A FLEXIBILIDADE DE CÁLCULO MULTIPLICATIVO NUM CONTEXTO DE ENSINO EXPLORATÓRIO

Sónia Alexandra Gomes de Deus dos Santos

Dissertação apresentada à Escola Superior de Educação de Lisboa para obtenção do grau de Mestre em Educação Matemática na Educação Pré-escolar e nos 1º e 2º Ciclos do Ensino Básico

2016

A FLEXIBILIDADE DE CÁLCULO MULTIPLICATIVO NUM CONTEXTO DE ENSINO EXPLORATÓRIO

Sónia Alexandra Gomes de Deus dos Santos

Dissertação apresentada à Escola Superior de Educação de Lisboa para obtenção do grau de Mestre em Educação Matemática na Educação Pré-escolar e nos 1º e 2º Ciclos do Ensino Básico

Orientadora:
Professora Doutora Margarida Maria Amaro Teixeira Rodrigues

2016

Resumo

Este estudo tem como objetivo compreender o modo como os alunos desenvolvem a flexibilidade de cálculo multiplicativo num contexto de ensino exploratório, tendo sido delineadas três questões de investigação: i) Quais as estratégias usadas pelos alunos quando resolvem tarefas de multiplicação?; ii) Como evoluem as estratégias usadas pelos alunos? e iii) Como é que os alunos usam de forma flexível o cálculo multiplicativo?

O estudo insere-se no paradigma interpretativo de natureza qualitativa, tendo sido realizada uma experiência de ensino. O estudo realizou-se numa turma de 3.º ano e teve como foco dois pares de alunos. Durante a experiência de ensino, foram propostas sete tarefas de multiplicação e de divisão, tendo sido aplicadas pela docente da turma. A recolha de dados decorreu através das seguintes técnicas: observação direta e participante e recolha documental. Os documentos utilizados como fontes de informação incluem: (a) os registos vídeo e áudio e respetivas transcrições, (b) as notas de campo e (c) os trabalhos elaborados pelos alunos.

Os resultados deste estudo revelam que, aquando da resolução de situações multiplicativas, inicialmente, os alunos privilegiaram estratégias de natureza aditiva. Mais tarde, os pares passaram a aplicar sobretudo estratégias de natureza multiplicativa, recorrendo a cálculos aditivos apenas em casos pontuais. No que se refere à resolução de situações de proporcionalidade, os alunos evidenciaram o uso de uma estratégia aditiva em combinação com o uso de estratégias multiplicativas escalares e funcionais.

Relativamente à flexibilidade de cálculo multiplicativo, os pares: i) estabeleceram relações numéricas; ii) usaram estratégias que incluem o uso de propriedades da multiplicação; e iii) utilizaram factos básicos por si dominados na origem de diferentes estratégias. Como indicador de alguma fragilidade ao nível do cálculo flexível, verifica-se a utilização da estratégia de partição de números de forma mecanizada, usando-a não só para resolver uma tarefa, mas também para verificar e demonstrar aos outros a correção de uma outra estratégia mobilizada flexivelmente.

Palavras-chave: multiplicação, estratégias de cálculo, tarefas matemáticas, ensino exploratório, flexibilidade de cálculo.

Abstract

This study aims to understand how the students develop the flexibility of multiplicative calculation in a context of exploratory teaching. Based on the purpose of the study three research questions were outlined: i) What are the strategies used by students when solve tasks of multiplication?; ii) How the strategies used by the students evolve? and iii) How do the students use flexibly the multiplicative calculation?

The study adopts a qualitative methodology within an interpretive paradigm having been held a teaching experience. The study took place in a third-grade class during the school year 2015/2016 and had focused on two pairs of students. During the teaching experience, seven multiplication and division tasks had been proposed, having been applied by the teacher's class.

The data collection took place through the following techniques: direct and participant observation and documentary collection. Documents used as sources of information include: (a) video and audio records and respective transcriptions, (b) the field notes and (c) the work produced by students.

The results of this study show that initially, when students solved multiplicative situations, they applied additive strategies. Later, the pairs began to apply multiplicative strategies, using the additive calculations only in punctual cases. In regard to the resolution of situations of proportionality, students showed the use of an additive strategy in combination with the use of multiplicative scalar and functional strategies.

In what concerns the flexibility of multiplicative calculation, the pairs: i) established numerical relationships; ii) used strategies that include the use of properties of multiplication; and iii) used basic facts at the origin of different strategies. The mechanized way as students used the strategy of numbers partition is an indicator of some fragility of the flexible calculation. The students used it not only to solve a task, but also to check and demonstrate to others the correction of another strategy mobilized flexibly.

Keywords: multiplication, calculation strategies, mathematical tasks, exploratory teaching, flexible calculation.

Agradecimentos

À minha orientadora, Professora Margarida Rodrigues, pelo apoio prestado, pelas sugestões que me deu, pela atenção, pelas críticas construtivas, pelo otimismo transmitido e por tudo o que me ensinou ao longo deste percurso.

À minha família, de sempre e para sempre, por estarem comigo em todos os momentos: a minha mãe, Maria da Conceição Santos; o meu pai, José Manuel Santos; o meu irmão, Bruno Santos e o meu tio, José Sérgio Gomes.

Aos meus avós, que mesmo não estando fisicamente presentes, caminham sempre ao meu lado.

A um amigo muito especial que me acompanhou durante quase dezassete anos e que infelizmente partiu durante este meu caminho. Até um dia, R.

À pessoa que me inspirou a seguir a profissão de professora, Professora Maria Teresa Naia, pelo carinho e apoio manifestados desde a minha infância.

Aos amigos pela paciência, pelo carinho e apoio constantes.

Ao Agrupamento de Escolas por permitir o desenvolvimento deste estudo.

À docente da turma pela recetividade, disponibilidade, simpatia e atenção.

A todos os alunos da turma de 3º ano por terem colaborado neste estudo, em especial, aos dois pares de alunos.

Aos meus colegas de Mestrado, principalmente às colegas Aida Pereira, Lídia Ferro e Rita Cruz, por me terem ajudado e incentivado a concluir esta etapa da minha vida.

A todos os professores do Mestrado por todo o conhecimento transmitido ao longo desta trajetória.

ÍNDICE GERAL

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABELAS

1. INTRODUÇÃO

O presente capítulo consiste numa introdução ao estudo e contém o problema, o objetivo e as questões que despoletaram a investigação tal como a pertinência do estudo e a organização da dissertação.

1.1. Problema e objetivo do estudo

Pesquisas têm demonstrado que a aprendizagem dos números e das operações constitui um processo complexo para as crianças (ex., Fuson,1992). Assim, “é essencial conhecer algumas relações numéricas elementares, como a adição de números com um único algarismo e a multiplicação de dois números, com um algarismo cada; assim como as suas operações inversas, a subtração e a divisão” (National Council of Teachers of Mathematics, 2007, p. 34).

No Programa de Matemática do Ensino Básico de 2007, os autores afirmam que

> o professor deve propor aos alunos a realização de diferentes tipos de tarefas, dando-lhes uma indicação clara das suas expectativas em relação ao que espera do seu trabalho, e apoiando-os na sua realização. Para além da realização das tarefas propriamente ditas, o ensino-aprendizagem tem de prever momentos para confronto de resultados, discussão de estratégias e institucionalização de conceitos e representações matemáticas. Ouvir e praticar são atividades importantes na aprendizagem da Matemática mas, ao seu lado, o fazer, o argumentar e o discutir surgem com importância crescente nessa aprendizagem. (ME, 2007, p. 8-9)

Em 2011, Canavarro defende que o ensino exploratório não advoga que os alunos aprendam Matemática sozinhos, nem que o professor espere por “rasgos iluminados e criativos dos seus alunos” (p. 11), pois “o ensino exploratório da Matemática defende que os alunos aprendem a partir do trabalho sério que realizam com tarefas valiosas que fazem emergir a necessidade ou vantagem das ideias matemáticas que são sistematizadas em discussão coletiva” (p.11).

Tendo em conta o que foi mencionado, considerei pertinente realizar este estudo com o seguinte objetivo de investigação:

- Compreender o modo como os alunos desenvolvem a flexibilidade de cálculo multiplicativo num contexto de ensino exploratório.

No estudo foram igualmente apresentadas tarefas que envolvem a operação divisão, devido à relação existente com a multiplicação. "Uma vez que a divisão é a operação inversa da multiplicação, os alunos podem recorrer às combinações da multiplicação para aprenderem as da divisão" (NCTM, 2007, p. 177).

1.2. Questões de investigação

Este estudo pretende dar resposta às seguintes questões:

- Quais as estratégias usadas pelos alunos quando resolvem tarefas de multiplicação?
- Como evoluem as estratégias usadas pelos alunos?
- Como é que os alunos usam de forma flexível o cálculo multiplicativo?

1.3. Pertinência do Estudo

Considero este estudo pertinente, pois ao longo do meu percurso enquanto aluna sempre tive uma boa relação com a Matemática, principalmente no domínio Números e Operações e apesar de, até à presente data, não ter obtido colocação como titular de uma turma de 1º ciclo, detenho experiência em explicações a alunos dos diferentes anos que integram o ciclo, tendo verificado algumas dificuldades em tarefas que envolvem a multiplicação (e/ou divisão). Assim, realizo este estudo para compreender o modo como os alunos desenvolvem a flexibilidade de cálculo multiplicativo num contexto de ensino exploratório, e consequentemente, conseguir perceber quais as estratégias mais usadas pelos alunos e a sua evolução.

Segundo o NCTM (2007), do "3º ao 5º ano, ajudar os alunos a desenvolverem o significado da multiplicação e da divisão de números inteiros deverá ser considerado essencial" (p. 36).

De acordo com Fuson, Verschaffel, Greer e De Corte (citados por Mendes, 2012), a investigação disponível associada à aprendizagem da multiplicação tem sido em menor número quando comparada com a relacionada com as operações adição e subtração. A escassez de investigação é realçada por Verschaffel et al. (citado por Mendes, 2012), em particular, no que diz respeito às estratégias usadas pelos alunos para resolver problemas de multiplicação (e de divisão).

1.4. Organização da Dissertação

O estudo encontra-se organizado em cinco capítulos. No primeiro, apresenta-se o tema, o objetivo, as questões de investigação, a pertinência do estudo e a organização da dissertação. No segundo capítulo, encontra-se o enquadramento teórico, abordando os temas: multiplicação e estratégias de multiplicação; ensino exploratório e flexibilidade de cálculo.

O terceiro capítulo contempla a metodologia usada, indicando as opções metodológicas; a descrição dos participantes e dos critérios de seleção, a descrição da professora, da turma, dos dois pares, do contexto de trabalho; a recolha de dados e a análise dos dados.

O quarto capítulo contém a análise dos dados recolhidos ao longo da sequência de aprendizagem.

O quinto capítulo engloba as conclusões, uma reflexão sobre o estudo desenvolvido e algumas recomendações para estudos futuros.

2. ENQUADRAMENTO TEÓRICO

2.1. A multiplicação

O conceito de multiplicação deve ser gradualmente ensinado e trabalhado para que os alunos apreendam e coloquem em prática estratégias cada vez mais sofisticadas e eficientes na resolução de problemas.

Alguns estudos mostram que os alunos conseguem desenvolver conceitos de multiplicação e divisão nos primeiros anos de escola (Carpenter et al. citados por Mulligan & Watson, 1998) mesmo sem ter havido uma apresentação formal destas operações (Mulligan & Watson, 1998).

De acordo com Mendes, Brocardo e Oliveira (2013), na aprendizagem da multiplicação importa desenvolver a passagem do raciocínio aditivo para um de natureza multiplicativa. Afirmam ainda que a progressão dos procedimentos usados pelos alunos está subjacente à construção gradual das ideias que os suportam.

Mulligan e Watson (1998) indicam que o raciocínio multiplicativo é essencial no desenvolvimento de conceitos e processos como razão e proporção, área e volume, probabilidade e análise de dados.

Inicialmente, os modelos construídos pelos alunos para representar situações multiplicativas estão associados à ideia de multiplicação como adição repetida de parcelas iguais (Mendes et al., 2013). No ensino da multiplicação, o professor deve utilizar modelos de raciocínio multiplicativo aos quais os alunos recorrerão gradualmente quando confrontados com situações problemáticas. Exemplos desses modelos são o uso da linha vazia, as disposições retangulares e as tabelas de razão.

Barmby et al. (citados por Mendes et al., 2013) declaram que a opção pelo modelo de disposição retangular suporta a evolução do raciocínio multiplicativo, pois permite visualizar a propriedade comutativa da multiplicação e as várias partições dos números que podem ser feitas, tendo subjacente a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

A decomposição de um dos fatores para realizar um produto, tendo subjacente a propriedade distributiva em relação à adição está na base da maior parte dos procedimentos multiplicativos de resolução das tarefas cujo contexto recorre à disposição retangular e em que, pelo menos um dos fatores, é maior que dez (Mendes et al., 2013).

A aprendizagem da multiplicação deve ser feita numa perspetiva de desenvolvimento de sentido de número (Mendes et al., 2013). Mcintosh, Reys e Reys (1992, p. 3) sublinham a importância do sentido de número, definindo-o da seguinte forma:

> o sentido de número refere-se à compreensão geral que uma pessoa tem de um número e das operações, juntamente com a habilidade e inclinação para usar essa compreensão de maneira flexível para fazer julgamentos matemáticos e desenvolver estratégias úteis para lidar com números e operações.

A aquisição de sentido de número é feita de forma gradual, sendo um processo evolucionário que começa muito antes da escolaridade formal.

2.1.1. Estratégias de multiplicação

Os alunos, ao longo da aprendizagem, evidenciam a aplicação de diferentes estratégias. Heirdsfield, Cooper, Mulligan e Irons (1999) mencionam as seguintes cinco estratégias: (i) estratégias de contagem que englobam qualquer estratégia de contagem, como a contagem por saltos para a frente, a adição repetida e estratégias de redução de metade e dobro; (ii) estratégias de facto básico onde se usa um facto conhecido de multiplicação ou divisão ou um facto derivado; (iii) estratégias de decomposição dos números segundo o valor de posição e cálculo da direita para a esquerda; (iv) estratégias de decomposição dos números segundo o valor de posição e cálculo da esquerda para a direita e (v) as estratégias holísticas.

As estratégias holísticas parecem ser mentalmente menos complexas do que as estratégias de decomposição, pois requerem menos trabalho de memória (Heirdsfield et al., 1999).

Foxman e Beishuizen (2002) indicam as seguintes categorias de estratégias: (i) estratégias de partição de números e (ii) estratégias de compensação. Nas primeiras, integram-se as estratégias de partição que podem ser realizadas somente no multiplicador, só no multiplicando, ou em ambos, de duas maneiras diferentes: usando números não múltiplos ou múltiplos de 10. O uso destas estratégias têm como objetivo facilitar a forma de multiplicar. A segunda categoria abrange as estratégias de compensação. Nestas, os números são combinados de acordo com as suas características. Tal como em estratégias descritas anteriormente, este ajuste pode ser efetuado apenas no multiplicador, no multiplicando ou em ambos os números.

Os contextos presentes nas tarefas de multiplicação também têm um papel importante. Foxman e Beishuizen (2002) mencionam a diferença existente na taxa de sucesso dos alunos aquando a resolução de problemas, distinguindo os problemas com números em contexto daqueles que não estão em contexto. Desta forma, concluem que no segundo caso, a taxa de sucesso é mais reduzida.

Silver (citado por McIntosh et al.,1992) defende que o contexto no qual os problemas matemáticos são apresentados influencia o raciocínio. Assim, é conveniente apresentar aos alunos problemas com uma contextualização rica, o que não só promoverá a resolução de problemas, mas também estimulará o sentido de número.

Segundo Fosnot e Dolk (2001) os contextos devem integrar três componentes: (i) permitir o uso de modelos, (ii) fazer sentido para os alunos e (iii) criar surpresa e suscitar questões.

Mulligan e Mitchelmore (1997) distinguem as seguintes estratégias: i) contagem direta, ii) contagem rítmica, iii) contagem por saltos, iv) cálculo aditivo e v) cálculo multiplicativo.

Na primeira categoria, os materiais físicos são usados para modelar o problema e os objetos são simplesmente contados, sem qualquer referência óbvia à estrutura multiplicativa.

Na segunda, a contagem segue a estrutura do problema. Simultaneamente com a contagem, uma segunda contagem do número de grupos é mantida.

Na terceira, a contagem é efetuada em múltiplos, tornando mais fácil manter a contagem do número de grupos. Na quarta, a contagem é substituída por cálculos de natureza aditiva. Por fim, na quinta categoria, os cálculos assumem a forma de factos conhecidos ou derivações de um facto conhecido.

Ambrose, Baek e Carpenter (2003) apresentam as seguintes estratégias: i) modelação direta, ii) uso de adições e de dobros, iii) algoritmos inventados usando o dez.

A primeira estratégia integra a modelação direta sem partição dos fatores que envolve o uso de contadores individuais que representam diretamente o problema e a modelação direta com partição do multiplicando em dez e unidades que se relaciona com o desenvolvimento do conhecimento de conceitos numéricos de base 10, pois os alunos preferem usar materiais de base 10 em vez de contadores individuais.

A segunda engloba i) a adição de dobros, ii) o uso complexo de dobros e iii) a construção a partir de outros fatores. O primeiro caso é a estratégia abstrata mais simples. Uma estratégia multiplicativa de uso complexo de dobros corresponde a compor o multiplicador a partir de dobros sucessivos do multiplicando usando, implicitamente, as propriedades associativa e distributiva da multiplicação em relação à adição. Esta estratégia é usada para adicionar mais rapidamente os números, evitando a dificuldade associada à adição de uma longa lista, para além do dobro ser o facto numérico que os alunos aprendem primeiro. Uma estratégia de construção a partir de outros fatores corresponde a (de)compor o multiplicador de modo a obter produtos mais fáceis de calcular.

A terceira engloba i) partição do multiplicador em dezenas e unidades e ii) partição do multiplicador e do multiplicando.

Hartnett (2007, p. 345) afirma que

> usar estratégias de cálculo mental com flexibilidade requer sentido de número e ao usar uma abordagem de estratégias de cálculo, em vez de se focarem em algoritmos processuais, os alunos têm oportunidades para trabalhar com os números de forma flexível, o que por sua vez, oferece oportunidades para melhorar o seu sentido de número.

Hartnett (2007) criou cinco categorias de estratégias, que por sua vez se dividem em vinte e uma subcategorias. As categorias são: i) contar para a frente, ii) usar dobros e/ou metades, iii) ajustar e compensar, iv) usar partições de números e v) usar o valor de posição.

A primeira categoria refere-se à contagem para a frente para multiplicar. A segunda refere-se ao estabelecimento de relações de dobro e de metade entre os fatores de um mesmo produto. A terceira preconiza a substituição de um produto por outro, que envolve um fator que é "próximo" de um dos números do produto que é preciso calcular, mas mais fácil de efetuar. A quarta integra a partição de um ou dois números usando o valor de posição e a partição de um ou dois números usando números compatíveis. A quinta inclui as estratégias: pensar em múltiplos de dez e focar-se em posições relevantes.

Fosnot e Dolk (2001) propõem a seguinte categorização de estratégias de multiplicação: i) adição repetida; ii) contagem unitária; iii) *unitizing*; iv) de contagem; v) uso de dobros e vi) cálculo da divisão.

Na primeira categoria, adiciona-se sempre o mesmo número. Na segunda, contam-se os elementos um a um. Na terceira, as unidades isoladas podem ser representadas como um todo/grupo. A quarta engloba o contar para a frente e para trás; a contagem por saltos e a redução para metade ou dobro. A quinta refere-se à adição do número de forma a calcular o dobro e a sexta relaciona-se com o uso da divisão como operação inversa da multiplicação.

Fosnot e Dolk (2001) também alegam que determinadas estratégias envolvem o uso das propriedades distributiva, associativa e comutativa, enunciando-as como “grandes ideias” associadas à multiplicação.

A tabela 1 resume as categorizações de estratégias usadas pelos alunos de acordo com os autores acima referidos.

Tabela 1- *Categorizações das estratégias usadas pelos alunos na resolução de problemas de multiplicação*

Heirdsfield, Cooper, Mulligan e Irons (1999)		
Estratégia	**Descrição**	**Exemplo**
De contagem	A contagem é efetuada por saltos dos múltiplos, para a frente ou para trás.	“5, 10, 15, 20, 25”
	Adição repetida.	4x6; “6+6+6+6”
	Contagem envolvendo o uso da metade ou dobro para facilitar uma adição repetida.	5x6; Dobro de 6, dobro de 6, mais 6
Uso de factos	Usa-se um facto conhecido de multiplicação ou	“5x8: 10x8=80, logo 5x8=40”

básicos	divisão ou um facto derivado.	
Estratégias holísticas	Os números são tratados como totalidades.	“5x19=5x20-5=100-5=95”
Separação direita esquerda	Os números são decompostos segundo o valor de posição e calculados da direita para a esquerda.	“5x19:5x9=45=40+5, 5x10=50, 50+40=90,95”
Separação esquerda direita	Os números são decompostos segundo o valor de posição e calculados da esquerda para a direita.	“5x19:5x10=50, 5x9=45, 50+45=95”
Fosnot e Dolk (2001)		
Adição repetida	Adiciona-se sempre o mesmo número.	“6+6=12, 12+6=18; 18+6=24”
Contagem unitária	Conta os elementos um a um.	“1,2,3,4”
Unitizing	As unidades isoladas podem ser representadas como um todo/grupo.	“5+5+5= três cincos”
De contagem	Contar para a frente por saltos.	“7, 14, 21,28”
	Redução para metade ou dobro.	“4x3 = 2x6”
Uso de dobros	Adição do número de forma a calcular o dobro.	“8+8=16, 16+16=32”
Cálculo da divisão	Uso da divisão como operação inversa da multiplicação.	“24:4=6, logo 4x6=24”
Mulligan e Mitchelmore (1997)		
Contagem direta	Os materiais físicos são usados para modelar o problema e os objetos são simplesmente contados, sem qualquer referência óbvia à estrutura multiplicativa.	Uso de material concreto ou desenhos.
Contagem rítmica	A contagem segue a estrutura do problema. Simultaneamente com a contagem, uma segunda contagem do número de grupos é mantida.	“1, *2*; 3, *4*; 5, *6*” ou “*6*; 5, *4*; 3, *2*.”
Contagem por saltos	Contagem é efetuada em múltiplos, tornando mais fácil manter a contagem do número de grupos.	“2, 4, 6”
Cálculo aditivo	A contagem é substituída por cálculos.	“2+ 2 = 4, 4 + 2 = 6” ou “6 – 2 = 4, 4 – 2 = 2.”

Cálculo multiplicativo	Os cálculos assumem a forma de factos conhecidos ou derivações de um facto conhecido.	"3 vezes 2 é 6" "3x 2 = 2x 2 + 2."
Baek (2006)		
Modelação direta	Modelação através do uso de material manipulável.	
Adição repetida	Adicionar repetidamente o multiplicando.	4x6; 6+6+6+6
Adição de dobros	É usada de modo a tornar o processo de adições repetidas mais rápido.	4x6; 12+12
Partição de números	Pode ser realizada apenas no multiplicador, só no multiplicando, ou em ambos, de duas maneiras diferentes: usando números não múltiplos ou múltiplos de 10.	"15 caixas de 177 maçãs cada 15=5x3, 3x177, 5x3x177".
Compensação	Pode ser realizada apenas no multiplicador, só no multiplicando, ou em ambos.	Se tiver cinco sacos com 250 berlindes cada, quantos berlindes tenho no total? "Visto que vou multiplicar por cinco posso dividir 250 ao meio e multiplicar por 10. Metade de 250 são 125 e 125 vezes 10 são 1250. É 1250."
Hartnett (2007)		
Contar para a frente	Contar para a frente para multiplicar.	5, 10, 15, 20, 25
Uso de dobros e/ou metades	Estabelecimento de relações de dobro e de metade entre os fatores de um mesmo produto.	"25x8=25x(2x4)=(25x2)x4=50 x4."
Uso de partições de números	Decomposições, decimais ou não, de um ou dos dois fatores envolvidos.	16 x 4 = (10+6) x 4 = 10x4 + 6x4 = 40 + 24 = 64
Uso do valor de posição	Inclui as estratégias: pensar em múltiplos de dez e focar-se em posições relevantes	

Ajustar e compensar	Substituição de um produto por outro, que envolve um fator que é “próximo”, mais fácil de efetuar, tendo de se compensar no final. Está subjacente o uso da propriedade distributiva da multiplicação em relação à subtração.	“19x5; 20x5=100 100-5=95”
	Foxman e Beishuizen (2002)	
Decomposição	Realizam-se decomposições, decimais ou não, de um ou dos dois fatores envolvidos.	16 x 4 = (10+6) x 4 = 10x4 + 6x4 = 40 + 24 = 64
Arredondar, multiplicar e compensar	Substituição de um produto por outro, que envolve um fator que é “próximo”, mais fácil de efetuar, tendo de se compensar no final.	“19x5; 20x5=100 100-5=95
	Ambrose, Baek e Carpenter (2003)	
Uso complexo de dobros	Compor o multiplicador a partir de dobros sucessivos do multiplicando usando, implicitamente, as propriedades associativa e distributiva da multiplicação em relação à adição.	“47x34 1x34, 2x34, 4x34 até 48x34, subtraindo depois 1x34”
Construção a partir de outros fatores	(De) compor o multiplicador de modo a obter produtos mais fáceis de calcular. Está subjacente o uso das propriedades associativa e distributiva da multiplicação em relação à adição.	“24×32, em que um aluno decompõe 24 em 20+1+1+2 e, a seguir, decompõe 20 em 4×5, efetuando depois os produtos parciais correspondentes”
Algoritmos inventados usando o dez	Partição do multiplicador em dezenas e unidades	16 x 4 = (10+6) x 4 = 10x4 + 6x4 = 40 + 24 = 64
	Partição de ambos, do multiplicador e do multiplicando em dezenas e unidades	16 x 45 = (10+6) x (40+5) 10x40 = 400 6x40 = 240 10x5= 50 6x5= 30 400+240+50+30 = 720

Nesher (citado por Mulligan & Watson, 1998) indica que os aspetos linguísticos e a estrutura semântica de um problema influenciam as soluções dos alunos. Tanto a estrutura semântica do problema como os números específicos podem influenciar o modelo a usar e, consequentemente, o desempenho dos alunos.

A interligação entre a multiplicação e a divisão é um aspeto que não pode ser ignorado. McIntosh et al. (1992) reiteram que ter consciência da relação entre as operações, especificamente, entre a multiplicação e a divisão é um dos aspetos contemplados no conhecimento e destreza com as operações, componente do sentido de número. Certos problemas de divisão podem ser construídos como problemas de inversão, com vista à aplicação das duas operações.

No estudo de Heirdsfield, Cooper, Mulligan e Irons (1999), as respostas das crianças mostraram um desenvolvimento da simples contagem para o uso de factos combinados ou conhecidos para pequenas combinações numéricas; de estratégias complexas até procedimentos algorítmicos para um número largo de combinações.

Segundo Kamii, Lewis e Livingston; Reys e Barger (citados por Mulligan & Watson, 1998) é necessário desenvolver proficiência em computação mental através da aquisição de estratégias autodesenvolvidas ou espontâneas em vez da memorização de procedimentos.

Os alunos devem compreender que um todo composto é um grupo de itens individuais que devem ser vistos como uma unidade. Por exemplo, um aluno deve ver três itens como "um três", de modo a que a unidade "3" seja uma unidade contável (Mulligan & Watson, 1998). Lamon (citada por Mulligan & Watson, 1998) designa este processo por *unitizing*. Os alunos precisam de coordenar os grupos de grupos iguais relacionando os compostos de compostos (por exemplo, seis grupos de três).

De acordo com Mendes et al. (2013), existem ideias essenciais associadas à multiplicação: o compreender um grupo como uma unidade (*unitizing*); a propriedade distributiva da multiplicação, em relação à adição e à subtração; a propriedade comutativa da multiplicação; os padrões de valor de posição associados à multiplicação por dez e a propriedade associativa da multiplicação.

