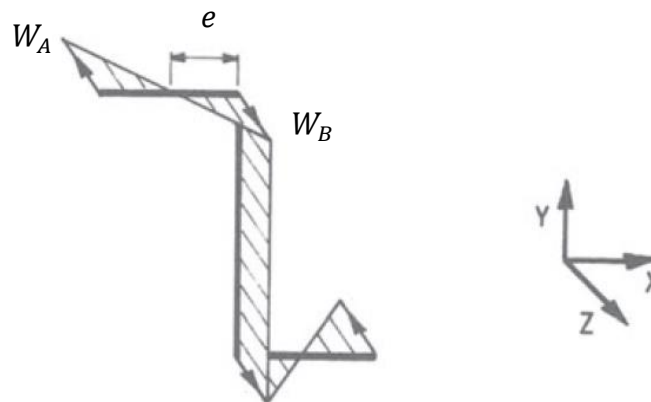


Figura 4.4 – Esquematização dos deslocamentos obtidos nesta secção

Com os deslocamentos determinados, a estrutura fica finalizada em termos de análise na área da mecânica dos materiais, faltará interpretar os resultados obtidos para tentar estabelecer uma equação para a regressão linear múltipla, para assim, dominar os pesos das variáveis de entrada destes tipos de problema. A tabela seguinte sintetiza todos os resultados obtidos neste subcapítulo do perfil da secção aberta antissimétrica.

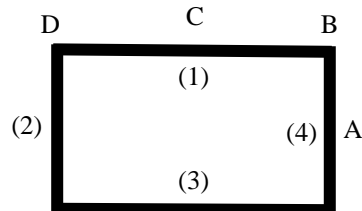
Tabela 4.15 – Resumo dos resultados obtidos para o caso de estudo 2

input					output							
θ [°]	t_1 [mm]	t_2 [mm]	b_1 [mm]	b_2 [mm]	GJ [N mm ²]	Ângulo de torção unitário [Rad/mm]	f_{xy_1} [N/mm ²]	f_{xy_2} [N/mm ²]	$E_{médio}$	e [mm]	W_A [mm]	W_B [mm]
-2,19	4,15	2,08	59,21	162,66	1,66E+07	6,02E-05	1,25	0,63	1,52E+05	20,82	-0,23	0,13
22,19	5,89	2,95	82,41	149,55	8,23E+07	1,22E-05	0,47	0,24	8,83E+04	31,61	-0,06	0,04
-11,20	8,75	4,37	74,16	185,23	2,06E+08	4,85E-06	0,23	0,11	1,37E+05	27,73	-0,02	0,01
-3,70	6,43	3,21	73,92	230,47	7,88E+07	1,27E-05	0,41	0,21	1,51E+05	27,62	-0,06	0,04
30,37	10,50	5,25	62,18	181,17	4,52E+08	2,21E-06	0,19	0,09	4,97E+04	22,18	-0,01	0,00
-51,08	4,77	2,38	68,04	186,13	5,41E+07	1,85E-05	0,83	0,41	1,39E+04	24,88	-0,08	0,05
-8,59	10,38	5,19	77,12	206,98	3,51E+08	2,85E-06	0,15	0,08	1,44E+05	29,12	-0,01	0,01
-17,65	5,47	2,74	72,11	193,66	5,50E+07	1,82E-05	0,59	0,30	1,12E+05	26,77	-0,08	0,05
-35,73	4,91	2,45	74,19	194,70	6,07E+07	1,65E-05	0,72	0,36	3,28E+04	27,75	-0,08	0,05
-1,75	6,75	3,38	70,56	220,07	8,67E+07	1,15E-05	0,39	0,20	1,53E+05	26,05	-0,05	0,03
-17,34	8,65	4,32	77,01	175,94	2,26E+08	4,43E-06	0,23	0,11	1,13E+05	29,07	-0,02	0,01
-24,69	6,54	3,27	77,98	217,19	1,19E+08	8,40E-06	0,38	0,19	7,53E+04	29,52	-0,04	0,02
39,10	6,38	3,19	55,19	211,46	1,11E+08	8,98E-06	0,54	0,27	2,57E+04	18,99	-0,03	0,02
-38,95	5,27	2,63	63,39	222,20	7,08E+07	1,41E-05	0,70	0,35	2,60E+04	22,73	-0,06	0,03
24,00	6,99	3,49	76,99	190,58	1,39E+08	7,22E-06	0,35	0,17	7,89E+04	29,06	-0,03	0,02
4,05	7,05	3,52	72,28	194,09	9,93E+07	1,01E-05	0,36	0,18	1,51E+05	26,85	-0,05	0,03
-6,03	8,14	4,07	67,29	175,06	1,44E+08	6,95E-06	0,29	0,14	1,49E+05	24,53	-0,03	0,02
-20,13	7,20	3,60	71,63	226,10	1,34E+08	7,46E-06	0,34	0,17	9,92E+04	26,55	-0,03	0,02
-36,26	5,53	2,76	71,94	190,78	8,52E+07	1,17E-05	0,59	0,29	3,16E+04	26,70	-0,05	0,03
-22,22	6,77	3,38	78,09	186,74	1,22E+08	8,19E-06	0,36	0,18	8,82E+04	29,58	-0,04	0,02
27,57	5,75	2,87	69,66	136,13	7,39E+07	1,35E-05	0,58	0,29	6,14E+04	25,63	-0,06	0,03
-1,06	7,90	3,95	90,40	166,66	1,66E+08	6,04E-06	0,24	0,12	1,53E+05	35,41	-0,03	0,02
-31,52	8,35	4,18	61,02	186,24	2,31E+08	4,33E-06	0,30	0,15	4,54E+04	21,64	-0,02	0,01
3,37	10,37	5,19	77,57	204,68	3,38E+08	2,95E-06	0,15	0,08	1,52E+05	29,33	-0,01	0,01
5,52	7,60	3,80	73,49	221,96	1,30E+08	7,69E-06	0,30	0,15	1,49E+05	27,42	-0,04	0,02
8,30	4,48	2,24	76,14	173,48	2,72E+07	3,68E-05	0,86	0,43	1,45E+05	28,66	-0,17	0,11
17,45	10,22	5,11	57,15	207,75	2,97E+08	3,37E-06	0,20	0,10	1,13E+05	19,88	-0,01	0,01
16,62	7,43	3,72	72,84	195,89	1,36E+08	7,33E-06	0,32	0,16	1,17E+05	27,11	-0,03	0,02
-5,70	9,12	4,56	78,92	213,53	2,38E+08	4,20E-06	0,20	0,10	1,49E+05	29,97	-0,02	0,01
20,98	10,23	5,11	63,89	236,47	3,59E+08	2,78E-06	0,18	0,09	9,47E+04	22,96	-0,01	0,01

4.4 Perfil duplamente simétrico de secção fechada

Por fim, o terceiro caso de estudo (Figura 4.5) é realizado num perfil de secção fechada, duplamente simétrico. A forma de analisar este tipo de estrutura é um pouco diferente da dos casos anteriores, mas mesmo assim não se diferencia assim tanto.

Um das diferenças para este tipo de secção é que desta vez iremos usar o módulo de corte com modo membrana, isto porque neste tipo de perfil, o fluxo de corte induzido devido à torção livre é constante ao longo da espessura do elemento (Figura 3.22). Portanto, para esta análise, usar-se-á a terceira coluna da Tabela 4.11, (G_{xy}^m).



Fechada duplamente simétrica

Figura 4.5 – Perfil do caso de estudo 3 (secção fechada duplamente simétrica)

Com as propriedades mecânicas do laminado, pode-se agora realizar o estudo da secção em questão. As variáveis de entrada para esta secção estão na tabela seguinte, e foram obtidas da mesma forma que os casos de estudos anteriores, a partir da geração de números aleatórios pelo método de Monte Carlo. As variáveis de entrada são:

- Torque (Torção livre)
- Espessura (t)
- Comprimento dos banzos (b1 e b3)
- Comprimento das almas (b2 e b4)

Tabela 4.16 – Variáveis de entrada para o caso de estudo 3 (Distribuição normal)

θ [°]	T [N mm]	t1 [mm]	t2[mm]	b1 [mm]	b2 [mm]
-2,19	1000	4,153	2,077	162,7	59,21
22,19	1000	5,892	2,946	149,5	82,41
-11,20	1000	8,749	4,375	185,2	74,16
-3,70	1000	6,426	3,213	230,5	73,92
30,37	1000	10,497	5,249	181,2	62,18
-51,08	1000	4,769	2,385	186,1	68,04
-8,59	1000	10,381	5,191	207	77,12
-17,65	1000	5,473	2,737	193,7	72,11

Tabela 4.16 – Variáveis de entrada para o caso de estudo 3 (Distribuição normal)

(Continuação)

θ [°]	T [N mm]	t1 [mm]	t2[mm]	b1 [mm]	b2 [mm]
-35,73	1000	4,906	2,453	194,7	74,19
-1,75	1000	6,752	3,376	220,1	70,56
-17,34	1000	8,649	4,325	175,9	77,01
-24,69	1000	6,542	3,271	217,2	77,98
39,10	1000	6,375	3,188	211,5	55,19
-38,95	1000	5,268	2,634	222,2	63,39
24,00	1000	6,988	3,494	190,6	76,99
4,05	1000	7,045	3,523	194,1	72,28
-6,03	1000	8,143	4,072	175,1	67,29
-20,13	1000	7,2	3,6	226,1	71,63
-36,26	1000	5,529	2,765	190,8	71,94
-22,22	1000	6,769	3,385	186,7	78,09
27,57	1000	5,749	2,875	136,1	69,66
-1,06	1000	7,897	3,949	166,7	90,4
-31,52	1000	8,352	4,176	186,2	61,02
3,37	1000	10,373	5,187	204,7	77,57
5,52	1000	7,596	3,798	222	73,49
8,30	1000	4,481	2,241	173,5	76,14
17,45	1000	10,219	5,11	207,7	57,15
16,62	1000	7,431	3,716	195,9	72,84
-5,70	1000	9,121	4,561	213,5	78,92
20,98	1000	10,228	5,114	236,5	63,89

Para iniciar esta análise, devemos primeiramente obter a área da secção, isto será feito com os valores b1 e b2 da tabela anterior. Com a área da secção obtida, pode se agora obter o fluxo de corte (q), para tal, é necessário o valor de torque aplicado na estrutura, e da área da secção. A tabela seguinte ilustra os resultados das áreas com o do fluxo de corte.

De seguida, pode se calcular a rigidez torsional da estrutura, com a Eq. (22), onde será necessário a área da secção e o modulo de corte com modo membrana.

Por fim, podemos finalizar o estudo obtendo as deslocções da estrutura nos pontos A, B, C e D (Figura 4.5). A obtenção das deslocções para este perfil de secção fechado duplamente simétrico é diferente dos dois primeiros casos de estudo. Com isto, devemos usar a Eq. (41), onde W_s é o valor de deslocamento em qualquer ponto s no elemento em questão, W_o é o valor de deformação na origem para s (em s = 0), A_s é a área delimitada

da linha de referência OA, onde s é nulo, até a linha OB, a uma distância s (mostrada sombreada na Figura 4.6, A é a área total do perfil da estrutura de secção fechada.

