INSTITUTO SUPERIOR DE CONTABILIDADE
E ADMINISTRAÇÃO DE LISBOA

ISCAL

A contabilidade de gestão e a *Data Envelopment Analysis*: análise de desempenho organizacional

Vanessa Andreia Moura Pereira

Dezembro 2014

INSTITUTO POLITÉCNICO DE LISBOA
INSTITUTO SUPERIOR DE CONTABILIDADE E ADMINISTRAÇÃO DE LISBOA

A contabilidade de gestão e a *Data Envelopment Analysis*: análise de desempenho organizacional.

Vanessa Andreia Moura Pereira

Dissertação submetida ao Instituto Superior de Contabilidade e Administração de Lisboa para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Contabilidade e Gestão das Instituições Financeiras, realizada sob a orientação científica do Professor Doutor José Manuel de Oliveira Pires, Professor-Coordenador, da área científica de Matemática.

Constituição do Júri:

Presidente: Doutor Joaquim Martins Ferrão
Vogal: Doutora Ana Maria Alves Paias
Vogal: Doutor José Manuel de Oliveira Pires

Dezembro 2014

Declaro ser a autora desta dissertação, que constitui um trabalho original e inédito, que nunca foi submetido (no seu todo ou qualquer das suas partes) a outra instituição de ensino superior para obtenção de um grau académico ou outra habilitação. Atesto ainda que todas as citações estão devidamente identificadas. Mais acrescento que tenho consciência de que o plágio – a utilização de elementos alheios sem referência ao seu autor – constitui uma grave falta de ética, que poderá resultar na anulação da presente dissertação.

AGRADECIMENTOS

Quero agradecer ao meu orientador, o Professor José Manuel Oliveira Pires por todo o apoio, orientação, experiencia e disponibilidade manifestada. A sua ajuda assim como o seu apoio foram cruciais para a realização desta dissertação.

Aos meus amigos e às minhas amigas pela força e motivação que transmitiram ao longo destes dois anos de curso e que muitas vezes deixaram de ter a minha presença, devido ao desenvolvimento deste trabalho. Sem o vosso apoio, sem as vossas mensagens de motivação, nada disto seria possível.

Aos colegas de turma, aos professores que ajudaram direta e indiretamente a concluir este Mestrado. Ao Grupo dos Sete, pelas horas de desabafo, pelo companheirismo e pela ajuda em todo este processo que foi a dissertação.

Um especial agradecimento à minha mãe, aos meus irmãos e à minha madrinha, por todo o incentivo e apoio ao longo deste percurso académico, sem eles o mesmo não teria sido possível.

Muito obrigada a todos!

RESUMO

Esta dissertação tem como finalidade demonstrar a importância da técnica *Data Envelopment Analysis* na contabilidade de gestão. A contabilidade de gestão é definida como um ramo muito importante para a contabilidade, pois é a partir dela que conseguimos analisar a evolução da *performance* empresarial. Neste trabalho pretende-se caraterizar a contabilidade de gestão, quanto à sua importância, identificar os métodos tradicionais de avaliação utilizados pelos gestores assim como as suas limitações. Descreveu-se a evolução da avaliação de desempenho, com o objetivo de elencar as várias fases e mostrar a importância para a organização.

Numa economia em constantes mudanças torna-se essencial que as organizações consigam avaliar eficazmente todo o seu processo produtivo. É nesse sentido que surge esta técnica não paramétrica: a técnica de Análise Envolvente de Dados, conhecida na literatura da especialidade por *Data Envelopment Analysis* (DEA). É uma metodologia que procura avaliar o desempenho de unidades operacionais, considerando várias entradas (*inputs*) e saídas (*outputs*). Recorre à Programação Linear para obter os seus resultados. Este estudo dá a conhecer a recente métrica de avaliação do desempenho como forma de ultrapassar os entraves existentes nos métodos tradicionais.

No sentido de garantir que os métodos e os modelos propostos possam ser utilizados em situações reais, utilizou-se um grupo de empresas seguradoras do ramo não vida, para o caso de estudo. Este caso prático avalia a eficiência de 20 empresas seguradoras através da técnica DEA, identificando as empresas eficientes, não eficientes e os respetivos *Benchmarks*.

Palavras – Chave: *Data Envelopment Analysis*; Contabilidade de gestão; Eficiência; Desempenho; Programação Linear

ABSTRACT

This dissertation aims to explain the importance of Date Envelopment Analisys *(*DEA*)* technique in management accounting. Management accounting delineates a very important, particular and appropriate place accounting. Thus, through management accounting we are able to analyze the evolution of the business performance. Furthermore, this work was planned to characterize the management accounting, to identify the traditional methods used by managers as well as their limitations. Besides, it was described the evolution of measurement performance in order to mention separately the several stages and reveal its importance to the organization. Moreover, in an economy where regularly changes take place it's important that organizations can effectively appraise their entire production process. In this situation, appears this non parametric technique: Date Envelopment Analysis technique with a procedure that evaluates the performance of operational unities, considering several inputs and outputs. This non parametric technique uses the Linear Programming to obtain results. This investigation presents the new technique of measurement performance as the solution to overcome the inefficiencies in the traditional methods. In this context a case study was developed to show the applicability of all the models from *DEA* identifying efficient companies, inefficient and respective benchmarks.

Key words: Data Envelopment Analysis; Management Accounting; Performance; Linear Programming

ÍNDICE

ÍNDICE DE TABELAS

ÍNDICE DE FIGURAS

LISTA DE ABREVIATURAS

BCC – Banker Charles Cooper

BCCI - Banker Charles Cooper orientação Input

BCCO – Banker Charles Cooper orientação *output*

BCCI CR – Banker Charles Cooper modelo *Cone Ratio*

CCRO – Charnes Cooper Rhodes orientação *output*

CCRI – Charnes Cooper Rhodes orientação *input*

CAE – Classificação Portuguesas das Atividades Empresariais

CCR – Charnes Cooper Rhodes

CCRI CR - Charnes Cooper Rhodes modelo *Cone Ratio*

CR – *Cone Ratio*

CRS – *Constant Returns to Scale*

DEA – *Data Envelopment Analysis*

DCCRO – Dual, Charnes Cooper Rhodes orientação *output*

DCCRI - Dual, Charnes Cooper Rhodes orientação *input*

DBCCI – Dual, Banker Charles Cooper orientação *input*

DBCCO – Dual, Banker Charles Cooper orientação *output*

DMU – *Decision Making Units*

EC – Estrutura Conceptual

INE – Instituto Nacional de Estatística

ISP – Instituto de Seguros de Portugal

PL – Programação Linear

SNC – Sistema de Normalização Contabilística

VRS – *Variable Returns to Scale*

1. INTRODUÇÃO

O meio envolvente tem sofrido grandes mudanças em vários aspetos nomeadamente em relação à tecnologia, informação, complexidade e competitividade de mercado. Nesse sentido, a contabilidade de gestão tem vindo a alterar-se de modo a responder e acompanhar essas mudanças. A contabilidade de gestão procura assim, coordenar as atividades da empresa de forma a atingir os objetivos, controlar e analisar a evolução da *performance* organizacional e prestar informações relevantes para a tomada de decisão.

Os gestores, cada vez mais, procuram maiores níveis de produtividade para conseguirem sobreviver num mercado tão competitivo. Como tal, a resposta está centrada na avaliação de desempenho organizacional, pelo facto de ser capaz de fornecer informações importantes, as quais poderão ser utilizadas para encontrar e solucionar problemas e melhorar a organização como um todo. Deste modo, a avaliação de desempenho organizacional é vista como um meio necessário e importante para a melhoria e o sucesso de qualquer organização.

Na abordagem tradicional, a avaliação de desempenho era efetuada através de medidas exclusivamente financeiras. Estas medidas eram baseadas na leitura dos mapas contabilísticos e em rácios financeiros. Ao longo do tempo, estas medidas apresentam ineficiências face às estratégias da organização dando lugar a outras métricas de análise. Assim, a avaliação de desempenho organizacional, passa de uma análise exclusiva aos indicadores financeiros para uma análise mais abrangente, na qual contempla outros fatores importantes nomeadamente, indicadores não financeiros. Como tal, para fazer face às limitações existentes nas medidas de avaliação tradicional, surge assim, a *Data Envelopment Analysis* (DEA). Esta técnica baseia-se num estudo de M. J. Farrel em 1957 proposta por Charnes Cooper e Rhodes em 1978. Representa uma das ferramentas mais completas para avaliar a eficiência, em comparação com ferramentas convencionais. A DEA é uma metodologia que procura avaliar o desempenho de unidades operacionais, considerando para tal os vários *inputs* e *outputs* do plano de produção.

O presente estudo, tem o intuito de mostrar a importância da técnica DEA para o processo de tomada de decisões nas organizações. Pretende dar a conhecer esta nova ferramenta de análise, descrevendo em detalhe alguns dos seus modelos, analisando as suas caraterísticas e apresentar a sua praticabilidade junto das organizações, através de um caso de estudo.

Assim, este trabalho tem como principal objetivo, contribuir para a divulgação da importância da técnica DEA na avaliação de desempenho organizacional e relacioná-la com a

Contabilidade de Gestão. A Contabilidade de Gestão disponibiliza os mapas financeiros que serão utilizados, para avaliar o desempenho das unidades operacionais, designadas posteriormente como *Decision Making Units* (DMU).

De forma a atingir os objetivos delineados, foi realizado primeiramente uma revisão da literatura existente, sobre os conceitos de Contabilidade de Gestão e Desempenho organizacional, para demonstrar a importância destes temas, para o presente estudo. Posteriormente foram identificados os métodos tradicionais para a avaliação de desempenho organizacional, de forma a evidenciar as suas ineficiências face às exigências atuais do mercado. Numa outra perspetiva, fez-se uma revisão histórica da evolução da avaliação de desempenho de forma a elencar os vários métodos existentes para apresentar assim, o objeto de estudo deste trabalho.

O presente trabalho encontra-se estruturado em seis capítulos, sendo que no capítulo 2 é apresentada uma referência à Contabilidade de Gestão, ao desempenho organizacional e às medidas de avaliação de desempenho existentes. De seguida, são enumeradas as várias ineficiências das medidas tradicionais e indicados os novos sistemas de avaliação.

No capítulo 3, apresentam-se os principais conceitos da programação linear, incluindo a dualidade, que constitui a base da metodologia DEA.

No capítulo 4, será apresentada a metodologia DEA onde serão expostos os modelos clássicos desta metodologia bem como um método que permite obter modelos capazes de fornecer um maior poder de descriminação de eficiência.

No Capítulo 5, apresenta-se o caso de estudo sobre 20 seguradoras onde se pretende calcular a eficiência através da utilização da técnica DEA.

Por último, no capítulo 6, apresentam-se algumas conclusões finais sobre trabalho desenvolvido ao longo desta dissertação e as sugestões para trabalhos futuros.

2. A CONTABILIDADE DE GESTÃO E O DESEMPENHO ORGANIZACIONAL

2.1 Introdução

A contabilidade de gestão tem vindo a assumir um papel muito importante dentro das organizações e para a tomada de decisões. Assim, na secção 2.2, serão apresentadas as várias definições de contabilidade de gestão indicando qual é o seu papel face às organizações. Posteriormente, na secção 2.3 referem-se algumas noções de desempenho organizacional nas organizações e a sua importância. Na secção 2.4, apresentam-se os métodos tradicionais para a avaliação de desempenho e seguidamente, na secção 2.5, as limitações desses métodos. Por último, na secção 2.6, é explicado a evolução da avaliação de desempenho e apresenta-se a nova métrica de análise organizacional.

2.2 A contabilidade de gestão

A contabilidade pode ser definida como uma técnica de registo e representação de todas as transformações sofridas pelo património de qualquer entidade económica durante o exercício da sua atividade, de forma a perceber em qualquer momento, a sua composição e valor. Esta ferramenta visa quantificar tudo o que ocorre numa unidade económica fornecendo, simultaneamente, dados para a tomada de decisão.

Na Figura 2.1 apresenta-se esquematicamente o papel da contabilidade segundo Borges e Rodrigues (2008):

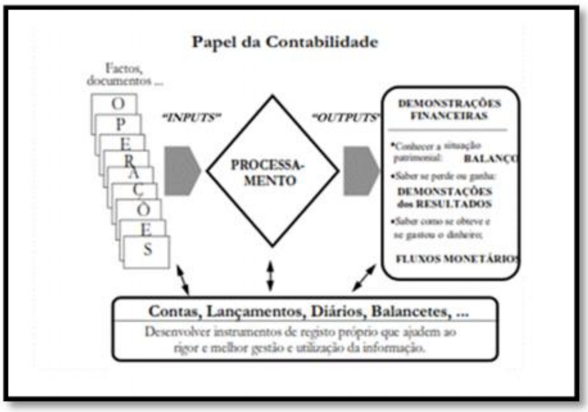

Figura 2.1 – O papel da contabilidade

Fonte: Borges e Rodrigues (2008)

De acordo com a Figura 2.1, a contabilidade constitui assim o principal instrumento de informação financeira com credibilidade e segurança por conseguir incorporar todas as áreas da empresa e por ser um sistema que se rege por normas e critérios estabelecidos a nível internacional. Exige que os dados sejam tratados por profissionais competentes, para que as informações transmitam confiança aos destinatários da informação financeira.

A contabilidade de gestão é definida como um ramo da contabilidade onde se consegue verificar, através da análise a vários indicadores, informações sobre a posição financeira e o desempenho de uma determinada empresa. Segundo Borges e Rodrigues (2008), a informação proporcionada pela contabilidade geral, restringe-se aos valores globais da empresa em que estes elementos são insuficientes para acompanhar as atividades dos gestores e o apoio à tomada de decisão. Conhecer as demonstrações financeiras das organizações constitui uma referência global, pelo que se torna necessário que a contabilidade seja capaz de disponibilizar informação a níveis mais elementares e mais orientada para o conhecimento da forma como cada departamento, exerceu as atividades que lhe foram cometidas. De forma a responder a este tipo de necessidades, surge a Contabilidade de Gestão, que se encontra assim orientada para a tomada de decisões.

De acordo com o *Chartered Institute of Management Accounting* (CIMA), a Contabilidade de Gestão pretende "proporcionar informação para a gestão com o propósito de formular políticas, planificar e controlar todas as atividades da empresa, tomar decisões".

A Associação Espanhola de Contabilidade e Administração de Empresas distingue a contabilidade de gestão da contabilidade de custos, indicando que a primeira surgiu da segunda pois o papel da contabilidade de custos é o de fornecer informações.

A *International Federation of Accounts* (IFAC) refere que a contabilidade de gestão para além de constituir um sistema de medida de regular a informação que guia a gestão, constitui um mecanismo de motivação, influencia nos comportamentos e suporta os valores culturais necessários à obtenção de um melhor desempenho organizacional.

Segundo Horgren et *al* (2000), a contabilidade de gestão contempla os processos de identificar, medir, acumular, analisar, preparar, interpretar e disponibilizar informação de suporte à concretização dos objetivos da organização, assegurando o uso eficiente dos recursos. A contabilidade de gestão para além de analisar os custos e rendimentos vai mais longe, elaborando análises mais completas para a tomada de decisão, formando assim, um sistema de informação que permite criar um " t*ableaux de bord* "e a adoção de medidas de desempenho, dirigidas a cada um dos elementos que compõem a organização.

Em suma, a Contabilidade de Gestão procura fazer face às necessidades das organizações que operam em contextos dinâmicos e competitivos. Nestes contextos, as empresas estão constantemente:

- A nivelar as suas estruturas hierárquicas com o simples objetivo de melhorar a agilidade organizacional e aumentarem os níveis de responsabilidade das pessoas na organização;
- A eliminar as barreiras que as separam ou separavam dos clientes e fornecedores, de forma a inserirem os seus processos em cadeias de valor;
- A tentar compreender as suas competências nucleares, a sua identidade no seio das cadeias de valor relevantes, tornando-se progressivamente mais virtuais para darem resposta adequada às alterações que vão ocorrendo ao nível dos ciclos de vida dos produtos;
- A integrarem os seus sistemas de informação e a tomarem consciência da importância da disponibilidade e da oportunidade de informação;
- A reduzir a dependência relativamente às formas de controlo financeiro remoto, privilegiando o controlo em tempo real baseado em indicadores de desempenho de natureza não financeira.

A contabilidade de gestão é considerada parte integrante do processo de tomada de decisão, gerando informações relevantes para o planeamento das estratégias de uma organização, melhoria da comunicação interna e medição do desempenho organizacional.

2.3 O Desempenho organizacional

Numa economia em constante alterações e de forte concorrência, as organizações devem ter um sistema de informação capaz de dar respostas aos possíveis problemas que, de uma forma geral, influenciarão o seu desempenho organizacional. Este desempenho organizacional refere-se, simultaneamente, à ação, ao resultado da ação e ao sucesso desse resultado quando comparado com algum padrão (Rodrigues, 2010). O desempenho, muitas vezes utilizado como *performance*, poderá assumir várias definições, dependendo da organização. Por isso, alguns autores referenciarem que o desempenho organizacional vai sendo produzido pelos utilizadores da informação, ao longo do tempo e está relacionado com as variáveis que contribuem para alcançar os objetivos da empresa.

Segundo Neely (2002), a avaliação do desempenho organizacional, consiste no processo de quantificar a eficiência e a eficácia de ações passadas na organização. Ou seja, as ações passadas determinam o desempenho atual. Esta avaliação permite aos gestores apurar até que ponto as ações planeadas estão a ser implementadas e os resultados estão a ser atingidos.

Em geral, quando se fala de avaliação da *performance* organizacional, tem-se por referência a análise aos seus resultados, o que numa primeira aproximação, sugere que pode identificar-se a avaliação do desempenho com os resultados da organização. Esta avaliação deve estar associada a um sistema de medição que forneça informação fidedigna relativamente ao grau de sucesso da estratégia, que inclui os resultados e os meios a atingir.

De forma a avaliar o desempenho organizacional, apresentam-se de seguida, alguns métodos tradicionais, os quais foram ultrapassados devido às novas exigências de mercado.

2.4 Métodos tradicionais para a avaliação do desempenho organizacional

Uma das formas de avaliação do desempenho organizacional utilizadas pelos gestores das empresas é o recurso aos indicadores financeiros, implícitos nas demonstrações financeiras. Esta técnica de análise considera os diversos mapas contabilísticos como fonte de dados, que posteriormente são compilados em índices ou rácios, cuja análise possibilita identificar a evolução do desempenho financeiro da empresa. Esta análise requer tempo na preparação das demonstrações financeiras e na condução dos resultados. É muito utilizada nas pequenas empresas como suporte para as decisões de investimento ou concessão de financiamento.

As demonstrações financeiras mais utilizadas para a análise do desempenho organizacional, segundo o método tradicional são: o Balanço, a Demonstração de Resultados, a Demonstração de Fluxos de Caixa, a Demonstração das Alterações do Capital Próprio e as Notas às demonstrações financeiras.

Segundo a Estrutura Conceptual (EC) do Sistema de Normalização Contabilístico (SNC), que tem por base a estrutura conceptual do *International Accounting Standards Board* (IASB), estas demonstrações financeiras têm o objetivo de proporcionar informação acerca da posição financeira, do desempenho e das alterações na posição de uma empresa que seja útil a um vasto conjunto de utilizadores, na tomada de decisões económicas. Cada um destes mapas contabilísticos fornece aos gestores informações importantes sobre o estado atual da empresa num determinado momento. Assim:

- O Balanço é um dos instrumentos que informa sobre a posição financeira da empresa;
- A Demonstração de Resultados informa sobre o desempenho da empresa;
- A informação acerca das possíveis alterações no Capital é fornecida na Demonstração Financeira de Alteração de Capitais Próprios;
- E a informação sobre a capacidade da empresa gerar dinheiro "*cash-flow*", é fornecida pela Demonstração de Fluxos de Caixa.

No entanto, esta forma de análise da *performance* empresarial, não proporciona toda a informação de que os gestores precisam para a sua tomada de decisão, visto que as mesmas caracterizam fundamentalmente, os efeitos financeiros decorrentes de acontecimentos passados. Um outro método, muito usual, é a análise do desempenho por meio de rácios financeiros, que envolve o cálculo de quocientes relacionando os diversos valores das demonstrações financeiras.

Segundo Neves (2004), esta análise consiste em estabelecer relações entre contas e agrupamentos de contas de Balanço, da Demonstração de Resultados e da Demonstração dos Fluxos de Caixa ou de outras grandezas económico-financeiras. Dependendo do tipo de análise que a empresa pretende, estes rácios poderão ser de natureza financeira, económica, económico-financeira ou técnica.

Alguns dos rácios mais utilizados pelos gestores na avaliação da *performance* empresarial são:

- O *Return on Investment (ROI)* – uma taxa de rendibilidade do investimento em que pondera os resultados com o valor contabilístico dos ativos;
- E o *Return on Equity (ROE)* – a medida mais utilizada na avaliação da *performance* da empresa, na perspetiva do acionista, da mesma forma que o ROI;

De acordo com Nabais e Nabais (2004), a situação económico-financeira da empresa, passa pela análise dos documentos da empresa (Balanço e Demonstração de Resultados) e pela identificação e estudo de variáveis não financeiras. Através dos métodos tradicionais, os gestores não conseguiam obter respostas às novas exigências de mercado, nomeadamente, proporcionar informação externa relativa ao posicionamento estratégico da empresa.