O modelo de crescimento cognitivo SOLO (*Estrutura de Resultados de Aprendizagem Observados*) apresenta uma aprendizagem em cinco níveis (Biggs & Collis citados por

Mulligan & Watson, 1998): pré-estrutural, uniestrutural, multiestrutural, relacional e abstração alargada. No nível pré-estrutural, os alunos respondem de forma idiossincrática, não se focando nos elementos matemáticos específicos ou na estrutura do problema. O uniestrutural refere-se ao uso de elementos simples. Neste nível, os alunos tendem a usar os dedos para contar; no multiestrutural, usam-se vários elementos; o relacional implica vários elementos relacionados para formar um argumento coerente e as respostas abstratas alargadas indicam a transição para o modo seguinte (mais avançado). Uma dimensão crítica na análise de conceitos matemáticos usando o modelo SOLO é a noção de que os alunos podem ter desempenhos correspondentes a diversos níveis dependendo, por exemplo, da situação apresentada no problema, da sofisticação dos conceitos e das quantidades numéricas envolvidas.

A falta de desenvolvimento adequado, através de modos icónicos simbólicos e concretos, pode influenciar negativamente a transição para o pensamento formal de muitos alunos. No modo simbólico concreto, os conceitos multiplicativos são experimentados através de símbolos e notações matemáticas e através da linguagem escrita; as respostas são geralmente evocadas mentalmente (Mulligan & Watson, 1998).

As imagens formadas no modo icónico são fulcrais para o desenvolvimento do modo simbólico concreto, visto que fornecem a estrutura sobre a qual as operações multiplicativas são desenvolvidas (Mulligan & Watson, 1998).

Mulligan e Watson (1998) indicam que embora os diferentes problemas possam exigir diferentes níveis de resposta para esta ser considerada correta, aquilo que é mais relevante é a variedade de respostas a vários níveis, independentemente do conjunto de tarefas ou da exatidão da resposta.

Mesmo que mais tarde, os alunos voltem aos métodos de contagem unitária menos sofisticados para realizar um cálculo, a mudança para o pensamento concreto simbólico é necessária ao desenvolvimento da multiplicação e divisão como operações (Mulligan & Watson, 1998).

Nesta fase, é importante que se incentive as crianças a avançarem para lá da contagem unitária de modo a usarem a estrutura dos grupos iguais. Steffe e Confrey (citados por Mulligan & Watson, 1998) argumentam que devemos ensinar constructos alternativos para a multiplicação, como por exemplo a adição repetida e a coordenação de unidades compostas.

De acordo com Trefers e Buys (citados por Mendes et al., 2013), a evolução dos procedimentos de cálculo usados pelos alunos corresponde a uma progressiva esquematização através dos diferentes níveis de desenvolvimento da operação multiplicação.

Para Mendes et al. (2013), a evolução dos procedimentos dos alunos inclui a progressão de procedimentos de contagem e aditivos para procedimentos de tipo multiplicativo e tem subjacente a mudança para modos de resolução mais sofisticados.

2.1.2. Estratégias para lidar com situações de proporcionalidade

Vergnaud (2014) distingue duas grandes categorias de relações multiplicativas nos problemas de tipo multiplicativo, designando assim as relações que comportam seja uma multiplicação seja uma divisão: i) isomorfismo de medidas e ii) produto de medidas. A primeira consiste numa relação quaternária entre quatro quantidades: duas quantidades são medidas de um certo tipo e as outras duas são de outro tipo (por exemplo, pessoas e objetos, bens e custos, tempos e distância). Exemplo: "Tenho 3 pacotes de iogurte. Há 4 iogurtes em cada pacote. Quantos iogurtes tenho?" (2014, p. 239).

Vergnaud (citado por Pinto, 2011) define a existência de dois processos com caráter multiplicativo: i) quando os alunos no produto a x b, entendem a e b como números e não como grandezas e ii) quando os alunos no produto a x b, entendem a e b como grandezas. O segundo processo pode corresponder a dois procedimentos diferentes; i) raciocínio escalar e ii) raciocínio funcional. O primeiro corresponde a uma razão entre valores da mesma grandeza e não possui dimensão, permitindo passar de uma linha à outra na mesma categoria de medidas. O segundo representa funções e expressa a passagem de uma categoria de medidas à outra.

No isomorfismo de medidas, os problemas podem ser resolvidos usando:

- uma multiplicação;
- uma divisão;
- uma regra de três simples.

A segunda grande categoria de relação multiplicativa, produto de medidas, consiste numa relação ternária entre três quantidades, das quais uma é o produto das duas outras. Exemplo: “3 rapazes e quatro raparigas querem dançar. Cada rapaz quer dançar com cada rapariga e cada rapariga, com cada rapaz. Quantos seriam os casais possíveis?” (2014, p. 253). Um casal consiste na associação de um elemento do primeiro conjunto com um elemento do segundo. O número de casais é igual ao produto do número de rapazes pelo número de raparigas.

Fernández, Llinares, Dooren, Bock e Verschaffel (2010) reiteram que a natureza das quantidades existentes em problemas de proporcionalidade pode afetar o desempenho dos alunos. No estudo realizado por Fernández et al. (2010), os autores concluíram que os alunos usam (ligeiramente) mais métodos proporcionais nos problemas com variáveis discretas do que com variáveis contínuas, tanto em problemas aditivos como em problemas proporcionais. Os resultados deste estudo mostram que os alunos do primeiro ciclo usam sobretudo métodos aditivos em problemas aditivos, mas também em problemas de proporcionalidade. Segundo os autores, “o uso de situações mais realistas pode ajudar os alunos a identificar e reconhecer as relações multiplicativas nas situações de proporcionalidade e a separá-las das aditivas” (2010, p. 20).

Cramer e Post (1993) distinguem quatro estratégias na resolução de situações proporcionais: i) a utilização da taxa unitária; ii) a utilização do fator de mudança, em que são utilizados os múltiplos para estabelecer relação; iii) a utilização das razões como frações, quando as razões são tratadas como frações aplicando-se-lhes o princípio da equivalência de frações e iv) utilização do algoritmo do produto cruzado, que consiste em estabelecer uma proporção, efetuar o produto cruzado e resolver a equação resultante.

Os autores salientam que a utilização da segunda estratégia depende das características dos números presentes no problema, pois se um dos fatores não for um número inteiro, a propensão para o uso desta estratégia diminui consideravelmente.

No estudo desenvolvido por Infante (2014), verificou-se, em alguns casos, um misto entre a utilização de estratégias multiplicativas, escalares e funcionais, e a utilização de estratégias aditivas. Ao longo do tempo, notou-se o abandono das estratégias aditivas e a tendência para a utilização generalizada de estratégias multiplicativas funcionais.

A forma como as crianças pensam acerca das relações funcionais tem implicações em aprendizagens posteriores. Assim, há que desenvolver tarefas que possibilitem aprofundar, alargar e apoiar o desenvolvimento do pensamento funcional dos alunos, desde os primeiros anos de ensino (Blanton & Kaput citados por Infante, 2014).

2.2. O ensino exploratório

O ensino exploratório visa que os alunos aprendam, tendo como ponto de partida o trabalho que realizam, o que possibilita a construção de conhecimento e o surgimento de procedimentos matemáticos com significado, desenvolvendo assim diferentes competências matemáticas.

Ponte (2005, p. 15) refere que "uma estratégia de ensino-aprendizagem com cariz exploratório promoverá atividades de exploração, tais como: algumas investigações, projetos, problemas e exercícios".

O papel do professor é fulcral começando pela seleção das tarefas e pela planificação da exploração matemática das mesmas para alcançar o objetivo matemático traçado. O professor deve saber interpretar as resoluções dos alunos e examiná-las atentamente de forma a articular as ideias com o objetivo traçado.

O professor depara-se frequentemente com uma variedade considerável de respostas dos seus alunos a uma tarefa e deve usá-las para levar a turma a uma compreensão mais profunda do significado matemático. De acordo com Ponte (2005, p. 13) «o "ensino-aprendizagem exploratório" tem como característica principal o professor não procurar explicar tudo, mas deixar uma parte importante do trabalho de descoberta e de construção do conhecimento para os alunos realizarem».

Para Canavarro (2011), uma aula deste tipo inclui quatro fases distintas: a apresentação da tarefa, a exploração, a discussão e a sistematização. Na primeira fase, procede-se à leitura (em silêncio/em voz alta) e interpretação do enunciado da tarefa, a qual deve ser clara, para afiançar que todos os alunos compreendam o que lhes é solicitado. Na segunda, os alunos trabalham autonomamente em grupos ou a pares. Na fase da discussão, os alunos apresentam as estratégias aplicadas com a finalidade de comparar e confrontar as mesmas. Na última fase, o professor institucionaliza novas aprendizagens matemáticas que decorreram do trabalho desenvolvido.

Os problemas matemáticos propostos aos alunos devem ser mais realistas e complexos, promovendo a discussão coletiva das resoluções. Esta discussão deve ser orientada pelo professor. Deste modo, os alunos podem construir e avaliar as suas próprias ideias matemáticas e as dos seus colegas, permitindo igualmente a negociação de significados matemáticos.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008) desenvolveram um modelo pedagógico que especifica cinco práticas para que o professor consiga usar as respostas dos alunos de modo mais eficaz na discussão: antecipar, monitorizar, selecionar, sequenciar e fazer conexões entre as respostas dos alunos, bem como entre estas e as diversas ideias e os diferentes conceitos matemáticos.

Ao antecipar, o professor prevê respostas que possam ser dadas pelos alunos e toma decisões sobre como estruturar as apresentações dos alunos. Assim, o professor fica mais preparado para as discussões coletivas.

Canavarro (2011, p. 13) reitera que ao antecipar,

> o professor dedica-se a: prever a interpretação e o envolvimento dos alunos na tarefa; elencar uma diversidade de estratégias corretas e incorretas, que os alunos poderão usar, com diferentes graus de sofisticação; relacionar essas estratégias com os conceitos, representações ou procedimentos que quer que os alunos aprendam e/ou com as capacidades que quer que eles desenvolvam.

A antecipação realiza-se durante o trabalho de planificação e permite desenvolver expectativas sobre como os alunos poderão interpretar matematicamente um problema, a ordem das estratégias – corretas e incorretas – que eles podem usar para resolvê-lo e como essas estratégias e interpretações podem relacionar-se com os conceitos matemáticos, as representações, os procedimentos e as práticas que o professor gostaria que os seus alunos aprendessem (Stigler & Hiebert citados por Stein et al., 2008).

Antecipar requer que os professores realizem as tarefas matemáticas que estão a planear propor aos seus alunos, de todas as formas possíveis. Antecipando, "o professor fica mais apto a explorar todo o potencial da tarefa para as aprendizagens matemáticas dos alunos e a tomar decisões acerca de como estruturar as apresentações e gerir as discussões com base em critérios relacionados com a aprendizagem matemática" (Canavarro, 2011, p.13).

Bishop e Goffree (1986, p. 10) indicam que "o professor sabendo que várias soluções podem ser imaginadas pelos seus alunos, cria largos espaços para a atividade".

Ao monitorizar o trabalho dos alunos durante a fase da exploração, o professor verificará que a antecipação feita é benéfica. A prática de selecionar determinados alunos para apresentar as suas respostas permite ao professor acompanhar a variedade de respostas que os alunos produzem na fase de exploração.

O objetivo da monitorização é identificar o potencial de aprendizagem matemática das estratégias e representações particulares usadas pelos alunos e que devem ser partilhadas na fase de discussão (Lampert citado por Stein et al., 2008). Os professores que se esforçam durante a fase inicial de planificação para antecipar como os alunos podem responder, sentir-se-ão melhor preparados para monitorizar aquilo que de facto os alunos estão a fazer durante a fase de exploração (Lampert & Schoenfeld citados por Stein et al., 2008).

Após a monitorização, o professor seleciona determinados alunos para partilharem o seu trabalho com o resto da turma. Ao selecionar, o professor mantém o controlo sobre que alunos partilham as suas estratégias e consequentemente qual será o conteúdo matemático da discussão.

Ponte (2005, p. 16) defende que "a discussão constitui um aspeto de comunicação na sala de aula de Matemática". Na discussão, o professor tem o papel de moderador que gere as intervenções dos alunos.

Ao selecionar as estratégias a partilhar,

> o professor pode adotar diversos critérios como, por exemplo, escolher: uma resolução que apresenta um erro recorrente a esclarecer; uma resolução particular que se distingue e acrescenta compreensão e/ou ajuda a atingir o propósito matemático da aula; resoluções com diferentes estratégias matemáticas, sobretudo as mais produtivas; resoluções com representações matemáticas diferentes, sobretudo as mais eficazes (Canavarro, 2011, p.15).

Bishop e Goffree (1986, p. 5) reiteram que "é importante o facto de os erros passarem a ser considerados indicadores do significado que os conceitos matemáticos têm para as crianças em vez de se considerar os erros como noções incorretas a serem corrigidas".

A seleção feita é sequenciada de forma a organizar a discussão coletiva. Ao fazer as escolhas propositadamente sobre a ordem de apresentação das respostas, o professor pode maximizar as hipóteses de que os seus objetivos matemáticos sejam atingidos (Stein et al., 2008).

Uma forma de sequenciação é começar por uma estratégia comum aos alunos e só depois discutir estratégias que foram usadas por um número inferior de alunos. Assim, os alunos são capazes de desenvolver estratégias com maior sucesso e aprender estratégias com maior grau de sofisticação. Além disso, o professor pode querer relacionar ou confrontar estratégias a fim de facilitar a sua comparação matemática.

Canavarro (2011, p. 16) sugere critérios para a sequenciação das apresentações:

> i) começar com uma resolução que ajude a tornar a discussão mais acessível a todos os alunos por permitir esclarecer aspetos essenciais e basilares em que se suportem as ideias mais sofisticadas, independentemente dessa resolução ser correta ou incorreta; ii) caminhar do mais informal para o formal no que diz respeito às representações matemáticas utilizadas; iii) caminhar progressivamente para as resoluções que permitem generalizar conceitos matemáticos ou sistematizar procedimentos.

Stein et al. (2008) indicam alguns critérios possíveis de sequenciação: começar pela estratégia usada pela maioria dos alunos; confrontar as estratégias apresentadas uma após a outra e terminar com uma estratégia cujo grau de sofisticação é superior.

Na conexão entre respostas, o professor pode ajudar os alunos a estabelecer conexões entre as ideias matemáticas presentes nas estratégias e representações que eles usaram. O objetivo desta conexão é haver apresentações de alunos construídas a partir das dos colegas para desenvolver ideias matemáticas fortes.

Bishop e Goffre (1986, p. 7) consideram que "um novo conceito é significativo na medida em que faça a ligação com os conhecimentos individuais já adquiridos".

Na transição entre as apresentações de dois alunos, o professor deve elucidar as ideias que podem ser semelhantes ou diferentes entre elas nos tipos de representações, operações e conceitos que eles usaram (Hodge & Cobb citados por Stein et al., 2008) ou pedir aos alunos que identifiquem essas semelhanças e diferenças.

Se considerar pertinente, o professor pode, mais tarde, propor tarefas cujo nível de exigência seja maior.

O ensino exploratório da Matemática

> precisa de tempo e de continuidade para que o professor possa melhorar e aperfeiçoar a sua prática, o mesmo tempo e continuidade que são necessários para que os alunos lhes correspondam e desenvolvam aquilo que ele proporciona: aprender conteúdos matemáticos mas também modos de produção do conhecimento matemático no contexto de uma comunidade da qual são parte integrante. (Canavarro, 2011, p. 17)

2.2.1. Tarefas matemáticas

Ponte (2005, p. 1) considera que

> quando se está envolvido numa atividade, realiza-se uma certa tarefa. Uma tarefa é, assim, o objetivo da atividade. Uma tarefa pode surgir de diferentes maneiras: pode ser formulada pelo professor e proposta ao aluno, ser da iniciativa do próprio aluno e resultar até de uma negociação entre o professor e o aluno.

Uma tarefa pode proporcionar um segmento de atividade da sala de aula dedicada ao desenvolvimento de uma ideia matemática particular (Stein & Smith, 1998). Doyle (citado por Stein & Smith, 1998) indica que as tarefas usadas na sala de aula constituem a base para a aprendizagem dos alunos. Durante a seleção das tarefas a propor aos alunos "é preciso ter atenção ao modo de as propor e de conduzir a sua realização na sala de aula" (Ponte, 2005, p. 2).

A exploração de diferentes tipos de tarefas na sala de aula promove o desenvolvimento de ideias implícitas nos alunos sobre a natureza da Matemática. Ponte (2005) distingue cinco tipos de tarefas matemáticas: os problemas, os exercícios, as investigações, os projetos e as tarefas de modelação.

Para Pólya (citado por Ponte, 2005), o professor deve propor problemas aos seus alunos para que estes se possam sentir desafiados nas suas capacidades matemáticas e assim experimentar o gosto pela descoberta, desenvolvendo o gosto pela disciplina. Contudo, se o problema for demasiado difícil, ele pode levar o aluno a desistir rapidamente. Se o problema for muito acessível, deixa de ser problema mas sim um exercício.

No caso de um aluno dispor de um processo imediato de resolução a uma questão, está perante um exercício. Caso contrário, a questão será um problema. Os exercícios servem para o aluno pôr em prática os conhecimentos já adquiridos, servindo assim para consolidar conhecimentos (Ponte, 2005).

Numa investigação, o professor fornece informação e coloca questões, todavia deixa ainda muito trabalho ao aluno para fazer, quer em termos de elaboração de uma estratégia de resolução, quer em termos da formulação específica das próprias questões a resolver (Ponte, 2005).

As investigações, mais do que problemas, promovem o envolvimento dos alunos, pois requerem a sua participação ativa desde a primeira fase do processo. As investigações podem surgir num contexto da vida real ou podem ser formuladas em contextos puramente matemáticos (Ponte, 2005).

Os projetos são tarefas de longa duração que partilham muitas das características das investigações. As tarefas de longa duração permitem aprendizagens mais profundas, no entanto correm o risco de os alunos se dispersarem ao longo do percurso, entrarem num impasse, perderem tempo com coisas irrelevantes, abandonando até a tarefa (Ponte, 2005).

As tarefas de modelação são tarefas que se apresentam num contexto de realidade e são de natureza problemática e desafiante, constituindo problemas ou investigações, conforme o grau de estruturação do respetivo enunciado (Ponte, 2005).

As tarefas no seu conjunto devem proporcionar um percurso de aprendizagem coerente, que permita aos alunos a construção dos conceitos fundamentais, a compreensão dos procedimentos matemáticos, o domínio das notações, bem como das conexões dentro e fora da Matemática (Ponte, 2005).

De acordo com Ponte (2005) existem duas dimensões fundamentais das tarefas: o grau de desafio matemático e o grau de estrutura. O grau de desafio matemático prende-se com a perceção da dificuldade de uma questão, variando entre os polos “reduzido” e “elevado”. O grau da estrutura varia entre os polos “aberto” e “fechado”. Numa tarefa fechada é dito de forma clara o que é dado e o que é pedido. Por outro lado, uma tarefa aberta contém um grau de indeterminação considerável no que é dado, no que é pedido, ou em ambos.

Segundo Ponte (2005), através do cruzamento das duas dimensões (cf. figura 1), chegamos a quatro quadrantes: i) tarefas relativamente abertas e fáceis designadas por tarefas de exploração; ii) um exercício é uma tarefa fechada e de desafio reduzido; iii) um problema é uma tarefa também fechada, mas com elevado desafio; iv) uma investigação tem um grau de desafio elevado, contudo é uma tarefa aberta.

Figura 1 – Ligação entre os diferentes tipos de tarefas de acordo com os seus graus de desafio e de abertura (Ponte, 2005)

Stein e Smith (1998) apresentam o Quadro das Tarefas Matemáticas (cf. figura 2) que distingue três fases através das quais passa a tarefa: i) como elas surgem no currículo ou em materiais de ensino; ii) como são apresentadas pelo professor; iii) como são implementadas/trabalhadas pelos alunos em sala de aula.

Este quadro é uma ferramenta para reflexão, permitindo perceber o que de facto os alunos estão a fazer e a pensar durante as aulas de Matemática.

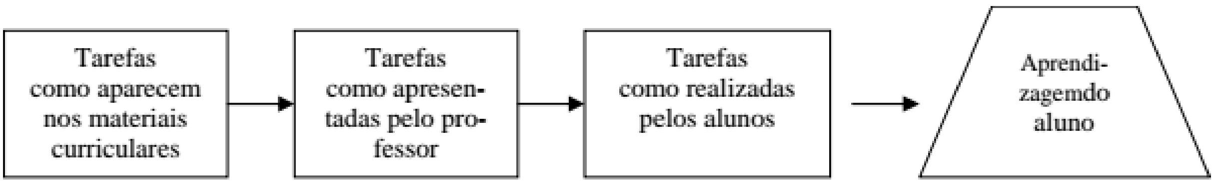


Figura 2 – Quadro das tarefas matemáticas (Stein & Smith, 1998)

Ponte (2005, p. 23) aponta que “as tarefas são um elemento fundamental na caracterização de qualquer currículo, pois elas determinam em grande medida as oportunidades de aprendizagem oferecidas aos alunos”.

2.3. A flexibilidade de cálculo

Buys citado por Brocardo (2014, p. 1) caracteriza o cálculo mental como "movendo-se rapidamente e com flexibilidade através do mundo dos números".

Para resolver um problema usando o cálculo mental os alunos podem: (i) lembrar-se de, ou 'saber', um facto numérico, (ii) usar um procedimento de contagem simples, em que a sequência numérica é recitada enquanto mantêm o controlo da contagem, (iii) fazer uma representação mental de um método em que usam 'papel e lápis' e (iv) construir uma sequência de transformações dos números envolvidos no problema para chegarem a uma solução (Threlfall citado por Brocardo, 2014, p. 1). Para este autor, "é o quarto tipo, muitas vezes referido como 'estratégias', que são geralmente consideradas vitais para as finalidades mais amplas do cálculo mental" (p. 1). Também em Threlfall (2009), são apresentadas as “estratégias de abordagem” do cálculo mental. Uma estratégia de abordagem em cálculo mental é uma forma geral de cognição matemática utilizada no problema — por exemplo contar, ou recordar ou aplicar um método aprendido, ou a visualização de um processo, ou a exploração de relações conhecidas entre os números. O autor distingue (1) estratégia de transformação de números, (2) estratégia de cálculo e (3) estratégia de contagem. A primeira refere-se ao caminho detalhado através do qual os números foram transformados para chegar à solução; a segunda relaciona-se com o momento em que um problema é respondido através da exploração de relações numéricas conhecidas e a terceira corresponde à transformação numérica, através de passos sucessivos para cima e para baixo na sequência de números naturais.

A ideia de cálculo mental proficiente está relacionada com o uso das estratégias 'adequadas' de cálculo mental (Heirdsfield et al. citados por Brocardo, 2014). Essa ideia refere-se à precisão de cálculo com a flexibilidade de escolher uma estratégia. Para estes autores, a flexibilidade no cálculo mental é vista como o uso de estratégias eficientes que são escolhidas de acordo com as combinações numéricas que inspiram a escolha da estratégia.

Segundo Threlfall (citado por Brocardo, 2014, p.10)

> o cálculo mental flexível pode ser visto como uma reação individual e pessoal com conhecimento, manifestada no sentido subjetivo do que é evidenciado pelo problema específico. Como resultado desta interação entre perceção e conhecimento, cada solução ´método´ tem um sentido único para o caso e é inventada no contexto particular do cálculo – embora claramente influenciada pela experiência.

Brocardo refere que o estudo desenvolvido por Mendes (2012), uma experiência de ensino com um terceiro ano, focada na aprendizagem da multiplicação, concluiu que os alunos construíram procedimentos de resolução relacionados com contextos e números. No entanto, alguns deles tenderam a usar um determinado procedimento, mesmo não sendo o mais adequado ao contexto e aos números propostos.

Fuson e Thompson (citados por Brocardo, 2014) indicam que para os alunos desenvolverem uma especialização adaptativa e a flexibilidade, devem construir significativamente os seus próprios conceitos e conhecimentos matemáticos.

Siegler e Lemaire (citados por Brocardo, 2014) também supõem que a variedade de estratégias reflete dois aspetos de um 'processo adaptativo´: (1) as estratégias são frequentemente mais aplicadas em problemas nos quais são mais eficazes; (2) a exatidão e a velocidade são maiores quando as crianças são livres para usar diferentes estratégias (não se limitando a usar uma única abordagem de solução). O modelo final para a descrição da competência estratégica adaptativa surgiu a partir deste ponto de vista. Tem quatro dimensões: (1) repertório de estratégias (variedade de estratégias usadas por alguém para resolver uma tarefa); (2) distribuição estratégica (frequência relativa da utilização); (3) eficácia (velocidade necessária para resolver a tarefa e a precisão da execução) e (4) seleção de estratégias (flexibilidade com que cada estratégia é escolhida).

> Investigações realizadas nas últimas décadas, no campo do cálculo mental flexível, fornecem muitas evidências do impacto das variáveis individuais (por exemplo, o conhecimento adquirido), características da tarefa (por exemplo, números e contexto) e condição instrucional (por exemplo, investigação coletiva da construção individual) em desenvolver o uso

> flexível-adaptativo de "estratégias de solução" inventadas e/ou "procedimentos de cálculo". (Brocardo, 2014, p. 4)

Threlfall (2009) rejeita o modelo de "escolha de estratégia", argumentando que a flexibilidade não pode ser ensinada como uma habilidade estratégica para escolher o método de cálculo mais adequado e eficaz. Na sua perspetiva, estratégia é vista como uma forma pessoal e individual de cálculo. Emerge da conexão não totalmente consciente e racional entre o que o aluno reparou nos números da tarefa e o que ele sabe sobre os números e as relações entre eles. O autor apresenta um modelo alternativo de escolha de estratégia, o "*zeroing in*". Nesta perspetiva, as estratégias para a aritmética mental são construídas e não selecionadas e aplicadas. Os números do problema não são considerados para decidir qual a estratégia, mas para decidir o que fazer em seguida, por exemplo, a partição, aproximar, combinar ou alterar. O autor indica isto como 'reparar' em aspetos dos números e nas relações entre eles.

Segundo Threlfall (2009), o cálculo mental flexível é importante não só pelos benefícios que traz à criança ao ser bem-sucedida no cálculo, mas porque é o início de, ou a evidência, de algo mais matemático do que a aquisição de conhecimentos factuais e processuais.

Verschaffel, Luwel, Torbeyns e Dooren (2009) definem a escolha de uma estratégia adaptativa como "a seleção consciente ou inconsciente e o uso da estratégia de solução mais apropriada num determinado item matemático ou problema, para um determinado indivíduo, num determinado contexto sociocultural.".

Hatano e Oura (citados por Selter, 2009, p. 620) afirmam que

> a maioria dos estudos em especialização têm mostrado que os peritos, que tiveram anos de experiência em resolução de problemas num determinado domínio, podem resolver tipos de problemas familiares com rapidez e precisão, mas muitas vezes não conseguem ir além da eficiência processual.

Estes autores caracterizam a "especialização adaptativa como a fluência processual que é complementada por uma compreensão concetual explícita que permite a adaptação à variabilidade" (p. 620).

Diversos investigadores, ao longo dos anos, mencionam a *especialização adaptativa* como a capacidade de aplicar os procedimentos aprendidos flexiva e criativamente.

Nesta perspetiva, a instrução escolar é bem-sucedida quando os alunos são capazes de usar o que eles aprenderam para inventar procedimentos eficazes de forma a resolver problemas novos.

Hatano e Oura (citados por Selter, 2009, p. 620) definem a adaptabilidade como “a capacidade de mudar de uma abordagem para resolver um problema para outra (flexibilidade) e pela habilidade para inventar novas ou modificar abordagens existentes (criatividade)”.

Selter (2009) entende os três conceitos da seguinte forma:

- A criatividade é a habilidade para inventar novas ou modificar estratégias existentes.
- A flexibilidade é a habilidade para trocar entre diferentes estratégias.
- Adaptabilidade é a habilidade em usar estratégias adequadas que o indivíduo desenvolveu criativamente ou selecionou flexivamente.

