O CONTRIBUTO DO ESTUDO DE AULA NA APRENDIZAGEM DOS NÚMEROS RACIONAIS

Maria da Luz Louro Machado de Simas

Relatório de Prática de Ensino Supervisionada
apresentado à Escola Superior de Educação de Lisboa para
obtenção de grau de mestre em Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico
e de Matemática e Ciências Naturais
no 2.º Ciclo do Ensino Básico

2022-2023

ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO DE LISBOA
POLITÉCNICO DE LISBOA

O CONTRIBUTO DO ESTUDO AULA NA APRENDIZAGEM DOS NÚMEROS RACIONAIS

Maria da Luz Louro Machado de Simas

Relatório de Prática de Ensino Supervisionada
apresentado à Escola Superior de Educação de Lisboa para
obtenção de grau de mestre em Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico
e de Matemática e Ciências Naturais
no 2.º Ciclo do Ensino Básico
Orientadora: Professora Doutora Margarida Rodrigues

2022-2023

ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO DE LISBOA
POLITÉCNICO DE LISBOA

Agradecimentos

Este último relatório marca o *términus* de um percurso de cinco anos muito importantes na minha história de vida. Um tempo de descobertas e de muitas aprendizagens que me enriqueceram, realizaram e fizeram de mim uma pessoa mais completa, mais feliz. Assim, é com alegria que começo por agradecer aos professores que me acompanharam, desde o início, e pelos quais nutro um sincero apreço.

Na Escola Superior de Educação de Setúbal, tive a boa sorte e a honra de assistir a aulas lecionadas por sábios professores, já em fim de carreira, que me inspiraram com os seus conhecimentos e eloquência: o Professor Doutor Albérico Afonso Costa, a Professora Doutora Ana Maria Boavida, a Professora Doutora Joana Brocardo, o Professor Doutor José Carlos Godinho, o Professor Doutor Luís Souta e o Professor Doutor Mário Baía. Igualmente às professoras coordenadoras da Licenciatura em Educação Básica, a Professora Doutora Ana Luísa Costa e a Professora Doutora Maria do Rosário Rodrigues. Em particular, ao Professor Doutor e amigo José Gil, que me acompanhou e me proporcionou a importante vivência do Teatro!

Na Escola Superior de Educação de Lisboa, a minha estima pela Professora Doutora Maria João Hortas pelo valioso exemplo que me deixou da sua didática. Às minhas professoras Tutoras da Prática de Ensino Supervisionada do 2.º Ciclo, Professora Doutora Margarida Rodrigues e Professora Doutora Bianor Valente, a minha gratidão, pelo bom acompanhamento durante todo o estágio, com palavras de incentivo e constante valorização do meu trabalho e pela subtileza com que me levaram a refletir e a querer dar, sempre, o meu melhor. Em especial, à Professora Doutora Margarida Rodrigues que muito bem me orientou neste relatório final, reforço o meu agradecimento pela sua dedicação e sabedoria ao longo de todo o processo, um grande exemplo de ser professora.

Deixo também, o meu sentido agradecimento a todas as colegas, nomeadamente ao meu par de estágio, pela boa equipa que formámos. À Maria B. e à Rute, à Matilde e à Filipa, sempre unidas: vocês são as MAIORES!

E um final perfeito, *the cherry on top of the cake,* um sentido e profundo agradecimento à minha família, nas pessoas dos meus queridos pais, pelo seu exemplo de

ética e de bondade e das minhas irmãs, companheiras desta vida. À minha irmã Maria Paula, meu anjo da guarda, aquele brinde especial na companhia dos *Garrett* no *26*! RS. Também ao meu incondicional companheiro de trinta e dois anos de vida, marido e amigo, José Paulo. E, the *last but not least*, aos meus queridos e amados filhos, o primogénito José Maria e a caçula Isabel Maria, os artistas que me inspiram e que me enchem de força para criar e realizar. Bem hajam! RS.

RESUMO

O presente relatório foi desenvolvido no contexto da unidade curricular de Prática de Ensino Supervisionada II, integrada no 2.º ano do Mestrado em Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico (CEB) e de Matemática e Ciências Naturais no 2.º CEB. Está estruturado em duas partes: a primeira, consta de uma descrição sintética da prática pedagógica desenvolvida no 1.º e 2.º CEB, e a segunda, compreende o estudo desenvolvido no contexto do 5.º ano do 2.º CEB, que decorreu no ano letivo de 2022/2023. O estudo tem como objetivo compreender de que forma o Estudo de Aula, na Prática de Ensino Supervisionada, contribuiu para a melhoria das aprendizagens dos alunos e para desenvolver boas práticas enquanto estagiária, num contexto de aprendizagem no 5.º ano envolvendo os números racionais.

O estudo situa-se no paradigma interpretativo de natureza qualitativa e a técnica de recolha de dados consiste na observação participante com a recolha de notas de campo para o tratamento de dados, complementada por registos em fotografia e em vídeo, para captação das produções dos alunos e dos diálogos durante a discussão das tarefas.

Os resultados da investigação permitiram evidenciar que o Estudo de Aula possibilitou aos alunos desenvolveram processos para a resolução de problemas, utilizando estratégias ligadas a contextos da realidade e a modelos matemáticos "de pensar" e "para pensar", tendo sido predominante o uso de contextos da realidade. As etapas do Estudo de Aula contribuíram para melhorar a didática da professora estagiária, possibilitando-lhe prever a forma como os alunos interpretam os problemas e, assim, orientá-los para as aprendizagens.

Palavras-chave: números racionais, estudo de aula, formação de professores, educação matemática realista.

ABSTRACT

This report was developed in the context of the Supervised Teaching Practice II curricular unit, part of the 2nd year of the Master's Degree in Teaching the 1st Cycle of Basic Education and Maths and Natural Sciences in the 2nd Cycle of Basic Education. It is structured in two parts: the first consists of a summary description of the pedagogical practice developed in the 1st and 2nd Cycle of Basic Education, and the second comprises the study developed in the context of the 5th year of the 2nd Cycle of Basic Education, which took place in the 2022/2023 school year. The study aims to understand how the lesson study, in the Supervised Teaching Practice, contributed to improving student learning and to developing good practices as a trainee, in a 5th grade learning context involving rational numbers.

The study is based on the interpretative paradigm of a qualitative nature and the data collection technique consists of participant observation with the collection of field notes for data processing, complemented by photographic and video recordings to capture the students' productions and the dialogues during the discussion of the tasks.

The results of the research show that the Lesson Study enabled the students to develop problem-solving processes, using strategies linked to real-life contexts and mathematical models "of thinking" and "for thinking", with the use of real-life contexts and with a higher success rate. The stages of the Lesson Study contributed to improving the trainee teacher's didactics, enabling her to predict how the students interpret the problems and thus guide them towards learning.

Keywords: rational numbers, lesson study, teacher training, realistic maths education.

ÍNDICE GERAL

Índice de Tabelas

Índice de Figuras

Lista de Abreviaturas

AT	Assembleia de Turma
CEB	Ciclo do ensino básico
EA	Estudo de Aula
EMR	Educação Matemática Realista
MEM	Movimento da Escola Moderna
PC	Professora Cooperante
PES II	Prática Educativa Supervisionada II
PE	Projeto Educativo
PI	Plano de Intervenção
TEA	Tempo de Estudo Autónomo
TIC	Tecnologias de Informação e Comunicação
UC	Unidade Curricular

INTRODUÇÃO

O presente relatório foi desenvolvido no contexto da unidade curricular (UC) de Prática de Ensino Supervisionada II (PES II), integrada no 2.º ano do Mestrado em Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico (CEB) e de Matemática e Ciências Naturais no 2.º CEB, da Escola Superior de Educação de Lisboa (ESELx).

Está estruturado em duas partes: i) Práticas pedagógicas desenvolvidas em 1.º e 2.º CEB; ii) Estudo desenvolvido no contexto da prática pedagógica desenvolvida no 2.º CEB.

A primeira parte consta de uma descrição sintética da prática pedagógica desenvolvida no 1.º e 2.º CEB, a saber, da caracterização das instituições cooperantes e suas linhas pedagógicas orientadoras e das características das turmas, nomeadamente, o ano de escolaridade, as idades, os níveis de desenvolvimento, o meio sociocultural e económico, as aprendizagens e as dificuldades identificadas. Segue-se uma problematização sumária das intervenções em que são mencionados os objetivos gerais, as estratégias globais de intervenção e de integração curricular, as atividades implementadas e os processos de avaliação e regulação. Finalmente apresenta-se uma análise crítica, fundamentada, das práticas do 1.º e 2.º CEB com abordagem aos seguintes aspetos: i) desenvolvimento e respetivas competências esperadas dos alunos; ii) métodos de ensino/aprendizagem; iii) relação pedagógica; iv) processos de regulação e avaliação das aprendizagens e dos comportamentos sociais.

A segunda parte remete para o estudo desenvolvido no contexto do 2.º CEB, com o tema: O contributo do Estudo de Aula na aprendizagem dos números racionais. Compõem esta segunda parte os seguintes capítulos: i) Apresentação do Estudo, sua pertinência e objetivos; ii) Fundamentação teórica, explicação dos conceitos fundamentais e revisão da literatura relacionada com o tema; iii) Metodologia, em que se inclui a natureza do estudo, a caracterização do contexto e dos participantes, as técnicas de recolha e análise de dados, a estrutura do Estudo de Aula (EA) realizado com as etapas da metodologia e os princípios éticos do processo de investigação; iv) Apresentação e tratamento dos resultados, de acordo com as questões orientadoras do estudo, relativos aos processos dos alunos na aprendizagem da multiplicação de uma fração por um número natural, e relativos à contribuição do EA para a melhoria das práticas da professora estagiária, de acordo com os objetivos específicos do estudo; v) Conclusão, tendo como referência as questões orientadoras do estudo, e identificação de constrangimentos.

Por último, fechando este relatório apresenta-se uma reflexão final, em que se realça o contributo da experiência desenvolvida na PES II nos dois ciclos de ensino, o contributo da experiência no processo de investigação para o desenvolvimento de competências profissionais e/ou melhoria dos processos de ensino e aprendizagem; a identificação dos aspetos significativos para o desenvolvimento pessoal e profissional do estudante dando ênfase ao trabalho colaborativo; e as dimensões a melhorar no exercício da profissão docente.

PARTE I: PRÁTICA DE ENSINO SUPERVISIONADA II NO 1.º E NO 2.º CEB

1. DESCRIÇÃO SINTÉTICA DA PRÁTICA PEDAGÓGICA DESENVOLVIDA NO 1.º CEB

1.1. Caracterização do contexto socioeducativo

1.1.1 A instituição cooperante

A escola em que decorreu a PES II em 1.º CEB é uma instituição particular fundada em 1955, caracterizada por defender uma pedagogia ativa que tem como base o reconhecimento e o respeito pela individualidade e expressão livre de cada criança (Escola X, 2002, p. 13). Esta instituição tem uma oferta de educativa de Pré-Escolar e 1.º CEB e localiza-se em Lisboa, rodeada por um vasto património histórico e cultural, como Museus, Jardins, Bibliotecas e Instituições de Ensino Superior.

O espaço da escola é composto por dois edifícios, um principal e um outro anexo e, também, por dois recreios. No edifício principal encontram-se três salas de Pré-Escolar, duas salas do 1.º CEB (1.º e 3.º ano), a sala de música, o atelier de artes plásticas, a biblioteca, o refeitório, a cozinha e a sala da direção da escola. No edifício anexo, localizam-se duas salas do 1.º CEB (2.º e 4.º ano) e o ginásio.

O trabalho pedagógico da instituição é orientado pelo PE que visa a construção de uma «Escola para a independência e para a responsabilidade» (Escola X, 2002, p. 5), ajudando os alunos a construir a sua autonomia, valorizando as suas formas de expressão e respeitando a sua individualidade (Escola X, 2002).

A escola assenta numa pedagogia centrada na comunicação e na organização de aprendizagens significativas, resultante da interação indivíduo-ambiente, em que o trabalho cooperativo é privilegiado. Na sua ação educativa, a escola valoriza a relação afetiva positiva entre professores e alunos e a comunicação e a interação com as famílias, com vista ao desenvolvimento da humanidade no ser humano (Escola X, 2002).

1.1.2 A turma

A turma em que ocorreu a prática supervisionada, frequentava o 2.º ano do 1.º CEB e era constituída por um total de 23 alunos, sendo 13 do sexo feminino e 10 do sexo masculino, com idades compreendidas entre os 7 e os 8 anos. A maioria dos alunos provinha de famílias de um meio sociocultural e económico elevado.

Os alunos, de um modo geral, demonstravam-se curiosos, interessados, empenhados e participativos. Dotados de um bom espírito crítico e de muita iniciativa, revelavam uma grande vontade de aprender, autonomia, responsabilidade e competências ao nível da cooperação. Apenas para um elemento da turma foi solicitada a realização de um relatório técnico-pedagógico, que "é o documento que fundamenta a mobilização de medidas seletivas e ou adicionais de suporte à aprendizagem e à inclusão" (DRE, 2018, p. 2925), devido à dificuldade de concentração e de focar a atenção que o aluno demonstrava na realização da grande maioria das tarefas propostas em sala de aula.

Observou-se na componente do currículo de Português, que todos os alunos dominavam a capacidade de decifração, lendo com clareza e fluência. Ao nível da competência gráfica da escrita, os alunos escreviam textos coerentes com originalidade e criatividade, utilizando corretamente a pontuação e os conectores textuais, apresentando apenas alguns erros ortográficos, característicos do ano de escolaridade em que se encontravam. Os alunos apresentavam algumas dificuldades ao nível da interpretação de textos lidos, quando confrontados com enunciados escritos acerca de um texto.

Relativamente à componente do currículo de Matemática, os alunos evidenciavam grande aptidão ao nível do cálculo mental, utilizando frequentemente estratégias de compensação ao nível das operações de adição e subtração e cadeias numéricas ao nível das operações de multiplicação e divisão. Apresentavam também, de uma forma geral, uma boa capacidade de resolução de problemas, realizando inclusivamente tarefas de construção do enunciado de um problema partindo de um algoritmo dado pela professora. Os alunos demonstravam, no entanto, fragilidades ao nível do conteúdo das frações, um conteúdo que se revela particularmente complexo para alunos deste ano de escolaridade, devido à exigência de um elevado nível de abstração.

Na componente do currículo de Estudo do Meio, foi possível observar que os alunos demonstravam um grande interesse e motivação, realizando trabalho de pesquisa em pareceria e por iniciativa própria, apresentando apenas algumas dificuldades na seleção e na organização da informação.

Igualmente, na componente do currículo de Artes Visuais, de uma forma geral, os alunos não apresentavam grandes fragilidades, eram empenhados e aprendiam com facilidade novas técnicas, realizando desenho de observação, colagens, pintura, moldagem, entre outras.

Na componente do currículo de Música os alunos tinham facilidade em utilizar a percussão corporal com sentido rítmico e em utilizar o movimento para traduzir elementos expressivos da música. Ao nível das fragilidades, alguns alunos demonstravam dificuldade em cantar com consciência da pulsação e sentido rítmico.

Quanto à componente do currículo de Teatro, foi possível constatar que muitos alunos liam com expressividade, com boa projeção da voz e boa dicção.

Relativamente à componente do currículo de Educação física, os alunos realizavam as atividades propostas pela professora com autonomia, empenho e com o foco da atenção na atividade. Apresentavam um bom desempenho no bloco de deslocamentos e equilíbrios e nos jogos, sendo o bloco de perícias e manipulações aquele em que apresentavam maiores fragilidades.

Por último, na componente do currículo de TIC, os alunos apresentavam algumas fragilidades nas habilidades relacionadas com o processamento de texto e com a destreza com teclado e com o rato do computador.

1.2 Problematização sumária dos dados recolhidos

1.2.1 Problemática

Na construção da problemática, foram tidas em consideração as potencialidades identificadas para trabalhar as fragilidades observadas (Anexo A), tendo eu e o meu par de estágio escolhido, para tal, as componentes do currículo de Português e de TIC. Assim, partiu-se das potencialidades dos alunos ao nível do Português para trabalhar as suas fragilidades ao nível das TIC, numa ótica de preparação dos alunos para as provas de aferição que se iriam realizar no final do ano letivo, provas que surgem pela primeira vez em suporte digital, em vez do habitual suporte em papel. Nesse sentido formularam-se os seguintes objetivos gerais:

i) Desenvolver habilidades na utilização do computador

ii) Desenvolver as competências de compreensão e interpretação de enunciados

1.2.2 Estratégias globais de intervenção e de integração curricular

As estratégias globais de trabalho em cada componente do currículo foram definidas e organizas por objetivo geral, numa ótica de promoção de integração curricular entre as diferentes áreas (cf. Tabela 1).

Tabela 1

Estratégias globais de intervenção por objetivo geral (1.º CEB)

Objetivos gerais	Estratégias globais de Intervenção
Desenvolver habilidades na utilização do computador	- Resolver tarefas no computador que envolvam as aprendizagens das diferentes componentes do currículo.
Desenvolver as competências de compreensão e interpretação de enunciados	- Analisar enunciados referentes às diversas componentes do currículo para levantamento do conjunto de verbos mais utilizados e, posterior, afixação em sala de aula do significado de cada um; - Construir enunciados referentes às diversas componentes do currículo a partir das listas dos verbos mais utilizados em enunciados, previamente criadas, e do tipo de tarefas mais frequente; - Promover momentos de explicitação em grande grupo sobre técnicas para a compreensão e a interpretação de enunciados, como p.e., sublinhar, reler, etc.; - Construir em grande grupo/turma uma grelha de critérios de avaliação para um texto redigido; - Promover a escrita individual de textos e, posteriormente, realizar a autoavaliação e, em trabalho a pares, a avaliação do texto do colega, utilizando a grelha de avaliação previamente criada.

1.2.3 Atividades implementadas

Ao longo da intervenção foram realizadas diversas atividades com os alunos que contribuíram para atingir os objetivos gerais da intervenção:

A) Escrita de um enunciado no computador sobre um texto do caderno de textos;

B) Escrita e apresentação do significado dos verbos dos enunciados;

C) Realização de uma prova de aferição com tempo definido e seguida de autocorreção;

D) Escrita de um texto numa prova de aferição em computador;

E) Discussão sobre os critérios para escrita de um bom texto, escrita de um texto e avaliação do texto do colega;

F) Utilização do geoplano no computador;

G) Realização do guião sobre o documento “Euro” que estava no computador;

H) Escrita dos cartões do jogo “O Tapeleiro” no computador.

As atividades A), D), F), G) e H) foram realizadas no âmbito do primeiro objetivo de desenvolver habilidades na utilização do computador. As atividades A), B), C) e E) foram realizadas no âmbito do segundo objetivo de desenvolver as competências de compreensão e interpretação de enunciados.

1.2.4 Avaliação e regulação das aprendizagens

Na regulação dos processos de aprendizagem, privilegiou-se a avaliação formativa de caráter qualitativo, através de *feedback* criterioso e sistemático dado aos alunos ao longo das atividades. Foi, igualmente, promovida uma avaliação autorregulada das aprendizagens e das tarefas da semana por parte dos alunos, através da utilização de instrumentos, como o Plano Individual de trabalho (PIT) e grelhas de autoavaliação com os objetivos específicos de um dado tema. Foram, também, fomentados momentos de heteroavaliação, em que se propôs aos alunos avaliarem as produções dos pares, nomeadamente produções escritas, através da utilização de uma grelha com os critérios de avaliação.

A avaliação dos objetivos gerais de intervenção foi realizada ao longo do período de intervenção monitorizando o trabalho desenvolvido pelos alunos, através de notas de campo e de fotografias às produções dos alunos e, também, através da aplicação de um questionário aos alunos no final da intervenção. A análise dos dados recolhidos (Anexo B) indicou que as atividades implementadas tiveram sucesso contribuindo para a consecução dos objetivos gerais da intervenção.

2. DESCRIÇÃO SINTÉTICA DA PRÁTICA PEDAGÓGICA DESENVOLVIDA NO 2.º CEB

2.1. Caracterização do contexto socioeducativo

2.1.1 A instituição cooperante

A PES II em 2.º CEB foi desenvolvida numa instituição de ensino pública, onde são lecionados o 2.º e o 3.º CEB, estando integrada num agrupamento de escolas localizado na cidade de Lisboa. Este agrupamento foi incluído em 2013, pelo Ministério da Educação, no Programa Territórios Educativos de Intervenção Prioritária (TEIP), devido, sobretudo, às condições socioeconómicas dos alunos, residentes em bairros "onde as situações de degradação habitacional, realojamento, problemas económicos, sociais e de exclusão social são comuns" (Agrupamento de Escolas X, 2021, p. 7), sendo que mais de metade dos alunos do Agrupamento beneficiam da Ação Social Escolar. Nesse sentido, a missão do agrupamento é a de proporcionar a cada aluno, independentemente do seu contexto socioeconómico, "um ensino de qualidade e experiências de aprendizagem que lhe permitam adquirir e desenvolver competências necessárias ao crescimento intelectual e pessoal, formando um cidadão interveniente e responsável para com a sociedade em que está inserido" (Agrupamento de Escolas X, 2021, p. 6). Para tal, são definidos no PE do Agrupamento três área de intervenção prioritárias: Melhoria do ensino e da aprendizagem; Prevenção do abandono, absentismo e indisciplina; Gestão e organização.

A instituição de ensino onde se realizou a PES II é a escola-sede de agrupamento e foi inaugurada no ano de 1958, tendo sido alvo de requalificação e ampliação entre 2008 e 2009 no âmbito do projeto Parque Escolar (Agrupamento de Escolas X, 2021). Atualmente, é constituída por um edifício com uma ala principal onde se situam as salas de aula, os serviços administrativos, a sala dos professores e o gabinete de intervenção psicossocial, estando agregados um conjunto de corpos secundários, onde se encontra o ginásio, o refeitório, a papelaria, o centro de recursos educativos, a biblioteca e as salas de laboratório e de artes.

Esta instituição aderiu ao programa *Teach for* Portugal, uma organização sem fins lucrativos, que tem como missão reduzir a desigualdade educativa dos alunos a partir de um programa de mentores, que acompanham os alunos das turmas em que estão destacados, promovendo atividades lúdicas e pedagógicas durante e fora do tempo letivo (Teach for Portugal, 2022). As duas turmas onde ocorreu a prática supervisionada beneficiavam deste programa.

2.1.2 As turmas

As turmas, ambas do 5.º ano do 2.º CEB, eram constituídas da seguinte forma: a turma 1 com 21 alunos, 13 alunos do sexo feminino e 8 do sexo masculino, com idades compreendidas entre os 9 e os 12 anos, com duas retenções, e a turma 2 com 20 alunos, 11 alunos do sexo feminino e 9 do sexo masculino, com idades compreendidas entre os 9 e os 12 anos, com uma retenção. A maioria dos alunos provinha de famílias de um meio sociocultural e económico baixo.

Em ambas as turmas os alunos usufruíam de Medidas de Suporte à Aprendizagem e Inclusão, no contexto da Educação Inclusiva, nomeadamente de Medidas Universais, sendo que dois alunos em cada turma ainda tinham reforço de Medidas Seletivas, de acordo com o Decreto Lei N.º 54/2018 e o Decreto Lei N.º 55/2018.

Os alunos das duas turmas, de um modo geral, eram pontuais e assíduos, interessados e participativos. Colocavam questões pertinentes sobre os conteúdos trabalhados, explicavam o seu ponto de vista e quase todos acompanhavam as discussões em grande grupo/turma. Revelavam dificuldade na interpretação de enunciados, quer na forma escrita quer na forma oral, e demonstravam falta de autonomia e cooperação no trabalho em pequeno grupo, nomeadamente na divisão e coordenação das tarefas.

Especificamente na componente do currículo de Matemática, os alunos revelavam dificuldade ao nível da resolução de problemas no que respeita às diferentes etapas da resolução de um problema. Ao nível do pensamento computacional revelavam, principalmente, dificuldade ao nível da abstração (agravada pela dificuldade de interpretação inerente à literacia da língua portuguesa), da decomposição (pelo já anteriormente mencionado que diz respeito à estruturação do conjunto de situações de um problema) e do reconhecimento de padrões para aplicação noutros problemas. Por último, é de salientar, também, a dificuldade que os alunos demonstravam nas conexões matemáticas, em compreender a matemática articulada na resolução de problemas em contextos diversos da vida quotidiana.

Relativamente à componente do currículo de Ciências Naturais, a maior dificuldade prendia-se com o facto de terem dificuldade na interpretação textual dos enunciados. Os alunos demonstravam também particular dificuldade na definição de conceitos e na justificação de respostas. No entanto, contrariamente à componente do currículo de

Matemática, em Ciências Naturais, os alunos frequentemente relacionavam por sua própria iniciativa os conteúdos das aulas com as suas vivências do quotidiano.

2.2 Problematização sumária dos dados recolhidos

2.2.1 Problemática

A construção da problemática teve por base as fragilidades dos alunos ao nível das competências transversais, considerando-se que algumas das fragilidades das componentes do currículo eram próprias desse ano de escolaridade (Anexo C). Nesse sentido, formularam-se os seguintes objetivos gerais:

i) Desenvolver competências de cooperação

ii) Desenvolver competências de autonomia e responsabilização

iii) Desenvolver as competências de compreensão conceptual e interpretação de enunciados ou instruções orais

2.2.2 Estratégias globais de intervenção e de integração curricular

As estratégias globais de trabalho em cada área curricular foram definidas e organizadas por objetivo geral, numa ótica de promoção de integração curricular entre as diferentes áreas. Na tabela abaixo são apresentadas as estratégias globais adotadas.

Tabela 2

Estratégias globais de intervenção por objetivo geral (2.º CEB)

Objetivos gerais	Estratégias globais de Intervenção
Desenvolver competências de cooperação	- Desenvolver atividades de cooperação entre pares; - Desenvolver jogos cooperativos; - Realizar visitas de estudo, com atividades em pequeno grupo; - Realizar atividades do tipo Abordagem Baseada na Resolução de Problemas em pequeno grupo.
Desenvolver competências de autonomia e responsabilização	- Realizar visitas de estudo, com atividades em pequeno grupo, apelando à realização autónoma do grupo; - Realizar atividades do tipo Abordagem Baseada na Resolução de Problemas em pequeno grupo, apelando à realização autónoma do grupo.
Desenvolver as competências de compreensão conceptual e interpretação de enunciados ou instruções orais	- Na realização de tarefas, começar por apelar à compreensão e interpretação dos enunciados de forma individual e num segundo momento, antes da resolução da tarefa, realizar a desconstrução dos enunciados em grande grupo; - Solicitar aos alunos que sublinhem as ideias principais dos enunciados ou texto.

2.2.3 Atividades implementadas

Ao longo da intervenção foram realizadas diversas atividades com os alunos, que contribuíram para a atingir os objetivos gerais da intervenção, desenvolvidas nas aulas de Ciências Naturais (CN) e nas aulas de Matemática (Mat):

A) História de Cientista (CN);
B) Formas do corpo e simetria dos animais (CN);
C) Réguas de frações (Mat);
D) Abordagem Baseada na Resolução de Problemas - revestimento dos animais (CN);
E) Quebra-cabeças (Mat);
F) Dominó de frações (Mat);
G) Rally da Matemática (Mat);
H) Abordagem Baseada na Resolução de Problemas - reprodução dos animais (CN);
I) Visita de estudo à Reserva Natural do Estuário do Sado (CN).

2.2.4 Avaliação e regulação das aprendizagens

No que diz respeito à avaliação, foi privilegiada a modalidade formativa, como um processo regulador das aprendizagens dos alunos, através de *feedback* criterioso e sistemático dados aos alunos, passo a passo, para que, deste modo, os alunos pudessem autorregular as suas aprendizagens. Numa avaliação que se pretende pedagógica, o *feedback* é a ação central do processo, pois através da resposta do professor o aluno fica a saber onde deverá chegar, qual o seu ponto de partida, ou seja em que situação se encontra, e o que deve fazer para aprender o que está previsto (Fernandes, 2021). Concretamente, nesta prática de ensino supervisionada, foram utilizados como instrumentos de avaliação, grelhas de observação construídas para cada atividade realizada, onde constavam indicadores específicos de aprendizagem. Estas grelhas foram preenchidas com recurso a técnicas de observação direta ao longo das atividades realizadas em aula e através da análise das produções dos alunos. Foram também fomentados momentos de autoavaliação e heteroavaliação, concretamente após as apresentações orais.

Foi ainda realizada uma avaliação sumativa, concretizada através de fichas de avaliação individuais para cada uma das componentes do currículo, de Ciências Naturais e de Matemática.

A avaliação dos objetivos gerais de intervenção foi realizada ao longo do período de intervenção, monitorizando o trabalho desenvolvido pelos alunos através do preenchimento de grelhas de observação de desempenho, nas quais foram definidos um conjunto de indicadores para cada um dos três objetivos gerais de intervenção. A análise dos dados recolhidos (Anexo D) indicou que as atividades implementadas tiveram sucesso contribuindo para a consecução dos objetivos gerais da intervenção.

3. ANÁLISE CRÍTICA DA PRÁTICA DESENVOLVIDA NO 1.º E NO 2.º CEB

A presente análise crítica tem como objeto a minha prática como estagiária nos contextos do 1.º CEB e do 2.º CEB, tendo o primeiro contexto ocorrido numa instituição de ensino privada, cujos princípios orientadores são sustentados pelo MEM, e o segundo numa instituição pública de ensino, cujo agrupamento se insere num TEIP. A intervenção no 1.º CEB ocorreu numa turma do 2.º ano e a intervenção no 2.º CEB em duas turmas do 5.º ano. Assim, será realizada uma comparação crítica entre os dois contextos de estágio focando os seguintes aspetos: (i) o desenvolvimento e as respetivas competências esperadas dos alunos; (ii) os métodos de ensino-aprendizagem e os seus processos de organização e desenvolvimento do currículo; (iii) a relação pedagógica que se desenvolveu entre mim, professora estagiária, e os alunos das turmas em que lecionei e, por último, (iv) os processos de regulação e avaliação das aprendizagens e dos comportamentos sociais. Para tal, são considerados os objetivos gerais elaborados nos dois contextos de estágio, com base nas questões-problema identificadas e enumerados nos respetivos PI.

Relativamente ao ponto (i) desenvolvimento e as respetivas competências esperadas dos alunos, começo por fazer referência à prática supervisionada no primeiro contexto em que lecionei, o 2.º CEB. Neste contexto, foi identificado que a maioria dos alunos das duas turmas revelava pouca autonomia e pouca responsabilidade na forma como encarava as tarefas propostas pela professora. Também revelava falta de método para trabalhar em grupo, bem como dificuldade no âmbito da compreensão conceptual e interpretação de enunciados e/ou instruções orais, esta última, especialmente na componente do currículo de Ciências Naturais.

Grande parte destes alunos não manifestava interesse em aprender na sala de aula, assumindo, alguns deles, atitudes de indisciplina e revelando, a sua grande maioria, elevada dificuldade de concentração. Apesar do período de intervenção da prática supervisionada ter sido apenas de nove semanas, foi notório em alguns alunos, o seu crescente envolvimento e participação nas tarefas diárias durante este tempo. Foram sendo delegadas pequenas responsabilidades aos alunos e, aos poucos, estes foram ganhando confiança e autonomia para trabalhar individualmente e em grupo, quer ao nível dos conteúdos de aprendizagem, quer com a organização do seu material e espaço de trabalho.