2.5 Limitações às medidas de desempenho tradicionais

Com a evolução dos sistemas organizacionais, do aumento da concorrência, da necessidade de diversificação e com a introdução de novas tecnologias de produção e de informação, muitos gestores começaram a constatar que as tradicionais medidas de desempenho baseadas em indicadores financeiros eram pouco sensíveis para a tomada de decisão, uma vez que as mesmas foram desenvolvidas para cumprir os requisitos de relato financeiro de uma organização, em vez de serem desenvolvidas no sentido de orientar e direcionar a estratégia do negócio (Neely et al., 2002).

A análise do desempenho organizacional através dos métodos tradicionais apresenta limitações que poderão enviesar as conclusões acerca dos resultados da empresa. Essas limitações surgem em resultado da divergência metodológica e da natureza dos documentos contabilísticos. Neves (2004) refere que uma das limitações dos documentos contabilísticos, como forma de avaliação, está no seu caráter sintético, enquanto o gestor interno tem acesso a várias informações e pode completar ou fazer as correções necessárias de forma a adequar as informações ao seu objetivo, o utilizador externo (clientes, fornecedores, etc.), tem de se satisfazer com aquelas conclusões que nem sempre são as mais corretas. O autor refere ainda, que os mapas contabilísticos não refletem valores atuais, pois a sua contabilização segue o princípio do custo histórico[1]; a utilização de diferentes critérios valorimétricos, o que provoca diferenciações nas várias empresas; e muitas rubricas com valor financeiro estarem omissas do balanço porque a sua valorização oferece algumas dificuldades.

Relativamente ao método dos rácios, Nabais e Nabais (2004) indicam que os rácios apresentam as seguintes limitações:

- Relacionam dados quantitativos e não consideram fatores qualitativos como a ética, a motivação, a qualidade dos gestores;

---

[1] Princípio do custo histórico – refere que os registos contabilísticos devem efetuar-se ao custo de aquisição ou de produção (NEVES, 2004). Todavia com as Normas Contabilísticas e de Relato Financeiro (NCRF) do SNC, a mensuração é cada vez mais realizada com base em justos valores.

- Podem ser influenciados pela sazonalidade da atividade, o que pode enviesar os resultados;
- Não existe definição normalizada de cada rácio, o que pode levar a que dois analistas possam calcular o mesmo rácio para uma empresa e obter resultados diferentes, devido às reclassificações que cada um possa fazer;
- A interpretação dos rácios está condicionada pelo sector e pela conjuntura económica.

A análise tradicional é uma avaliação que depende muito da capacidade e experiência do analista. Assim, a organização tem de abandonar os sistemas de medição de desempenho organizacional que representem barreiras à revolução provocada pelas novas tecnologias produtivas e às novas formas de gestão, de forma a conseguir alcançar melhores resultados. Neste contexto, foram desenvolvidos novos métodos de avaliação de desempenho organizacional, de forma a combater as deficiências das medidas de desempenho, baseadas em informações contabilísticas tradicionais. Estes métodos avaliam e têm em conta algumas caraterísticas das empresas como sejam:

- Flexibilidade, para responder a situações dinâmicas;
- Capacidade de transcrever um fenómeno na sua plenitude;
- Pertinência, pelo que devem descrever a realidade;
- Sensibilidade, para detetarem oscilações mínimas de funcionamento e reclamem correção;
- Objetividade quer na sua definição quer na sua unidade de medida;
- Transparência, para poderem ser facilmente compreendidos;
- Acessibilidade, em particular quanto às informações necessárias ao seu cálculo.

As novas técnicas de avaliação do desempenho organizacional permitem uma análise mais eficiente da empresa, pois têm em conta os parâmetros financeiros e não financeiros, no processo de avaliação organizacional. A utilização destes parâmetros possibilita que os gestores possam tirar conclusões mais "reais" acerca da eficiência da sua empresa.

Na próxima secção, apresentam-se, de uma forma sucinta, as novas métricas de avaliação de desempenho organizacional, no contexto da contabilidade de gestão.

2.6 Evolução da avaliação de desempenho

A avaliação de desempenho organizacional foi evoluindo ao longo do tempo, face às mudanças do meio envolvente. Segundo Ghalayini e Noble (1996) esta evolução pode ser dividida em duas fases: a primeira entre os anos de 1880 a 1980, sendo caracterizada pela utilização de indicadores de desempenho financeiros, tais como o lucro, o retorno sobre o investimento e a produtividade. A segunda fase, de 1980 até aos dias de hoje, é caraterizada pela utilização de medidas de desempenho mais orientadas para a qualidade, a rapidez, a flexibilidade e a inovação e pelo aparecimento de sistemas de informação, globalização e desregulamentação.

As organizações tiveram que dar prioridade a novas formas de competição, tais como, elevada qualidade, mais variedade, menores custos, para conseguirem responder às novas exigências dos consumidores e às tecnologias associadas. Neste novo contexto, constata-se uma tendência crescente para a utilização de indicadores não financeiros como meio de medir as várias dimensões de *performance* das organizações, abandonando-se assim a abordagem tradicional de utilização exclusiva de indicadores financeiros e de produtividade. Estes indicadores não financeiros são utilizados na avaliação do *output* final para avaliação dos esforços realizados pela organização. São instrumentos para fixação de objetivos ou criação de valor e servem para acompanhar os resultados. Para apoiar esta nova visão, a contabilidade de gestão passou a incorporar o risco na informação fornecida, a utilizar técnicas de programação linear na estimativa de custos e a recorrer a ferramentas estatísticas para a avaliação da *performance* organizacional.

A par dos novos desenvolvimentos da contabilidade de gestão referidos anteriormente, surgiu um novo objetivo perante as organizações, designadamente, a criação de valor. Este conceito conduziu à implementação de sistemas de gestão baseados no valor e a novas métricas de avaliação da *performance* empresarial, em oposição aos tradicionais indicadores contabilísticos. De entre os diversos sistemas integrados de avaliação de desempenho existentes, apresenta-se os mais conhecidos:

- *Tableaux de bord*, Ardoin et al. (1983);
- *Balanced scorecard*, de Kaplan e Norton (1992 e 1996), é o sistema mais conhecido;
- Prisma de Desempenho (*Performance Prism),* de Neely e Adams (2002)
- Capital intelectual, de Edvinsson (2002);

- SMART – *Strategic Measurement and Reporting Technique*, de Lynch e Cross (1991, Wang Laboratories), utiliza indicadores internos e externos à organização;
- Matriz de Avaliação de *Performance*, Keegan, Eiler e Jones (1989), um sistema simples que permite a cada empresa adotar os indicadores de diversas dimensões (financeiros, não financeiros, internos, externos) que lhe sejam mais relevantes;
- *Business Excelence Model*, *European Foundation for Quality Management* (1992);
- *Skandia Navigator*, de Edvinsson and Malone (1997).

Entre os sistemas referidos anteriormente, o *Balanced scorecard*, de Kaplan e Norton (1992 e 1996) é o mais utilizado junto das empresas, pois defende quatro perspetivas essenciais no processo de avaliação organizacional:

- Tradução da visão e da estratégia;
- Comunicação e ligação da estratégia aos objetivos,
- Planeamento do negócio, estabelecimento de metas e alinhamento da estratégia;
- *Feedback* e aprendizagem estratégica.

Este modelo foi concebido com objetivo de desenvolver um sistema de avaliação de desempenho organizacional e posteriormente como um sistema de gestão estratégica. Pode ser classificado como um sistema de suporte à decisão, pois reúne os elementos – chave para poder acompanhar o cumprimento da estratégia da empresa.

Assim sendo, verifica-se que os métodos de análise de desempenho sofreram grandes alterações ao longo do tempo. Na Figura 2.2 apresenta-se esquematicamente a evolução da avaliação de desempenho organizacional.

A avaliação de desempenho inicia-se com um grande envolvimento humano, em que o gestor avalia a organização através da simples leitura dos mapas contabilísticos e da utilização de rácios financeiros. Seguidamente, estas técnicas de avaliação passam a incluir, na sua análise, os modelos integrados que ajudam os gestores a explicar o seu plano de produção e a melhorar a sua *performance*, através dos modelos estatísticos, nomeadamente técnicas de regressão linear e análise discriminante.

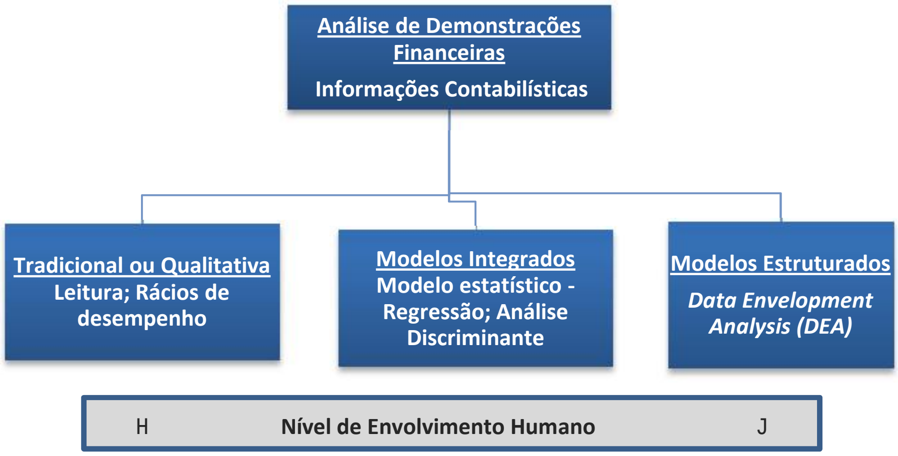

Figura 2.2 – Evolução da avaliação de desempenho

Fonte: Adaptado de Kassai (2002: 63)

Atualmente, e de forma a responder às exigências de mercado, os métodos de avaliação do desempenho recorrem a outras ferramentas de análise, como por exemplo a programação linear, para determinar um modelo explicativo. Esta forma de avaliação permitiu o aparecimento de uma nova técnica de análise, a *Data Envelopment Analysis* (DEA). Trata-se de uma metodologia não paramétrica, que recorre à programação linear para avaliar a eficiência organizacional de unidades homogéneas, tendo em conta os recursos utilizados para a produção de resultados. Esta nova técnica de análise organizacional constitui o objeto da presente dissertação e será estudada mais detalhadamente, no capítulo 4. Antes, no capítulo 3, apresentam-se, de forma resumida, os principais conceitos e resultados, sobre a programação linear que, como se referiu anteriormente, constitui a base da metodologia DEA.

3. PROGRAMAÇÃO LINEAR

3.1 Introdução

A programação linear (PL) constitui uma das ferramentas de Investigação Operacional mais conhecida e mais usada no apoio à tomada de decisão. Muitos problemas do mundo real podem ser formulados e resolvidos como problemas de programação linear e muitos outros, mais complexos, podem também ser resolvidos por recurso métodos que incluem esta estrutura matemática como acontece, por exemplo, com os problemas de programação linear inteira. Um dos problemas mais comuns de aplicação de programação linear envolve alocar recursos a atividades. A quantidade disponível de cada recurso é limitada e, portanto, deve ser feita uma alocação eficiente de modo a escolher os níveis das atividades que atingem o melhor valor possível da medida de desempenho global.

O principal objetivo da programação linear é otimizar o uso de recursos limitados e encontrar a solução ótima em problemas de decisão, através da utilização de modelos matemáticos que representam uma determinada realidade. Assim, a programação linear consiste na otimização (maximização ou minimização) de uma função linear que satisfaz um conjunto de condições, designadas por restrições, lineares. A conceção dos problemas de PL é usualmente atribuída a George Dantzig (1947), enquanto trabalhava como consultor matemático para a força aérea americana[2]. Ainda em 1947, George Dantzig desenvolveu um método para resolução de problemas de PL, o método do simplex, que se revelou importante no enorme surto expansionista da programação linear.

Neste capítulo apresentam-se os conceitos básicos sobre o problema de programação linear e a teoria da dualidade que servem de base à metodologia DEA que será apresentada no capítulo 4. Assim, na secção 3.2, serão apresentados as definições e os conceitos básicos sobre programação linear. Na secção 3.3, será apresentada uma breve referência à resolução de problemas de PL. Na secção 3.4, será apresentada a definição do problema dual bem como as relações entre os problemas primal e dual e os resultados fundamentais sobre a dualidade. Esta secção termina com a interpretação económica do problema dual.

[2] Em 1939, o matemático e economista soviético L. Kantorovich formulou e resolveu problemas deste tipo, mas o seu trabalho permaneceu desconhecido até 1959, como se refere em Bazaraa, Jarvis e Sherali (1990).

3.2 Definições e conceitos básicos

Um problema de programação linear pode, de uma forma geral, ser formulado do seguinte modo:

$$max\ (min)\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (3.1)$$

$$s.a. \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \sim b_i \qquad i = 1,...,m \qquad (3.2)$$

$$x_j \geq 0 \qquad j = 1,...,n \qquad (3.3)$$

A expressão $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$, denotada por z, é a função que se pretende maximizar ou minimizar e designa-se por função objetivo. As expressões (3.2) e (3.3) designam-se de restrições. O símbolo ~ em (3.2) representa, para cada i, com $i = 1,...,m$, um e um só dos símbolos ≤, ≥ ou =. As restrições (3.3) são usualmente designadas por restrições de não-negatividade. As incógnitas x_j, com $j = 1, 2, ..., n$, são as variáveis de decisão (variáveis, variáveis estruturais ou níveis de atividade); c_j, com $j = 1, 2, ..., n$, são os coeficientes da função objetivo; a_{ij}, com $i = 1, 2, ..., m$ e $j = 1, 2, ..., n$, são os coeficientes tecnológicos; b_i, para $i = 1, 2, ..., m$, são segundos membros ou termos independentes. Os coeficientes da função objetivo, os coeficientes tecnológicos e os termos independentes constituem os parâmetros do problema. O conjunto das soluções que satisfaz as restrições (3.2) e (3.3) designa-se por conjunto das soluções admissíveis.

Relativamente a um problema de programação linear, algumas manipulações podem ser consideradas, conforme se refere por exemplo em Bazaraa, Jarvis e Sherali (1990). Assim:

- Um problema de maximização pode ser convertido num problema de minimização e vice-versa. Basta notar que sobre qualquer região admissível se tem

  $$max\ z = -\ min\ (-z)$$

  Assim, um problema de maximização (minimização) pode ser convertido num problema de minimização (maximização) multiplicando os coeficientes da função objetivo por -1.

- Uma restrição do tipo $\leq$ ($\geq$) pode ser transformada numa restrição do tipo $\geq$ ($\leq$), multiplicando por -1 ambos os membros da restrição. Isto é, para uma dada restrição i tem-se:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \;\Leftrightarrow\; -\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq -b_i$$

e

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \;\Leftrightarrow\; -\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq -b_i$$

- Uma restrição de igualdade pode ser transformada em duas restrições, uma de $\leq$ e outra de $\geq$, apesar de não ser prático. Isto é, para uma dada restrição i tem-se:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \;\Leftrightarrow\; \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \;\wedge\; \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i$$

- Uma desigualdade pode ser transformada numa igualdade através da introdução de uma variável de desvio não negativa. Isto é, para uma dada restrição i tem-se:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \;\Leftrightarrow\; \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i$$

e

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \;\Leftrightarrow\; \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - x_{n+i} = b_i$$

- Qualquer variável livre (não restringida no sinal) pode ser substituída pela diferença entre duas variáveis não negativas. Isto é, sendo x_j uma variável livre, $x_j = x_j' - x_j''$, com $x_j' \geq 0$ e $x_j'' \geq 0$.

Mediante as manipulações acabadas de referir, um problema de programação linear pode, de um modo geral, ser definido do seguinte modo:

$$max\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{3.4}$$

$$s.a. \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \qquad i = 1,\ldots,m \tag{3.5}$$

$$x_j \geq 0 \qquad j = 1,\ldots,n \tag{3.6}$$

Uma outra forma usual de definir, em termos gerais, um problema de programação linear è dada por:

$$min\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{3.7}$$

$$s.a. \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \qquad i=1,...,m \tag{3.8}$$

$$x_j \geq 0 \qquad j=1,...,n \tag{3.9}$$

Os modelos (3.4) – (3.6) e (3.7) – (3.9) representam a forma canónica de um problema de maximização e de minimização, respetivamente. Esta forma revela-se útil no estabelecimento das relações de dualidade como se verá na secção seguinte.

Uma outra forma de representar um problema de programação linear e de grande utilidade na sua resolução é a forma padrão. Nesta forma, todas as restrições são de igualdade. Assim, a forma padrão para um problema de maximização è:

$$max\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{3.10}$$

$$s.a. \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad i=1,...,m \tag{3.11}$$

$$x_j \geq 0 \qquad j=1,...,n \tag{3.12}$$

Os modelos anteriores foram escritos usando a notação cartesiana. Estes modelos podem ser reescritos de uma forma mais conveniente usando a notação matricial. Assim, sendo $A=\left[a_{ij}\right]$ uma matriz de dimensão $m \times n$, $c = \left[c_j\right]$ e $x = \left[x_j\right]$ vetores coluna de dimensão n, e $b = \left[b_j\right]$ vetor coluna de dimensão m, o modelo (3.4) − (3.6) pode ser representado de modo equivalente por

$$max \quad z = c^T x \tag{3.13}$$

$$s.a. \quad Ax \leq b \tag{3.14}$$

$$x \geq 0 \tag{3.15}$$

De modo idêntico pode escrever-se a forma canónica de um problema de minimização usando a notação matricial.

Uma outra forma de representar um modelo de programação linear é a forma vetorial

$$max\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (3.16)$$

$$s.a. \qquad \sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b \qquad (3.17)$$

$$x_j \geq 0 \qquad j = 1,...,n \qquad (3.18)$$

onde a_j é a coluna j da matriz dos coeficientes das restrições, isto é, $a_j = \begin{bmatrix} a_{1j} & a_{2j} & \dots & a_{mj} \end{bmatrix}^T$.

Como se referiu anteriormente, o conjunto das soluções que satisfazem todas as restrições de um modelo de programação linear é designado de conjunto das soluções admissíveis. A melhor dessas soluções é denominada de solução ótima. Por melhor solução, entende-se a de maior valor num problema de maximização ou a de menor valor num problema de minimização. Um problema de PL pode ter ou não solução ótima. Existe solução ótima quando existe uma só solução ótima e, neste caso, diz-se que o problema tem solução ótima única, ou quando existe mais do que uma solução ótima e, neste caso, diz-se que o problema tem soluções ótimas alternativas. Não existe solução ótima quando não existe qualquer solução admissível e o problema diz-se impossível, ou quando existem soluções admissíveis em que o correspondente valor de z é arbitrariamente grande positivo ou negativo e, neste caso, diz-se que o problema tem solução não limitada ou ilimitada.

3.3 Breve referência à resolução de problemas de PL

Os problemas de PL são problemas relativamente fáceis de resolver pelo facto de existirem algoritmos eficientes para a sua resolução. O primeiro, e ainda o mais popular, algoritmo proposto para resolução deste tipo de problemas foi o método do simplex, concebido por Dantzig em 1947. Apesar de ser um algoritmo não polinomial, o método do simplex funciona muito bem na prática. Para a maioria dos problemas com interesse prático, observou-se empiricamente que o método requer cerca de $3m/2$ iterações e, raramente, mais do que $3m$, considerando a matriz A de dimensão $m \times n$ (ver Bazaraa *et al.* (1990)). Um outro algoritmo, muito útil na resolução de problemas de PL de grande dimensão, é o método dos pontos interiores, proposto por Narenda Karmarkar em 1984. Trata-se de um algoritmo polinomial, isto é, um algoritmo cujo tempo necessário para a resolução de qualquer instância do problema é limitado superiormente por uma função polinomial na dimensão do problema.

Como se refere, por exemplo, em Hiller e Lieberman (2006), o método dos pontos interiores compete favoravelmente com o método do simplex em problemas de grande dimensão. No entanto, este último revela-se mais eficiente na análise pós-otimização.

Na prática, a resolução de um problema de programação linear é feita através de recurso a *software* especializado que usualmente utiliza o método do simplex. Note-se que no caso de problemas com duas ou três variáveis, estes podem ser resolvidos graficamente. No caso de duas variáveis, a resolução gráfica é particularmente simples e, embora não tão prática quanto a resolução computacional, permite colocar em evidência importantes propriedades da PL.

3.4 Dualidade

Na programação linear, umas das principais descobertas foi o conceito da dualidade. Esta descoberta revelou que todo o problema de programação linear tem associado a ele, um outro problema de programação linear chamado dual (Hillier e Lieberman, 2006). Neste contexto, o problema original é designado de primal. A resolução de um destes problemas implica a resolução, em simultâneo, do outro. O estudo da dualidade permite uma interessante interpretação económica e revela-se útil na interpretação e implementação da análise de sensibilidade. A dualidade e a análise de sensibilidade constituem dois dos mais importantes tópicos da programação linear. A análise de sensibilidade consiste em estudar como alterações nos parâmetros de um problema de PL afetam a solução ótima e permite obter uma nova solução ótima a partir da solução ótima do problema original sem necessidade de resolver o problema desde o início.