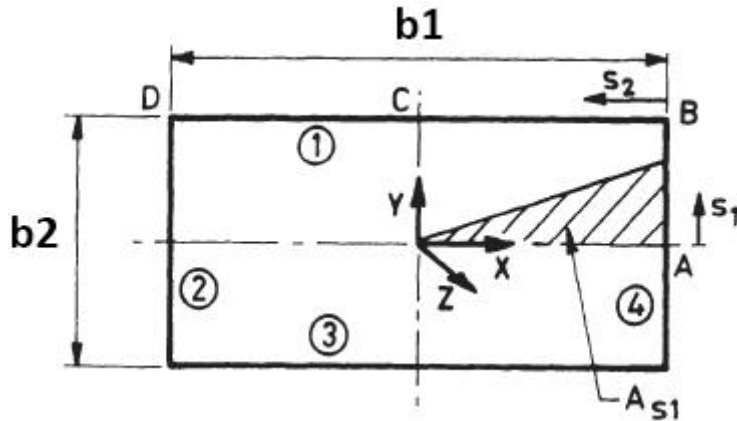


Figura 4.6 – Análise da secção do caso de estudo 3 (adaptado de (DATOO, 1991))

Como W_O é 0 na origem para s_1 , então W_A é nulo. Para a posição B, s_1 é metade de b_2 , obtemos então W_B .

Agora, o elemento 1 tem o s_2 variando de 0 a b_1 . Portanto, para o deslocamento no elemento 1, e lembrando de adicionar o deslocamento da origem para s_2 (W_B do elemento 4) determinado anteriormente, obtemos o W_B , que naturalmente tem de ser igual ao W_B do elemento 4.

Para o ponto C, como s_2 é igual a metade do b_1 , fazendo as contas usando a Eq. (41), conclui-se que W_C é nulo.

Na posição D, s_2 é igual a b_1 , substituindo na equação obtemos W_D , e este naturalmente será igual ao W_B , mas com sinal negativo.

A figura seguinte esquematiza qual é a previsão dos sentidos de deslocação quando a estrutura é carregada com uma torção livre no ponto O.

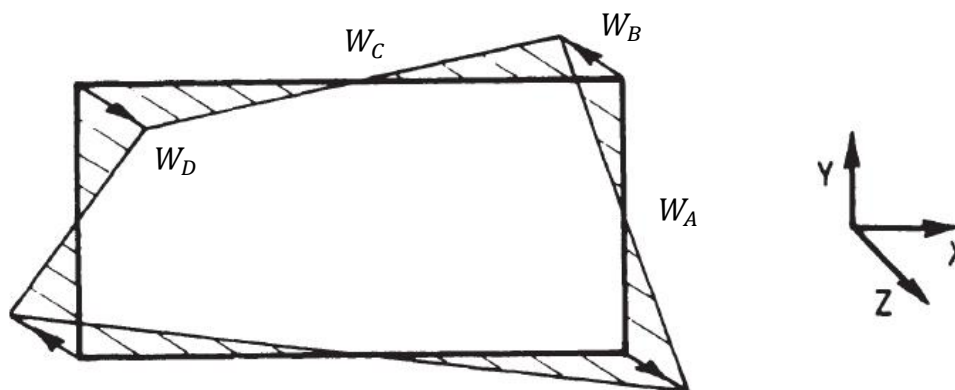


Figura 4.7 – Esquemática dos deslocamentos esperados numa secção fechada duplamente simétrica (adaptado de (DATOO, 1991))

A tabela seguinte sintetiza toda os resultados obtidos neste caso de estudo.

Tabela 4.17 – Resumo dos resultados obtidos para o caso de estudo 3

input						output					
θ [°]	T [N mm]	t1 [mm]	t2 [mm]	b1 [mm]	b2 [mm]	A [mm ²]	q [N/mm]	GJ [N mm ²]	WB [mm]	WB2 [mm]	WD [mm]
-2,19	1000	4,153	2,077	162,7	59,21	9631,409	0,05191	1,426E+10	-2,66E-05	-2,66E-05	2,66E-05
22,19	1000	5,892	2,946	149,5	82,41	12323,87	0,04057	1,247E+11	1,2E-06	1,2E-06	-1,2E-06
-11,20	1000	8,749	4,375	185,2	74,16	13736,36	0,0364	9,920E+10	-3,83E-06	-3,83E-06	3,83E-06
-3,70	1000	6,426	3,213	230,5	73,92	17036,57	0,02935	5,496E+10	-1,69E-05	-1,69E-05	1,69E-05
30,37	1000	10,497	5,249	181,2	62,18	11266,12	0,04438	2,730E+11	-1,92E-06	-1,92E-06	1,92E-06
-51,08	1000	4,769	2,385	186,1	68,04	12663,96	0,03948	1,805E+11	-2,72E-06	-2,72E-06	2,72E-06
-8,59	1000	10,381	5,191	207	77,12	15962,01	0,03132	1,174E+11	-4,96E-06	-4,96E-06	4,96E-06
-17,65	1000	5,473	2,737	193,7	72,11	13964,19	0,03581	1,045E+11	-4,89E-06	-4,89E-06	4,89E-06
-35,73	1000	4,906	2,453	194,7	74,19	14445,57	0,03461	2,153E+11	-2,26E-06	-2,26E-06	2,26E-06
-1,75	1000	6,752	3,376	220,1	70,56	15526,9	0,0322	4,623E+10	-1,84E-05	-1,84E-05	1,84E-05
-17,34	1000	8,649	4,325	175,9	77,01	13548,92	0,0369	1,558E+11	-1,44E-06	-1,44E-06	1,44E-06
-24,69	1000	6,542	3,271	217,2	77,98	16936,41	0,02952	2,506E+11	-2,77E-06	-2,77E-06	2,77E-06
39,10	1000	6,375	3,188	211,5	55,19	11670	0,04284	2,057E+11	-4,46E-06	-4,46E-06	4,46E-06
-38,95	1000	5,268	2,634	222,2	63,39	14086,34	0,0355	2,279E+11	-4,22E-06	-4,22E-06	4,22E-06
24,00	1000	6,988	3,494	190,6	76,99	14672,64	0,03408	2,103E+11	-1,85E-06	-1,85E-06	1,85E-06
4,05	1000	7,045	3,523	194,1	72,28	14028,97	0,03564	4,657E+10	-1,1E-05	-1,1E-05	1,1E-05
-6,03	1000	8,143	4,072	175,1	67,29	11780,49	0,04244	4,751E+10	-8,1E-06	-8,1E-06	8,1E-06
-20,13	1000	7,2	3,6	226,1	71,63	16195,17	0,03087	1,987E+11	-4,57E-06	-4,57E-06	4,57E-06
-36,26	1000	5,529	2,765	190,8	71,94	13725,29	0,03643	2,268E+11	-2,12E-06	-2,12E-06	2,12E-06
-22,22	1000	6,769	3,385	186,7	78,09	14582,31	0,03429	1,842E+11	-1,76E-06	-1,76E-06	1,76E-06

Tabela 4.17 – Resumo dos resultados obtidos para o caso de estudo 3 (Continuação)

input						output					
θ [°]	T [N mm]	t1 [mm]	t2 [mm]	b1 [mm]	b2 [mm]	A [mm ²]	q [N/mm]	GJ [N mm ²]	WB [mm]	WB2 [mm]	WD [mm]
27,57	1000	5,749	2,875	136,1	69,66	9481,857	0,05273	1,061E+11	2,58E-07	2,58E-07	-2,6E-07
-1,06	1000	7,897	3,949	166,7	90,4	15066	0,03319	5,208E+10	2,94E-06	2,94E-06	-2,9E-06
-31,52	1000	8,352	4,176	186,2	61,02	11363,56	0,044	2,271E+11	-2,61E-06	-2,61E-06	2,61E-06
3,37	1000	10,373	5,187	204,7	77,57	15876,85	0,03149	7,959E+10	-6,87E-06	-7E-06	6,87E-06
5,52	1000	7,596	3,798	222	73,49	16312,29	0,03065	6,869E+10	-1,21E-05	-1E-05	1,21E-05
8,30	1000	4,481	2,241	173,5	76,14	13207,69	0,03786	3,752E+10	-5,73E-06	-6E-06	5,73E-06
17,45	1000	10,219	5,11	207,7	57,15	11872,68	0,04211	1,460E+11	-5,9E-06	-6E-06	5,9E-06
16,62	1000	7,431	3,716	195,9	72,84	14267,28	0,03505	1,363E+11	-3,85E-06	-4E-06	3,85E-06
-5,70	1000	9,121	4,561	213,5	78,92	16851,5	0,02967	8,859E+10	-7,13E-06	-7E-06	7,13E-06
20,98	1000	10,228	5,114	236,5	63,89	15106,63	0,0331	2,620E+11	-4,3E-06	-4E-06	4,3E-06

4.5 Análise dos dados com ferramentas estatísticas

Com estes 3 casos de estudo analisados, e com a base de dados recolhida, podemos agora tentar determinar os pesos dos parâmetros de entrada com os parâmetros de saída para cada caso de estudo com base em estudo estatístico.

Inicialmente, foi decidido realizar esta análise com base na estatística com uma base de dados gerado aleatoriamente pelo método de Monte Carlo, com duas distribuições diferentes, distribuição normal e uniforme, onde simularíamos as variáveis de entrada (Angulo de orientação da fibra, espessura, comprimentos de banzos e almas) (ver Tabela 4.2 e Tabela 4.3). Mas, após iniciar as análises com regressões lineares múltiplas, observou-se que as variáveis de entrada obtidas pela distribuição uniforme resultavam em valores com baixíssima explicação na variabilidade (R_a^2), em relação aos dos valores da distribuição normal. Ou seja, por exemplo, na distribuição uniforme para o modelo da rigidez torsional, diz que apenas a espessura tem significância na variável de saída, no entanto a distribuição normal tem todas as variáveis de entrada com significância no modelo, e o R^2 é muito superior.

A Tabela 4.18 ilustra estes resultados. Com isto, decidiu-se usar apenas a amostra obtida pela distribuição normal, por esta ter maior explicação da variabilidade dos modelos em estudo, com valores esperados.