Por sua vez, as competências de compreensão conceptual e interpretação de enunciados e/ou instruções orais que foram desenvolvendo, também contribuíram para a construção da autonomia, no sentido em que foram sendo capazes de, com mais regularidade, dar resposta às tarefas, sem que fosse necessária a intervenção do professor para explicar o que estava a ser pedido.

No que diz respeito ao desenvolvimento e as respetivas competências esperadas pelos alunos no contexto de estágio do 1.º CEB, à semelhança dos alunos no contexto do 2.º CEB, foi igualmente observado nestes alunos dificuldade na compreensão e interpretação de enunciados. Outra dificuldade observada, que deu origem ao segundo objetivo geral, prendeu-se com o manuseamento do computador e utilização do processador de texto. Os alunos serviam-se com alguma regularidade, e sempre com muito entusiasmo, dos computadores da escola para fazer pesquisas e realizar trabalhos, contudo necessitavam de aprender e praticar as funcionalidades básicas do processador de texto. Concorrente com esta necessidade, as provas de aferição que os alunos iriam realizar no final do ano letivo, compeliam à prática da utilização do computador e ao desenvolvimento de competências de compreensão e interpretação de enunciados. Ao longo das cinco semanas de intervenção da prática supervisionada, estimulados por utilizarem o computador, e pelo seu manifesto interesse, criatividade e gosto na escrita de pequenos textos, os alunos desenvolveram competências concordantes com os objetivos gerais propostos no PI.

Relativamente ao ponto (ii) métodos de ensino-aprendizagem e os seus processos de organização e desenvolvimento do currículo, estes foram pensados sempre, de forma, a que a aprendizagem fosse significativa para os alunos. Assim, partiu-se sempre de contextos da sua realidade e, também, dos seus interesses, para que, não só, despertassem o seu interesse, como também, estimulassem o gosto pelo aprender.

Os métodos de ensino-aprendizagem implementados e os seus processos de organização e desenvolvimento do currículo, foram idênticos nos dois ciclos de ensino, 1.º e 2.º CEB, contudo, adaptados à realidade de cada turma. Foi denominador comum o objetivo de estimular o sentido crítico de cada um dos alunos e, nesse sentido, foram desenvolvidos trabalhos de investigação em pequeno grupo e debates/discussões em grande grupo/turma. Os trabalhos de investigação em pequeno grupo, após concluídos, culminaram com uma comunicação/apresentação à turma, alargando as formas de circulação e difusão dos resultados investigados ao grande grupo/turma (Niza, 2005). Acrescendo o facto de que quando se comunica o que se aprende todos aprendem mais (William Glasser, s.d., citado por Rodrigues, 2018), pois o aluno que explica o que aprendeu consolida a sua aprendizagem e ao interagir com os colegas pode estabelecer novas conexões, assim como quem ouve tem acesso a um novo conhecimento. Outra vantagem das interações entre os alunos no trabalho desenvolvido com os pares é o facto de, na linha de pensamento de Vygotsky, possibilitar ampliar o limite da sua capacidade de aprendizagem (Mercer, 1997, citado por Serralha, 2007). O contacto com a sociedade para Vygotsky é fundamental no processo de aprendizagem do individuo à medida que este se desenvolve (Murga, 2022), pois na ausência do outro o indivíduo não se constrói, e a partilha de saberes, sob a orientação do professor, é enriquecida pelas caraterísticas particulares do indivíduo, ou seja, neste caso, do aluno.

Neste sentido, o jogo mostrou-se igualmente uma estratégia de ensino-aprendizagem muito pertinente e motivador pelo seu carácter lúdico, tendo sido posta em prática ao longo das semanas em que decorreram as intervenções supervisionadas. Segundo Freire (1989), "não se trata de um jogo qualquer, mas sim de um jogo transformado em instrumento pedagógico, em meio de ensino" (p. 119), e que se aproxima do trabalho que se desenvolve no espaço de ensino-aprendizagem.

Outra estratégia de ensino-aprendizagem adotada, foi a visualização de vídeos didáticos em sala de aula, escolhidos criteriosamente no que diz respeito à adequação dos conteúdos a serem trabalhados, aliados ao rigor científico. Esta estratégia tornou-se um excelente recurso didático para os alunos oriundos de países estrangeiros que apresentavam dificuldade na compreensão da língua portuguesa, pois, neste caso, e como diz o ditado, "uma imagem vale mais que mil palavras". Os vídeos permitem, também, por exemplo, experienciar indiretamente realidades que não podem ser vividas *in loco*, como por exemplo, observar de perto os comportamentos de animais selvagens no seu *habitat* natural. O som e a imagem conferem possibilidades de memorização que facilitam a realização de conexões e associações, que ajudam a mobilizar conhecimento.

A utilização de materiais manipuláveis diversos foi outra das estratégias de ensino-aprendizagem utilizada, bem como o recurso ao digital. Foram utilizados materiais como, por exemplo, o *Tangram*, o Geoplano com modelos de peças reais e o Geoplano virtual, as réguas de frações e os robôs de solo. Esta estratégia, em conjunção com a proposta de tarefas abertas, suscita a aprendizagem pela descoberta e estimula o pensamento dos alunos que, de uma forma lúdica, permite desenvolver a sua criatividade.

Os alunos resolveram os problemas propostos com estes materiais em pequeno grupo e, em grande grupo/turma, comunicaram as suas ideias, o que criou oportunidades de fazerem conexões entre a matemática e situações da sua vida. Isto permitiu-lhes, verificar cálculos matemáticos e aprender a expressarem-se formalmente em linguagem matemática, alargando, também, a sua compreensão da matemática para a realidade do seu quotidiano (Tullio, 2015).

As visitas de estudo também foram uma realidade durante a intervenção nas duas práticas de ensino supervisionada, as quais permitiram criar espaços de aprendizagem formais fora da sala de aula, captando o interesse do aluno para a aprendizagem de conteúdos científicos e outros. Como referem Almeida e Vasconcelos (2013), as visitas de estudo contribuem, também, para desenvolver capacidades e destrezas variadas, promover atitudes e comportamentos pró-ambientais, bem como, promover hábitos culturais, futuras opções de lazer e até perspetivas de vida, melhorar o bem-estar, a saúde individual e coletiva e, para melhorar, aspetos relacionais, a camaradagem e o espírito de equipa.

As visitas de estudo foram criteriosamente planificadas, sustentadas em objetivos específicos direcionados para as aprendizagens que se pretendiam que os alunos adquirissem, e concordantes com os locais visitados. Revelaram-se uma oportunidade para os alunos desenvolverem competências de responsabilidade e de autonomia, fortalecendo também as relações interpessoais num ambiente descontraído, entre os alunos e entre alunos e professores, conforme mencionado atrás.

Os guiões de aprendizagem, utilizados como estratégia de ensino-aprendizagem, foram sendo desenvolvidos ao longo da lecionação, e acompanhando o progresso de aprendizagem dos alunos. Os guiões relacionavam-se com os conteúdos trabalhados e serviam para os alunos responderem a questões, promovendo a compreensão dos conteúdos e a organização do seu pensamento.

Outros métodos de ensino-aprendizagem mais usuais também tiveram lugar, como a utilização do quadro de caneta e a projeção de *Powerpoint's*, direcionados às fragilidades e necessidades mais especificas que os alunos demonstravam ao longo do processo de ensino-aprendizagem dos conteúdos que estavam a ser trabalhados.

No que respeita ao ponto (iii) relação pedagógica que se desenvolveu entre mim, professora estagiária, e os alunos das turmas em que lecionei, esta constituiu um desafio que se verificou gratificante. Inicialmente, procurei assumir uma postura que se revelasse segura e respeitosa, com uma expressão corporal tranquila e um discurso oral claro, coerente, assertivo, honesto e, ao mesmo tempo, afetuoso. Tal contribuiu para o crescimento do respeito e da amizade entre todos, tendo criado um ambiente descontraído e de bem-estar propício às aprendizagens. Foi minha intenção ajudar os alunos a desenvolveram-se como grupo, valorizando as suas motivações (Arends, 1995), o que considero ter sido importante, não só para a construção das aprendizagens em geral, como também da sua confiança e autoestima. Procurei fazer a gestão destas ações, nomeadamente das estratégias de ensino-aprendizagem, tendo em conta as características e as necessidades dos alunos, o contexto escolar, e a minha própria experiência enquanto professora estagiária, constatando que os alunos manifestaram, progressivamente, e ao longo do tempo, uma boa adaptação à minha presença na sala de aula, reconhecendo-me como sua professora.

Não senti qualquer disparidade na relação pedagógica que se criou entre mim, professora estagiária, e os alunos de cada um dos contextos, apesar dos tempos de lecionação em cada um dos contextos se dividirem de forma diferente. No contexto do 2.º CEB o tempo de prática supervisionada, nas duas turmas, prolongou-se por mais quatro semanas em relação ao tempo de prática no contexto da turma do 1.º CEB. No 2.º CEB o tempo de lecionação estava repartido em oito tempos semanais, para cada uma das turmas, nas componentes do currículo de matemática e de ciências naturais. Em contrapartida, no 1.º CEB o regime de lecionação, sendo de monodocência, decorreu desde o início da manhã até meio da tarde, ao longo de toda a semana, o que proporcionou um equilíbrio do tempo de prática entre os dois contextos de supervisão.

Por último, no que concerne ao ponto (iv) processos de regulação e avaliação das aprendizagens e dos comportamentos sociais, foram processos que, embora com algumas semelhanças, tiveram formas diferentes de operacionalização no 1.º e no 2.º CEB.

Relativamente ao processo de avaliação das aprendizagens no 2.º CEB, foram implementadas as modalidades de avaliação formativa e sumativa nas duas componentes do currículo, Matemática e Ciências Naturais. A avaliação formativa esteve sempre presente com *feedback* aos alunos, passo a passo, para que estes pudessem regular e autorregular as suas aprendizagens, pois ensinar, aprender e avaliar constituem uma tríade em permanente interação. O *feedback*, conforme afirma Fernandes (2021), é fundamental no processo de avaliação formativa, que constitui uma avaliação para as aprendizagens verdadeiramente pedagógica, em que o professor diz aos alunos onde pretende que cheguem, a situação em que se encontram e o que têm de fazer para aprender o que está previsto, pois a avaliação deve estar ao serviço de quem aprende.

Quanto à avaliação sumativa, foi realizada através de um teste escrito e individual, num momento específico, com o objetivo de, conforme refere Fernandes (2021), "recolher informações relevantes, rigorosas e credíveis que permitem descrever a qualidade das aprendizagens dos alunos e, consequentemente, atribuir-lhes uma dada classificação" (p. 7). Procurei, num trabalho conjunto com o meu par de estágio, que os testes das duas componentes do currículo espelhassem o trabalho desenvolvido ao longo das aulas, pois esta modalidade de avaliação é a expressão final do conjunto de todo um percurso, sempre em favor do aluno, num justo juízo de valor, dado que "A avaliação é, por natureza, um processo subjetivo, uma vez que a avaliação tem um carácter subjetivo" (*Ibidem*).

No que respeita ao 1.º CEB o processo de regulação de comportamentos sociais foi realizado na AT, uma prática inspirada na pedagogia do MEM, em que os alunos fazem a autorregulação da turma enquanto grupo, gerindo conflitos e estabelecendo consensos, relacionados com o trabalho e com as relações interpessoais, e valorizando o que gostam nos outros.

Não obstante, considero que o processo de regulação de comportamentos sociais deva ser realizado em todos os momentos de prática de lecionação em qualquer disciplina de forma transversal. Nesta perspetiva, e em conformidade, enquanto o trabalho era desenvolvido em ambiente formal de aprendizagem, fiz esta regulação, gerindo os conflitos à medida que iam surgindo, através do diálogo de sensibilização e apelando ao sentido crítico de cada um, a fim de criar consensos, quer individualmente, bem como, em pequeno ou grande grupo/turma.

Os comportamentos sociais requerem uma aprendizagem ao longo da vida, já que o indivíduo se constrói inserido numa sociedade e, por isso, considero ser importante os alunos compreenderem uma ética de grupo, algo que deve estar sempre presente e ser continuamente trabalhado.

PARTE II: O ESTUDO

4. APRESENTAÇÃO DO ESTUDO

O estudo que se passa a apresentar foi motivado pela necessidade e interesse em ajudar os alunos a ultrapassarem as dificuldades que demonstravam na aprendizagem dos números racionais. Ao longo do período de observação na prática supervisionada, relativa à componente do currículo de matemática, estas dificuldades foram identificadas, sobretudo, quando envolviam cálculos matemáticos descontextualizados da realidade dos alunos e, por conseguinte, que exigiam um pensamento abstrato, algo que não se revelava facilitador ao desenvolvimento de outras competências, como a resolução de problemas e o estabelecer conexões matemáticas, dentro da própria matemática e com outras áreas do conhecimento, ou seja, em compreender a matemática articulada na resolução de problemas em contextos diversos da vida quotidiana. Não obstante, os números racionais ocupam um espaço importante nos documentos orientadores do currículo nacional da matemática, que no 5.º ano integram o tópico das frações nas Aprendizagens Essenciais (Direção-Geral da Educação [DGE], 2021), o que sustenta a pertinência do seu estudo no contexto de ensino-aprendizagem e demonstrando o seu cariz atual cujo estudo motiva o interesse geral (Sousa & Baptista, 2014).

Após identificadas as fragilidades dos alunos na compreensão dos números racionais, surgiu a questão problema de "Quais as estratégias a implementar na sala de aula com vista ao desenvolvimento de competências nos alunos para compreensão dos números racionais?". Para responder à problemática, dando sentido à relação da díade do ensino-aprendizagem, e após algumas reflexões sobre qual a metodologia mais adequada a implementar, optei por realizar um Estudo de Aula (EA). Este EA teve como objetivo a dupla função de incidir no bom desenvolvimento das aprendizagens dos alunos, como, também, de contribuir para a melhoria da minha prática formativa enquanto estagiária, considerando não só o contexto da turma, como igualmente, o meu interesse profissional e a minha experiência (Coutinho, 2022), ainda que numa fase final da formação inicial. Assim, defini o objetivo do estudo: "Compreender de que forma o estudo de aula, na Prática de Ensino Supervisionada, contribuiu para a melhoria das aprendizagens dos alunos e para desenvolver boas práticas enquanto estagiária, num contexto de aprendizagem no 5.º ano envolvendo os números racionais.", que impulsionou a formulação de duas questões orientadoras para a execução do estudo, sendo elas:

Qual o contributo do Estudo de Aula, na Prática de Ensino Supervisionada, para a compreensão dos alunos nos números racionais?;

Qual o contributo do Estudo de Aula, na Prática de Ensino Supervisionada, para a melhoria da prática pedagógica da estagiária?

5. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A segunda parte deste relatório é o resultado de um estudo realizado numa das turmas do 5.º ano do 2.º CEB em que decorreu a PES II, cuja caracterização já foi apresentada na primeira parte e é composta pelos capítulos: fundamentação teórica, que aborda o tema dos números racionais, o significado da fração como operador, a EMR, os estudos sobre a aprendizagem dos números racionais e o EA; metodologia, que aborda a natureza do estudo, a caracterização do contexto e dos participantes, as técnicas de recolha e de análise de dados, a estrutura do EA realizado e os princípios éticos do processo de investigação; apresentação e tratamento de resultados, que engloba os processos dos alunos na aprendizagem da multiplicação de uma fração por um número natural e a contribuição do EA para a melhoria das práticas pedagógicas da professora estagiária; e, conclusão.

5.1 Números Racionais

A noção de conjunto de números surgiu no final do século XIX (Baruk, 1992), pela necessidade de agrupar esses números de acordo com as suas propriedades. Os números racionais são, assim, representados pelo conjunto $\mathbb{Q}$, em que:

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \cup \left\{ \mathcal{X} : \mathcal{X} \text{ é um número fracionário} \right\}$$

sendo $\mathbb{Z}$ o conjunto dos números inteiros. Assim, um número racional é um número que pode ser escrito na forma $\frac{m}{n}$, em que m e n são números inteiros com o n diferente de zero, já que qualquer número multiplicado por zero é igual a zero, sendo impossível a divisão de um número por zero.

Outras representações dos números racionais são os numerais decimais, pois podem assumir uma representação fracionária cujo denominador assume uma potência de base 10, e na forma de percentagem.

O conceito de número racional nem sempre é fácil de compreender, já que os alunos se deparam com um novo desafio, como referem Silva et al. (2012), o de "dar sentido a uma relação que não "explicita um número". A maioria dos alunos interpreta a fração não como a representação de um número composto por algarismos no numerador e no denominador, mas como dois ou mais números dispostos "em cima e em baixo do traço". Outros desafios afloram e contribuem para as dificuldades que os alunos demonstram na compreensão dos números fracionários, sendo estas dificuldades, conforme referem Monteiro e Pinto (2005), "identificadas na literatura com os diferentes significados das frações, com a concepção da unidade e com o ensino precoce e descontextualizado dos símbolos e algoritmos" (p. 89).

No que respeita aos diferentes significados da fração, este estudo centra-se essencialmente na compreensão da fração como operador multiplicativo de uma unidade contínua ou de um conjunto discreto, não desconsiderando a importância dos significados da fração inerentes à relação parte-todo, medida, quociente e razão (Monteiro & Pinto, 2005). É fundamental os alunos compreenderem que os números podem ter diferentes representações e construírem, gradualmente, também, o conhecimento que essas diferentes representações devem ser aplicadas ao contexto que lhes confere o significado (McIntosh et al., 1992, citado por Pinto & Ribeiro, 2013).

A conceção da unidade também é muito importante para a compreensão do significado dos números fracionários, pois conforme afirmam Monteiro e Pinto (2005) "a relação da parte com o todo é uma relação inerente aos números fracionários e que é fundamental ser realçada, seja qual for a situação didática, pois o "todo" traduz a unidade fracionada" (p. 92). Assim, é basilar os alunos compreenderem a importância da unidade, pois para definir a fração é necessário considerar o todo, contínuo ou discreto, a que essa fração se refere (Pinto & Ribeiro, 2013).

Relativamente ao ensino precoce e descontextualizado dos símbolos e algoritmos, é relevante compreender que se esses símbolos e algoritmos são trabalhados de forma descontextualizada, o seu ensino não deixará de ser precoce, independentemente da altura em que é introduzido na sala de aula. A aprendizagem dos números racionais, e o domínio das suas operações e propriedades, requerem um elevado nível de abstração, que não está ainda ao alcance da maioria dos alunos dos primeiros ciclos da educação básica. A importância da contextualização é, precisamente, permitir aos alunos compreenderem um problema e conseguirem resolvê-lo recorrendo a estratégias informais. Pinto e Ribeiro (2013) salientam "que introduzir algoritmos antes da compreensão conceptual, ou sem relacionar o algoritmo com o conhecimento conceptual, promove a falta de conexão entre conceitos e procedimentos e entre números racionais e realidade dos alunos" (p. 84). À medida que os alunos vão abordando os conceitos em contextos significativos, gradual e naturalmente, vão relacionando essas ações com os símbolos, progredindo para representações cada vez mais formais. Este processo que tem como objetivo trabalhar na progressão da aprendizagem dos alunos, desde a primeira fase, rica em contextos significativos, até à última fase, que implica uma matemática mais formal e sofisticada, é teorizado pela metodologia da Educação Matemática Realista.

5.2 Significado da fração como operador

O significado da palavra fração, de acordo com Baruk (1992), tem origem no latim *fractio*, do verbo *frangere*, que significa romper, quebrar, e exprime-se como uma parcela, um bocado, ou seja, a parte de um todo. Se a palavra fração for sucedida da palavra de, isto é, fração de, passa a ser algo mais, quer dizer que se toma uma fração de qualquer coisa, considerado um todo. Por exemplo, em $\frac{3}{4}$ de uma caixa de 12 bombons, os $\frac{3}{4}$ representam uma fração de 12, que é o todo, em que a palavra de é sinónimo de operador multiplicativo que dá a instrução aos números sobre as relações que podem estabelecer entre si que, neste caso, é traduzido pelo algoritmo $\frac{3}{4} \times 12$. Neste contexto, a fração assume o significado de operador que transforma o cardinal de um conjunto discreto, já que $\frac{3}{4}$ de 12 bombons são 9 bombons. O mesmo se verifica em conjuntos contínuos, quando é necessário reduzir ou ampliar p.e. a escala de uma figura (Monteiro & Pinto, 2005).

A multiplicação de frações, quando envolve quantidades extensivas (discretas ou continuas), isto é, quantidades da mesma natureza, resulta numa contagem da "parte-todo" (Pinto, 2011), como por exemplo a adição de $\frac{3}{4}$ da caixa de bombons, que corresponde a 9 bombons, com $\frac{1}{4}$ da caixa, que corresponde a 3 bombons e, da qual, resultam 12 bombons, que corresponde à caixa completa. Contudo, quando se trata de quantidades de natureza diferente, as quantidades intensivas, o sentido da multiplicação baseia-se numa relação entre duas quantidades. Se pensarmos que os bombons são vendidos avulso e que cada 100 g tem um custo de 4 €, é estabelecida uma relação entre o peso e o custo dos bombons, que se mantém contante, mas que provoca a variação no preço de acordo com a quantidade de bombons adquirida (Pinto, 2011) e que tem implícito um raciocínio multiplicativo incompatível com um sentido aditivo.

O cálculo da multiplicação envolvendo frações, é diferente do cálculo da multiplicação envolvendo somente números inteiros positivos, pois implica mais do que uma operação entre dois ou mais elementos, já que a fração tem subjacente uma dimensão relacional, não só de "parte-todo", no caso de $\frac{3}{4}$ traduzindo 3 de 4, como também, de razão, que no caso de $\frac{3}{4}$ a leitura se faz como sendo 3 para 4 (Monteiro & Pinto, 2005). Estas duas dimensões relacionais são muito importantes na aprendizagem da multiplicação de frações, contudo a sua compreensão nem sempre é fácil devido ao nível de abstração a que obriga. É difícil para a maioria dos alunos, no 2.º Ciclo, compreender que a multiplicação de uma fração por um número natural pode originar um produto menor que o referente, quando se trata de uma fração unitária (Pinto, 2011), isto é, uma fração entre 0 e 1, algo que nunca acontece na multiplicação de números inteiros positivos. Considerando o exemplo da caixa de bombons referido anteriormente podemos constatar este facto, cujo objetivo é saber quantos bombons são $\frac{3}{4}$ de 12 bombons, o referente são os 12 bombons e os 9 bombons são os $\frac{3}{4}$ dos 12 bombons, traduzido pelo algoritmo $\frac{3}{4} \times 12 = 9$, sendo, então, 9 (o produto) menor que 12 (o referente).

Os alunos têm dificuldade, conforme refere Brocardo (2010), em "compreender um trabalho numérico que passe, rapidamente, do exemplo para a definição e para a manipulação abstrata dos números e das operações entre eles" (p. 16). Daí a grande importância dos contextos significativos para os alunos, de onde se parte para a aprendizagem, pois como afirma Neeleman (1991) "(...) é a realidade que dá coerência à matemática aprendida" (p. 39).

5.3 Educação Matemática Realista

A Educação Matemática Realista (EMR) surgiu na Holanda no final da década de 1960, uma época em que o ensino formal da matemática tinha como base os princípios do Movimento da Matemática Moderna, caracterizado pelo método dedutivo e com uma grande influência estruturalista (Dias et al., 2022). Em oposição a este estilo de ensino formal, que requer um elevado nível de abstração, Freudenthal, o pai da EMR, criou uma proposta curricular que intentava modernizar a educação matemática da época, defendendo que a matemática é uma atividade que deve ser executada para ser aprendida e que, para isso, os alunos têm de a reinventar e recriar (Neeleman, 1991), através de generalizações que, progressivamente, vão formalizando. Freudenthal chamou a este processo, em que o conhecimento se vai tornando cada vez mais formal e abstrato, de matematização (Monteiro & Pinto, 2005). Por exemplo, num contexto do dia-a-dia, comer o dobro de meia maçã tem subjacente uma ação diferente de comer metade de duas maçãs (Fischer, 2020), sendo importante os alunos darem significado aos números, à forma como se relacionam entre si e com o operador que fornece a instrução, neste caso a multiplicação. Contudo, progressivamente, é igualmente importante que os alunos se vão confrontando com a troca da ordem dos fatores, para compreenderem que o produto não se altera, ou seja, matematicamente, o produto dos algoritmos $2 \times \frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2} \times 2$ é o mesmo, sendo igual a 1, já que a propriedade comutativa da multiplicação se foca apenas no resultado numérico, não sendo posta em causa pelo contexto. Esta é uma forma de progressivamente ir formalizando a aprendizagem das frações e o domínio das suas operações e propriedades.

As frações fazem parte de diversas vivências do quotidiano dos alunos, pelo que é dever do professor despertar os alunos para a consciencialização dessa realidade, dando significado às suas aprendizagens no ensino formal. Assim, o conceito vai sendo compreendido a partir de situações concretas de construção de significado, que reveem na sua vida diária, as quais podem também aplicar no futuro também na vida diária para a resolução de problemas (Scheffer & Powell, 2019).

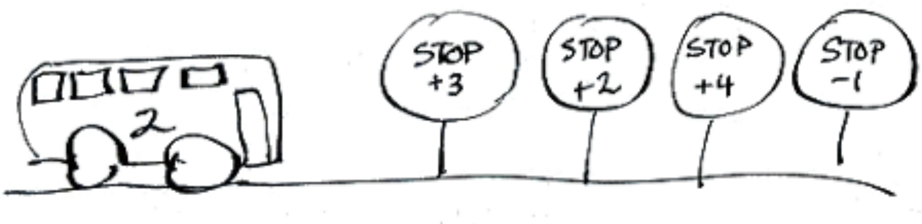
A EMR está muito ligada às estratégias de pensamento dos alunos e isto liga-se aos modelos matemáticos, "de pensar" e "para pensar," que são representações que os alunos utilizam para resolver problemas ou explorar relações (Fosnot & Dolk, 2002). Os "modelos de pensar" são caraterizados por representarem situações concretas, em que o aluno é orientado por situações da realidade quotidiana e utiliza as suas estratégias pessoais de pensamento para resolver um problema. Já os "modelos para pensar" exigem um nível de abstração e de compreensão dos números e das relações que estabelecem entre si e das operações matemáticas, acompanhados de figuras como a reta numérica.

Assim, o professor, à medida que os alunos exploram os "modelos de pensar" orienta-os para fazerem generalizações das suas estratégias evoluindo para "modelos para pensar" em que já são capazes de estabelecer relações numéricas.

Como exemplo de "modelos de pensar" e de "modelos para pensar", Fornost e Dolk (2002) apresentam o problema de um autocarro que transporta alguns passageiros, no qual entram e saem outros passageiros ao longo do seu percurso. No final o objetivo é saber a quantidade de passageiros que fica no autocarro. O problema apresenta exemplos de diferentes representações que os alunos poderão utilizar para apoiar o seu raciocínio, ilustrados pela Figura 1, Figura 2 e Figura 3.

Figura 1

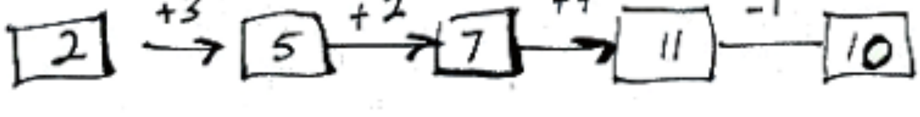
Exemplo de um tipo de representação que os alunos podem ter como suporte à resolução do problema.



Nota: Adaptado da PFCM da ESE de Setúbal

Figura 2

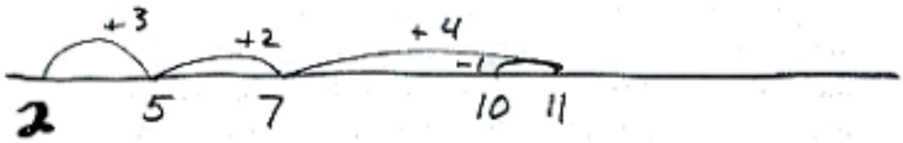
Exemplo de um tipo de representação que os alunos podem ter como suporte à resolução do problema.



Nota: Adaptado da PFCM da ESE de Setúbal

Figura 3

Exemplo de um tipo de representação que os alunos podem ter como suporte à resolução do problema.



Nota: Adaptado da PFCM da ESE de Setúbal

A Figura 1 é um exemplo de um "modelo de pensar" com uma estratégia que os alunos podem utilizar para resolver o problema, que mostra o autocarro, bem como os sinais de trânsito que retratam as respetivas paragens em que entram e saem os passageiros. Este modelo tem uma ação muito importante no pensamento dos alunos, pois aproxima-os da realidade e permite-lhes imaginar o problema, pois, para uns, trata-se de uma situação comum do seu quotidiano e, para outros, apesar de poderem não utilizar o autocarro no seu dia-a-dia, é um cenário que conhecem.

Desta forma, gradualmente, à medida que vão executando diversas tarefas, vão sendo capazes de generalizar e de operar em modelos mais abstratos, como é exemplo a reta numérica, que representa um "modelo para pensar", ilustrado na Figura 3, e aplicável ao contexto do autocarro ou a qualquer outro.

Assim, o professor, na sala de aula deve apresentar uma proposta de resolução de problemas contextualizados à realidade dos alunos que lhes permita aprenderem de uma forma ativa, promovendo não só a sua capacidade de resolver problemas, como também, outras competências transversais que concomitantemente se vão desenvolvendo, como por exemplo, o raciocínio matemático, a comunicação matemática, ou as conexões matemáticas.

5.4 Estudos sobre a aprendizagem dos números racionais

Para a realização deste estudo, foi necessário identificar e analisar documentos com investigações já realizadas relacionadas com o tema, que consistiu numa revisão bibliográfica, permitindo-me contextualizar o estudo e estabelecer um vínculo com o conhecimento já existente (Coutinho, 2022). No que concerne aos números racionais, especificamente ao foco do estudo que incide no significado da fração como operador, encontrei poucos documentos de investigações que com este se relacionassem.

Em Portugal, Monteiro e Pinto (2005) afirmam que "a investigação no âmbito da aprendizagem dos números racionais é escassa e a que existe é relativamente recente" (p. 101). As mesmas autoras investigaram sobre a aprendizagem dos números racionais, focando-se nos diferentes significados que podem assumir as frações, no conceito de unidade nos números fracionários e no percurso entre o informal e o formal. As autoras referem a aprendizagem realizada em Portugal no contexto das escolas e concluem que existe uma preferência pela abordagem parte-todo na fração em detrimento dos outros significados que esta pode assumir. Também referem que a representação das frações na forma de numeral misto é rara, assim como a representação da fração imprópria. Acrescentam que a introdução da décima parte, após as noções de "metade de", "quarta parte de" terem sido trabalhadas, é maioritariamente usada na representação de numeral decimal (0,1), não sendo feita a relação com o operador ($\frac{1}{10}$), ficando por fazer a conexão entre a representação decimal e a representação fracionária ($0{,}1 = \frac{1}{10}$). Neste documento, Monteiro e Pinto (2005) mencionam algumas investigações realizadas em Portugal, uma delas por Pinto (2004) sobre a aprendizagem do conceito de número racional, em que a autora sugere que se deve estudar uma forma de desenvolver materiais, técnicas e processos adequados ao desenvolvimento de competências de cálculo e sentido do número, para permitir a interiorização não só das várias representações que um número pode assumir, como também, das operações entre essas diversas representações. Monteiro e Pinto (2005) concluem que é necessário tempo e, também, conexões entre as diferentes representações de número para que se desenvolva o sentido de número racional. Indicam também que se devem estabelecer relações entre o processo de ensino informal, em que o aluno utiliza as suas estratégias pessoais na resolução de problemas, e o formal, que acentua uma matemática mais mecanicista e estruturalista, fundamental para o conhecimento matemático.