Se o problema primal é um problema de maximização (minimização) na forma canónica, o problema dual é um problema de minimização (maximização) na forma canónica. Assim, no caso do problema de maximização definido por (3.4) – (3.6) o problema dual é definido do seguinte modo:

$$min \ \ w = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \tag{3.19}$$

$$s.a. \qquad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j \qquad\qquad j = 1,...,n \tag{3.20}$$

$$y_i \geq 0 \qquad\qquad i = 1,...,m \tag{3.21}$$

No caso do problema de minimização definido por (3.7) – (3.9) o seu dual é definido por:

$$max \ w = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \tag{3.22}$$

$$s.a. \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \leq c_j \qquad j = 1,...,n \tag{3.23}$$

$$y_i \geq 0 \qquad i = 1,...,m \tag{3.24}$$

Para além do sentido de otimização, as regras de passagem do problema primal para o dual são as seguintes: a cada restrição do primal é associada uma variável do problema dual; os termos independentes do primal são os coeficientes da função objectivo do dual; os coeficientes da função objectivo do primal são os termos independentes do dual; a matriz dos coeficientes tecnológicos do problema dual é a matriz transposta dos coeficientes tecnológicos do problema primal. A partir destas regras conclui-se facilmente que o dual do problema dual é o problema primal.

Se um problema de programação linear não estiver escrito na forma canónica o dual pode ser escrito convertendo previamente o problema primal à forma canónica. No entanto, o dual de um problema de programação linear pode, de um modo mais prático, ser obtido aplicando as regras expressas na tabela 3.1.

Tabela 3.1 - Relações entre os problemas primal e dual

Problema de maximização	⟷	**Problema de minimização**
Coeficientes da F.O.	⟷	Termos independentes
Termos independentes	⟷	Coeficientes da F.O.
Matriz dos coeficientes A	⟷	Matriz dos coeficientes A^T
Restrições $\leq$ $\geq$ $=$	⟷	Variáveis ≥ 0 ≤ 0 Livre
Variáveis ≥ 0 ≤ 0 livre	⟷	Restrições $\geq$ $\leq$ $=$

Fonte: Adaptado de Bazaraa et al. (1990)

A forma como o problema dual é definido conduz a importantes relações entre os problemas primal e dual. Essas relações são expressas nos teoremas que se seguem, cuja demonstração poderá ser vista, por exemplo, em Bazaraa *et al.* (1990)

Teorema 3.1: O valor da função objetivo, z, para qualquer solução admissível do problema de maximização (primal), não excede o valor da função objetivo, w, para qualquer solução admissível do problema dual, isto é, $z \le w$. De modo idêntico, o valor da função objetivo, z, para qualquer solução admissível de um problema de minimização, é sempre não inferior ao valor da função objetivo, w, para uma solução admissível do problema dual, isto é, $z \ge w$.

O teorema anterior é conhecido, na literatura da especialidade, por teorema da dualidade fraca e tem como consequência imediata os seguintes corolários:

Corolário 3.1: Se $x*$ e $y*$ são soluções admissíveis para os problema primal e dual, respetivamente, tais que $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$, então $x*$ e $y*$ são soluções ótimas dos respetivos problemas.

Corolário 3.2: Se um dos problemas (primal ou dual) tem solução ilimitada então o outro é um problema impossível.

Relativamente ao corolário 3.2, note-se que o recíproco não é verdade, isto é, se um dos problemas é impossível o outro pode ser impossível ou ter solução ilimitada.

Teorema 3.2: Se um dos problemas, primal ou dual, tem solução ótima finita então ambos os problemas têm solução ótima finita e os valores das respetivas funções objetivo são iguais, isto é, verifica-se $z* = w*$.

O teorema anterior é conhecido, na literatura da especialidade, por teorema da dualidade forte. A seguir apresenta-se um importante teorema que relaciona as soluções dos problemas primal e dual.

Teorema 3.3: Sejam $x* = \left[x_1^*, ..., x_n^*\right]$ e $y* = \left[y_1^*, ..., y_m^*\right]$ soluções admissíveis para os problemas primal e dual, respetivamente. Estas soluções são ótimas para os respetivos problemas se, e só se, as seguintes condições são satisfeitas:

a) $\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j\right) x_j^* = 0 \qquad j = 1,\ 2,\ \dots,\ n$

b) $(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^*)\, y_i^* = 0 \qquad i = 1,\ 2,\ \dots,\ m$

O teorema anterior indica que pelo menos um dos dois termos em cada uma das expressões deve ser igual a zero. Em particular, tem-se:

$$x_j^* > 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* = c_j$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* > c_j \quad \Rightarrow \quad x_j^* = 0$$

$$y_i^* > 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* = b_i$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* > b_i \quad \Rightarrow \quad y_i^* = 0$$

Deste modo, tem-se que, na otimalidade: se uma variável num dos problemas é positiva então a correspondente restrição no outro problema é ativa ou saturada; se uma restrição, num dos problemas, não é ativa ou saturada então a correspondente variável no outro problema é igual a zero.

O teorema anterior é conhecido pelo teorema dos desvios complementares. De facto, designando por s_i a variável de desvio para cada restrição i do problema primal e por v_j a variável de desvio para cada restrição j do problema dual, isto é,

$$s_i = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \qquad i = 1,\ 2,\ \dots,\ m$$

e $$v_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - c_j \qquad j = 1,\ 2,\ \dots,\ n$$

as condições a) e b) do teorema anterior podem ser reescritas do seguinte modo:

$$v_j^* x_j^* = 0 \qquad j = 1,\ 2,\ \dots,\ n$$

e $$s_i^*\ y_i^* = 0 \qquad i = 1,\ 2,\ \dots,\ m$$

Estas condições relacionam as variáveis de um dos problemas com as variáveis de desvio do outro (complementar). Daí a designação de desvios complementares. Se a solução ótima de um dos problemas, primal ou dual, é conhecida, então o teorema dos desvios complementares permite obter a solução do outro problema.

Existem duas implicações importantes da dualidade na obtenção da solução ótima de um problema de PL: a primeira, de carácter teórico, refere-se ao facto de a dualidade fornecer uma maneira de verificar a otimalidade; a segunda, de carácter prático, tem a ver com a redução do tempo necessário à obtenção da solução ótima quando o número de restrições é maior do que o número de variáveis, uma vez que o número de iterações do método do simplex depende do número de restrições.

O estudo da dualidade permite uma interessante interpretação económica uma vez que os valores das variáveis duais, fornecem os preços sombra associados às restrições do problema primal. O preço sombra para uma restrição "mede" o impacto sobre a função objetivo quando o termo independente de uma restrição é incrementado de 1 unidade. Assim, o preço sombra para uma restrição i é a variação do valor da função objetivo se o termo independente b_i dessa restrição for incrementado de 1 unidade isto é, passar de b_i para $b_i + 1$. Para uma restrição de "menor ou igual" o preço sombra é sempre um valor não negativo; para uma restrição de "maior ou igual" o preço sombra é sempre um valor não positivo; para uma restrição de "igual" o preço sombra pode ser positivo, negativo ou nulo (ver, por exemplo, Wiston (1994).

De referir que, pelo teorema dos desvios complementares, tem-se que na solução ótima ou a restrição é verificada na igualdade ou o correspondente preço sombra é igual a zero.

Constata-se assim, que a programação linear é uma ferramenta de muito útil e de fácil acesso, podendo ser aplicada na avaliação de desempenho organizacional para a tomada de decisão. Com base nesta ferramenta, surge assim uma nova forma de avaliação, a *Data Envelopment Analysis (*DEA). Uma técnica concebida por Charnes e Cooper (1978) com o objetivo de medir a eficiência de unidades similares e dar resposta aos novos desafios da gestão. Esta metodologia de análise será desenvolvida no próximo capítulo.

4. METODOLOGIA DATA ENVELOPMENT ANALYSIS (DEA)

4.1 Introdução

Data Envelopment Analysis (DEA) é uma metodologia relativamente recente destinada a avaliar a eficiência relativa de entidades homogéneas, isto é, entidades que utilizam os mesmos recursos para produzir os mesmos produtos. Essas entidades podem ser empresas de negócios bem como agências governamentais ou organizações sem fins lucrativos. Por forma a garantir uma maior flexibilidade nas aplicações, cada uma dessas entidades é usualmente referida na literatura da especialidade como *Decision Making Unit* (DMU). Genericamente, uma DMU é uma entidade capaz de transformar múltiplos *inputs* em múltiplos *outputs* e cuja *performance* relativa se pretende avaliar. As DMU's devem ser semelhantes, pertencer ao mesmo sector de atividade e utilizar, na produção dos seus produtos (*outputs*), os mesmos recursos (*inputs*). Estas características são fundamentais para que as DMU's possam ser comparáveis entre si.

A DEA constitui uma técnica de Investigação Operacional, que tem como base a programação matemática, mais especificamente a programação linear, cujo objetivo é, como já foi referido, determinar a eficiência de DMU's independentes e homogéneas, estabelecendo um indicador de avaliação de eficiência entre *inputs* e *outputs*, dessas unidades. Esta técnica permite diferenciar as unidades consideradas eficientes das ineficientes. Possibilita ainda, definir objetivos para a melhoria de desempenho, para cada recurso e para cada resultado, das unidades consideradas ineficientes. Trata-se de uma técnica que utiliza apenas *inputs* e *outputs* e não necessita de uma função de produção.

M.J. Farrell (1957) foi o primeiro autor a indicar uma forma de avaliar a eficiência sem recurso à utilização de funções de produção definidas *a priori*. O seu trabalho permitiu caracterizar a eficiência total, que pode ser decomposta por dois tipos de eficiência: a eficiência técnica e a eficiência alocativa ou eficiência dos preços. A eficiência alocativa avalia a unidade de produção em relação à utilização dos seus recursos de produção tendo em conta os preços. A eficiência técnica refere-se à capacidade de uma unidade de produção obter o nível de produção máximo, dado um conjunto de *inputs*, ou a partir de um determinado nível de *outputs*, tal que, consiga produzir com a menor combinação de *inputs*. Esta unidade é considerada tecnicamente eficiente se não existir outro processo ou combinação de processos que consiga produzir o mesmo nível de *outputs*, utilizando-se menores quantidades de *inputs*.

A metodologia DEA iniciou-se formalmente com a tese de doutoramento de Edward Rhodes que teve por base o trabalho de M.J. Farrel (1957), depois de resultados insatisfatórios, e até absurdos, obtidos com abordagens estatísticas (regressão e correlação). A proposta de trabalho de Rhodes foi apresentada à Carnegie *Mellon University* em 1978, sob orientação de W.W. COOPER. O objetivo daquela tese de doutoramento era avaliar os resultados de um programa de acompanhamento a estudantes desfavorecidos (maioria afro-americanos e hispânicos), instituído em escolas públicas americanas. O estudo destinava-se a comparar o desempenho dos alunos de escolas que aderiram ao programa com os alunos de escolas que não aderiram ao programa. Para isso, foram utilizados como indicadores (*inputs*) dessa avaliação: o número de professores por hora, o número de horas de estudo do aluno e o tempo gasto pela família com os alunos. E possíveis resultados (*outputs*): a melhoria da autoestima (medida por testes psicológicos), as habilidades psicomotoras, resultados aritméticos entre outros.

Deste estudo, resultou o Modelo CCR – Charnes, Cooper e Rhodes, com a publicação do primeiro artigo no *European Journal of Operations Research*, em 1978. Posteriormente, em 1984, é apresentado outro modelo, com outras variantes importantes, o Modelo BCC – Banker, Charnes e Cooper. Estes dois modelos são considerados os modelos clássicos para determinar a fronteira de eficiência da metodologia *Data Envelopment Analysis*.

Assim, a metodologia DEA baseia-se na estimação de uma fronteira mediante a aplicação de um modelo de programação matemática, que identifica as relações eficientes entre *inputs* e *outputs*. A fronteira obtida retrata as eficiências relativas entre as várias unidades produtivas analisadas e é designada por fronteira de eficiência. A fronteira é constituída por um conjunto de segmentos de reta que ligam as DMU's eficientes e pode ser definida como o nível máximo de produção para um dado nível de *inputs*, determinada pelo conceito de eficiência de *Pareto-Koopmans.*[3].

De acordo com Sherman e Zhu (2006), a técnica DEA compara as unidades operacionais considerando todos os recursos utilizados e os serviços prestados, identificando as unidades eficientes e as unidades ineficientes em que é possível uma melhoria; identifica as mudanças

---

[3] Eficiência *Pareto–Koopmans* – Define que uma unidade de produção é tecnicamente eficiente se o aumento de qualquer *output* requer a redução de pelo menos um outro *output* ou o aumento de pelo menos um *input*, ou se a diminuição de qualquer *input*, requer o aumento de pelo menos um outro *input* ou a diminuição de pelo menos um *output*.

específicas que as unidades ineficientes têm de se submeter para alcançar as unidades eficientes e por último, transmite informações aos gestores sobre a *performance* das unidades operacionais, que podem ser utilizadas na melhoria da gestão das unidades ineficientes.

Esta técnica apresenta uma das mais adequadas ferramentas para avaliar a eficiência, em comparação das ferramentas tradicionais. A medida de eficiência calculada pela DEA é uma generalização da medida de produtividade usual, ou seja, a razão entre os resultados obtidos e os recursos utilizados, para cada unidade operacional, analisada. O princípio básico desta metodologia é medir e comparar o desempenho das unidades produtivas, que de alguma forma praticam tarefas similares, considerando a relação entre *inputs* e *outputs*.

A técnica DEA permite relacionar múltiplos *outputs* e múltiplos *inputs* numa medida singular de eficiência, limitada entre 0 e 1 (ou 0 e 100%). Ou seja, permite calcular um índice de eficiência, que compara o desempenho atual da DMU, com a combinação mais eficiente verificada nas outras observações. Este índice de eficiência apresenta o valor de 1 ou 100%, para as unidades cuja produtividade é melhor (eficiente) e inferior a 1, quando as unidades têm uma eficiência menor.

Na secção 4.2, faz-se uma introdução da origem da DEA, referindo os aspetos mais relevantes da técnica. Nas secções 4.3 e 4.4, apresenta-se os modelos clássicos da DEA, as suas caraterísticas e alguns exemplos. Seguidamente, na secção 4.5 encontra-se uma breve descrição dos modelos com restrições aos pesos, aplicados à técnica DEA. Por fim, na secção 4.6, são enumeradas algumas vantagens e desvantagens desta técnica de análise organizacional.

4.2 A Técnica DEA

Charnes, Cooper e Rhodes (1978) conceberam um modelo de programação linear para mensurar a eficiência relativa de unidades de produção semelhantes, cada uma das quais utilizando múltiplos recursos (*inputs*) para a produção de múltiplos resultados (*outputs*), conforme Figura 4.1.

Figura 4.1 - Técnica DEA

Fonte: Elaboração própria

A técnica DEA foi desenvolvida para determinar a eficiência de unidades produtivas onde não seja relevante ou não se deseje considerar apenas o aspeto financeiro. Para tal, dispensa-se a conversão de todos os *inputs* e *outputs* em unidades monetárias.

A metodologia DEA é caraterizada pelos seguintes fatores:

- Foca-se nas observações individuais e não na média de uma população;
- Consegue gerar uma única medida para cada DMU, tendo em conta o seu uso de *inputs* para produzir os *outputs* desejados;
- Consegue utilizar em simultâneo múltiplos *inputs* e *outputs*, independentemente da unidade de medida de cada um;
- Calcula as mudanças necessárias nos *inputs* ou nos *outputs*, com o objetivo de projetar na fronteira de eficiência as DMU's que estão abaixo dela;
- Estima o ótimo de Pareto;
- Analisa e quantifica para cada DMU avaliada, as razões da ineficiência;
- E satisfaz os critérios de equidade na avaliação relativa de cada DMU (Carvalho, 2011).

A grande diferença entre a metodologia DEA e os modelos paramétricos, que se baseiam num plano de regressão a partir de observações, é que esta metodologia otimiza cada observação individual com o objetivo de calcular uma fronteira de eficiência, determinada pelas DMU's eficientes.

A metodologia DEA começou, primeiramente a ser utilizada em organizações sem fins lucrativos considerando vários *inputs* e *outputs* expressos em diferentes unidades de medida. Hoje em dia, esta técnica é utilizada em diversas áreas tais como: instituições financeiras, companhias aéreas, restaurantes, entre outros. Através da Figura 4.2 podemos verificar o processo de aplicação da técnica DEA, desde a fase inicial de escolha das unidades de produção, quais os *inputs* e *outputs* para a análise, até à fase de transmissão dos resultados à organização e posterior implementação.

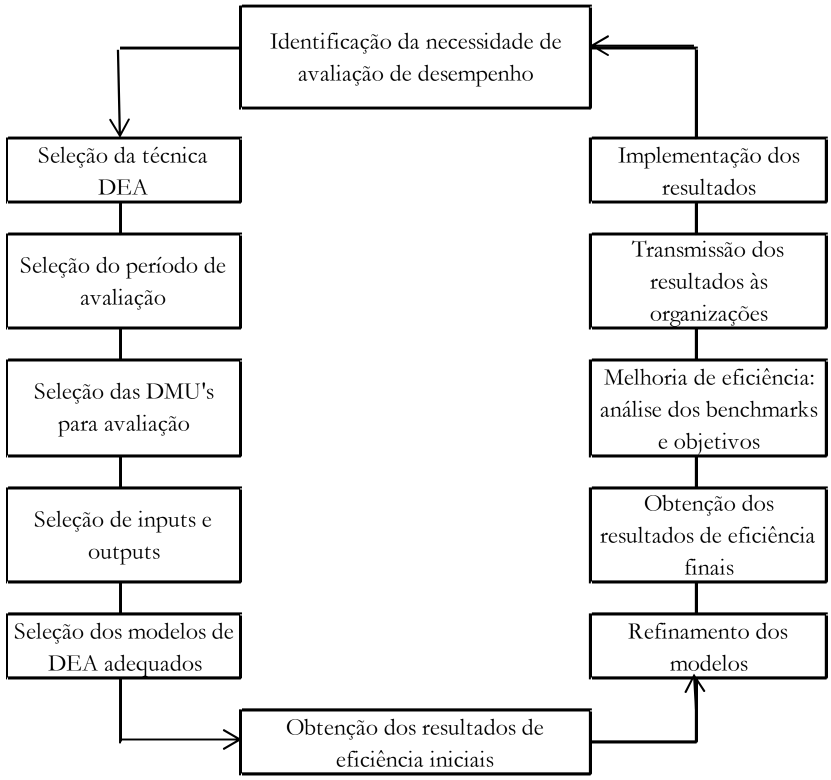

Figura 4.2 – Aplicação da técnica DEA

Fonte: Adaptado de Fernandes (2007)

Embora existam várias formas de determinar a fronteira de eficiência, iremos centralizar o nosso estudo, nos modelos clássicos: modelo CCR e o modelo BCC.

4.3 Modelo CCR

O modelo de CCR foi proposto por Charnes, Cooper e Rhodes em 1978 (daí a sua designação) e constitui um dos modelos básicos da técnica DEA. Este modelo é também conhecido como modelo CRS (*Constant Returns to Scale*), por considerar rendimentos de escala constante, ou seja, qualquer variação nos *inputs* produz uma variação proporcional nos *outputs*. O modelo avalia a eficiência total, identificando as DMU's eficientes. O modelo permite que cada unidade de produção escolha os pesos para cada variável, de forma a maximizar a sua eficiência, desde que esses pesos aplicados a todas as DMU's não permitam obter uma eficiência superior a um.

O modelo CCR usa a programação linear para generalizar o caso de múltiplos *inputs* e múltiplos *outputs*, o conceito de eficiência de Farrell (1957) para o caso de um único *input* e de um único *output*. Este modelo pode ser apresentado segundo duas vertentes:

- Orientado para a variação do nível de *input* para uma mesma produção de *output* (*Input-oriented*);
- Ou orientado para a variação do *output* para um mesmo nível de *inputs* (*output-oriented*).

A escolha da orientação do modelo depende do contexto da avaliação de desempenho organizacional e dos objetivos da organização. Assim, se o gestor tiver mais facilidades de controlo sobre os recursos, optará por uma avaliação orientada para *inputs*, caso contrário, optará por uma orientação a *outputs*.

A opção entre um modelo no qual a unidade de produção é orientada pelo *input* e outro onde ela é orientada para o *output,* deve respeitar a capacidade dos seus decisores influenciarem a minimização dos *inputs* consumidos ou a maximização dos *outputs* produzidos, respetivamente (Cooper, Seiford e Zhu 2004).

4.3.1 Modelo CCR orientado para *inputs*

O modelo CCR orientado para *inputs* (minimização de *inputs*) procura minimizar o consumo dos recursos de forma a produzir um determinado nível de produção. A eficiência é atingida com a redução de *inputs*. Neste modelo, a eficiência é determinada através da otimização do quociente entre a soma ponderada dos *outputs* (*output* virtual) e a soma ponderada dos *inputs* (*input* virtual), generalizando assim o conceito de eficiência de Farrell (1957). O modelo permite que cada DMU escolha os pesos associados a cada *input* e a cada *output* da forma que lhe for mais favorável, de modo que esses pesos, quando aplicados a cada uma das DMU's, não permitam obter um quociente superior a 1.