Selter (2009) reitera que uma característica distintiva da *especialização adaptativa* é a capacidade de aplicar efetivamente conhecimentos a novos problemas ou casos atípicos num domínio. O autor considera que o elemento de criatividade deve, por conseguinte, ser considerado como igualmente importante, tal como o elemento de flexibilidade, quando pensamos em adaptação.

Assim, Selter (2009) define adaptabilidade como a capacidade de desenvolver criativamente ou de selecionar flexivelmente e usar uma estratégia de solução adequada duma forma (in)consciente, num determinado item matemático ou problema, para um determinado indivíduo, num determinado contexto sociocultural.

Verschaffel et al. (2009) consideram que o conceito de adaptabilidade deve integrar fatores como: i) as variáveis da tarefa; ii) as variáveis do sujeito e iii) as variáveis do contexto.

O primeiro fator está relacionado com as características da tarefa, como por exemplo, os números existentes nesta que podem conduzir a uma determinada estratégia. O segundo refere-se às características do sujeito que resolve a tarefa, nomeadamente, o quanto este domina as diferentes estratégias de resolução e o último prende-se com o contexto sociocultural, pois o mesmo pode influenciar a escolha das estratégias.

3. METODOLOGIA DE INVESTIGAÇÃO

Este capítulo apresenta e justifica as opções metodológicas que foram tomadas para o presente estudo, tendo em conta o objetivo e as questões de investigação enunciados. Descreve ainda: os participantes, nomeadamente, a professora, a turma onde se realizou o estudo, os alunos que constituem os dois pares, as técnicas utilizadas na recolha de dados, a sequência de aprendizagem utilizada neste estudo e o processo de análise dos dados.

3.1. Opções Metodológicas

Considerando o objetivo do estudo, compreender o modo como os alunos desenvolvem a flexibilidade de cálculo multiplicativo num contexto de ensino exploratório, o estudo insere-se no paradigma interpretativo de natureza qualitativa (Bogdan & Biklen, 1994). Para estes autores, um estudo de natureza qualitativa possui cinco caraterísticas: i) a fonte direta dos dados é o ambiente natural e o investigador é o principal agente na recolha desses dados; ii) os dados que o investigador recolhe são principalmente de caráter descritivo; iii) os investigadores, que utilizam metodologias qualitativas, interessam-se mais pelo processo em si do que pelos resultados; iv) a análise dos dados é feita de forma indutiva; e v) o investigador interessa-se, sobretudo, por tentar compreender o significado que os participantes atribuem às suas experiências.

Este estudo contempla parte de uma experiência de ensino, integrada na modalidade de *design research/experiment*, devido ao seu enquadramento num Projeto de investigação mais amplo desenvolvido por uma equipa alargada de investigadores cuja temática é a flexibilidade de cálculo e o raciocínio quantitativo.

A *design research/experiment* tem como objetivo desenvolver teorias tanto sobre o processo de aprendizagem como sobre os meios que são usados para apoiar essa aprendizagem (Gravemeijer & Cobb, 2013). Gravemeijer e Cobb (2013) reiteram que esta metodologia engloba três fases: 1) a preparação da experiência, 2) a experiência na sala de aula e 3) a análise retrospetiva. Na primeira fase, preparação da experiência, a equipa de investigação tenta antecipar como o pensamento e a compreensão dos alunos podem evoluir quando as atividades instrucionais planeadas (mas que podem ser revistas) são usadas na sala de aula.

A segunda fase, experiência na sala de aula, consiste na condução da experiência. Nesta fase surgem os microciclos de *design* e análise (Freudenthal citado por Mendes, 2012). Em cada ciclo da aula, a equipa de investigação prevê como as atividades instrucionais propostas podem ser resolvidas interativamente pelo professor e os alunos, e o que os alunos podem aprender enquanto participam nestas.

Durante a exploração das tarefas, a equipa tenta analisar o processo real de participação e aprendizagem dos alunos. A seguir a esta análise, a equipa de investigação toma decisões sobre a validade das conjeturas que foram incorporadas na experiência instrucional, o estabelecimento de normas específicas e sobre a revisão dos aspetos específicos da experiência (Freudenthal citado por Gravemeijer & Cobb, 2013).

A terceira fase, análise retrospetiva, em que a análise é conduzida a partir dos dados recolhidos durante a experiência. Para verificar a credibilidade da análise, todas as fases do processo analítico têm de ser documentadas, incluindo o melhoramento e a refutação das conjeturas.

Nesta metodologia, uma equipa de investigadores (ou apenas um investigador) colabora com um ou mais professores que têm a responsabilidade do ensino na aula (Confrey & Lachance citados por Mendes, 2012).

Quanto às tarefas propostas aos alunos durante a experiência de ensino, estas foram delineadas por um dos elementos da equipa de investigação no âmbito do Projeto, Jean Marie Kraemer, e discutidas no seio da equipa, tendo sido aplicadas pela docente da turma.

3.2. Participantes e Critérios de Seleção

O estudo realizou-se numa escola de 1º ciclo da cidade de Lisboa, mais precisamente numa turma de 3º ano composta por 24 alunos: 15 rapazes e 9 raparigas. O foco do estudo incidiu em quatro alunos que trabalharam sempre a pares: Alexandre e Rosa; Tiago e Anabela.

Os participantes no estudo enquadram-se no Projeto de investigação, cuja recolha de dados mais ampla tinha tido início no ano letivo anterior, ou seja, quando os alunos frequentavam o 2º ano de escolaridade. Os critérios de seleção foram a disponibilidade da professora da turma, a qual indicou, a pedido da equipa de investigação do Projeto, quatro alunos com um desempenho razoável a Matemática. A docente foi também participante no estudo. Procurou-se uma professora com hábitos de trabalho correspondentes a um ensino exploratório e com abertura e vontade de trabalhar em conjunto com a equipa de investigação na preparação das aulas e discussão das tarefas a implementar na experiência de ensino. O desempenho razoável a Matemática como critério de seleção dos alunos teve em conta o facto da flexibilidade de cálculo corresponder a um nível mais avançado do desenvolvimento das aprendizagens dos alunos. Querendo compreender como se processa o desenvolvimento da flexibilidade de cálculo, a equipa de investigação do Projeto quis assegurar a observação deste fenómeno, selecionando alunos com domínio das competências mais básicas de cálculo.

Com o intuito de reservar o anonimato dos participantes, todos os nomes presentes neste estudo são fictícios.

As descrições que se seguem tiveram como única fonte a docente da turma.

3.2.1. Descrição da professora

A professora da turma é licenciada em Ensino Básico – 1º Ciclo e exerce a profissão há 15 anos.

Durante este tempo letivo, trabalhou em diferentes contextos socioeconómicos, o que lhe permitiu desenvolver/aprender diversas estratégias e metodologias para colmatar as dificuldades encontradas e motivar os alunos para o desenvolvimento do seu processo de ensino- aprendizagem. Ao longo destes anos fez sempre formação nas diversas áreas de forma a atualizar novas metodologias e estratégias, pois considera que a permanente atualização é promotora de sucesso educativo.

A docente realizou na Escola Superior de Educação de Lisboa: a Formação Contínua em Matemática em 2006 e 2007; a Formação Contínua de Professores sobre o Programa Nacional de Ensino do Português (PNEP) e a Formação de Formadores na área de Matemática em 2015/2016.

3.2.2. Descrição da turma

A turma é muito heterogénea quer em termos do processo de aprendizagem, quer em comportamento. Tem alunos com um excelente raciocínio que conseguem facilmente fazer conclusões, tirar ilações e interessados no processo de aprendizagem e por outro lado, tem alunos muito imaturos, cujo processo de ensino-aprendizagem situa-se na base do suficiente. As suas dificuldades, na maioria dos alunos, centram-se mais na área da Matemática, nomeadamente, na interpretação das situações problemáticas. De uma forma geral, a turma revela um bom cálculo mental. Os alunos habitualmente trabalham a pares ou em grupo.

3.2.3. O Alexandre

É um aluno bom e interessado, contudo quando lê uma tarefa e não a percebe, refere que a mesma está mal formulada. É um aluno que se destacou na turma durante os dois primeiros anos, o que o levou a ganhar confiança no trabalho que desenvolve. Tem um bom raciocínio e estabelece relações, explicitando-as.

3.2.4. A Rosa

É uma aluna um pouco distraída e faladora. Quando está atenta e concentrada tem um bom raciocínio, deduções e métodos de cálculo muito interessantes. Aquando a fase de discussão de uma tarefa, é habitual a aluna formular uma nova estratégia partindo das apresentações dos colegas. A Rosa é irmã gémea da Anabela.

3.2.5. O Tiago

O aluno revela facilidade em perceber se uma situação problemática pede um cálculo imediato. Evidencia um excelente cálculo mental e procura relações possíveis quando está a resolver uma tarefa. O aluno vê o que existe além do número que está no enunciado. Habitualmente, o aluno trabalha Matemática com o pai, reforçando assim a sua aprendizagem.

3.2.6. A Anabela

É uma aluna muito concentrada no trabalho, pensa no que está a fazer e tira conclusões. É muito interessada e gosta muito de aprender. É boa aluna em todas as áreas e revela autonomia na realização dos trabalhos. Sempre que tem alguma dúvida, questiona a professora. A Anabela é irmã gémea da Rosa.

3.3. Contexto de trabalho

A sala encontrava-se disposta em quatro grupos de seis elementos, em que cada grupo se divide em três pares.

A docente da turma desenvolve as suas aulas em contexto de ensino exploratório.

A sequência de aprendizagem proposta contém sete tarefas distintas, sendo que a última se encontra dividida em quatro partes. Esta sequência visa trabalhar as operações de multiplicação e de divisão.

A aplicação da sequência de aprendizagem decorreu ao longo de sete sessões de noventa minutos cada, entre 25 de novembro de 2015 e 17 de fevereiro de 2016 (tabela 2).

3.4. Recolha de dados

A recolha de dados decorreu através das seguintes técnicas: observação direta e participante e recolha documental. Os documentos utilizados como fontes de informação incluem: (a) os registos vídeo e áudio e respetivas transcrições, (b) as notas de campo e (c) os trabalhos elaborados pelos alunos.

Yin (2010, p. 92) indica que a observação participante é "um modo especial de observação na qual o investigador não é meramente um observador passivo".

Bryne et al. (citados por Léssard-Hebert, Goyette & Boutin, 1990) referem que a observação participante possibilita observar factos tal como o são para os sujeitos observados e verificar fenómenos latentes (que escapam ao sujeito, mas não ao observador).

> A observação participante permite recolher dois tipos de dados. Os dados registados nas «notas de trabalho de campo» são do tipo da *descrição* narrativa

> e aqueles que o investigador anota no seu «diário de bordo» pertencem ao tipo da *compreensão*, pois que fazem apelo à sua própria subjetividade. (Léssard-Hebert et al., 1990, p. 157-158)

Ao longo do estudo, privilegiou-se o registo de notas de campo, porém estas incluíam breves reflexões sobre o que era observado.

Durante a observação das aulas, estiveram sempre presentes na sala de aula, além de mim, mais duas investigadoras que integravam a equipa de investigação alargada do projeto mais amplo.

Todas as aulas foram gravadas em suporte vídeo e áudio e, posteriormente, procedeu-se às transcrições de todos os vídeos, completando-as com os registos áudio sempre que necessário. Segundo Yin (2010), os documentos são uma das fontes de dados usada habitualmente em estudos de natureza qualitativa permitindo confrontar evidências sugeridas por outras fontes de dados. A recolha documental incidiu nas produções dos dois pares de alunos, nas notas de campo e nos registos vídeo e áudio.

3.4.1. Calendarização

Tabela 2 - *Calendarização das aulas de implementação da sequência de aprendizagem*

Data	Tarefa	Objetivo(s)
25/11/2015	"As espetadas"	Distribuir equitativamente os camarões pelos pauzinhos, tendo como condições de partida, 61 camarões e a liberdade de convidar mais ou menos amigos. A tarefa visa a compreensão da multiplicação e da divisão envolvidas nas diferentes possibilidades de agrupamentos dos camarões.
02/12/2015	"Iogurtes para toda a família"	Compreender a multiplicação como uma adição de parcelas iguais.
	"No supermercado"	Decompor o 20 numa soma de dois produtos.
06/01/2016	"Moedas"	Decompor o 13 e o 26 em somas de dois produtos. - Decompor o 13 e o 26 em somas de três produtos.
20/01/2016	"Bolas de bilhar"	Desenhar retângulos com 16 bolas.

		A tarefa visa a decomposição do 16 em produtos por recurso ao modelo retangular.
27/01/2016	“Uma bandeira estrelada”	Multiplicar por recurso ao modelo retangular. Decompor o 50 numa soma de dois produtos.
01/02/2016	“Pãezinhos I”	Decompor o número 800 em produtos de 2 fatores.
17/02/2016	“Pãezinhos II”	Calcular o preço de 1 pãozinho, através da diferença entre o preço de 6 pãezinhos e de 5 pãezinhos. O enunciado da tarefa induz uma abordagem de natureza aditiva.
	“Pãezinhos III”	Calcular o preço de 14 pãezinhos. Calcular o preço de outras quantidades de pães. O enunciado da tarefa tira partido da abordagem aditiva da tarefa anterior, mas induz uma abordagem multiplicativa de natureza escalar, ao colocar uma lista cujos números são obtidos pela duplicação no interior de cada uma das variáveis.
	“Pãezinhos IV”	Comparar o preço dos pãezinhos nas duas padarias. O enunciado da tarefa apela à mobilização de uma relação multiplicativa de natureza funcional, focando a relação entre as variáveis.

Assim, as tarefas foram sequenciadas tendo em conta a progressão da aprendizagem da multiplicação, e em particular do raciocínio multiplicativo em situações de multiplicação com relações quaternárias, ou seja, em situações de proporcionalidade. As tarefas intermédias tiveram como principal objetivo o aumento do reportório dos alunos relativamente a relações numéricas e às formas de ver os números, pela multiplicidade de decomposições dos mesmos.

3.5. Análise de dados

“Toda a análise de conteúdos decorre de uma pergunta ou perguntas que o investigador se coloca, bem como da natureza dos dados com que ele lida” (Esteves, 2006, p. 108-109).

A análise de dados do estudo desenvolveu-se durante a recolha destes e no final da experiência na sala de aula, tendo tido início após os primeiros momentos de recolha de dados. Foi desenvolvida mais intensamente após a conclusão da recolha de dados. Foram usadas categorias analíticas provenientes do quadro teórico que se apresentam em seguida.

Partindo das estratégias de cálculo em situações de multiplicação mencionadas por diversos autores na revisão da literatura, procedeu-se à respetiva categorização. As tabelas 3 e 4 resultaram da síntese da categorização prévia da multiplicidade de estratégias identificadas pelos vários autores e sua interação com a análise dos dados do estudo.

Tabela 3 - *Categorização de estratégias de natureza aditiva na resolução de situações multiplicativas*

Estratégia	**Descrição**	**Exemplo**
Contagem envolvendo saltos dos múltiplos	A contagem é efetuada por saltos dos múltiplos, para a frente ou para trás.	“5, 10, 15, 20, 25” ou "25, 20, 15, 10, 5"
Adição repetida	Adiciona-se sempre o mesmo número.	“6+6=12, 12+6=18; 18+6=24”
Contagem unitária	Contagem dos elementos um a um.	“1,2,3,4”
unitizing	As unidades isoladas podem ser representadas como um todo/grupo.	“5+5+5= três cincos”
Uso de dobros	Adição do mesmo número de forma a calcular o dobro.	“8+8=16, 16+16=32”

Tabela 4 - *Categorização de estratégias de natureza multiplicativa na resolução de situações multiplicativas*

Estratégia	**Descrição**	**Exemplo**
Cálculo da divisão	Uso da divisão como operação inversa da multiplicação.	“24:4=6, logo 4x6=24”
Partição de números em produtos	Decomposição do multiplicador, do multiplicando, ou de ambos. Está subjacente o uso da propriedade associativa da multiplicação.	“15 x 12 = 3x(5x12) = 3x60 = 180” ou “25x8=25x(2x4)=(25x2)x4=50x4 = 200.”
Partição de números em somas	Decomposição do multiplicador ou do multiplicando, ou de ambos. Está subjacente o uso da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.	“5x19 = 5x(10+9) = 5x10+5x9 =50+45=95”
Compensação com uso de relações multiplicativas entre os fatores	Estabelecimento de relações multiplicativas (dobro e metade; quádruplo/quarta parte; …) entre os fatores de um mesmo produto, de modo a que a alteração efetuada num fator seja compensada, de forma inversa, no outro fator, garantindo, assim, a invariância do produto. A aplicação deste tipo de relações permite usar factos básicos conhecidos dos alunos, facilitando o cálculo.	x2 “25x8= :2 50x4 = 200.” x4 “100x8= :4 400x2= 800.”
Compensação no produto após arredondamento de um fator	Pode ser realizada apenas no multiplicador ou só no multiplicando. Substituição de um fator por outro superior que seja “próximo” cuja multiplicação seja mais fácil de efetuar. Após a multiplicação, tem de se compensar, retirando o que se multiplicou a mais. Está subjacente o uso da propriedade distributiva da multiplicação em relação à subtração.	“19x5 = 20x5-5 = 100-5 = 95” 18x5; (18x5 = (20-2) x5) 20x5=100; 100-10=90

Uso complexo de dobros	Composição do multiplicador a partir de dobros sucessivos do multiplicando usando, implicitamente, as propriedades associativa e distributiva da multiplicação em relação à adição.	47x34 1x34=34 2x34=68 4x34=136 8x34=272 16x34=544 32x34=1088 47 x34 = (32+16-1) x 34 = = 32x34 + 16x34 - 1x34 =1088 + 544 - 34 = 1598
Troca da ordem dos fatores	Troca da ordem dos fatores para obter um produto parcial que facilite o restante cálculo. Está subjacente o uso da propriedade comutativa.	"4x14x25 = 4x25x14 = 100x14 = 1400"

No que respeita às estratégias aplicadas em situações de proporcionalidade, construiu-se uma tabela (tabela 5) partindo da revisão da literatura (Cramer & Post, 1993; Fernández et al., 2010; Infante, 2014; Vergnaud, 2014).

Tabela 5- *Estratégias para lidar com situações de proporcionalidade*

Estratégia aditiva	**Estratégia multiplicativa**	
	Escalar	**Funcional**
Baseia-se na adição ou subtração repetida no interior de cada uma das variáveis.	Baseada em relações multiplicativas internas, ou seja, relações entre quantidades da mesma natureza.	Considera relações externas, isto é, relações entre quantidades de diferentes naturezas.

Relativamente às categorias analíticas no âmbito da flexibilidade de cálculo (tabela 6), usou-se o quadro teórico de Threlfall (2009). As categorias consideradas (também assumidas em Brocardo, 2014) referem-se ao processo de construção de estratégias em que os alunos, aliando o seu conhecimento pessoal sobre os números e operações ao processo de notar, constroem as estratégias adaptadas à situação ou aos números em causa para alcançar a solução da tarefa.

Tabela 6 - *Categorias analíticas no âmbito da flexibilidade de cálculo*

Categoria	**Descrição**
Processo de notar	Reparar nos números e nas relações que se pode estabelecer entre eles.
Cálculos exploratórios parciais	Os cálculos exploratórios parciais decorrem do conhecimento pessoal dos alunos acerca dos números e das propriedades das operações quando este é usado para derivar.
Relações numéricas aplicadas na solução	O modo de relacionar os números para resolver o problema e alcançar a solução das situações de cálculo.
Métodos ou procedimentos de cálculo aplicados na solução	O modo de relacionar as operações para resolver o problema e alcançar a solução das situações de cálculo.

"A categorização é a operação através da qual os dados são classificados e reduzidos, após terem sido identificados como pertinentes, de forma a reconfigurar o material ao serviço de determinados objetivos de investigação" (Esteves, 2006, p. 109).

A primeira tarefa, "As espetadas" e a última, "Pãezinhos", ambas envolvendo situações proporcionais da sequência de aprendizagem foram analisadas de uma forma mais detalhada, com vista a verificar a existência de evolução das estratégias mobilizadas e da flexibilidade de cálculo. As tarefas intermédias foram objeto de uma análise menos detalhada.

4. ANÁLISE DOS DADOS

Este capítulo contém a análise das estratégias usadas pelos dois pares de alunos, evidenciando a sua evolução e a flexibilidade de cálculo existente.

4.1. Tarefa “As espetadas”

Os alunos começaram por ouvir a professora da turma a explicitar a tarefa, salientando que todos os pauzinhos teriam de ter o mesmo número de camarões. Seguidamente, os pares iniciaram a discussão das estratégias em voz baixa.

4.1.1. Par Alexandre e Rosa

O par começou por desenhar 1 pauzinho e 1 camarão de forma a representar iconicamente1x61 camarões, isto é, uma espetada com 61 camarões (cf. figura 3).

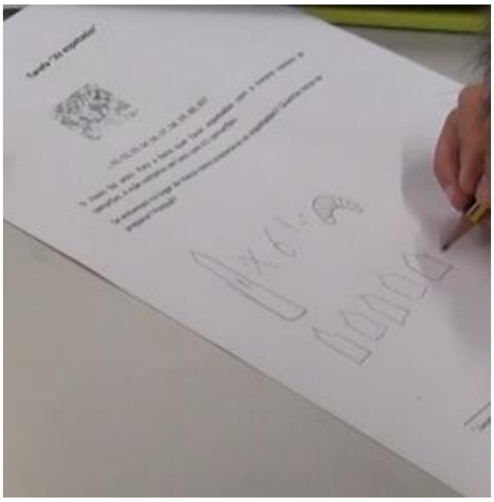


Figura 3 – Representação do cálculo 1x61

Após este registo, seguiu-se o diálogo:

> Alexandre: Bora [sic] fazer de 10 em 10. (*evidenciou-se uma certa hesitação)*
> Outro colega: Não dá!
> Alexandre: Dá, dá, porque sobra 1.
> Anabela: A professora disse que podia sobrar. Não disse que era proibido sobrar.
> Rosa: Pois é. De 3 em 3. Então já podemos fazer de 3 em 3.

De seguida, os alunos começaram por desenhar pauzinhos (cf. figura 3). O Alexandre perguntou à professora “Professora, pode sobrar?”. A professora da turma dirigiu-se ao par e questionou-o sobre o que estavam a fazer, mencionando “…não precisamos disso, precisamos de estratégias de cálculo”. O par apagou o que tinha feito e elaborou algumas tabelas (cf. figuras 4 a 6), aplicando a estratégia da contagem envolvendo saltos dos múltiplos.

As tabelas têm duas linhas: a superior contém a sequência matemática correspondente ao número crescente de pauzinhos; a inferior, o número de camarões correspondente ao número de pauzinhos patente na célula acima.

A hesitação evidenciada inicialmente está relacionada com o facto de sobrar 1 camarão, razão pela qual o Alexandre decidiu confirmar com a professora se tal era possível. A Rosa antecipou o 3 como divisor do 60, porém abandonou a ideia.

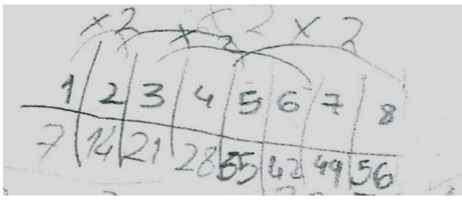


Figura 4 – Tabela do 7

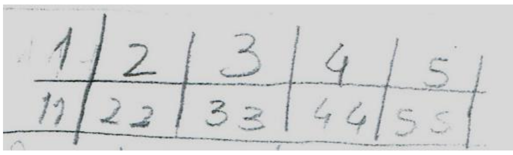


Figura 5 – Tabela do 11

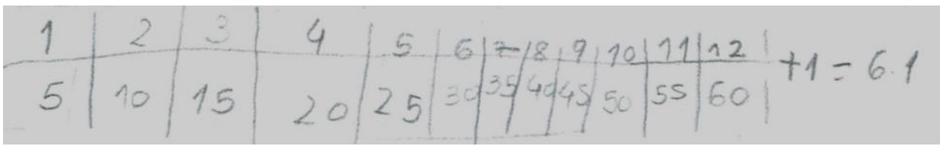


Figura 6 – Tabela do 5

O par deixou de desenhar tabelas, contudo a estratégia usada manteve-se (cf. figuras 7 a 11).

Ao abandonarem a tabela, o foco do par foi o número 60, procurando descobrir divisores deste número. Os alunos efetuaram vários cálculos em que o primeiro número é um divisor de 60; exemplo disso é a figura 7, na qual os alunos escreveram o número 10 em primeiro lugar. As figuras 4 e 5 representam as estratégias cujo resultado é mais afastado do número 60.

Figura 7 – Cálculo de 10 em 10

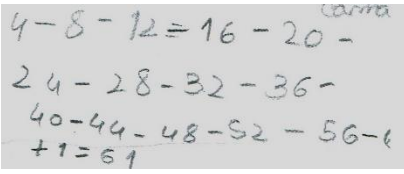


Figura 8 – Cálculo de 4 em 4

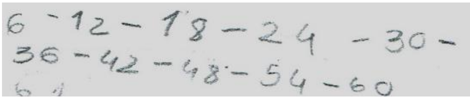


Figura 9 – Cálculo de 6 em 6

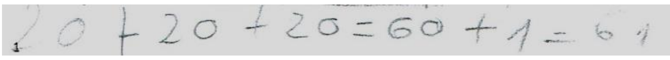


Figura 10 – Cálculo de 20 em 20

Figura 11 – Cálculo de 8 em 8

Com este trabalho de saltos dos múltiplos, os alunos verificaram que existem números de camarões por pauzinho que atingem o número 60, isto é, são divisores de 60. Na figura 11, o cálculo não atinge 60, logo 11 não é divisor de 60. Constatou-se que ao alcançar o número próximo do 60, os alunos pararam os saltos dos múltiplos.

Mais tarde, o par identificou a relação numérica de dobro numa tabela já construída, nomeadamente na linha superior (cf. figura 4) e utilizou a estratégia multiplicativa da troca da ordem dos fatores (cf. figuras 12 a 14).

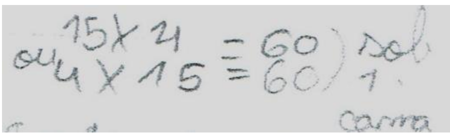


Figura 12 – Estratégia da troca da ordem dos fatores

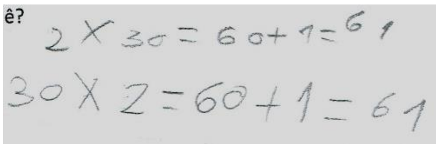


Figura 13 – Estratégia da troca da ordem dos fatores

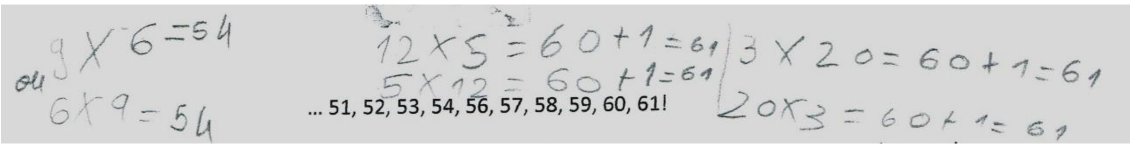


Figura 14 – Estratégia da troca da ordem dos fatores

Evidenciou-se a mobilização da propriedade comutativa ao explorar pares de possibilidades diferentes, mantendo o foco no número 60. Após alcançado o 60, os alunos adicionam 1, aproveitando o cálculo anterior, e por isso, ignoram o sentido relacional do sinal de igual, assumindo-o com o significado de "dá". Por exemplo, na figura 14, pode verificar-se que os alunos acabam por exprimir 12x5=61, embora tenham pensado 12x5=60; o mesmo acontece para todos os outros casos.