Tabela 4.18 – Regressão linear múltipla para o ângulo de torção unitário com dados obtidos por distribuição uniforme e normal

Variável dependente – Ângulo de torção unitário [Rad/mm]					
Distribuição Uniforme					
Variáveis independentes	beta0	Beta1 (ângulo)	Beta2 (espessura)	Beta3 (Comp. Menor)	Beta4 (Comp. Maior)
P-value (t-student)	0,001392	0,005435	-	-	-
Coeficientes	0,000404	-3,7E-05	-	-	-
Quadrado de R	0,244883				
Quadrado de R ajustado	0,217915				
F de significância	0,005435				

Distribuição normal					
Variáveis independentes	beta0	Beta1 (ângulo)	Beta2 (espessura)	Beta3 (Comp. Menor)	Beta4 (Comp. Maior)
P-value (t-student)	2E-07	-1,9E-09	-2,5E-06	-3E-07	-5,9E-08
Coeficientes	6,9E-05	0,000138	5,44E-08	0,001105	0,02522
Quadrado de R	0,768374				
Quadrado de R ajustado	0,731313				
(F-Snedcor)	1,22E-07				

Neste presente estudo, será avaliado a qualidade dos modelos, como foi relatado anteriormente no capítulo Modelo regressão linear múltipla (MONTGOMERY & RUNGER, 2003), no qual verificar-se-á alguns pontos como:

- Verificar se o modelo é válido pelo Teste-F de significância global (é valido se $F < 0,05$);
- Avaliar a qualidade do ajustamento ($R_a^2 > 0,8$);
- Verificar a significância individual de cada variável de entrada com o teste T-student (P-value $< 0,05$);
- Obter os coeficientes do modelo (β_k);
- Existir uma distribuição normal para os valores de resíduos-padrão;

Será repetido esta análise para cada regressão linear múltipla até todas as variáveis do modelo terem significância (P-value <0,05).

4.5.1 Análise do caso de estudo 1 (Secção aberta simétrica)

Com as variáveis de entrada e de saída obtidas, pode-se agora iniciar o estudo estatístico com base em regressões lineares múltiplas para obter o peso de cada variável de entrada na resposta da estrutura. Para este caso de estudo, será realizado cinco regressões lineares múltiplas, onde as variáveis de entrada, são as variáveis independentes (X_k) da Eq. (43), e os resultados das variáveis de saída, são as variáveis dependentes (Y).

Rigidez torsional (GJ)

Para a primeira regressão linear múltipla, usa-se os valores das variáveis de entrada (Tabela 4.2) e os valores obtidos para as variáveis de saída da rigidez torsional (Tabela 4.13). Usou-se o software Excel para realizar estas regressões linear múltiplas, e obteve se os resultados seguintes:

Tabela 4.19 – Regressão linear múltipla para a rigidez torsional no caso de estudo 1

Variável dependente - GJ [N mm ²]					
Variáveis independentes	beta0	beta1 (ângulo)	beta2 (Espessura)	beta3 (comp. menor)	beta4 (comp. maior)
P-value (t-student)	6,52E-10	0,000389608	1,61E-16	-	-
Coeficientes	-8,19E+08	34890,09423	1,26E+08	-	-
Quadrado de R	0,923343734				
Quadrado de R ajustado	0,917665493				
(F-Snedcor)	8,73762E-16				

A equação do modelo obtida é:

$$GJ = -819329 + 34890,0 \cdot (\text{ângulo } (\theta)) + 125767 \cdot (\text{Espessura}(t)) \quad (55)$$

Após ter realizado uma primeira tentativa, observou-se que os das variáveis independentes do comprimento menor (b1) e do comprimento maior (b2) tinham um

P-value > 0,05, portanto estas têm pouco valor na explicação do modelo, com isto, retirou-se estas para se voltar a realizar a regressão. Obtivemos o resultado da

Tabela 4.19, em que valida todas as condições mencionadas anteriormente (MONTGOMERY & RUNGER, 2003). Ao realizar um histograma com os valores de resíduos padrão, verifica se que não se pode validar a normalidade (Figura 4.8).

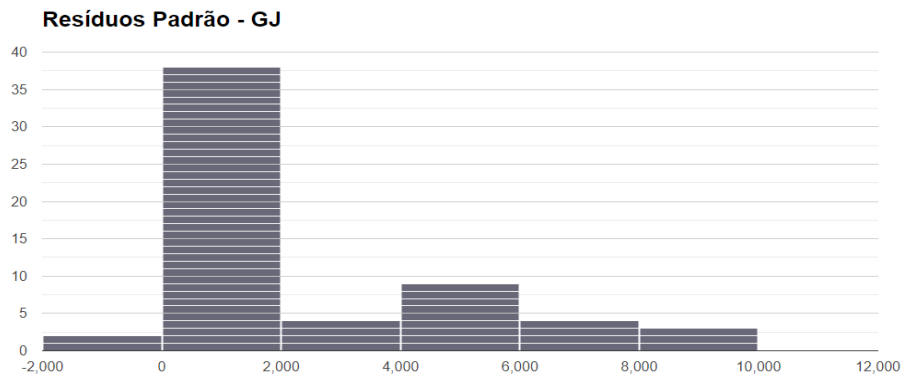


Figura 4.8 – Histograma dos resíduos padrão para a rigidez torsional do caso 1

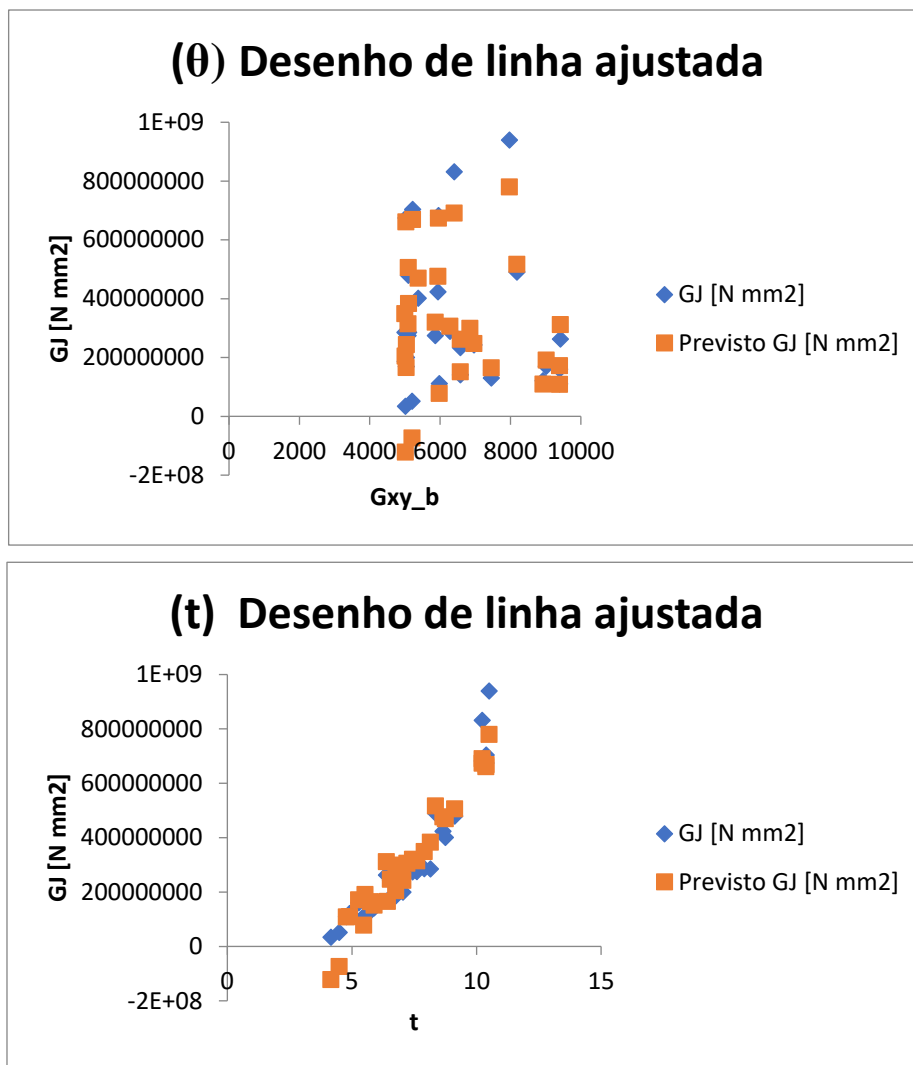


Figura 4.9 – Desenho da linha ajustada para as variáveis independentes (θ) e (t) do caso de estudo 1

Como se pode observar pela Figura 4.9, pode-se verificar um certo padrão para os valores previsto do gráfico da espessura (t), enquanto nos valores do gráfico do ângulo (θ) já não é possível validar qualquer padrão perante a linha ajustada.

Ângulo de torção unitário

Agora pode-se realizar a regressão linear múltipla para a variável dependente do ângulo de torção unitário usando os valores da Tabela 4.13 . O procedimento será o mesmo que o que foi efetuado anteriormente. Para este estudo, todas as variáveis tiveram significado no modelo, como se pode ver na tabela seguinte:

Tabela 4.20 – Regressão linear múltipla para o ângulo de torção unitário no caso de estudo 1

Variável dependente – Ângulo de torção unitário [Rad/mm]					
Variáveis independentes	beta0	beta1 (ângulo)	beta2 (Espessura)	beta3 (comp. menor)	beta4 (comp. maior)
P-value (t-student)	2,04E-07	1,38E-04	5,44E-08	1,10E-03	2,52E-02
Coeficientes	6,92E-05	-1,93E-09	-2,52E-06	-2,98E-07	-5,89E-08
Quadrado de R	0,768373583				
Quadrado de R ajustado	0,731313356				
(F-Snedcor)	1,21716E-07				

A equação do modelo obtida é:

$$\begin{aligned}
 \text{Taxa de Torção} = & 0,000069 - 1,92711 \cdot (\text{ângulo } (\theta)) - 0,00000000192 \cdot (\text{Espessura } (t)) \\
 & - 0,000000298 \cdot (\text{Comp. menor } (b1)) - 0,0000000589 \\
 & \cdot (\text{Comp. maior } (b2))
 \end{aligned}
 \tag{56}$$

Com esta regressão consegue-se validar todos os pressupostos, mas tendo o R^2 um pouco baixo em relação ao requerido ($R_a^2 > 0,8$), não poderemos validar este modelo, a figura seguinte ilustra o histograma dos resíduos padrão onde não existe normalidade.

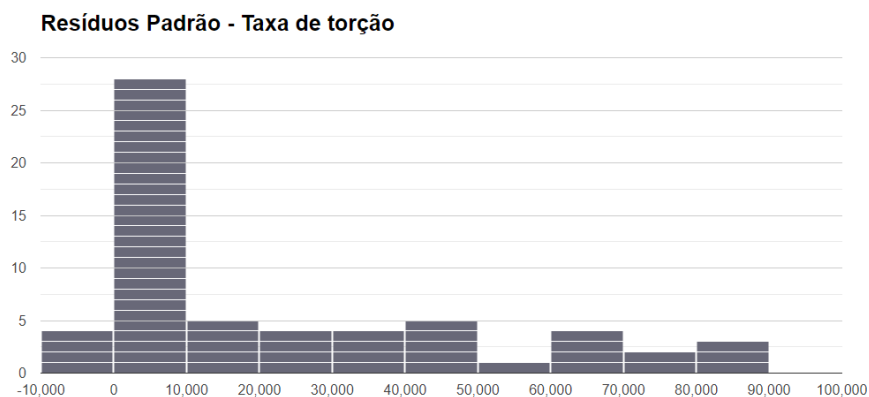


Figura 4.10 – Histograma dos resíduos padrão para a taxa de rotação do caso 1

Para as variáveis independentes, mais uma vez apenas a variável (t) demonstra um padrão no desenho da linha ajustada com os valores do ângulo de torção unitário e os que são previstos (Figura 4.11).