Para definir este modelo, assume-se que existem n DMU's a serem avaliadas e que a DMU_o é a DMU em análise. Cada DMU_k, com $k=1,...,n$, consome a quantidade x_{ik} do *input* i, com $i=1, \dots, r$, e produz a quantidade y_{jk} do *output* j, com $j=1, \dots, s$; x_{io} e y_{io} são, respetivamente, as quantidades de *input* e de *output* da DMU_o. Assume-se, igualmente, que $x_{ik} \geq 0$, $y_{jk} \geq 0$ e cada DMU tem pelo menos um *input* e um *output* com valores positivos. Considerem-se as variáveis de decisão, não negativas, v_i, com $i=1, \dots, r$, e u_j, com

$j = 1, \ldots, s$, que representam os pesos (ponderadores) associados aos *inputs* e aos *outputs*, respetivamente.

Designando por z_o a eficiência da DMU_o, isto é, da DMU em análise, tem-se então o seguinte modelo:

$$max\ z_o = \frac{\sum_{j=1}^{s} u_j y_{jo}}{\sum_{i=1}^{r} v_i x_{io}} \tag{4.1}$$

$$s.a. \qquad \frac{\sum_{j=1}^{s} u_j y_{jk}}{\sum_{i=1}^{r} v_i x_{ik}} \leq 1 \qquad k = 1, \ldots, n \tag{4.2}$$

$$v_i \geq 0 \qquad i = 1, \ldots, r \tag{4.3}$$

$$u_j \geq 0 \qquad j = 1, \ldots, s \tag{4.4}$$

A função objetivo (4.1) maximiza o quociente entre a soma ponderada dos *outputs* (*output virtual*) e a soma ponderada dos *inputs* (*input virtual*) da DMU_o. As restrições (4.2) garantem que o quociente ente o *output* virtual e o *input* virtual não excede o valor 1 para qualquer DMU. As desigualdades (4.3) e (4.4) indicam a natureza das variáveis de decisão que, neste caso, são os ponderadores. Em consequência das restrições, o valor da solução óptima do modelo anterior é, quando muito, igual a 1. Se $z_o^* = 1$, a DMU_o diz-se eficiente e diz-se ineficiente se $z_o^* < 1$. Obviamente que, neste último caso, quanto menor for o valor de z_o^* menor é a eficiência da DMU_o.

O modelo (4.1) – (4.4) é um modelo de programação fracionária, que pode facilmente ser transformado num modelo de programação linear, conforme se demonstra em Cooper, Seiford e Tone (2007). Basta, para o efeito, igualar o denominador da função objetivo a um valor constante. Assim, igualando a 1 o referido denominador, obtém-se o seguinte modelo de programação linear:

$$max\ z_o = \sum_{j=1}^{s} u_j y_{jo} \tag{4.5}$$

$$s.a. \qquad \sum_{j=1}^{s} v_i x_{io} = 1 \tag{4.6}$$

$$\sum_{j=1}^{s} u_j y_{jk} - \sum_{i=1}^{r} v_i x_{ik} \leq 0 \qquad k = 1,\ldots,n \tag{4.7}$$

$$v_i \geq 0 \qquad i = 1,\ldots,r \tag{4.8}$$

$$u_j \geq 0 \qquad j = 1,\ldots,s \tag{4.9}$$

No que se segue, o modelo definido por (4.5) – (4.9) será denotado por CCRI. Associando uma variável real θ_o à restrição (4.6) e as variáveis não negativas λ_k, com $k = 1,\ldots,n$, às restrições (4.7), o dual do modelo (4.5) – (4.9) é dado por:

$$\min \ \theta_o \tag{4.10}$$

$$s.a. \qquad \theta_o x_{io} - \sum_{k=1}^{n} x_{ik} \lambda_k \geq 0 \qquad i = 1,\ldots,r \tag{4.11}$$

$$-y_{jo} + \sum_{k=1}^{n} y_{jk} \lambda_k \geq 0 \qquad j = 1,\ldots,s \tag{4.12}$$

$$\lambda_k \geq 0 \qquad k = 1,\ldots,n \tag{4.13}$$

O modelo (4.5) − (4.9) é conhecido na literatura da especialidade como modelo dos multiplicadores (com orientação a *inputs*), enquanto o modelo (4.10) − (4.13) é conhecido como modelo do envelope (com orientação a *inputs*). Enquanto no modelo dos multiplicadores, os pesos associados aos *inputs* e aos *outputs* constituem as variáveis de decisão, no modelo do envelope, essas variáveis são θ_0 e λ_k ($k = 1,\ldots,n$). No que se segue, denota-se por DCCRI, o modelo definido por (4.10) – (4.13).

Este modelo permite uma melhor compreensão quanto à sua orientação, uma vez que a orientação a *inputs* vem do facto de a eficiência ser atingida com a redução dos *inputs*. As restrições (4.11) indicam que a redução em cada um dos *inputs* não ultrapassa a fronteira definida pelas DMU's eficientes. As restrições (4.12) garantem, por sua vez, que essa redução não altera o atual nível dos *outputs* da DMU em análise.

Como é sabido da teoria da dualidade, os modelos anteriores têm o mesmo valor ótimo para a função objetivo. Então o valor θ^*_o é a eficiência da DMU_o e indica o valor pelo qual terão de ser multiplicados os *inputs* de uma DMU ineficiente para que a mesma se torne eficiente, provocando assim um decréscimo no valor dos *inputs*. Os valores de λ^*_k ($k = 1,\ldots,n$) permitem identificar as DMU's que são referência (*benchmarks*) para uma determinada DMU_o que seja ineficiente. Quanto maior for o valor de λ_k maior é a importância da correspondente DMU_k para tornar DMU_o eficiente. Um valor de λ_k igual a zero significa que a correspondente DMU_k não é referência para a DMU_o em análise. É evidente que no caso de uma DMU_o ser eficiente, $\lambda_o = 1$, os restantes valores de λ_k são iguais a zero.

De seguida apresenta-se um exemplo de forma a permitir uma melhor compreensão dos modelos anteriores e do exposto relativamente aos mesmos.

Exemplo 4.1: Considere-se um conjunto de seis empresas seguradoras em que cada uma utiliza para a sua produção dois *inputs* gerando um *output* conforme consta da tabela 4.1. Pretende-se calcular a eficiência de cada seguradora, utilizando o modelo CCR orientado para inputs.

Tabela 4.1 – Dados relativos aos *inputs* e *outputs* de seis seguradoras

DMUs Seguradoras	***Input* 1** Nº de colaboradores	***Input* 2** Investimento Líquido (×1000€)	***Output*** Resultado Líquido (×1000€)
A	25	50	80
B	30	35	65
C	80	45	150
D	45	70	200
E	60	90	120
F	80	100	150

Considerando a informação apresentada na tabela 4.1, o modelo dos multiplicadores orientado a *inputs,* para cálculo da eficiência da DMU_A é dado pelo seguinte problema de programação linear:

$$max\ z_A = 80u$$

$$s.a.\quad 25v_1 + 50v_2 = 1$$

$$80u - 25v_1 - 50v_2 \le 0$$

$$65u - 30v_1 - 35v_2 \le 0$$

$$150u - 80v_1 - 45v_2 \leq 0$$

$$200u - 45v_1 - 70v_2 \leq 0$$

$$120u - 60v_1 - 90v_2 \leq 0$$

$$150u - 80v_1 - 100v_2 \leq 0$$

$$u_1, v_1, v_2 \geq 0$$

A solução ótima deste problema é $v_1 = 0{,}040000$, $v_2 = 0$ e $u = 0{,}009000$ cujo valor é $z_A^* = 0{,}72$. Portanto, a eficiência da DMU_A é 0,72 ou, em termos percentuais, 72%.

Alternativamente, a eficiência da DMU_A pode ser obtida resolvendo o dual do problema anterior dado por:

$$min\ \theta_A$$

$$\begin{aligned} s.a.\quad & 50\theta_A - 50\lambda_A - 35\lambda_B - 45\lambda_C - 70\lambda_D - 90\lambda_E - 100\lambda_F \geq 0 \\ & 25\theta_A - 25\lambda_A - 30\lambda_B - 80\lambda_C - 45\lambda_D - 60\lambda_E - 80\lambda_F \geq 0 \\ & -80 + 80\lambda_A + 65\lambda_B + 150\lambda_C + 200\lambda_D + 120\lambda_E + 150\lambda_F \geq 0 \\ & \lambda_A, \lambda_B, \lambda_C, \lambda_D, \lambda_E, \lambda_F \geq 0 \end{aligned}$$

Tem-se então $\theta_A^* = 0{,}72$ com $\lambda_A^* = \lambda_B^* = \lambda_C^* = \lambda_E^* = \lambda_F^* = 0$ e $\lambda_D = 0{,}4000$. A seguradora A é portanto ineficiente e a DMU que serve de referência, para se tornar eficiente é a seguradora D.

A resolução deste par de problemas (primal e dual), correspondentes ao modelo dos multiplicadores e ao modelo do envelope com orientação para os *inputs*, para cada uma das seis DMU's, permite assim obter a informação constante da tabela 4.2.

A primeira coluna desta tabela identifica a DMU, a segunda indica o valor da eficiência determinada pelo modelo primal (ou pelo dual), as três seguintes referem os pesos associados aos *inputs* e ao *output* e a última indica o valor das variáveis duais λ_k ($k =$ A, ..., F) que, como já se referiu, identificam as DMU's que são alvos de referência (*Benchmarks*). Relativamente a esta coluna são omissas as variáveis com valores iguais a zero.

Tabela 4.2 - Resultados do modelo CCR orientado a *inputs* para os dados do exemplo 4.1

DMU	Eficiência	Pesos			*Benchmarks*
	$z_o^* \ (=\theta_o^*)$	*Input* 1 (v_1)	*Input* 2 (v_2)	*Ouput* (u)	λ_k
A	0,7200	0,040000	0	0,009000	$\lambda_D = 0,4000$
B	0,6302	0,004068	0,025085	0,009695	$\lambda_C = 0,0925$ $\lambda_D = 0,2556$
C	1	0,002797	0,017249	0,006667	$\lambda_C = 1,000$
D	1	0,002098	0,012937	0,005000	$\lambda_D = 1,000$
E	0,4650	0,001626	0,010027	0,003875	$\lambda_C = 0,0195$ $\lambda_D = 0,5854$
F	0,5132	0,001435	0,008852	0,003421	$\lambda_C = 0,1579$ $\lambda_D = 0,6316$

Os resultados mostram que as seguradoras C e D são eficientes enquanto as seguradoras A, B, E e F são ineficientes. Os valores da última coluna mostram que a seguradora D é a referência para a seguradora A. No caso da seguradora B existem duas que são referência, as seguradoras C e D. No entanto, uma vez que $\lambda_D > \lambda_C$, o contributo da seguradora D é maior do que o da seguradora C para que a seguradora B se torne eficiente. O que foi referido a respeito da seguradora B pode igualmente ser escrito para as seguradoras E e F.

4.3.2 Modelo CCR orientado para *outputs*

No modelo CCR orientado para *outputs* (maximização de *outputs*) pretende-se maximizar os *outputs* sem incrementar qualquer dos *inputs*. Este modelo é obtido trocando o numerador pelo denominador na função objetivo e nas restrições do modelo CCR fracionário orientado para *inputs* e, consequentemente, minimizando a função objetivo.

Assim, usando a mesma notação do modelo CCR orientado para os *inputs* relativamente aos parâmetros e às variáveis de decisão, e designando por w_0 o valor da função objetivo, tem-se o seguinte modelo:

$$min \ w_o = \frac{\sum_{i=1}^{r} v_i x_{io}}{\sum_{j=1}^{s} u_j y_{jo}} \tag{4.14}$$

$$s.a. \qquad \frac{\sum_{i=1}^{r} v_i x_{ik}}{\sum_{j=1}^{s} u_j y_{jk}} \geq 1 \qquad k = 1,\ldots,n \tag{4.15}$$

$$v_i \geq 0 \qquad i = 1,\ldots,r \tag{4.16}$$

$$u_j \geq 0 \qquad j = 1,\ldots,s \tag{4.17}$$

Neste tipo de problema a função objetivo dada por (4.14) é, com já se referiu, de minimização visto que se pretende minimizar o quociente entre a soma ponderada dos *inputs* e a soma ponderada dos *outputs*, considerando as restrições (4.15), que indicam que esse quociente não é inferior a 1 para cada DMU, e as restrições (4.16) e (4.17), que indicam a natureza das variáveis de decisão.

À semelhança do que foi feito para o modelo CCR orientado para os *inputs*, também o modelo (4.14) - (4.17) pode ser linearizado, obtendo-se o seguinte problema de programação linear:

$$min\, w_o = \sum_{i=1}^{r} v_i x_{io} \tag{4.18}$$

$$s.a. \qquad \sum_{j=1}^{s} u_j y_{jo} = 1 \tag{4.19}$$

$$\sum_{j=1}^{s} u_j y_{jk} - \sum_{i=1}^{r} v_i x_{ik} \leq 0 \qquad k = 1,\ldots,n \tag{4.20}$$

$$v_i \geq 0 \qquad i = 1,\ldots,r \tag{4.21}$$

$$u_j \geq 0 \qquad j = 1,\ldots,s \tag{4.22}$$

No que se segue, denota-se por CCRO o modelo definido por (4.18) – (4.22). Associando agora uma variável real ρ_o à restrição (4.19) e as variáveis não negativas «_k $(k = 1,\ldots,n)$ às restrições (4.20), o dual do modelo (4.18) – (4.22) é dado por:

$$max\ \rho_o \tag{4.23}$$

$$s.a. \quad x_{io} - \sum_{k=1}^{n} x_{ik} \text{«}_k \geq 0 \qquad i = 1,\ldots,r \tag{4.24}$$

$$-\text{°}_o y_{jo} + \sum_{k=1}^{n} y_{jk} \text{«}_k \geq 0 \qquad j = 1,\ldots,s \tag{4.25}$$

$$\text{«}_k \geq 0 \qquad k = 1,\ldots,n \tag{4.26}$$

O modelo definido por (4.23) – (4.26) será, no que se segue, denotado por DCCRO. O valor da função objetivo $°_o$ representa o valor pelo qual devem ser multiplicados os *outputs*, mantendo constantes os *inputs*, para que a DMU$_o$ seja eficiente, isto é, atinja a fronteira de eficiência. Então, $°_o$ é um valor maior do que 1 pelo que a eficiência é dada por $¯_o = 1 / °_o$.

Note-se que as duas orientações no modelo CCR (*input* e *output*) fornecem o mesmo valor de eficiência, mas com diferentes valores para $ª_k$ e $«_k$, para um dado k. É claro que se uma DMU$_o$ é eficiente então $ª_o = «_o = 1$. De facto, mediante a transformação $°_o = 1/¯_o$ e $«_k = ª_k / ¯_o$, com $k = 1,\dots,n$, a minimização de $¯_o$ é equivalente à maximização de $°_o$. Deste modo, a solução ótima do modelo DCCRO pode ser obtida diretamente a partir da solução ótima do modelo DCCRI, como se mostra em Cooper, Seiford e Tone (2007). Assim, sendo $(¯_o^*;\, ª_1^*, \dots, ª_n^*)$ solução ótima de DCCRI então $(°_o^*;\, «_1^*, \dots, «_n^*) = \left(1/¯_o^*;\, ª_1^*/¯_o^*, \dots, ª_n^*/¯_o^*\right)$ é solução ótima de DCCRO. Claramente que o recíproco também se verifica.

Os mesmos autores mostram ainda que, de modo idêntico, se podem relacionar as soluções ótimas obtidas pelo modelo dos multiplicadores, orientado para *inputs,* com as obtidas pelo modelo dos multiplicadores, orientado para *outputs*. Neste caso, sendo $(v_1^*, \dots, v_r^*\,; u_1^*, \dots, u_r^*)$ solução ótima de CCRI então $\left(v_1^*/¯_o^*, \dots, v_r^*/¯_o^*\,; u_1^*/¯_o^*, \dots, u_s^*/¯_o^*\right)$ é solução ótima de CCRO.

Exemplo 4.2: Considerando os dados do exemplo 4.1 e utilizando agora o modelo CCR orientado para *outputs* bem como o correspondente dual, obtêm-se os resultados apresentados na tabela 4.3, que segue a mesma estrutura da tabela 4.2.

Os resultados constantes da tabela 4.3 permitem ilustrar o exposto anteriormente relativamente ao modelo CCR orientado para *outputs* bem quanto à comparação que foi feita entre este modelo e o modelo CCR orientado para *inputs*. Note-se que, atendendo ao facto de que os valores de w_o^* (ou de ρ_o^*) serem inversos do valor da eficiência, então quanto maior for aquele valor menor será a eficiência da correspondente DMU. Obviamente que uma DMU será eficiente quando este valor for igual a 1.

Por fim refira-se que no modelo CCR orientado para *outputs* a fronteira de eficiência apresenta uma forma invertida em relação à do modelo orientado pata *inputs*.

Tabela 4.3 - Resultados do modelo CCR orientado a *outputs* para os dados do exemplo 4.1

DMU	Eficiência	Pesos			*Benchmarks*
	$1/w_0^* \ (=1/\rho_0^*)$	*Input* 1 (v_1)	*Input* 2 (v_2)	*Ouput* (u)	μ_k
A	0,7200	0,055556	0	0,012500	«$_D = 0,5556$
B	0,6302	0,006455	0,039806	0,015385	«$_C = 0,1469$ «$_D = 0,4056$
C	1	0,002797	0,017249	0,006667	«$_C = 1,000$
D	1	0,002098	0,012937	0,005000	«$_D = 1,000$
E	0,4650	0,003497	0,021562	0,008333	«$_C = 0,0420$ «$_D = 1,2587$
F	0,5132	0,002797	0,017249	0,006667	«$_C = 0,3077$ «$_D = 1,2308$

4.4 Modelo BCC

O modelo BCC, proposto por Banker, Charnes e Cooper (1984), e daí a sua designação, considera que as DMU's em avaliação, apresentam rendimentos variáveis de escala, ou seja, substitui o axioma da proporcionalidade entre *inputs* e *outputs*, que caracteriza o modelo CCR, pelo axioma da convexidade. Consequentemente, este modelo é também conhecido por modelo VRS – *Variable Returns to Scale*.

Neste modelo, a fronteira da eficiência é convexa, permitindo assim, que as unidades produtivas que operam com baixos valores de *inputs* tenham retornos crescentes de escala e as que operam com altos valores tenham retornos decrescentes de escala, conforme se refere em (Cooper et al., 2007).

Matematicamente, a convexidade é descrita pelas condições $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$ e $\lambda_k \geq 0$, com $\lambda = 1,...,n$. Assim, na forma do envelope, o modelo BCC obtém-se introduzindo no modelo CCR a condição $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$ e, portanto, as duas orientações, para *inputs* e para *outputs*, estão também presentes neste modelo. Nas duas subsecções seguintes apresentam-se essas duas variantes do modelo BCC.

4.4.1 Modelo BCC orientado para *inputs*

Considere-se novamente a notação usada no modelo CCR quanto aos parâmetros e às variáveis de decisão, e designe-se por θ_{oB} o valor da função objetivo. O modelo BCC na forma do envelope, com orientação a *inputs*, é então dado pelo seguinte modelo de programação linear:

$$min\ \theta_{oB} \tag{4.27}$$

$$s.a.\ \theta_{oB} x_{io} - \sum_{k=1}^{n} x_{ik} \lambda_k \geq 0 \qquad i = 1, \dots, r \tag{4.28}$$

$$-y_{jo} + \sum_{k=1}^{n} y_{jk} \lambda_k \geq 0 \qquad j = 1, \dots, s \tag{4.29}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1 \tag{4.30}$$

$$\lambda_k \geq 0 \qquad k = 1, \dots, n \tag{4.31}$$

O dual deste modelo, que descreve o modelo BCC na forma dos multiplicadores com orientação a *inputs*, é descrito por:

$$max\ z_{oB} = \sum_{j=1}^{s} u_j y_{jo} + u_0 \tag{4.32}$$

$$s.a. \qquad \sum_{i=1}^{r} v_i x_{io} = 1 \tag{4.33}$$

$$\sum_{j=1}^{s} u_j y_{jk} - \sum_{i=1}^{r} v_i x_{ik} + u_0 \leq 0 \qquad k = 1, \dots, n \tag{4.34}$$

$$v_i \geq 0 \qquad i = 1, \dots, r \tag{4.35}$$

$$u_j \geq 0 \qquad j = 1, \dots, s \tag{4.36}$$

$$u_0 \in \mathbb{R} \tag{4.37}$$

Na sequência da notação utilizada para o modelo CCR, o modelo descrito por (4.27) – (4.31) será, no que se segue, denotado por DBCCI e o modelo (4.32) – (4.37) por BCCI.

A diferença entre o modelo CCRI e o modelo BCCI reside no facto de este último incluir uma variável livre u_0 na função objetivo e nas restrições (4.34), que é a variável dual associada à restrição (4.30). O valor de u_0 indica a variação (ou fator) de escala. Assim, um valor positivo indica retorno crescente de escala; um valor negativo indica um retorno decrescente de escala e um valor igual a zero indica um retorno constante de escala.