Os alunos identificaram relações numéricas a partir de cálculos já efetuados (cf. figuras 6, 8 e 10), nomeadamente, 12x5=60 ou 5x12=60; 15x4=60 ou 4x15=60 e 3x20=60 ou 20x3=60 (cf. figuras 12 a 14). Na figura 14, visualiza-se a relação de quádruplo/a quarta parte entre fatores de diferentes cálculos colocados lado a lado (12x5=60 e 3x20=60 ou 5x12=60 e 20x3=60); contudo, devido a um problema técnico não há registo vídeo que comprove que os alunos identificaram essa mesma relação ou a mobilizaram para registar o 60 expresso através de diferentes produtos.

Aquando a apresentação no quadro, a professora indagou a turma no sentido de saber “A quem é que sobrou mais do que 1?”.

> Rosa: Sobrou 7.
> Professora: Como é que organizaste a tabela?

A aluna escreveu no quadro 9x6=54 ou 6x9=54.

> Rosa: Eu fiz 9x6 que era 54 e depois fiz 6x9 que é 54 também.
> Professora: Era necessário tabela? Era outra forma de apresentar sem ser a tabela. Rosa, quanto é que sobrou?
> Rosa: Sobraram 6. Ah! 7.

A aluna fez a respetiva tabela no quadro e assinalou os dobros.

Professora: Põe lá, sobraram 7 camarões.

De forma a explicar a estratégia da troca da ordem de fatores, o par escreveu no verso da folha a seguinte conclusão “Quando fazemos uma conta, podemos fazer ao contrário”.

4.1.2. Par Tiago e Anabela

O par iniciou o seu trabalho, construindo diferentes tabelas, aplicando a estratégia da contagem envolvendo saltos dos múltiplos (figuras 15 a 18).

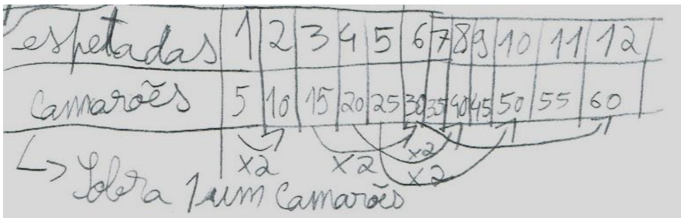


Figura 15 – Cálculo de 5 em 5

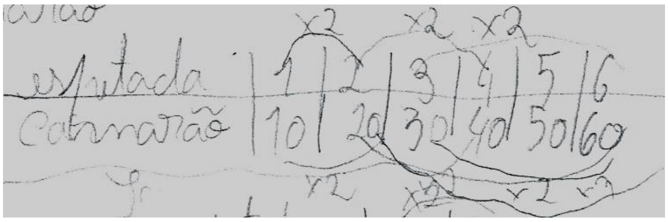


Figura 16 – Cálculo de 10 em 10

Os elementos do par continuaram a discussão sobre qual o cálculo seguinte a realizar.

Tiago: Vamos fazer uma tabela de 20 em 20. Não, vamos fazer de 30 em 30.
Anabela: De 30 em 30 é muito. (…)
Tiago: Vamos fazer de 6 em 6. (…)
Anabela: Está bem.
Tiago: 1 – 6; 2 – 12…

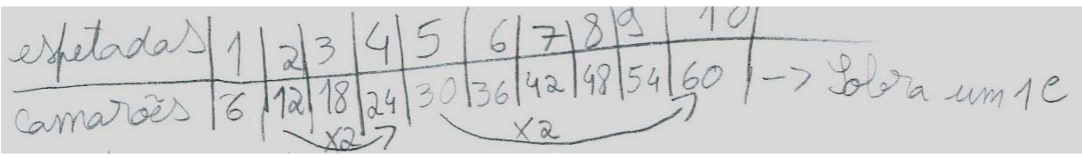


Figura 17 – Cálculo de 6 em 6

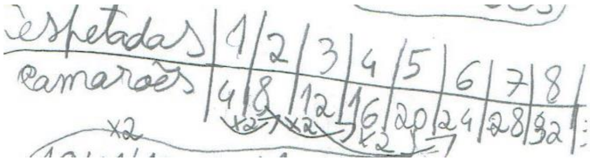


Figura 18 – Cálculo de 4 em 4

Os alunos procederam aos cálculos, tendo o 6 como divisor de 60. O par elaborou outras tabelas: de 4 em 4 (cf. figura 18); de 11 em 11; de 9 em 9 e de 30 em 30. Mais uma vez, o par identificou uma relação numérica, assinalando alguns dobros existentes na linha inferior da tabela (cf. figuras 15, 17 e 18) e nas duas linhas (cf. figura 16).

O foco do par, na maioria das tabelas, foram os divisores de 60, ou seja, iniciaram sempre com números de camarões por pauzinho cuja iteração atingia o 60. No que se refere à primeira estratégia utilizada, os alunos desenvolveram-na sempre através da construção de tabelas.

A determinado momento, os alunos usaram a estratégia da troca da ordem dos fatores (cf. figuras 19 a 21), multiplicando o número de camarões pelo número de pauzinhos.

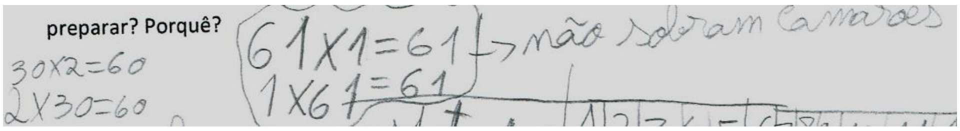


Figura 19 – Estratégia da troca da ordem dos fatores

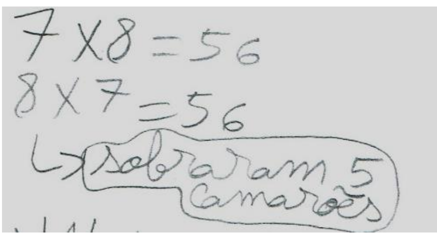


Figura 20 – Estratégia da troca da ordem dos fatores

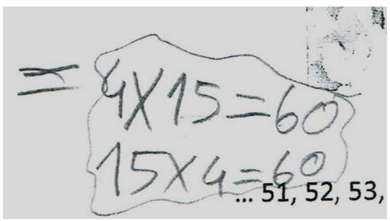


Figura 21 – Estratégia da troca da ordem dos fatores

Os cálculos presentes nas figuras 19 a 21 tiveram como ponto de partida as respetivas tabelas. Os alunos transformaram a estratégia usada nas tabelas na estratégia da troca da ordem dos fatores. O mesmo aconteceu com a tabela de 9 em 9.

> Professora (*dirigindo-se a um elemento do par*): Tiago, estamos a fazer o quê?
> Tiago: Estamos a fazer tabelas.
> Professora: Fizeste de quanto?
> Anabela: Fizemos de 5 em 5, de 30 em 30, de 10 em 10, de 6 em 6, de 11 em 11,…
> Professora: Agora não vamos fazer mais nada. Agora vamos ver qual é o tipo de relações que temos aqui.

Os alunos escreveram a seguinte conclusão: "A tabuada do 10 está relacionada com a tabuada do 5 porque o 10 é o dobro de 5 e 5 é metade de 10".

Mais tarde, a professora da turma solicitou aos dois elementos do par que fossem ao quadro explicar os cálculos realizados. A Anabela explicou o cálculo de 6 em 6 e o Tiago o cálculo de 10 em 10 (cf. figura 22).

Figura 22 – Explicitação do cálculo de 10 em 10

> Tiago: Andei a fazer uma tabela e fiz os dobros e as metades e agora percebi que tenho aqui 6 vezes um 10 que está aqui e dá 60. Fiz 10x6=60.

O aluno fez a leitura de que 6 pauzinhos com 10 camarões perfazem 60. Nesta tabela (cf. figura 22), o Tiago assinalou a relação numérica de dobro tanto na linha superior referente ao número de pauzinhos, como na linha inferior referente ao número de camarões.

A Anabela usou a estratégia de uso de dobros e/ou metades para confirmar os cálculos (cf. figura 23), porém errou ao assinalar o dobro de 24.

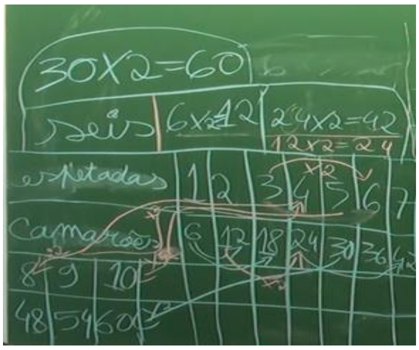


Figura 23 – Explicitação do cálculo de 6 em 6

> Professora: Essa tabela podia se relacionar com outra ou não? (*referindo-se à de outro colega*).
> Anabela: Com a do 12.
> Professora: Porquê?
> Anabela: Porque 6 é metade de 12. (…)
> Professora: Anabela, tu descobriste o quê?
> Anabela: Eu descobri que 6x10 é 60. (…)
> Professora: Isso quer dizer o quê?
> Anabela: Que em vez de fazer a tabela, podia ter usado a multiplicação.

A professora fomentou a discussão no sentido de verificar a existência de mais relações numéricas. A Anabela identificou a relação de metade, após a professora ter referido que a irmã tinha feito a tabela do 12. Mais tarde, a professora questionou:

> - Quem é que fez a tabela do 3?

Os alunos, em conjunto, concluíram que 6 era o dobro de 3 e 3 era metade de 6. Após a intervenção da Anabela, os alunos perceberam que poderiam ter aplicado de imediato a multiplicação em detrimento da construção de tabelas.

4.2. Tarefa "Pãezinhos I"

A professora escreveu no quadro a tarefa e os alunos copiaram para a folha.

4.2.1. Par Alexandre e Rosa

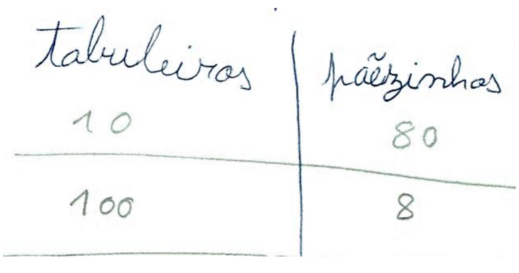
Inicialmente, tendo em conta o diálogo dos alunos, verifica-se que o par não percebeu a tarefa.

> Rosa: Os pãezinhos dividem-se em quantos? Nós não sabemos quantos tabuleiros, quantos pães têm!
> Alexandre: Não diz se têm de ter a mesma quantidade, se não têm.
> Rosa: Pois.
> Alexandre: Não diz isso.
> Investigadora: Lá está, vocês é que têm de chegar à conclusão de quantas formas diferentes.

Após a elucidação por parte da investigadora, o par decidiu construir uma tabela com duas colunas, a primeira refere-se ao número de tabuleiros e a segunda ao número de pãezinhos existentes em cada tabuleiro, tal como sugerido no enunciado da tarefa. O par questionou a professora se poderia "fazer a tabela um bocadinho grande".

Após a construção das linhas da tabela, o Alexandre sugeriu a primeira possibilidade "8 pãezinhos para 100 tabuleiros" (cf. figura 24), contudo a Rosa optou por registar outra opção, 10 tabuleiros com 80 pãezinhos (cf. figura 25).

Figura 24 – Tabela inicial do Alexandre

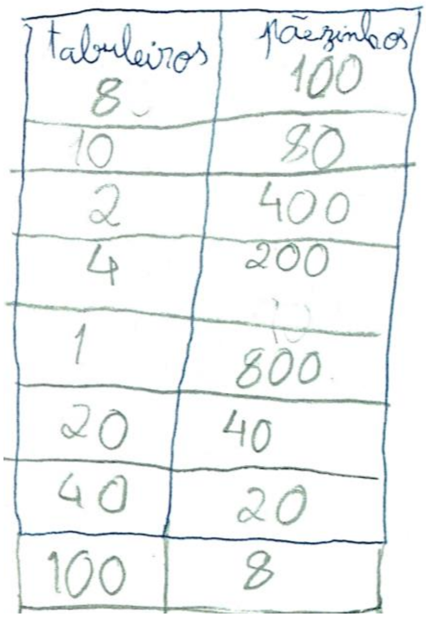


tabuleiros	pãezinhas
10	80
100	8

Figura 25 – Tabela inicial da Rosa

Na segunda linha da tabela, o aluno escreveu o que a colega escreveu na primeira linha e a Rosa escreveu o que o Alexandre escreveu na primeira linha. Nesta abordagem inicial, os alunos fazem a decomposição do 800 em produtos, começando por pensar nos fatores 10 e 100 cujos produtos por 80 e por 8, respetivamente, parecem constituir factos básicos já conhecidos.

Depois de escrever a terceira possibilidade, 2 tabuleiros com 400 pãezinhos, o par parece ter começado a usar a estratégia das relações numéricas entre os fatores. Isto é, o par usou uma estratégia multiplicativa escalar dentro de cada uma das variáveis, aplicando a proporcionalidade inversa existente nesta situação. Por exemplo, se temos o dobro de tabuleiros, vamos ter metade de pãezinhos por tabuleiro (cf. figura 26).



tabuleiros	pãezinhos
8	100
10	80
2	400
4	200
1	800
20	40
40	20
100	8

Figura 26 – Produção do Alexandre

> Rosa: Agora metemos 50, não? 50 com 50. Não, não pode ser 50 com 50. Tem de ser 50 com 3.
> Alexandre: Não.
> Rosa: 3 tabuleiros, cada um com 50. Dá 150 pãezinhos. Não, mas esse dá 150.
> Alexandre: Pois dá.

A Rosa propôs a opção 3 tabuleiros com 50 pãezinhos, tendo abandonado a ideia após cálculo mental.

Mais tarde, o par escutou a professora a conversar com um outro par sobre a leitura de determinadas possibilidades, nomeadamente, a existência de 800 tabuleiros com 1 pãozinho. A professora indicou que essa possibilidade não fazia sentido.

O par Rosa e Alexandre, partindo do produto 800x1 considerado sem sentido pela professora, acrescentou à tabela 1 tabuleiro com 800 pãezinhos, aplicando a propriedade comutativa para conferir sentido a esta possibilidade, de acordo com o contexto do problema.

O Alexandre descobriu uma outra hipótese, 40 tabuleiros com 20 pãezinhos, a partir da qual a Rosa aplicou a estratégia da troca da ordem dos fatores.

> Rosa: Há algumas que dão para duas vezes (*apontando para 40 tabuleiros com 20 pãezinhos*).

Posteriormente, o aluno alterou a primeira linha da tabela para 8 tabuleiros com 100 pãezinhos (cf. figura 26). A Rosa também escreveu 8 tabuleiros com 100 pãezinhos.

> Tiago: 16x50? Se 8x50 dá 400, o dobro de 8 que é 50x16 dá 800, porque 8 é metade de 16.
> Alexandre: Isso é buéda [sic]fácil.

O Tiago propôs a possibilidade 50x16, explicando o seu raciocínio aos colegas Alexandre e Anabela. O Alexandre registou na tabela 16 tabuleiros com 50 pãezinhos e alertou a Rosa para essa possibilidade. De imediato, o par procedeu à troca da ordem dos fatores.

O Alexandre acrescentou 5 tabuleiros com 160 pãezinhos e 160 tabuleiros com 5 pãezinhos. Tendo como ponto de partida os algarismos usados, a Rosa escreveu novas possibilidades: 6 tabuleiros com 150 pãezinhos; 150 tabuleiros com 6 pãezinhos.

> Rosa: 160x5. Já descobrimos outra. Vamos descobrir mais. Ai! Fiz uma coisa muito mal…150 com 6.
> Alexandre: 6?
> Rosa: Sim, é o contrário da de cima. É o contrário da de cima, não é?
> Alexandre: Mais ou menos. Já fizemos muitas.

A aluna apagou a possibilidade 160 tabuleiros com 5 pãezinhos e escreveu 150 tabuleiros com 6 pãezinhos. Completaram mais uma linha da tabela, através do uso da estratégia da troca da ordem dos fatores, ao escrever 6 tabuleiros com 150 pãezinhos.

Por fim, o par completou a tabela com as seguintes possibilidades: 15 tabuleiros com 60 pãezinhos e 60 tabuleiros com 15 pãezinhos.

No que concerne a possibilidade 15 tabuleiros com 60 pãezinhos, uma das investigadoras inquiriu:

> - Alexandre, esse dá? Vê lá se esse dá.
> Alexandre: Deve dar.
> Rosa: Eu acho que dá, porque é o contrário destes (*referindo-se a 6 tabuleiros com 150 pãezinhos e 150 tabuleiros com 6 pãezinhos*).
> Alexandre: Não, não. Aqui só tirei este zero (*apontando para o número 150*) e meti-o aqui (*indicando o número 60*).

O aluno explicou que, ao alterar a posição dos zeros, encontrou novas possibilidades, estabelecendo a relação de 10x/décima parte entre os fatores.

Algum tempo depois, a mesma investigadora dirigiu-se ao par.

> Investigadora: Vê lá se isto dá. 5x160 quanto é que dá?
> Alexandre: 800.
> Investigadora: 5x6?
> Alexandre: 5x6 dá…
> Rosa: Não, não dá. Dá, por acaso até dá.
> Investigadora: Dá. E depois este aqui? (*remetendo para 150x6*)

Para esclarecer a dúvida, a Rosa decidiu calcular na folha 150x6, escrevendo 100x6=600 e 50x6= 300 (cf. figura 27). Neste cálculo, a Rosa usou a estratégia de partição de números, aplicando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

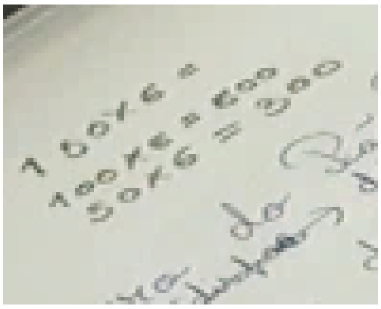


Figura 27 – Cálculo da Rosa (150x6)

> Rosa: Dá mais até…
> Alexandre: Dá, dá…(*duvidando da colega, o aluno verificou o cálculo que esta realizou*)
> Rosa: Dá mais.

Assim, a aluna concluiu que o resultado de 150x60 era um número superior aos 800 pãezinhos da tarefa, acabando por apagar da tabela 150x6 e 6x150.

> Alexandre: Não é esse. É este (*indicando 15x60*).
> Rosa: Esse é a mesma coisa que este. Já sabemos que 150x6 não dá.

O Alexandre iniciou o cálculo mental para tirar a dúvida, contudo não o terminou. A Rosa principiou o cálculo na folha, porém este estava incorreto (“16x50=50”), mesmo não tendo sido concluído.

A aluna decidiu apagar da sua tabela as possibilidades 15x60 e 60x15, embora o seu par tenha optado por manter na sua tabela.

> Rosa: Mas há coisas que estão mal.
> Alexandre: Dizes tu, podem estar bem.

Apesar do comentário da colega, o Alexandre não fez qualquer alteração na sua tabela.

No momento da discussão, o Alexandre foi ao quadro apresentar algumas hipóteses de resposta (cf. figura 28).

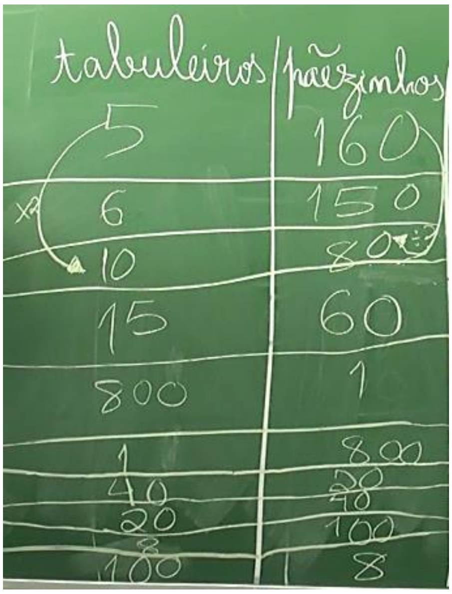


Figura 28 – Apresentação no quadro do Alexandre

O aluno mencionou que a primeira possibilidade estava relacionada com a terceira, identificando a relação de dobro e metade entre os fatores. O aluno colocou setas de forma a assinalar essa relação (cf. figura 29).

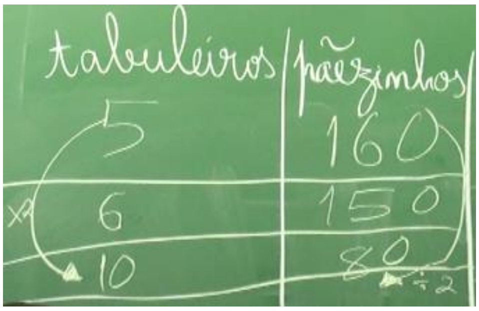


Figura 29 – Relação dobro e metade

> Professora: O que é que puseste relacionado com o 10? Explica lá.
> Alexandre: Porque 160 é metade de 80.
> Professora: 160 é metade de?
> Alexandre: 160 é metade (*corrigiu*) o dobro de 80 e 80 é metade de 160. E 5 é metade de 10 e 10 é metade (*engano na palavra*) de 5. 10x80 dava 800.
> Professora: E agora o 6?
> Alexandre: Esta aqui?
> Professora: 6x150.
> Tiago: Está mal…dá 900.

O Alexandre realizou o cálculo 6x150 e comprovou que aquela possibilidade estava incorreta, o mesmo aconteceu com 15x60.

> Alexandre: Fiz 6x100 igual a 600, depois fiz e 50x6 que me deu 300. Dá 900. Tá [sic] mal.
> Professora: Agora vamos ao 15, Alexandre.
> Alexandre: Eu vi que 10x60 dá 600 e que 5x60 dá 300. Depois somei e dá 900. Está mal!

O aluno apagou a possibilidade 15x60 e explicou o 40x20.

> Alexandre: Esta acho que está bem, porque 40 é metade de 80 e o 20 é o dobro de 10. Então, eu fiz 20x40 que me deu 800. Tiras os zeros, fazes 4x2 que dá 8 e depois pões os zeros, dá 800.

O aluno aplicou a relação numérica de dobro e metade e a regra de compensação dos zeros.

A professora questionou a turma sobre o que o Alexandre tinha trocado, ao que a turma respondeu: "as parcelas". Assim, a professora salientou a estratégia da troca da ordem dos fatores.

Em relação à última possibilidade apresentada, o Alexandre explicitou:

- Eu vi que 8x10 dava 80 e depois acrescentei um zero que dá 800.

Mais uma vez, o aluno justificou uma nova possibilidade, através da regra de sempre que se aumenta um zero num fator também se aumenta no produto. Esta regra fundamenta-se na compensação: se aumenta 10 vezes um fator, em compensação, o produto fica 10 vezes aumentado.

Ao chegar ao seu lugar, o aluno apagou da sua tabela todas as possibilidades incorretas.

4.2.2. Par Tiago e Anabela

Antes da leitura da tarefa, em voz alta, pela professora, o par construiu uma tabela com duas colunas: a primeira referente aos tabuleiros e a segunda aos pãezinhos.

O Tiago sugeriu a primeira hipótese, tendo chegado a esta através da estratégia da divisão como operação inversa da multiplicação, revelando assim um raciocínio funcional.

Tiago: 800 a dividir por 10? Dá 8. Tem de ser 8x100, 800 a dividir por 100.

Apesar de verbalizar 10, Tiago parece ter pensado sempre em 100 (*"800 a dividir por 100"*).

Contudo, esta não foi a primeira possibilidade escrita na tabela, ficando na quarta linha da mesma. Inicialmente, os alunos escreveram números maiores na coluna dos tabuleiros e números menores na coluna dos pãezinhos (cf. figura 30).

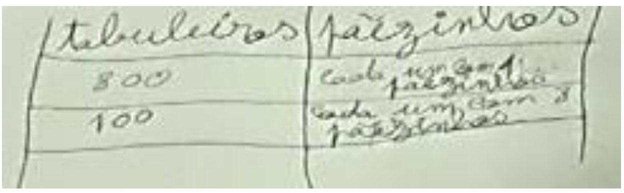


Figura 30 – Tabela inicial da Anabela

Anabela: Vamos fazer 100. 100 tabuleiros com 8 pãezinhos.

Tiago: 400 e 2 pãezinhos.
Anabela: Agora vamos fazer 8 tabuleiros cada um com 100, ao contrário.

O par usou a estratégia da troca da ordem dos fatores, no entanto só escreveu na tabela um pouco mais tarde (8 tabuleiros com 100 pãezinhos).

Algum tempo depois, a professora dirigiu-se ao par, salientando a leitura da primeira linha da tabela.

Professora: 800 tabuleiros levam 1 pãozinho?
Tiago: Cada tabuleiro leva 1.
Professora: Então, tu vais ler 800 tabuleiros levam 1 pãozinho? 1 tabuleiro leva 800 pãezinhos. Não vamos pôr 800 tabuleiros com 1 pão.

Esta leitura não fazia sentido, tendo em conta o contexto da tarefa, ter 800 tabuleiros apenas com 1 pãozinho.

Os alunos apagaram a primeira possibilidade que tinham escrito e optaram por usar a estratégia da troca da ordem dos fatores, escrevendo 1 tabuleiro com 800 pãezinhos.

Anabela: É melhor apagar o do 100 e o do 400, porque a professora não gosta que sejam números grandes.
Tiago: Tem de ser ao contrário. Tem de ser os números mais pequeninos em tabuleiros.

Na sua abordagem inicial, os alunos pensaram em múltiplas decomposições do 800 em produtos de dois fatores, sem pensar se as mesmas fariam ou não sentido no contexto do problema. Ou seja, pensaram de um modo mais abstrato.

Após o comentário da professora chamando a atenção para o contexto, os alunos apagaram as possibilidades que já tinham na tabela e decidiram trocar a ordem dos fatores das mesmas, colocando tabuleiros que levassem uma grande quantidade de pãezinhos (*"tem de ser os números mais pequeninos em tabuleiros"*), atendendo a que numa padaria existiria a preocupação de maximizar a ocupação do forno.

Tiago: Olha, arranjei outra conta…50x16. 50x4 dá 200; 50x8 dá 400, o que quer dizer 50x16.

A Anabela ficou na dúvida se esta possibilidade estaria correta. O Tiago explicou:

- 16x50. Se 8x50 dá 400, o dobro de 8 que é 50x16 dá 800, porque 8 é metade de 16 e dá 400. Quer dizer que pode.

O aluno aplicou a estratégia uso complexo de dobros, chegando à decomposição do 800 em 50x16 ou 16x50, através da duplicação sucessiva de um fator e do produto. Partindo de um facto básico por si dominado, 50x4=200, Tiago estabelece mentalmente uma cadeia com relações numéricas, aplicando sucessivamente o dobro no segundo fator e consequentemente no produto (mantendo o 50 constante), até chegar ao produto pretendido de 800, obtido com 50x16. Assim, o aluno acaba por compor o 16 como uma potência de base dois (16=4x2x2; isto é $16=2^4$). Tiago revela flexibilidade de cálculo pelo modo como vai estabelecendo a relação numérica de dobro para obter uma nova decomposição do 800, aplicando intuitivamente a propriedade associativa da multiplicação. Durante a explicação, o Tiago usou a troca da ordem dos fatores.

Seguidamente, o aluno descobre uma nova possibilidade de distribuição dos pãezinhos.

> Tiago: Já arranjei outra. 20 tabuleiros vezes 40 pãezinhos. 20x4 dá 80, mais um zero, acrescenta-se um zero.

Verifica-se a implementação da estratégia da compensação com uso de relações multiplicativas, recorrendo a um facto básico, visto que o aluno usou um facto conhecido de multiplicação, o 20x4, para encontrar outra possibilidade de distribuição. A regra de acrescentar o zero resulta da necessidade de compensar no produto o facto de se ter multiplicado por 10 o fator 4.

> Tiago: Os tabuleiros têm de ser com os números mais pequenos, não podem ser com números maiores (*voltando-se para o Alexandre e a Rosa*).
> Rosa: Podem, podem.
> Tiago: Não faz sentido 800 tabuleiros e 1 pãozinho em cada um. Não dá. Eles vão ter tudo mal.
> Anabela: A professora disse que não podíamos.
> Investigadora: Porquê?
> Tiago: A professora disse que não podia ser 800 tabuleiros. Só podia ser com números mais pequenos.
> Investigadora: É assim: este é o número de tabuleiros (*apontado para a respetiva coluna*), este é o número de pães que leva cada um (*indicando a segunda coluna*). Ora, se tu tens 1 tabuleiro, tens que pôr todos os pães nesse tabuleiro.
> Tiago: Mas não faz sentido. A professora disse.
> Investigadora: Sim e está bem assim.
> Tiago: Ah! Então, vamos fazer ao contrário.