Outra investigação, realizada com alunos do 5.º ano por Graça et al. (2023), sobre a aprendizagem dos números racionais através de uma abordagem integrada das suas diferentes representações e da conversão entre elas, revela a compreensão que estes alunos têm das diferentes representações simbólicas dos números racionais. Graça et al. (2023) concluem que “o conhecimento de números inteiros antes da experiência de ensino influenciou fortemente o modo como concebiam os novos conceitos” (p. 22) e que a representação de fração era aquela com que estavam mais familiarizados, apesar de compreenderem a fração não como um número, mas como dois números inteiros independentes em que, por vezes, consideravam apenas um dos termos. Os mesmos autores concluem que a investigação revela que a abordagem utilizada é promissora, pois a conversão das diferentes representações do número racional ajuda na compreensão dos números racionais, como também ajuda a superar as maiores dificuldades destes alunos no que concerne à compreensão dos numerais decimais e das frações.

As representações e significados do número racional também fazem parte da investigação de Carvalho (2016), na sua tese de doutoramento, envolvendo alunos do 6.º ano de escolaridade, cujo tema é o cálculo mental com números racionais. Um dos aspetos que Carvalho (2016) refere é o significado da fração como operador “que tem um papel transformador, ou seja, é algo que atua sobre uma situação e a transforma” (p. 24), pois no caso da operação da multiplicação de números racionais são produzidas “novas quantidades que estão relacionadas com as quantidades operadas” (p. 45). A autora considera que a falta de modelos mentais dificulta a conceptualização do conjunto dos números racionais, um conjunto numérico diferente dos números naturais em que existem modelos que facilitam a compreensão das operações entre os números. No que diz respeito à multiplicação de números racionais, Carvalho (2016) alude que é importante que os alunos compreendam que esta operação significa mais que um conjunto de adições sucessivas (3×5 significa $5+5+5$), sendo fundamental dar significado à multiplicação especialmente quando estamos perante uma interpretação combinatória (3×5 como o número possível de combinar 3 camisolas com 5 calças) ou “uma parte de algo” ($\frac{2}{3} \times \frac{5}{2}$

que significa $\frac{2}{3}$ de $\frac{5}{2}$). A autora salienta ainda, fundamentada em estudos de outros autores, que para a maioria dos alunos é mais fácil fazer a multiplicação de um número inteiro por uma fração que o inverso e, por isso, é mais facilitador introduzir o conteúdo da multiplicação de frações dessa forma, por exemplo, $3 \times \frac{1}{4}$ que significa 3 grupos de $\frac{1}{4}$.

Em conformidade com estas ideias, as AE da Matemática do 5.º ano do 2.º CEB, no subtópico da multiplicação entre naturais e frações, apresentam como objetivos de aprendizagem "Reconhecer a multiplicação de um número natural por uma fração como a adição sucessiva dessa fração" e "Multiplicar uma fração por um número natural, dando significado à fração como operador" (DGE, 2021, p. 23). A apresentação destes dois objetivos pode ser entendida como pressupondo uma sequenciação no trabalho a desenvolver na sala de aula: abordar primeiro a multiplicação de um número natural por uma fração, e só depois a multiplicação de uma fração por um número natural.

Carvalho (2016) refere também alguns erros comuns na multiplicação de frações que diz estarem associados à introdução prematura de algoritmos, pois os alunos determinam o denominador comum, como na adição/subtração de frações, e multiplicam os numeradores, algo que acontece porque ainda não se apropriaram do significado da operação. Quando se trata da multiplicação de um número inteiro por uma fração, o erro recorrente é o de os alunos considerarem que devem multiplicar o número inteiro pelo numerador e pelo denominador. Outra dificuldade sentida pelos alunos e que está associada a uma visão da multiplicação enquanto adições sucessivas, e que gera o erro, é o facto de nos numerais decimais a multiplicação nem sempre produzir um resultado maior que um dos termos que estão a ser multiplicados. A autora menciona a importância de trabalhar as operações com numerais decimais e de dar significado à multiplicação de um número natural por uma fração, estendendo o conhecimento que vem de trás na aprendizagem da multiplicação, traduzida em adições sucessivas. Carvalho (2016) refere também que para ultrapassar as dificuldades associadas à compreensão dos números racionais, é fundamental "privilegiar contextos que permitam relacionar as várias representações dos números racionais" (p. 59).

Igualmente, Pinto (2011), na investigação que realizou na sua tese de doutoramento, sobre o desenvolvimento do sentido da multiplicação e da divisão de números racionais, menciona as “descontinuidades entre adição e multiplicação” (p. 113), nomeadamente na multiplicação de um número natural por um número entre 0 e 1, cujo produto é menor, considerando essencial proporcionar aos alunos contextos que permitam trabalhar as diferenças entre estes dois tipos de raciocínio. Salienta as estruturas multiplicativas que exigem a distinção das quantidades extensivas e das quantidades intensivas, em que as primeiras são uma entidade simples em que o todo é igual à soma das partes, e as segundas envolvem duas entidades e, por conseguinte, quantidades de natureza diferente que requerem um relacionamento constante entre as duas quantidades. A autora menciona que a aprendizagem da multiplicação de números racionais deve ser um processo que proporcione aos alunos a construção do seu próprio conhecimento, orientados pelo professor, com dinâmicas de interação e cooperação essenciais para práticas de reflexão, que conduzem a um desenvolvimento progressivo de estratégias e conceitos de nível mais elevado. A autora refere ser muito importante interligar conteúdos para que a construção de conhecimento se faça numa base coerente e organizada, diversificando modelos de representação que permitam trabalhar os seus conhecimentos informais, “modelos de pensar” que evoluam gradualmente para os “modelos para pensar” que requerem o conhecimento formal da matemática. Neste estudo, Pinto (2011) apresenta propostas curriculares para o ensino-aprendizagem de números racionais, adotando a perspetiva da EMR, pois considera que ensinar matemática é inseri-la na realidade de cada aluno.

A revisão bibliográfica que realizei contemplou igualmente investigações de autores internacionais, das quais destaco Fosnot e Dolk (2002) que desenvolvem o conceito de modelos matemáticos como representações de relações matemáticas que ajudam na resolução de problemas, desde os “modelos de pensar” até aos “modelos para pensar”. Destaco, também, a investigação sobre o conceito de multiplicação de frações à luz do construtivismo e da teoria sociocultural, de Simon (2019), em que o autor estuda as principais teorias de aprendizagem do desenvolvimento em psicologia e a importância que estas têm no desempenho na educação matemática.

5.5 Estudo de Aula

O estudo de aula (EA) consiste num processo de desenvolvimento profissional com origem no Japão no início do século XX, que surgiu pela necessidade de melhorar o ensino e a aprendizagem na sala de aula. Tratando-se de um processo formativo para melhorar a prática do professor (Quaresma & Ponte, 2019), centra-se, obrigatoriamente, nas aprendizagens dos alunos (Ponte et al., 2016), com ênfase nas suas dificuldades emergentes, permitindo ao professor tornar a sua prática cada vez mais pedagógica e eficaz na compreensão dos conteúdos a lecionar.

Inicialmente, no Japão, esta metodologia foi aplicada no ensino da matemática. Atualmente, estendeu-se a outras áreas curriculares, dado o interesse da comunidade educativa internacional pela abordagem japonesa à educação escolar (Fujii, 2018). Também em Portugal, estendeu-se a outras áreas do currículo, tais como, a Matemática, a Biologia e Geologia, a Física e Química e a Educação Física (PEA, 2020).

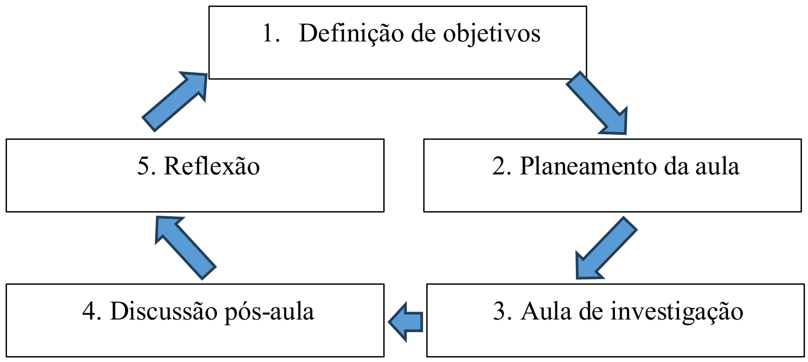
Para Houringan e Leavy (2019), o EA revela-se uma prática facilitadora para trabalhar os desafios que o professor enfrenta, cada vez maiores e mais complexos, que surgem num ensino considerado, tradicionalmente, "uma prática individual e frequentemente isolada" (p. 1) e, tem contribuído de uma forma produtiva para o desenvolvimento profissional do professor. Apoia-se numa "escola, colaborativa, reflexiva, interativa e baseada na investigação" (Murata 2011, citada por Houringan & Leavy, 2019). Deste modo, assenta num trabalho colaborativo entre professores que, através da sua abordagem de investigação e da experiência de lecionação de cada um, tentam compreender a forma como os alunos desenvolvem as suas aprendizagens (Hourigan & Leavy, 2019) e, assim, desenvolver continuamente novas competências para a melhoria da sua didática.

Segundo Stigler e Hiebert (1999, citados por Cardoso et al., 2023, p. 72), o EA refere-se a uma "abordagem para melhorar o ensino e a aprendizagem da matemática", integrando na sua matriz uma componente formativa para professores, com base num trabalho colaborativo entre os professores, visando a aprendizagem dos alunos, em que a reflexão e a colaboração são verbos de comando na ação do desenvolvimento de todo o processo.

O modelo de EA no ensino da matemática praticado pelos professores japoneses é constituído por um ciclo de cinco etapas, de acordo com a Figura 4:

Figura 4

Estudo aula e ensino da matemática



Nota: Adaptado de Fujii (2018, p. 3).

Na fase 1. *Definição de objetivos*, de acordo com os objetivos de aprendizagem propostos no currículo nacional que se esperam que os alunos desenvolvam a longo prazo e com as aprendizagens que na realidade estão a ser desenvolvidas pelos alunos, o grupo de professores identifica lacunas e procura resolvê-las (Fujii, 2018).

Na fase seguinte, *Planeamento da aula*, tendo como base as lacunas identificadas no passo anterior, é elaborado o planeamento da aula de investigação, pelo que os professores envolvidos planificam uma aula para ser trabalhada/observada com detalhe e em profundidade (Hourigan & Leavy, 2019). Assim, de acordo com o tema, são definidos os objetivos específicos, estabelecendo ligações entre conteúdos trabalhados anteriormente e os que se vão trabalhar, bem como, definidas as atividades e os procedimentos, recursos e materiais necessários à sua realização. É elaborado um plano detalhado com as tarefas propostas pelos professores, antecipando as dificuldades e as estratégias de resolução dos alunos (PEA, 2020). Para isso, os professores tomam como base as orientações curriculares em vigor, a sua experiência profissional relativamente às expectativas que têm dos alunos e os resultados de outras investigações análogas. A planificação de aula não tem como objetivo principal o de conceber um plano perfeito, mas, mais importante, tem a intenção de testar o plano delineado, num contexto real, para perceber como os estudantes aprendem (Murata, 2011). Nesta fase é também preparado o processo de observação e de recolha de dados para a investigação.

Segundo Fujii (2018), as duas primeiras fases do EA, em cima descritas, são a base para o sucesso das fases subsequentes, pois na fase seguinte, designada como *Aula de investigação*, um dos professores do grupo leciona e os outros professores observam e recolhem dados com recurso a gravações áudio/vídeo e/ou notas de campo, interferindo o mínimo possível no desenvolvimento da aula. Por isso, é fundamental que os objetivos definidos sejam precisos, rigorosos e adequados e que o plano de aula elaborado seja o mais detalhado e completo possível para que o professor que leciona tenha o plano das tarefas que propõe aos alunos bem trabalhado para estabelecer com eles um diálogo fluido, objetivo e assertivo de forma a orientá-los durante o processo de aprendizagem. Os professores que estão a observar devem, igualmente, estar imbuídos do conhecimento matemático e didático inerente às tarefas para a recolha de dados fidedignos que consigam responder aos objetivos da investigação.

A fase 4, *Discussão pós-aula*, é o momento em que o grupo de professores se reúne para partilhar as suas observações da aula e fazer a suas reflexões (PEA, 2020), destacando os êxitos dos alunos e as questões relativas à sua aprendizagem, ao conteúdo disciplinar, à conceção da aula assim como aos aspetos mais gerais do ensino e da aprendizagem (Fujii, 2018).

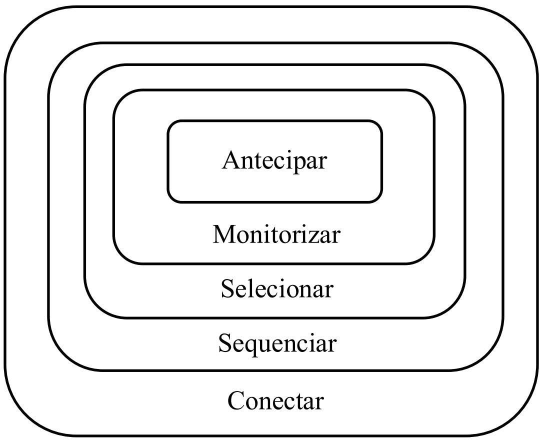
Na última fase, que corresponde à fase 5, *Reflexão*, o grupo de professores reúne-se para consolidar e documentar o que foi aprendido pelos alunos na aula de investigação, com vista à elaboração de um relatório que deve incluir o planeamento da aula de investigação, os dados dos alunos referentes à aula e uma reflexão sobre as suas aprendizagens (Fujii, 2018). Este procedimento serve de base, segundo Fujii (2018), para que o que foi aprendido possa ser implementado no futuro e para serem levantadas novas questões para um ciclo seguinte de EA.

Será pertinente referir que existe um modelo, que não a metodologia do EA, não sendo iguais têm aspetos em comum, podendo ser trabalhados simultaneamente. Compreende práticas de discussões matemáticas em torno de tarefas, as quais, se podem enquadrar na metodologia do EA. Este modelo, proposto por Stein et al. (2008), é utilizado para gerir a ampla gama de respostas dos alunos, quando confrontados com tarefas cognitivamente exigentes. Deste modo, O professor deve estar preparado para fazer uso dessas respostas orientando os alunos até ao resultado, proporcionando-lhes uma compreensão mais profunda do significado da matemática.

O modelo de Stein et al. (2008) incide nas práticas que facilitam as discussões matemáticas em torno de tarefas cognitivamente exigentes: (1) antecipar as respostas prováveis dos alunos; (2) monitorizar as respostas dos alunos relativamente às tarefas durante a fase de exploração; (3) selecionar alguns alunos para apresentarem as suas respostas na fase de discussão e síntese; (4) sequenciar as respostas dos alunos que se revelem mais pertinentes à tarefa para serem apresentadas; e (5) ajudar a turma a estabelecer conexões matemáticas entre as respostas de cada aluno, individualmente, com as respostas de todos alunos e as ideias-chave (*Ibidem*). Assim, a prática do antecipar é trabalhada na etapa do EA relativa ao planeamento da aula, sendo as práticas da monitorização, da seleção, da sequenciação e das conexões, trabalhadas na etapa do EA relativa à aula de investigação. Na Figura 5 e Figura 4, respetivamente, estão representadas as práticas e as fases do EA em cima referidas.

Figura 5

Diagrama esquemático das cinco práticas. Cada uma das práticas depende da prática que a incorpora



Nota: Adaptado Stein et al. (2008, p. 322).

Ainda relativamente ao EA, existem outros modelos que ilustram o ciclo semelhante ao modelo praticado pelos professores japoneses, representado na Figura 4. Não obstante a diversidade de modelos, um dos aspetos comuns a todos eles, é o facto de o EA ter como objetivo o desenvolvimento profissional dos professores, embora se foque nas aprendizagens dos alunos. Para Baptista et al. (2014), quanto melhor os professores compreenderem os processos de raciocínio dos alunos, mais aptos estão para os orientar e ajudar a desenvolver as suas aprendizagens conduzindo-os ao sucesso.

A revisão bibliográfica que recaiu sobre o EA, contemplou várias investigações, das quais destaco Fujii (2018), que conforme já descrito anteriormente, estuda uma forma de melhorar o ensino da matemática através da resolução de problemas concomitantemente com a melhoria da educação em sala de aula.

Também Hourigan e Leavy (2019) mencionam na sua investigação sobre aprender com o ensino que os professores devem ir até ao seu potencial máximo na melhoria da sua didática, pelo que, devem progredir e aperfeiçoar o seu conhecimento sobre os conteúdos a lecionar e, igualmente, no seu conhecimento pedagógico do conteúdo.

Outras investigações sobre o EA, como as investigações de Baptista et al. (2014) Ponte et al. (2016) e Quaresma e Ponte (2019) são unânimes em afirmar que o EA, enquanto processo de formação de professores, revela um grande potencial de aprendizagem na escolha de tarefas adequadas ao objetivo da aula e aos processos de raciocínio dos alunos. Também são conclusivos na contribuição que o EA dá ao trabalho colaborativo que se desenvolve entre os participantes, professores em formação inicial, professores com experiência de lecionação e/ou formadores, e similarmente na valorização que todos dão à reflexão, o que favorece um ambiente de integração de conhecimento entre todos os intervenientes. Os autores referem que sendo o EA um processo de formação de professores, todas as potencialidades já referidas, seriam mais efetivas se se tornasse uma prática recorrente do sistema educativo.

6. METODOLOGIA

Neste capítulo explicitam-se as metodologias de investigação utilizadas neste estudo, que compreendem a natureza do estudo, a caracterização do contexto e dos participantes, as técnicas de recolha e de análise de dados, o *design* do estudo e, por último, os princípios éticos do processo de investigação.

6.1 Natureza do estudo

Este estudo situa-se num paradigma interpretativo de natureza qualitativa que visa interpretar os processos de aprendizagem dos alunos e na reflexão das minhas práticas docentes enquanto professora estagiária em conformidade com a problemática a que se propôs dar resposta, a de: compreender de que forma o contexto do EA contribuiu para a melhoria da aprendizagem dos alunos envolvendo os números racionais. Coutinho (2022) refere que a abordagem interpretativa/qualitativa das questões sociais e educativas deve interpretar e compreender os significados das ações intencionais dos sujeitos, no caso deste estudo, os significados que os alunos atribuíram aos seus processos de aprendizagem no contexto educativo do EA.

Sendo o estudo desta investigação de natureza qualitativa, enquadra-se no modelo de Bogdan e Biklen (1994) que referem que as caraterísticas de uma investigação qualitativa contemplam os seguintes aspetos: (i) "(...) a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal" (p. 47), correspondendo ao contexto de EA com a observação do investigador direcionada para os processos de pensamento dos alunos; (ii) "(...) é descritiva. Os dados recolhidos são em forma de palavras ou imagens e não de números" (p. 48), correspondendo o registo de dados às citações dos alunos sobre o seu pensamento e estratégias, bem como, complemento das notas de campo com recurso à fotografia e filmagem; (iii) "Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos" (p. 49), correspondendo à observação e recolha de dados dos diferentes processos dos alunos até terem chegado ao resultado; (iv) "Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva" (p. 50), correspondendo ao facto das questões emergirem do real para a teoria e o problema da investigação surgir do próprio contexto; e (v) "O significado é de importância vital na abordagem" (p. 50) desta natureza, correspondendo à relevância atribuída aos processos dos alunos e aos seus pontos de vista de forma a orientá-los para a aprendizagem.

Na metodologia de investigação qualitativa é fundamental que o investigador esteja familiarizado com o objeto de estudo e com o contexto, pois a qualidade dos dados recolhidos e os instrumentos utilizados na sua recolha vão depender da sua sensibilidade, integridade e conhecimento, assegurando a fiabilidade e validade da investigação (Sousa & Baptista, 2014).

6.2 Caracterização do contexto e dos participantes

Este estudo foi realizado numa instituição de ensino público, sede de agrupamento, integrada num TEIP, localizada na cidade de Lisboa.

Os participantes constituíam uma turma do 5.º ano do 2.º CEB, de 21 alunos, 13 do sexo feminino e 8 do sexo masculino, com idades compreendidas entre os 9 e os 12 anos.

Uma descrição mais pormenorizada do contexto e dos participantes foi anteriormente apresentada, na Parte I deste documento no capítulo 2.

6.3 Técnicas de recolha e de análise de dados

Considerando a natureza do presente estudo, o seu contexto e participantes, a técnica de recolha de dados que se mostrou mais adequada foi a de observação participante, posicionando-se o investigador como instrumento principal da observação (Sousa & Baptista, 2014), recolhendo os dados em interação com os participantes.

Tratando-se de uma observação em contexto de EA, para que a professora estagiária responsável pela investigação estivesse mais disponível e focada na observação, não obstante à interação com os participantes, foi o seu par de estágio que assumiu a responsabilidade da gestão da turma e lecionou a aula.

A recolha de dados foi feita através de notas de campo. Os registos escritos ocorreram em forma de notação, com breves descrições acerca das estratégias utilizadas pelos participantes na resolução de problemas, e em forma de *checklist*, organizada por categorias e subcategorias preenchidas durante a observação pelo investigador (Coutinho, 2022). Durante a exploração autónoma das tarefas, além do registo das suas estratégias, ao circular pelos alunos, captei também as suas resoluções através de fotografia. As discussões coletivas das tarefas foram videogravadas, e transcritas posteriormente. Dos registos vídeo, foi possível captar as imagens das resoluções dos alunos apresentadas no quadro. Na recolha de dados, a fotografia e o vídeo revelaram-se ferramentas fundamentais, pois complementaram os registos escritos que, para Coutinho (2022), transformam a notação num procedimento descritivo, com registos escritos mais pormenorizados e com mais profundidade, um método característico de contextos naturais. Através deste procedimento, neste estudo, o investigador utilizou uma "ferramenta" denominada *analysis*, cuja postura de observação se foca apenas naquilo que é importante para o contexto de estudo e para os objetivos específicos que se procuram alcançar (Coutinho, 2022).

Relativamente à análise de dados, na aprendizagem sobre números racionais ~~e~~ foram consideradas as seguintes categorias analíticas: representação da realidade, modelo de pensar e modelo para pensar.

No que concerne à contribuição do EA para a melhoria das práticas da professora estagiária, as categorias analíticas consideradas foram as seguintes: seleção/conceção de tarefas e materiais, abordagem metodológica das aulas, antecipação de dificuldades dos alunos, antecipação de estratégias dos alunos, condução da discussão coletiva, reflexão, e colaboração entre o par de estágio.

Os dados recolhidos foram selecionados e organizados, sendo feita a *analysis* para a sua redução e codificação, com o foco em padrões de pensamento e regularidades importantes para a interpretação do objetivo do estudo, fazendo-se a ligação do problema aos dados (Coutinho, 2022). Os dados selecionados – unidades de análise – foram organizados em categorias conceptuais e colocados em tabelas de modo a facilitar a sua consulta.

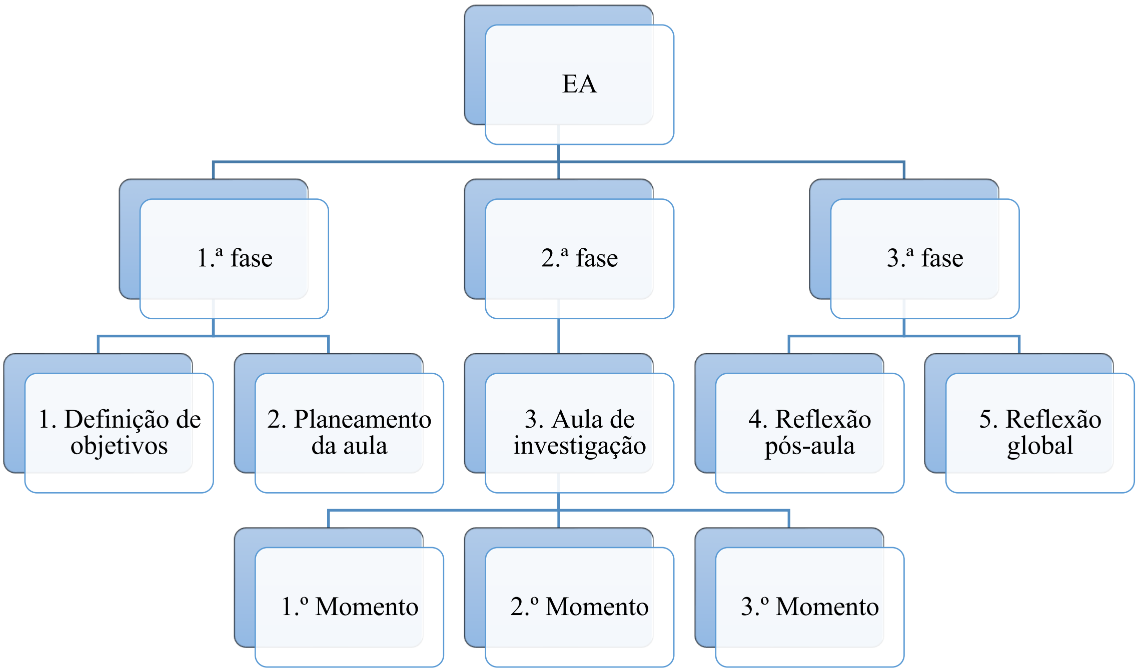
6.4 Estrutura do Estudo de Aula realizado

Neste sentido, realizou-se um EA, com o foco direcionado para a melhoria das aprendizagens dos alunos, contudo, sendo um processo formativo para professores, incidiu também na reflexão das minhas práticas docentes enquanto professora estagiária.

Este EA foi estruturado em três fases (cf. Figura 6), que incluem as cinco etapas do modelo de EA praticado pelos professores japoneses (cf. Figura 4) e contemplou uma sequência de tarefas concebida para ser desenvolvida em três momentos, tendo sido implementada em três aulas. Deste modo, resultou num EA adaptado do seu modelo original que contempla uma única aula.

Figura 6

Diagrama esquemático das três fases do EA.



As fases do EA são apresentadas em tabelas no anexo E – Tabelas sobre a metodologias com a descrição das fases do EA.

6.5 Princípios éticos do processo de investigação

Esta investigação desenvolveu-se tendo em consideração um conjunto de regras de carácter ético como princípios orientadores, mencionados na Carta de Ética elaborada pela Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação (2014).

Tratando-se de um contexto em que os participantes se enquadravam num grupo humano vulnerável, foi tido em consideração, conforme SPCE (2014) "o princípio fundamental do respeito por cada Pessoa" (p. 7).

Na relação com os participantes foi respeitado o consentimento informado, esclarecendo os participantes do trabalho que se iria realizar e qual a sua finalidade, bem como, a confidencialidade/privacidade garantindo o seu anonimato e a confidencialidade dos dados recolhidos (SPCE, 2014). As transcrições dos comentários dos participantes são identificadas com nomes codificados (A_1 até A_{21}) e nas imagens fotográficas utilizadas não é possível identificar os participantes.

Na relação com o grupo de trabalho, foi estabelecido um comportamento ético para o bem-estar e produtividade no plano coletivo e preservada a imagem pública das entidades envolvidas.

No que concerne ao profissionalismo do investigador, foi assumida uma postura de forma a salvaguardar a veracidade e integridade dos dados recolhidos durante e ao longo da sua análise, protegendo a integridade da investigação e o seu valor científico (SPCE, 2014).

7. APRESENTAÇÃO E TRATAMENTO DE RESULTADOS

Neste capítulo são apresentados e tratados os dados recolhidos na investigação tendo como referência o objetivo do estudo.

Neste sentido, importa sublinhar que a investigação decorreu no contexto de um EA, concebido com o propósito de orientar os alunos a ultrapassarem as dificuldades demonstradas na aprendizagem dos números racionais, em particular, conforme a DGE (2021), na multiplicação de "uma fração por um número natural, dando significado à fração como operador" (p. 23). Paralelamente, sendo o EA um processo de desenvolvimento profissional, a investigação assumiu um duplo significado, com o intuito de compreender de que forma o EA contribuiu para a melhoria das práticas da professora estagiária, concorrendo com o compromisso de uma atitude ativa na gestão do currículo (Serrazina & Oliveira, 2001).

Processos dos alunos na aprendizagem da multiplicação de uma fração por um número natural

Anteriormente à aprendizagem da multiplicação de uma fração por um número natural, foram trabalhados com os alunos problemas simples, que partiram da sua realidade, como por exemplo, a representação de barras de chocolate, pizas, ou modelos de pensar como o relógio divido em quartos (Anexo F). Na prática, partiu-se de tarefas com o número natural a multiplicar pela fração, em que a multiplicação pode ser compreendida como a adição repetida, seguindo-se tarefas com a fração a multiplicar pelo número natural, que envolveram a fração com o sentido de operador, que pressupõe o sentido de partição, isto é, de partir o todo e contabilizar os grupos que contém. Por fim, foram propostas tarefas de reconstrução da unidade, a qual pressupõe também o sentido de partição, isto é, de partir a parte apresentada no número de grupos correspondente ao numerador e completar com os grupos que faltam para constituir o todo.

Passa-se à apresentação dos dados recolhidos, no contexto de estudo de aula, nas tabelas que seguem.

Na Tabela 3, está representada a estratégia do aluno A_1 que a partir de uma situação da realidade calcula quantos bombons são $\frac{2}{3}$ dos 9 bombons que contém a caixa.

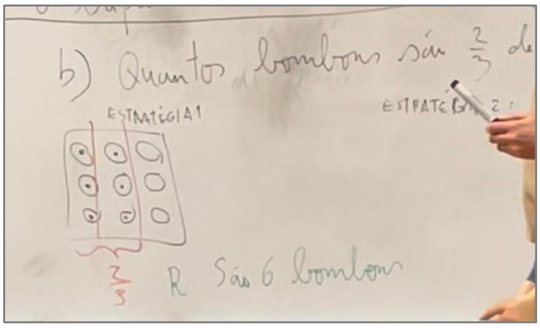
Tabela 3

Categorias analíticas da aprendizagem sobre números racionais: Tarefa "Caixa de bombons"

1.º Momento do EA			
Tarefa "Caixa de bombons" (Anexo G) A Patrícia tem uma caixa com 9 bombons. O número de bombons pode ser dividido em três partes iguais. Quantos bombons são: a) $\frac{1}{3}$ dos nove bombons; b) $\frac{2}{3}$ dos nove bombons			
Categoria	Estratégia	Tipo de Unidade	Descrição
Representação da realidade	Partição da unidade e agrupamento	Unidade discreta	Representação e partição do todo no número de partes correspondente ao denominador e, em seguida, o agrupamento do número de partes correspondente ao numerador. Por fim, é realizada a contabilização do número de itens existentes nas partes agrupadas (cf. Figura 7)
Exemplo ilustrativo			

Figura 7

Cálculo de quantos bombons são $\frac{2}{3}$ dos nove bombons da caixa.



Nota: resolução recolhida pela autora do relatório

Segue-se a tarefa do "Saco com bolas" (cf. Tabela 4) que se refere a um problema de reconstrução de unidade discreta.