O modelo definido por (4.32) – (4.37) corresponde à linearização do modelo BCC orientado para *inputs*, expresso na forma fracionária por:

$$max\ z_{oB} = \frac{\sum_{j=1}^{s} u_j y_{jo} + u_0}{\sum_{i=1}^{r} v_i x_{io}} \tag{4.38}$$

$$s.a. \quad \frac{\sum_{j=1}^{s} u_j y_{jk} + u_0}{\sum_{i=1}^{r} v_i x_{ik}} \leq 1 \qquad k = 1, \dots, n \tag{4.39}$$

$$v_i \geq 0 \qquad i = 1, \dots, r \tag{4.40}$$

$$u_j \geq 0 \qquad j = 1, \dots, s \tag{4.41}$$

$$u_0 \in \mathbb{R} \tag{4.42}$$

Exemplo 4.3: Considere-se de novo os dados do exemplo 4.1 e utilize-se agora o modelo BCC orientado para *inputs*, para determinar a eficiência das seis DMU's em causa, bem como as DMU's de referência.

O modelo BCCI*,* para cálculo da eficiência da DMU_A é dado por:

$$max\, z_A = 80u + u_0$$

$$\begin{aligned} s.a. \quad & 25v_1 + 50v_2 = 1 \\ & 80u + u_0 - 25v_1 - 50v_2 \leq 0 \\ & 65u + u_0 - 30v_1 - 35v_2 \leq 0 \\ & 150u + u_0 - 80v_1 - 45v_2 \leq 0 \\ & 200u + u_0 - 45v_1 - 70v_2 \leq 0 \\ & 120u + u_0 - 60v_1 - 90v_2 \leq 0 \\ & 150u + u_0 - 80v_1 - 100v_2 \leq 0 \\ & u, v_1, v_2 \geq 0 \\ & u_0 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

A solução ótima deste problema é $v_1 = 0{,}018182$, $v_2 = 0{,}010909$, $u = 0{,}004848$ e $u_0 = 0{,}612121$, cujo valor é $z_A^* = 1$. Portanto, a eficiência da DMU$_A$ é 1 ou, em termos percentuais, 100%. O dual deste problema, isto é, o modelo DBCCI aplicado à empresa A do exemplo em consideração é dado por:

$$min\theta_A$$

$$\begin{aligned} s.a. \quad & 25\theta_A - 25\lambda_A - 30\lambda_B - 80\lambda_C - 45\lambda_D - 60\lambda_E - 80\lambda_F \geq 0 \\ & 50\theta_A - 50\lambda_A - 35\lambda_B - 45\lambda_C - 70\lambda_D - 90\lambda_E - 100\lambda_F \geq 0 \\ & -80 + 80\lambda_A + 65\lambda_B + 150\lambda_C + 200\lambda_D + 120\lambda_E + 150\lambda_F \geq 0 \\ & \lambda_A + \lambda_B + \lambda_C + \lambda_D + \lambda_E + \lambda_F = 1 \\ & \lambda_A, \lambda_B, \lambda_C, \lambda_D, \lambda_E, \lambda_F \geq 0 \end{aligned}$$

Tem-se então $\theta_A^* = 1$, com $\lambda^*_A = 1$ e $\lambda_B^* = \lambda_C^* = \lambda_D^* = \lambda_E^* = \lambda_F^* = 0$. A seguradora A é portanto eficiente.

Tabela 4.4 – Resultados do modelo BCC orientado a *inputs* para os dados do exemplo 4.1

DMU	Eficiência	Pesos			Retornos de escala	*Benchmarks*
	z_o^* $(= \theta_{oB}^*)$	Input 1 (v_1)	Input 2 (v_2)	Ouput (u)	u_0	μ_k
A	1	0,018182	0,010909	0,004848	0,612121	«$_A = 1$
B	1	0,006760	0,022777	0,006656	0,567343	«$_B = 1$
C	1	0,002797	0,017249	0,006667	0	«$_C = 1$
D	1	0,002098	0,012937	0,005000	0	«$_D = 1$
E	0,5760	0,008772	0,005263	0,002339	0,295322	«$_A = 0,2325$ «$_B = 0,3860$ «$_D = 0,3816$
F	0,5555	0,002399	0,008081	0,002362	0,201292	«$_B = 0,3247$ «$_C = 0,1232$ «$_D = 0,5520$

A resolução dos modelos BCCI e DBCCI para cada uma das seis DMU's em causa, permite obter os resultados constantes da tabela 4.4, cuja estrutura é a mesma das tabelas 4.2 e 4.3 com exceção da penúltima coluna onde se incluem os valores de u_0 que, como já se referiu, indicam o fator de escala.

Da observação da tabela 4.4 verifica-se que usando o modelo BCC orientado a *inputs*, as DMU's consideradas eficientes são as seguradoras A, B, C e D, enquanto as ineficientes são as E e F, sendo esta última a mais ineficiente. Relativamente aos valores apresentados na penúltima coluna, verifica-se também que as seguradoras A, B, E e F têm retornos crescentes de escala e que as seguradoras C e D têm retornos constantes de escala. Quanto aos valores apresentados na última coluna, verifica-se que as seguradoras B, D e A são, por ordem decrescente de importância, as referências para a seguradora E. Do mesmo modo, as seguradoras D, B e C são referências para a seguradora F.

Comparando os valores fornecidos pelas soluções ótimas dos modelos DCCRI e DBCCI, tem-se que $\theta_o^* \leq \theta_{oB}^*$. Esta relação verifica-se sempre uma vez que o conjunto das soluções admissíveis do modelo DBCCI é um subconjunto do conjunto das soluções admissíveis do modelo DCCRI. Tal significa que o valor da eficiência obtido pelo modelo CCR orientado para *inputs* não é superior ao valor da eficiência obtido pelo modelo BCC orientado para *inputs*. Isto é, a medida de eficiência obtida pelas empresas que têm rendimentos variáveis de escala é superior ou igual à obtida pelas que têm rendimentos constantes de escala.

4.4.2 Modelo BCC orientado para *outputs*

Como se referiu anteriormente, e à semelhança do que foi feito para o modelo DBCCI, também a variante deste modelo orientado para *outputs* pode ser obtida por inclusão das condições de convexidade no modelo DCCRI. Tem-se então o seguinte modelo:

$$max\ \rho_{oB} \qquad (4.43)$$

$$s.a.\ x_{io} - \sum_{k=1}^{n} x_{ik} \text{«}_k \geq 0 \qquad i = 1, \ldots, r \qquad (4.44)$$

$$-\text{°}_{oB} y_{jo} + \sum_{k=1}^{n} y_{jk} \text{«}_k \geq 0 \qquad j = 1, \ldots, s \qquad (4.45)$$

$$\sum_{k=1}^{n} \text{«}_k = 1 \qquad (4.46)$$

$$\text{«}_k \geq 0 \qquad k = 1, \ldots, n \qquad (4.47)$$

O dual deste modelo, que descreve o modelo BCC na forma de multiplicadores com orientação para *outputs* é dado por:

$$min\ \ w_{oB} = \sum_{i=1}^{r} v_i x_{io} + v_0 \tag{4.48}$$

$$s.a. \qquad \sum_{j=1}^{s} u_j y_{jo} = 1 \tag{4.49}$$

$$\sum_{j=1}^{s} u_j y_{jk} - \sum_{i=1}^{r} v_i x_{ik} - v_0 \leq 0 \qquad k = 1,\dots,n \tag{4.50}$$

$$v_i \geq 0 \qquad i = 1,\dots,r \tag{4.51}$$

$$u_j \geq 0 \qquad j = 1,\dots,s \tag{4.52}$$

$$v_0 \in \mathbb{R} \tag{4.53}$$

A variável livre v_0 é a variável dual associada à restrição (4.46) que é interpretada como fator de escala como acontece com a variável u_0 no modelo BCCI. No entanto, contrariamente ao que acontece com o modelo o modelo BCCI, um valor positivo de v_0 indica um retorno decrescente de escala enquanto um valor negativo de v_0 indica um retorno crescente de escala. Um valor de v_0 igual a zero indica um retorno constante de escala.

Seguindo novamente a notação que tem vindo a ser utilizada, o modelo descrito por (4.43) – (4.47) será, no que se segue, denotado por DBCCO e o modelo (4.48) – (4.53) por BCCO. Finalmente, o modelo (4.48) – (4.53) corresponde à linearização do modelo BCCO expresso na forma fracionária por:

$$min\, w_{oB} = \frac{\sum_{i=1}^{r} v_i x_{io} + v_0}{\sum_{j=1}^{s} u_j y_{jo}} \tag{4.54}$$

$$s.a. \qquad \frac{\sum_{i=1}^{r} v_i x_{ik} + v_0}{\sum_{j=1}^{s} u_j y_{jk}} \geq 1 \qquad k = 1,\dots,n \tag{4.55}$$

$$v_i \geq 0 \qquad i = 1,\dots,r \tag{4.56}$$

$$u_j \geq 0 \qquad j = 1,\dots,s \tag{4.57}$$

$$v_0 \in \mathbb{R} \tag{4.58}$$

Exemplo 4.4: Considere-se de novo os dados do exemplo 4.1 e utilize-se agora o modelo BCC orientado para *outputs*, para determinar a eficiência das seis DMU's em causa, bem como o fator de escala e as DMU's de referência. A resolução dos modelos (4.43) – (4.47) e (4.48) – (4.53) com os referidos dados permite obter os resultados apresentados na tabela 4.5, cuja estrutura é a mesma da tabela 4.4.

Como se referiu anteriormente, o modelo CCR fornece o mesmo valor de eficiência quer seja orientado para os *inputs* quer seja orientado para os *outputs*. Os resultados das tabelas 4.4 e 4.5 mostram que o mesmo não se verifica com o modelo BCC, no caso em que as DMU's são ineficientes, como seria de esperar.

Tabela 4.5 - Resultados do modelo BCC orientado a *outputs* para os dados do exemplo 4.1

DMU	Eficiência	Pesos			Retornos de escala	*Benchmarks*
	$1/w_{oB}^{*}$ $(=1/\rho_{oB}^{*})$	*Input* 1 (v_1)	*Input* 2 (v_2)	*Ouput* (u)	v_0	μ_k
A	1	0,046875	0,028125	0,012500	−1,578125	$\mu_A = 1$
B	1	0	0,130769	0,015385	−3,576923	$\mu_B = 1$
C	1	0,002797	0,017249	0,006667	0	$\mu_C = 1$
D	1	0,002098	0,012937	0,005000	0	$\mu_D = 1$
E	0,6000	0	0	0,008333	1,666667	$\mu_D = 1$
F	0,7500	0	0	0,006667	1,333333	$\mu_D = 1$

Comparando os modelos CCR e BCC orientados para *inputs* quanto ao valor da eficiência fornecido, conclusões idênticas se obtêm para os modelos CCR e BCC orientados para *outputs*. Quanto aos retornos de escala, verifica-se que as seguradoras A e B têm retornos crescentes de escala, enquanto as seguradoras E e F têm retornos decrescentes de escala; as seguradoras C e D têm retornos constantes de escala. Relativamente à informação apresentada na última coluna verifica-se que a seguradora D é referência tanto para a seguradora E como para a F.

De acordo com os exemplos apresentados, verifica-se que uma DMU que atinge o nível de eficiência a 100% pelo modelo CCR também obterá os mesmos resultados a nível de eficiência, quando calculada pelo modelo BCC. Segundo Cooper et *al*, (2007) no modelo CCR, que admite rendimentos constantes à escala, a eficiência medida é uma eficiência técnica global. Uma DMU que seja eficiente no modelo CCR e no modelo BCC tem uma eficiência global (*globally efficiently*). Por outro lado, no modelo BCC, que admite rendimentos variáveis à escala, a eficiência medida é uma eficiência pura local. Uma DMU que seja eficiente apenas pelo modelo BCC tem uma eficiência local (*locally efficiently).*

Na Figura 4.3 apresenta-se a representação gráfica da fronteira VRS (referente ao modelo BCCI) e a fronteira CRS (do modelo CCRI). A fronteira CRS é representada pela reta que contém a origem e o ponto B correspondente à DMU_B. A DMU_B tem retornos constantes de escala porque é o ponto correspondente à produtividade máxima. A fronteira VRS é constituída pelos segmentos de reta [AB] e [BC].

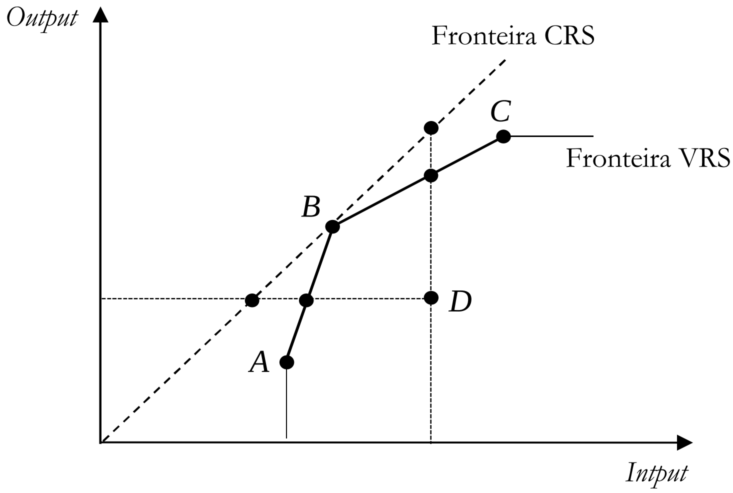

Figura 4.3 – Representação Gráfica das fronteiras VRS e CRS

Fonte: Adaptado de Cooper et al. (2007)

Analisando a fronteira VRS, verifica-se que as DMU's A e C, são menos produtivas que a DMU_B. A Figura 4.3 mostra que a DMU_A tem rendimentos crescentes de escala, porque uma alteração no *input* provoca uma alteração maior do que o proporcional no *output.* Em relação à DMU_C, verifica-se que apresenta rendimentos decrescentes de escala, ou seja, uma alteração no nível de *input* proporciona uma alteração menor do que o proporcional no *output.*

Segundo Cooper *et al* (2007), a eficiência de escala de uma unidade operacional é igual a um, quando essa unidade é eficiente perante rendimentos de escala constantes. Se a DMU for ineficiente com rendimentos constantes de escala mas for eficiente com rendimentos variáveis de escala, então a sua eficiência de escala é inferior a um e demonstra não estar a operar com a sua produtividade máxima. A eficiência de escala é calculada através das eficiências obtidas pelo modelo CCR e pelo modelo BCC e é definida pela seguinte fórmula:

$$E_e = \frac{E_{CCR}}{E_{BCC}} \tag{4.59}$$

em que, E_{CCR} indica a eficiência medida através do modelo CCR e a E_{BCC} indica a eficiência medida através do modelo BCC. Assim, a eficiência de escala é a medida do impacto da escala de operação da DMU e reflete a capacidade desta obter a produtividade máxima. Ou seja, dá-nos a medida de distância da DMU sob análise até uma DMU fictícia, a que opera com valores produtivos mais elevados (Cooper et *al*, 2007).

4.5 Modelo DEA com restrição aos pesos

Os modelos da técnica DEA abordados anteriormente, permitem uma total flexibilidade na escolha dos pesos, de tal forma que cada DMU sob análise poderá alcançar a sua eficiência máxima sem ter em conta qualquer prioridade ou limitação na utilização dos fatores (*inputs* e *outputs*). Esta flexibilidade é uma das vantagens associadas à técnica DEA e revela-se importante na identificação das DMU's ineficientes. Por outro lado, esta flexibilidade, poderá levar a que os pesos calculados possam ser inconsistentes, dada a importância relativa de cada *input* e *output* para o processo de avaliação do desempenho organizacional. Ou seja, os *inputs* e *outputs* de menor importância, podem estabelecer a eficiência de uma DMU enquanto os de maior importância podem não dar qualquer contributo para o valor da eficiência. De forma a minimizar este problema, várias abordagens têm surgido. Uma dessas abordagens consiste na introdução de restrições nos pesos associados aos *inputs* e *outputs* para além das restrições de não-negatividade. Dois dos métodos mais conhecidos nesta abordagem são o método da Região de Segurança - *Assurance Region* e o método *Cone Ratio.*

O método da Região de Segurança foi proposto por Thompson, Singleton, Thrall e Smith (1986), que foram os primeiros a propor a utilização de restrições nos pesos para aumentar a capacidade discriminativa dos modelos clássicos da técnica DEA. Esta ideia surgiu através de um problema para identificar a localização ideal de um laboratório físico de alta energia e avaliar as vantagens da sua localização. Assim, estes autores desenvolveram a abordagem Região de Segurança (*Assurance Region)* de forma a solucioná-lo, na medida em que todas as outras abordagens efetuadas tinham sido deficientes na avaliação de *outputs,* considerados importantes para o estudo.

O método *Cone Ratio* foi desenvolvido por Charnes, Cooper, Huang e Sun (1990) para avaliar a *performance* de 48 bancos com sede nos Estados Unidos da América. Inicialmente fizeram a análise aplicando o modelo CCR, mas como os resultados obtidos não foram satisfatórios, propôs-se utilizar o método do *Cone Ratio* para restringir os resultados, contando com a ajuda de especialistas, na área da banca.

A ideia deste método é a de reduzir o espaço dos pesos associados aos *inputs* e aos *outputs*. Este método é mais geral do que o método da Região de Segurança, conforme se refere em Cooper et al. (2007) e será apresentado de seguida.

De acordo com os autores, no método *Cone Ratio*, a região admissível dos pesos associados aos *inputs* e aos *outputs* é definida por um cone convexo gerado por um conjunto de direções (vetores) admissíveis não negativas.

Assim, o cone convexo dos pesos associados aos *inputs* V gerado por k direções (vetores) admissíveis não negativas a_j, com $j = 1,\dots,k$, apresenta-se através da seguinte expressão*:*

$$V = \sum_{j=1}^{k} \sim_j a_j \qquad \text{com } \sim_j \geq 0 \text{ , } \forall j \tag{4.60}$$

$$= A^T \sim \tag{4.61}$$

onde $A^T = [a_1 \; \dots \; a_k] \in \mathbb{R}^{m \times k}$ e $\sim^T = [\sim_1 \; \dots \; \sim_k]$.

A Figura 4.4 mostra a representação gráfica do cone convexo V para o caso de dois *inputs.*

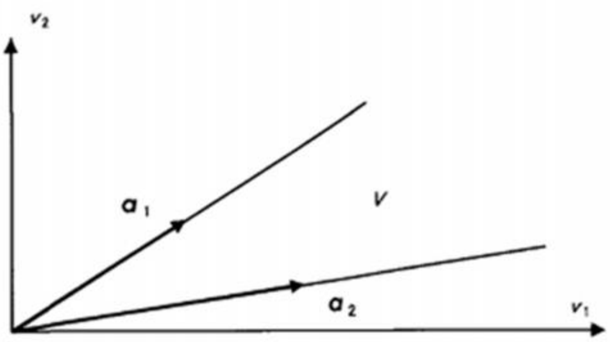

Figura 4.4 - Representação gráfica do cone convexo gerado por dois vetores
Fonte: Cooper et *al* (2007)

De modo idêntico se define o cone convexo U dos pesos associados aos *outputs* gerado por l direções (vetores) não negativas b_j, com $j = 1,\dots,k$. Assim tem-se*:*

$$U = \sum_{j=1}^{k} {}_j b_j \qquad \text{com} \quad {}_j \geq 0, \ \forall j \tag{4.62}$$

$$= B^T \tag{4.63}$$

onde $B^T = [b_1 \ \dots \ \mathrm{b}_l] \in \mathbb{R}^{m \times l}$ e ${}^T = [\ {}_1 \ \dots \ {}_l \ ]$.

Antes de apresentar o modelo CCRI usando o método *Cone Ratio*, e para uma melhor exposição do que se segue, comece-se por apresentar o modelo CCRI na forma matricial. Assim, designando por X a matriz dos *inputs*, Y a matriz dos *outputs*, x_o e y_o os vetores dos *inputs* e dos *outputs* para a DMU$_o$, respetivamente, e v e u os vetores dos pesos associados aos *inputs* e aos *outputs* (variáveis de decisão), respetivamente, o modelo CCR descrito por (4.5) − (4.9) pode ser reescrito na seguinte forma:

$$max \, z_o = uy_o \tag{4.64}$$

$$s.a. \qquad vx_o = 1 \tag{4.65}$$

$$uY - vX \leq 0 \tag{4.66}$$

$$v \geq 0 \tag{4.67}$$

$$u \geq 0 \tag{4.68}$$

Dados dois cones convexos V e U gerados por A e B, respetivamente, a aplicação do método *Cone Ratio* ao modelo CCRI permite escrever o seguinte modelo

$$max \, z_o = uy_o \tag{4.69}$$

$$s.a. \qquad vx_o = 1 \tag{4.70}$$

$$uY - vX \leq 0 \tag{4.71}$$

$$v \in V \tag{4.72}$$

$$u \in U \tag{4.73}$$

No que se segue, denote-se por CCRI_CR o modelo definido por (4.69) − (4.73). A diferença entre estes dois últimos modelos reside nas restrições que definem o espaço dos pesos associados aos *inputs* e aos *outputs*.