Após as intervenções da investigadora e da Rosa, os alunos decidiram aplicar a estratégia da troca da ordem dos fatores em todas as possibilidades que tinham descoberto. O objetivo do par foi obter uma tabela maior que contemplasse a exaustão das soluções matemáticas da decomposição do 800 em produtos de 2 fatores. Nesta fase, o par desligou-se do contexto da tarefa e centrou-se no sentido numérico e a Anabela deixou de escrever "cada um com" na coluna dos pãezinhos (cf. figura 31). Assim, registam 800 tabuleiros com 1 pão cada apesar da chamada de atenção da professora de que tal não faz sentido.

tabuleiros	pãezinhos
1	Com 800 pãezinhos
4	Cada um com 200
2	Cada um com 400
8	Cada um com 100 pãezinhos
10	Cada um com 80
16	Cada um com 50
20	Cada um com 40
800	1
200	4
400	2
100	8
80	10
50	16
40	20

Figura 31 – Tabela da Anabela

Seguiu-se uma nova intervenção da investigadora.

> Investigadora: Diz-me uma coisa. Tu aqui tens 10 tabuleiros que levam 80. Qual é a metade do número de tabuleiros?
> Tiago: 5x160.

O par escreveu na tabela, porém a Anabela ficou com dúvidas se estaria correto. De forma a explicar à colega, o Tiago fez o cálculo na folha, aplicando a estratégia de partição de números (cf. figura 32). No entanto, inicialmente não foi essa a estratégia usada. Quando a investigadora apela à aplicação da relação de metade do fator 10, Tiago imediatamente aplica também a relação de dobro no outro fator, 80, chegando a 5x160.

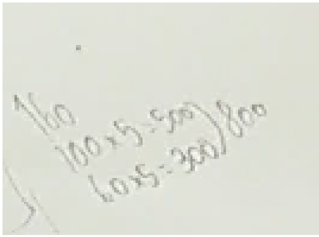


Figura 32 – Cálculo do Tiago

O aluno observou a tabela e através da estratégia do uso de dobros e metades entre os fatores, chegou ao número 32 como dobro de 16 e ao número 25 como metade de 50. Assim, Tiago usou a estratégia multiplicativa escalar em cada uma das variáveis, usando intuitivamente um raciocínio proporcional inverso.

O par aplicou sempre a estratégia da troca da ordem dos fatores, excetuando a possibilidade de 32 tabuleiros com 25 pãezinhos, a qual foi descoberta pelo Tiago, não tendo sido escrita pela Anabela.

Por fim, os alunos escreveram na tabela 150 tabuleiros com 6 pãezinhos e 6 tabuleiros com 150 pãezinhos, embora estas possibilidades estejam incorretas (cf. figuras 33 e 34).

Figura 33 – Resposta incorreta: 150x6

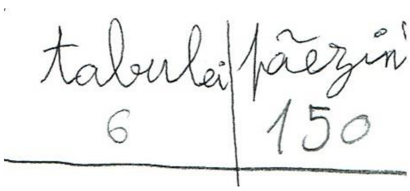


Figura 34 – Resposta incorreta: 6x150

No momento da discussão coletiva, a professora solicitou ao Tiago que fosse ao quadro.

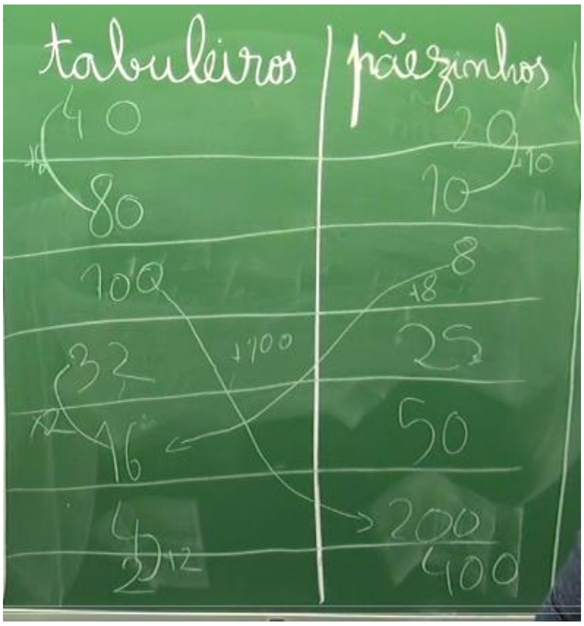


Figura 35 – Apresentação do Tiago

De forma a explicitar a tabela (cf. figura 35), o aluno assinalou relações numéricas de dobro, explicitando-as, por vezes, de forma aditiva, tanto dentro da variável (por exemplo: "+10"), como entre as duas variáveis (por exemplo: "+100"). No entanto, não explicitou as relações inversas aplicadas na exploração da tarefa. Por exemplo, explicitou o 32 como dobro de 16, mas não o 25 como metade de 50. As relações assinaladas são desligadas umas das outras, não evidenciando o raciocínio mobilizado durante a exploração.

O Tiago explicou a resposta 2 tabuleiros com 400 pãezinhos da seguinte forma:

- Eu tirei o zero do 20 e pus no 40, deu-me 400x2.

O aluno aplicou a regra da compensação dos zeros, retirando o zero do fator 20 para acrescentar ao fator 40.

Para justificar as possibilidades de 32 tabuleiros com 25 pãezinhos e 16 tabuleiros com 50 pãezinhos, o aluno usou a partição de números, decompondo em somas ambos os fatores, no caso de 32x5, e apenas o 16, no caso de 16x50 (cf. figuras 36 e 37).

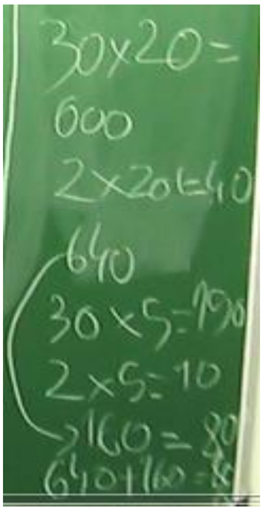


Figura 36 – Partição de números para 32x25

Figura 37 – Partição de números para 16x50

Embora Tiago tenha revelado flexibilidade estratégica ao aplicar relações escalares de dobro e metade entre os fatores, ao explicar à turma as possibilidades encontradas, não consegue aparentemente explicar o raciocínio desenvolvido, optando por comprovar as possibilidades obtidas com o procedimento mecanizado de partição de números. O mesmo aconteceu quando, na fase da exploração, o aluno explicou à colega como chegou à possibilidade 5x160 (cf. figura 32).

A partição de números é um procedimento mecanizado, pois é a forma do Tiago comprovar aos outros colegas que a possibilidade está correta, embora nunca tenha constituído estratégia de exploração.

Tiago parece não ter a completa consciência das relações numéricas emergentes associadas à flexibilidade de cálculo, pois, embora as tenha usado, não as verbaliza após o seu uso.

No final da discussão, após a apresentação de todas as possibilidades, a professora questionou a turma:

> - Encontrámos todas as possibilidades? Podemos tirar algumas conclusões dali? Que números são aqueles? O 32, o 400, 100, 200, 16?

O foco matemático da professora incidiu na exaustão das possibilidades, deixando de relevar o sentido contextual da tarefa.

A turma concluiu que todos esses números eram divisores de 800.

4.3. Tarefa "Pãezinhos II"

4.3.1. Par Alexandre e Rosa

Após a leitura da tarefa em voz alta, a Rosa referiu já saber a resposta.

> Rosa (*dirigindo-se ao seu par*): 84-70 dá 14; 6-5 dá 1.

Os alunos observaram as duas moedas com as quais o Bernardo pagou os 5 pãezinhos e adicionaram o valor mentalmente (50 cêntimos+20 cêntimos=70 cêntimos). Ao valor pago pela Beatriz por 6 pãezinhos, 84 cêntimos, a Rosa subtraiu o valor gasto pelo Bernardo, 70 cêntimos, concluindo que o preço de cada pãozinho era de 14 cêntimos. Usaram uma abordagem aditiva no interior de cada uma das variáveis.

Quando uma das investigadoras passou por perto, a aluna explicitou a sua resposta:

> Rosa: Já sabemos o resultado.
> Investigadora: Já?
> Rosa: Ela comprou 6 pãezinhos que custou 84 e ele 5 pãezinhos que custou 70. 84-70 e descobrimos o resultado.

O Alexandre optou por calcular 84-70, implementando a estratégia de partição de números (cf. figura 38).

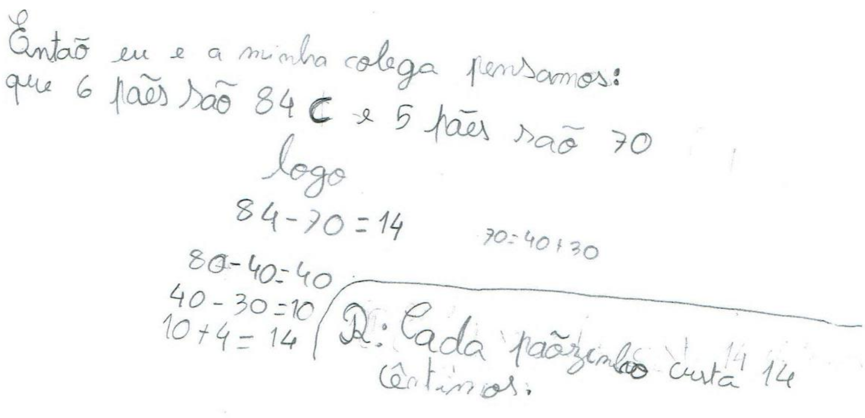


Figura 38 – Estratégia aditiva na determinação do preço unitário dos pãezinhos

No momento da discussão coletiva, que se realizou oralmente, o Alexandre explanou a sua resposta:

> Alexandre: Eu e a Rosa vimos que o Bernardo comprou 5 pãezinhos com uma moeda de 50 e de 20 e depois somámos e deu 70 e depois eu e a Rosa tirámos de 84 o 70 e depois fomos ver quanto é que nos deu. Fizemos a decomposição do 70 e tirámos esses dois números. Eu aqui tirei 4 e meti 80 e depois aqui aumentei o 4.
> Professora: E cada pãozinho custava?
> Alexandre: 14 cêntimos.

O aluno descreveu que tirou o 4 das unidades para operar apenas com as dezenas, tendo adicionado as 4 unidades ao resultado final. O Alexandre optou por fazer a partição do número 70 (40+30).

4.3.2. Par Tiago e Anabela

Os alunos começaram por adicionar o valor das moedas existentes na tarefa, percebendo que o Bernardo tinha pago 70 cêntimos por 5 pãezinhos. Seguidamente, o par calculou 84-70=14, obtendo o preço de cada pãozinho, 14 cêntimos. Usaram, assim, tal como o par anterior, uma abordagem de natureza aditiva.

Mais tarde, o Tiago e a Anabela optaram por continuar o esquema existente no enunciado da tarefa (cf. figura 39): 6 pãezinhos custavam 84 cêntimos; 5 pãezinhos custavam 70 cêntimos e assim sucessivamente, mantendo a abordagem anterior de natureza aditiva no interior de cada uma das variáveis, ou seja, subtraindo sempre 14, o valor unitário do preço do pão, ao preço acabado de obter na coluna da direita e subtraindo sempre 1 ao número de pãezinhos, na coluna da esquerda. Contudo, os alunos erraram no cálculo do preço de 4 pãezinhos, o que influenciou os restantes resultados.

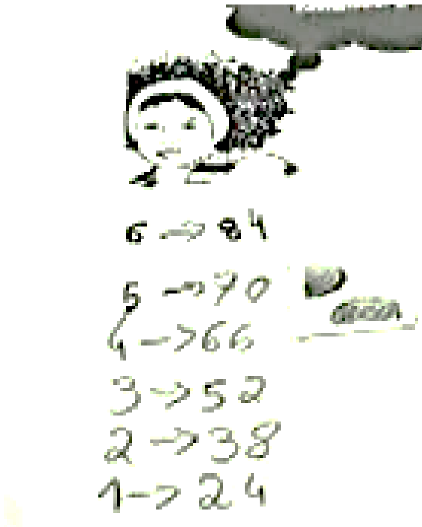


Figura 39 – Esquema presente no enunciado a que os alunos deram continuidade

O erro existente, 70-14=66, consistiu no esquecimento do empréstimo exigido na subtração em causa, pois os alunos calcularam de forma automática e algorítmica 7-1=6 (dezenas) e 10-6=6 (unidades). A professora interveio, visto que a Anabela comentou com o Tiago que aquele resultado não fazia sentido.

> Anabela: Mas isto não tem sentido. Se 1 pãozinho custa isto (*apontando para o número 24*), 2 pãezinhos só aumenta 14 cêntimos. Não tem sentido nenhum.
> Professora: Diz lá, Anabela, diz lá o que tens a dizer.
> Anabela: Se este custa 24, porque é que os outros pãezinhos, quando são 2, os pãezinhos custam menos dinheiro cada um?
> Professora: Explica lá o teu raciocínio.
> Anabela: Têm que ter o mesmo número. Têm de ser todos a 24.
> Tiago: Diz mais de 10 cêntimos.
> Anabela: Mas os outros pãezinhos também têm de custar 24 assim.
> Tiago: Não, não pode ser. Têm de custar 14 cêntimos (…) Tá [sic] mal então.

Anabela revela sentido crítico face ao resultado obtido com o esquema, 24 cêntimos por cada pãozinho; porém, não confrontou com a conclusão alcançada anteriormente de 1 pão custar 14 cêntimos e aplicada no completamento do esquema. A aluna questionou a ausência de proporcionalidade que existiria com aqueles preços: “Se 1 pãozinho custa isto (*apontando para o número 24*), 2 pãezinhos só aumenta 14 cêntimos. Não tem sentido nenhum.”. Assim, embora não tenham identificado o seu erro, concluíram que o esquema não estava correto mobilizando um raciocínio proporcional subjacente à situação proposta, o que revela compreensão de que o preço de cada pãozinho tem de ser constante ($y = k\ x$) e não variável: “Têm de ser todos a 24.”.

O par decidiu apagar o esquema feito. O Tiago recorreu à multiplicação para esclarecer a dúvida do preço de 1 pãozinho. Nesta multiplicação, o aluno utiliza uma relação funcional como forma de verificar se 1 pão custaria 14 cêntimos, tendo aplicado a estratégia da partição de números (cf. figura 40) no cálculo 14x6. Assim, Tiago confirma que o seu resultado é igual ao indicado no enunciado como preço de 6 pãezinhos, ficando com a certeza de que o preço unitário é 14 e não 24.

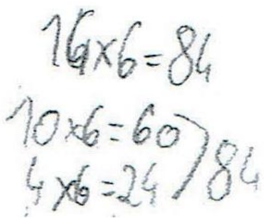


Figura 40 – Estratégia de partição de números (Tiago)

A Anabela decidiu refazer o esquema, mas desta vez de baixo para cima. Ao partir do preço de 1 pãozinho, voltou a usar uma abordagem aditiva, adicionando sempre 14 de forma sucessiva. A aluna errou no cálculo do preço de 3 pãezinhos ao obter 32. O erro foi detetado pelo Tiago.

> Tiago: 3 não é 32, é 42. Falta-te acrescentar 10.
> Anabela: Pois, eu acrescentei.
> Tiago: Não, não. Olha, acrescentaste mal. Falta mais 1 (*o aluno apontou para a ordem das dezenas*).

A aluna, mais uma vez, parece ter adicionado cada um dos dígitos (como se pode inferir quando ela afirma que adicionou o 10, em reação à interpelação de Tiago: "Pois, eu acrescentei"), por um processo algorítmico, sem atender ao transporte da dezena do 12 obtido como soma de 8 com 4 (cf. figura 41).

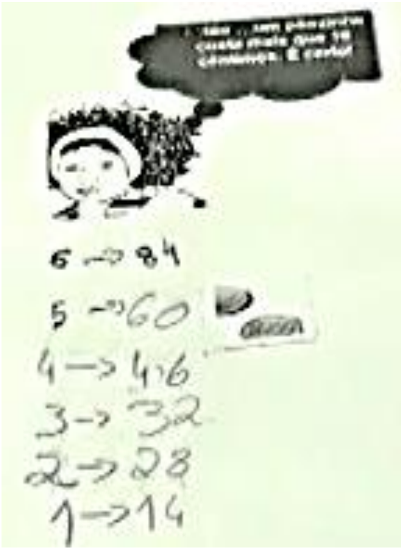


Figura 41 – Erro de cálculo do preço de 3 pãezinhos (Anabela)

Após correção do esquema (cf. figura 42), a Anabela usou a estratégia do cálculo da divisão como operação inversa da multiplicação (cf. figura 43) para confirmar que 1 pãozinho custava 14 cêntimos.

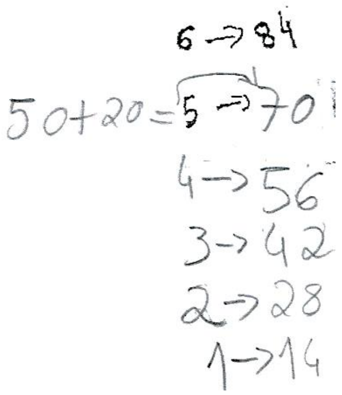


Figura 42 – Esquema correto

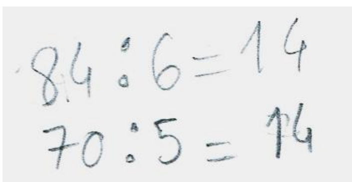


Figura 43 – Cálculo da divisão

Ao fazê-lo, Anabela evolui para uma abordagem de natureza multiplicativa estabelecendo uma relação funcional entre as variáveis, o preço e o número de pãezinhos, como forma de verificar a constante da proporcionalidade direta.

No momento da discussão coletiva, a professora solicitou a participação da Anabela.

> Professora: Anabela, qual foi a vossa estratégia?
> Anabela: Primeiro, vimos que 6 era 84 e 5 era 70. Depois queríamos saber quanto era, vimos a diferença que eram 14. Então fomos confirmar e fizemos quantos é que eram 4, 3, 2 e 1 e depois dividimos outra vez para ver se estavam bem e deu certo.
> Professora: E deu certo. Deu 14, pronto.
> Anabela: Sim.

Os alunos resolveram a tarefa, aplicando diferentes estratégias de resolução e confirmação. No que respeita às estratégias de resolução da tarefa, os alunos usaram uma estratégia de natureza aditiva, tendo começado por determinar o preço unitário pela diferença entre os preços de 6 e 5 pãezinhos ("vimos a diferença que eram 14"), e depois subtraindo ou adicionando 14 aos preços de diferentes números de pãezinhos. Uma vez que se deram conta da existência de erros de cálculo neste processo (aparentemente devidos ao uso de um processo algorítmico), os alunos sentiram necessidade de confirmar o preço unitário de 14 cêntimos, tal como explicaram na conclusão que escreveram: "um pãozinho custa 14 cêntimos, porque multiplicámos 14 vezes 6 que nos deu 84 e também dividimos". A conclusão apresenta a relação externa funcional entre as variáveis usando ambas as operações, multiplicação (preço = constante x número de pãezinhos, $y = k\,x$) e divisão (constante = preço ÷ número de pãezinhos; $k = \frac{y}{x}$). Evidencia também a mobilização da relação inversa entre estas duas operações nesta situação.

4.4. Tarefa "Pãezinhos III"

4.4.1. Par Alexandre e Rosa

O par releu o enunciado da tarefa e decidiu multiplicar o número de pãezinhos, 14, pelo preço de 1 pãozinho, 14 cêntimos.

> Rosa: Já sei, fazemos 14x14.

Para efetuar o cálculo, os alunos usaram a estratégia de partição de números ao decompor tanto o multiplicando como o multiplicador, aplicando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição (cf. figura 44).

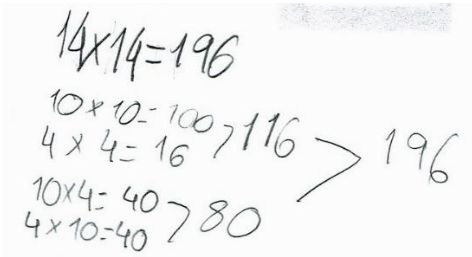


Figura 44 – Cálculo 14x14

> Alexandre: Aqui, 116 não é? Mas ainda falta uma coisa.
> Rosa: O quê?
> Alexandre: 10x4.
> Rosa: Então fica 196.

Mais tarde, os alunos decidiram construir uma primeira tabela com 2 linhas: a linha superior remetia para o número de pãezinhos e a linha inferior para o preço dos pãezinhos.

O objetivo do par era apresentar uma estratégia diferente (cf. figura 45) para o cálculo do preço de 14 pãezinhos. O par começou por preencher a tabela com os dois primeiros valores da lista que constava no enunciado. No entanto, evidenciam-se diferenças no número de pãezinhos presentes nas tabelas do par, Alexandre colocou 3, a seguir a 2 pãezinhos, e de seguida, 6, aplicando a relação numérica de dobro. Em seguida, colocou 7 pãezinhos (cf. figura 45). O aluno calculou o custo de 7 pãezinhos adicionando o preço de 1 pãozinho, 14 cêntimos, ao custo de 6 pãezinhos, 84 cêntimos.

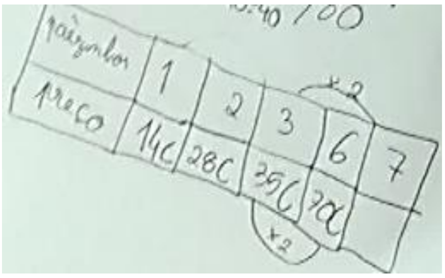


Figura 45 – Tabela inicial do Alexandre

Rosa, seguindo a lista do enunciado, colocou 4 e não 3 pãezinhos, a que se seguiu 5 e 6 (cf. figura 46).

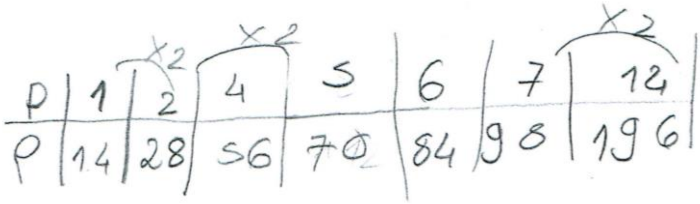


Figura 46 – Tabela da Rosa

Ao preencher a tabela com 5 e 6 pãezinhos, Rosa escreveu os preços que já tinham sido calculados na tarefa anterior ("Pãezinhos II"), tal como se pode verificar no extrato seguinte:

> Rosa: 5, 70…isso já tínhamos visto. 6 são…Não, não são 70 (*referindo-se a 6 pãezinhos*). Mas aí é 84. É, nós vimos na outra ficha.
> Alexandre: Então, porque é que? Vezes 2… (*apontando para o resultado do preço de 3 pãezinhos*).
> Rosa: Só que isso não está bem. Este número não pode estar bem.
> Alexandre: Tá, tá [sic], que eu fiz. Sabes porquê? 28+7 é rápido, 28+2 é igual a 30 e ainda faltam 5.
> Rosa: Essa conta não dá. Fiz agora, dá mais de 35.
> Alexandre: Quanto é que dá?
> Rosa: Então eu fiz…temos de somar mais 14, então 28 tirei os 2, fiquei com 12, 12+30, 42 e aí depois vai ao 84.

Para calcular o preço de 3 pãezinhos, Alexandre aplicou uma estratégia aditiva, adicionando 14 (o preço de um pãozinho) a 28 (o preço de 2 pãezinhos). Inicialmente, decompôs o número 14 em metades (7+7). Seguidamente, o aluno decompôs o número 7 (2+5): "28+7 é rápido, 28+2 é igual a 30 e ainda faltam 5". Acabou por se esquecer de adicionar a outra metade (7) aos 35 acabados de obter, registando, na tabela, 35 como sendo o preço de 3 pãezinhos. Este erro levou-o a considerar que 6 pãezinhos custariam 70 cêntimos, ao aplicar a relação do dobro. Rosa corrigiu-o, explicando que nas tarefas anteriores já tinham visto que 5 pãezinhos custavam 70 cêntimos e 6 pãezinhos custavam 84 cêntimos. Interpelada pelo colega sobre o preço de 3 pãezinhos ("Quanto é que dá?"), Rosa mantém a estratégia aditiva de adicionar 14 a 28, adotando, contudo, uma outra estratégia de cálculo, a estratégia da compensação, pela qual transforma 14+28 em 12+30, acrescentando a 28, os dois que retirou de 14 ("temos de somar mais

14, então 28 tirei os 2, fiquei com 12, 12+30, 42"). Assim, retificando o erro, Rosa confirma o 84 como dobro de 42 ("42 e aí depois vai ao 84").

O par completou a tabela até ao número 14 (pãezinhos), privilegiando a relação numérica de dobro (cf. figura 47).

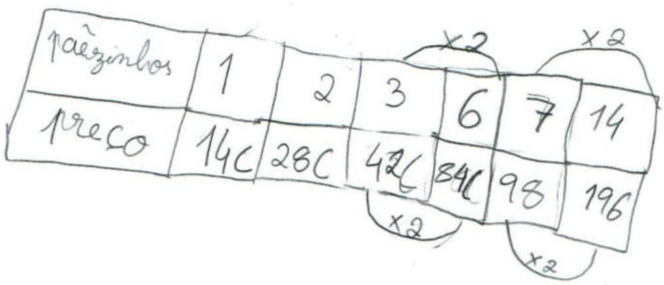


Figura 47 – Tabela final do Alexandre (até 14 pãezinhos)

Assim, o par utilizou relações escalares dentro de cada uma das variáveis, aplicando a proporcionalidade direta presente nesta situação. Ao ter o dobro dos pãezinhos, gasta-se o dobro do dinheiro.

> Investigadora: Está bem, mas agora ainda falta esta, esta última (*referindo-se à última frase do enunciado*).
> Alexandre: Qual? (*releram o problema*)
> Rosa: Vamos fazer agora mais uma, uma quantidade diferente. Qual é que queres fazer? Vamos fazer quantos pães os meus pais costumam levar…8. Vamos fazer mais de 8, mais que 14.
> Alexandre: Os meus pais costumam comprar mais de 8. Costumam comprar aí uns 12, 14.

Algum tempo depois, os alunos construíram uma segunda tabela visando uma nova quantidade de pãezinhos (cf. figura 48), de forma a resolver a segunda parte da tarefa.

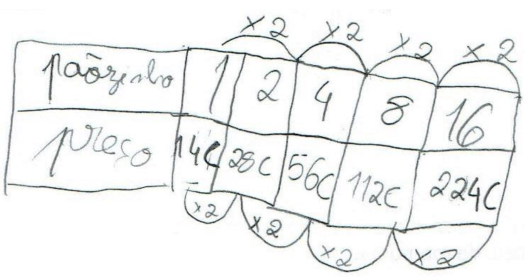


Figura 48 – Tabela até 16 pãezinhos

Rosa: Chegas ao 4 e fazes vezes 2. Eu vou estar sempre a fazer vezes 2 até fazer o 8.

Nesta tabela, o par escreveu todos os valores da lista existente no enunciado, tendo recorrido à mesma para consultar o preço de 4 pãezinhos e decidiu calcular o dobro do último número de pãezinhos dessa lista, o número 8, usando assim uma relação escalar.

Enquanto a turma já tinha iniciado a tarefa seguinte ("Pãezinhos IV"), a Rosa desenhou uma terceira tabela para calcular o preço de 12 pãezinhos (cf. figura 49), copiando os valores até 6 pãezinhos já determinados na tabela anterior (cf. figura 46). A aluna construiu esta tabela visando a tarefa seguinte ("Pãezinhos IV"), contudo fê-lo na folha da tarefa "Pãezinhos III".