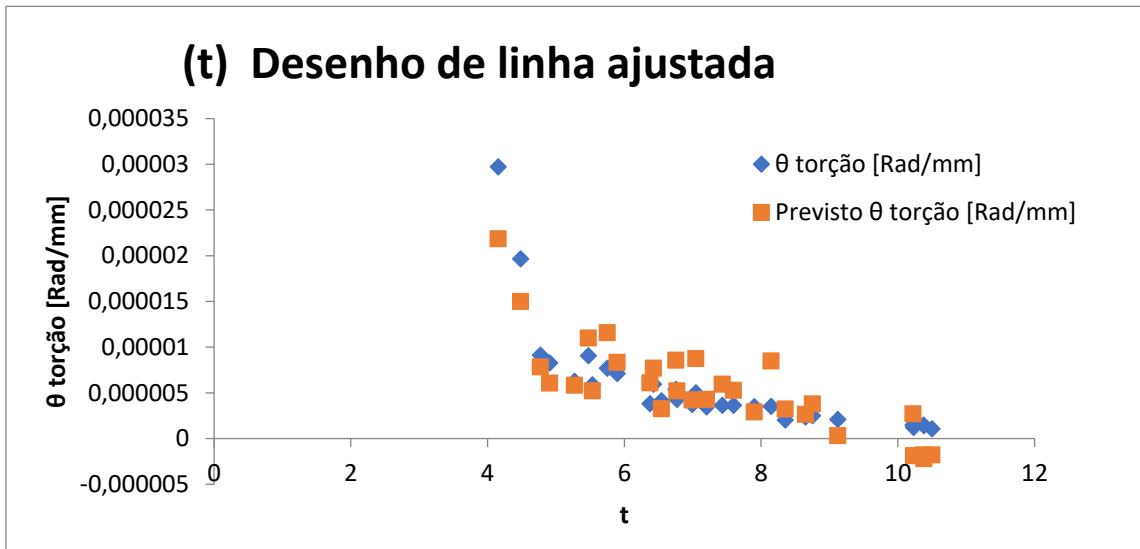


Figura 4.11 – Desenho da linha ajustada para a variável independente (t) do caso de estudo 1

Tensão de corte máxima (f_{max})

De seguida, realiza-se a regressão linear múltipla para a variável dependente tensão máxima de corte (Tabela 4.13). O procedimento será o mesmo que o que foi efetuado anteriormente. Para este estudo, todas as variáveis tiveram significado no modelo menos a variável do ângulo da fibra, a tabela seguinte representa esta informação:

Tabela 4.21 – Regressão linear múltipla para a tensão de corte no caso de estudo 1

Variável dependente – Tensão de corte máxima [N/mm ²]					
Variáveis independentes	beta0	beta1 (Espessura)	beta2 (comp. menor)	beta3 (comp. maior)	beta4 (Ângulo)
P-value (t-student)	6,68E-09	8,32E-11	8,81E-03	9,12E-03	-
Coeficientes	1,10E+00	-5,55E-02	-3,55E-03	-1,20E-03	-
Quadrado de R	0,852342				
Quadrado de R ajustado	0,835305				
(F-Snedcor)	6,17E-11				

A equação do modelo obtida é:

$$f_{max} = 1,1014 - 0,0555 \cdot (\text{Espessura (t)}) - 0,00355 \cdot (\text{Comp. menor (b1)}) - 0,001197 \cdot (\text{Comp. maior (b2)}) \quad (57)$$

A partir da tabela obtida, valida-se todos os pressupostos. Mas no histograma dos resíduos padrão, não existe simetria, portanto mais uma vez o pressuposto da normalidade não é validado.

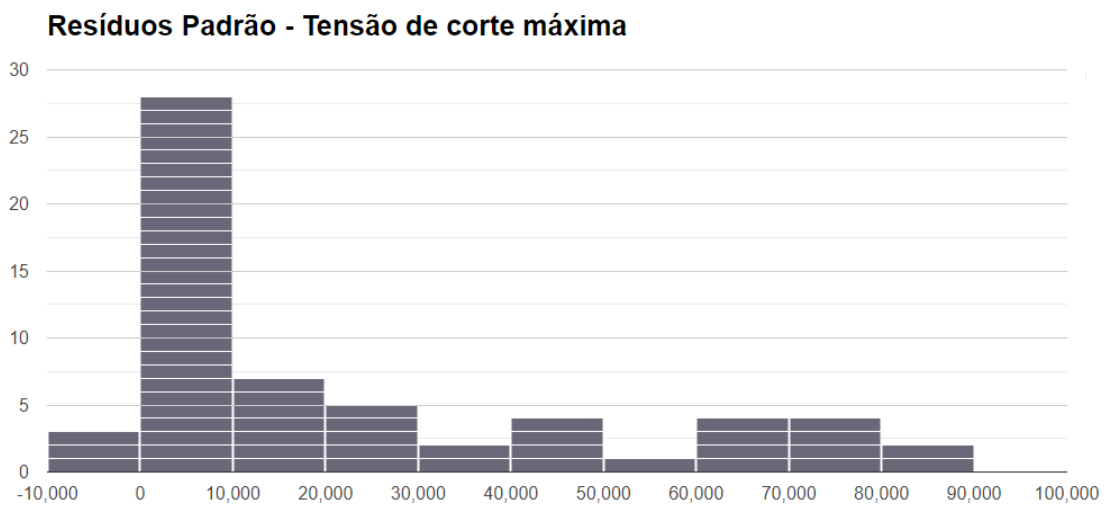


Figura 4.12 – Histograma dos resíduos padrão para a tensão de corte do caso 1

Em relação aos gráficos do desenho de linha ajustada obtidas a partir do software Excel, apenas a da espessura é que representa um padrão visível, comparando os valores obtidos com os previstos (Figura 4.13).

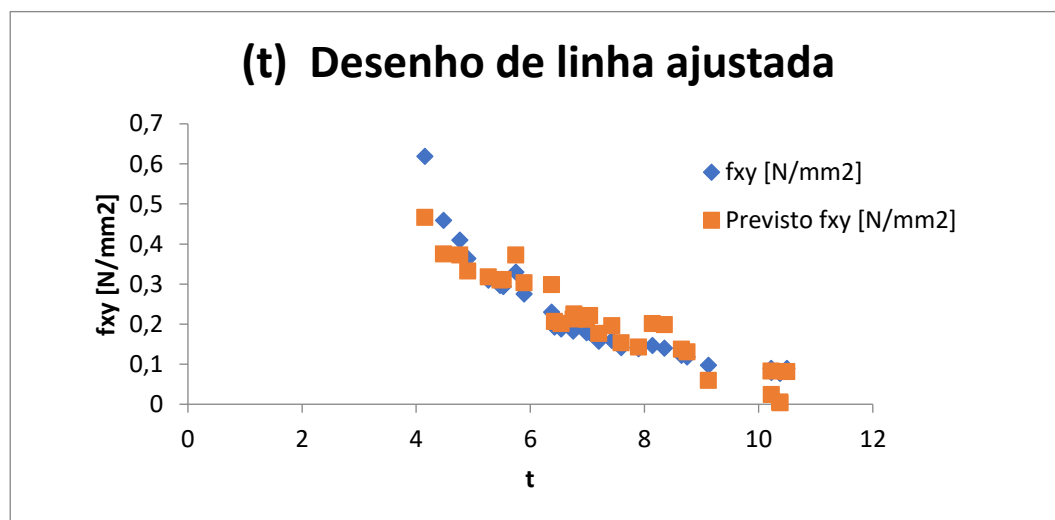


Figura 4.13 – Desenho da linha ajustada para a variável independente (t) da tensão de corte máxima do caso de estudo 1

Deslocamentos nos pontos A e B (W_A / W_B)

Por fim, pode se acabar esta análise pelas regressões lineares múltiplas dos deslocamentos dos pontos A e B da secção para o caso de estudo 1. As variáveis independentes continuam a ser da Tabela 4.2, e as variáveis dependentes são os deslocamentos A e B da Tabela 4.13. A partir destes valores podemos então realizar as regressões lineares múltiplas com os resultados seguintes:

Tabela 4.22 – Regressão linear múltipla para o Deslocamento A no caso de estudo 1

Variável dependente – Deslocamento em A [mm]					
Variáveis independentes	beta0	beta1 (ângulo)	beta2 (Espessura)	beta3 (comp. menor)	beta4 (comp. maior)
P-value (t-student)	3,75E-07	1,52E-04	6,79E-10	1,75E-02	-
Coeficientes	1,87E-01	-6,36E-06	-1,01E-02	-6,77E-04	-
Quadrado de R	0,777461				
Quadrado de R ajustado	0,751784				
(F-Snedcor)	1,22E-08				

Tabela 4.23 – Regressão linear múltipla para o Deslocamento B no caso de estudo 1

Variável dependente – Deslocamento em B [mm]					
Variáveis independentes	beta0	beta1 (ângulo)	beta2 (Espessura)	beta3 (comp. menor)	beta4 (comp. maior)
P-value (t-student)	2,51E-09	1,46E-03	5,62E-09	-	-
Coeficientes	-6,85E-02	2,73E-06	5,24E-03	-	-
Quadrado de R	0,723581				
Quadrado de R ajustado	0,703106				
(F-Snedcor)	2,89E-08				

A equação obtida do modelo para o Deslocamento em A é:

$$W_A = 0,18710 - 0,00000636 \cdot (\text{ângulo } (\theta)) - 0,0101 \cdot (\text{Espessura } (t)) - 0,000677 \cdot (\text{Comp. menor } (b1)) \quad (58)$$

A partir das tabelas anteriores conclui-se que o deslocamento em A o comprimento da alma tem pouca explicação no modelo, o P-value é menor que 0,05. No caso do deslocamento em B, nem o comprimento da alma, nem do banzo têm explicação para este modelo. Os R_a^2 são semelhantes, e não validam a condição em que este tem de ser maior que 0,8 (PEDROSA, 2018). Seriam necessário mais variáveis para validar um bom ajustamento do modelo.

Enquanto ao pressuposto da normalidade nos gráficos de resíduos padrão, nenhum dos gráficos apresenta distribuição normal. As figuras seguintes ilustram os histogramas para os valores de resíduos de cada modelo.