Usando as relações (4.61) e (4.63), o modelo (4.69) − (4.73) pode ser reescrito usando os vectores ~ e do seguinte modo:

$$max\, z_o = \quad (By_o) \tag{4.74}$$

$$s.a. \quad \sim(Ax_o) = 1 \tag{4.75}$$

$$(BY) - \sim(AX) \leq 0 \tag{4.76}$$

$$\sim\ \geq 0 \tag{4.77}$$

$$\geq 0 \tag{4.78}$$

Utilizando as relações

$$\overline{X} = AX \tag{4.79a}$$

$$\overline{Y} = BY \tag{4.79b}$$

o modelo anterior pode ser reescrito na seguinte forma:

$$max\, z_o = \quad \overline{y_o} \tag{4.80}$$

$$s.a. \quad \sim\overline{x_o} = 1 \tag{4.81}$$

$$\overline{Y} - \sim\overline{X} \leq 0 \tag{4.82}$$

$$\sim\ \geq 0 \tag{4.83}$$

$$\geq 0 \tag{4.84}$$

que é exatamente o modelo CCR original com outros dados e em que as variáveis de decisão, que representam os pesos associados aos *inputs* e aos *outputs*, são ~ e , respetivamente.

O dual do modelo (4.80) – (4.84) pode ser expresso através de uma variável real θ_o e um vetor de variáveis $ª = [ª_1, ..., ª_n]^T$, com $k = 1, ..., n$, do seguinte modo:

$$min\ \theta_o \tag{4.85}$$

$$s.a. \quad \overline{\ }_o(Ax_o) - (AX)ª \geq 0 \tag{4.86}$$

$$(BY)ª - (By_o) \geq 0 \tag{4.87}$$

$$ª \geq 0 \tag{4.88}$$

Usando as relações (4.79a) e (4.79b), este modelo pode também ser reescrito na seguinte forma:

$$min\ \theta_o \tag{4.89}$$

$$s.a. \qquad \overline{\ }_{o}\overline{x_o} - \overline{X}\text{ª} \geq 0 \tag{4.90}$$

$$\overline{Y}\text{ª} - \overline{y_o} \geq 0 \tag{4.91}$$

$$\text{ª} \geq 0 \tag{4.92}$$

Segundo Cooper et al. (2007) existem várias formas de escolher as direções admissíveis $[a_j]$ e $[b_j]$ entre as quais se destacam duas: uma primeira, que consiste no uso do conhecimento de peritos sobre a admissibilidade de rácios de pesos; uma segunda, que consiste em começar por resolver o modelo CCRI e selecionar DMU's preferíveis entre as eficientes. De seguida, usar os pesos ótimos v^* e u^* para as DMU's preferíveis como direções admissíveis.

Note-se que o método do *Cone Ratio* pode também ser aplicado ao modelo BBCI. No que segue, denote-se por BCCI_CR o modelo resultante da aplicação do método do *Cone Ratio* ao modelo BCCI.

Exemplo 4.5: Considere-se de novo os dados do exemplo 4.1 e utilize-se agora os modelos CCRI_CR e BCCI_CR, para determinar a eficiência das seis DMU's em causa, bem como o fator de escala e as DMU's de referência.

Usando os valores de v^* para as DMU's C e D e o valor u^* para a DMU C, obtidos pelo modelo CCRI e apresentados na tabela 4.2 podemos escrever a matriz

$$D = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,002797 & 0,017249 & 0 \\ 0,002098 & 0,012937 & 0 \\ 0 & 0 & 0,006667 \end{bmatrix}$$

que multiplicada pela matriz $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$, dos *inputs* X^T e dos *outputs* Y^T apresentados na tabela 4.1, permite, de acordo com o exposto anteriormente, obter novos dados para os *inputs* ($\overline{X^T}$) e *outputs* ($\overline{Y^T}$) apresentados na tabela 4.6.

A aplicação dos modelos CCRI e BCCI aos dados da tabela 4.6 permite obter os resultados apresentados nas tabelas 4.7 e 4.8, cuja estrutura é a mesma da tabela 4.4.

Tabela 4.6 - Dados relativos aos *inputs* e ao *outputs* de seis seguradoras

DMU	***Input* 1**	***Input* 2**	***Output***
A	0,932375	0,6993	0,53336
B	0,687625	0,515735	0,433355
C	0,999965	0,750005	1,00005
D	1,333295	1	1,3334
E	1,72023	1,29021	0,80004
F	1,94866	1,46154	1,00005

Tabela 4.7 - Resultados do modelo CCRI_CR orientado a *inputs* para os dados do exemplo 4.1

DMU	Eficiência		Pesos			*Benchmarks*
	CCRI	CCRI_CR	Input 1 (α_1)	Input 2 (α_2)	Ouput (β)	λ_k
A	0,7200	0,7200	0,000000	1,430001	1,072447	$\lambda_D = 0,400$
B	0,6302	0,6302	0,750585	0,938232	1,454164	$a_D = 0,2556$
C	1	1	1,000035	0,000000	0,99995	$a_C = 1$
D	1	1	0,387102	0,483878	0,749962	$a_D = 1$
E	0,4650	0,4650	0,300030	0,375038	0,581272	$a_D = 0,5853$
F	0,5132	0,5132	0,264860	0,331074	0,513132	$a_D = 0,6315$

Tabela 4.8 - Resultados do modelo BCCI_CR orientado a *inputs* para os dados do exemplo 4.1

DMU	Eficiência		Pesos			*Benchmarks*
	BCCI	BCCI_CR	Input 1 (α_1)	Input 2 (α_2)	Ouput (β)	λ_k
A	1	0,7966	0,0000	1,430001	0,591158	$\lambda_B = 0,8235$
B	1	1	1,454281	0,00000	0,00000	$a_B = 1$
C	1	1	1,000035	0,000000	0,99995	$a_C = 1$
D	1	1	0,750022	0,483878	0,749977	$a_D = 1$
E	0,576	0,5172	0,00000	0,775068	0,320411	$a_C = 0,6471$
F	0,5555	0,5132	0,00000	0,68421	0,28285	$a_C = 1$

Analisando a tabela 4.7, verifica-se que a aplicação do método do *Cone Ratio* ao modelo CCRI não provoca qualquer alteração nos índices de eficiência obtidos pelo modelo CCRI, para este exemplo. O mesmo não acontece quando o método é aplicado ao modelo BCCI, como se pode verificar na tabela 4.8. Analisando os resultados, verifica-se que os números de DMUs eficientes diminuíram, passando de quatro empresas eficientes para três, assim como o índice de eficiência, das DMUs ineficientes.

No capítulo 5, será apresentado um caso real ao qual a aplicação do método *Cone Ratio* permite aumentar o poder de descriminação quer relativamente ao modelo CCRI quer em relação ao modelo BCCI. Antes, na secção seguinte, serão referidas algumas vantagens e desvantagens da metodologia DEA.

4.6 Vantagens e desvantagens da metodologia DEA

A metodologia DEA é caraterizada por ser uma técnica não paramétrica de fácil interpretação, que permite a utilização de múltiplos *outputs* e *inputs* sem forçar a utilização de pressupostos sobre a forma funcional, para calcular a eficiência técnica, ou seja, quer os *inputs* quer os *outputs*, podem ter diferentes medidas. Prescinde de atribuição prévia dos pesos às variáveis consideradas no estudo e possibilita a identificação das empresas eficientes e ineficientes. Os *inputs* e *outputs* que fazem parte do estudo podem assumir diferentes unidades de medida, pois esta técnica permite a utilização de dados financeiros e não financeiros. A técnica DEA permite identificar ainda as unidades de referência, cujos índices de desempenho servem como referencial para as demais unidades posicionadas sob a superfície envolvente (unidades ineficientes). Esta caraterística é muito importante, pois permite aos gestores melhorar a *performance* das unidades ineficientes.

A *Data Envelopment Analysis* é muito utilizada para avaliar a eficiência dos serviços públicos, serviços bancários, entre outros. Pode ser aplicada a diversos períodos, possibilitando assim a verificação da evolução da eficiência das empresas e o estudo dos fatores que contribuíram para o seu crescimento ou decrescimento.

Relativamente às limitações, pode-se indicar que a DEA por ser uma metodologia não paramétrica, não permite a generalização dos resultados obtidos, restringindo apenas às empresas e às variáveis em análise. Esta técnica mede a eficiência relativa das empresas, sendo que não é significativo comparar os resultados com outros estudos diferentes. Uma das limitações da DEA prende-se com as alterações dos níveis de eficiência em função do número de variáveis. Ou seja, os resultados de todas as empresas em estudo são alterados face a uma variação dos *inputs* ou *outputs*.

A técnica DEA por ser uma técnica recente requer algum conhecimento por parte dos gestores para a poder pôr em prática de forma correta. Em relação à escolha do número de unidades para a análise, estas devem ser no mínimo, duas vezes maior que o número de *inputs* e *outputs* considerados, para que o modelo apresente resultados consistentes.

5. APLICAÇÃO PRÁTICA: ANÁLISE DE DESEMPENHO EM EMPRESAS SEGURADORAS

5.1 Introdução

No capítulo 4 foram apresentados os modelos clássicos da metodologia DEA e também um método, o do *Cone Ratio*, que permite uma maior descriminação da eficiência relativamente àqueles modelos. Este capítulo destina-se a apresentar a aplicação de alguns dos modelos apresentados nesse capítulo a uma situação real, mais precisamente à avaliação da *performance* relativa de um conjunto de seguradoras a operarem em Portugal. Assim, na secção 5.2, será apresentada a forma como foi feita a seleção dos dados. A secção 5.3 reporta ao modo como foram selecionados os *inputs* e os *outputs*. Na secção 5.4, é dada uma justificação para a escolha da orientação dos modelos. Finalmente, na secção 5.5, são apresentados os resultados do estudo bem como uma análise a esses mesmos resultados.

5.2 Seleção de dados

Para o presente estudo, foram utilizados os dados contabilísticos referentes ao ano de 2012, recolhidos junto do Instituto de Seguros de Portugal (ISP) e informação sobre o número médio de colaboradores, que apenas estava disponível nos relatórios e contas das empresas. As empresas em análise foram selecionadas de uma base de dados, disponibilizada pelo ISP, entidade responsável pela regulação e supervisão da atividade seguradora em Portugal.

O objetivo deste estudo é avaliar a eficiência de algumas empresas seguradoras, com base nos recursos utilizados para obtenção dos seus produtos. Para isso, escolheram-se três recursos considerados importantes para as suas atividades, de forma a justificar os *outputs* produzidos.
Foram selecionadas 20 seguradoras, em que se excluíram as empresas de resseguro, mútuas e as empresas de seguros do ramo vida. Estas serão as unidades decisoras sob análise (DMUs) para o presente caso de estudo.

A escolha destas empresas teve como critério fundamental, o ramo de atividade não vida. Neste estudo serão avaliadas apenas as empresas que pertencem ao CAE 65120 - Seguros não Vida. Para tal, procedeu-se à verificação, através dos números de identificação fiscal de cada seguradora, da respetiva classificação da atividade empresarial junto do *site* do Instituto Nacional de Estatística (INE). A homogeneidade das unidades sob análise é uma característica muito importante na aplicação da metodologia DEA, uma vez que, como foi referido anteriormente, trata-se de uma análise de eficiência relativa. Neste tipo de análise, é fundamental que as DMU's em estudo sejam semelhantes e utilizem o mesmo tipo de *inputs* para a produção do mesmo tipo de *outputs*.

É importante referir que para obter a informação em análise, foram enviados vários *emails* e realizados vários contactos para as empresas e para o ISP, a fim de serem esclarecidas algumas dúvidas surgidas ao longo do estudo.

5.3 Seleção de *inputs* e *outputs*

A escolha dos *inputs* e *outputs* teve por base a informação recolhida através do ISP, classificando um conjunto de indicadores, relativos às empresas de seguros a operar no mercado nacional, como os mais importantes para o ano de 2012[4]. Assim, foram selecionados três *inputs*: custos e gastos de exploração, custos com sinistros líquidos de resseguro e o número de colaboradores. Os dois *outputs* selecionados foram*:* o rendimento e os prémios adquiridos líquidos de resseguro. Estes valores são apresentados, pela ordem referida, na tabela 5.1.

Os custos e gastos de exploração são definidos como os encargos que a empresa deve suportar para assegurar o exercício da sua atividade, por isso influenciam diretamente o seu rendimento anual. O facto de uma empresa ter custos e gastos de exploração reduzidos, permitiria, se fosse eficiente, obter resultados superiores.

Os custos com sinistros líquidos de resseguro são os custos que as seguradoras assumem dos seus segurados, deduzido dos riscos partilhados com uma outra resseguradora. Estes encargos estão diretamente relacionados com a atividade deste tipo de empresas, pelo que se considera importante incluí-los neste estudo.

---

[4] A lista com os principais indicadores referentes às empresas seguradoras para o ano 2012 pode ser consultada através da seguinte ligação: http://www.isp.pt/NR/exeres/A66FFB60-757B-4CD9-857E-1140929905F5.htm.

Tabela 5.1 - *Inputs* e *Outputs*

DMU	Empresas	Custos e gastos de exploração líquidos	Custos com Sinistros, líquidos de resseguro	Nº de colaboradores	Rendimentos	Prémios adquiridos líquidos de resseguro
1	ACP Mobilidade - Sociedade de Seguros de Assistência, S.A.	246,97	490,56	15	27,94	1.009,37
2	AXA Seguros	105.028,85	244.416,16	139	20.585,55	288.547,32
3	BES Seguros	10.278,25	43.626,76	57	3.266,50	63.224,01
4	Cosec - Companhia de Seguros de Crédito	5.986,65	13.970,79	131	2.206,63	19.114,29
5	Crédito Agrícola Seguros	21.277,79	42.717,10	145	4.100,89	66.085,23
6	Europ Assistance Companhia Portuguesa de Seguros S A	8.056,06	40.674,38	327	689,95	51.225,71
7	Groupama Seguros, SA	6.552,64	15.198,11	52	1.232,83	20.030,72
8	Seguros Logo S.A.	6.606,44	9.412,58	10	588,62	11.933,92
9	Lusitania Companhia de Seguros, SA	49.659,12	163.316,15	643	9.503,05	181.229,76
10	Macif Portugal - Companhia de Seguros S.A	8.104,32	14.241,53	120	2.032,44	18.731,77
11	Mapfre Seguros Gerais, SA	21.039,30	65.640,57	228	5.090,03	82.627,98
12	Médis - Companhia Portuguesa de Seguros de Saúde, SA	26.261,33	102.223,66	301	1.148,91	137.613,45
13	Multicare – Seguros de Saúde, S.A	28.901,95	151.627,98	186	2.210,57	183.649,59
14	Mútua Pescadores - Sociedade Mutua Seguros	1.377,60	3.951,24	64	935,51	5.957,28
15	N Seguros, S.A	1.958,17	10.042,31	46	933,23	10.868,80
16	Ocidental Seguros - Companhia Portuguesa de Seguros de Saúde, SA	21.063,29	39.897,37	191	2.993,58	66.451,32
17	Popular Seguros	566,27	1.742,76	73	161,60	2.811,27
18	Tranquilidade	92.962,01	203.908,30	993	27.062,36	293.233,81
19	Via Directa - Companhia de Seguros, S.A	10.820,07	27.130,34	108	2.120,02	37.080,83
20	Victoria - Seguros S.A	18.980,30	43.070,69	221	855,74	51.922,78

No que respeita ao número de colaboradores, a sua inclusão revela-se igualmente importante, pois representa o número médio de pessoas ao serviço, que influencia a gestão das organizações e, de uma forma geral, o resultado da empresa.

Relativamente aos *outputs* selecionados, o indicador Rendimento representa o valor que a empresa conseguiu obter, tendo em conta todos os gastos com a sua atividade. Uma empresa eficiente será aquela que conseguiu atingir um rendimento/proveito superior ao das outras, tendo em conta os níveis de recursos utilizados.

Os prémios adquiridos líquidos de resseguro englobam todas as quantias recebidas pelas seguradoras, excluindo a parte que cabe às empresas de resseguro. Estes prémios geralmente são conseguidos através de contratos de seguro.

Friedman e Sinuany – Stern (1998) referem que o número total de *inputs* e *outputs* a serem selecionados para a análise através da metodologia DEA, deve ser inferior a um terço do número de DMU's, o que neste caso se verifica uma vez que $(3+2) < 20/3$.

5.4 Escolha dos modelos

Os modelos DEA utilizados para a análise de desempenho das empresas sob estudo foram os modelos orientados para *inputs*, descritos no capítulo 4. Em tempos de crise e de contenção de custos fará mais sentido a utilização desta metodologia numa orientação para *inputs*, em que o objetivo é a redução de *inputs* garantindo um determinado nível de *outputs*. A orientação para *outputs* faz mais sentido numa fase de crescimento económico.

Numa primeira fase, utilizou-se o modelo CCR que admite rendimentos constantes de escala, ou seja, pressupõe-se que as empresas estão a operar no seu nível ótimo, não existindo assim, ineficiências de escala. Posteriormente e de forma a comparar os resultados, aplicar-se-á o modelo de BCC, que admite rendimentos variáveis de escala, conforme referido no capítulo anterior por (4.27) – (4.31).

Para determinar as soluções ótimas, resolvem-se um par de problemas de programação linear (primal e dual) para cada unidade decisora, obtendo assim um valor de eficiência para cada DMU. Para tal, e de forma a simplificar a resolução destes problemas de PL, utilizou-se o *software* informático, o Sistema Integrado de Apoio à Decisão (SIAD), que permite calcular os modelos clássicos da DEA.

As unidades eficientes, determinadas pelo modelo DEA, constituem a fronteira de eficiência, em relação à qual se medem as eficiências relativas das outras unidades. Estas unidades servirão de referência para as unidades ineficientes, que se encontrarão localizadas, abaixo da fronteira de eficiência.

5.5 Resultados e respetiva análise

Nesta secção apresentam-se os resultados dos modelos utilizados bem como uma análise a esses mesmos resultados. Assim, na tabela 5.2, começa-se por apresentar os resultados obtidos por aplicação do modelo CCR orientado para *inputs*. Nessa tabela, da esquerda para a direita, as duas primeiras colunas identificam as DMUs, a terceira, o nível de eficiência atingido por cada DMU, a quarta e última coluna, identifica os " *Benchmarks*" para cada unidade. Estes *Benchmarks* são as unidades operacionais que servem de referência às unidades ineficientes.

De acordo com a análise da tabela 5.2, verifica-se que através do modelo CCR orientado para *inputs,* existem 10 DMU's que são eficientes:

- ACP Mobilidade - Sociedade de Seguros de Assistência, S.A;
- AXA Seguros;
- BES Seguros;
- Crédito Agrícola Seguros;
- Europ Assistance Companhia Portuguesa de Seguros S A;
- Multicare – Seguros de Saúde, S.A;
- Mútua Pescadores - Sociedade Mutua Seguros;
- N Seguros, S.A;
- Ocidental Seguros - Companhia Portuguesa de Seguros de Saúde, SA;
- Tranquilidade.

Analisando a DMU 7, verifica-se que o nível de eficiência atingido é de 86,13% o que indica que é ineficiente. Como tal, na coluna "B*enchmarks*" são indicados as DMUs que lhe servem de referência: DMU 3, DMU 5, DMU 14 e DMU 16. Os valores associados a cada DMU correspondem às soluções ótimas do problema dual da DMU sob análise. Isto quer dizer, que representam o aumento do valor ótimo da função objetivo, se houver um incremento de uma unidade em cada recurso. Assim, para a DMU 7, a unidade que lhe serve de referência é a DMU 5 pois é a que apresenta maior valor.

Tabela 5.2 - Resultados do Modelo CCR – orientação para os *Inputs*

	DMU	Eficiência (%)	*Benchmarks*
1	ACP Mobilidade - Sociedade de Seguros de Assistência, S.A.	100,00%	1
2	AXA Seguros	100,00%	2
3	BES Seguros	100,00%	3
4	Cosec - Companhia de Seguros de Crédito	92,35%	5 (0,040223); 14 (1,355799); 18 (0,028575)
5	Crédito Agrícola Seguros	100,00%	5
6	Europ Assistance Companhia Portuguesa de Seguros S A	100,00%	6
7	Groupama Seguros, SA	86,13%	3 (0,073106); 5 (0,199658); 14 (0,113177); 16 (0,023175)
8	Seguros Logo S.A.	93,20%	2 (0,011876); 3 (0,134555)
9	Lusitania Companhia de Seguros, SA	73,00%	1 (12,456307); 3 (2,021869); 14 (1,066349); 16 (0,518779)
10	Macif Portugal - Companhia de Seguros S.A	88,70%	5 (0,057356); 14 (1,084472); 18 (0,028922)
11	Mapfre Seguros Gerais, SA	83,96%	3 (0,809747); 5 (0,140161); 14 (1,306276); 16 (0,216521)
12	Médis - Companhia Portuguesa de Seguros de Saúde, SA	90,54%	1 (10,014592); 3 (1,957588); 16 (0,056258)
13	Multicare – Seguros de Saúde, S.A	100,00%	13
14	Mútua Pescadores - Sociedade Mutua Seguros	100,00%	14
15	N Seguros, S.A	100,00%	15
16	Ocidental Seguros - Companhia Portuguesa de Seguros de Saúde, SA	100,00%	16
17	Popular Seguros	99,36%	1 (0,962477); 3 (0,023147); 14 (0,063173)
18	Tranquilidade	100,00%	18
19	Via Directa - Companhia de Seguros, S.A	87,98%	3 (0,211019); 5 (0,085801); 14 (0,397013); 16 (0,236324)
20	Victoria - Seguros S.A	74,29%	1 (3,458064); 3 (0,215659); 16 (0,523653)

Uma empresa que tenha sido considerada ineficiente neste estudo (indicador de eficiência inferior a 100%) não significa que ela seja ineficiente na realidade, implica apenas que, quando comparada com outras empresas do mesmo ramo de atividade e com o mesmo tipo de recursos e produtos, o seu desempenho relativo é inferior.