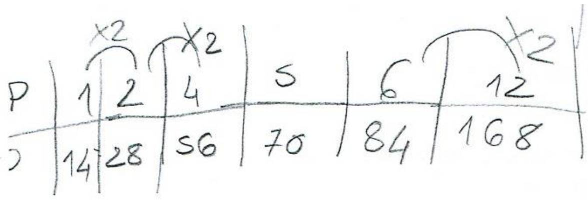


Figura 49 – Tabela da Rosa (até 12 pãezinhos)

Mais uma vez, a aluna aplicou a relação numérica de dobro, neste caso, o dobro de 6.

No momento da discussão, a professora não solicitou ao par que apresentasse as suas estratégias.

4.4.2. Par Tiago e Anabela

Inicialmente, o Tiago sugeriu fazer uma lista, à semelhança da existente no enunciado, até obter o preço de 7 pãezinhos.

Tiago: Já sei o que temos de fazer. Fazemos uma lista até 7 e depois fazemos o dobro. O dobro de 7 é 14.
Anabela: Acho que podemos continuar esta lista, não podemos?

O aluno apontou a relação numérica de dobro para alcançar mais rapidamente os 14 pãezinhos mencionados no problema, usando assim uma estratégia multiplicativa escalar. A Anabela incentivou o colega a completar a lista existente (de forma seguida) até ao número 14, contudo decidiu calcular de imediato o preço de 7 pãezinhos. A aluna indicou que 7 pãezinhos custavam 98 cêntimos.

Anabela: É 98.
Tiago: Ah?! Não dá 98, não.

O Tiago discordou da colega e esta escreveu na folha o cálculo que tinha feito mentalmente, de forma a explicar ao Tiago como chegou ao resultado (cf. figura 50).

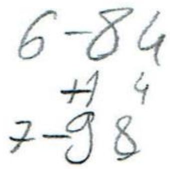


Figura 50 – Cálculo da Anabela para 7 pãezinhos

A Anabela aplicou uma estratégia aditiva (mobilizando o custo de pãezinhos que calculou na tarefa anterior), 6 pãezinhos custam 84 cêntimos, a que adicionou o valor de 1 pãozinho, 14 cêntimos. Assim, 7 pãezinhos custam 98 cêntimos (84+14).
O Tiago decidiu continuar a lista até 14 pãezinhos, usando a relação numérica de dobro em cada uma das variáveis (cf. figura 51), obtendo o preço dos 14 pãezinhos, 196 cêntimos.

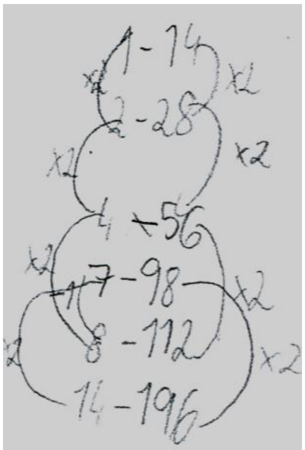


Figura 51 – Relação numérica de dobro (Tiago)

Professora: Imagina uma outra quantidade de pãezinhos e mostra como a Beatriz poderia saber o seu preço. Prolongar aqui esta lista de pãezinhos. Quantos custam 12…quanto custam 10?
Tiago: É 10x14, por isso dá 140.

O aluno escreveu na lista o preço de 9 pãezinhos (126 cêntimos) e de 10 pãezinhos (140 cêntimos). Seguidamente, voltou a usar a relação numérica de dobro para calcular o preço de 20 pãezinhos (cf. figura 52).

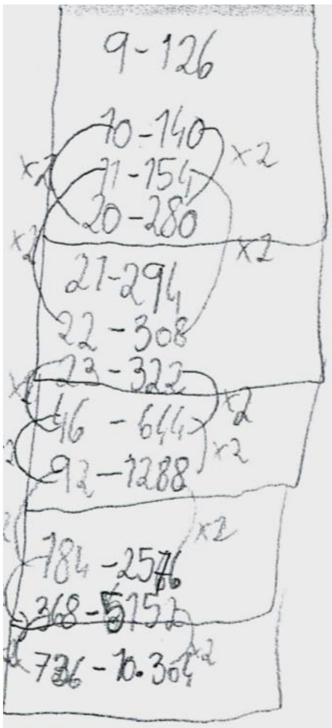


Figura 52 – Lista de preços do Tiago

> Tiago: Ó professora, estamos a fazer mais. Estamos a fazer outros tipos. (*referindo-se a diferentes quantidades*)
> Investigadora: Muito bem. Temos uma lista que assim facilita os pagamentos. Têm logo aí os preços dos pãezinhos todos.

O par decidiu aumentar gradualmente o número de pãezinhos.

> Tiago: Vamos fazer 46…46 pãezinhos.
> Anabela: Oh, fácil…vezes 2. Que divertido! (*os alunos já tinham calculado o custo de 23 pãezinhos*)
> (…)
> Tiago: Pois, é divertido! Eu não vou parar até nós começarmos. (*referindo-se à fase da discussão*)
> Anabela: Então 368 dá 4000.
> Tiago: 5000.
> Anabela: Ah! 5000.
> Tiago: Não, não. Não dá 5000, dá 6000.
> Anabela: Não é 6000, o 70 não entra aí.
> Tiago: Ah, pois. O 50 entra. O 500 entra, entra. 2000+2000…4000, mais 500, mais 500, mais 70.

Anabela: O 500 entra, o 70 não. 5000, depois o 70 é 140. 5000 e depois o 6…5152.

O par foi preenchendo a tabela, aplicando a relação escalar de dobro tanto no número de pãezinhos como no preço dos mesmos. Para saber o preço de 368 pãezinhos (o dobro de 184) o par calculou o dobro, adicionando 2576 (preço de 184 pãezinhos) a 2576. Na adição, os alunos usaram a estratégia de partição de números.

Os alunos prolongaram a lista até 736 pãezinhos, empregando a relação numérica de dobro.

A professora, no momento da discussão, solicitou à Anabela que fosse ao quadro. A aluna escreveu alguns dos cálculos efetuados pelo par (cf. figura 53).

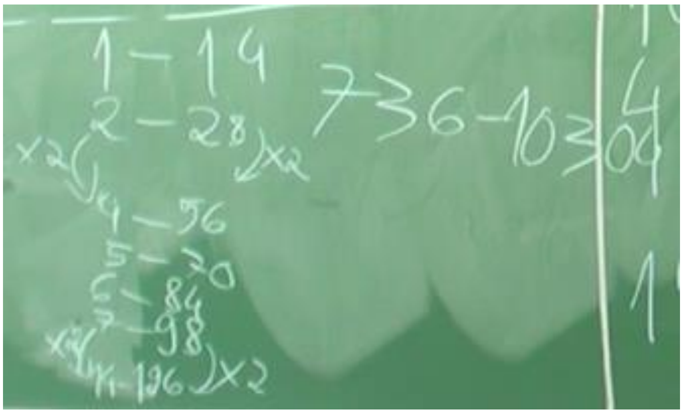


Figura 53 – Apresentação da Anabela

Uma aluna comentou a apresentação de um colega que calculou o preço de 128 pãezinhos, dizendo:

- Isso não faz parte.
Professora: O que é que não faz parte?
Aluna: Eles só queriam saber quanto é que eram 14.
Professora: Faz, faz. Diz lá: imagina uma outra lista. O que pode não fazer sentido é por exemplo, não há muita gente a comprar 128 pãezinhos na padaria. Pode ser para um café, podem ir buscar para um café, mas não é muito usual. Mas imagina uma outra lista.
Anabela: Nós fizemos até 736.
Professora: E tu fizeste essa lista porquê? Também tiveste [sic] a trabalhar os dobros e as metades?
Anabela: Sim.
Professora: Vocês estiveram a trabalhar os dobros?
Anabela: Sim.
(…)

> Professora: Anabela, como é que chegaste a esses números? Como é que chegaste ao 736?
> Anabela: Tivemos [sic] a fazer sempre vezes 2 e parámos neste número (*apontando para o 10304*).

Para resolver a tarefa, o par privilegiou a relação numérica de dobro no interior de cada uma das variáveis, tendo usado números muito maiores comparativamente ao par Alexandre e Rosa.

Nenhum dos alunos questionou o facto de se manter a unidade de cêntimos sem conversão para euros, o que no caso de um número mais elevado de pãezinhos faria mais sentido.

4.5. Tarefa "Pãezinhos IV"

4.5.1. Par Alexandre e Rosa

A Rosa tinha feito na folha anterior ("Pãezinhos III") a tabela até 12 pãezinhos (cf. figura 49), referente à Padaria Pão Bom. A aluna decidiu copiar a tabela para a folha da tarefa "Pãezinhos IV", o que evidencia a sua intenção de comparar o preço dos 12 pãezinhos.

> Professora: Queremos saber qual é a padaria mais barata. Se é a do Eusébio ou se é a outra padaria?
> Rosa: É esta. (*apontando para a tabela referente à Padaria Pão Bom*)
> Alexandre: É a Padaria Eusébio.
> Rosa: Não, não é. Aqui é 180 (*indicando a Padaria Eusébio*) e aqui é… (*evidenciou o resultado na tabela referente à Padaria Pão Bom*).
> Alexandre: Ah! É a Pão Bom.

A Rosa chegou a esta conclusão, pois após ter feito a tabela até 12 pãezinhos, (cf. figura 49) comparou o preço (168 cêntimos na Padaria Pão Bom) com o valor presente na imagem (180 cêntimos na Padaria Eusébio).

Apesar de já terem concluído que a Padaria Pão Bom era a mais barata, o Alexandre calculou (cf. figura 54), através da divisão, o preço de 1 pãozinho na Padaria Eusébio, adotando uma outra abordagem baseada na relação funcional entre as variáveis.

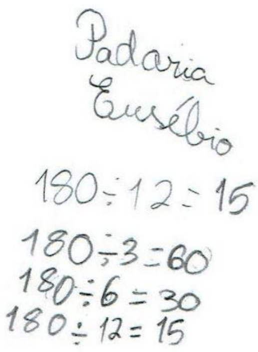


Figura 54 – Cálculo do Alexandre (preço de 1 pãozinho na Padaria Eusébio)

> Alexandre: Vamos fazer a Padaria Eusébio.
> Rosa (*apontando para a tabela existente na tarefa*): A Eusébio já está aqui.
> Alexandre: Eu sei, mas vamos dividir por 12 para ver quanto é que dá.

A afirmação da Rosa "A Eusébio já está aqui." mostra também que a aluna raciocinou no sentido de comparar o preço dos 12 pães.

O aluno dividiu o preço de 12 pãezinhos (180 cêntimos) pelo número de pãezinhos que a Beatriz compra (12).

> Alexandre: É que eu fiz 18 a dividir por 3 que me deu 60, depois 18 a dividir por 6 que era 30. Então, logo 18 a dividir por 12 era 15.

O Alexandre iniciou a divisão através do uso de um facto básico, 18 a dividir por 3 dá 6, compensando de imediato o quociente (x10) ao assumir mais um zero em 18 e em 6 (180:3=60); "deu 60". Posteriormente, aplicou a estratégia da compensação com uso da relação numérica de dobro e metade, isto é, ao duplicar sucessivamente a quantidade de pãezinhos, foi compensando para metade no respetivo quociente alcançar a expressão pretendida: 180:12. Também no cálculo 180:6, o aluno parece ter pensado no facto básico 18:6=3, compensando de imediato com o zero: "depois 18 a dividir por 6 que era 30". O facto de ter pensado sempre com o 18, fez com que verbalizasse o 18 e não o 180, mesmo na conclusão do processo estratégico seguido: "Então, logo 18 a dividir por 12 era 15".

> Investigadora: Qual é a mais barata?
> Alexandre: Padaria Pão Bom.

Rosa: Fomos saber quanto é que custa (*remetendo para a Padaria Eusébio*). Aqui é mais!

Apesar de não terem escrito a resposta completa na folha, o par concluiu que a padaria mais barata é a Pão Bom. Assim, a Rosa identificou, na imagem presente na folha, que a Padaria Pão Bom era a mais barata (cf. figura 55).

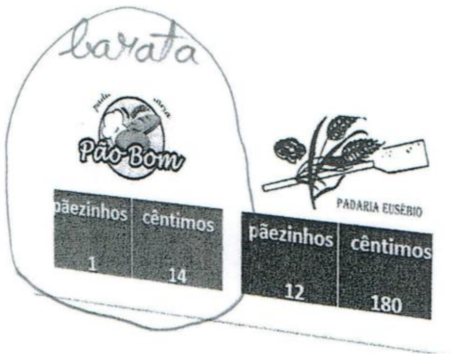


Figura 55 – Identificação da padaria mais barata

No final da exploração da tarefa, o Alexandre copiou a tabela da Rosa para a sua folha. No momento da discussão, a professora pediu ao Alexandre que fosse ao quadro (cf. figura 56).

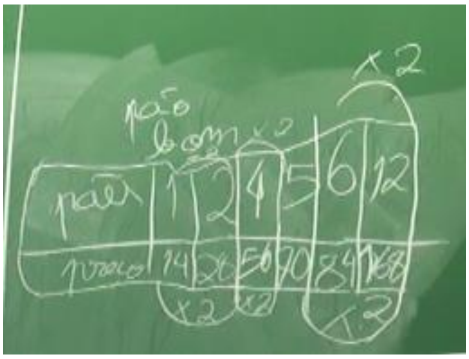


Figura 56 – Apresentação do Alexandre (Padaria Pão Bom)

Professora: Foste fazer uma tabela e vamos começar por aí. Foste fazer uma tabela para? Foi a tua estratégia.
Alexandre: Sim, para ver qual era o resultado da Padaria Pão Bom, quanto é que custava 12 bolos…pães (*corrigiu*). 1 custava 14, 2 custavam 28 e depois fui multiplicando de 2 em 2 até ao 4 que me deu 56, depois no 5 deu-me 70, mais 14 deu 84, vezes 2 deu-me 168.
Professora: Então o Alexandre fez até 168, fez até 12 pãezinhos.

O aluno assinalou a relação numérica de dobro tanto na linha superior da tabela como na linha inferior, evidenciando relações escalares dentro de cada uma das variáveis, visto que ao duplicar o número de pãezinhos também duplicou o preço dos mesmos.

Figura 57 – Apresentação do cálculo do preço de 1 pãozinho na Padaria Eusébio

> Professora: Ora bem, agora o Alexandre vai continuar a explicar. O Alexandre esteve ali a fazer uma divisão e vamos ver o que é que o Alexandre esteve ali a fazer.
> Alexandre: Eu e a Rosa fomos fazer a tabuada do 3, do 6 e do 12.
> Professora: Não, primeiro foste fazer o quê?
> Alexandre: Fui dividir.
> Professora: Exatamente. Então o que é que ele foi fazer?
> Alexandre: Então, eu fui fazer 180 a dividir por 3 que me deu 60, depois logo vi que 180 a dividir por 6 é igual a 30.
> Tiago: É metade e dobro.
> Alexandre: Então logo vi que 180 a dividir por 12 dava 15.
> Professora: O que é que ele andou a fazer?
> Alexandre: Tive [sic] a multiplicar aqui.

O aluno acrescentou no quadro (cf. figura 57) a relação numérica de dobro e metade para explicitar o seu raciocínio, depois da intervenção do Tiago nesse sentido ("É metade e dobro").

O Alexandre não fez uma ligação entre a tabela da Rosa e a divisão apresentada e também não verbalizou o significado do número 15 (preço de 1 pãozinho na Padaria Eusébio).

Após a apresentação dos alunos, a turma concluiu que a Padaria Pão Bom era a mais barata e a professora questionou a turma sobre qual a diferença de preços de 12 pãezinhos existente entre as padarias, ao que uma aluna respondeu “12”.

4.5.2. Par Tiago e Anabela

Após a leitura da tarefa em voz alta, a professora explicitou que o problema estava diretamente relacionado com o anterior.

Os alunos optaram por multiplicar o número de pãezinhos (12) pelo preço de 1 pãozinho (14 cêntimos) de forma a obter o custo total da compra na Padaria Pão Bom (cf. figura 58) para comparar com o custo de 12 pãezinhos na Padaria Eusébio.

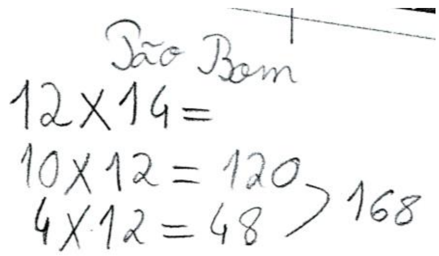


Figura 58 – Cálculo do preço de 12 pãezinhos (Padaria Pão Bom)

> Tiago: Eu já sei qual é a padaria mais barata! É a Pão Bom. Nós podemos fazer multiplicação.
> Anabela: 10x12, 4x12, 120…vê-se logo que é a Pão Bom.

Para calcular o produto de 12 por 14, os alunos aplicaram a estratégia de partição de números, decompondo o 14 (preço de 1 pãozinho) em 10 e 4 unidades, estando subjacente a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. O uso desta estratégia, a partição de números, tem como objetivo facilitar a multiplicação. Usaram também a propriedade comutativa da multiplicação, trocando a ordem dos fatores para 14x12, de modo a manterem à direita o fator 12 que não foi decomposto.

Após a conclusão do cálculo, o par escreveu de imediato a resposta (cf. figura 59).

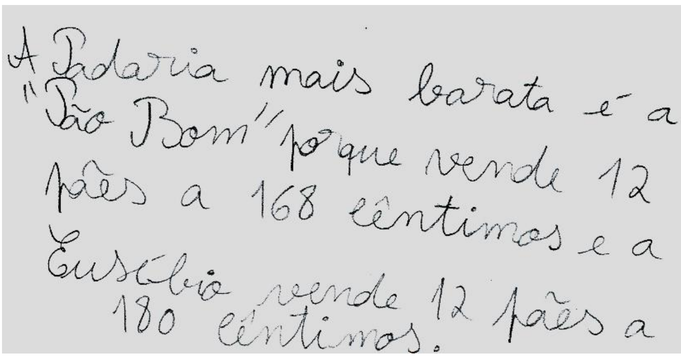


Figura 59 – Resposta do par Tiago e Anabela

Através do resultado obtido na multiplicação e após comparação com o preço de 12 pãezinhos na Padaria Eusébio (180 cêntimos), os alunos concluíram que a padaria mais barata era a Pão Bom, visto que a mesma quantidade de pãezinhos (12) custava 168 cêntimos.
No momento da discussão, a professora não solicitou a participação do par.

4.6. Tarefas intermédias

Este subcapítulo da análise de dados visa categorizar as estratégias usadas pelos alunos nas tarefas realizadas entre a primeira, “As espetadas”, e a última, “Pãezinhos”.
Optei por não apresentar a análise das tarefas “Iogurtes para toda a família” e “No supermercado”. A primeira, por ter sido considerada desadequada para um 3º ano de escolaridade, visto ter sido de resolução rápida e fácil; a segunda, por ter sido aplicada após uma tarefa, “As espetadas” cujo grau de dificuldade era maior.

4.6.1. Tarefa “Moedas”

Na resolução das multiplicações propostas inicialmente, ambos os pares usaram a estratégia multiplicativa de partição de números em somas (cf. figuras 60 e 61). Os alunos calcularam mentalmente, de modo imediato, as operações propostas do lado esquerdo (por exemplo, 12x5), usando esta estratégia (partição de números) apenas para explicar o cálculo. No que se refere às operações existentes no lado direito (por exemplo, 18x5), os alunos aplicaram a estratégia multiplicativa de partição de números em somas, para efetuar os cálculos.

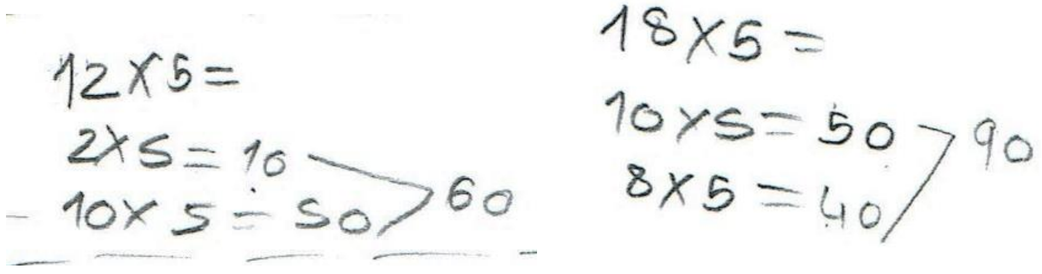


Figura 60 – Resoluções do Alexandre e da Rosa

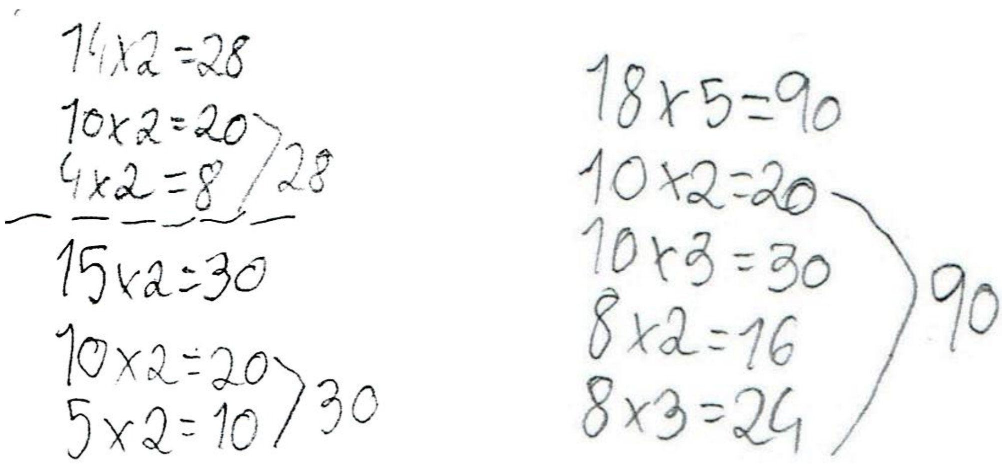


Figura 61 – Resoluções do Tiago e da Anabela

Ambos os pares decompuseram o multiplicador que apresentava dois dígitos. No caso da multiplicação de 18 por 5, o par Tiago e Anabela decompôs ambos os fatores, provavelmente por dominar melhor as tabuadas do 2 e do 3 do que a do 5. Assim, os alunos, usando implicitamente a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, efetuaram produtos parciais, que dominam como factos básicos, e adicionaram-nos depois.

Nas segunda e terceira partes da tarefa, os alunos implementaram a partição de números, contudo não como estratégia, pois a própria tarefa solicitava a decomposição dos números 13 e 26 numa soma de dois ou três produtos (cf. figuras 62 e 63).

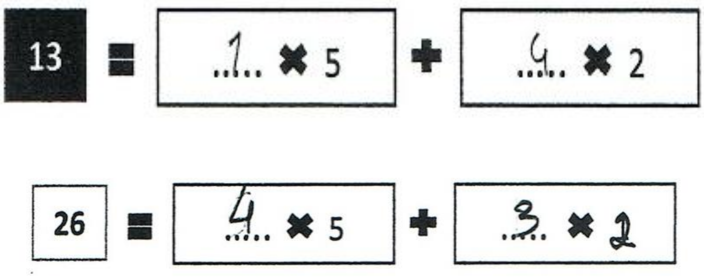


Figura 62 – Produções do Alexandre e da Rosa

Na sua intervenção no quadro, a Rosa explicitou a sua resolução (cf. figura 62):

- Eu fiz uma vez o 5 e 4 vezes o 2”.

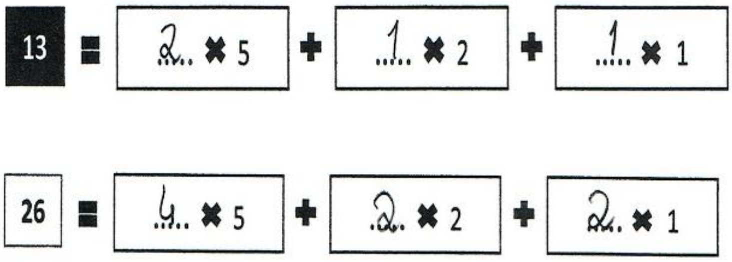


Figura 63 – Produções do Tiago e da Anabela

Aquando a sua apresentação no quadro (cf. figura 63), a Anabela explicou:

> - Primeiro, fiz 2 vezes 5 que era 10, depois fiz 1 vezes 2 que era 2, 10+2 e depois juntei mais 1 que é 1 vezes 1.
> Professora: O que é que estiveste a fazer com esse número? A decom…
> Anabela: …por.
> Professora: A decompor o 13, não é?
> Anabela: Sim.

Este tipo de decomposição apoiou-se na decomposição aditiva dos números que os alunos já dominam, avançando para a expressão na forma de produtos, já não tão habitual para estes alunos, nesta fase da sua aprendizagem. Por exemplo, os alunos representam naturalmente o 26 como 20+4+2, fazendo, depois, a ponte para uma decomposição na forma de soma de produtos, o que lhes exigiu ver o 20 como 4x5, o 4 como 2x2 e o 2 como 2x1.

No momento da distribuição da terceira folha da tarefa, a Anabela identificou de imediato a relação numérica de dobro:

> Anabela: Agora é o dobro! (*referindo-se ao 26 como sendo dobro de 13*)

Esta intervenção da Anabela revela um pensamento flexível, pela forma como reparou nos números e nas relações entre eles. As folhas anteriores foram recolhidas antes da distribuição da terceira, deixando em aberto se a aluna mobilizaria a relação numérica de dobro nos números determinados na decomposição do 26.

4.6.2. Tarefa "Bolas de bilhar"

Na resolução desta tarefa, os dois pares empregaram a estratégia aditiva de contagem unitária na construção do retângulo 1x16 (cf. figura 64).

Rosa: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16.

Figura 64 – Produções da Rosa (em cima) e da Anabela (em baixo)

Inicialmente, o par Alexandre e Rosa não percebeu que tinha de construir retângulos com 16 bolas, tendo desenhado outras figuras com o mesmo número de bolas (cf. figura 65).

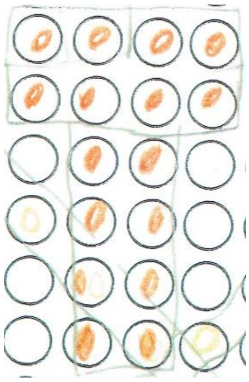


Figura 65 – Produção do Alexandre e da Rosa

Na disposição em T apresentada na figura 65, os alunos dispuseram as 16 bolas em dois retângulos com 8 cada um.

Os alunos tiveram dificuldade em perceber que ao desenharem um retângulo na horizontal e outro na vertical, estes tinham o mesmo número de bolas e que apenas a posição era diferente.

Mais tarde, o par aplicou a estratégia aditiva de contagem envolvendo saltos dos múltiplos na construção do retângulo 2x8 (cf. figura 66), tendo pintado as bolas posteriormente.

Rosa: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16.

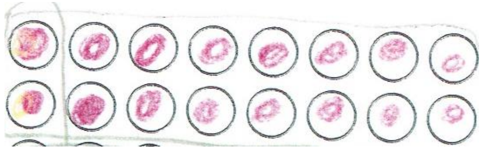


Figura 66 – Retângulo 2x8

Alexandre: O quadrado não dá, tem de ser retângulo.
Rosa: É retângulo, não diz que é quadrado *(referindo-se ao enunciado da tarefa).*

O Alexandre e a Rosa pensaram em desenhar um quadrado 4x4, contudo abandonaram a ideia.

Professora: Isso é um retângulo?
Anabela: Não.
Professora: Pois não.
Anabela: É um quadrado.
Tiago: Pois é um quadrado.

O par Tiago e Anabela desenhou um quadrado 4x4. Após a intervenção da professora, apagaram o quadrado.

Professora: Deixem ficar este, Anabela. Façam este que estava aqui. (…) Já vamos apresentar esse *(apontando para o quadrado).*
Anabela: Mas é um quadrado.
Professora: Não faz mal.

A professora solicitou ao par que voltasse a desenhar o quadrado (cf. figura 67) com o objetivo de abordar essa possibilidade no momento da discussão.