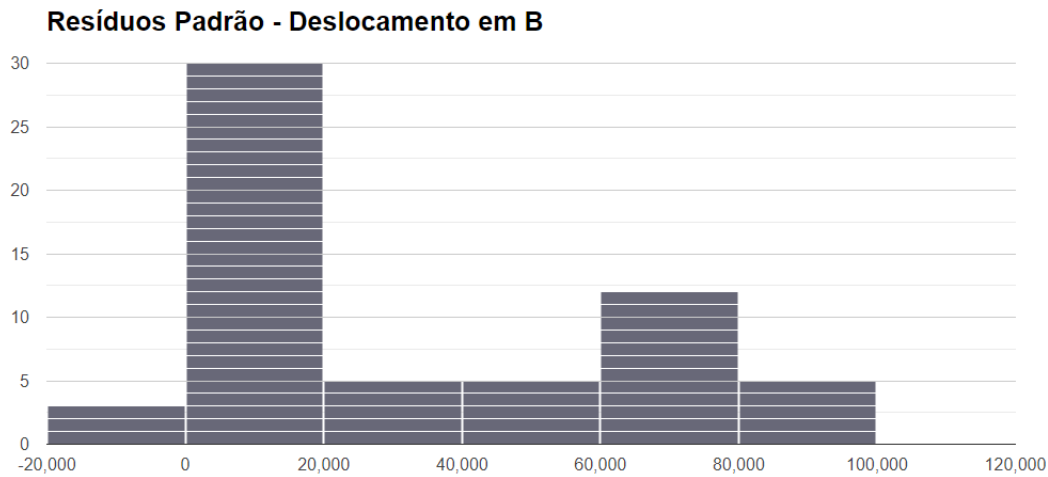


Figura 4.15– Histograma dos resíduos padrão para o deslocamento em B do caso 1

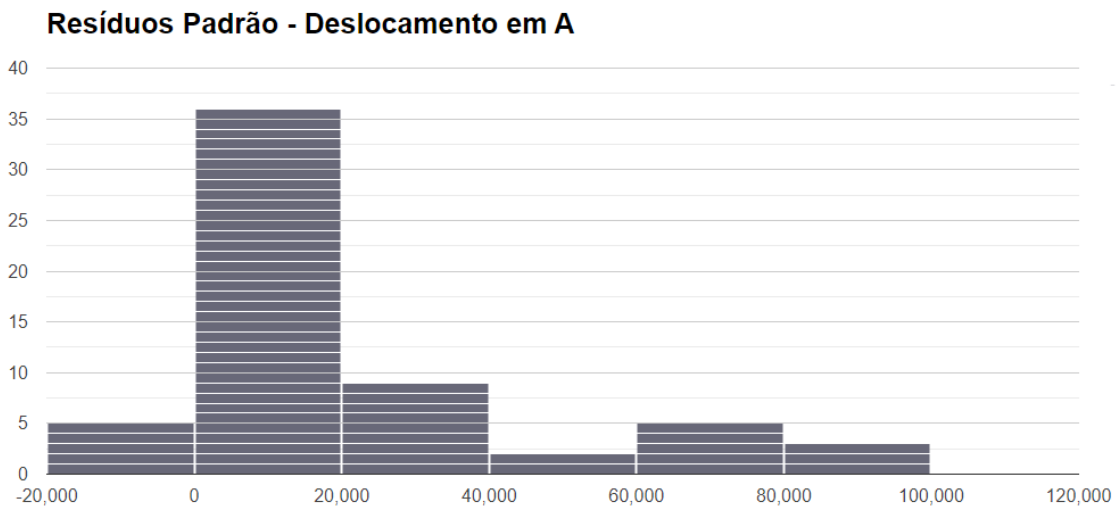


Figura 4.14 – Histograma dos resíduos padrão para o deslocamento em A do caso 1

À partida, este modelo não é válido para prever a resposta do deslocamento em B de forma correta, por ter um R_a^2 baixo (PEDROSA, 2018), o que resulta no fato das variáveis independentes terem pouca explicação para o modelo, e por não existir normalidade para os resíduos padrão (MONTGOMERY & RUNGER, 2003).

Mais uma vez, apenas os desenhos das linhas de ajustamento da espessura é que apresentam um padrão quer no caso do deslocamento em A, quer no deslocamento em B.

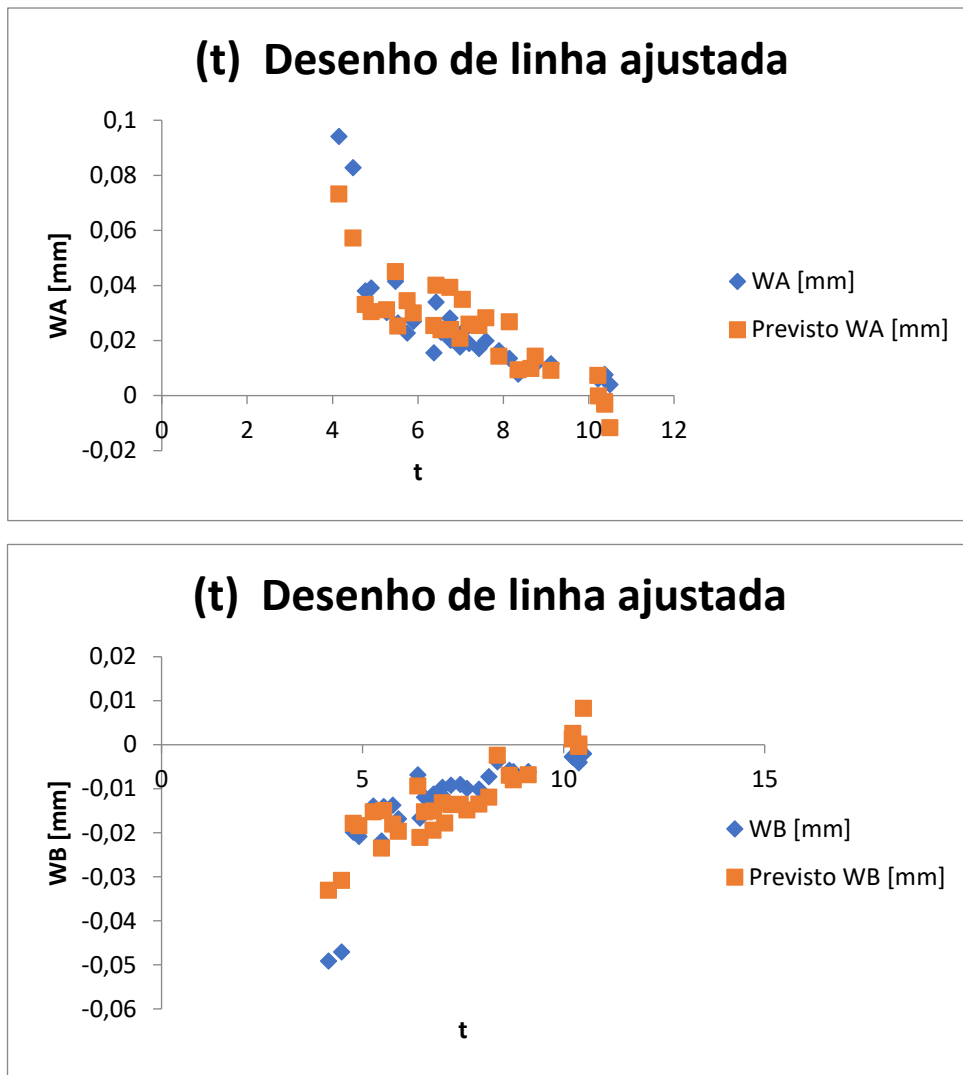


Figura 4.17 – Desenho da linha ajustada para a variável independente (t) do deslocamento em B do caso de estudo 1

4.5.2 Análise estatística para o caso de estudo 2 (Secção aberta antissimétrica)

Para este novo caso de estudo, em que desta vez trata-se de uma secção aberta antissimétrica, será realizado exatamente a mesma análise com base estatística feita no caso anterior. A única diferença é que este caso tem mais uma regressão linear múltipla por causa da segunda tensão de corte resultante do elemento 2 da alma (Figura 4.3). E os valores das variáveis de dependentes (Outputs) serão os do caso de estudo 2.

Portanto, iremos apresentar apenas os resultados das regressões lineares e suas conclusões para não tornar este capítulo repetitivo. As tabelas seguintes representam todas as regressões linear obtidas com as suas equações, e conclusões sobre a análise, o restante encontrar-se-á nos anexos.

Tabela 4.24 – Regressão linear múltipla para a rigidez torsional no caso de estudo 2

Variável dependente – Rigidez torsional [N mm ²]					
Variáveis independentes	beta0	beta1 (ângulo)	beta2 (Espessura)	beta3 (comp. menor)	beta4 (comp. maior)
P-value (t-student)	5,12E-10	0,000875	3,01E-17	-	-
Coeficientes	-3,6E+08	14122,2	58891964	-	-
Quadrado de R	0,932793				
Quadrado de R ajustado	0,927814				
(F-Snedcor)	1,48E-16				

A equação obtida do modelo para rigidez torsional é:

$$GJ = -363070 - 14122,2 \cdot (\text{ângulo } (\theta)) - 58891964 \cdot (\text{Espessura } (t)) \quad (59)$$

Tabela 4.25 – Regressão linear múltipla para o ângulo de torção unitário no caso de estudo 2

Variável dependente – Ângulo de torção unitário [Rad/mm]					
Variáveis independentes	beta0	beta1 (ângulo)	beta2 (Espessura)	beta3 (comp. menor)	beta4 (comp. maior)
P-value (t-student)	3,57E-07	0,000243	1,57E-08	0,001538	-
Coeficientes	0,000117	-3,8E-09	-5,4E-06	-5,9E-07	-
Quadrado de R	0,729778				
Quadrado de R ajustado	0,698598				
(F-Snedcor)	1,48E-07				

A equação obtida do modelo para o ângulo de torção unitário é:

$$\text{Taxa de torção} = 0,000117 - 0,0000000381 \cdot (\text{ângulo } (\theta)) - 0,00000538 \cdot (\text{Espessura } (t)) - 0,000000591 \cdot (\text{Comp. menor } (b1)) \quad (60)$$

Tabela 4.26 – Regressão linear múltipla para a tensão de corte máxima no elemento 1 no caso de estudo 2

Variável dependente – Tensão de corte máxima no elemento 1 [N/mm ²]					
Variáveis independentes	beta0	beta1 (ângulo)	beta2 (Espessura)	beta3 (comp. menor)	beta4 (comp. maior)
P-value (t-student)	3,62E-10	1,08E-11	0,00217	-	-
Coeficientes	1,888492	-0,11739	-0,00856	-	-
Quadrado de R	0,835852				
Quadrado de R ajustado	0,823693				
(F-Snedcor)	2,54E-11				

A equação obtida do modelo para a tensão de corte máxima no elemento 1 é:

$$f_{\max_1} = 1,888492 - 0,11739 \cdot (\text{ângulo } (\theta)) - 0,00856 \cdot (\text{Espessura } (t)) \quad (61)$$

Tabela 4.27 – Regressão linear múltipla para a tensão de corte máxima no elemento 2 no caso de estudo 2