Na tabela 5.3, indicam-se os resultados obtidos pela aplicação do modelo BCCI, considerando que as empresas em estudo admitem rendimentos variáveis à escala. Esta tabela apresenta a mesma estrutura da tabela 5.2 com a exceção da penúltima coluna, que foi introduzida para mostrar os valores referentes aos retornos de escala.

Analisando a tabela 5.3, verifica-se que aplicando o modelo BCCI, o número de empresas eficientes aumentou em relação ao fornecido pelo modelo CCRI, passando de dez para doze. Esta alteração é explicada pela admissão de rendimentos variáveis de escala. Quando os rendimentos são variáveis, as empresas que operam com baixos valores de *inputs* podem ter retornos crescentes o que pode provocar, que passem de uma situação de ineficientes (pelo modelo CCR) para eficientes (no modelo BCC), conforme o exemplo da DMU 8. Pelo modelo CCRI, a DMU 8 é considerada não eficiente, pois o índice de eficiência não atinge os 100%, e quando analisada pelo modelo BCC, com os mesmos níveis de *inputs* e *outputs*, ela é eficiente. Ainda na tabela 5.3, apresenta-se a coluna dos retornos de escala. Esta coluna identifica as unidades operacionais que operam com rendimentos crescentes, decrescentes ou constantes.

Analisando algumas empresas, como por exemplo a DMU 12 em que o valor de $u^* = 0{,}069507$ indica ter retornos decrescentes de escala. Por outro lado, a DMU 8 que apresenta um valor de u* = 0,149067 indica que os seus rendimentos são crescentes à escala.

A partir desta análise verifica-se que pela aplicação do modelo BCC, as empresas conseguem explorar melhor os *inputs* e *outputs*, pois um aumento (diminuição) nos *inputs* provocará um aumento (diminuição) maior do que o proporcional, o que poderá influenciar o seu nível de eficiência dentro do grupo em análise.

De seguida, apresentam-se as soluções para o caso prático, utilizando os dados iniciais mas aplicando o método do *Cone Ratio*.

Tabela 5.3 - Resultados do Modelo BCC - orientação Input

	DMU	Eficiência (%)	Retornos de escala	*Benchmarks*
1	ACP Mobilidade - Sociedade de Seguros de Assistência, S.A.	100,00%	0,000000	1
2	AXA Seguros	100,00%	0,005403	2
3	BES Seguros	100,00%	0,000000	3
4	Cosec - Companhia de Seguros de Crédito	97,92%	-0,229659	14 (0,951348); 18 (0,048652)
5	Crédito Agrícola Seguros	100,00%	-0,127689	5
6	Europ Assistance Companhia Portuguesa de Seguros S A	100,00%	0,007132	6
7	Groupama Seguros, SA	88,26%	0,049680	1 (0,745424); 3 (0,146947); 5 (0,094972); 18 (0,012657)
8	Seguros Logo S.A.	100,00%	0,149067	8
9	Lusitania Companhia de Seguros, SA	84,17%	-0,130350	3 (0,276428); 13 (0,441878); 18 (0,281694)
10	Macif Portugal - Companhia de Seguros S.A	89,36%	-0,063168	14 (0,940662); 16 (0,018837); 18 (0,040501)
11	Mapfre Seguros Gerais, SA	86,22%	-0,103717	3 (0,824759); 16 (0,092176); 18 (0,083068)
12	Médis - Companhia Portuguesa de Seguros de Saúde, SA	100,00%	-0,069507	12
13	Multicare – Seguros de Saúde, S.A	100,00%	-0,035732	13
14	Mútua Pescadores - Sociedade Mutua Seguros	100,00%	-0,002364	14
15	N Seguros, S.A	100,00%	0,040255	15
16	Ocidental Seguros - Companhia Portuguesa de Seguros de Saúde, SA	100,00%	0,000000	16
17	Popular Seguros	99,72%	-0,074262	1 (0,914218); 3 (0,023371); 14 (0,061765); 16 (0,000646)
18	Tranquilidade	100,00%	0,000000	18
19	Via Directa - Companhia de Seguros, S.A	88,02%	0,006018	1 (0,082287); 3 (0,210877); 5 (0,094464); 14 (0,384672); 16 (0,227700)
20	Victoria - Seguros S.A	75,24%	-0,002963	1 (0,211083); 3 (0,221510); 16 (0,567407)

Para a aplicação do método do *Cone Ratio,* consideraram-se três DMU's eficientes em ambos os modelos (CCR e BCC): DMU1, DMU5 e DMU14. Posteriormente, selecionaram-se três pesos para os *inputs* e dois pesos para os *outputs*, de forma a serem utilizados para o cálculo da matriz *Cone Ratio*. Estes pesos correspondem às soluções ótimas das DMU's escolhidas.

A matriz *Cone Ratio*, conforme indicado no capítulo anterior, surge então da multiplicação dos pesos dos *inputs* e dos pesos dos *outputs* selecionados, com os dados iniciais de cada DMU sob análise. Após este processo, calculam-se as eficiências para cada empresa. Na tabela 5.4 pode-se verificar os novos valores de eficiência de cada DMU.

Nessa tabela, as duas primeiras colunas da esquerda para a direita, identificam as DMUs em análise; as colunas " Eficiência CCR" e " Eficiência CCRI_CR" indicam as eficiências obtidas pelo modelo CCRI e pelo método *Cone Ratio* aplicado àquele modelo. Na última coluna indicam-se as DMUs que servem de referência às ineficientes.De acordo com os dados fornecidos pela tabela, em análise, verifica-se que o nível de eficiência das DMU's em estudo diminuiu, assim como o número de DMU's consideradas eficientes, passando de dez pelo modelo CCRI, para quatro através do método *Cone Ratio*. Este acontecimento é justificado, conforme referido no capítulo 4, pelas restrições impostas aos pesos de *inputs* e *outputs* associados a cada DMU.

Assim, as empresas consideradas eficientes pelo método CCRI_CR são:

- BES Seguros;
- Crédito Agrícola Seguros;
- Mútua Pescadores - Sociedade Mutua Seguros;
- N Seguros, S.A;

Através da utilização do método do *Cone Ratio*, a eficiência atingida é mais "refinada" do que nos modelos clássicos sem restrições. Perde-se a característica de flexibilidade total na escolha de pesos dos *inputs* e *outputs*, que originava muitas vezes a que os *inputs* menos importantes definissem a eficiência da DMU em análise, para uma avaliação mais restrita e direcionada para os objetivos da empresa.

No método do *Cone Ratio*, adicionam-se restrições aos *inputs* e *outputs* das DMU's, reduzindo assim, a área admissível dos pesos. Isto quer dizer, que os pesos associados aos *inputs* e aos *outputs* originados nesta nova avaliação, passam a pertencer a uma área restrita. Como tal, o número de DMU's eficientes, diminui. Esta é uma das grandes diferenças, encontradas no método do *Cone Ratio* em comparação com os modelos clássicos da DEA.

Tabela 5.4 - Resultado do Método *Cone Ratio* através do modelo CCRI

DMUs		Eficiência		*Benchmark CR*
		CCRI	CCRI_CR	
1	ACP Mobilidade - Sociedade de Seguros de Assistência, S.A.	100,00%	89,61%	14 (0,111022)
2	AXA Seguros	100,00%	86,29%	3 (3,711650); 14 (9,044779)
3	BES Seguros	100,00%	100,00%	3
4	Cosec - Companhia de Seguros de Crédito	92,35%	92,16%	3 (0,117672); 5 (0,001766); 14 (1,940131)
5	Crédito Agrícola Seguros	100,00%	100,00%	5
6	Europ Assistance Companhia Portuguesa de Seguros S A	100,00%	65,67%	3 (0,425846); 14 (2,058451)
7	Groupama Seguros, SA	86,13%	85,95%	3 (0,069555); 5 (0,222518); 14 (0,132239)
8	Seguros Logo S.A.	93,20%	80,31%	3 (0,045828); 5 (0,130161)
9	Lusitania Companhia de Seguros, SA	73,00%	70,58%	3 (1,728812); 5 (0,530618); 14 (4,349528)
10	Macif Portugal - Companhia de Seguros S.A	88,70%	86,82%	3 (0,035382); 5 (0,107285); 14 (1,578720)
11	Mapfre Seguros Gerais, SA	83,96%	83,56%	3 (0,774218); 5 (0,356466); 14 (1,479728);
12	Médis - Companhia Portuguesa de Seguros de Saúde, SA	90,54%	74,21%	3 (1,493864); 5 (0,063867); 14 (2,015117)
13	Multicare – Seguros de Saúde, S.A	100,00%	86,01%	3 (2,478167)
14	Mútua Pescadores - Sociedade Mutua Seguros	100,00%	100,00%	14
15	N Seguros, S.A	100,00%	100,00%	15
16	Ocidental Seguros - Companhia Portuguesa de Seguros de Saúde, SA	100,00%	97,15%	5 (0,785656); 14 (1,316223)
17	Popular Seguros	99,36%	78,60%	14 (0,346698)
18	Tranquilidade	100,00%	99,97%	3 (2,849912); 14 (18,977013)
19	Via Directa - Companhia de Seguros, S.A	87,98%	86,95%	3 (0,174233); 5 (0,319955); 14 (0,587143)
20	Victoria - Seguros S.A	74,29%	63,04%	3 (0,080607); 5 (0,453643); 16 (1,077228)

Seguidamente, utilizando os mesmos dados, apresenta-se na tabela 5.5, os resultados obtidos com a aplicação do método do *Cone Ratio*, quando as empresas admitem rendimentos variáveis de escala.

Tabela 5.5 - Resultado do Método *Cone Ratio* através do modelo BCCI

DMUs		Eficiência		
		BCCI	**BCCI_CR**	***Benchmark CR***
1	ACP Mobilidade - Sociedade de Seguros de Assistência, S.A.	100,00%	100,00%	1
2	AXA Seguros	100,00%	100,00%	2
3	BES Seguros	100,00%	100,00%	3
4	Cosec - Companhia de Seguros de Crédito	97,92%	97,92%	14 (0,951348; 18 (0,048652)
5	Crédito Agrícola Seguros	100,00%	100,00%	5
6	Europ Assistance Companhia Portuguesa de Seguros S A	100,00%	68,20%	3 (0,334275); 14 (0,613077); 18 (0,052648
7	Groupama Seguros, SA	88,26%	85,97%	3 (0,227169); 5 (0,772831);
8	Seguros Logo S.A.	100,00%	80,68%	3 (0,0645581); 14 (0,935442)
9	Lusitania Companhia de Seguros, SA	84,17%	79,43%	3 (0,360068); 13 (0,314981); 18 (0,324951)
10	Macif Portugal - Companhia de Seguros S.A	89,36%	89,15%	14 (0,956263); 18 (0,043737)
11	Mapfre Seguros Gerais, SA	86,22%	84,32%	3 (0,694978); 14 (0,185893) 18 (0,119128);
12	Médis - Companhia Portuguesa de Seguros de Saúde, SA	100,00%	83,96%	3 (0,665604); 13 (0,217914); 18 (0,116482)
13	Multicare – Seguros de Saúde, S.A	100,00%	100,00%	13
14	Mútua Pescadores - Sociedade Mutua Seguros	100,00%	100,00%	14
15	N Seguros, S.A	100,00%	100,00%	15
16	Ocidental Seguros - Companhia Portuguesa de Seguros de Saúde, SA	100,00%	97,22%	5 (0,231158); 14 (0,639429); 18 (0,129413)
17	Popular Seguros	99,72%	80,75%	1 (0,734891); 14 (0,265109)
18	Tranquilidade	100,00%	100,00%	18
19	Via Directa - Companhia de Seguros, S.A	88,02%	86,95%	3 (0,170874); 5 (0,288996); 14 (0,531846); 18 (0,008285)
20	Victoria - Seguros S.A	75,24%	63,07%	3 (0,051285); 5 (0,220852); 14 (0,661558); 18 (0,062305)

Analisando a tabela 5.5, constata-se que o número de DMU's eficientes, a partir do modelo BCCI_CR diminuiu face ao modelo BCCI, passando de doze DMU's eficientes, para oito. Aplica-se a justificação dada anteriormente na análise à tabela 5.4.

Os resultados indicados na tabela 5.5 mostram que o número de DMU's eficientes, pelo método *Cone Ratio*, quando os rendimentos são variáveis é superior ao do modelo CCRI aplicando o mesmo método. Na avaliação do modelo CCRI_CR foram consideradas eficientes, quatro empresas, enquanto na avaliação BCCI_CR, este número aumenta para oito. As DMU's classificadas como eficientes, pelo modelo BCCI_CR são:

- ACP Mobilidade - Sociedade de Seguros de Assistência, S.A.;
- AXA Seguros;
- BES Seguros;
- Crédito Agrícola Seguros;
- Multicare – Seguros de Saúde, S.A;
- Mútua Pescadores - Sociedade Mutua Seguros;
- N Seguros, S.A
- Tranquilidade.

Assim, e conforme foi dito anteriormente, as empresas em que os rendimentos são variáveis à escala, conseguem maiores níveis de eficiência, quer através dos modelos clássicos quer aplicando o modelo de restrição do *Cone Ratio*.

6. CONCLUSÕES

Ao longo dos últimos anos, as organizações têm enfrentado constantes desafios, decorrentes das alterações no ambiente organizacional. Essas alterações, instigadas pela forte competitividade de mercado, provocam uma necessidade de alterar a estratégia da organização de forma a manter-se em contextos dinâmicos e competitivos. Para tal, os gestores recorrem cada vez mais à Contabilidade de Gestão, uma das ferramentas de apoio na tomada de decisões, para obter informações sobre o desempenho organizacional e o seu posicionamento atual.

A contabilidade de gestão é assim vista como um mecanismo de análise, interpretação e divulgação de informação de suporte à realização dos objetivos da organização. Por esse motivo é de extrema importância para a tomada de decisão.

Por outro lado, as alterações no ambiente organizacional, requerem novas formas de análise de desempenho e consequentemente, os métodos tradicionais já existentes e baseados exclusivamente em dados financeiros, passam a ser inadequados.

Atualmente, as novas métricas de avaliação de desempenho organizacional, que vieram substituir de alguma forma os métodos tradicionais de avaliação, contemplam, na sua análise indicadores financeiros e não financeiros. Esta forma de análise abrange um maior número de indicadores, possibilitando que a análise de desempenho organizacional seja mais rica de informação, obtendo assim, resultados mais adequados face aos objetivos da organização.

Entre os vários sistemas de avaliação orientados para uma visão de melhoria contínua e gestão estratégica, destaca-se o *Balanced Scorecard* cujo conceito foi desenvolvido por Robert Kaplan e David Norton (1992 e 1996). Este modelo tem em consideração quatro perspetivas essenciais no processo de avaliação organizacional: tradução da visão e da estratégia, comunicação e ligação da estratégia aos objetivos, planeamento do negócio e aprendizagem estratégica. O *Balanced Scorecard* apresenta assim, uma estrutura de gestão que de certa forma, complementa as medidas financeiras do passado com as medidas referentes ao desempenho futuro.

No que respeita aos métodos de análise de desempenho, verifica-se que face às exigências de mercado, outras técnicas têm sido consideradas para a avaliação da *performance* organizacional, como por exemplo a programação linear. A partir desta ferramenta de Investigação Operacional, surge assim a *Data Envelopment Analysis*.

A *Data Envelopment Analysis* revela-se uma das ferramentas mais adequada para avaliar a eficiência em comparação com outras métricas de análise. Tem como princípio básico, a medição e comparação do desempenho das unidades produtivas, considerando a relação *inputs* e *outputs*.

A DEA otimiza cada observação individual com o objetivo de calcular uma fronteira de eficiência. Permite calcular um índice de eficiência, que compara o desempenho atual da DMU, com a combinação mais eficiente das outras empresas sob análise. Identifica, para cada unidade ineficiente, a unidade ou as unidades eficientes que servem referência, permitindo assim às organizações adotarem melhores práticas de gestão.

O objetivo deste estudo foi demonstrar a potencialidade da metodologia DEA como ferramenta de análise, capaz de agregar múltiplas dimensões e metodologias, tornando-a numa técnica acessível para avaliar o desempenho relativo das empresas. E ainda, mostrar a sua importância no apoio ao processo de tomada de decisão, relacionando-a com a contabilidade de gestão.

Verificou-se, através do presente estudo, que esta técnica de análise baseia-se na utilização de múltiplos *inputs* e *outputs* e deverá ser aplicada a grupos operacionais homogéneos, para avaliar a eficiência. A técnica DEA utiliza os seus melhores resultados como elementos de comparação (*Benchmarking*), consegue discriminar, na sua avaliação, as unidades eficientes e ineficientes face ao objetivo proposto, auxiliando assim os gestores, nas decisões de investimento e na alocação eficiente de recursos.

Neste estudo, foram analisados os modelos clássicos que fazem parte da técnica DEA e identificadas as principais características de cada um. Para um maior poder de discriminação, apresentou-se o modelo *Cone Ratio* que permite fazer uma avaliação mais restrita, pois reduz o espaço admissível dos pesos associados aos *inputs* e aos *outputs*.

Em ambientes incertos e de acrescida concorrência, as organizações, para garantir a sua eficiência nas suas unidades de produção, deverão estar dotadas de instrumentos de avaliação que lhes possibilitem um diagnóstico correto e que ajudem, de alguma forma, a atingir as metas para melhorar o seu desempenho e a sua posição competitiva. Como tal, o recurso à utilização da técnica DEA é uma boa metodologia, não deixando de considerar as restantes abordagens de avaliação.

Esta técnica de análise tem sido aplicada a diversos setores, nomeadamente, ao setor bancário, automóvel, comércio e retalho e ao setor público. Assim, para permitir uma maior e melhor compreensão, sugere-se a elaboração de um trabalho quantitativo, com um número maior de empresas, de forma a poder generalizar os resultados obtidos. Outra aplicação que poderá ser interessante desenvolver neste tema, é a formulação de novos modelos que complementem esta técnica de análise organizacional.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AFONSO, Anabela; NUNES, Carla – **Estatística e Probabilidades – Aplicações e soluções em SPSS**. Lisboa: Escolar Editora, 2011. ISBN 978-972-592-299-6.

ANGULO MEZA, Lidia, BIONDI NETO, Luiz, SOARES DE MELLO, João Carlos C. B., GOMES, Eliane Gonçalves, COELHO, Pedro Henrique Gouvêa. **SIAD - Sistema Integrado de Apoio à Decisão: Uma Implementação Computacional de Modelos de Análise Envoltória de Dados**. Relatórios de Pesquisa em Engenharia de Produção, v. 3, n. 20. Niterói: Universidade Federal Fluminense - Mestrado em Engenharia de Produção, 2003. http://www.producao.uff.br/rpep/relpesq303/relpesq_303_20.doc.

BAZARAA, S.B.; JARVIS, J. J.; SHERALI, H. D. – **Linear Programming and NetworkFlows**. Jhon Wiley and Sons, 1990

BHAGAVATH, Venkatesh - **Technical Efficiency Measurement by Data Envelopment Analysis: An Application in Transportation**. Alliance Journal of Business Research, 2006. Pp. 60 – 72.

BORGES, António; RODRIGUES, José – **Contabilidade e Finanças para a Gestão**. 4ª Edição. Lisboa: Áreas Editora, 2008. ISBN 978-989-8058-36-2.

CARVALHO, Carlos Jorge – **Simbiose entre DEA e BSC na melhoria do desempenho dos bancos: o caso dos gabinetes de empresas do Banco Alfa**. Tese de Doutoramento. Algarve: ISCTE Business School – Instituto Universitário de Lisboa. 2011;

CHARNES, Abraham.; COOPER, William W.; RHODES, E. - **Measuring the efficiency of decision making units.** European Journal of Operational Research, 1978. pp. 429 – 444.

CIMA - Chartered Institute of Management Accounting. **Management accounting in your business** [Em linha]. (Set. 2013). [Consult. Em 03 Set.2013]. Disponível em: http://www.cimaglobal.com/CIMA-in-business/How-MA-supports-your-business-/.

COOPER, William W.; SEIFORD, Lawrence M.; ZHU, Joe - **Data Envelopment Analysis: History, Models and Interpretations.** In Handbook on Data Envelopment Analysis. Kluwer Academic Publishers, Boston, 2004. pp. 2 – 39.

COOPER, William W.; SEIFORD, Lawrence M.; TONE, Kaoru – **Data Envelopment Analysis: A comprehensive Text With Models, Applications, References and DEA - Solver Software**. New York: Springer Science, 2007. ISBN 978-0387-45281-4.

FERNANDES, Maria C. Vaz - **Desenvolvimento de um sistema de avaliação e melhoria de desempenho no sector do retalho.** Tese de Doutoramento. Porto: Faculdade de Engenharia – Universidade do Porto, 2007.

FRIEDMAN, Lea; SINUANY – STERN, Zilla - **Combining ranking scales and selecting variables in the DEA context: the case of Industrial Branches**. Computers and Operations Research, 1998. Vol. 25 (9), pp. 781 – 791.

GHALAYINI, A. M. e NOBLE, J. S **- The Changing Basis of Performance Measurement**, International. Journal of Operations & Production Management, 1996. Vol.16 (8), pp. 63-80.