Tabela 4

Categorias analíticas da aprendizagem sobre números racionais: Tarefa "Saco com bolas"

1.º Momento do EA			
Tarefa "Saco com bolas" (Anexo H) Num saco está um conjunto de bolas, $\frac{2}{3}$ são azuis e as restantes são amarelas. Sabendo que dentro do saco estão 8 bolas azuis, quantas bolas tem o saco no total?			
Categoria	Estratégia	Tipo de Unidade	Descrição
Representação da realidade	Utilização unitária da parte	Unidade discreta	A_2 considerou que $\frac{1}{3}$ das bolas do saco correspondiam a 8 bolas, desenhando 3 grupos de 8. Assumiu que $\frac{2}{3}$ correspondiam a 16 bolas, sendo 24 o total de bolas no saco (cf. Figura 8). Esta resolução incorreta ocorre da dificuldade de fazer a reconstrução da unidade.

Modelo de pensar	Partição da parte e completamento da unidade	Unidade discreta	A_4 recorreu a uma estratégia utilizando a piza como um modelo de pensar, partindo a parte apresentada dos $\frac{2}{3}$ de bolas azuis em 2 grupos de 4 bolas, completando com o grupo que faltava, que corresponde a $\frac{1}{3}$ das bolas (cf. Figura 9)
Exemplos ilustrativos			

Figura 8

Representação do aluno A_2 do número de bolas que contém o saco.

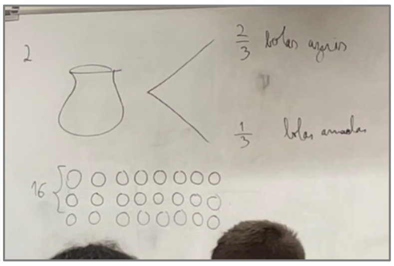
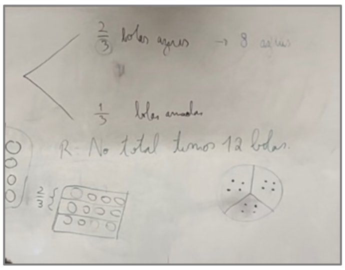


Figura 9

Representação do aluno A_4 do número de bolas que contém o saco.



Nota: resolução recolhida pela autora do relatório

A Tabela 5 apresenta as estratégias dos alunos referente à tarefa "Tira de papel" que se refere à reconstrução da unidade de uma variável de unidade contínua.

Tabela 5

Categorias analíticas da aprendizagem sobre números racionais: Tarefa "Tira de papel"

1.º Momento do EA			
Tarefa "Tira de papel"[1] (Anexo H) A Figura seguinte representa $\frac{3}{4}$ de uma tira de papel. Representa a tira inteira			
Categoria	Estratégia	Tipo de Unidade	Descrição
Representação da realidade	Utilização unitária da parte	Unidade contínua	A_5 assumiu que a parte representa $\frac{1}{4}$ da tira, tendo representado 4 vezes a parte apresentada (cf. Figura 10), sendo uma estratégia incorreta.
	Partição da unidade e agrupamento		A_6 assumiu que a parte apresentada era o todo, fazendo a sua partição no número correspondente ao denominador, e pintando depois o número do

[1] Retirado de: Ponte, J. P., Quaresma, M., Mata-Pereira, J., & Baptista, M. (2016). O estudo de aula como processo de desenvolvimento profissional de professores de matemática. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 868-891.

			numerador (cf. Figura 11). Esta também é uma estratégia incorreta.
	Partição da parte e completamento da unidade		A_{10} utilizou uma estratégia correta para a resolução do problema, fazendo a partição da parte em três partes, correspondendo ao numerador, e completou com uma parte (cf. Figura 12).
Exemplo ilustrativo			

Figura 10

Representação da tira inteira pela aluna A_5

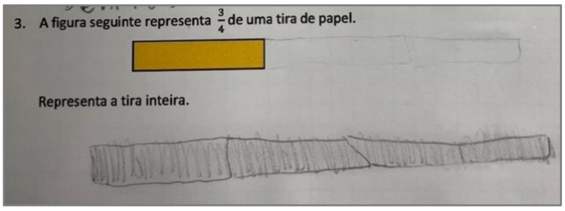


Figura 11

Representação da tira inteira pela aluna A_6

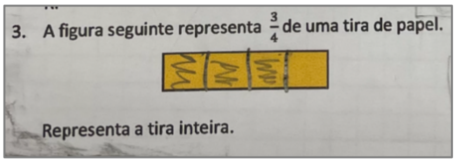
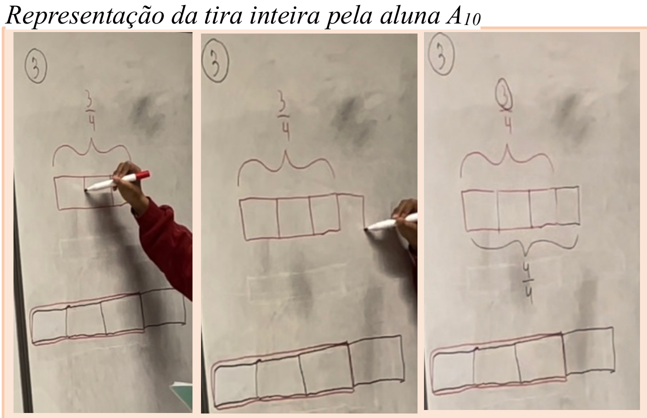


Figura 12

Representação da tira inteira pela aluna A_{10}



Nota: resolução recolhida pela autora do relatório

A tarefa "Dominó das frações" (Anexo I) foi organizada para trabalho em pequeno grupo, evidenciando o "modelo de pensar", quando os alunos desenham o modelo da piza numa das partes da peça (cf. Figura 14), e o "modelo para pensar", quando fazem corresponder diferentes operações com frações e estas com diferentes representações das frações (cf. Figura 13 e Figura 14).

Figura 13

Alunos a trabalhar na tarefa "Dominó de frações"

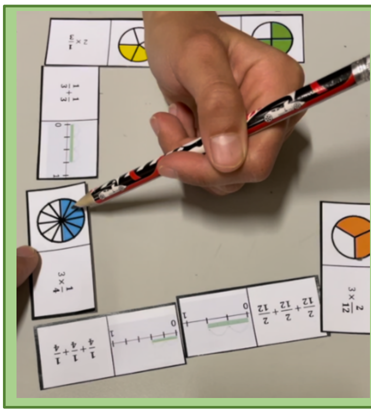
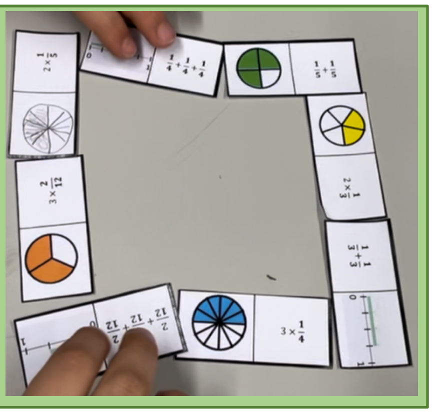


Figura 14

Alunos concluem a tarefa realizando uma representação da fração correspondente à peça de ligação



A Tabela 6, refere-se a uma tarefa de reconstrução da unidade de uma variável de unidade discreta.

Tabela 6

Categorias analíticas da aprendizagem sobre números racionais: Tarefa "Alunos da turma"

<table>
<tr><td colspan="4">2.º Momento do EA</td></tr>
<tr><td colspan="4">Tarefa "Alunos da turma" (Anexo H)
Numa turma de 21 alunos $\frac{2}{3}$ são rapazes. A) Quantos rapazes tem a turma? Quantas raparigas tem a turma?</td></tr>
<tr><td>Categoria</td><td>Estratégia</td><td>Tipo de Unidade</td><td>Descrição</td></tr>
<tr><td>Modelo para pensar</td><td rowspan="2">Partição e agrupamento</td><td rowspan="2">Unidade discreta</td><td>A_9 recorreu à estratégia do modelo para pensar utilizando a fração com o sentido de operador, partindo o todo para contabilizar o grupo, que corresponde aos $\frac{2}{3}$ do todo</td></tr>
<tr><td>Modelo de pensar</td><td>A_4 recorreu ao modelo da piza para fazer a partição do total de alunos da turma no número de partes correspondentes ao numerador, contabilizando posteriormente o número de alunos das partes agrupadas, calculando o número de rapazes da turma</td></tr>
<tr><td colspan="4">Exemplo ilustrativo</td></tr>
</table>

Figura 15

Estratégias para a resolução da alínea

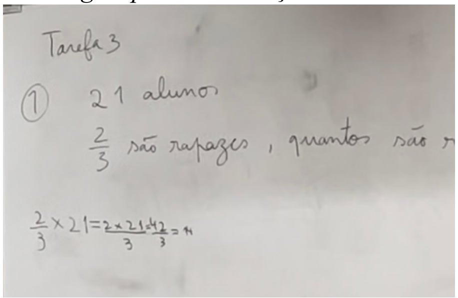


Figura 16

Estratégias para a resolução da alínea b) do problema

Nota: resolução recolhida pela autora do relatório

Relativamente à tarefa "Cadeia numérica" (cf. Tabela 7), esta foi trabalhada com os alunos pelo potencial da relação existente entre os seus fatores.

Tabela 7

Categorias analíticas da aprendizagem sobre números racionais: Tarefa "Cadeia numérica"

<table>
<tr><th colspan="3">3.º Momento do EA</th></tr>
<tr><th colspan="3">Tarefa "Cadeia numérica" (Anexo J)</th></tr>
<tr><td>Categoria</td><td>Estratégia</td><td>Descrição</td></tr>
<tr><td>Modelo para pensar</td><td>Estabelecer relações</td><td>Cada novo fator é metade do anterior, logo, existe uma relação entre o que se pretende calcular e o cálculo realizado anteriormente. A relação de metade entre as frações foi suportada pelo material Réguas de frações e pelo modelo de piza desenhado pela estagiária.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Exemplo ilustrativo</td></tr>
</table>

Figura 17

Construção da cadeia numérica

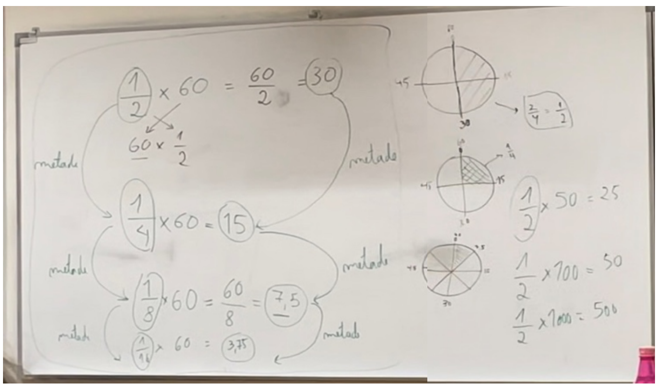
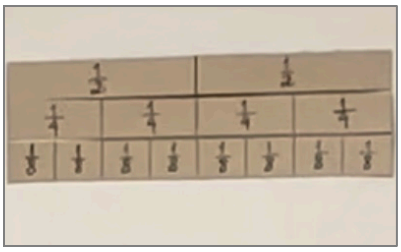


Figura 18

Réguas de frações

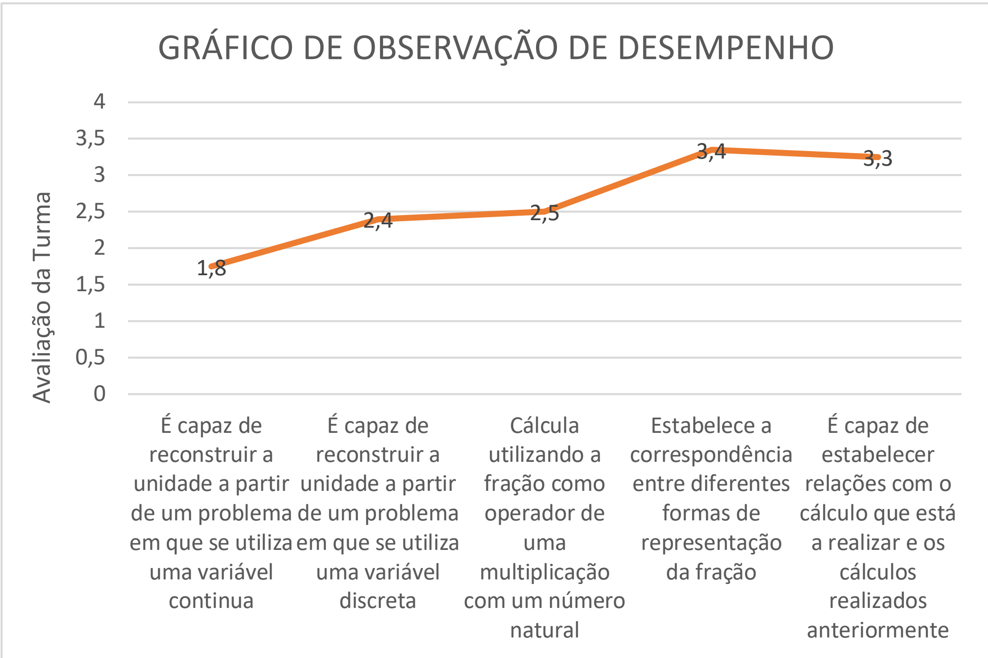


Nota: resolução recolhida pela autora do relatório

A Figura 19 apresenta as médias de desempenho, obtidas na avaliação dos alunos da turma, de acordo com os respetivos indicadores. Este gráfico foi elaborado a partir da *checklist* com os dados recolhidos e registados na grelha de observação de desempenho (Anexo K).

Figura 19

Gráfico de observação de desempenho dos alunos da turma



De acordo com a análise do gráfico, verifica-se que o aspeto onde os alunos revelaram mais dificuldade foi a reconstrução da unidade com uma variável contínua (tarefa da tira de papel). O indicador com a melhor média é a correspondência entre diferentes representações da fração (dominó).

A Tabela 8 apresenta, em percentagem, a representação/modelo matemático utilizado pelos alunos da turma, relativamente à representação da realidade, ao modelo de pensar e ao modelo para pensar. Foi considerado o total das resoluções nas quatro tarefas (64) exploradas no EA. O número de resoluções em cada categoria analítica foi dividido por 64 para obter a respetiva percentagem.

Tabela 8

Tabela referente às frequências de utilização por representação/modelo

Representação/modelo	Freq. abs.	%
Representação da realidade	44	69
Modelo de pensar	12	19
Modelo para pensar	8	12

Verifica-se uma predominância de resoluções assentes na representação da realidade (69%), sendo que apenas 12% das resoluções apresentam o modelo para pensar mais abstrato.

A Tabela 9 apresenta as frequências absolutas do sucesso e do insucesso nas resoluções convertidas em percentagens. Para determinar as percentagens do sucesso e do insucesso, em cada uma das categorias analíticas, dividiu-se a respetiva frequência absoluta pelo número total de resoluções em cada categoria.

Tabela 9

Tabela referente às percentagens de sucesso e insucesso na aplicação da representação/modelo

Representação/modelos	Sucesso (freq. abs.)	Sucesso (%)	Insucesso (freq. abs.)	Insucesso (%)
Representação da realidade	30	68	14	32
Modelo de pensar	11	92	1	8
Modelo para pensar	8	100	0	0

A análise da Tabela 9 permite constatar que são as resoluções com representação da realidade, correspondentes ao nível mais básico do pensamento matemático, que apresentam maior percentagem de incorreções, comparativamente às resoluções baseadas no uso de modelos, correspondentes a níveis mais avançados do pensamento matemático. É de assinalar que as resoluções incorretas da tarefa da tira de papel, envolvendo um aspeto complexo, o da reconstrução da unidade numa unidade contínua, estão ligadas à representação real e concreta da tira de papel, o que influenciou a frequência absoluta do insucesso nessa categoria. Ainda assim, a maioria das resoluções baseadas na representação da realidade (68%) foram bem-sucedidas.

Contribuição do EA para a melhoria das práticas pedagógicas da professora estagiária

O EA, focado na aprendizagem dos alunos, consistindo num processo de desenvolvimento profissional, neste caso, foi orientado para compreender o impacto na formação da professora estagiária.

Apresenta-se uma descrição das categorias analíticas referentes à contribuição do EA para as melhorias da prática da professora estagiária (cf. Tabela 10).

Tabela 10

Apresentação da descrição das categorias analíticas

<table>
<tr><td colspan="2">Categorias</td><td>Aspetos envolvidos</td><td>Descrição</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Seleção/
conceção</td><td>tarefas</td><td>Contextos ligados à multiplicação como adição repetida
Contextos ligados à fração como operador
Reconstrução da unidade:
Unidade discreta;
Unidade contínua</td><td rowspan="2">As tarefas e os materiais propostos aos alunos foram elaborados em parceria com o par de estágio, que foi acompanhado pela professora cooperante e supervisionado pela professora tutora;
A elaboração das tarefas e dos materiais requereu o conhecimento aprofundado dos conteúdos de aprendizagem do currículo nacional desenvolvidos no EA</td></tr>
<tr><td>materiais</td><td>Guiões de aprendizagem com tarefas;
Réguas de frações;
Jogo do dominó das frações</td></tr>
<tr><td colspan="2">Abordagem metodológica das aulas</td><td>Resolução de problemas com base na EMR</td><td>Foi pensada e posta em prática uma abordagem de resolução de problemas com base na realidade dos alunos;
As tarefas foram desenvolvidas com recurso a representações da realidade e modelos de pensar, sendo gradualmente formalizado para os modelos para pensar;
A vertente lúdica foi igualmente uma estratégia utilizada para a aprendizagem dos conteúdos, sendo desenvolvido um jogo conhecido dos</td></tr>
</table>

			alunos com a adaptação dos conteúdos a trabalhar. Os alunos desenvolveram as tarefas através de trabalho autónomo individual, a pares e em pequeno grupo, sendo posteriormente realizada uma discussão em grande grupo/turma
Antecipação de dificuldades dos alunos		Planificação (Anexo L) da sequência de tarefas referente aos três momentos do EA	As tarefas foram elaboradas antecipando as dificuldades dos alunos, transformando-as em oportunidades de aprendizagem; foram trabalhadas primeiro as mais simples e, progressivamente, foi-se aumentando o seu grau de dificuldade
Antecipação de estratégias dos alunos		Plano detalhado da tarefa "Cadeia numérica" (Anexo J)	Foi proposta aos alunos uma tarefa refente a uma cadeia numérica com o objetivo de trabalhar a relação entre o que se pretende calcular e o cálculo realizado anteriormente; a tarefa foi realizada em grande grupo/turma com o objetivo de promover a identificação e discussão de estratégias utilizadas pelos alunos (DGE, 2021) com *feedback*, visando a autorregulação de cada um dos alunos; Para esta tarefa foi elaborado um plano detalhado prevendo aprofundadamente a forma como os alunos interpretam os problemas, pois desta forma é possível desenvolver expectativas ponderadas sobre as estratégias dos alunos e orientá-los para a aprendizagem (Stein et al., 2008)
Condução da discussão coletiva		Respostas dos alunos como base para estabelecer ligações matemáticas e relações com situações da realidade	Antes da discussão os alunos realizaram, a pares, a exploração autónoma das tarefas propostas; Durante a exploração autónoma, a professora estagiária, circulando pela sala, com atenção monitorizou os seus processos de pensamento na resolução dos problemas, selecionando as respostas importantes para serem trabalhadas em grande grupo/turma; A professora estagiária geriu a discussão tirando partido do conhecimento prévio das estratégias criadas pelos alunos, das suas dificuldades e potencialidades, incluindo todos na discussão; Imprimiu intencionalidade na prioridade das tarefas que foram discutidas e na escolha dos alunos que intervieram, promovendo o sucesso do grupo; sempre que se justificou foram feitas ligações dos conteúdos que se estavam a trabalhar, com outros conteúdos da matemática já trabalhados (Stein et al., 2008) e, igualmente, com temas da realidade (conexões internas e externas)
Reflexão	Reflexão pós-aula	Fontes de dados: Escritos em notas de campo; Orais em discussão com as professoras intervenientes	Foi realizada assim que a aula terminou, com a presença das professoras estagiárias, a professora cooperante e a professora tutora; A reflexão é centrada na aprendizagem dos alunos e nas decisões pedagógicas dessa aprendizagem; assim, as tarefas trabalhadas na aula foram

			avaliadas com base nas notações, evidenciando a forma como os alunos reagiram (Fujii, 2018), quais as estratégias por eles utilizadas, as dificuldades sentidas, as potencialidades demonstradas
	Reflexão global	Fontes de dados: Notas de campo em notações, fotografia e vídeo; Orais em discussão com as professoras intervenientes	Foi realizada com as professoras estagiárias, a professora cooperante e a professora tutora; partindo da reflexão pós-aula, foi aprofundada a avaliação das tarefas e a respetiva resposta dos alunos, com base noutras fontes de dados, como por exemplo, as transcrições feitas das gravações de vídeo e fotografias dos guiões de trabalho dos alunos; esta reflexão pode representar o ponto de partida para realizar outro EA
Colaboração	Par de estágio		A colaboração entre os pares de estágio foi uma constante diária, não só em todas as fases inerentes ao EA, como também, durante o período de estágio; o questionamento e a procura de estratégias para a promoção das aprendizagens dos alunos foram recorrentes e concorreram com as suas necessidades e os seus gostos

8. CONCLUSÕES

No presente capítulo são apresentadas as conclusões do estudo, tendo como referência as duas questões orientadoras.

No que concerne à primeira, qual o contributo do Estudo de Aula, na Prática de Ensino Supervisionada, para a compreensão dos alunos dos números racionais, conclui-se que a abordagem que os alunos utilizaram com maior frequência foi a da ligação aos contextos da realidade, em oposição às estratégias apoiadas em "modelos para pensar", mais abstratos. Foi um número reduzido de alunos que usou os modelos de pensar e para pensar, tendo tido uma elevada taxa de sucesso na resolução das tarefas.

Pode constatar-se, ainda, que na resolução de problemas em que a reconstrução da unidade implica uma unidade discreta, os alunos tiveram sucesso, em termos médios. Ainda no caso de problemas com este tipo de unidade, a maioria dos alunos utilizou uma estratégia assente na representação da realidade, ao invés de uma abordagem abstrata, subjacente aos "modelos para pensar". Relativamente à resolução do problema de unidade contínua, os alunos obtiveram menor sucesso. A dificuldade sentida pelos alunos a determinar o todo, dada a parte de uma unidade contínua, pode dever-se à complexidade do raciocínio inversivo que este tipo de situações exige.

Estes resultados corroboram a pertinência da abordagem metodológica da EMR, que possibilita aos alunos pensar e compreender conteúdos matemáticos a partir da sua realidade, evoluindo depois para um pensamento matemático mais sofisticado. Tal como defendido por Monteiro e Pinto (2005), é importante que os alunos enraízem a sua compreensão conceptual em situações concretas. Foi esta a abordagem discutida e decidida no decurso do Estudo de Aula, de modo a garantir aos alunos um percurso do informal para o formal. A planificação detalhada com a sequência a dar às tarefas e com a antecipação de possíveis estratégias dos alunos bem como das ações a serem encetadas pelas estagiárias, amplamente discutida nas sessões do EA, foi um fator importante para o desenvolvimento das aprendizagens dos alunos sobre a multiplicação envolvendo números racionais representados em fração. Foi igualmente importante adaptar o modelo do EA para contemplar três aulas de investigação, em vez de apenas uma, o que permitiu considerar a sequência desejada de tarefas para a aprendizagem do tópico em causa.

Os resultados obtidos com este EA parecem-me relevantes uma vez que os alunos deram continuidade ao desenvolvimento do seu processo relativamente aos significados da fração, que são inerentes e contribuem para construção do sentido de número, uma aquisição que se vai fazendo em contexto formal de ensino e mesmo ao longo da vida (Abrantes et al., 1999). Este aspeto foi facilitado pela oportunidade que os alunos tiveram de partirem de situações da sua realidade para trabalharem problemas nas aulas de matemática, aspeto por eles muito apreciado.

No que concerne à segunda questão orientadora, qual o contributo do Estudo de Aula, na Prática de Ensino Supervisionada, para a melhoria da prática pedagógica da estagiária, efetivamente os processos de trabalho que envolvem a metodologia do EA promoveram esta melhoria. Destaco o trabalho de parceria com as professoras que formaram a equipa do EA para o desenvolvimento do processo da aula de investigação, que resultou num contributo produtivo para a minha formação de professora. Foi igualmente produtivo o processo de seleção e conceção de tarefas e materiais de trabalho, dando-me um conhecimento mais aprofundado dos conteúdos de aprendizagem do currículo nacional. A abordagem metodológica foi muito trabalhada no sentido de ir ao encontro das necessidades e gostos dos alunos, procurando a melhor abordagem para a construção do seu ensino-aprendizagem, o que constituiu um benefício para alunos e para a minha didática. A conceção da planificação, outro aspeto relevante, sendo desenvolvida ao detalhe, possibilitou-me perceber a importância de prever a forma como os alunos interpretaram os problemas, e permitiu-me desenvolver expetativas ponderadas sobre as estratégias dos alunos orientando-os nas aprendizagens (Stein et al., 2008). Este aspeto refletiu-se de forma profícua na gestão da lecionação em sala de aula, conduzindo à melhoria da intencionalidade pedagógica das minhas decisões enquanto professora estagiária. As reflexões, após a aula de investigação, focadas nas aprendizagens dos alunos, conduziram a uma melhoria das metodologias de ensino-aprendizagem.

Após esta experiência, o meu olhar terá um foco mais abrangente, não só voltado para o ensino-aprendizagem com o objetivo de desenvolver e aprofundar os conteúdos a lecionar, como também, voltado para a promoção das formas de pensar e para as perspetivas matemáticas dos alunos (Fujii, 2018).

A metodologia de investigação adotada foi adequada ao tipo de estudo, assim como, a amostragem, contudo, considero que, havendo oportunidade, o EA deveria ser desenvolvido ao longo do ano com a turma, promovendo novos ciclos do EA. De igual modo, a inexperiência inerente à minha condição de professora estagiária, limitou-me na minha atuação, pois poderia ter explorado mais aprofundadamente todo o processo do EA. Em contrapartida, a experiência da Professora Cooperante e da Professora Tutora e a complementaridade com o par de estágio esbateram estas limitações.

REFLEXÃO FINAL

Esta reflexão final tem como objeto a prática por mim vivenciada enquanto estagiária em todo o percurso formativo nos dois ciclos de ensino da PES II.

No que diz respeito ao contributo da experiência desenvolvida na PES II nos dois ciclos de ensino, considero ter sido importante lecionar nas diferentes realidades que os dois contextos proporcionaram. O 1.º CEB decorreu numa instituição particular, cujos princípios orientadores são sustentados pelo MEM, de acordo com uma pedagogia para a autonomia e para a liberdade e com uma forte valorização da educação artística. O 2.º CEB decorreu numa instituição pública inserida num TEIP, em virtude dos problemas que advêm das condições socioeconómicas em que vivem os alunos, e cuja pedagogia assenta na premissa de tornar as aprendizagens mais estimulantes.

Relativamente ao contributo da experiência desenvolvida no 1.º CEB, atendendo ao acima referido e pelo facto de ser um regime de ensino de monodocência, permitiu-me operacionalizar dinâmicas de trabalho interdisciplinar que privilegiaram as componentes práticas e experimentais na aprendizagem de conteúdos científicos. Sendo estas dinâmicas planificadas essencialmente para trabalho autónomo e exploratório, os alunos foram os protagonistas destas atividades, construtores das suas próprias aprendizagens, enquanto eu e o meu par de estágio, procurámos desempenhar o papel estratégico da professora que orienta os alunos para o desenvolvimento das aprendizagens esperadas. Foi uma boa oportunidade de desenvolver competências de forma a ser capaz de proporcionar aos alunos meios de aprendizagem que ligassem os saberes, numa visão global, possibilitando-lhes ampliar a sua experiência de vida, enriquecendo as suas capacidades de decisão e de escolha com autonomia. Por outro lado, o bem-estar proporcionado pela autodescoberta e descoberta do outro, trouxe consigo um sentimento de realização que deu sentido às vivências comuns e individuais de todos, alunos e professora.

No que concerne ao contributo da experiência desenvolvida no 2.º CEB, o principal desafio foi o de captar o interesse dos alunos para as aprendizagens. Estando incluídos numa escola TEIP, devido às suas circunstâncias socioeconómicas, habitando em bairros degradados e com problemas de exclusão social, não estavam predispostos para as atividades. Assim, o principal objetivo foi o de proporcionar aprendizagens significativas, construindo fichas e guiões de aprendizagem com base na sua realidade.

Eu e o meu par de estágio, procurámos elaborar materiais didáticos apelativos e facilitadores das aprendizagens, abrindo espaço a momentos lúdicos em ambiente de sala de aula e, também, transportando o espaço de aprendizagem para fora da sala de aula. Neste âmbito, gostaria de destacar a visita de estudo ao Estuário do Sado para observação de golfinhos e à Sede do Instituto de Conservação da Natureza e Florestas da Reserva Natural do Estuário do Sado (ICNF–RNES), pelo desafio que representou a sua organização, nomeadamente pela logística que lhe foi inerente. No meu futuro profissional gostaria de voltar a proporcionar aos alunos esta experiência que me parece importante para o desenvolvimento integral das suas competências.

Relativamente aos contributos da experiência no processo de investigação para o desenvolvimento de competências profissionais e/ou melhoria dos processos de ensino e aprendizagem, tiveram reflexo no desenvolvimento das minhas competências profissionais, permitindo-me aprimorar os processos de ensino e aprendizagem que coloquei em prática. Estes contributos decorreram dos momentos da intervenção da prática supervisionada e dos momentos de estudo inerentes a essa prática e à elaboração do relatório final.

A experiência no processo de investigação da prática supervisionada, realizada no contexto do 2.º CEB, incidiu no contributo do estudo de aula na aprendizagem dos números racionais. Revelou-se muito importante, possibilitando-me aprofundar os conhecimentos sobre os conteúdos dos números racionais, bem como, a forma de trabalhar com os alunos estes conteúdos, que conforme mencionado por Batista et al. (2014), quanto melhor o professor compreender o processo de raciocínio dos alunos, mais apto fica para os orientar e ajudá-los a desenvolver as suas competências.

Igualmente importante, foi o trabalho de colaboração entre os professores, que é subjacente à metodologia do estudo de aula, com o meu par de estágio, a professora cooperante e a professora tutora. O trabalho com os elementos deste grupo, centrado nas aprendizagens dos alunos, imbuído de dinâmicas reflexivas, enriqueceu-me, também para o futuro, ajudando-me a melhorar a construção das aprendizagens ao nível dos conteúdos científicos, das práticas de trabalho, da operacionalização dessas práticas e da construção de consensos, aspetos inerentes ao trabalho colaborativo, conforme a visão de Bruner que refere que (1989), “o primeiro objetivo de um ato de aprendizagem, para lá do prazer que possa proporcionar, é ter utilidade no futuro.” (p. 41).