Variável dependente – Tensão de corte máxima no elemento 2 [N/mm ²]					
Variáveis independentes	beta0	beta1 (ângulo)	beta2 (Espessura)	beta3 (comp. menor)	beta4 (comp. maior)
P-value (t-student)	3,62E-10	1,08E-11	0,00217	-	-
Coeficientes	0,944246	-0,0587	-0,00428	-	-
Quadrado de R	0,835852				
Quadrado de R ajustado	0,823693				
(F-Snedcor)	2,54E-11				

A equação obtida do modelo para a tensão de corte máxima no elemento 2 é:

$$f_{\max_2} = 0,944246 - 0,0587 \cdot (\text{ângulo } (\theta)) - 0,00428 \cdot (\text{Espessura } (t)) \quad (62)$$

Tabela 4.28 – Regressão linear múltipla para a Deslocamento A no caso de estudo 2

Variável dependente – Deslocamento em A [mm]					
Variáveis independentes	beta0	beta1 (ângulo)	beta2 (Espessura)	beta3 (comp. menor)	beta4 (comp. maior)
P-value (t-student)	7,26E-07	0,000241	5,19E-09	0,008928	-
Coeficientes	-0,44684	1,52E-05	0,02266	0,001876	-
Quadrado de R	0,743566				
Quadrado de R ajustado	0,713978				
(F-Snedcor)	7,57E-08				

A equação obtida do modelo para o Deslocamento em A é:

$$W_A = -0,44684 + 0,0000152 \cdot (\text{ângulo } (\theta)) + 0,02266 \cdot (\text{Espessura } (t)) + 0,001876 \cdot (\text{Comp. menor } (b1)) \quad (63)$$

Tabela 4.29 – Regressão linear múltipla para a Deslocamento B no caso de estudo 2

Variável dependente – Deslocamento em B [mm]					
Variáveis independentes	beta0	beta1 (ângulo)	beta2 (Espessura)	beta3 (comp. menor)	beta4 (comp. maior)
P-value (t-student)	1,4E-06	0,000284	3,84E-09	0,024724	-
Coeficientes	0,240877	-8,4E-06	-0,01292	-0,00089	-
Quadrado de R	0,746691				
Quadrado de R ajustado	0,717463				
(F-Snedcor)	6,47E-08				

A equação obtida do modelo para o Deslocamento em B é:

$$W_B = 0,240877 - 0,00000840 \cdot (\text{ângulo } (\theta)) - 0,01292 \cdot (\text{Espessura } (t)) - 0,00089 \cdot (\text{Comp. menor } (b1)) \quad (64)$$

Agora podemos analisar os resultados obtidos das regressões, começando pela rigidez torsional, onde o R_a^2 é elevado (0,93), o que indica que 93% da variabilidade do modelo é explicado pelas variáveis independentes (Variáveis de entrada). Apenas o ângulo e a espessura explicam o modelo. O histograma dos resíduos padrão (Anexos A) não apresenta normalidade.

Para o caso do ângulo de torção unitário, esta tem um $R_a^2 < 0,8$. O que não valida as condições impostas anteriormente para os casos de engenharia. Portanto este modelo não

será aprovado, é necessário aumentar o número de variáveis independentes para aumentar a explicação da variabilidade do modelo.

De seguida, a tensão de corte máxima obtida no elemento 1 e 2, apesar de ter valores de coeficientes e P-value diferentes, estas têm o mesmo valor de R_a^2 (0,84). Logo pode-se concluir que estes modelos explicam da mesma forma a variabilidade de cada modelo. Estes não apresentam normalidade nos histogramas dos valores de resíduo padrão (Anexos A).

Por fim, os deslocamentos em A e B têm um $R_a^2 < 0,8$. O que não valida os pressupostos para os casos de engenharia. Portanto estes modelos não serão aprovados, é necessário igualmente aumentar o número de variáveis independentes para aumentar a explicação da variabilidade do modelo, como no caso anterior do ângulo de torção unitário.

4.5.3 Análise estatística para o caso de estudo 3 (Secção fechada duplamente simétrica)

Finalmente, falta analisar o último caso de estudo, em este representa uma estrutura com um perfil de secção fechada duplamente simétrico (Figura 4.5). Como o caso anterior, iremos apenas apresentar os resultados das regressões lineares como também as suas equações e conclusão da análise para não tornar este trabalho repetitivo. Para este caso de estudo, apenas teremos 3 regressões lineares múltiplas, a rigidez torsional da secção, o deslocamento no ponto B e D, os pontos A e C são nulos, portanto não têm significado neste tipo de análise.

Tabela 4.30 – Regressão linear múltipla para a rigidez torsional no caso de estudo 3

Variável dependente – Rigidez torsional [N mm ²]					
Variáveis independentes	beta0	beta1 (ângulo)	beta2 (Espessura)	beta3 (comp. menor)	beta4 (comp. maior)
P-value (t-student)	1,15E-05	1,68E-09	0,000316	-	-
Coefficientes	-2,8E+11	45623108	1,73E+10	-	-
Quadrado de R	0,748894				
Quadrado de R ajustado	0,730293				
(F-Snedcor)	7,91E-09				

A equação obtida do modelo para rigidez torsional é:

$$GJ = -281445200453,1 + 45623107,5 \cdot (\hat{\text{ângulo}} \theta) + 17252144422,1 \cdot (\text{Espessura } (t)) \quad (65)$$

Tabela 4.31 – Regressão linear múltipla para a Deslocamento B no caso de estudo 3

Variável dependente – Deslocamento em B [mm]					
Variáveis independentes	beta0	beta1 (ângulo)	beta2 (Espessura)	beta3 (comp. menor)	beta4 (comp. maior)
P-value (t-student)	3,04E-06	4,73E-08	3,63E-05	0,01045	5,78E-06
Coefficientes	-6,2E-05	3,5E-09	1,75E-06	-7,3E-08	4,9E-07
Quadrado de R	0,764022				
Quadrado de R ajustado	0,726265				
(F-Snedcor)	1,53E-07				

A equação obtida do modelo para o Deslocamento em B é:

$$W_B = -0,0000612 + 0,00000000350 \cdot (\hat{\text{ângulo}} (\theta)) + 0,00000175 \cdot (\text{Espessura } (t)) - 0,0000000726 \cdot (\text{Comp. menor } (b1)) + 0,000000490 \cdot (\text{Comp. maior } (b2)) \quad (66)$$

Tabela 4.32 – Regressão linear múltipla para a Deslocamento D no caso de estudo 3

Variável dependente – Deslocamento em B [mm]					
Variáveis independentes	beta0	beta1 (ângulo)	beta2 (Espessura)	beta3 (comp. menor)	beta4 (comp. maior)
P-value (t-student)	3,04E-06	4,73E-08	3,63E-05	0,01045	5,78E-06
Coefficientes	6,2E-05	-3,5E-09	-1,8E-06	7,26E-08	-4,9E-07
Quadrado de R	0,764022				
Quadrado de R ajustado	0,726265				
(F-Snedcor)	1,53E-07				

A equação obtida do modelo para o Deslocamento em D é:

$$W_D = 0,0000612 - 0,00000000350 \cdot (\hat{\text{ângulo}} (\theta)) - 0,00000175 \cdot (\text{Espessura } (t)) + 0,0000000726 \cdot (\text{Comp. menor } (b1)) - 0,000000490 \cdot (\text{Comp. maior } (b2)) \quad (67)$$

Analisando os resultados obtidos pelas regressões lineares múltiplas, pode-se concluir que nenhuma validou o pressuposto em que o R^2 dever ser maior que 0,8. Mesmo validando os restantes pressuposto, não podemos validar estes modelos. A variabilidade que se tenta explicar é a da variável dependente através de um modelo. Uma das formas de possivelmente validar estes modelos seria aumentar o número de variáveis de entrada.

No entanto, podemos observar que os resultados obtidos para as regressões lineares dos deslocamentos, são idênticos, mas os coeficientes obtidos têm os sinais invertidos, o que seria de esperar, pela simetria do perfil.

5. Conclusões e Trabalhos futuros

O estudo realizado visou a caracterização da influência que a variabilidade associada às propriedades materiais e geométricas de materiais compósitos com reforço de fibra longa, poderá ter no comportamento à torção de perfis de paredes finas. Nessa sequência foram também formulados modelos estatísticos com o objetivo de prever essa resposta para as estruturas analisadas.

As propriedades materiais e geométricas relevantes para caracterização dos perfis que foram considerados neste estudo incluíram o ângulo de orientação da fibra em cada camada, as dimensões das almas e dos banzos dos perfis e o módulo de corte do material usado.

Inicialmente, decidiu-se usar dois tipos de distribuições na simulação de números aleatórios para as variáveis de entrada em uso (ângulo da fibra, espessura, comprimentos das almas e banzos). As distribuições assumidas foram a uniforme e normal, mas após realizar as regressões linear múltiplas, observou-se que os dados obtidos pela distribuição uniforme resultaram em modelos com baixíssimo R_a^2 , rondavam os 20-30% e os valores de P-value com valores maiores que 5%, enquanto os dados obtidos pela distribuição normal já se encontravam nos valores requeridos para a validação do modelo. Como os resultados obtidos pela distribuição uniforme em pouco ou nada contribuírem para a explicação da variabilidade da resposta da estrutura, optou-se por usar apenas os valores obtidos pela distribuição normal.

Durante a realização das regressões linear múltiplas, o ângulo que é variável independente, não obtinha significância no modelo, o que não pode ser possível, porque é a partir de o angulo, e das propriedades da fibra que obtemos as propriedades elásticas do laminado, para analisar os perfis em estudo. Percebeu-se que isto poderia vir pelo facto de existir muitos cálculos auxiliares no cálculo do módulo de corte, usando o ângulo da orientação da fibra, que seria a variável independente na regressão linear múltipla. O certo seria usar diretamente o ângulo como variável independente. Mas como não se obteve resultados fiáveis, decidiu-se então usar diretamente os valores do módulo de corte como variável independente, considerando esta como o ângulo da orientação das fibras nas análises dos resultados. Com esta alteração, obteve-se finalmente resultados viáveis das regressões lineares para serem analisados posteriormente.

De certa forma, apenas poder-se-ia validar 5 modelos. Mas perante as condições impostas para a validade dos modelos, nenhum validou a condição de existir uma distribuição normal durante a análise dos histogramas resultantes dos resíduos.

Os dois primeiros casos dizem respeito à rigidez torsional (GJ) e à tensão de corte máxima (f_{xy}) do caso de estudo 1, onde o perfil tem uma secção aberta simétrica. Para a rigidez torsional obtém-se um R_a^2 com 0,923, em que apenas o ângulo da fibra (θ) e espessura (t) têm significância no modelo. Portanto, 92,3% da variabilidade da rigidez torsional é explicada pelas variáveis ângulo e espessura.