HILLIER, Frederick S.; LIEBERMAN, Gerald J. – Teoria da Dualidade e Análise de Sensibilidade. In **Introdução à pesquisa operacional**. 8ª Edição. São Paulo: McGraw – Hill, 2006. ISBN 85-868046-81. pp. 203 - 264.

HORNGREN, Charles T.; DATAR, Srikant M.; RAJAN, Madhav V. - **Cost Accounting: A managerial Emphasis.** 14ª Edição. New Jersey: Prentice Hall, 2000. ISBN 978-0-13-210917-8.

IFAC – International Federation of Accountants. IMAP1: **EVOLUTION AND CHANGE IN MANAGEMENT ACCOUNTING.** [Em linha]. [Consult. Em 10Nov.2013].Disponível em:http://www.mia.org.my/handbook/guide/imap/imap_1.htm#EVOLUTION%20AND%20CHANGE%20IN%20MANAGEMENT%20ACCOUNTING.

INE – Instituto Nacional de Estatística – **Consulta de CAE das empresas**. [Em linha]. [Consult. Em14Jan.2014]. Disponível em: http://webinq.ine.pt/public/files/consultacae.aspx?id=474.

ISP – Instituto de Seguros de Portugal - **Principais indicadores das empresas de seguros**. [Em linha]. [Consult. Em 14 Jan.2014]. Disponível em:http://www.isp.pt/NR/exeres/A66FFB60-757B-4CD9-857E-1140929905F5.htm.

KAPLAN, R. S. e NORTON, D. P. – **The Balanced Scorecard – Measures that Drive Performance.** Harvard Business Review. January – February, 1992. pp. 71 – 79.

KAPLAN, R. S. e NORTON, D. P. – **Using the Balanced Scorecard as a Strategic Management System.** Harvard Business. Review. January – February, 1996. pp. 1 – 12.

KAPLAN, R. S. e NORTON, D. P. - **Balanced Scorecard: A Estratégia em Acção**. 11ª Edição. Rio de Janeiro: Editora Campus, Lda., 1997. ISBN 85-352-0149-1.

KASSAI, Sílvia - **Utilização da Análise Envoltória de Dados (DEA) na Análise de Demonstrações Contábeis**. Tese (Doutoramento). Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade. Universidade de São Paulo. 2002

NABAIS, Carlos; NABAIS, Francisco – **Prática Financeira: Análise Económica e Financeira** – Manual práctico. Lousã: Lidel – Edições Técnicas, limitada, 2004. ISBN 972-757-303-7

NEELY, Andy; KENNERLY, M. - **A framework of the factors affecting the evolution of performance measurement systems.** International Journal of Operations & Production Management. 2002.

NEELY, Andy – **Avaliação do Desempenho das Empresas: Porquê, o Quê e Como**. Lisboa: Editoral Caminho, SA, 2002. ISBN 972-21-1496-4

NEVES, João Carvalho – **Análise Financeira: Técnicas fundamentais**. 15ª Edição. Lisboa: Texto Editora, 2004.

NEVES, Juliana Miranda – **A programação linear no ensino secundário**. Tese de Mestrado. Aveiro: Universidade de Aveiro, 2011.

NETER, J.; KUTNER, M.; NACHTSHEIM, C.; WASSERMAN, W. – **Applied Linear Statistical Models.** New York: McGraw – Hill Companies, Inc., 1996

PESTANA, Maria Helena; GAGEIRO, João Nunes – **Descobrindo a Regressão com a complementaridade do SPSS.** Lisboa: Edições Sílabo, Lda, 2005. ISBN 972-618-394-4

RODRIGUES, Jorge - **Avaliação do desempenho das organizações**. Lisboa: Escolar Editora, 2010. ISBN 978-972-592-291-0

SHERMAN, H. David; ZHU, Joe - **Service Productivity Management: Improving Service Performance using Data Envelopment Analysis (DEA).** Chapter 2: Data Envelopment Analysis Explained. Vol. XXII. 2006. ISBN 978-0-387-33211-6

Sistema de Normalização Contabilística - SNC. 4ª Edição. Porto: Porto Editora, 2013. ISBN 978-972-0-01791-8;

MACEDO, Marcelo Silva; CASA NOVA, Sílvia P. Castro; ALMEIDA, Katia - **Mapeamento e análise bibliométrica da utilização da Análise Envoltória de Dados (DEA) em estudos em contabilidade e administração.** Brasília: Contabilidade, Gestão e Governança, 2009. ISBN 1984-3925.

VAZ, Clara B.; OLIVEIRA, José F. – Análise da eficiência das microempresas do setor do retalho no interior de Portugal: uma aplicação Data Envelopment Analysis. In **Livro de Atas do XVI Congresso da Associação Portuguesa de Investigação Operacional**. Bragança. O congresso da APDIO, 2013. ISBN 978-972-745-154-8. Pp. 145 – 153.

WISTON, W. – **Operations Research: Applications and Algorithms**. Duxbury Press, 1994.

APÊNDICES

APÊNCIDE A - Seguradoras Ramo Não Vida – CAE

Empresas em análise	Nº colaboradores (2012)	NIF	CAE	Observações
ACP Mobilidade - Sociedade de Seguros de Assistência, S.A.	15	501 506 276	65120	Pelos Estatutos Sociais da empresa.
AXA Seguros	139	503 454 109	65120	Relatório e Contas 2012
BES Seguros	57	503 718 092	65120	Relatório e Contas 2012
Cosec - Companhia de Seguros de Crédito	131	500 726 000	65120	Enviado email
Crédito Agrícola Seguros	145	503 384 089	65120	Relatório e Contas 2012
Europ Assistance Companhia Portuguesa de Seguros S A	327	503 034 975	65120	Relatório e Contas 2012
Groupama Seguros, SA	52	502 661 321	65120	Relatório e Contas 2012
Seguros Logo S.A.	10	508 278 600	65120	Relatório e Contas 2012
Lusitania Companhia de Seguros, SA	643	501 689 168	65120	Relatório e Contas 2012
Macif Portugal - Companhia de Seguros S.A	120	503 640 549	65120	Relatório e Contas 2012
Mapfre Seguros Gerais, SA	228	502 245 816	65120	Relatório e Contas 2012
Médis - Companhia Portuguesa de Seguros de Saúde, SA	301	503 496 944	65120	Relatório e Contas 2012
Multicare – Seguros de Saúde, S.A	186	507 516 362	65120	Relatório e Contas 2012
Mútua Pescadores - Sociedade Mutua Seguros	64	500 726 477	65120	Relatório e Contas 2012
N Seguros, S.A	46	508 310 334	65120	Relatório e Contas 2012
Ocidental Seguros - Companhia Portuguesa de Seguros de Saúde, SA	191	501 836 918	65120	Relatório e Contas 2012
Popular Seguros	73	507 592 034	65120	Relatório e Contas 2012
Tranquilidade	993	500 940 231	65120	Relatório e Contas 2012
Via Directa - Companhia de Seguros, S.A	108	504 011 944	65120	Relatório e Contas 2012
Victoria - Seguros S.A	221	506 333 027	65120	Relatório e Contas 2012

APÊNCIDE B - Resultados do Modelo CCR – orientação *input* (Pesos)

DMUs		Pesos				
		***Input* 1**	***Input* 2**	***Input* 3**	***Output* 1**	***Output* 2**
1	ACP Mobilidade - Sociedade de Seguros de Assistência, S.A.	0,000000	0,002038	0,000000	0,000000	0,000991
2	AXA Seguros	0,000000	0,000004	0,000369	0,000023	0,000002
3	BES Seguros	0,000036	0,000014	0,000000	0,000000	0,000016
4	Cosec - Companhia de Seguros de Crédito	0,000000	0,000056	0,001611	0,000155	0,000030
5	Crédito Agrícola Seguros	0,000004	0,000019	0,000614	0,000055	0,000012
6	Europ Assistance Companhia Portuguesa de Seguros S A	0,000099	0,000005	0,000000	0,000000	0,000020
7	Groupama Seguros, SA	0,000013	0,000056	0,001214	0,000107	0,000036
8	Seguros Logo S.A.	0,000000	0,000076	0,028436	0,000000	0,000078
9	Lusitania Companhia de Seguros, SA	0,000002	0,000005	0,000055	0,000005	0,000004
10	Macif Portugal - Companhia de Seguros S.A	0,000000	0,000057	0,001615	0,000155	0,000030
11	Mapfre Seguros Gerais, SA	0,000003	0,000013	0,000287	0,000025	0,000009
12	Médis - Companhia Portuguesa de Seguros de Saúde, SA	0,000004	0,000009	0,000103	0,000000	0,000007
13	Multicare – Seguros de Saúde, S.A	0,000027	0,000000	0,001242	0,000000	0,000005
14	Mútua Pescadores - Sociedade Mutua Seguros	0,000288	0,000000	0,009425	0,001069	0,000000
15	N Seguros, S.A	0,000465	0,000009	0,000000	0,000301	0,000066
16	Ocidental Seguros - Companhia Portuguesa de Seguros de Saúde, SA	0,000000	0,000024	0,000191	0,000027	0,000014
17	Popular Seguros	0,000726	0,000338	0,000000	0,000388	0,000331
18	Tranquilidade	0,000000	0,000004	0,000123	0,000012	0,000002
19	Via Directa - Companhia de Seguros, S.A	0,000007	0,000031	0,000667	0,000060	0,000020
20	Victoria - Seguros S.A	0,000008	0,000019	0,000225	0,000000	0,000014

APÊNCIDE C – Resultados do Modelo BCC – orientação *inputs* (Pesos)

DMUs		Pesos				
		Input **1**	***Input*** **2**	***Input*** **3**	***Output*** **1**	***Output*** **2**
1	ACP Mobilidade - Sociedade de Seguros de Assistência, S.A.	0,000000	0,002038	0,000000	0,000000	0,000991
2	AXA Seguros	0,000000	0,000004	0,000389	0,000026	0,000002
3	BES Seguros	0,000036	0,000014	0,000000	0,000000	0,000016
4	Cosec - Companhia de Seguros de Crédito	0,000000	0,000072	0,000000	0,000548	0,000000
5	Crédito Agrícola Seguros	0,000000	0,000020	0,000909	0,000019	0,000016
6	Europ Assistance Companhia Portuguesa de Seguros S A	0,000098	0,000005	0,000000	0,000000	0,000190
7	Groupama Seguros, SA	0,000000	0,000053	0,003803	0,000255	0,000026
8	Seguros Logo S.A.	0,000000	0,000095	0,010729	0,000622	0,000041
9	Lusitania Companhia de Seguros, SA	0,000020	0,000000	0,000000	0,000037	0,000003
10	Macif Portugal - Companhia de Seguros S.A	0,000000	0,000070	0,000000	0,000126	0,000370
11	Mapfre Seguros Gerais, SA	0,000008	0,000013	0,000000	0,000000	0,000012
12	Médis - Companhia Portuguesa de Seguros de Saúde, SA	0,000005	0,000008	0,000000	0,000000	0,000008
13	Multicare – Seguros de Saúde, S.A	0,000010	0,000000	0,003804	0,000000	0,000006
14	Mútua Pescadores - Sociedade Mutua Seguros	0,000288	0,000000	0,009425	0,001071	0,000000
15	N Seguros, S.A	0,000444	0,000013	0,000000	0,000228	0,000069
16	Ocidental Seguros - Companhia Portuguesa de Seguros de Saúde, SA	0,000000	0,000024	0,000191	0,000027	0,000014
17	Popular Seguros	0,000275	0,000485	0,000000	0,000163	0,000372
18	Tranquilidade	0,000000	0,000003	0,000319	0,000020	0,000002
19	Via Directa - Companhia de Seguros, S.A	0,000006	0,000031	0,000745	0,000570	0,000020
20	Victoria - Seguros S.A	0,000011	0,000018	0,000000	0,000000	0,000015

APÊNCIDE D – Matriz *Cone Ratio*

DMUs		Matriz *Cone Ratio*				
		***Input* 1**	***Input* 2**	***Input* 3**	***Output* 1**	***Output* 2**
1	ACP Mobilidade - Sociedade de Seguros de Assistência, S.A.	0,999769	0,019519	0,212501	0,013649	0,029873
2	AXA Seguros	498,120142	5,149369	31,558384	4,594773	22,005948
3	BES Seguros	88,911344	0,905020	3,497361	0,938345	3,491885
4	Cosec - Companhia de Seguros de Crédito	28,472462	0,369826	2,958831	0,350736	2,358883
5	Crédito Agrícola Seguros	87,057454	0,985766	7,494628	1,018571	4,383847
6	Europ Assistance Companhia Portuguesa de Seguros S A	82,894393	1,005816	5,402120	0,652656	0,737557
7	Groupama Seguros, SA	30,973744	0,346903	2,377260	0,308175	1,317899
8	Seguros Logo S.A.	19,182831	0,211405	1,996903	0,175581	0,629236
9	Lusitania Companhia de Seguros, SA	332,838321	3,696445	20,362102	2,697425	10,158756
10	Macif Portugal - Companhia de Seguros S.A	29,024232	0,376686	3,465043	0,336565	2,172678
11	Mapfre Seguros Gerais, SA	133,775472	1,471320	8,208217	1,271487	5,441239
12	Médis - Companhia Portuguesa de Seguros de Saúde, SA	208,331815	2,232109	10,400189	1,714551	1,228184
13	Multicare – Seguros de Saúde, S.A	309,017816	3,110743	10,076811	2,325376	2,363099
14	Mútua Pescadores - Sociedade Mutua Seguros	8,052623	0,119880	0,999949	0,122940	1,000057
15	N Seguros, S.A	20,466232	0,226881	0,997503	0,181753	0,997621
16	Ocidental Seguros - Companhia Portuguesa de Seguros de Saúde, SA	81,310845	0,959577	7,866401	0,962063	3,200134
17	Popular Seguros	3,551740	0,080199	0,851111	0,042623	0,172751
18	Tranquilidade	415,565124	4,855808	36,132084	5,007235	28,929661
19	Via Directa - Companhia de Seguros, S.A	55,291625	0,625069	4,134081	0,561571	2,266306
20	Victoria - Seguros S.A	87,778072	1,029958	7,549253	0,670139	0,914787

APÊNCIDE E- Resultado do Método *Cone Ratio* CCRI (Pesos)

		Pesos				
DMUs		***Input 1***	***Input 2***	***Input 3***	***Output 1***	***Output 2***
1	ACP Mobilidade - Sociedade de Seguros de Assistência, S.A.	1,002315	0,000000	0,000000	65,652087	0,000000
2	AXA Seguros	0,000000	0,194199	0,000000	0,185562	0,000468
3	BES Seguros	0,000000	0,000000	0,285930	1,065706	0,000000
4	Cosec - Companhia de Seguros de Crédito	0,000925	2,632744	0,000000	2,626145	0,000205
5	Crédito Agrícola Seguros	0,000361	0,982344	0,000028	0,981768	0,000000
6	Europ Assistance Companhia Portuguesa de Seguros S A	0,008421	0,000000	0,055901	1,006227	0,000000
7	Groupama Seguros, SA	0,001026	2,790539	0,000080	2,788902	0,000000
8	Seguros Logo S.A.	0,001633	4,582107	0,000000	4,574078	0,000000
9	Lusitania Companhia de Seguros, SA	0,000096	0,261825	0,000007	0,261671	0,000000
10	Macif Portugal - Companhia de Seguros S.A	0,000908	2,584742	0,000000	2,578264	0,000202
11	Mapfre Seguros Gerais, SA	0,000242	0,657585	0,000019	0,657199	0,000000
12	Médis - Companhia Portuguesa de Seguros de Saúde, SA	0,000159	0,433094	0,000012	0,432840	0,000000
13	Multicare – Seguros de Saúde, S.A	0,000000	0,000000	0,099238	0,369875	0,000000
14	Mútua Pescadores - Sociedade Mutua Seguros	0,124183	0,000000	0,000000	0,000000	0,999943
15	N Seguros, S.A	0,000001	0,000000	1,002486	0,000000	1,002385
16	Ocidental Seguros - Companhia Portuguesa de Seguros de Saúde, SA	0,000370	1,010746	0,000000	1,009845	0,000000
17	Popular Seguros	0,281552	0,000000	0,000000	18,441787	0,000000
18	Tranquilidade	0,000000	0,205939	0,000000	0,196780	0,000496
19	Via Directa - Companhia de Seguros, S.A	0,000569	1,549170	0,000044	1,548262	0,000000
20	Victoria - Seguros S.A	0,000346	0,941237	0,000027	0,940685	0,000000

	DMUs	*Input 1*	*Input 2*	*Input 3*	*Output 1*	*Output 2*
1	ACP Mobilidade - Sociedade de Seguros de Assistência, S.A.	1,002315	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
2	AXA Seguros	0,000000	0,000000	0,031687	0,245196	0,006325
3	BES Seguros	0,000000	0,000000	0,285930	1,356323	0,000000
4	Cosec - Companhia de Seguros de Crédito	0,035122	0,000000	0,000000	0,000000	0,512450
5	Crédito Agrícola Seguros	0,000563	0,960364	0,000576	0,982284	0,000000
6	Europ Assistance Companhia Portuguesa de Seguros S A	0,009665	0,000000	0,036811	1,071127	0,000000
7	Groupama Seguros, SA	0,000000	2,882650	0,000000	2,775656	0,000000
8	Seguros Logo S.A.	0,000000	4,730257	0,000000	4,554686	0,000000
9	Lusitania Companhia de Seguros, SA	0,001219	0,000000	0,029178	0,331920	0,000000
10	Macif Portugal - Companhia de Seguros S.A	0,034454	0,000000	0,000000	2,874606	0,000000
11	Mapfre Seguros Gerais, SA	0,006059	0,000000	0,023078	0,671535	0,000000
12	Médis - Companhia Portuguesa de Seguros de Saúde, SA	0,002187	0,000000	0,052336	0,595367	0,000000
13	Multicare – Seguros de Saúde, S.A	0,001818	0,000000	0,043494	0,494774	0,000000
14	Mútua Pescadores - Sociedade Mutua Seguros	0,124183	0,000000	0,000000	0,000000	0,999943
15	N Seguros, S.A	0,000038	0,000000	1,001728	0,000000	0,813325
16	Ocidental Seguros - Companhia Portuguesa de Seguros de Saúde, SA	0,000589	0,992242	0,000000	1,011218	0,000000
17	Popular Seguros	0,281552	0,000000	0,000000	18,174703	0,000000
18	Tranquilidade	0,002406	0,000000	0,000000	0,000000	0,035111
19	Via Directa - Companhia de Seguros, S.A	0,000888	1,515275	0,000909	1,549861	0,000000
20	Victoria - Seguros S.A	0,000540	0,920879	0,000552	0,941898	0,000000

APÊNCIDE F - Resultado do Método *Cone Ratio* BCCI (Pesos)

		Pesos					
DMUs		***Input 1***	***Input 2***	***Input 3***	***Output 1***	***Output 2***	***u****
1	ACP Mobilidade - Sociedade de Seguros de Assistência, S.A.	1,002315	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	1,000000
2	AXA Seguros	0,000000	0,000000	0,031687	0,245196	0,006325	-0,265813
3	BES Seguros	0,000000	0,000000	0,285930	1,356323	0,000000	-0,272698
4	Cosec - Companhia de Seguros de Crédito	0,035122	0,000000	0,000000	0,000000	0,512450	-0,229657
5	Crédito Agrícola Seguros	0,000563	0,960364	0,000576	0,982284	0,000000	-0,000526
6	Europ Assistance Companhia Portuguesa de Seguros S A	0,009665	0,000000	0,036811	1,071127	0,000000	-0,017050
7	Groupama Seguros, SA	0,000000	2,882650	0,000000	2,775656	0,000000	0,004333
8	Seguros Logo S.A.	0,000000	4,730257	0,000000	4,554686	0,000000	0,007110
9	Lusitania Companhia de Seguros, SA	0,001219	0,000000	0,029178	0,331920	0,000000	-0,100987
10	Macif Portugal - Companhia de Seguros S.A	0,034454	0,000000	0,000000	2,874606	0,000000	-0,075959
11	Mapfre Seguros Gerais, SA	0,006059	0,000000	0,023078	0,671535	0,000000	-0,010689
12	Médis - Companhia Portuguesa de Seguros de Saúde, SA	0,002187	0,000000	0,052336	0,595367	0,000000	-0,181141
13	Multicare – Seguros de Saúde, S.A	0,001818	0,000000	0,043494	0,494774	0,000000	-0,150536
14	Mútua Pescadores - Sociedade Mutua Seguros	0,124183	0,000000	0,000000	0,000000	0,999943	0,000000
15	N Seguros, S.A	0,000038	0,000000	1,001728	0,000000	0,813325	0,188609
16	Ocidental Seguros - Companhia Portuguesa de Seguros de Saúde, SA	0,000589	0,992242	0,000000	1,011218	0,000000	-0,000629
17	Popular Seguros	0,281552	0,000000	0,000000	18,174703	0,000000	0,032835
18	Tranquilidade	0,002406	0,000000	0,000000	0,000000	0,035111	-0,015735
19	Via Directa - Companhia de Seguros, S.A	0,000888	1,515275	0,000909	1,549861	0,000000	-0,000830
20	Victoria - Seguros S.A	0,000540	0,920879	0,000552	0,941898	0,000000	-0,000505