Outro fator fundamental, para o desenvolvimento das minhas competências profissionais e melhoria dos processos de ensino e aprendizagem postos em prática, foi a elaboração do relatório final. O estudo que realizei inerente à sua fundamentação teórica, requereu, da minha parte, uma investigação bastante aprofundada na procura de respostas e argumentos que corroborassem todo o trabalho desenvolvido ao longo da experiência de investigação. O processo de investigação revelou-se um processo árduo e solitário que só foi possível concretizar com a orientação da professora orientadora. Pelo caminho, fui estabelecendo conexões com algum do conhecimento científico que já possuía e com aquele que fui adquirindo enriquecendo-me enquanto futura professora. Exemplo disto, foi o ocorrido ao longo da intervenção, associada à experiência de investigação, em que eu e o meu par de estágio, desenvolvemos a estratégia sustentada em aprendizagens significativas, e, mais tarde, enquanto procurava bibliografia e a estudava para poder produzir o meu próprio pensamento e discurso científico, percebi que esta estratégia já existia como conceito de EMR, criado no final da década de 1960 pelo matemático Hans Freudenthal, sustentando a estratégia que aplicámos. Por esta razão, esta descoberta foi para mim muito significativa.

Por último, no que concerne à identificação de aspetos significativos para o desenvolvimento pessoal e profissional do estudante e das dimensões a melhorar no exercício da profissão docente, assinalo a gestão do tempo em sala de aula. Nem sempre foi possível cumprir os objetivos da planificação em tempo útil de aula, fazendo-me refletir no equilíbrio necessário entre os objetivos específicos da planificação e o tempo disponível para a sua lecionação. Tal torna-se mais relevante no contexto do 2.º ciclo, em que as aulas são em blocos de 50 e 90 minutos, distribuídos ao longo da semana de acordo com a carga horária atribuída a cada componente do currículo.

Considero ainda que foi muito importante a criação e promoção de um ambiente educacional amplo e diferenciado através da prática de estratégias de ensino e aprendizagem, que valorizaram o respeito pela individualidade dos alunos de forma a orientá-los para as suas aptidões e habilidades no desenvolvimento das suas competências.

Destaco a aplicação do estudo de aula e a sua importância como trabalho colaborativo, gerador de práticas reflexivas para o melhoramento da prática profissional.

O trabalho colaborativo foi um denominador comum em todo o percurso da PES II, relevante para o meu desenvolvimento pessoal e com reflexo no meu futuro enquanto profissional da educação, tendo-me permitido aprender com a partilha das experiências, conhecimentos científicos e didáticos, construídos com a colaboração de todas as partes envolvidas, professora orientadora, professoras tutoras, professoras cooperantes, par de estágio e alunos.

REFERÊNCIAS

Abrantes, P., Serrazina, L., & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na Educação Básica.* Obtido de Academia.edu: https://www.academia.edu/21700435/A_Matemática_na_Educação_Básica

Agrupamento de Escolas X. (2021). *Documentos - Projeto Educativo.* Obtido de Agrupamento de Escolas X.

Baptista, M., Ponte, J. P., Velez, I., & Costa, E. (2014). Aprendizagens profissionais de professores dos primeiros anos participantes num estudo de aula. *Educação em Revista*, 61-79.

Baruk, S. (1992). *Dicionário de Matemática Elementar, 2.º Volume.* Edições Afrontamento.

Bogdan, R. C., & Biklen, S. K. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação.* Porto Editora.

Brocardo, J. (2010). Trabalhar os números racionais numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número. *Educação e Matemática, Revista da Associação de Professores de Matemática*, 15-23.

Bruner, J. S. (1999). *Para Uma Teoria da Educação.* Lisboa, Portugal: Relógio d'Água Editores.

Cardoso, L., Ponte, J. P., & Quaresma, M. (2023). O desenvolvimento do conhecimento de futuros professores sobre discussões coletivas durante o estudo de aula. *Medi@ções*, 69-81.

Carvalho, R. (2016). *Cálculo mental com números racionais: um estudo com alunos do 6.º ano de escolaridade.* Obtido de Repositório da Universidade de Lisboa: https://repositorio.ul.pt/handle/10451/23646

Coutinho, C. P. (2022). *Metodologia de Investigação em Ciências Sociais e Humanas: Teoria e Prática.* Almedina.

DGE. (2021). *Aprendizagens Essenciais Matemática 5.º Ano do 2.ª Ciclo.* Obtido de Direção-Geral da Educação: http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/2_ciclo/ae_mat_5.o_ano.pdf

Dias, L., Leite, K. d., & Santos, E. S. (2022). *Estruturalismo e o Movimento da Matemática Moderna.* Obtido de Anais do ESEM - Encontro Sul-Mato-Grossense de Educação Matemática: https://periodicos.ufms.br/index.php/aesmgedumat/article/view/14384

DRE. (2018). *Notícias - 6 Jul. Decreto-Lei n.º54/2018 - Educação Inclusiva.* Obtido de Direção-Geral da Educação: https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/EEspecial/dl_54_2018.pdf

Escola X. (2002). *Projeto Educativo.*

Fernandes, D. (2021). *Para uma Fundamentação e Melhoria das Práticas de Avaliação Pedagógica no Âmbito do Projeto MAIA.* Lisboa: Ministério da Educação/Direção-Geral da Educação.

Fischer, D. d. (2020). *Investigando o ensino e a aprendizagem de multiplicação de frações: um estudo com alunos do 6.º ano.* Obtido de LUME - Repositório Digital: https://lume.ufrgs.br/handle/10183/220068?show=full

Fosnot, C. T., & Dolk, M. (2002). *Young Mathematicians at Work.* Heinemann.

Fujii, T. (2018). *Lesson Study and Teaching Mathematics Through Problem Solving: The Two Wheels of a Cart.* Obtido de ResearchGate: https://www.researchgate.net/publication/323960819_Lesson_Study_and_Teaching_Mathematics_Through_Problem_Solving_The_Two_Wheels_of_a_Cart

Graça, S., Ponte, J. P., & Guerreiro, A. (2023). A aprendizagem dos números racionais através de uma abordagem integrada nas suas diferentes representações. *Quadrante: Revista de Investigação em Educação Matemática*, 6-25.

Hourigan, M., & Leavy, A. M. (2019). *Learning from teaching: pre-service primary teachers' perceived learningfrom engaging in a formal Lesson Study.* Obtido de ResearchGate: https://www.researchgate.net/publication/333162771_Learning_from_teaching_pre-service_primary_teachers%27_perceived_learning_from_engaging_in_formal_Lesson_Study

Monteiro, C., & Pinto, H. (2005). A Aprendizagem dos números racionais. *Quadrante, Revista de Investigação em Educação Matemática*, 89-107.

Murata, A. (2011). Conceptual Overview of Lesson Study. Em L. C. Hart, A. Alston, & A. Murata, *Lesson Study Research and Practice in Mathematics Education* (pp. 1-12). Springer.

Neeleman, W. (1991). Hans Freudenthal: Não me chamem advogado do diabo, sou o próprio diabo... *Bolema - Boletim de Educação Matemática*, 36-46. Obtido de Bolema - Boletim de Educação Matemática: https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/issue/view/683

Pereira, A. (2002). *Educação para a Ciência.* Lisboa: Universidade Aberta.

Pinto, H. (2011). *O desenvolvimento do sentido da multiplicação e da divisão de números racionais.* Obtido de Repositório da Universidade de Lisboa - Teses de Doutoramento: https://repositorio.ul.pt/handle/10451/4516

Pinto, H., & Ribeiro, C. M. (2013). Conhecimento e formação de futuros professores dos primeiros anos – o sentido de número racional. Obtido de Repositório Científico do Instituto Plitécnico de Lisboa: https://repositorio.ipl.pt/handle/10400.21/3105

Ponte, J. P., Quaresma, M., Mata-Pereira, J., & Baptista, M. (2016). O estudo de aula como processo de desenvolvimento profissional de professores de matemática. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 868-891.

Quaresma, M., & Ponte, J. P. (2019). Dinâmicas de Reflexão e Colaboração entre Professores do 1.º Ciclo num Estudo de Aula de Matemática. *Bolema, Rio Claro (SP)*, 368-388. Obtido de Bolema - Boletim de Educação Matemática: https://www.scielo.br/j/bolema/a/YDRhdGMpwptfFwtXGr4RmcN/abstract/?lang=pt

Scheffer, N. F., & Powell, A. B. (2019). Frações no livros brasileiros do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). *revemop*, 476-503.

Serralha, F. (2009). Caracterização do Movimento da Escola Moderna. *Escola Moderna Nº 35 5ª série*.

Silva, M. N., Boavida, A. M., & Oliveira, H. (2012). *Desenvolvendo o sentido de número racional: que desafios para o professor?* Obtido de Repositório Comum: https://comum.rcaap.pt/handle/10400.26/5716

Simon, M. (2019). *Developing a Concept of Multiplication of Fractions: Building on Constructivist andSociocultural Theory.* Obtido de ResearchGate: https://www.researchgate.net/publication/329756543_Developing_a_Concept_of_Multiplication_of_Fractions_Building_on_Constructivist_and_Sociocultural_Theory_Merging_Perspectives_from_Psychology_and_Mathematics_Education

Sousa, M. J., & Baptista, C. S. (2014). *Como fazer Investigação, Dissertações, Teses e Relatórios.* Lisboa: PACTOR.

SPCE. (2014). *Carta Ética.* Obtido de Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação: https://www.spce.org.pt/regulacaoeticodeontologia.html

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating Productive Mathematical Discussions: Five Practices for Helping Teachers Move Beyond Show and Tell. *Mathematical Thinking and Learning*, 313-340.

Teach for Portugal. (2022). Obtido de Teach for Portugal: https://teachforportugal.org/

Tullio, M. I. (2015). *Os desafios da escola pública paranaense na perspetiva do professor PDE.* Secretaria da Educação, Governo do Estado de Paraná.

Viana, C. (2023). *Está confirmado. Todos os alunos realizarão as provas de aferição em computador*. Obtido de Jornal Público: https://www.publico.pt/2022/11/17/sociedade/noticia/confirmado-alunos-realizarao-provas-afericao-computador-2028174

ANEXOS

ANEXO A – Potencialidades e fragilidades observadas nos alunos do contexto de 1.º CEB

<table>
<tr><th colspan="2">Áreas</th><th>Potencialidades</th><th>Fragilidades</th></tr>
<tr><td colspan="2">Português</td><td>Dominam a capacidade de decifração, lendo com clareza e fluência
Demonstram grande interesse na leitura de livros da biblioteca de turma
Redigem textos coerentes com originalidade e criatividade, utilizando pontuação e conectores textuais</td><td>Revelam algumas dificuldades na correção ortográfica
Demonstram alguma fragilidade na interpretação de textos lidos</td></tr>
<tr><td colspan="2">Matemática</td><td>Evidenciam grande aptidão ao nível do cálculo mental
Revelam uma boa capacidade de resolução de problemas
Tomam iniciativa de recorrer a materiais manipuláveis para se apoiar na resolução de tarefas matemáticas</td><td>Demonstram dificuldade ao nível do conteúdo das frações</td></tr>
<tr><td colspan="2">Estudo do Meio</td><td>Colaboram com os pares partilhando ideias e realizando trabalho de pesquisa em conjunto
Demonstram interesse e motivação acerca dos conteúdos de Estudo do Meio</td><td>Apresentam algumas dificuldades na seleção e organização de informação</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Educação Artística</td><td>Artes Visuais</td><td>Demonstram-se motivados e empenhados nas atividades propostas
Aprendem novas técnicas com facilidade, como colagem, pintura e moldagem</td><td>Certos alunos apresentam dificuldade em respeitar as criações dos colegas</td></tr>
<tr><td>Expressão Dramática/ Teatro</td><td>Leem textos com expressividade
Apresentam boa projeção de voz e dicção</td><td>Não observado</td></tr>
<tr><td>Dança</td><td>Não observado</td><td>Não observado</td></tr>
</table>

	Música	• Utilizam a percussão corporal com sentido rítmico • Utilizam o movimento para traduzir elementos expressivos da música • Tocam instrumentos Orff com as técnicas adequadas	• Certos alunos apresentam dificuldade em cantar com consciência da pulsação e com sentido rítmico
Educação Física		• Realizam as atividades propostas com autonomia, empenho e foco • Apresentam um bom desempenho ao nível do bloco de deslocamento e equilíbrio • Aplicam corretamente as regras nos jogos propostos	• Revelam alguma fragilidade ao nível do bloco perícias e manipulações
TIC		• Formulam questões simples que permitem orientar a recolha de dados ou informações	• Demonstram dificuldade na utilização do computador para processamento de texto • Apresentam dificuldade na utilização de recursos digitais, ao nível da interface do utilizador
Competências Transversais		• Apresentam competências de cooperação e interajuda • Respeitam-se uns aos outros • Exprimem as suas opiniões • Apresentam sentido crítico face aos assuntos discutidos em aula	• Apresentam dificuldades ao nível da interpretação de enunciados

ANEXO B – Avaliação dos resultados relativos aos objetivos do PI do contexto de 1.º CEB

A foi uma avaliação realizada ao longo do período de intervenção, em que o par de estágio, foi monitorizando o trabalho desenvolvido através de notas de campo e fotografias às produções dos alunos e também através da aplicação de um questionário aos alunos.

No questionário, era pedido aos alunos, que avaliassem utilizando uma escala de 1 a 5, cada uma das oito atividades realizadas no âmbito dos objetivos delineados no PI. Posteriormente era pedido que explicassem as razões que os tinham levado a achar mais interessante e a gostar mais da atividade a que deram melhor pontuação e o mesmo para a atividade a que tinham dado pior pontuação. As atividades realizadas no âmbito do PI foram as seguintes:

A) Escrita de um enunciado no computador sobre um texto do caderno de textos;
B) Escrita e apresentação do significado dos verbos dos enunciados;
C) Realização de uma prova de aferição com tempo e seguida de autocorreção;
D) Escrita de um texto numa prova de aferição em computador;
E) Discussão sobre os critérios para escrita de um bom texto, escrita de um texto e avaliação do texto do colega;
F) Utilização do geoplano no computador;
G) Realização do guião sobre o documento “Euro” que estava no computador;
H) Escrita dos cartões do jogo “Tapeleiro” no computador.

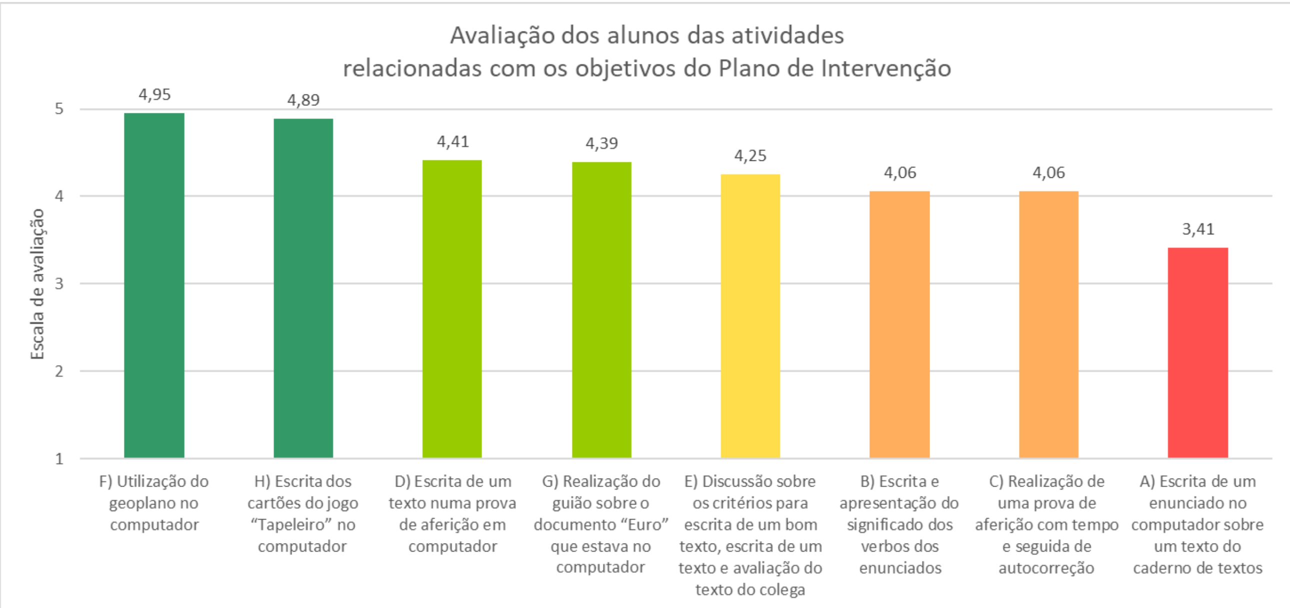
As atividades A), B), C) e E) foram realizadas no âmbito do objetivo do PI de desenvolver as competências de compreensão e interpretação de enunciados. As atividades A), D), F), G) e H) foram realizadas no âmbito do segundo objetivo do PI de desenvolver habilidades na utilização do computador.

Este questionário foi aplicado no último dia de intervenção do par de estágio, tendo sido recolhidas 19 respostas, 4 alunos da turma ficaram por inquirir por não se encontrarem presentes nesse dia na escola. Foi entregue a cada aluno uma folha com o questionário, indicando que o mesmo seria para responder individualmente e de forma anónima. Os dados recolhidos foram posteriormente organizados em tabelas utilizando o Excel como ferramenta para tratamento dos dados.

Construiu-se o gráfico apresentado na figura 5, com o valor médio da avaliação realizada pelos alunos a cada uma das atividades, em que no eixo vertical o “1” corresponde a “Sem interessante e não gostei", o "2" corresponde a "Muito pouco interessante e gostei muito pouco", o "3" corresponde a "Pouco interessante e gostei pouco", o "4" corresponde a "Interessante e gostei" e o "5" corresponde a "Muito interessante e gostei muito". As atividades são descritas no eixo horizontal, tendo sido dispostas por ordem de sucesso e não por ordem temporal de realização.

Figura A1

Análise do resultado do questionário aplicado aos alunos acerca das atividades relacionadas com os objetivos do PI



Podemos observar que de uma forma geral o grau de sucesso das atividades foi positivo, já que a média da avaliação dos alunos foi superior a 3 em todas as atividades. As que tiveram maior sucesso foram as atividades "F) Utilização do Geoplano no computador" e "H) Escrita dos cartões do jogo "Tapeleiro" no computador". A que teve menor sucesso foi a atividade "A) Escrita de um enunciado no computador sobre um texto do caderno de textos". Em relação às atividades que tiveram maior sucesso é de destacar os seguintes aspetos mencionados pelos alunos no questionário "Eu gostei do geoplano porque parecia um jogo. E também porque aprendi." e "Gostei muito do «Tapeleiro» porque estava a Alcateia toda a trabalhar toda junta.". Relativamente à atividade que teve menor sucesso é que sublinhar os seguintes aspetos referidos pelos alunos nos questionários "Era sem piada", "Os enunciados porque eu e o meu par não estávamos a perceber".

Importa ainda referir que o conjunto das atividades relacionadas com o objetivo do PI de desenvolver habilidades na utilização do computador obtiveram no seu conjunto uma melhor classificação por parte dos alunos do que as atividades relacionadas com o objetivo do PI de desenvolver as competências de compreensão e interpretação de enunciados. Este facto poderá estar relacionado com os aspetos mencionados pelos alunos de as atividades com menor sucesso serem menos divertidas e mais exigentes ao nível dos tópicos da leitura e da escrita da componente do currículo de Português.

Quanto às observações realizadas pelo par de estágio ao longo do período de intervenção, é de destacar o visível aumento gradual do nível de autonomia dos alunos na utilização do computador de semana para semana. Evidente tanto ao nível das funcionalidades básicas de ligar, desligar e aceder a documentos e aplicações no computador, como também ao nível do processamento de texto. Relativamente à compreensão e interpretação de enunciados, ao compararmos o grau de autonomia dos alunos na atividade "A) Escrita de um enunciado no computador sobre um texto do caderno de textos", com o grau de autonomia dos alunos na última semana de intervenção na escrita dos enunciados para utilização no jogo "Tapeleiro" e na sua habilidade de compreensão durante o jogo, verificámos um significativo progresso.

ANEXO C – Potencialidades e fragilidades observadas nos alunos do contexto de 2.º CEB

Áreas	Potencialidades	Fragilidades
Matemática	-Compreendem a representação gráfica de frações -Enunciam com facilidade os múltiplos de um número	-Dificuldade na compreensão de frações -Dificuldade na tabuada -Dificuldade na resolução de problemas -Dificuldade na determinação de frações equivalentes (só na turma 1) -Dificuldade em justificar respostas
Ciências Naturais	-Relacionam conteúdos da aula com vivências pessoais -Sabem preencher um mapa conceptual	-Dificuldade na definição de conceitos -Dificuldade em justificar respostas
Competências Transversais	-Voluntariosos -Motivados -Participativos	-Pouca autonomia -Dificuldade em trabalho cooperativo -Dificuldade na compreensão conceptual e interpretação de enunciados ou instruções orais

ANEXO D – Avaliação dos resultados relativos aos objetivos do PI do contexto de 2.º CEB

A avaliação foi realizada através de um processo contínuo ao longo do período de intervenção do par de estágio. Para tal foi realizada uma análise comparativa do desempenho dos alunos aos longo de um conjunto de nove atividades, desenvolvidas nas aulas de Ciências Naturais (CN) e nas aulas de Matemática (Mat): História de Cientista (CN); Formas do corpo e simetria dos animais (CN); Réguas de frações (Mat); Abordagem Baseada na Resolução de Problemas (ABRP) - revestimento dos animais (CN); Quebra-cabeças (Mat); Dominó de frações (Mat); Rally da Matemática (Mat); ABRP - reprodução dos animais (CN); Visita de estudo à Reserva Natural do Estuário do Sado (CN). Os dados foram recolhidos através de grelhas de observação de desempenho, nas quais foram definidos um conjunto de indicadores para cada um dos três objetivos apresentados no PI (Anexo C). A partir dos dados registados foram construídos três conjuntos de gráficos onde se apresentam os resultados obtidos para cada uma das turmas em estudo. Nos gráficos as atividades estão dispostas por ordem cronológica, ou seja, a primeira atividade realizada com os alunos foi "História de um cientista (CN)", a segunda "Formas do corpo e simetria dos animais (CN)", e por aí adiante. Os valores apresentados nos gráficos correspondem aos valores médios dos alunos da turma, tendo sido utilizada a seguinte escala na avaliação do desempenho dos alunos: 4 - Revela já ser capaz; 3 - Revela poucas dificuldades/ser capaz na maioria das vezes; 2 - Revela algumas dificuldades / nem sempre ser capaz; 1 - Revela muitas dificuldades / ainda não ser capaz. As duas figuras que se seguem apresentam os resultados obtidos relativos ao primeiro objetivo do PI, de desenvolver as competências de cooperação dos alunos.

Figura D1

Análise da evolução das competências de cooperação dos alunos da turma 5.º B

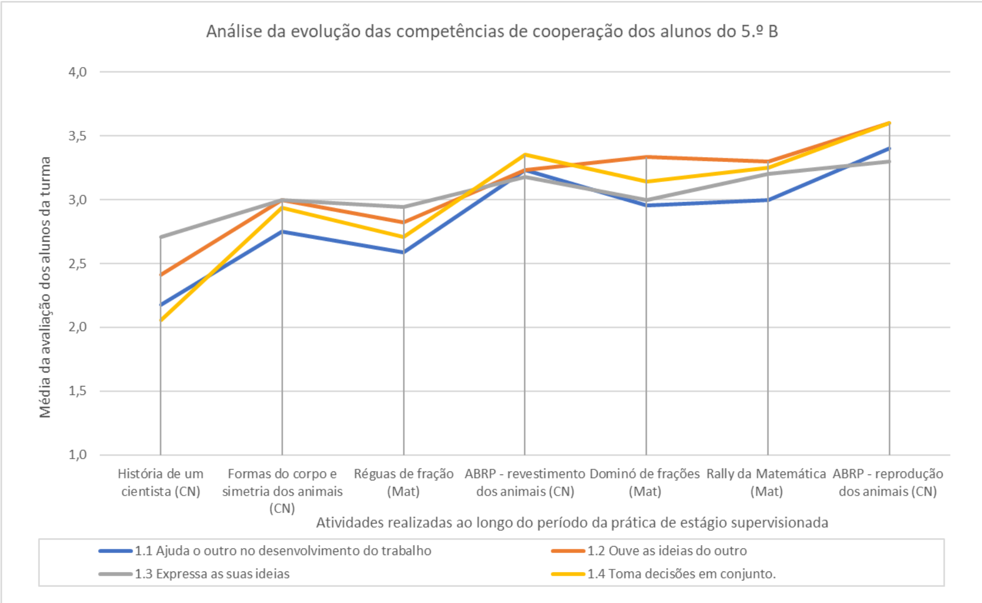
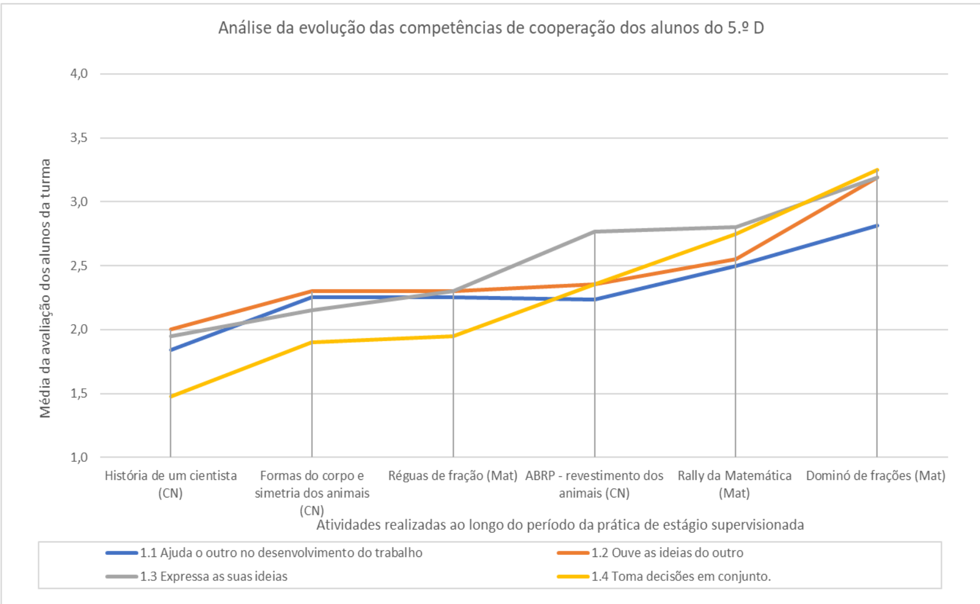


Figura D2

Análise da evolução das competências de cooperação dos alunos da turma 5.º D



As duas figuras que se seguem apresentam os resultados obtidos relativos ao segundo objetivo do PI, de desenvolver as competências de autonomia e responsabilização dos alunos.

Figura D3

Análise da evolução das competências de autonomia e responsabilização dos alunos da turma 5.º B

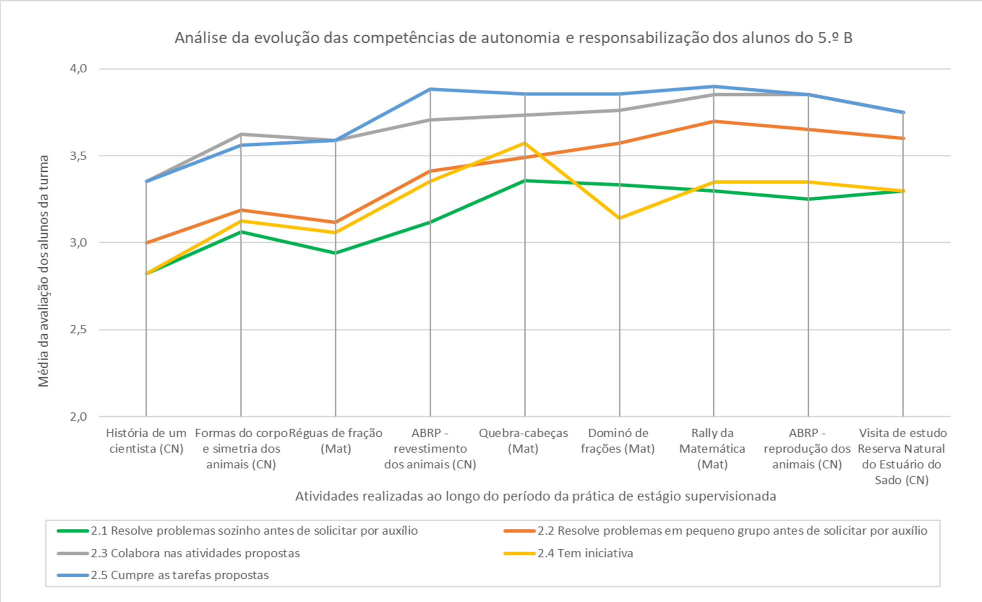
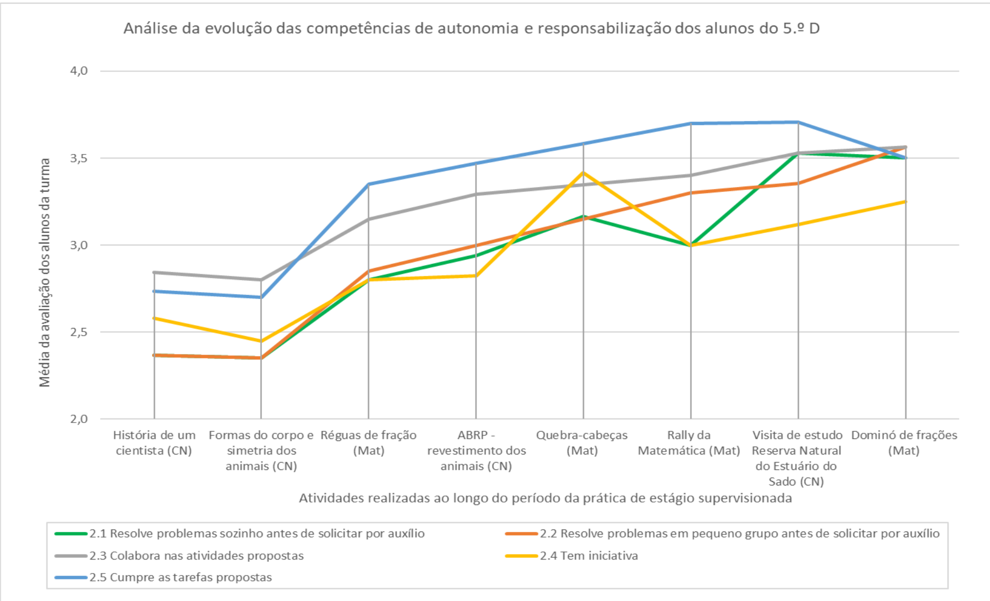


Figura D4

Análise da evolução das competências de autonomia e responsabilização dos alunos da turma 5.º D



As duas figuras que se seguem apresentam os resultados obtidos relativos ao terceiro objetivo do PI, de desenvolver as competências de compreensão conceptual e interpretação de enunciados ou instruções orais.