Quanto à tensão de corte máxima, obtemos um R_a^2 com 0,852, um pouco baixo, mas mesmo assim pode-se validar parcialmente este modelo, por o valor ser alto. Neste caso apenas a espessura (t), comprimento maior b2 (alma) e o comprimento menor b1 (banzos) tiveram explicação para a variabilidade do modelo. O ângulo da fibra (θ) não adiciona explicação para a variabilidade, ou seja, o ângulo não influencia a resposta da estrutura em relação a tensão de corte máxima, isto descrito pela regressão linear múltipla.

Os restantes modelos aprovados, dizem respeito ao caso de estudo 2, este trata-se de uma secção novamente aberta, e antissimétrica. O modelo da rigidez torsional, e das tensões de corte máxima do elemento 1 e 2, são os quais têm capacidade de prever a resposta da estrutura. No modelo da rigidez torsional, obtemos um R_a^2 com 0,932, e as variáveis independentes que tiveram significância no modelo são o ângulo da fibra (θ) e a espessura (t), portanto estas duas variáveis de entrada conseguem explicar 93,2% da variabilidade da rigidez torsional do perfil do caso de estudo 2. Por último, validou-se igualmente as tensões de corte máxima do elemento 1 e 2, em que obtivemos um R_a^2 igual de 0,836 para ambas respostas. Em que ambos casos a variável ângulo da fibra (θ) e a espessura (t) é que têm significância no modelo.

No caso de estudo 3 não foi possível validar qualquer modelo, estes não validam os pressupostos das regressões lineares múltiplas, portanto, este estudo não tem capacidade de prever a resposta de um perfil duplamente simétrico de secção fechada. Não foi encontrado nenhuma explicação viável a esta conclusão.

Para tentar validar os modelos, dever-se-á num primeiro instante tentar aumentar o número de variáveis de entrada, para assim tentar-se obter mais explicação na variabilidade dos modelos ($R_a^2 > 0,8$).

Quanto aos gráficos de linha ajustada, consegue-se observar que apenas a variável independente da espessura (t), obtém um padrão visível, quase linear. Os dados obtidos praticamente sobrepõem os valores previstos pelas ferramentas estatísticas usadas.

Para trabalhos futuros, seria interessante, repetir o estudo, mas desta vez podendo introduzir laminados com camadas com ângulos diferentes, porque neste estudo todos os laminados tinham o mesmo ângulo para cada camada do empilhamento, para facilitar as regressões lineares múltiplas. Seria também importante tentar aumentar o número de variáveis de entrada para talvez aumentar a explicação dos modelos para de forma fiável usar estes na indústria de forma a acelerar o processo de análise de estruturas.

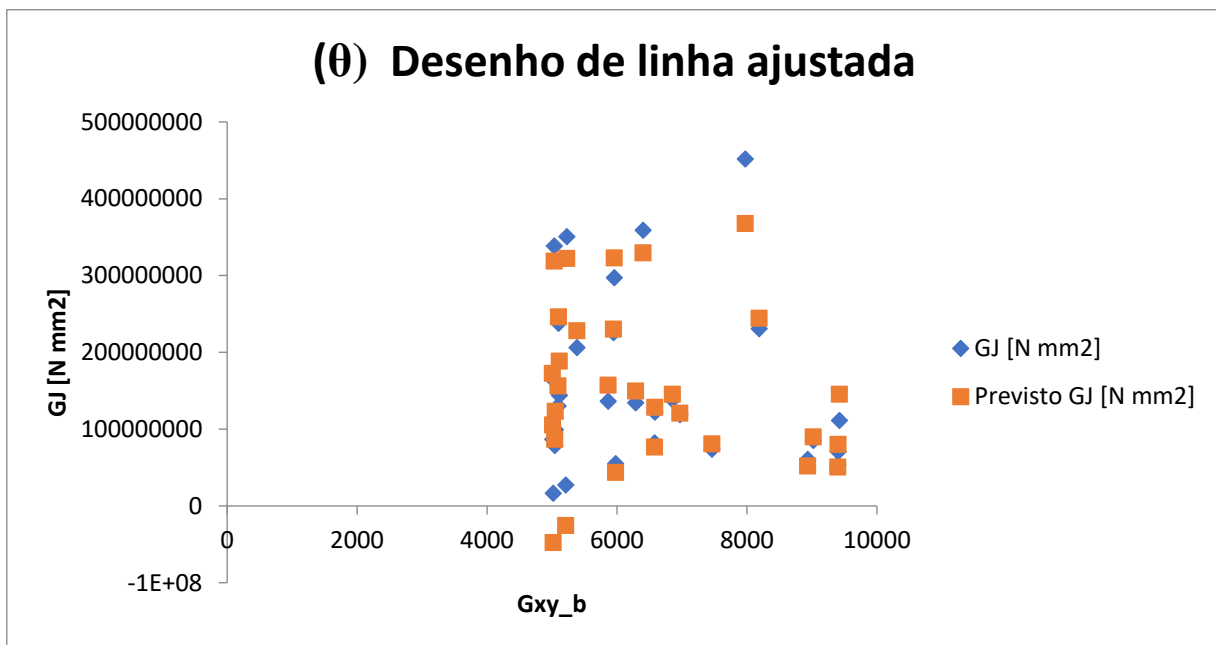
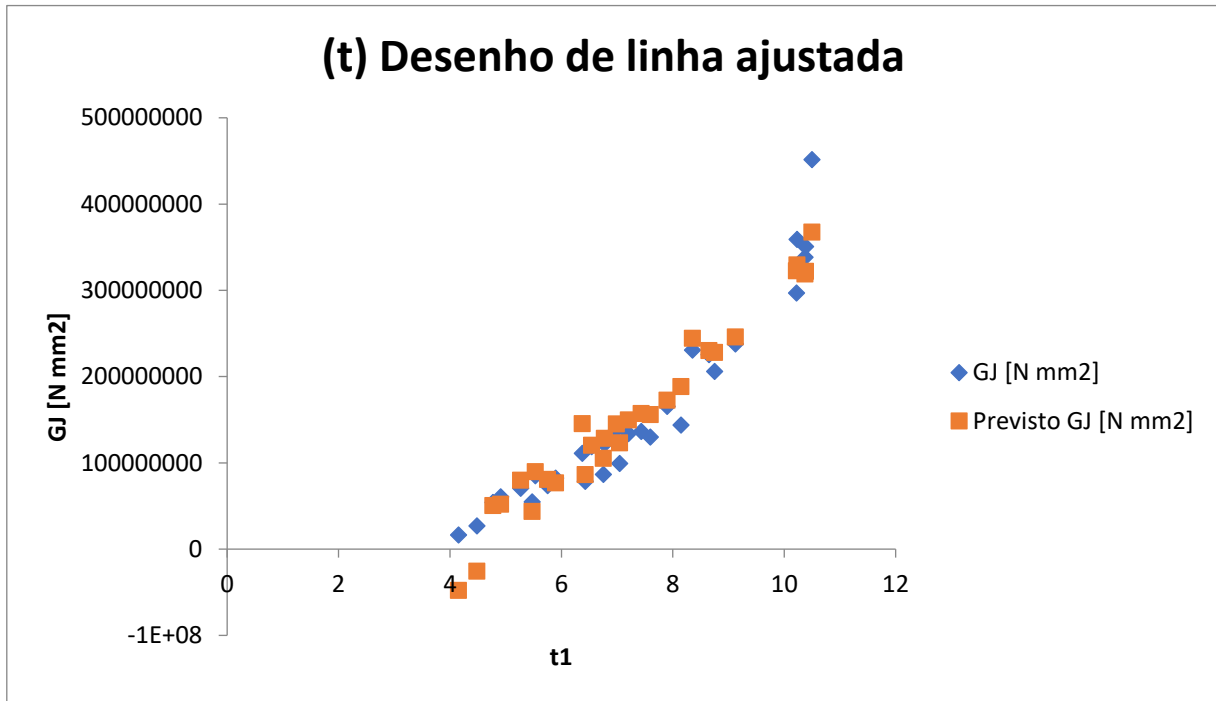
Referências

- ASADI, A., SHEIKH, A. H., & THOMSEN, O. T. (02 de Fevereiro de 2019). Buckling behaviour of thin-walled laminated composite beams having open and closed sections subjected to axial and end moment loading. *Thin-Walled Structures*, pp. 85-96.
- ASCIONE, L., FEO, L., & MANCUSI, G. (2000). On the statical behaviour of fibre-reinforced polymer thin-walled beams. *Composites Part B: Engineering*, pp. 643-654.
- CZAPSKI, P., JAKUBCZAK, P., BIENIAS, J., URBANIAK, M., & KUBIAK, T. (15 de Outubro de 2020). Influence of autoclaving process on the stability of thin-walled, composite columns with a square cross-section – Experimental and numerical studies. *Composite Structures*.
- DATOO, M. H. (1991). *Mechanics OF Fibrous Composites*. Elsevier Applied Science.
- DIACENCO, A. A., & PAVANELLO, R. (2021). Modelagem Por Elementos Finitos De Materiais Compósitos Reforçados Com Partículas Com Gradação Funcional. *Revista Mundi*, pp. 379-16.
- FEO, L., & MANCUSI, G. (3 de Março de 2010). Modeling shear deformability of thin-walled composite beams with open cross-section. *Mechanics Research Communications*, pp. 320-325.
- FRIEDRICH, K., & ALMAJID, A. (Abril de 2012). Manufacturing Aspects of Advanced Polymer Composites for Automotive. *ResearchGate*, p. 23.
- GÜNAY, M. G., & TIMARCI, T. (29 de Agosto de 2017). Static analysis of thin-walled laminated composite closed-section beams with variable stiffness. *Composite Structures*.
- HUANG, S., & P, Q. (10 de Maio de 2020). Buckling of thin-walled I-section laminated composite curved beams. *Thin-Walled Structures*.
- KIM, N. I., & SHIN, D. K. (12 de Março de 2009). Torsional analysis of thin walled composite beams with single- and double celled sections . *Engineering Structures*, pp. 1509-1521.