Figura 67 – Produção do Tiago e da Anabela

O par Tiago e Anabela implementou a estratégia de cálculo da divisão na construção do retângulo 2x8 (cf. figura 68).

Tiago: 16 a dividir por 2 dá 8, por isso podemos contar estas bolas até 8 e depois…”

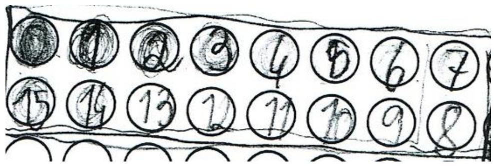


Figura 68 – Representação da disposição retangular após estratégia do cálculo da divisão

Apesar de terem pensado numa caixa com duas filas com 8 bolas cada uma, os alunos representaram-nas incluindo a bola branca, a que atribuíram o número zero, o que fez com que a fila de cima terminasse na bola 7, seguindo a ordem da esquerda para a direita. A fila de baixo segue a ordem inversa, da direita para a esquerda, terminando na bola 15.

Após registarem todas as possibilidades de resolução, o Tiago e a Anabela escreveram uma conclusão (cf. figura 69).

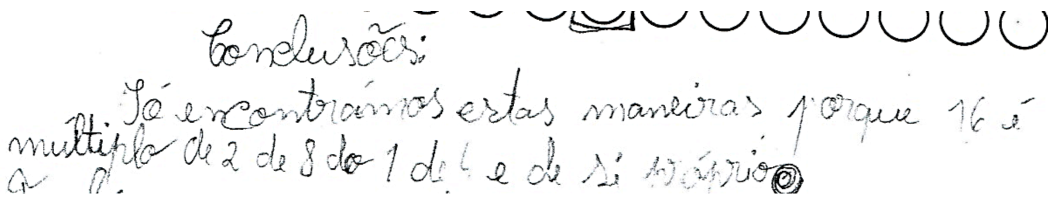


Figura 69 – Conclusão do Tiago e da Anabela

Durante a fase da exploração da tarefa, nenhum dos pares optou pela representação de produtos.

No momento da discussão, a primeira aluna a apresentar desenhou retângulos com as bolas inseridas. Posteriormente, o segundo aluno representou produtos (cf. figura 70), tendo como ponto de partida os retângulos que desenhara na folha.

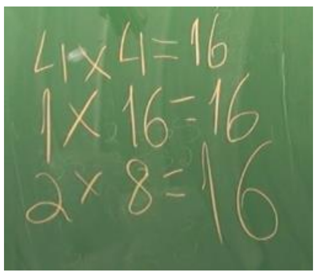


Figura 70 – Representação de produtos

Um aluno referiu ter descoberto uma outra possibilidade, 8x2=16. A turma, em conjunto com a professora, concluiu que era o mesmo que 2x8=16. Referiram que a única coisa diferente era a posição do retângulo (vertical/horizontal), sem associar à estratégia da troca da ordem dos fatores.

O mesmo aluno afirmou que a possibilidade 4x4=16 não estava certa, pois tratava-se de um quadrado. A professora aproveitou a oportunidade para comparar as características do quadrado e do retângulo, salientando que a tarefa pedia apenas retângulos.

No fim da discussão, a turma concluiu que só existiam as possibilidades apresentadas, visto que 1, 2, 4, 8 e 16 são múltiplos de 16.

4.6.3. Tarefa "Uma bandeira estrelada"

Na primeira etapa da tarefa, ambos os pares realizaram o cálculo multiplicativo por recurso ao modelo retangular (cf. figuras 71 e 72). Enquanto na tarefa anterior, os alunos limitam-se a pintar as bolas na grelha facultada no enunciado, sem exprimir qualquer produto, nesta tarefa começam, desde logo, por contabilizar as estrelas através da multiplicação.

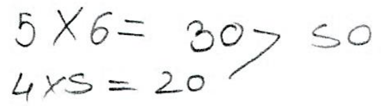


Figura 71– Resolução do Alexandre e da Rosa

> Rosa *(contou as estrelas existentes por linha e coluna)*: 5 vezes 6.
> Alexandre: Mas depois há aqui outro.
> Rosa: Pois há. Temos 30 por agora.
> Alexandre: 1, 2, 3, *(pausa)* 4. Agora a mais pequenina que é…espera aí…4 vezes 5 igual….
> Rosa: É igual a 20 e é igual a 50 estrelas.

Como se pode verificar no extrato atrás transcrito, o par Alexandre e Rosa observou duas disposições retangulares na bandeira, a correspondente às linhas com 6 estrelas e a outra correspondente às linhas mais pequenas com 5 estrelas que se repetem quatro vezes, intercaladas entre as linhas maiores.

O par Tiago e Anabela apresentou o cálculo igual ao do Alexandre e da Rosa (cf. figura 71), mas decidiu realizar um segundo cálculo (cf. figura 72).

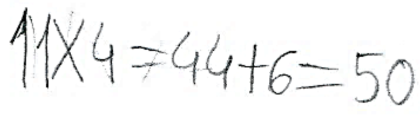


Figura 72 – Resolução do Tiago e da Rosa

Uma das investigadoras reparou que o par estava a fazer um segundo cálculo.

> Tiago: 5+6 dá 11 *(assinalando as duas primeiras linhas)*. Dá 11x1, 2…
> Investigadora: Mas agora repara…se estás a fazer assim com 11, vê lá quantas vezes é que está o 11. Aqui é 11, não é? *(apontando para as duas primeiras linhas)*
> Tiago: 11x9.
> Investigadora: Vê lá se estão 9 vezes. Assim são 11, certo? 6 e 5 são 11. Então tens aqui 1 vez o 11 e agora vejam lá quantas vezes é que têm mais o 11. É uma vez…então volta lá a fazer assim *(na horizontal).*
> Tiago:1,2,3,4… *(o aluno agrupou as estrelas)*
> Investigadora: E agora ainda sobra…
> Anabela: 5, não…são 6.
> Tiago: 11x4=44
> Investigadora: E depois ainda sobra… *(os alunos adicionaram 6 ao 44).*

Este segundo cálculo decorreu de uma nova forma de visualizar as estrelas e de fazer agrupamentos. Assim, Tiago forma um grupo com 11 estrelas correspondente às duas primeiras linhas, verificando depois, orientado pela investigadora, que o grupo se repete quatro vezes. No final, adicionou 6 correspondentes às estrelas da última linha de baixo. Apesar desta forma de visualização ser expressa por 4x11+6, os alunos exprimem-na, tanto oralmente como por escrito, com a ordem inversa dos fatores: "11x4+6".

Mais tarde, na segunda etapa da tarefa, os dois pares usaram a partição de números em somas de dois produtos (cf. figuras 73 e 74), tal como era exigido pela tarefa.

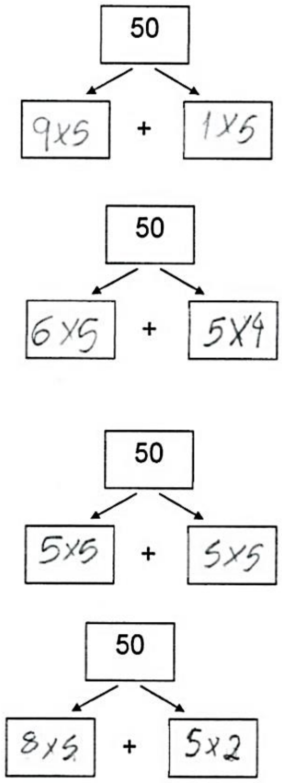


Figura 73 – Produção do Alexandre e da Rosa

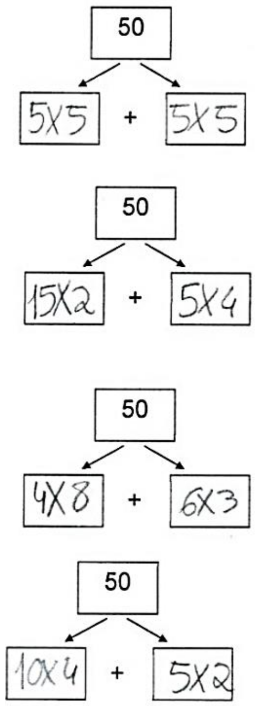


Figura 74 – Produção do Tiago e da Anabela

Posteriormente, os pares utilizaram a estratégia da troca da ordem dos fatores (cf. figuras 73 a 75) para obter novas possibilidades de decomposição do 50.

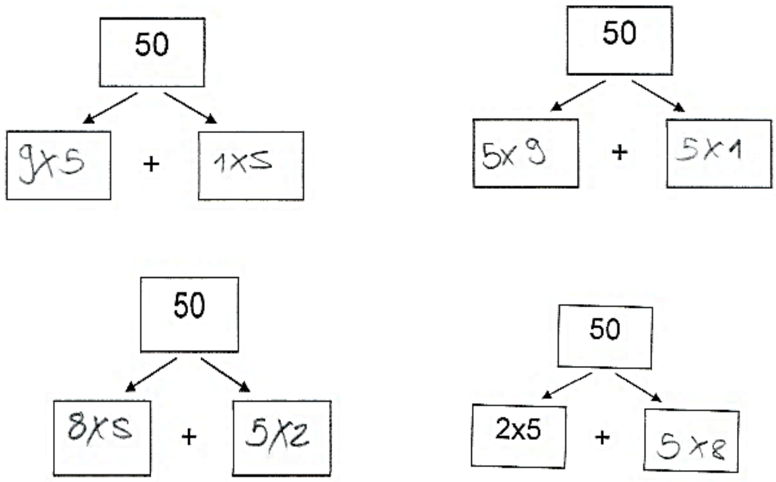


Figura 75 – Resoluções do Alexandre e da Rosa

Além do uso desta estratégia, ambos os pares trocaram a ordem das parcelas como aconteceu com a decomposição de 50 = 2x5 + 5x8.

5. CONCLUSÃO

O presente estudo tem como objetivo compreender o modo como os alunos desenvolvem a flexibilidade de cálculo multiplicativo num contexto de ensino exploratório.

Partindo do objetivo do estudo foram delineadas três questões de investigação:

- Quais as estratégias usadas pelos alunos quando resolvem tarefas de multiplicação?
- Como evoluem as estratégias usadas pelos alunos?
- Como é que os alunos usam de forma flexível o cálculo multiplicativo?

Este capítulo visa as conclusões do estudo realizado, uma breve reflexão do trabalho desenvolvido e algumas recomendações para estudos futuros.

5.1. Estratégias usadas pelos alunos e sua evolução

Ao longo da sequência de aprendizagem composta por sete tarefas de multiplicação, os alunos usaram diferentes estratégias. Nesta sequência foram apresentadas tarefas com diferentes contextos, seguindo a ideia de Silver (citado por McIntosh et al., 1992) que defende que o contexto no qual os problemas matemáticos são apresentados influencia o raciocínio. Assim, é conveniente apresentar aos alunos problemas com uma contextualização rica, o que não só promoverá a resolução de problemas, mas também estimulará o sentido de número, pois alunos revelam uma maior taxa de sucesso na resolução de problemas em contexto, em detrimento daqueles que não estão em contexto (Foxman & Beishuizen, 2002).

Esta sequência integrou números cuja grandeza foi aumentando gradualmente. Segundo Nesher (citado por Mulligan & Watson, 1998) e Fernández et al. (2010), os números específicos podem influenciar os alunos no modelo a usar e, consequentemente, o seu desempenho. Relativamente à natureza das tarefas, o grau de desafio é elevado e o grau de estrutura é aberto, visando várias possibilidades de resolução (Ponte, 2005).

Foi criada uma categorização das estratégias baseada em diversos autores (Ambrose, Baek & Carpenter, 2003; Baek, 2006; Fosnot & Dolk, 2001; Foxman & Beishuizen, 2002; Hartnett, 2007; Heirdsfield et al., 1999; e Mulligan & Mitchelmore, 1997) de forma a proceder à análise dos dados. As estratégias dividem-se em duas grandes categorias: i) natureza aditiva e ii) natureza multiplicativa.

Os alunos aplicaram as seguintes estratégias de natureza aditiva: a) contagem unitária; b) contagem envolvendo saltos dos múltiplos; e c) adição repetida.

No que diz respeito às estratégias de natureza multiplicativa, os pares empregaram: i) cálculo da divisão; ii) partição de números em produtos/em somas; iii) compensação com uso de relações multiplicativas entre os fatores; iv) uso complexo de dobros e v) troca da ordem dos fatores.

Nas primeiras tarefas da sequência de aprendizagem, os alunos privilegiaram o uso de estratégias de natureza aditiva, porém também aplicaram algumas estratégias de natureza multiplicativa. Mendes et al. (2013) indicam que inicialmente os modelos construídos pelos alunos para representar situações multiplicativas estão associados à ideia de multiplicação como adição repetida de parcelas iguais, salientando que na aprendizagem da multiplicação importa desenvolver a passagem do raciocínio aditivo para um de natureza multiplicativa. Afirmam ainda que a progressão dos procedimentos usados pelos alunos está subjacente à construção gradual das ideias que os suportam. Na transição das estratégias aditivas para multiplicativas, os alunos foram compreendendo o conceito de *unitizing*, ou seja, consideraram unidades isoladas como um todo (Fosnot & Dolk, 2001).

Ao longo do tempo, os pares passaram a aplicar sobretudo estratégias de natureza multiplicativa, recorrendo a cálculos aditivos apenas em casos pontuais. Ao aplicar estratégias da segunda categoria, os alunos evidenciaram o uso das propriedades distributiva, associativa e comutativa, as quais são designadas de "grandes ideias" associadas à multiplicação (Fosnot & Dolk, 2001).

À semelhança do estudo de Heirdsfield et al. (1999), as respostas dos alunos participantes neste estudo mostraram um desenvolvimento da simples contagem para o uso de factos combinados ou conhecidos.

Os alunos recorrem com alguma frequência à estratégia multiplicativa de partição de números, pois tal como referem Mendes et al. (2013), a decomposição de um dos fatores para realizar um produto, tendo subjacente a propriedade distributiva em relação à adição está na base da maior parte dos procedimentos multiplicativos de resolução das tarefas.

É evidente que, quando os alunos utilizam a estratégia de cálculo da divisão, estes revelam conhecimento da relação existente entre as operações de multiplicação e divisão (McIntosh et al., 1992).

Passo a apresentar três tabelas (tabelas 7 a 9) que sintetizam a análise dos dados: a primeira e a segunda integram as estratégias usadas pelos pares Alexandre e Rosa e Tiago e Anabela, respetivamente, para resolver cálculos multiplicativos; a terceira indica as estratégias que os pares aplicaram em situações de proporcionalidade (Vergnaud, 2014; Infante, 2014). Esta última incide apenas nas tarefas “As espetadas” e "Pãezinhos", focando a forma como os alunos olharam para as variáveis e como estabeleceram as relações.

Tabela 7- *Estratégias usadas pelo par Alexandre e Rosa para resolver situações multiplicativas*

	Estratégias								
	Natureza aditiva			**Natureza multiplicativa**					
Tarefa	**Contagem unitária**	**Contagem envolvendo saltos dos múltiplos**	**Adição repetida**	**Cálculo da divisão**	**Partição de números**		**Compensação com uso de relações multiplicativas entre os fatores**	**Uso complexo de dobros**	**Troca da ordem dos fatores**
					em produtos	**em somas**			
"As espetadas"		X							X
"Moedas"						X			
"Bolas de bilhar"	X	X							
"Uma bandeira estrelada"						X			X
"Pãezinhos I"					X		X		X
"Pãezinhos II"									
"Pãezinhos III"						X	X		
"Pãezinhos IV"				X			X		

Tabela 8 - *Estratégias usadas pelo par Tiago e Anabela para resolver situações multiplicativas*

	Estratégias								
	Natureza aditiva			**Natureza multiplicativa**					
Tarefa	**Contagem unitária**	**Contagem envolvendo saltos dos múltiplos**	**Adição repetida**	**Cálculo da divisão**	**Partição de números**		**Compensação com uso de relações multiplicativas entre os fatores**	**Uso complexo de dobros**	**Troca da ordem dos fatores**
					em produtos	**em somas**			
“As espetadas”		X							X
“Moedas”						X			
“Bolas de bilhar”	X			X					
“Uma bandeira estrelada”									X
“Pãezinhos I”				X	X		X	X	X
“Pãezinhos II”			X						
“Pãezinhos III”							X		
“Pãezinhos IV”						X			

Tabela 9 - *Estratégias para lidar com situações de proporcionalidade*

	Estratégia aditiva		**Estratégia multiplicativa escalar**		**Estratégia multiplicativa funcional**	
Tarefa	**Alexandre e Rosa**	**Tiago e Anabela**	**Alexandre e Rosa**	**Tiago e Anabela**	**Alexandre e Rosa**	**Tiago e Anabela**
"As espetadas"	X	X				
"Pãezinhos I"			X	X		
"Pãezinhos II"	X	X				X
"Pãezinhos III"	X	X	X	X		
"Pãezinhos IV"			X		X	X

Nas tarefas que continham situações de proporcionalidade, os alunos, na primeira ("As espetadas") não aplicaram estratégias multiplicativas. Assim, a abordagem inicial dos alunos, ao lidar com este tipo de situações, correspondeu à adoção exclusiva da estratégia aditiva, elaborando tabelas onde foram registando os sucessivos resultados da contagem envolvendo saltos dos múltiplos (tabelas 7 e 8) dos diferentes números experimentados. As tabelas construídas pelos alunos não traduzem a proporcionalidade inversa presente na tarefa "As espetadas", mas sim a proporcionalidade direta correspondente à sua forma de verificar se os números experimentados como divisores de 60 atingiam ou não o 60. Por exemplo, na tabela correspondente às espetadas com 5 camarões, os alunos foram registando a proporcionalidade direta da variação do número de espetadas mantendo o mesmo número de camarões por espetada: se 1 espetada leva 5 camarões, 2 espetadas levam 10 camarões, ... e 12 espetadas levam um total de 60 camarões. Embora tenham usado apenas a estratégia aditiva, depois de terem construído as tabelas, os alunos verificaram relações de dobro de natureza escalar, isto é, que se baseiam em relações entre quantidades da mesma natureza/grandeza (Vergnaud, 2014; Infante, 2014). Após a conclusão das diferentes tabelas, os alunos exprimem os resultados alcançados através de produtos (expressão funcional da relação de proporcionalidade inversa, $k = x\,y$), aplicando a estratégia da troca da ordem dos fatores (tabelas 7 e 8) para gerar mais possibilidades, e registando também o número de camarões sobrantes: por exemplo, ao concluir a tabela do 4, o par Tiago e Anabela exprimiu essa possibilidade por 15x4=60, ou seja, 15 espetadas com 4 camarões cada, aplicando logo a situação inversa ao exprimir 4x15=60, ou seja, 4 espetadas com 15 camarões cada.

Na última tarefa, "Pãezinhos", verifica-se a aplicação destas estratégias tanto em situações de proporcionalidade inversa como de proporcionalidade direta. Exemplo disso é a relação numérica de dobro e/ou metade no interior das variáveis, de natureza escalar, a qual é aplicada na resolução das tarefas, mas também é identificada pelos alunos após o término da tarefa.

Contrariamente ao que tinha acontecido na primeira tarefa "As espetadas", na tarefa "Pãezinhos I", os alunos constroem tabelas que revelam a proporcionalidade inversa da situação. As tabelas deixam de servir o propósito de encontrar os divisores de um dado número para apresentarem diferentes formas de decompor 800 em produtos de dois fatores. As tarefas intermédias parecem ter contribuído para uma maior facilidade em exprimir números através de produtos.

As tarefas "As espetadas" e "Pãezinhos" lidam com o mesmo tipo de proporcionalidade, mas "Pãezinhos I" exige lidar com um número com uma ordem de grandeza muito superior. É notória a evolução dos dois pares de alunos, confrontando o seu desempenho numa e noutra tarefa. Em "Pãezinhos I", os alunos abandonam a estratégia aditiva, revelando serem capazes de decompor 800 num elevado número de produtos diferentes, através das relações multiplicativas escalares dentro de cada uma das variáveis, aplicando o dobro numa variável e a metade na outra variável.

Relativamente às tarefas "Pãezinhos II" e "Pãezinhos III", os pares empregaram estratégias aditivas (tabela 9) para resolver situações de proporcionalidade direta, nomeadamente, no cálculo do preço de 1 pãozinho ("Pãezinhos II") e do preço de outras quantidades de pãezinhos ("Pãezinhos III"). No entanto, ao longo da exploração da tarefa "Pãezinhos III", os alunos começam, progressivamente, a usar estratégias multiplicativas escalares (tabela 9) de dobro internas às variáveis para obter um maior número de preços de pãezinhos. É de realçar que Tiago usa, desde o início da exploração desta tarefa, esta abordagem multiplicativa.

Em determinadas situações, os alunos revelam raciocínio funcional (tabela 9) ao aplicar, por exemplo, a estratégia do cálculo da divisão como operação inversa da multiplicação, como aconteceu com o par Tiago e Anabela em "Pãezinhos II" para verificar a correção do preço de cada pãozinho. A estratégia multiplicativa funcional, que consiste em estabelecer relações entre quantidades de diferentes naturezas/grandezas (Vergnaud, 2014; Infante, 2014), surge com maior expressão na última tarefa, "Pãezinhos IV", associada a diferentes formas de abordar o problema: enquanto Alexandre calcula o preço unitário do pão numa padaria para o comparar com o preço unitário da outra, o par Tiago e Anabela calcula o preço de 12 pãezinhos, relacionando as duas variáveis numa padaria, para comparar com o custo de 12 pães na outra padaria.

Estes resultados são convergentes com outros estudos (por exemplo, Infante, 2014) ao apontarem uma evolução ao nível das estratégias adotadas pelos alunos para lidar com situações de proporcionalidade, desde as aditivas, até às multiplicativas, as quais, também evoluem, por sua vez, desde as de natureza escalar até às funcionais. No entanto, no presente estudo, esta evolução verificou-se ao longo da exploração da tarefa (Pãezinhos II, III e IV) no mesmo dia. Ou seja, a dimensão temporal não tem aqui relevância. O tempo e o trabalho realizado com as tarefas intermédias já assumem importância ao compararmos o desempenho dos alunos entre a primeira e a última tarefas, mediadas por um período de cerca de três meses.

Estes resultados apontam, ainda, para a relevância do desenvolvimento de tarefas que possibilitem aprofundar, alargar e apoiar o desenvolvimento do pensamento funcional dos alunos (Blanton & Kaput citados por Infante, 2014).

5.2. Como é que os alunos usam de forma flexível o cálculo multiplicativo?

Ao longo da resolução das tarefas, os alunos revelaram que a estratégia multiplicativa de partição de números tornou-se num processo mecanizado que estes usam não só para resolver uma tarefa, mas também para verificar se outra estratégia (mobilizada antes de forma flexível) foi aplicada corretamente. Os alunos aplicaram esta estratégia tanto por escrito como mentalmente. Assim, o uso desta estratégia, em particular, revela pouca flexibilidade de cálculo. Um outro indicador de alguma fragilidade ao nível da flexibilidade de cálculo multiplicativo foi a ausência da estratégia de compensação no produto após arredondamento de um dos fatores, no trabalho de qualquer um dos pares, cuja mobilização requeria reparar nos números envolvidos.

A sequência de aprendizagem implementada proporcionou aos alunos oportunidades para trabalhar com os números de forma flexível, o que por sua vez, oferece oportunidades para melhorar o seu sentido de número (Hartnett, 2007).

Ao longo da resolução das tarefas, verificou-se que os alunos estabeleceram relações numéricas (Threfall, 2009), designadamente, de dobro e metade. Em casos pontuais também são identificadas e aplicadas as relações de quádruplo/quarta parte e de décuplo/décima parte. Estas relações numéricas estão presentes tanto em estratégias de resolução de situações multiplicativas como em estratégias de resolução de situações de proporcionalidade.

Os alunos implementaram estratégias que incluem o uso de propriedades da multiplicação: propriedades comutativa e distributiva e utilizaram factos básicos (Heirdsfield et al.,1999) por si dominados para resolver algumas tarefas.

Investigações realizadas nas últimas décadas, no campo do cálculo mental flexível, referem que as características da tarefa, como por exemplo, os números e o contexto, têm impacto na escolha das estratégias (Brocardo, 2014; Threlfall, 2009).

É evidente que, ao resolver as tarefas, os alunos atenderam às características dos números e às relações existentes entre estes, ao usarem as estratégias (Threlfall, 2009; Verschaffel et al, 2009). São exemplos deste uso flexível, a compensação com uso de relações multiplicativas entre os fatores e o uso complexo de dobros evidenciado por Tiago.

Fuson e Thompson (citados por Brocardo, 2014) indicam que para os alunos desenvolverem uma especialização adaptativa e a flexibilidade, devem construir significativamente os seus próprios conceitos e conhecimentos matemáticos.

No caso da tarefa “Pãezinhos I”, os alunos, a determinada altura, deixaram de ter em conta o contexto da tarefa e operaram apenas no sentido numérico. O objetivo foi obter uma tabela maior que contemplasse a exaustão das soluções matemáticas da decomposição do fator 800 em produtos de 2 fatores. Assim, o contexto forneceu, de início, uma compreensão implícita da proporcionalidade inversa existente, o que se evidencia no modo como os alunos foram variando as diferentes possibilidades. Mas rapidamente, estes se focaram no objetivo matemático, ignorando, intencionalmente, o que fazia ou não sentido naquela situação concreta, do ponto de vista contextual.

O Tiago parece não ter a completa consciência das relações numéricas emergentes associadas à flexibilidade de cálculo, pois, embora as use, não as verbaliza após o seu uso. Tal foi evidente na tarefa "Pãezinhos I" em que Tiago, durante o momento da discussão coletiva, justifica as possibilidades 32x25 e 16x50 com o procedimento mecanizado da partição de números em somas, procedimento este de uso generalizado na turma e em que todos parecem confiar, ao invés de explicitar as estratégias que efetivamente usou, de forma flexível, ao estabelecer relações numéricas, a estratégia de dobro e metade entre os fatores e a do uso complexo de dobros, respetivamente. Assim, pode-se concluir que uma estratégia emerge da conexão não totalmente consciente e racional entre o que o aluno reparou nos números da tarefa e o que ele sabe sobre os números e as relações entre eles (Threfall, 2009).

A flexibilidade de cálculo, em particular, no cálculo mental é importante não só por ser benéfico para a criança ao ter sucesso no cálculo, mas porque também revela, algo mais matemático do que o alcance de conhecimentos factuais e processuais (Threfall, 2009).

5.3. Reflexão e recomendações

A realização deste estudo proporcionou-me a oportunidade de trabalhar uma temática que sempre apreciei, a multiplicação. Desde que iniciei o Mestrado que defini a temática da dissertação. Mais tarde, decidi focar o estudo na Flexibilidade de Cálculo após a apresentação de um projeto por parte da orientadora da dissertação, numa das Unidades Curriculares do 1º ano.

Enquanto professora, este estudo permitiu que melhorasse a minha prática já que trabalho como explicadora do 1º ciclo há vários anos.

Como investigadora, considero que a experiência de ensino foi proveitosa, oferecendo benefícios tanto para a aprendizagem de conhecimento matemático mais significativo como para o desenvolvimento de atitudes positivas perante a Matemática, pois possibilita que os alunos tenham um papel mais ativo no processo de ensino-aprendizagem. Também foi importante para o desenvolvimento da flexibilidade de cálculo dos alunos.

A seleção dos pares poderia ter sido diferente, englobando alunos cujas características fossem mais distintas, visando o uso de uma maior variedade de estratégias na resolução das tarefas e a exploração das dificuldades evidenciadas.

Considero pertinente a continuação deste estudo abordando outras temáticas como a divisão e os números racionais, podendo o mesmo ser aplicado noutros anos de escolaridade. Seria também proveitoso realizar o estudo com foco na relação entre a flexibilidade de cálculo mental e os procedimentos mecanizados, ou a utilização do cálculo algorítmico. Outras questões que merecem maior investigação prendem-se com a conceção de tarefas que potenciem o desenvolvimento da flexibilidade de cálculo multiplicativo, bem como o papel do professor.