Figura D5

Análise da evolução das competências de compreensão conceptual e interpretação de enunciados ou instruções orais dos alunos da turma 5.º B

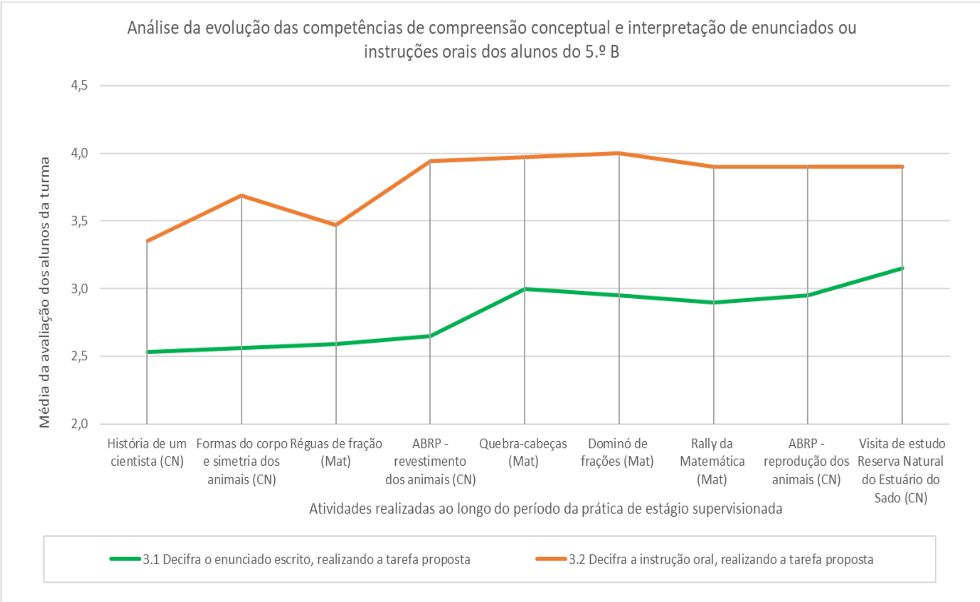
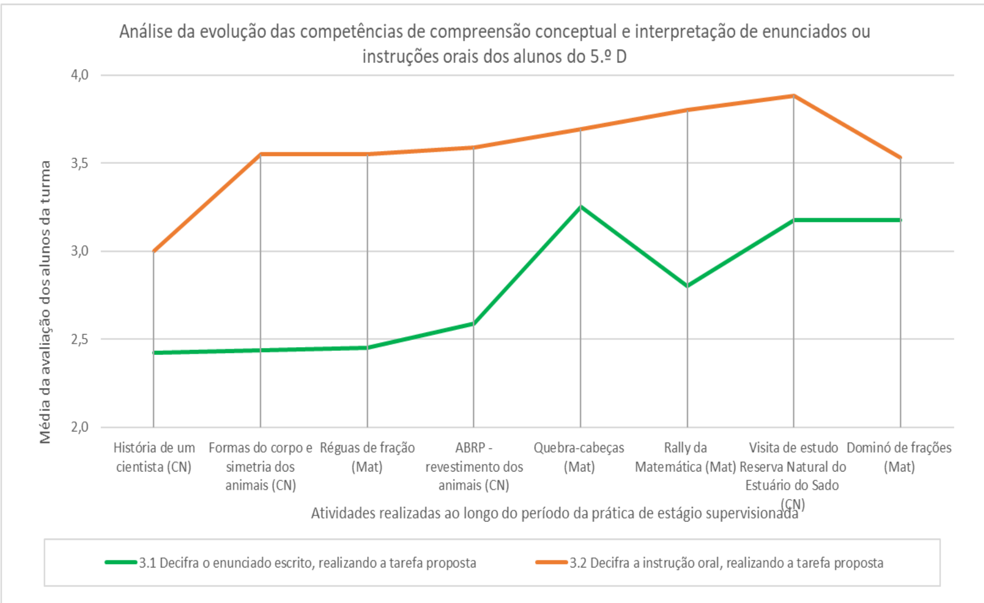


Figura D6

Análise da evolução das competências de compreensão conceptual e interpretação de enunciados ou instruções orais dos alunos da turma 5.º D



Em termos gerais, em ambas as turmas houve melhorias ao nível das competências transversais analisadas. Relativamente à evolução das competências de cooperação, é interessante constatar que o indicador no qual ambas as turmas apresentam pior desempenho numa fase inicial é o “1.4 Toma decisões em conjunto”, sendo aquele em que se verifica um maior aumento do nível de desempenho na fase final do período de análise. Quanto à evolução das competências de autonomia e responsabilização podemos observar que os alunos da turma 5.º D apresentaram uma subida mais significativa, em particular no indicador “2.2 Resolve problemas em pequeno grupo antes de solicitar por auxílio”, passando de uma média abaixo do 2,5 numa fase inicial para uma média acima dos 3,5 na fase final do estudo. Na evolução das competências de compreensão conceptual e interpretação de enunciados ou instruções orais é visível, em ambas as turmas, a grande discrepância entre os dois indicadores avaliados, demonstrando que os alunos têm claramente mais dificuldade em decifrar enunciados escritos do que instruções orais.

Ao nível individual, constatámos que alguns alunos, demonstraram-se voláteis, não apresentando um padrão de melhoria, constatámos que o seu desempenho dependia sobretudo do seu estado de emocional. O desempenho ao nível das competências transversais verificou-se que era pior por exemplo em dias em que a turma tinha realizado alguma ficha de avaliação, ou após uma aula de outra disciplina que tenha sido mais agitada do que o costume ou por alguma situação de conflito externa a situações escolares, um aspeto muito evidente tanto no aluno n.º 1 do 5.ºB e como no aluno n.º 19 do 5.ºD.

Também detetámos que a progressão ao nível das competências transversais era mais evidente em determinadas componentes do currículo, ou seja, no mesmo aluno verificámos que os níveis de competências transversais eram superiores em tarefas realizadas numa disciplina do que noutra disciplina. O que indica que o interesse de certos alunos por determinado tópico influencia o seu desempenho ao nível das competências transversais, um aspeto particularmente evidente no aluno n.º 4 da turma 5.ºB que estava visivelmente mais envolvido nas tarefas realizadas nas aulas de Matemática o que se refletia no seu desempenho ao nível das competências transversais. Também se verificou a mesma situação com o aluno n.º 12 do 5.ºB, sendo, no entanto, nas tarefas realizadas na disciplina de Ciências Naturais que o aluno revelou um melhor desempenho nas competências transversais, quando comparado com tarefas realizadas nas aulas de Matemática.

Particularmente na turma 5.º B o aluno n.º 17 apresentou uma grande evolução ao nível das competências transversais, pelo contrário o aluno n.º 13 da mesma turma manteve o seu desempenho sempre bastante fraco em todas as competências transversais analisadas, ao longo de todo o período em análise.

ANEXO E – Tabelas sobre a metodologia com a descrição das fases do EA

A 1.ª fase realizada do EA (cf. Tabela E3) foi discutida em grupo, com a professora estagiária investigadora, a professora estagiária que lecionou os três momentos da aula de investigação, a professora cooperante e a professora tutora. Nesta fase foram pensadas quais as melhores estratégias a adotar, tendo sido concebidas tarefas de resolução de problemas com base na EMR, contextualizando as aprendizagens com os conteúdos propostos nos documentos orientadores.

Tabela E3

Descrição do processo da 1.ª fase do EA

1.ª Fase	1. Definição de objetivos	1.1 Contextualização da problemática	1.1.1 Foram enquadrados os conteúdos trabalhados de acordo com as aprendizagens essenciais
			1.1.2 Foram definidos os objetivos gerais de aprendizagem dos alunos
			1.1.3 Foi realizado um levantamento das dificuldades que os alunos apresentavam
	2. Planeamento da aula de investigação	2.1 Planificação detalhada da sequência de tarefas	2.1.1 Foram definidos os objetivos específicos de aprendizagem dos alunos, e estabelecidas ligações com conteúdos trabalhados anteriormente e os que se pretendiam trabalhar
			2.1.2 Foram definidas as atividades, considerando os procedimentos e os recursos materiais necessários à sua realização
			2.1.3 Foi elaborado um plano detalhado com as tarefas propostas aos alunos, antecipando as suas dificuldades; uma das tarefas contemplou uma estratégia detalhada que incluía a antecipação das possíveis resoluções do alunos, as corretas e as incorretas
			2.1.4 Foram elaborados os guiões com as tarefas propostas aos alunos trabalhadas, posteriormente, na aula de investigação
			2.1.5 Foi preparado o processo de observação, definindo o foco da observação e da recolha de dados

			2.1.6 Foram elaboradas as *checklists* para a recolha de dados para a investigação

Seguidamente, conforme apresentado na Tabela E4, é descrito o procedimento da 2.ª fase do EA, o qual incidiu nos momentos da aula da investigação. Os alunos realizaram exploração autónoma, individual e a pares, das tarefas propostas, seguida de discussão em grande grupo/turma orientada pela professora estagiária responsável pela lecionação.

Tabela E4

Descrição do processo da 2.ª fase do EA

<table>
<tr><td rowspan="5">2.ª Fase</td><td rowspan="5">3. Aula de investigação</td><td rowspan="5">3.1 Lecionação e observação das aulas de investigação</td><td>3.1.1 Observação</td><td>3.1.1.1 Realizada pela professora estagiária investigadora, professora cooperante e professora tutora</td></tr>
<tr><td>3.1.2 Lecionação</td><td>3.1.2.1 Realizada pela professora par de estágio</td></tr>
<tr><td rowspan="3">3.1.3 A investigação decorreu em três momentos distintos</td><td>3.1.3.1 O primeiro momento da aula de investigação decorreu no dia 1 de março e foram desenvolvidas quatro tarefas: a “Caixa de bombons”, o “Saco com bolas”; a “Tira de papel” e o “Dominó das frações”</td></tr>
<tr><td>3.1.3.2 O segundo momento da aula de investigação decorreu no dia 3 de março e foi desenvolvida uma tarefa: os “Alunos da turma”</td></tr>
<tr><td>3.1.3.3 O terceiro momento da aula de investigação decorreu no dia 8 de março e foi desenvolvida uma tarefa: a “Cadeia numérica”</td></tr>
</table>

A Tabela E5, faz referência à 3.ª fase deste EA e contempla os momentos de discussão pós-aula e de reflexão com as professoras do grupo de trabalho.

Tabela E5

Descrição do processo da 3.ª fase do EA

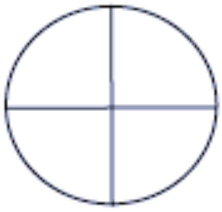
3.ª Fase	4. Discussão pós-aula	1.º Momento	4.1 A discussão foi realizada assim que a aula terminou; participaram a professora investigadora, o par de estágio, a professora cooperante e a professora tutora
		2.º Momento	4.2 A discussão foi realizada assim que a aula terminou; participaram a professora investigadora, o par de estágio e a professora cooperante
		3.º Momento	4.3 A discussão foi realizada assim que a aula terminou; participaram a professora investigadora, o par de estágio e a professora cooperante
	5. Reflexão	1.º Momento	5.1 A reflexão foi realizada no mesmo dia da aula de investigação; participaram a professora investigadora, o par de estágio e a professora tutora
		2.º Momento	5.2 A discussão foi realizada seis dias após a aula de investigação; participaram a professora investigadora, o par de estágio e a professora cooperante
		3.º Momento	5.3 A reflexão foi realizada no mesmo dia da aula de investigação com a professora investigadora, o par de estágio e a professora cooperante; foi realizada uma segunda reflexão um dia após a aula de investigação com a professora investigadora, o par de estágio e a professora cooperante; uma terceira reflexão também teve lugar, nove dias após a aula de investigação, com a professora investigadora, o par de estágio e a professora tutora

ANEXO F – Guião de aprendizagem com exercícios sobre a adição e subtração de frações

Exercícios sobre adição e subtração de frações

1. A Ana e a Sofia compraram uma pizza, a Ana comeu $\frac{1}{4}$ da pizza e a Sofia comeu $\frac{2}{4}$.

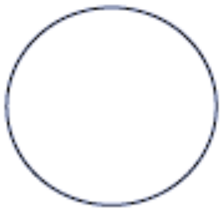
   1.1 Pinta a verde a parte da pizza que a Ana comeu.
   1.2 Pinta a laranja a parte da pizza que a Sofia comeu.



   1.3 Quanto é que as duas amigas comeram da pizza?
   Escreve o cálculo que realizaste sob a forma de fração.

2. O Pedro levou uma tarte de maçã para uma festa de aniversário, como gosta muito dessa tarte comeu logo $\frac{2}{3}$ da tarte.

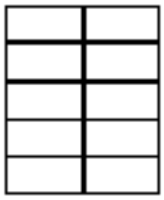
   2.1 Desenha e pinta a verde a parte da tarte que o Pedro comeu.



   2.2 Quanto é que sobrou de tarte para os amigos comerem?
   Escreve o cálculo que realizaste sob a forma de fração.

3. A mãe do Manuel foi ao supermercado e comprou-lhe um chocolate, mas era tão gulosa que comeu logo $\frac{3}{10}$ do chocolate. Como ainda não estava satisfeita comeu mais $\frac{2}{5}$ da tablete.

3.1 Faz o sombreado, com o teu lápis, no desenho da tablete de chocolate de quanto chocolate é que a mãe do Manuel comeu no total.

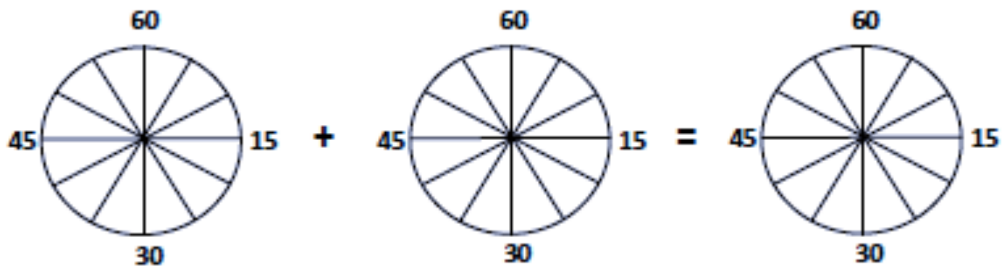


3.2 Escreve o cálculo que realizaste anteriormente sob a forma de fração.

3.3 Quanto sobrou de chocolate?
Escreve o cálculo sob a forma de fração.

4. A Catarina para ir da sua casa até à escola de dança demora $\frac{1}{4}$ de hora a pé até à paragem do autocarro mais o tempo da viagem do autocarro que dura $\frac{1}{12}$ de hora.

4.1 Pinta os cronómetros que se seguem de acordo com tempo total da viagem



4.2 Escreve o cálculo sob a forma de fração. A quantos minutos corresponde?

ANEXO G – Guião de aprendizagem com a tarefa “Caixa de bombons”

2. A Patrícia tem uma caixa com 9 bombons. O número de bombons pode ser dividido em três partes iguais.

Quantos bombons são:

a) $\frac{1}{3}$ dos nove bombons?

R:

b) $\frac{2}{3}$ dos nove bombons?

R:

ANEXO H – Guião de aprendizagem com as tarefas "Saco das bolas", "Tira de papel" e "Alunos da turma"

Cálculos com frações

Multiplicação entre números naturais e frações – tarefa 3

1. Numa turma de 21 alunos $\frac{2}{3}$ são rapazes.

   c) Quantos rapazes tem a turma?

   R:

   d) Quantas raparigas tem a turma?

   R:

2. Num saco está um conjunto de bolas, $\frac{2}{3}$ dessas bolas são azuis e as restantes são amarelas. Sabendo que dentro do saco estão 8 bolas azuis, quantas bolas tem o saco no total?

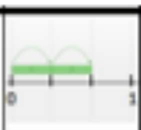
   R:

3. A figura seguinte representa $\frac{3}{4}$ de uma tira de papel.

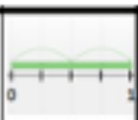
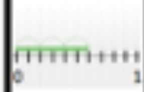
   Representa a tira inteira.

ANEXO I – Tarefa do “Dominó das frações”

Jogo "Dominós das frações" – conjunto 1

$\frac{2}{12}+\frac{2}{12}+\frac{2}{12}$		$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$			$\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$		$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$
	$2\times\frac{1}{5}$		$2\times\frac{1}{3}$		$3\times\frac{2}{12}$		$3\times\frac{1}{4}$

Jogo "Dominós das frações" – conjunto 2

$\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$		$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}$			$\frac{2}{10}+\frac{2}{10}+\frac{2}{10}$		$\frac{2}{4}+\frac{2}{4}$
	$3\times\frac{2}{10}$		$3\times\frac{1}{6}$		$4\times\frac{1}{5}$		$2\times\frac{2}{4}$

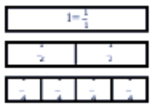
ANEXO J – Tarefa da “Cadeia numérica”

2.3 Estratégias detalhadas sobre a atividade "Cadeia Numérica"

<table>
<tr><th>CADEIA NUMÉRICA</th><th colspan="4">HIPÓTESES DE ESTRATÉGIAS CORRETAS DOS ALUNOS</th><th>HIPÓTESES DE ESTRATÉGIAS INCORRETAS DOS ALUNOS</th></tr>
<tr><td rowspan="2">$\frac{1}{2} \times 60$</td><td colspan="2">Situação 1</td><td colspan="2">Situação 2</td><td>Situação 3</td></tr>
<tr><td colspan="2">A professora (P) escreve no quadro $\frac{1}{2} \times 60$ e pergunta:
P – Quem sabe quanto é $\frac{1}{2} \times 60$?
O Aluno (A) responde:
A_1 – É $\frac{60}{2}$
A professora regista o resultado no quadro colocando $\frac{1}{2} \times 60 = \frac{60}{2}$ e pergunta:
P – Como é que sabes que é $\frac{60}{2}$?
A_1 – Porque 60×1 é igual a 60
P – E o denominador?
A_1 – Fica igual.</td><td colspan="2">A professora pergunta:
P – Alguém pensou numa representação diferente?
A_2 – Sim, professora.
P – E qual foi?
A_2 – Dá 30, professora.
A professora escreve no quadro junto da igualdade escrita anteriormente, ficando $\frac{1}{2} \times 60 = \frac{60}{2} = 30$ e pergunta ao aluno:
P – Porquê 30? Como pensaste?
A_2 – Porque $\frac{1}{2}$ é metade, é como a pizza dividida em dois bocados iguais, então metade de 60 são 30 e, por isso, é que é 30.

Pizza dividida duas partes iguais
A professora destaca o número 30 na igualdade, fazendo um círculo à sua volta com uma caneta de cor diferente,
$\frac{1}{2} \times 60 = \frac{60}{2} = 30$
para dar significado ao resultado e para estabelecer a relação pretendida nesta cadeia numérica.</td><td>P – Mais alguém pensou noutra representação diferente destas duas?
A_3 – Mas, professora, eu acho que não deve dar nem $\frac{60}{2}$, nem 30, porque o denominador não é o mesmo e precisamos de encontrar o mmc, que é 2, porque o denominador de 60 é 1, mas ainda não fiz a "conta".
P – Mas o cálculo do mmc entre dois denominadores diferentes é realizado em que operações? É quando estamos a...
A_3 – adicionar.
P – E também a...
A_3 – multiplicar.
P – Ou será a subtrair?
A_3 – Sim, professora.
P – Porque não se pode adicionar ou subtrair, p.e., fatias de pizza de tamanhos diferentes. E o que acontece quando estamos a multiplicar um número natural por uma fração?
A_1 – Posso responder, professora?
P – Sim.
A_1 – É porque $\frac{1}{2} \times 60$ é a mesma coisa que $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} +$ ... como se escrevêssemos 60 vezes a fração $\frac{1}{2}$.
P – E o denominador?
A_1 – É 2 porque é a fração $\frac{1}{2}$, fica igual.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$\frac{1}{4} \times 60$</td><td>Situação 4</td><td colspan="2">Situação 5</td><td>Situação 6</td><td>Situação 8</td></tr>
<tr><td>A professora escreve no quadro $\frac{1}{4} \times 60$ e chama a atenção dos alunos para o seguinte:</td><td colspan="2">Entretanto, a professora dá a palavra ao aluno A_1 que quer participar:</td><td>P – E, conseguem ver alguma relação entre $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{2}$?</td><td>A_7 – Mas, não entendo... metade de $\frac{1}{2}$ como pode ser $\frac{1}{4}$? Acho que temos de dividir o denominador por 2 e o numerador também por 2, é assim que fazemos para calcular o mmc.</td></tr>
<tr><td>P – Qual será o resultado de $\frac{1}{4} \times 60$? Acham que é possível relacionar o resultado deste novo cálculo com o resultado anterior, de 30? Quem é que consegue dizer qual é o resultado?
A_4 – É 15, porque quando fazemos no cronómetro $\frac{1}{4}$ de hora são 15 minutos, porque o cronómetro está dividido em 60 e uma hora são 60 minutos.

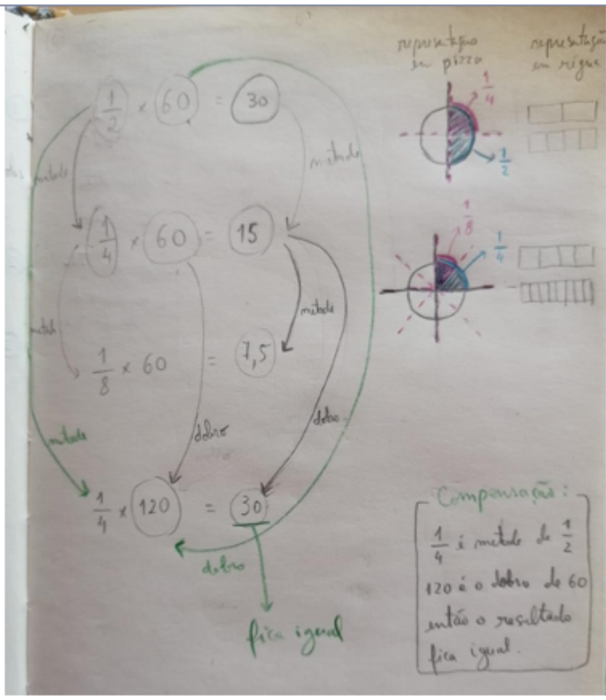

Cronómetro dividido em quartos de hora
P – Muito bem!
A professora escreve a igualdade no quadro, ficando
$\frac{1}{4} \times 60 = 15$</td><td colspan="2">$A_1$ – Professora, também pode ser $\frac{60}{4}$.
P – Sim, podes dizer aos teus colegas como chegaste a esse resultado?
A_1 – Foi como fiz com o $\frac{1}{2} \times 60$, mas como agora o denominador é 4 fica $\frac{60}{4}$
P – Quer dizer que multiplicaste 60 por 1 e mantiveste o denominador igual?
A_1 – Sim!
P – Então, podemos acrescentar à nossa igualdade o $\frac{60}{4}$ e ficamos com:
$\frac{1}{4} \times 60 = 15 = \frac{60}{4}$.
A professora destaca o número 15 na igualdade, fazendo um círculo à sua volta com uma caneta de cor diferente,
$\frac{1}{4} \times 60 = 15 = \frac{60}{4}$
para dar significado ao resultado e para estabelecer a relação pretendida nesta cadeia numérica.</td><td>A professora espera um pouco e escreve no quadro:
$\underbrace{\frac{1}{2} \quad \frac{1}{4}}_{\text{metade}}$ e $\underbrace{30 \quad 15}_{\text{metade}}$

Exemplificação de 1/4 ser metade de 1/2
e exemplifica que ¼ é metade de ½ com o desenho da pizza.
A_5 – Sim, sim, professora, metade de 30 é 15.
P – Consegues explicar melhor?
A_5 – Nas "Réguas das Frações" que a professora nos emprestou o tamanho de $\frac{1}{4}$ era metade de $\frac{1}{2}$ e 30 quando se divide por 2 dá 15.
P – Muito bem!
Então, se metade de 60 é 30 (a professora aponta no quadro para a igualdade da hipótese 2), $\frac{1}{4}$ vai ser metade da metade e vai dar... (a professora faz um compasso de espera).</td><td>P – Para calcular o mmc entre denominadores diferentes está correto fazer dessa forma, mas neste caso não estamos a calcular o mmc, estamos a dividir partes da unidade. Repara nas "Réguas das Frações", observa a régua que corresponde ao todo, que não está dividida e observa também a outra régua que está logo por baixo dela.


Réguas de Frações
A_7 – A que tem $\frac{1}{2}$?
P – Sim. Sabes porque tem $\frac{1}{2}$ escrito duas vezes?
A_7 – Porque tem dois bocados.
P – Sim, é como se tivéssemos dividido a régua que está em cima em dois bocados iguais. Repara agora na terceira régua a contar de cima...
A_7 –Está dividida em quatro bocados iguais!
P – E se comparares com a que está em cima dela, a que está dividida ao meio?
A_7 – Vejo que um desses bocados, que é $\frac{1}{4}$, é metade de $\frac{1}{2}$.
P – Boa! Então se $\frac{1}{2}$ é metade de 1...
A_7 – $\frac{1}{4}$ é metade de $\frac{1}{2}$!
P – Muito bem! E por isso $\frac{1}{4}$ é metade da metade da unidade.</td></tr>
</table>

		A_5 – vai dar 15 professora, como eu tinha dito. P – Isso mesmo! A professora coloca as réguas afixadas com bostik no quadro.  Réguas de Frações	
	Situação 9	Situação 10	Situação 11
$\frac{1}{8} \times 60$	A professora escreve no quadro $\frac{1}{8} \times 60$ Em seguida desenha a pizza abaixo e pergunta qual a relação de 1/8 com ¼.  Exemplificação de 1/8 ser metade de 1/4 Os alunos indicam que é metade e a professora escreve no quadro: $\underbrace{\frac{1}{4}\ \frac{1}{8}}_{\text{metade}}$	A_7 – Pois, é como disse há bocado o A_5, com as "Réguas das Frações", aqui $\frac{1}{8}$ é metade de $\frac{1}{4}$, e por isso dá 7,5 que é metade de 15. P – Exatamente! Muito bem, A_7, vejo que as "Réguas das Frações" te ajudaram. Então, podemos escrever que $\frac{1}{8} \times 60 = \frac{60}{8} = 7{,}5$ A_7 – Sim! A professora afixa com bostik a régua do 1/8 por baixo da de ¼.  Réguas de Frações	A_8 – Professora, pode mostrar este com as réguas? Não é o $\frac{1}{6}$? E esse que vem a seguir? A_5 – Não! A seguir vem o 8, porque 4 é metade de 8. P – Vamos ver com as "Réguas de Frações"  Réguas de Frações  Réguas de Frações Que te parece A_8? Qual é a régua que tem os bocados iguais e em que um desses bocados corresponde a metade de $\frac{1}{4}$? A_8 – E a régua os $\frac{1}{8}$. P – Isso mesmo!

	P – Quanto é metade de 15? A_6 – É 7,5 professora. P – Então, podemos relacionar com a fração anterior de $\frac{1}{4}$, como a professora escreveu ainda agora e, assim, temos $\underbrace{\frac{1}{4}\ \frac{1}{8}}_{\text{metade}}$ e $\underbrace{15\ \ 7{,}5}_{\text{metade}}$		
	Situação 12	Situação 13	Situação 14
$\frac{1}{4} \times 120$	P – Então, agora neste caso, em vez de termos $\frac{1}{4} \times 60$ como naquele caso (a professora aponta para o local do quadro onde está escrito o algoritmo) temos (e escreve simultaneamente no quadro) $\frac{1}{4} \times 120$. Que vos parece? Qual será o resultado? A professora faz um compasso de espera, mas nenhum aluno responde, então reformula o raciocínio: P – Se $\frac{1}{4} \times 60 = 15$ quanto será $\frac{1}{4} \times 120$? A_7 – É 30, porque se dá 15 no outro neste dá 30. P – Explica outra vez que não percebi ainda muito bem. A_7 – Porque se com 60 dá 15, com 120 dá 30, porque $60 \times 2 = 120$ então $15 \times 2 = 30$ P – Muito bem, porque nestes dois casos estamos a multiplicar 60 por $\frac{1}{4}$ e 120 também por $\frac{1}{4}$.	P – Anteriormente tínhamos $\underbrace{\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}}_{\text{metade}}$ e $\underbrace{60\ \ 30}_{\text{metade}}$ Mas agora como poderemos escrever? $\underbrace{\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}}_{\text{metade}}$ e o que vem a seguir? Conseguem ajudar a professora? Podemos acrescentar $\underbrace{\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}}_{\text{metade}}$ e 60 O que fazemos ao 60? A_9 – Multiplicamos por 2, para dar os 120. P – Assim? $\underbrace{\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}}_{\text{metade}}$ e $\underbrace{60\ \ 120}_{\text{dobro}}$ A_9 – Sim! P – Vamos então procurar o algoritmo $\frac{1}{4} \times 120$ é igual a?	A_{10} – É igual a 60. P – Podes explicar como pensaste? A_{10} – Porque é metade de 120, por isso é que fizemos 60 vezes 2. P – Repara bem no algoritmo (a professora aponta no quadro no local onde está escrito o algoritmo) $\frac{1}{4} \times 120$, qual é a fração que lá está? A_{10} – E $\frac{1}{4}$. P – Então, $\frac{1}{4}$ é metade de quanto? A_{10} – De $\frac{1}{2}$. P – Ou seja, metade da metade, certo? A_{10} – Sim. P – Assim, metade da metade de 120 quanto é? A_{10} – Hum, é... 30! P – Isso mesmo! Vamos então escrever: $\frac{1}{4} \times 120 = \frac{120}{4} = 30$ Fizemos a metade de $\frac{1}{2}$ que é $\frac{1}{4}$, mas como estamos a multiplicar por 120 em vez de 60, e reparem que 120 é o dobro de 60, então não temos de compensar.