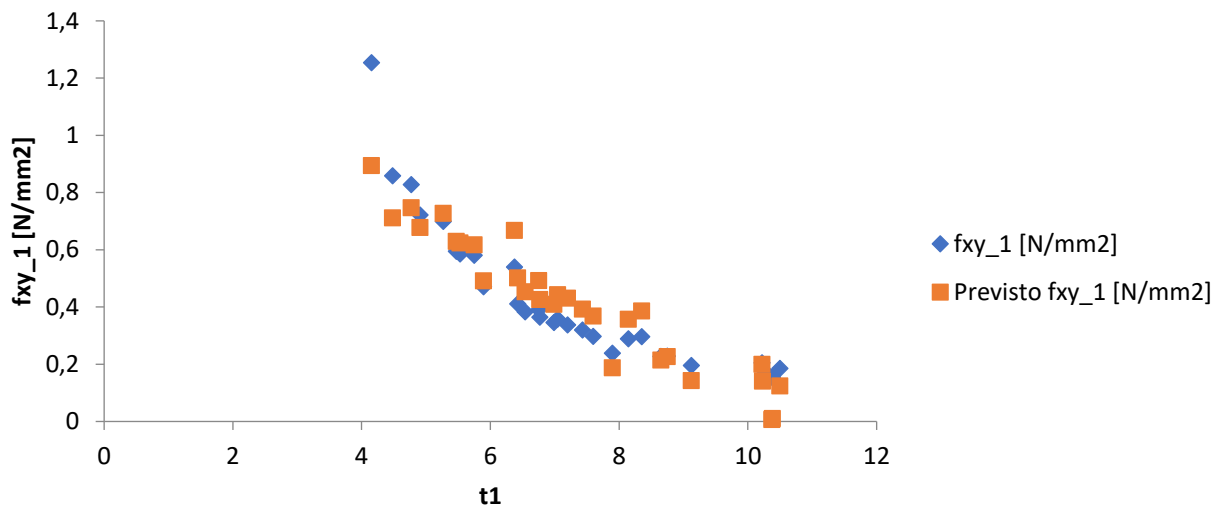
- KIM, N. I., SHIN, D. K., & KIM, M. Y. (3 de Julho de 2006). Exact solutions for thin-walled open-section composite beams with arbitrary lamination subjected to torsional moment. *Thin-Walled Structures* 44, pp. 638-654.
- KOBELEV, J. (Maio de 2019). Design and Analysis of Composite Structures for Automotive Applications. *ResearchGate*, p. 36.
- KROESE, P. P., BRERETON, T., & TAIMRE, T. (2014). Why the Monte Carlo method is so important today. *WREs Comput Stat*, pp. 386-392.
- LATTEIER, P. (17 de Janeiro de 2019). *Carbon Fiber Weaves: What they are and why to use them*. Obtido de Elevated Materials: <https://www.elevatedmaterials.com/carbon-fiber-weaves-what-they-are-and-why-to-use-them/>
- MONTGOMERY, C. D., & RUNGER, C. G. (2003). Applied Statistics and Probability for Engineers. *TechBooks*, p. 976.
- Moreira, A. M. (2008). *Materiais Compósitos*. Tomar.
- MOTA SOARES, C. M., & FREITAS, M. J. (junho de 2000). Mechanics Of composite Materials and Structures. *Computers & Structures*, p. 76.
- PEDROSA, A. C. (2018). *Introdução Computacional à Probabilidade e Estatística*. Porto Editora.
- POTTER, K. D. (2009). Understanding the origins of defects and variability in composite manufacture. *17 th International Conference on Composite Materials*, pp. 27-31.
- PURČAR, M. V., PROKIĆ, A., & BEŠEVIĆ, M. (2 de Julho de 2019). A numerical model for laminated composite thin-walled members with openings considering shear lag effect openings considering shear lag effect. *Engineering Structures*, pp. 392-399.
- REDDY, J. N. (1997). Mechanics Of Laminated Composite Plates and Shells. *Theory and Analysis*, p. 855.
- ROZYLO, P. (04 de Novembro de 2020). Experimental-numerical study into the stability and failure of compressed thin-walled composite profiles using progressive failure analysis and cohesive zone model. *Composite Structures*.

- ROZYLO, P., & DEBSKI, H. (16 de Abril de 2020). Effect of eccentric loading on the stability and load-carrying capacity of thin-walled composite profiles with top-hat section. *Composite Structures*.
- SARAVIA, C. M., MACHADO, S. P., & CORTÍNEZ, V. H. (21 de Agosto de 2011). A geometrically exact nonlinear finite element for composite closed section thin-walled beams. *Computers and Structures* , pp. 2337-2351.
- SAWILOWSKY, S. S. (5 de Janeiro de 2003). You Think You've Got Trivials? *Journal of Modern Applied Statistical*, p. 21.
- SHEIKH, A. H., & THOMSEN, O. T. (25 de Abril de 2008). An efficient beam element for the analysis of laminated composite beams of thin-walled open and closed cross sections. *Composites Science and Technology*, pp. 2273-2281.
- SHEIKH, A. H., BENNETT, T., & THOMSEN, O. T. (19 de Agosto de 2020). An efficient model for laminated composite thin-walled beams of open or closed cross-section and with or without in-filled materials. *Composite Structures*.
- SONG, O., LIBRESCU, L., & JEONG, N. H. (2001). Static response of thin-walled composite I-Beams loaded at their free-end cross-section: analytical solution. *Composite Structures* 52, pp. 55-65.
- VO, T. P., & LEE, J. (15 de Junho de 2007). Free vibration of thin-walled composite box beams. *Composite Structures* 84, pp. 11-20.
- WANG, H., & LIU, J. (2016). Tolerance simulation of thin-walled C-section composite beam assembling with small displacement torsor model. *ScienceDirect*, pp. 274-279.

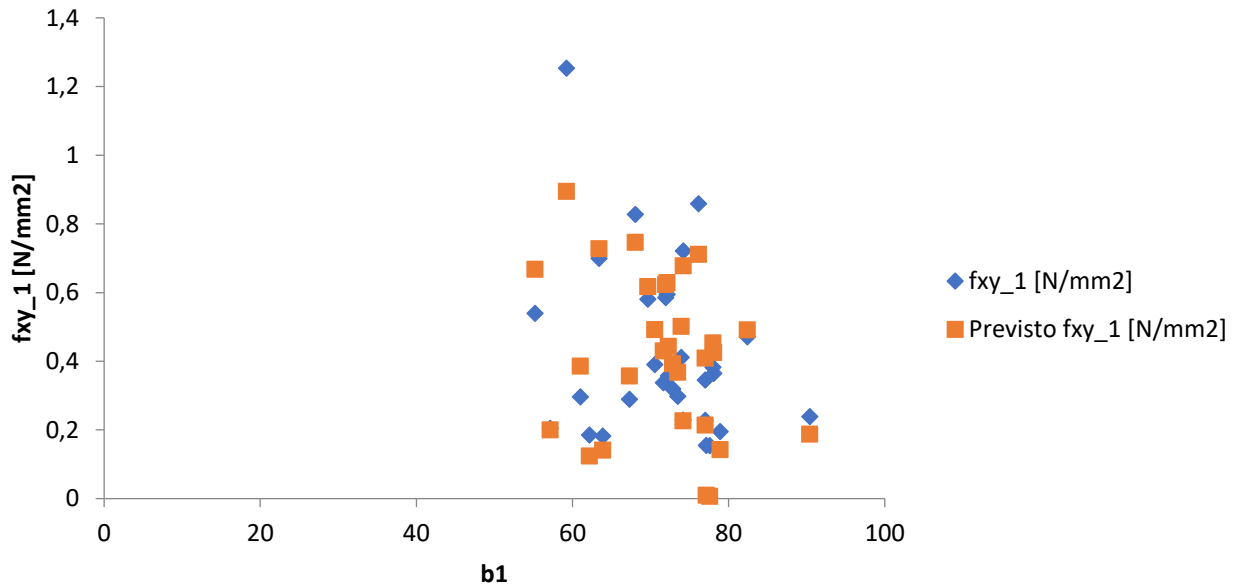
Anexos A – Desenhos de linha ajustado e Histogramas do caso de estudo 2



(t) Desenho de linha ajustada

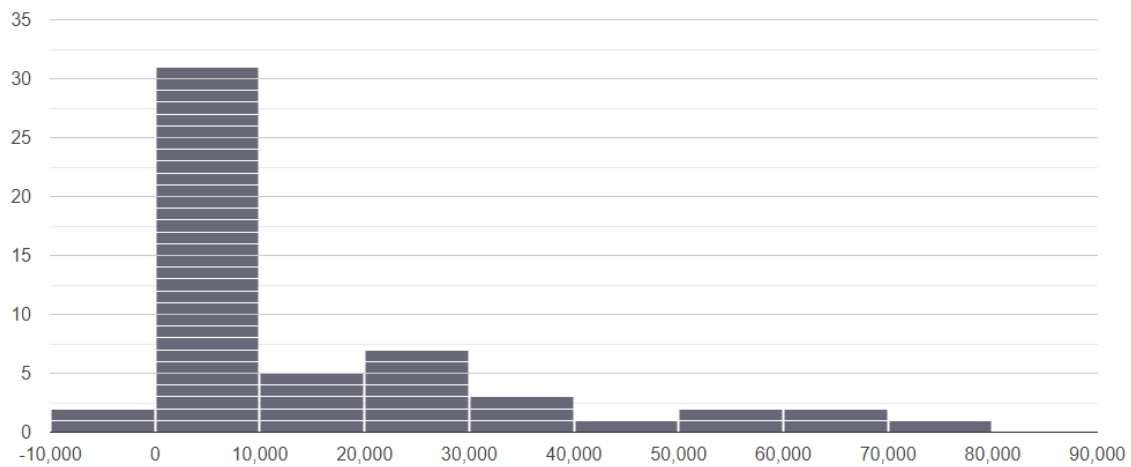


(b1) Desenho de linha ajustada

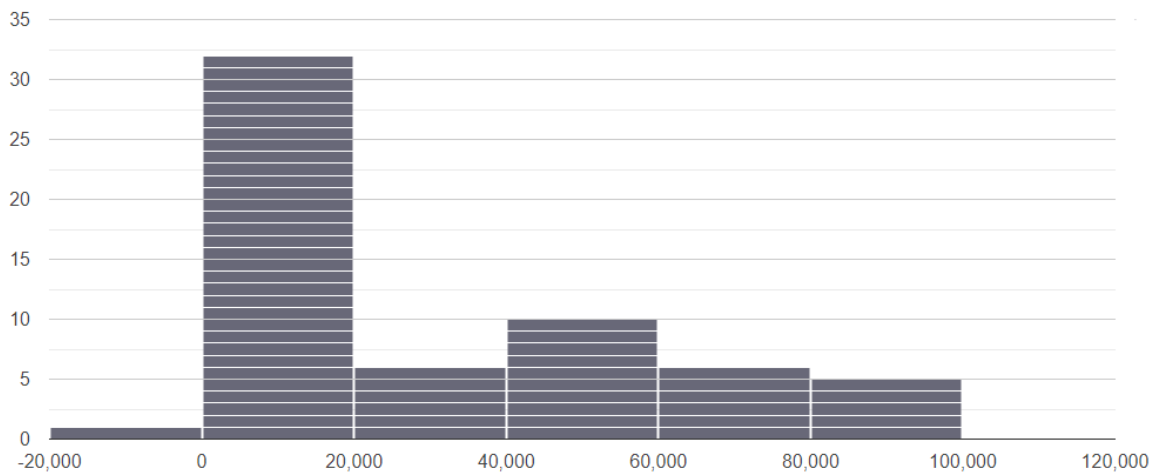


Histogramas dos modelos validados do caso de estudo 2

Resíduos Padrão - Rigidez torsional



Resíduos Padrão - Tensão de corte máxima 1



Resíduos Padrão - Tensão de corte máxima 2