REFERÊNCIAS

Alcobia, H. I. S. (2014). *A divisão no 4.º ano de escolaridade.* (Dissertação de Mestrado, Escola Superior de Educação de Lisboa/Instituto Politécnico de Lisboa, Lisboa). Consultado em http://hdl.handle.net/10400.21/4133.

Ambrose, R., Baek, J. M., & Carpenter, T. P. (2003). Children's invention of multidigit multiplication and division algorithms. In A. J. Baroody, & A. Dowker (Edits.), *The development of arithmetic concepts and skills.* p. 305-336. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Baek, J. M. (2006). Children's mathematical understanding and invented strategies for multidigit multiplication. *Teaching Children Mathematics*, *12*(5), p. 242-247.

Bishop, A. J. & Goffree, F. (1986). Classroom organization and dinamics. In B. Christiansen, A. G. Howson, M. Otte (Eds.). *Perspectives on mathematics education*. Dordrecht: Reidel.

Bogdan, R., & Biklen, S., (1994). *Investigação Qualitativa em Educação – uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

Brocardo, J. (2014). Exploring flexibility in mental calculation in the domain of multiplicative reasoning. Paper presented in ECER, Porto, Portugal.

Canavarro, A. P. (2011). Ensino Exploratório da Matemática: Práticas e Desafios. *Educação e Matemática*, *115*, p. 11-17.

Cramer, K., & Post, T. (1993). Connecting research to teaching proportional reasoning. *Mathematics Teacher*, *86*(5), p.404-407.

Esteves, M. (2006). Análise de Conteúdo. In J. A. Lima & J. A. Pacheco (Orgs.), *Fazer investigação: contributos para a elaboração de dissertações e teses*. p. 105-126. Porto: Porto Editora.

Fernández, C., Llinares, S., Van Dooren, W., De Bock, D., & Verschaffel, L. (novembro, 2010). The development of students' use of additive and proportional methods along primary and secondary school. *Hub Research Paper, 32.*

Fosnot, C., & Dolk, M. (2001). *Young mathematicians at work: Constructing multiplication and division.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Foxman, D., & Beishuizen, M. (2002). Mental calculation methods used by 11-year-olds in different attainment bands: A reanalysis of data from the 1987 APU survey in UK. *Educational Studies in Mathematics, 51*(1-2), p. 41-69

Gravemeijer, K. & Cobb, P. (2013). Design Research from the learning design perspective. In T. Plomp & N. Nieveen (Eds.). *Education Design Research – Part A: An introduction*. p. 73-112. Netherlands Institute for Curriculum Development.

Hartnett, J. (2007). Categorisation of mental computation strategies to support teaching and to encourage classroom dialogue. In J. Watson, & K. Beswick (Ed.), *Mathematics: Essential Research, Essential Practice. Proceedings of the thirtieth annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia. (MERGA-30). I,* p. 345-352. Hobart: MERGA

Heirdsfield, A., Cooper, T. J., Mulligan, J., & Irons, C.J. (1999). Children's mental multiplication and division strategies. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd Psychology of Mathematics Education Conference*, p. 89-96. Haifa, Israel.

Infante, M. L. (2014). *Desenvolvendo o pensamento algébrico no 2.º ciclo do ensino básico: o sentido dos símbolos e da generalização* (Dissertação de mestrado, Escola Superior de Educação de Lisboa/Instituto Politécnico de Lisboa, Lisboa). Consultado em http://hdl.handle.net/10400.21/4117

Lessard-Hébert, M., Goyette, G., & Bouin, G. (1990). Investigação Qualitativa: Fundamentos e Prática. Lisboa: Instituto Piaget.

McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics, 12*(3), p. 2-8,44.

Mendes, F. (2012). *A aprendizagem da multiplicação numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número. Um estudo com alunos do 1.º ciclo.* (Tese de Doutoramento, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Lisboa). Consultado em http://repositorio.ul.pt/handle/10451/5893.

Mendes, F., Brocardo, J., & Oliveira, H. (2013). A evolução dos procedimentos usados pelos alunos: contributo de uma experiência de ensino centrada na multiplicação. *Quadrante, XXII*, Nº 1, p. 133-162.

Ministério da Educação. (2007). Programa de Matemática do Ensino Básico. Ministério da Educação.

Mulligan, J. T., & Mitchelmore, M. C. (1997). Young children's intuitive models of multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(3), p. 309-330.

Mulligan, J.T., & Watson, J. (1998). A developmental multimodal for multiplication and division. *Mathematics Education Research Journal*, *10*(2), p. 61-86.

National Council of Teachers of Mathematics. (2007). Princípios e normas para a matemática escolar. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Pinto, H. (2011). *O desenvolvimento do sentido da multiplicação e da divisão de números racionais.* (Tese de Doutoramento, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Lisboa). Consultado em http://repositorio.ul.pt/handle/10451/4516

Ponte, J.P. (2005). Gestão curricular em matemática. O professor e o desenvolvimento curricular. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Selter, C. (2009). Creativity, flexibility, adaptivity, and strategy use in mathematics, *ZDM Mathematics Education, 41*, p. 619–625.

Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Tarefas matemáticas como quadro para a reflexão: da investigação à prática. *Educação e Matemática*, *105*.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, *10*(4), p. 313-340.

Threlfall, J. (2009). Strategies and flexibility in mental calculation. *ZDM Mathematics Education*, *41*(5), p. 541-555.

Vergnaud, G. (2014). A criança, a matemática e a realidade (M. L. F. Moro, Trad). Editora UFPR, p. 239-264.

Verschaffel, L., Luwel, K., Torbeyns, J. & Dooren, W. V. (2009). Conceptualizing, investigating, and enhancing adaptive expertise in elementary mathematics education. *European Journal of Psychology of Education, 24*(3), p. 335-359.

Yin, R. K. (2010). Estudo de caso. Planejamento e métodos. (D. Grassi, Trad.). Porto Alegre: Bookman.

ANEXOS

Anexo 1 - "As espetadas"

… 51, 52, 53, 54, 56, 57, 58, 59, 60, 61!

O Vasco faz anos. Para a festa quer fazer espetadas com o mesmo número de camarões. A mãe comprou um saco com 61 camarões.

Se estivesses no lugar do Vasco como preparavas as espetadas? Quantas terias de preparar? Porquê?

Tarefa construída por Jean-Marie Kraemer

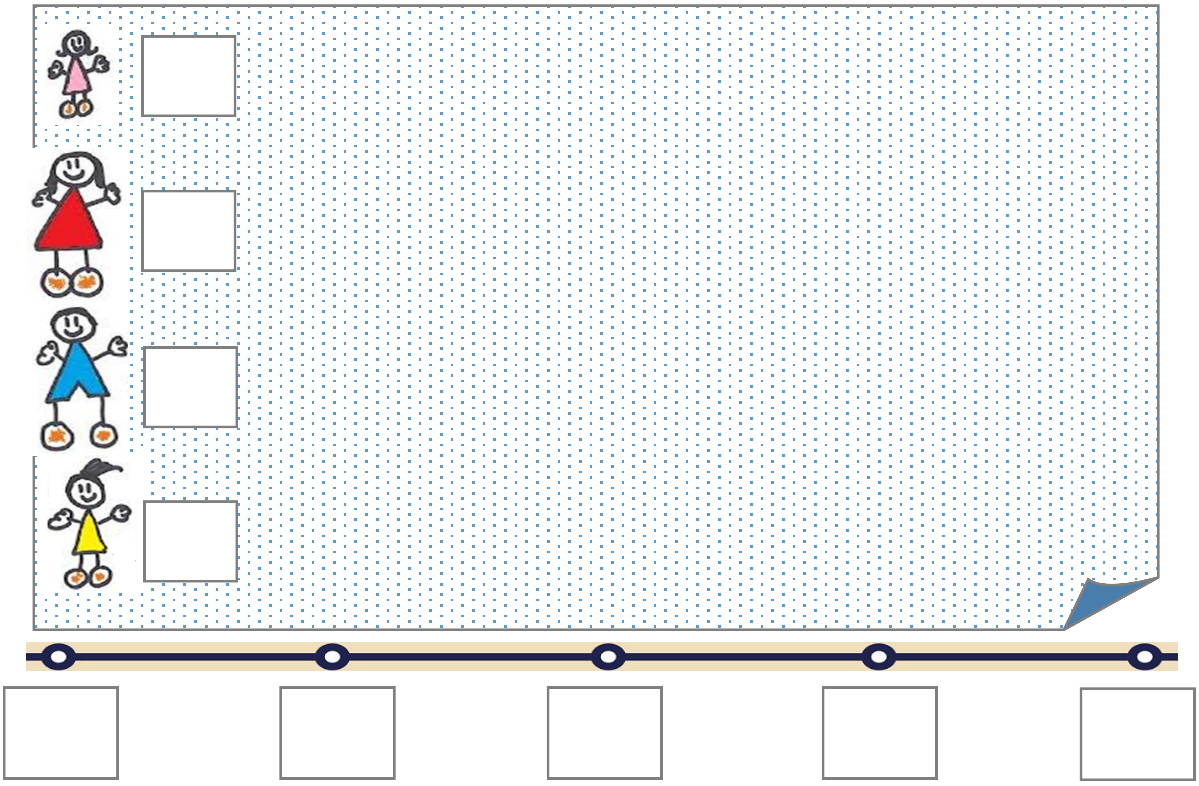
Anexo 2 – "Iogurtes para toda a família"

SEG TER QUA QUI SEX

O pai, a mãe e as duas filhas comem todos os dias **um iogurte.**

Desenha com quadrados todos os iogurtes que cada membro da família come ao longo de cinco dias.

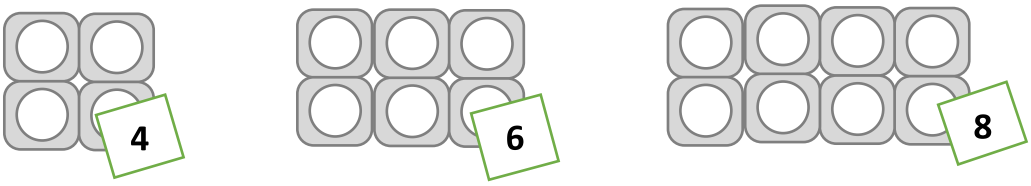
Quantos iogurtes come a família ao fim de cinco dias?



Tarefa construída por Jean-Marie Kraemer

Anexo 3 – “No supermercado”

1. Uma família consome 20 iogurtes. O supermercado tem estes pacotes.



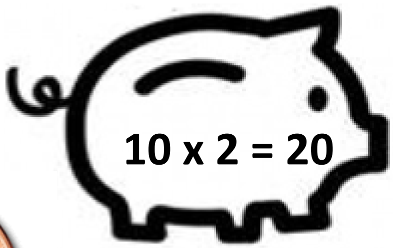
De que maneiras diferentes podem comprar os 20 iogurtes?

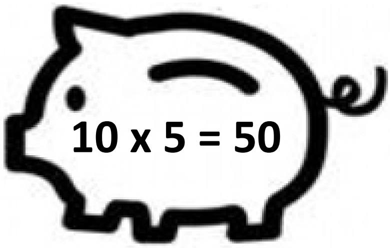
Tarefa construída por Jean-Marie Kraemer

Anexo 4 – “Moedas”

Mais do que

DEZ VEZES DOIS e DEZ VEZES CINCO!





12 x 2 = ……..	11 x 5 = ……..
14 x 2 = ……..	12 x 5 = ……..
15 x 2 = ……..	18 x 5 = ……..

A minha maneira de descobrir

A minha maneira de descobrir

13 cêntimos com moedas de

1 cent, 2 cents e 5 cents

Duas maneiras diferentes

13 = ... ✖ 5 ✚ ..... ✖ 2 ✚ ..... ✖ 1

13 = ... ✖ 5 ✚ ..... ✖ 2 ✚ ..... ✖ 1

Se não há moedas de 2 cents

13 = ... ✖ 5 ✚ ..... ✖ 1

Se não há moedas de 1 cent

13 = ... ✖ 5 ✚ ..... ✖ 2

Se não há moedas de 5 cents

13 = ... ✖ 2 ✚ ..... ✖ 1

26 cêntimos com moedas de

1 cent, 2 cents e 5 cents

Duas maneiras diferentes

26 = ... × 5 + ... × 2 + ... × 1

26 = ... × 5 + ... × 2 + ... × 1

Se não há moedas de 2 cents

2 = ... × 5 + ... × 1

Se não há moedas de 1 cent

2 = ... × 5 + ... × 2

Se não há moedas de 5 cents

2 = ... × 2 + ... × 1

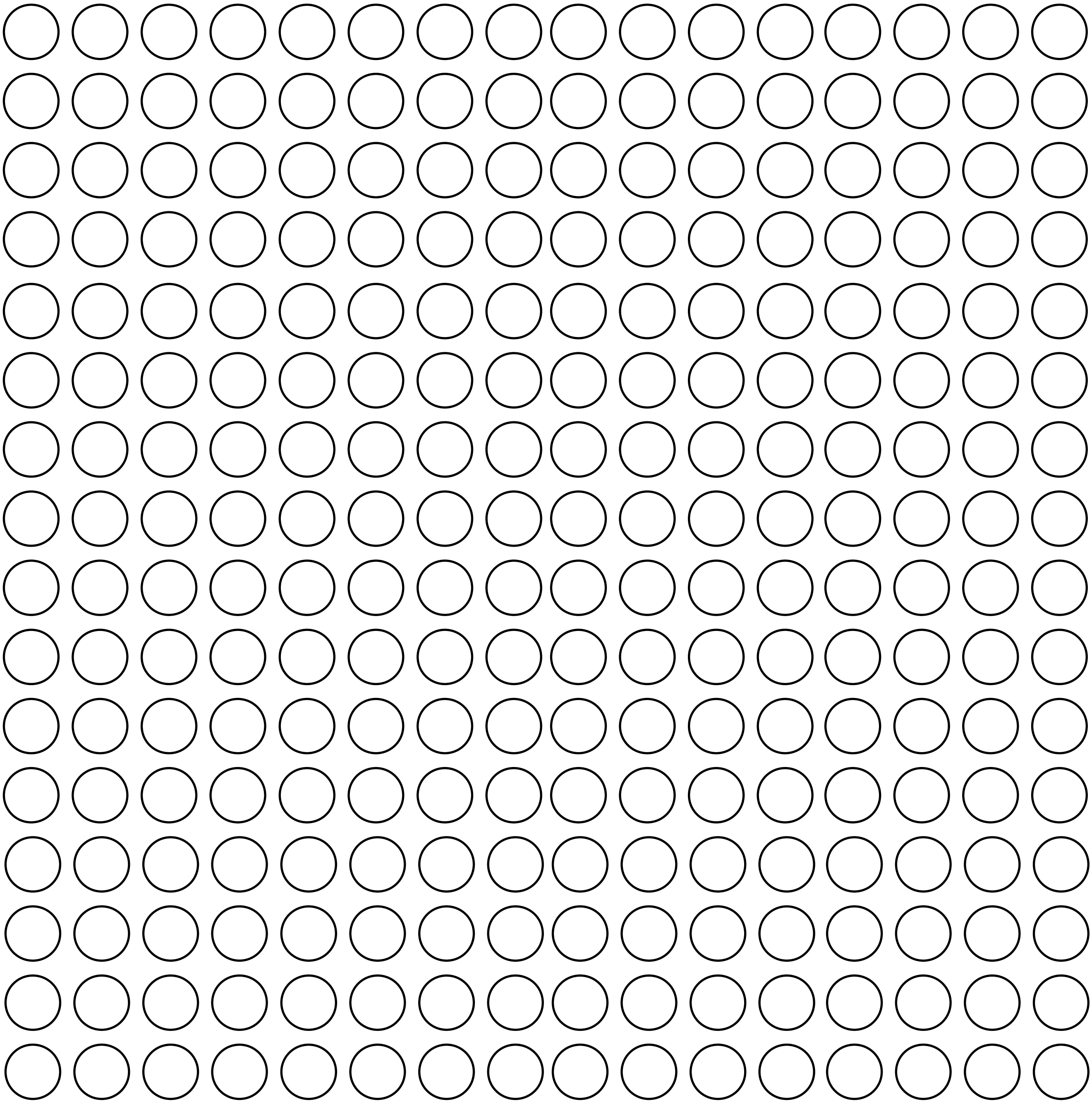
Tarefa construída por Jean-Marie Kraemer

Anexo 5 – “Bolas de bilhar”

1. Inventa uma caixa retangular onde caibam todas as bolas (as coloridas e a bola branca).

2. Consegues encontrar mais caixas retangulares onde caibam todas as bolas?

3. Mostra que encontraste realmente todas as caixas possíveis.



Tarefa construída por Jean-Marie Kraemer

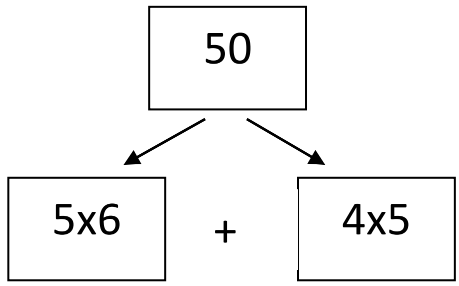
Anexo 6 – "Uma bandeira estrelada"

1. Cada estrela da bandeira dos Estados Unidos da América representa um estado deste país.

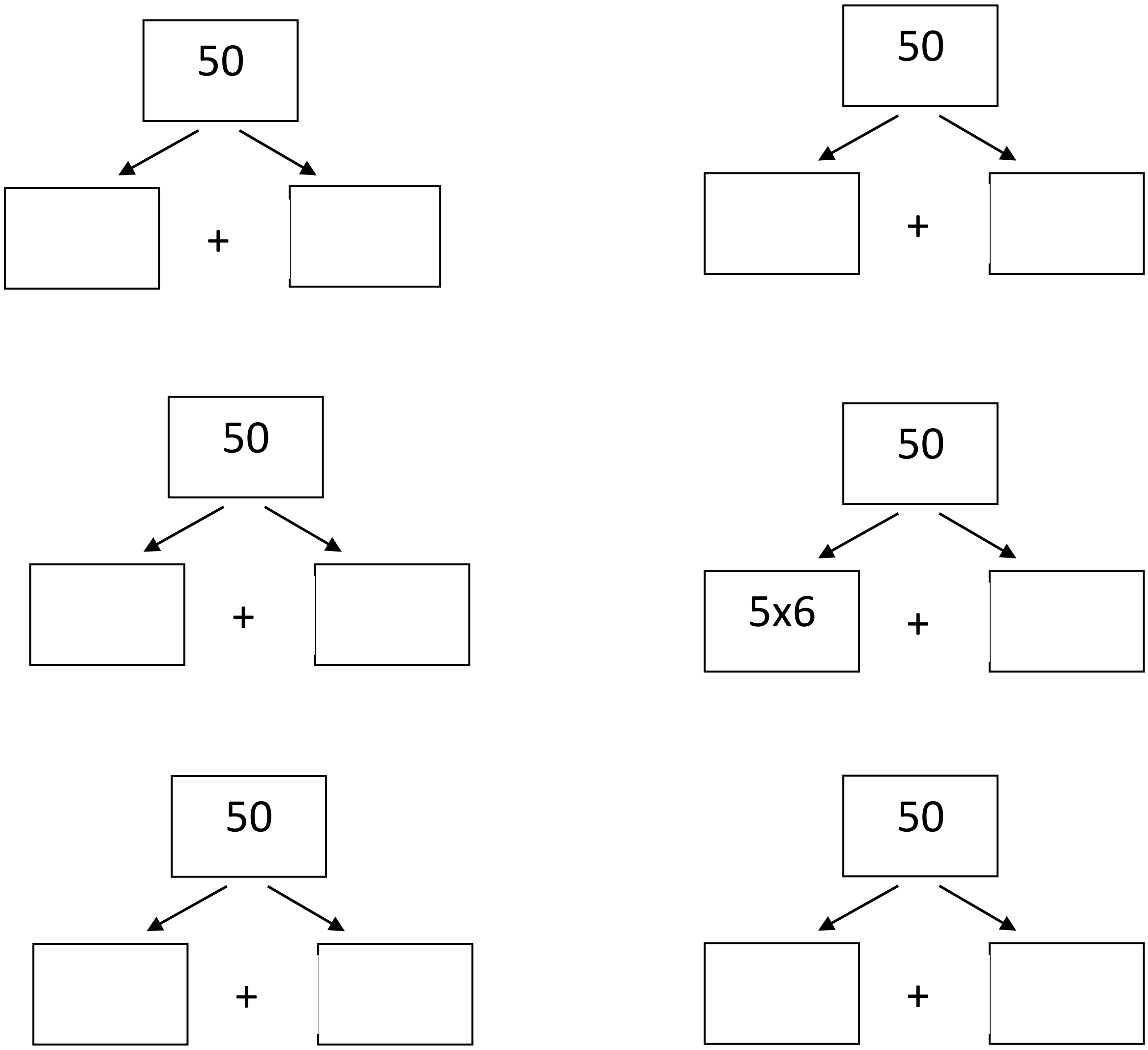
Pedro não conhece o número de estados. E tu?

Imagina uma maneira fácil e rápida de saber.

2. 50 pode ser 5x6 + 4x5



3.1. Como fazer 50 com outros produtos que conheces?



Encontra todos os produtos possíveis

50

2x5 +

Tarefa construída por Jean-Marie Kraemer

Anexo 7 – "Pãezinhos"

Pãezinhos I

Todos os sábados, o padeiro da padaria *Pão Bom* cozinha 800 pãezinhos que dispõe em tabuleiros. Tens uma ideia de quantos tabuleiros precisará? Confirma a tua ideia.

Tabuleiros	Pãezinhos

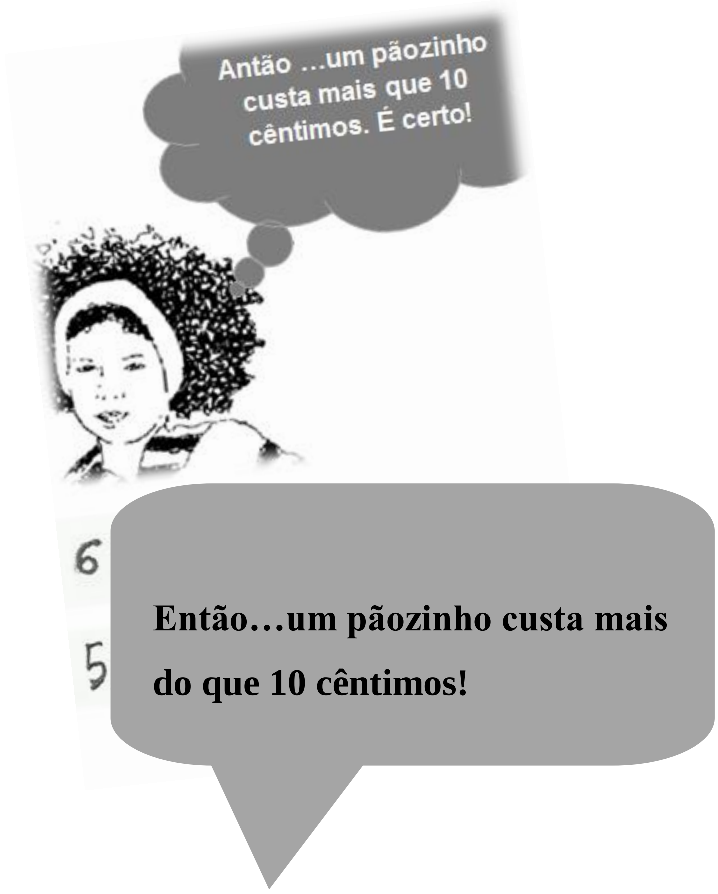
Pãezinhos II

A Beatriz está na padaria com o seu colega Bernardo. Ela compra seis pãezinhos e paga oitenta e quatro cêntimos.

- Então – pensou Beatriz – um pãozinho custa mais do que 10 cêntimos!

O Bernardo paga os seus cinco pãezinhos com uma moeda de 50 cêntimos e uma de 20 e não recebe troco.

- Ah! – exclama Beatriz – já sei quanto custa cada pãozinho!



Pãezinhos III

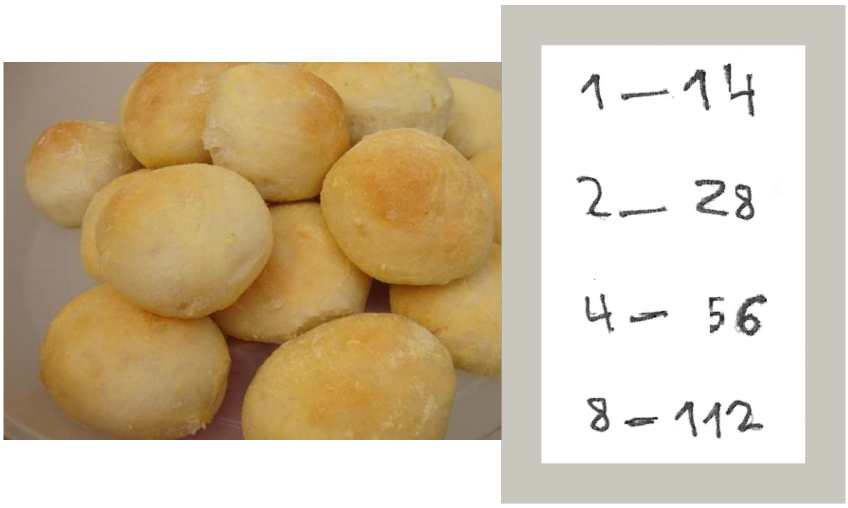
Como a Beatriz já sabe que um pãozinho custa 14 cêntimos, faz uma lista de preços que são fáceis de memorizar.

Com esta lista repara que três pãezinhos custam 28 + 14 e consegue confirmar o preço dos pãezinhos que Bernardo comprou. Como o terá feito?

- Ah! – pensa Beatriz – sendo assim posso calcular o preço de diferentes quantidades de pãezinhos.

Como é que a Beatriz poderá saber o preço de 14 pãezinhos?

Imagina uma outra quantidade de pãezinhos e mostra como a Beatriz poderia saber o seu preço.



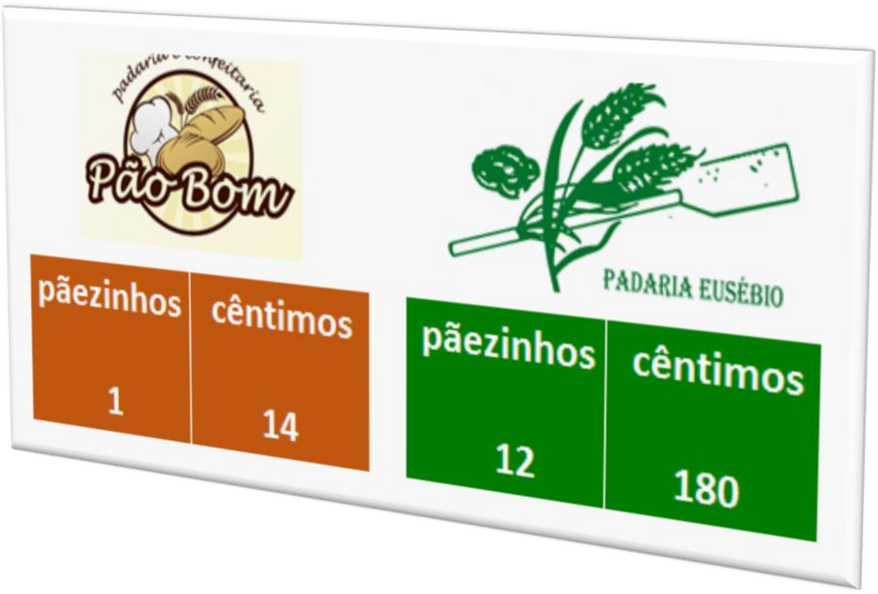
-

Pãezinhos IV

A Beatriz compra os mesmos pãezinhos na padaria *Eusébio* quando dorme na casa da tia Joana.

Na última vez pagou 180 cêntimos por 12 pãezinhos.

Qual é a padaria mais barata?



Tarefa construída por Jean-Marie Kraemer