Resumo para consolidação	

ANEXO K – Grelha de observação de desempenho

GRELHA DE OBSERVAÇÃO DE DESEMPENHO

MATEMÁTICA - FRAÇÃO COMO OPERADOR - MULTIPLICAÇÃO DE UMA FRAÇÃO POR UM NATURAL

ANO LETIVO 2022/2023

PARTICIPANTES: 5.º ANO

ESTUDO DE AULA - DIAS 1, 3 e 8 DE MARÇO

Indicadores / Participantes	A14	A6	A5	A7	A3	A4	A9	A13	A12	A10	A8	A16	A17	A18	A19	A9	A20	A11	A21	A2	A1
É capaz de reconstruir a unidade a partir de um problema em que se utiliza uma variável contínua	NO	NO	NO	1	1	4	1	NO	2	4	2	4	1	4	NO	1	1	1	1	1	2
É capaz de reconstruir a unidade a partir de um problema em que se utiliza uma variável discreta	NO	NO	NO	1	1	4	3	NO	3	4	4	3	3	4	NO	2	4	3	1	1	1
Cálcula utilizando a fração como operador de uma multiplicação com um número natural	1	3	NO	2	3	3	3	NO	2	4	3	3	2	2	NO	3	4	2	2	2	4
Estabelece a correspondência entre diferentes formas de representação da fração	2	4	NO	3	4	3	4	NO	4	4	4	4	3	3	NO	4	4	3	3	3	4
É capaz de estabelecer relações com o cálculo que está a realizar e os cálculos realizados anteriormente	NO	NO	NO	3	4	4	4	NO	3	4	3	3	3	4	NO	4	4	3	2	2	4

4 - Revela já ser capaz; 3 - Revela poucas dificuldades / ser capaz na maioria das vezes; 2 - Revela algumas dificuldades / nem sempre ser capaz; 1 - Revela muitas dificuldades / ainda não ser capaz; NO - não observado

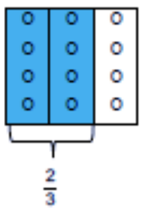
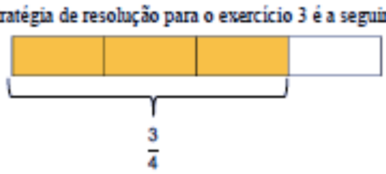
ATIVIDADE	ESTRATÉGIA	A14	A6	A5	A7	A3	A4	A9	A13	A12	A10	A8	A16	A17	A18	A19	A9	A20	A11	A21	A2	A1
Caixa de bombons	Representação da realidade	NO	NO	NO	S	S	S	S	NO	S	S	S	S	S	S	NO	S	S	S	N	S	S
	Modelo de pensar	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO
	Modelo para pensar	NO	NO	NO	N	N	N	S	NO	N	S	N	N	N	N	NO	S	S	N	N	N	S
Saco das bolas	Representação da realidade	NO	NO	NO	S	S	N	S	NO	S	S	S	S	S	S	NO	S	S	S	N	N	S
	Modelo de pensar	NO	NO	NO	N	N	S	S	NO	N	NO	N	N	N	N	NO	N	N	N	N	N	N
	Modelo para pensar	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO
Tira de papel	Representação da realidade	NO	NO	NO	S	S	S	S	NO	S	S	S	S	S	S	NO	S	S	S	S	S	S
	Modelo de pensar	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO
	Modelo para pensar	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO
Turma rapazes/raparigas	Representação da realidade	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO
	Modelo de pensar	NO	NO	NO	S	N	N	S	NO	S	S	S	N	S	S	NO	S	S	N	N	N	S
	Modelo para pensar	NO	NO	NO	N	N	N	N	NO	N	S	N	N	N	N	NO	N	S	N	N	N	S

ANEXO L – Tabela com o número de respostas dadas pelos alunos de acordo com a estratégia utilizada nas atividades propostas

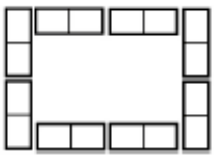
ATIVIDADE	ESTRATÉGIA	RESPOSTAS DADAS	CORRETAS	INCORRETAS
Caixa de bombons	Representação da realidade	15	14	1
	Modelo de pensar	0	0	0
	Modelo para pensar	5	5	0
Saco das bolas	Representação da realidade	13	13	0
	Modelo de pensar	2	1	1
	Modelo para pensar	0	0	0
Tira de papel	Representação da realidade	16	3	13
	Modelo de pensar	0	0	0
	Modelo para pensar	0	0	0
Turma rapazes/ raparigas	Representação da realidade	0	0	0
	Modelo de pensar	10	10	0
	Modelo para pensar	3	3	0

ANEXO M – Planificação da sequência de tarefas

2.1 Planificação de atividade

Público-alvo: alunos do 5.º ano do 2.º Ciclo do Ensino Básico Tópico: frações, decimais e percentagens Subtópico: multiplicação entre números naturais e frações, multiplicação e divisão por números decimais, cálculo mental Duração total: 200' Local: sala de aula					
Objetivos de aprendizagem	Atividades previstas/ Procedimentos	Tempo	Materiais/ Recursos	Avaliação	
				Instrumentos de avaliação	Indicadores de avaliação
1. Compreender a relação parte de um todo discreto e parte de um todo contínuo	No início de cada aula a professora escreve o sumário no quadro. Ao longo das tarefas a professora dá *feedback* aos alunos, criando oportunidades de aprendizagem, possibilitando-lhes expressar os seus conhecimentos e competências. **1.ª aula** **Resolução de problemas com frações** Discussão em grande grupo sobre o exercício 2 da Tarefa 2 de multiplicação entre números naturais e frações.	5' 15'	- Quadro de caneta; -Ficha 1: "Multiplicação entre números naturais e frações - Tarefa 2"	- Grelha de observação de desempenho;	1.1 É capaz de reconstruir a unidade a partir de um problema em que se utiliza uma variável discreta; 1.2 É capaz de reconstruir a unidade a
na reconstrução da unidade.	**Reconstrução da unidade** - Realização individual de dois problemas de exploração da reconstrução da unidade (Tarefa 3 - Multiplicação entre números naturais e frações – exercícios 2 e 3); - Indicação de que o exercício 1 fica para TPC. - Discussão em grande grupo/turma sobre a resolução dos alunos. (continuação no início da aula seguinte) Uma estratégia de resolução para o exercício 2 é a seguinte:  A parte pintada a azul são 2/3 que corresponde a 8 bolas, 3/3 é o saco todo, onde podemos contar 12 bolas. Uma estratégia de resolução para o exercício 3 é a seguinte: 	20' 20'	- Ficha 2: "Multiplicação entre números naturais e frações - Tarefa 3"		partir de um problema em que se utiliza uma variável contínua.

2. Adotar estratégias de cálculo mental com recurso à cadeia numérica. 3. Compreender o significado da fração como operador.	Dividir a barra amarela em 3 partes igual porque o numerador é igual a 3 e acrescentar uma parte igual às anteriores porque o denominador é igual a 4. **2.ª aula** **Cálculo Mental** **(ver detalhes no capítulo 2.3)** - Exploração em grande grupo de uma cadeia de cálculos; - Esta cadeia numérica apresenta-se com um grande potencial pela relação que estabelece com os fatores de cada algoritmo, em que cada novo fator é metade do anterior; - Neste sentido, em discussão coletiva com o grande grupo/turma, incentivando e orientando, a professora deve aproveitar a oportunidade para explorar, no cálculo que estão a realizar, as ligações que se podem estabelecer com os cálculos realizados anteriormente, ou seja, tirar partido dos resultados com o nível anterior da cadeia (½ x 60; ¼ x 60; …); -A professora vai escrevendo no quadro a cadeia numérica, de forma sequenciada e em tempos diferentes, trabalhando com os alunos um cálculo de cada vez; - A cada cálculo qua a professora escreve no quadro, os alunos, na sua vez de falar, dizem o resultado, sendo, logo de seguida, estimulados a explicarem o seu raciocínio;	20'	- Estratégias detalhadas da atividade "Cadeia Numérica"		2. É capaz de estabelecer relações com o cálculo que está a realizar e os cálculos realizados anteriormente. 3. Resolve os cálculos utilizando a fração como operador de uma multiplicação com um número natural.

4.1 Compreender uma fração como relação parte-todo. 4.2 Relacionar as diferentes formas de representação da fração. 4.3. Desenvolver o cálculo mental através da compreensão das frações, representações gráficas e reta numérica.	- Ao iniciar a tarefa, a professora estimula os alunos dizendo que se trata de uma cadeia numérica, na qual podem aproveitar os cálculos anteriores sem terem de repetir os cálculos. - Ao longo do processo a professora chama a atenção dos alunos para outra característica do sinal de fração que, além de fazer a relação parte-todo, funciona também como o quociente de dois números inteiros. **"Dominó das Frações"** - Na parte final da aula a professora apresenta o jogo do "Dominó das Frações", que os alunos irão jogar em pequenos grupos de 4 elementos; - O jogo é constituído por 8 peças, cada uma com representações diferentes da fração nas suas duas extremidades. - O jogo consiste em fazer a ligação correta das peças de dominó, unindo extremidades com o mesmo valor e representações distintas, terminando com uma última peça que deve ligar as duas extremidades da fileira de peças já construída. 	20'	- Jogo "Dominó das Frações"		4. Junta as extremidades das peças de dominó que representam o mesmo valor, relacionando corretamente as diferentes representações da fração, sob a forma do algoritmo da adição, da subtração e da multiplicação, sob a forma de representações pictóricas e da reta numérica.

5. Compreender a regra da multiplicação e divisão por números decimais.	A última peça que deve ser utilizada no jogo tem uma das extremidades em branco, para que os alunos a preencham, encontrando a solução correta, de acordo com a ligação que vão fazer com a extremidade da outra peça já colocada no jogo. Existem 2 conjuntos diferentes do "Dominó das Frações" para se poder realizar duas vezes caso haja tempo. **3.ª aula** **Regra da multiplicação e divisão por números decimais** -Realização individual de um conjunto de tarefas de modo a que os alunos descrevam as regras sobre a multiplicação e divisão por números decimais. **Regra frações maiores, igual ou menores que 1** Formulação das regras de identificação das frações que são maiores, iguais ou menores que 1, com o apoio do o exercício 1 da Tarefa 2 de multiplicação entre números naturais e frações. **4.ª aula** **Correção do TPC** Discussão em grande grupo do exercício 1 da Tarefa 3 - Multiplicação entre números naturais e frações.	25' 20' 25'	- Ficha 3: "Multiplicação e divisão com números decimais"		5. Formula a regra da multiplicação e divisão por números decimais.

	Cálculo Mental -Realização de exercícios de cálculo mental em grande grupo, abordando a adição, subtração e multiplicação de números racionais. Esta atividade é realizada com o apoio de uma apresentação em PowerPoint. Em cada conjunto de 5 slides os alunos escrevem no caderno as suas respostas e no fim são discutidas em grande grupo as respostas dadas. A professora vai questionando os alunos acerca das estratégias utilizadas e anota no quadro. Nota: Caso haja tempo disponível, os alunos poderão realizar as fichas com tarefas de treino sobre cálculos com frações.	20'	-Apresentação PowerPoint com exercícios de Cálculo Mental - Ficha 4: Tarefas de treino sobre cálculos com frações		

2.2 Materiais construídos

Ficha 1

Cálculos com frações

Multiplicação entre números naturais e frações – tarefa 2

1. Observa as seguintes frações: $\frac{1}{2}$; $\frac{5}{5}$; $\frac{5}{10}$; $\frac{7}{4}$; $\frac{13}{17}$; $\frac{14}{14}$; $\frac{9}{3}$; $\frac{33}{33}$; $\frac{8}{2}$

a) Indica as que são menores que 1, iguais a **1** e maiores que 1.

< 1:

= 1:

> 1:

b) Representa graficamente as frações que são maiores que 1.

2. A Patrícia tem uma caixa com 9 bombons. O número de bombons pode ser dividido em três partes iguais.

Quantos bombons são:

a) $\frac{1}{3}$ dos nove bombons?

R:

b) $\frac{2}{3}$ dos nove bombons?

R:

Ficha 2

Cálculos com frações

Multiplicação entre números naturais e frações – tarefa 3

1. Numa turma de 21 alunos $\frac{2}{3}$ são rapazes.

c) Quantos rapazes tem a turma?

R:

d) Quantas raparigas tem a turma?

R:

2. Num saco está um conjunto de bolas, $\frac{2}{3}$ dessas bolas são azuis e as restantes são amarelas. Sabendo que dentro do saco estão 8 bolas azuis, quantas bolas tem o saco no total?

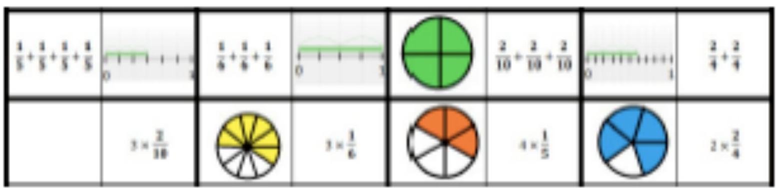
R:

3. A figura seguinte representa $\frac{3}{4}$ de uma tira de papel.

Representa a tira inteira.

Jogo "Dominós das frações" – conjunto 1

Jogo "Dominós das frações" – conjunto 2



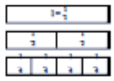
2.3 Estratégias detalhadas sobre a atividade "Cadeia Numérica"

<table>
<tr><th>CADEIA NUMÉRICA</th><th colspan="3">HIPÓTESES DE ESTRATÉGIAS CORRETAS DOS ALUNOS</th><th>HIPÓTESES DE ESTRATÉGIAS INCORRETAS DOS ALUNOS</th></tr>
<tr><td rowspan="2">$\frac{1}{2} \times 60$</td><td>Situação 1</td><td colspan="2">Situação 2</td><td>Situação 3</td></tr>
<tr><td>A professora (P) escreve no quadro $\frac{1}{2} \times 60$ e pergunta:
P – Quem sabe quanto é $\frac{1}{2} \times 60$?
O Aluno (A) responde:
A_1 – É $\frac{60}{2}$
A professora regista o resultado no quadro colocando $\frac{1}{2} \times 60 = \frac{60}{2}$ e pergunta:
P – Como é que sabes que é $\frac{60}{2}$?
A_1 – Porque 60×1 é igual a 60
P – E o denominador?
A_1 – Fica igual.</td><td colspan="2">A professora pergunta:
P – Alguém pensou numa representação diferente?
A_2 – Sim, professora.
P – E qual foi?
A_2 – Dá 30, professora.
A professora escreve no quadro junto da igualdade escrita anteriormente, ficando $\frac{1}{2} \times 60 = \frac{60}{2} = 30$ e pergunta ao aluno:
P – Porquê 30? Como pensaste?
A_2 – Porque $\frac{1}{2}$ é metade, é como a pizza dividida em dois bocados iguais, então metade de 60 são 30 e, por isso, é que é 30.

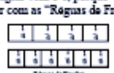
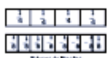
Pizza dividida em dois bocados iguais
A professora destaca o número 30 na igualdade, fazendo um círculo à sua volta com uma caneta de cor diferente,
$\frac{1}{2} \times 60 = \frac{60}{2} = 30$
para dar significado ao resultado e para estabelecer a relação pretendida nesta cadeia numérica.</td><td>P – Mais alguém pensou noutra representação diferente destas duas?
A_3 – Mas, professora, eu acho que não deve dar nem $\frac{60}{2}$, nem 30, porque o denominador não é o mesmo e precisamos de encontrar o mmc, que é 2, porque o denominador de 60 é 1, mas ainda não fiz a "conta".
P – Mas o cálculo do mmc entre dois denominadores diferentes é realizado em que operações? É quando estamos a...
A_3 – adicionar.
P – E também a...
A_3 – multiplicar.
P – Ou será a subtrair?
A_3 – Sim, professora.
P – Porque não se pode adicionar ou subtrair, p.e., fatias de pizza de tamanhos diferentes. E o que acontece quando estamos a multiplicar um número natural por uma fração?
A_4 – Posso responder, professora?
P – Sim.
A_4 – É porque $\frac{1}{2} \times 60$ é a mesma coisa que $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ ... como se escrevêssemos 60 vezes a fração $\frac{1}{2}$.
P – E o denominador?
A_4 – É 2 porque é a fração $\frac{1}{2}$, fica igual.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$\frac{1}{4} \times 60$</td><td>Situação 4</td><td>Situação 5</td><td>Situação 6</td><td>Situação 8</td></tr>
<tr><td>A professora escreve no quadro $\frac{1}{4} \times 60$ e chama a atenção dos alunos para o seguinte:
P – Qual será o resultado de $\frac{1}{4} \times 60$? Acham que é possível relacionar o resultado deste novo cálculo com o resultado anterior, de 30? Quem é que consegue dizer qual é o resultado?
A_4 – É 15, porque quando fazemos no cronómetro $\frac{1}{4}$ de hora são 15 minutos, porque o cronómetro está dividido em 60 e uma hora são 60 minutos.


Cronómetro dividido em quartos de hora
P – Muito bem!
A professora escreve a igualdade no quadro, ficando
$\frac{1}{4} \times 60 = 15$</td><td>Entretanto, a professora dá a palavra ao aluno A_1 que quer participar:
A_1 – Professora, também pode ser $\frac{60}{4}$.
P – Sim, podes dizer aos teus colegas como chegaste a esse resultado?
A_1 – Foi como fiz com o $\frac{1}{2} \times 60$, mas como agora o denominador é 4 fica $\frac{60}{4}$
P – Quer dizer que multiplicaste 60 por 1 e mantiveste o denominador igual?
A_1 – Sim!
P – Então, podemos acrescentar à nossa igualdade o $\frac{60}{4}$ e ficamos com:
$\frac{1}{4} \times 60 = 15 = \frac{60}{4}$.
A professora destaca o número 15 na igualdade, fazendo um círculo à sua volta com uma caneta de cor diferente,
$\frac{1}{4} \times 60 = 15 = \frac{60}{4}$
para dar significado ao resultado e para estabelecer a relação pretendida nesta cadeia numérica.</td><td>P – E, conseguem ver alguma relação entre $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{2}$?
A professora espera um pouco e escreve no quadro:
$\underbrace{\frac{1}{2} \quad \frac{1}{4}}_{\text{metade}}$ e $\underbrace{30 \quad 15}_{\text{metade}}$

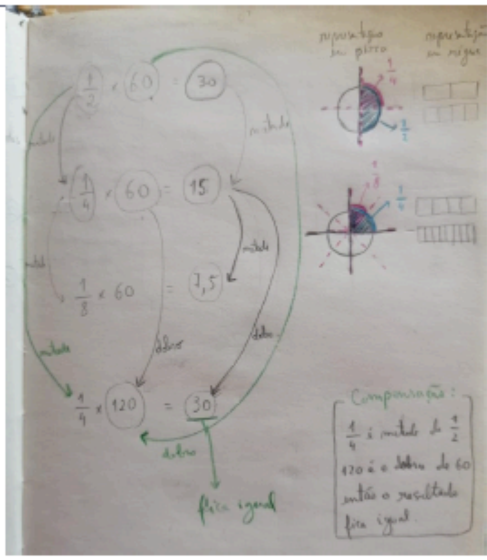
Exemplificação de 1/4 ser metade de 1/2
e exemplifica que ¼ é metade de ½ com o desenho da pizza.
A_5 – Sim, sim, professora, metade de 30 é 15.
P – Consegues explicar melhor?
A_5 – Nas "Réguas das Frações" que a professora nos emprestou o tamanho de $\frac{1}{4}$ era metade de $\frac{1}{2}$ e 30 quando se divide por 2 dá 15.
P – Muito bem!
Então, se metade de 60 é 30 (a professora aponta no quadro para a igualdade da hipótese 2), $\frac{1}{4}$ vai ser metade da metade e vai dar... (a professora faz um compasso de espera).
A_5 – vai dar 15 professora, como eu tinha dito.
P – Isso mesmo!
A professora coloca as réguas afixadas com bostik no quadro.

Réguas de Frações</td><td>A_3 – Mas, não entendo... metade de $\frac{1}{2}$ como pode ser $\frac{1}{4}$? Acho que temos de dividir o denominador por 2 e o numerador também por 2, é assim que fazemos para calcular o mmc.
P – Para calcular o mmc entre denominadores diferentes está correto fazer dessa forma, mas neste caso não estamos a calcular o mmc, estamos a dividir partes da unidade. Repara nas "Réguas das Frações", observa a régua que corresponde ao todo, que não está dividida e observa também a outra régua que está logo por baixo dela.

Réguas de Frações
A_7 – A que tem $\frac{1}{2}$?
P – Sim. Sabes porque tem $\frac{1}{2}$ escrito duas vezes?
A_7 – Porque tem dois bocados.
P – Sim, é como se tivéssemos dividido a régua que está em cima em dois bocados iguais. Repara agora na terceira régua a contar de cima...
A_7 –Está dividida em quatro bocados iguais!
P – E se comparares com a que está em cima dela, a que está dividida ao meio?
A_7 – Vejo que um desses bocados, que é $\frac{1}{4}$, é metade de $\frac{1}{2}$.
P – Boa! Então se $\frac{1}{2}$ é metade de 1...
A_7 – $\frac{1}{4}$ é metade de $\frac{1}{2}$!
P – Muito bem! E por isso $\frac{1}{4}$ é metade da metade da unidade.</td></tr>
<tr><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\frac{1}{8} \times 60$</td><td>Situação 9</td><td colspan="2">Situação 10</td><td>Situação 11</td></tr>
<tr><td>A professora escreve no quadro $\frac{1}{8} \times 60$
Em seguida desenha a pizza abaixo e pergunta qual a relação de 1/8 com ¼.

Exemplificação de 1/8 ser metade de 1/4
Os alunos indicam que é metade e a professora escreve no quadro:
$\underbrace{\frac{1}{4} \quad \frac{1}{8}}_{\text{metade}}$</td><td colspan="2">$A_7$ – Pois, e como disse há bocado o A_5, com as "Réguas das Frações", aqui $\frac{1}{8}$ é metade de $\frac{1}{4}$, e por isso dá 7,5 que é metade de 15.
P – Exatamente! Muito bem, A_7, vejo que as "Réguas das Frações" te ajudaram. Então, podemos escrever que
$\frac{1}{8} \times 60 = \frac{60}{8} = 7,5$
A_7 – Sim!
A professora afixa com bostik a régua do 1/8 por baixo da de ¼.

Réguas de Frações</td><td>A_8 – Professora, pode mostrar este com as réguas? Não é o $\frac{1}{6}$? É esse que vem a seguir?
A_5 – Não! A seguir vem o 8, porque 4 é metade de 8.
P – Vamos ver com as "Réguas de Frações"

Réguas de Frações

Réguas de Frações
Que te parece A_8? Qual é a régua que tem os bocados iguais e em que um desses bocados corresponde a metade de $\frac{1}{4}$?
A_8 – É a régua os $\frac{1}{8}$.
P – Isso mesmo!</td></tr>
</table>

	P – Quanto é metade de 15? A_8 – É 7,5 professora. P – Então, podemos relacionar com a fração anterior de $\frac{1}{4}$, como a professora escreveu ainda agora e, assim, temos $\underbrace{\frac{1}{4} \quad \frac{1}{8}}_{metade}$ e $\underbrace{15 \quad 7{,}5}_{metade}$		
	Situação 12	Situação 13	Situação 14
$\frac{1}{4} \times 120$	P – Então, agora neste caso, em vez de termos $\frac{1}{4} \times 60$ como naquele caso (a professora aponta para o local do quadro onde está escrito o algoritmo) temos (e escreve simultaneamente no quadro) $\frac{1}{4} \times 120$. Que vos parece? Qual será o resultado? A professora faz um compasso de espera, mas nenhum aluno responde, então reformula o raciocínio: P – Se $\frac{1}{4} \times 60 = 15$ quanto será $\frac{1}{4} \times 120$? A_9 – É 30, porque se dá 15 no outro neste dá 30. P – Explica outra vez que não percebi ainda muito bem. A_9 – Porque se com 60 dá 15, com 120 dá 30, porque $60 \times 2 = 120$ então $15 \times 2 = 30$ P – Muito bem, porque nestes dois casos estamos a multiplicar 60 por $\frac{1}{4}$ e 120 também por $\frac{1}{4}$.	P – Anteriormente tínhamos $\underbrace{\frac{1}{2} \quad \frac{1}{4}}_{metade}$ e $\underbrace{60 \quad 30}_{metade}$ Mas agora como poderemos escrever? $\underbrace{\frac{1}{2} \quad \frac{1}{4}}_{metade}$ e o que vem a seguir? Conseguem ajudar a professora? Podemos acrescentar $\underbrace{\frac{1}{2} \quad \frac{1}{4}}_{metade}$ e 60 O que fazemos ao 60? A_9 – Multiplicamos por 2, para dar os 120. P – Assim? $\underbrace{\frac{1}{2} \quad \frac{1}{4}}_{metade}$ e $\underbrace{60 \quad 120}_{dobro}$ A_9 – Sim! P – Vamos então procurar o algoritmo $\frac{1}{4} \times 120$ é igual a?	A_{10} – É igual a 60. P – Podes explicar como pensaste? A_{10} – Porque é metade de 120, por isso é que fizemos 60 vezes 2. P – Repara bem no algoritmo (a professora aponta no quadro no local onde está escrito o algoritmo) $\frac{1}{4} \times 120$, qual é a fração que lá está? A_{10} – É $\frac{1}{4}$. P – Então, $\frac{1}{4}$ é metade de quanto? A_{10} – De $\frac{1}{2}$. P – Ou seja, metade da metade, certo? A_{10} – Sim. P – Assim, metade da metade de 120 quanto é? A_{10} – Hum, é... 30! P – Isso mesmo! Vamos então escrever: $\frac{1}{4} \times 120 = \frac{120}{4} = 30$ Fizemos a metade de $\frac{1}{2}$ que é $\frac{1}{4}$, mas como estamos a multiplicar por 120 em vez de 60, e reparem que 120 é o dobro de 60, então não temos de compensar.

Resumo para consolidação	

ANEXO N – Transcrição do vídeo do EA: discussão em grande grupo/turma

PROBLEMAS DE RECONSTRUÇÃO DA UNIDADE

OPERADOR MULTIPLICATIVO PARTITIVO DE UM CONJUNTO DISCRETO

Tarefa 2 – Problema "Caixa de bombons"

A Patrícia tem uma caixa com 9 bombons. O número de bombons pode ser dividido em três partes iguais, como mostra a figura.

Cada uma dessas partes corresponde a um terço do número de bombons.

Quantos bombons são:

a) $\frac{1}{3}$ dos nove bombons?

b) $\frac{2}{3}$ dos nove bombons?

a)

Estratégia 1 – resolução com recurso ao modelo de pensar pela observação da caixa:

1.1 – a caixa é dividida em 3 partes iguais

1.2 – é identificada uma parte correspondente a $\frac{1}{3}$ da caixa

1.3 – é feita a contagem dos bombons que $\frac{1}{3}$ da caixa contem.

Na primeira parte do problema, para saber quantos são $\frac{1}{3}$ dos nove bombons o aluno A_1 explica a sua estratégia:

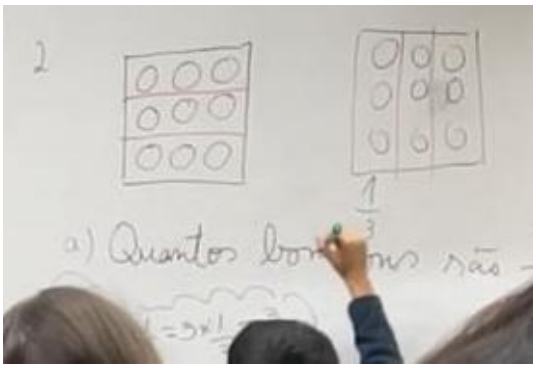
A_1 : Eu pensei que $\frac{1}{3}$ o denominador é 3 e tenho de dividir em 3 partes e depois pensei que o numerador 1 era uma parte, por isso, se tivesse aqui um 3.

A_1 apontou para a caixa realçando uma das partes da caixa correspondentes a $\frac{1}{3}$, tendo apontado a outra parte correspondente a $\frac{1}{3}$ e, finalmente, a última parte correspondente a $\frac{1}{3}$. A_1 explicou que:

A_1: Uma parte era esta, outra parte era esta e outra parte era esta. Mas, eu pensei que 3 são 3 partes e 1 era uma parte

e aponta para a figura para que se perceba que está a dizer que 1 é uma parte de 3 bombons.

Figura M1 – *Aluno* A_1 *no quadro quando identifica a porção da caixa de bombons que corresponde a* $\frac{1}{3}$ *da caixa.*



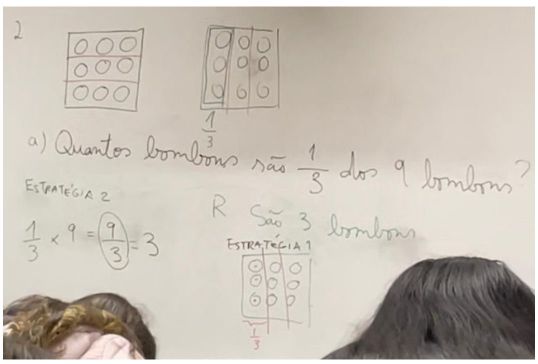
Professora (P): Mas, já respondeste à pergunta? Quanto são $\frac{1}{3}$ dos 9 bombons?

A_1: sim, porque, nós fizemos $\frac{1}{3}$ e o objetivo era saber quanto é $\frac{1}{3}$ dos 9 bombons, então são 3 bombons.

Estratégia 2 – resolução com recurso à linguagem matemática
A professora desafia os alunos a resolverem o problema utilizando uma estratégia diferente.

P: Quando eu digo o dobro de 9, que conta eu faço?
A_5: 9+9.
P: Eu posso dizer isso sob a forma de uma multiplicação?
A_6: 9×2.
P: Então quando nós dizemos $\frac{1}{3}$ de 9, como podemos dizer em forma de multiplicação?
A_4: 3×9.
P: E o que escreverias com o triplo de 9?
A_4: $9 + 9 + 9$.
P: E em forma de multiplicação?
A_4: 3×9.
P: Então o triplo é a mesma coisa que $\frac{1}{3}$?
A_4: Não, é 3×3.
A_3: $\frac{1}{3} \times 3$.
P: Mas aqui eu estou a dizer $\frac{1}{3}$ de 9, então $\frac{1}{3}$ de 9 é $\frac{1}{3}$ de quê?
A_7: $\frac{1}{3} \times 9$.
Agora é necessário fazer o cálculo do algoritmo da multiplicação da fração por um número natural:
P: Agora, como fazemos $\frac{1}{3} \times 9$?
O que já aprendemos sobre a multiplicação com um número natural? Já trabalhámos isto na última aula podem ir ver ao caderno.
A_1: É multiplicar o número natural, vezes o numerador e depois o denominador não se multiplica.
P: Fica...
A_1: Fica na mesma.
P: Então e $\frac{9}{3}$ ... lembram-se de estar a falar nas roupas que as frações tinham? $\frac{9}{3}$ será que é a roupa de outro número? A_5?
A_4: 3.
P: Como fizeste para saber se $\frac{9}{3}$ é igual a 3?
A_4: Porque 3×3 é 9.
P: É verdade, mas aqui não está 3×3, está $\frac{9}{3}$.
A_7: Dividimos.
P: Dividimos o quê?
A_7: O 9.
P: Será que esta estratégia vai dar o mesmo resultado que a estratégia 1?
Turma (T): Sim!

Figura M2 – *Duas estratégias para calcular quantos bombons são $\frac{1}{3}$ dos nove bombons da caixa.*



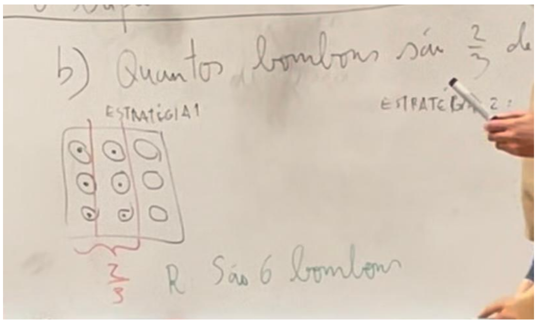
b)

<u>Estratégia 1</u>: resolução com recurso ao modelo de pensar pela observação da caixa da alínea a), que já estava dividida em 3 partes iguais. Após identificada a porção da caixa que corresponde a $\frac{1}{3}$, identificar a que porção correspondente a $\frac{2}{3}$ da caixa, chegando ao número de bombons a que correspondem esses $\frac{2}{3}$ da caixa.

Segunda parte do problema, para saber quantos são $\frac{2}{3}$ dos nove bombons:

P: Temos aqui esta caixa e já sabemos que estes 3 bombons correspondem a que fração?
A_8: $\frac{1}{3}$.
P: Agora consegues dizer-me onde estão $\frac{2}{3}$?
A_8: Mais um bocado da caixa.
P: O que me estás a dizer é que $\frac{2}{3}$ é esta primeira mais esta segunda?
Então, A_8, sabendo isto já consegues dizer quanto bombons são $\frac{2}{3}$ dos 9 bombons?
A_7: É só contar as bolinhas!
P: Quem é que quer ajudar A_8?
A_9: São 6.
P: Como fizeste A_9?
A_9: 3 + 3.
P: Contaste quantos bombons estavam aqui dentro destes $\frac{2}{3}$.
A_9: Sim, contei, mas só que com mais uma parte, $\frac{1}{3}$ mais uma parte que é $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$.
P: Então usámos a estratégia 1 ou a estratégia 2?
T: A 1.

Figura M3 – *Cálculo de quantos bombons são $\frac{2}{3}$ dos nove bombons da caixa utilizando a estratégia 1.*

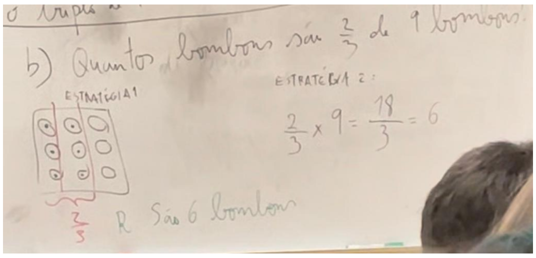


<u>Estratégia 2</u> – resolução com recurso à linguagem matemática

P: Como se escreveria para responder a esta questão, mas utilizando a estratégia 2?
A_1: $\frac{2}{3} \times 9$.
P: E agora outra pessoa: A_9? $\frac{2}{3} \times 9$, sabendo o que nós já sabemos sobre a multiplicação de frações com números naturais, como é que tu resolvias?
A_7: É só multiplicar por cima."
P: A_9? Queres pedir ajuda de outro colega? Queres pedir a ajuda a A_8? A_8, como é que nós resolvemos aqui?
A_8: 2×9...
P: Que dá?
A_8: Que dá... não sei de cor! É 18?
P: É 18, muito bem. E está? É só isto?

A_8: Não, depois em baixo é 3.
P: E agora, se alguém nos perguntar quantos bombons é que são $\frac{18}{3}$, o que é que nós podemos dizer e escrever aqui?
A_7: É 6, 6 bombons.
P: A_2, o que é que nós podemos colocar aqui? $\frac{18}{3}$ é igual a quanto?
A_2: 6, professora.
P: E porquê?
A_2: Porque dá para dividir...18 a dividir por 3.
P: E vê lá quanto é?
A_2: 6.

Figura M4 – *Duas estratégias para calcular quantos bombons são $\frac{2}{3}$ dos nove bombons da caixa.*

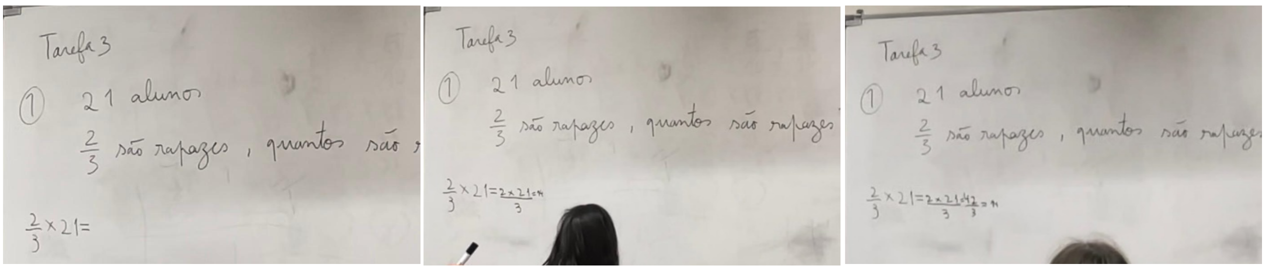


Tarefa 3
Problema "Alunos da turma"
Enunciado do problema:

1. **Numa turma de 21 alunos $\frac{2}{3}$ são rapazes.**
   a) **Quantos rapazes tem a turma?**
   b) **Quantas raparigas tem a turma?**

A_9: $\frac{2}{3}$ eram rapazes, eu fiz $\frac{2}{3}$ vezes os 21 alunos.
P: A A_9 utilizou a segunda estratégia que nós vimos a aula passada. Quando nós temos $\frac{2}{3}$ de 21, podemos sempre fazer uma conta de multiplicar, $\frac{2}{3}$ de 21 é a mesma coisa que $\frac{2}{3} \times 21$. Como é que nós fazemos quando temos um número natural a multiplicar por uma fração? Alguém consegue ajudar a A_9 a resolver esta operação?

Figuras M5, M6 e M7 – *Processo de resolução da aluna* A_9 *para calcular quantos são os rapazes da turma, em que a aluna utiliza a regra matemática da multiplicação de um número natural por uma fração.*



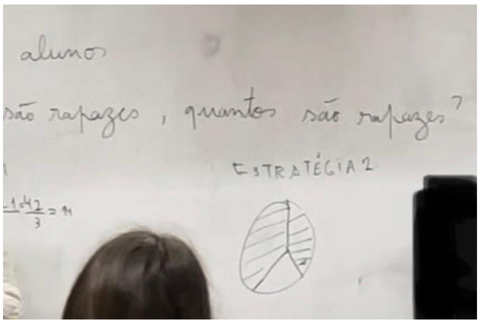
A_9: 2×21
P: E é só?
A_5: Depois tem de se pôr o resultado e o 3 em baixo.
P: $\frac{2}{3} \times 21$ é igual a ...

A_9 escreve $\frac{2}{3} \times 21 = 2 \times 21$

e a Professora pergunta o que é que falta
A_2: Falta o 3 em baixo do 2.
P: Em baixo só do 2? Assim está igual. Já sabemos a regra de multiplicar uma fração por um número natural. Multiplicamos, como disse A_5, o número natural pelo numerador e mantemos o denominador.

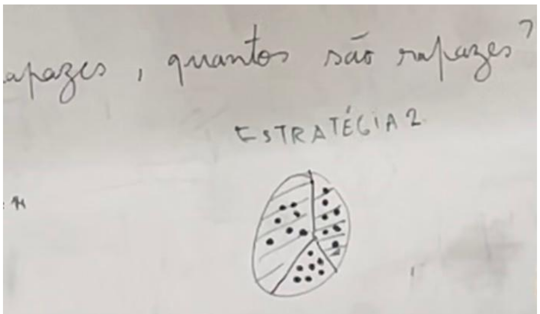
A_9 escreve $\frac{2}{3} \times 21 = \frac{2 \times 21}{3} = 14$
P: Alguém teve outra estratégia?
A_4: Eu tenho professora.
A_4 vai ao quadro fazer um desenho.

Figura M8 – *Estratégia da aluna* A_9 *para saber quantos rapazes tem a turma.*



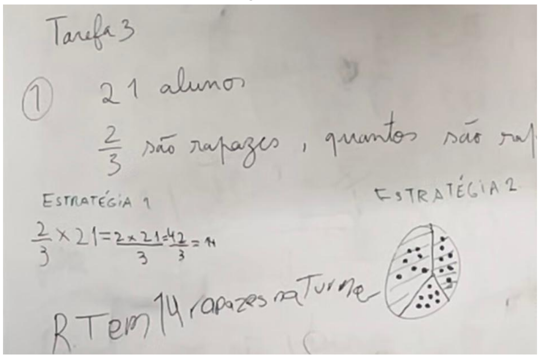
A_5: Como é que sabes quantos rapazes são?
A_{10}: Pode pôr-se bolinhas.
P: E quantas bolinhas é que punhas nesta parte aqui?
A_{10}: 7 numa e 7 na outra. Nas três punha 7 e fica 3×7 igual a 21.

Figura M9– *Estratégia da aluna* A_{10} *para saber quantos rapazes tem a turma, que corresponde às porções representadas pelo tracejados e bolinhas, ou seja,* $\frac{2}{3}$ *da pizza.*



P: Esta *pizza* toda completa corresponde a quê? A $\frac{3}{3}$ que é igual à turma completa, que A_{10} estava a dizer, 21 alunos. Então, nós olhando para aqui, sabemos que a parte pintada, que corresponde a $\frac{2}{3}$, são 14 rapazes.
P: E, A_8 quer saber o que tu pensaste para fazer esta estratégia 2.
A_4: Eu pensei que, como aqui tenho $\frac{2}{3}$ eu pintei duas partes e depois pus 21 e a dividir deu 14.
P: Faltava essa parte. Fizeste assim: 21: 3 = 7 e 7 + 7 = 14?
A_4: Sim.

Figura M10 – *As duas estratégias utilizadas pelos alunos para calcularem o número de rapazes da turma, que corresponde a $\frac{2}{3}$ do total de alunos da turma.*



Para calcular o número de raparigas que tem a turma a A_{10} ao olhar para o círculo, que estava dividido em 3 partes, soube logo a quantas raparigas correspondia, pois sabendo o número de rapazes, contou o que sobrou, que corresponde à parte do número de raparigas da turma.

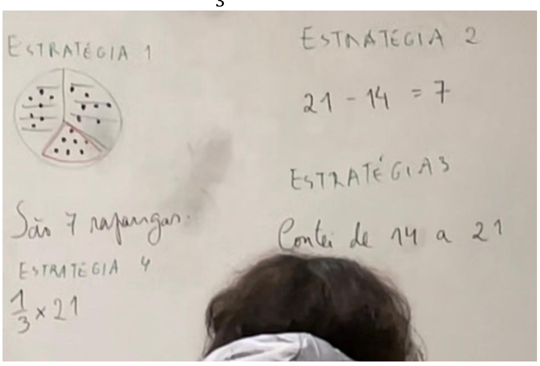
Contudo, surgiram mais estratégias, de acordo com o diálogo da professora com os alunos:

P: A_9 tem outra estratégia, podes-me dizer.
A_9: Eu fiz 21 alunos menos 14 e deu 7.
P: E porque é que fizeste menos 14?
A_9: Porque 21 alunos, porque é ao todo, e depois fiz 14 porque eram os rapazes, então 21 alunos menos 14 são 7.

Para a resolução utilizando a regra da matemática para a multiplicação de um número natural por uma fração a professora questiona os alunos:

P: Queremos saber $\frac{1}{3}$ de 21, porque as raparigas correspondem a $\frac{1}{3}$ da turma. Então, nós vamos fazer $\frac{1}{3}$ de que número? Dedos no ar. A_9?
A_9: 21.
P: Exatamente! E como é que nós agora resolvemos isto? Como é que nós fazemos agora uma fração vezes um número natural.
A_1: Multiplicar 21 o numerador.
P: E então, fica só assim? ($\frac{1}{3} \times 21 = 21$)
A_1: Não, é $\frac{21}{3}$ porque o denominador não multiplica.
A_3: Dá 7!
P: Já sabemos que esta fração vai dar um número natural, porquê? Dedo no ar.
J: Porque na tabuada do 3 há o 21.
P: Exatamente! Qual o número que multiplicado por 3 dá 21? É o 7.

Figura M11 – *As estratégias utilizadas pelos alunos para calcularem o número de raparigas da turma, que corresponde a $\frac{1}{3}$ do total de alunos da turma.*

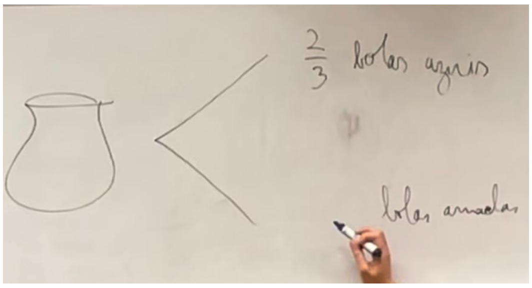


Problema o "Saco com bolas"
Enunciado do problema:

2. **Num saco está um conjunto de bolas, $\frac{2}{3}$ dessas bolas são azuis e as restantes são amarelas. Sabendo que dentro do saco estão 8 bolas azuis, quantas bolas tem o saco no total?**

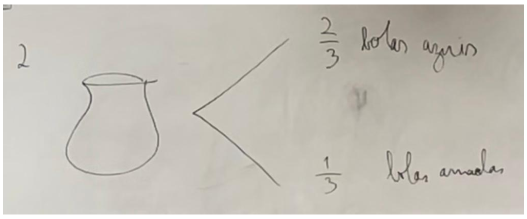
A professora começa por questionar que quantidade de bolas correspondem às bolas amarelas.
P: Qual é a fração que corresponde às bolas amarelas? Alguém sabe dizer-me?

Figura M12 – *Questionamento da professora sobre a que porção correspondem as bolas amarelas que estão no saco.*



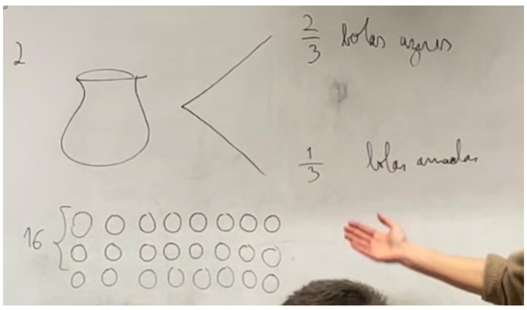
A_2: $\frac{1}{3}$ de bolas amarelas.
P: $\frac{1}{3}$, porque o saco completo tem...
A_2: $\frac{3}{3}$.

Figura M13 – *Porção correspondente às bolas azuis e porção correspondente às bolas amarelas, que corresponde ao total de bolas dentro do saco.*



A_4 vai ao quadro e utiliza uma estratégia fazendo o desenho das bolas.

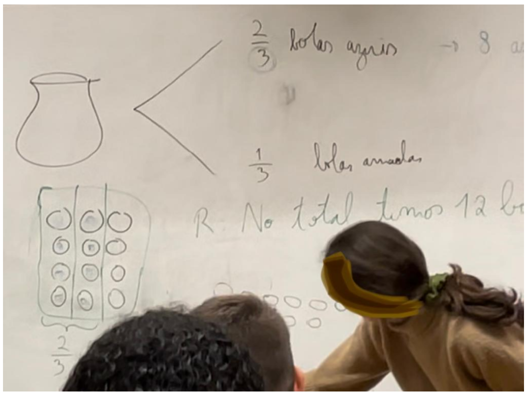
Figura M14 – *Modelo que a* A_2 *desenhou para representar o número de bolas que estão dentro do saco.*



P: Explica então como pensaste?
A_2: Então, tenho 8 e.… todo o saco são $\frac{3}{3}$.
P: Todo o saco são $\frac{3}{3}$, sim.
A_2: Eu pus aqui 8, 8 e 8. É como fosse $\frac{3}{3}$.

P: Mas os teus $\frac{2}{3}$ correspondem a quantas bolas?
A_2: 16.
P: Quem não está de acordo que $\frac{2}{3}$ corresponde a 16?
A_{10}: $\frac{2}{3}$ destas bolas são 8 bolas e o que tu puseste é que $\frac{2}{3}$ corresponde a 16.
P: Então quem gostaria de ajudar a A_2 a colocar $\frac{2}{3}$ corresponde a 8?
A_7: Temos de meter isto igual e 8 bolas azuis, temos de acrescentar mais 4 bolas amarelas.
P: Podes começar por explicar o que te fez dividir este retângulo em 3 partes?
A_7: Temos aqui $\frac{2}{3}$ e então eu dividi em 3 partes.
P: A_5, ouviste a justificação, porque é que o A_7 dividiu aqui o retângulo em 3 partes?
A_4: Porque o numerador é 3?
P: O numerador é 3? Queres dizer o denominador, que está de baixo do numerador!
Portanto, como o denominador é 3, A_8, o que é que o A_7 foi fazer?
A_8: Dividiu em 3 partes.
P: Então, A_7, porque é que tu puseste aqui 4 numa parte e quatro noutra?
A_7: Porque temos aqui todas bolas iguais e depois bolas amarelas...
P: O A_7 disse aqui algo muito importante, o número de bolas em cada parte tem de ser quê? Pode estar aqui numa parte duas, noutra parte três e noutra parte cinco?
T: Não!
P: Não, porque já sabemos que nas frações as partes têm de ser todas quê?
T: Todas iguais.
P: Por isso é que o A_7 pôs 4 em cada uma das três. Então, no total, nós temos aqui quantas bolas azuis?
A_2: 8.
P: 8 bolas azuis. A_7, ainda não deste a resposta. Quando olhamos para aqui quantas bolas no total é que tem o saco?
A_7: 12.

Figura M15 – *Estratégia do aluno D com um modelo de pensar para a distribuição de bolas no saco.*



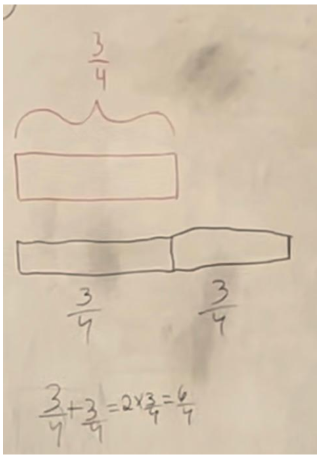
Problema da tira de papel
Enunciado do problema:

3. **A figura seguinte representa $\frac{3}{4}$ de uma tira de papel**

Representa a tira inteira.

O aluno A_{11} está no quadro a resolver o problema.

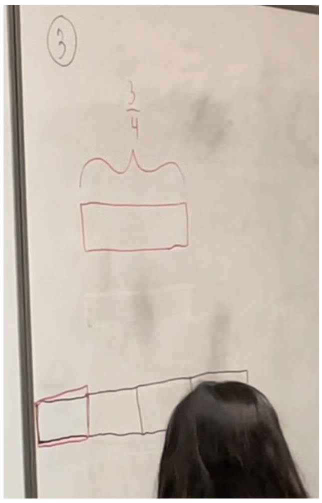
Figura M16 – *Estratégia do aluno MI para a resolução do problema da tira de papel.*



Diálogo entre a professora e o aluno A_{11} após apresentar a sua estratégia no quadro:
P: A_{12} disse que a tira inteira, que é o que nós procuramos, corresponde a $\frac{4}{4}$. Aqui nós temos uma tira inteira? Temos aqui $\frac{4}{4}$?
A_4: Não!
P: Temos, tu próprio respondeste, $\frac{6}{4}$.
A_9: Ah, ok!
P: Então o que é que nós sabemos? Que isto aqui não é uma tira inteira, isto são $\frac{6}{4}$ que é diferente de $\frac{4}{4}$.

A aluna A_5 vem também ao quadro apresentar a sua estratégia de resolução para o mesmo problema.

Figura M17 – *Estratégia da aluna* A_5 *para a resolução do problema da tira de papel, em que a aluna explica no seu modelo de pensar que a porção destacada a vermelho corresponde aos* $\frac{3}{4}$ *da tira de papel do enunciado do problema.*



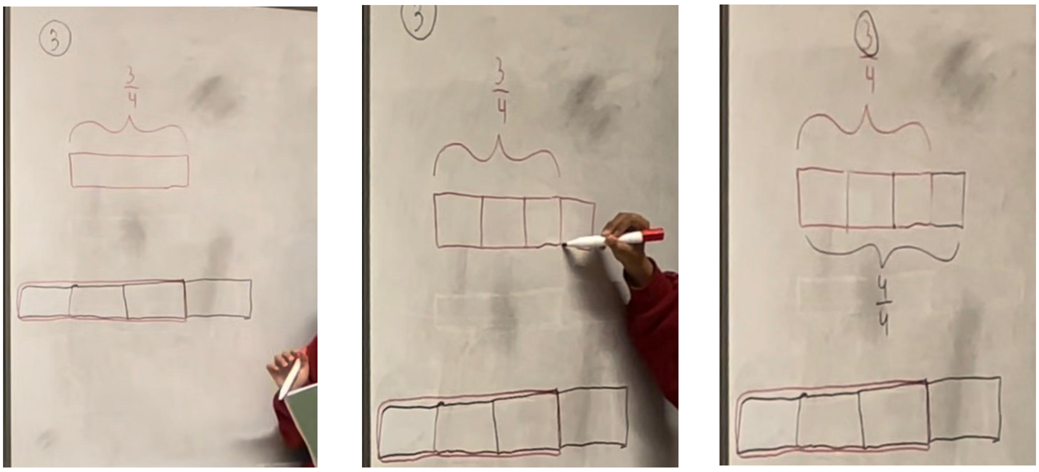
Diálogo entre a professora e a aluna A_5 enquanto apresenta a sua estratégia no quadro:
A_5: Dividi em 4 partes e depois como o numerador é 3 eu deixei três sem nada e pintei uma.
P: Então e desta tira onde é que está aqui? Consegues destacar a vermelho onde é que está esta tira do enunciado do problema?

A aluna contorna a vermelho o correspondente a $\frac{1}{4}$ da tira.

P: Todos concordam?
T: Não!

P: Quem não concorda coloque o braço no ar para explicar onde punham a tira vermelha. A_{10}, queres dizer onde punhas a tira vermelha e porquê? Porque é que não concordas? Vamos ver o que A_{10} pensou.
A_{10}: Aqui estão $\frac{3}{4}$ da tira, então eu dividi em três e coloquei o que faltava.

Figura M18, M19 e M20 – A_{10} *dividiu a tira em 3 partes iguais, que corresponde a* $\frac{3}{4}$ *da fita inteira. No entanto, como pretendia representar a tira completa, foi acrescentar uma parte igual a cada uma das porções que representou anteriormente quando dividiu a fita. Com esta estratégia faz a representação dos* $\frac{4}{4}$ *de fita, que corresponde à fita inteira que era pedido no enunciado do problema.*



CADEIA NUMÉRICA

P: Quanto é que acham que vai ser igual este algoritmo? ($\frac{1}{2} \times 60$). A_5?
A_5: É para dizer o resultado?
P: Sim
A_5: $\frac{60}{2}$.
P: Mais alguém tem um resultado que possa ser... esta conta pode ter outro resultado?
$\frac{1}{2} \times 60$, que também podemos dizer $\frac{1}{2}$ de 60, a A_5 disse que era igual a 60 meios. Podemos escrever de outra forma este resultado? Dedos no ar.
A_5, o que é que tu pensaste para escrever $\frac{60}{2}$ ou 60 meios?
A_5: Eu fiz 1×60 e deixei o 2 igual.
P: Exatamente, quando temos a multiplicação de uma fração por um número natural ou de um número natural por uma fração, porque podemos inverter a ordem dos números, como é que fazemos essa multiplicação?
A_1: É multiplicar o número natural pelo numerador e o denominador fica o mesmo.
P: Que foi o que A_5 fez. E eu pergunto-vos de vocês ainda se lembram de outra coisa, o que já falámos em outras aulas, quando temos o traço de fração isso simboliza o quê?
A_1: Dividir.
P: Dividir o quê, A_1?
A_1: O 60 pelo 2.
A_7: Então dá 30.
P: Como é que tu pensaste A_7?

A_7: Dividi 60 por 2.
P: Exatamente! E existe uma outra forma que vocês podiam ter feito... lembram-se do exercício do relógio? Tínhamos 0, que também pode ser o 60, e até aqui é 15, aqui é 30 e, calma, 0, 15, 30 e... A_1, lembras-te quantos minutos colocávamos aqui?
A_1: 45.
P: Exatamente! E vocês já repararam aqui esta fração que está aqui pintada a verde? Dedos no ar.
A_9: $\frac{2}{4}$.
P: É verdade, são $\frac{2}{4}$. E também podemos representar...
A_8: $\frac{1}{2}$.
P: É uma parte de um círculo que está dividido em dois. Está dividido em quatro, mas também podemos dividir em dois. Portanto, quando aqui aparece $\frac{1}{2}$ de 60, nós também podemos pensar assim. Sei que isto tudo é 60, se eu quero $\frac{1}{2}$ de 60, que número é que está aqui em baixo?
T: 30
A_8: Que é metade de 60.
P: Que é metade de 60, porque $\frac{1}{2}$ também significa metade. Quando nós dizemos $\frac{1}{2}$ de alguma coisa, nós estamos a dizer eu quero metade dessa coisa. Por exemplo, se eu tiver assim $\frac{1}{2}$ de 50?
A_5: 25
P: Sim, é 25, porque quando nós temos $\frac{1}{2}$ vezes ou $\frac{1}{2}$ de estamos a pedir metade. Então e agora uma outra, se nós tivermos $\frac{1}{2}$ de 100 (a professora escreve $\frac{1}{2}$ x 100).
A_7:50
P: Ednela?
A_4: 50
P: Exatamente! Agora uma última, quem me quer dizer aqui um valor?
A_8: 1000
P: Quem me sabe dizer quanto é $\frac{1}{2}$ de 1000 ou $\frac{1}{2} \times 1000$? A_{13}?
A_{13}: 500
P: Muito bem A_{13}.
A_7: Mas não fazemos a multiplicação?
P: Podemos experimentar, mas como já percebemos podemos fazer logo, mas o que é bom na matemática é que podemos conformar sempre com coisas que já sabemos. Podemos experimentar fazer aqui: $\frac{1}{2} \times 1000$, como é que nós fazemos, A_7, se quisermos fazer a multiplicação, utilizando as regras que nós já conhecemos?
A_7: É 1000 em cima e 2 em baixo.
P: E o em cima e em baixo como é que se diz?
A_7: Numerador em cima e denominador em baixo.
P: Exatamente. E agora como é que resolves isto?
A_7: Então agora é só dividir por 2.
P: Exatamente. Vai ou não vai dar a mesma coisa?
E agora eu vou perguntar-vos uma outra coisa, que é $\frac{1}{4} \times 60$. Quem é que quer tentar...
A_9: Professora, mas é como aqueles?
P: Estou a perguntar como é que é e depois cada um utiliza a estratégia que lhe dá jeito.
Podes ir pelo relógio, podes ir pela operação, podes ir de várias maneiras.
A_9, queres tentar quanto é $\frac{1}{4}$ de 60 ou $\frac{1}{4}$ vezes 60, que é a mesma coisa.
A_6: É 15.
P: Podes explicar?
A_6: podemos ver pelo relógio.
P: Então, vamos desenhar o relógio, temos 0, 15, 30 45 e 60. Como é que tu pensaste A_6? Só pensar no relógio não nos dá a resposta, o que é que tu pensaste para ser 15?
A_6: Porque 60 a dividir por 4 é 15.
P: Então não usaste a estratégia do relógio!

A_6: Eu usei professora, eu usei.
P: Então diz-me porque é que disseste 15, com essa estratégia.
A_6: Porque eu olhei ara os ponteiros do relógio, tem quatro ponteiros.
P: Então esta parte pintada a verde a que é que corresponde?
A_6: $\frac{1}{4}$.
P: E, portanto, tu pensaste que, se isto é $\frac{1}{4}$ e aqui bate 15, é porque é 15 a resposta, é isso?
A_7: Porque é que não dividimos logo? Mais fácil!
P: Agora eu gostaria de pensar se alguém pensou de outra forma?
A_7: Eu pensei que 15 + 15 dá 60, tipo 15 + 30 + 45 e dá 60.
P: Portanto, tu dividiste na tua cabeça 60 por, ou seja, tu viste na tua cabeça que 60 era igual a 15 + 15 + 15 + 15.
A_7: Sim, é mais fácil.
P: E tu decidiste fazer 15 + 15 + 15 + 15, mas podias fazer 10 + 10 + 10 + 10? Porque é que fizeste 15 + 15 + 15 + 15?
A_7: Como 10 + 10 + 10 + 10?
P: Sim, olhaste para o 60 e viste que era igual a 15 + 15 + 15 + 15, mas também podias ter dividido noutros números. Quantos dezes é que eu escrevia aqui?
A_7: Seis.
P: Seis, exatamente!
Então porque é que tu escolheste esta?
A_7: Porque é $\frac{1}{4}$.
P: Exatamente.
A_7: São quatro partes iguais.
(A professora expõe no quadro as réguas de frações)
P: E o que é que nós vemos aqui? Qual é a relação entre $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{2}$?
A_1: $\frac{1}{2}$ é igual a $\frac{2}{4}$.
P: Exatamente, $\frac{1}{2}$ é igual a $\frac{2}{4}$.
Será que podemos dizer que $\frac{1}{2}$ é o dobro de $\frac{2}{4}$?
A_4: Ahhh, sim!

A professora no quadro rodeia $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$ e faz a sua ligação com uma linha.

P: Podemos dizer que se é o dobro, $\frac{2}{4}$ é ... está tudo certo como vocês disseram, eu é que vou escrever aqui e vou perguntar se vocês concordam.
(A professora expõe no quadro a régua de frações dividida em 4 e a régua de frações dividida em 8)
P: Vocês concordam que $\frac{1}{4}$ é metade de $\frac{1}{2}$?
A_4: Sim.
P: Alguém não concorda? E o que é que nós vemos aqui?
A_4: que 30 é metade de 15. Não, 15 é metade de 30!
P: Sabemos que $\frac{1}{4}$ é metade de $\frac{1}{2}$ e eu tenho aqui 60 que metade dá 30, então metade dessa metade, ou seja, metade de 30 é 15.
Agora, um bocado mais difícil! S eu fizesse $\frac{1}{8} \times 60$?
A_7: Então, a mesma coisa!
(a professora expõe no quadro a régua de frações dividida em 8 partes iguais)
Quem me sabe dizer quanto vai ser $\frac{1}{8} \times 60$?
A_8, podes utilizar a calculadora, é um método. O que estás a fazer na calculadora?
A_8: Eu sei quanto é que isso dá.
P: Ótimo!
A_8: $\frac{60}{8}$.

P: Portanto, aqui utilizaste a regra que nós vimos. Queres dizer qual foi a regra que nós utilizámos?
A_8: Multiplicámos o numerador pelo número natural e o denominador ficou igual.
P: E isto deixamos assim ou dá para pôr de outra forma? Queres dizer-me o resultado? O que é que fizeste na calculadora?
A_8: Dá 7,5.
P: Alguém fez de uma forma diferente de A_8? Outro raciocínio?
A_8 foi utilizar a regra que já conhecemos e multiplicou o número natural pelo denominador e deixou o denominador igual. Depois foi fazer a divisão, pois nós já sabemos que o traço de fração corresponde a uma divisão e dividiu o numerador pelo denominador e deu 7,5. E alguém chegou a este valor sem utilizar este passo que A_8 utilizou? Todos fizeram desta forma? Alguém utilizou as réguas de frações ou o relógio?
Se eu quisesse utilizar o relógio em quantas partes é que o ia dividir?
A_1: Oito.
P: Temos aqui 0, aqui já sabemos que temos os 15, aqui 30, 45 e aqui os 60. Então e que valores é que vamos ter aqui? (a professora aponta para o segmento de reta que está no meio dos segmentos de reta que correspondem ao 0 e ao 15)
A_7: É 7,5.
P: E utilizando as réguas de frações nós podíamos pensar que seria 7,5?
A_4: Sim, porque a última está dividida em oito.
P: A minha pergunta é: Alguém fez desta forma para chegar aqui a 7,7?
Mas o que é que nós reparamos? Qual é a relação de $\frac{1}{4}$ com $\frac{1}{8}$?
Da mesma forma que metade de $\frac{1}{2}$ é $\frac{1}{4}$, o que é que vemos aqui?
A_5: que $\frac{1}{4}$ é metade de $\frac{1}{8}$.
P: Repete outra vez, $\frac{1}{4}$ ...
A_5: é metade de $\frac{1}{8}$.
P: Será que $\frac{1}{4}$ é metade de $\frac{1}{8}$? Ou será que $\frac{1}{8}$ é que é metade de $\frac{1}{4}$?
Então, aqui vemos que $\frac{1}{8}$ é metade de $\frac{1}{4}$.
A_7: E se fosse um dezasseis avo? É metade de $\frac{1}{8}$ também.
P: É verdade. Esse é o passo seguinte! Não temos aqui essa régua, mas se tivéssemos, fazíamos assim e cada parte desta valia um dezasseis avo.
Mas seguindo este raciocínio, sabendo nós isto das réguas, qual é a relação do 15 com o 7,5? O que é que eu vejo, na relação do 15 e do 7,5?
A_1: Que 7,5 é metade de 15.
P: É isso mesmo, aqui sem fazer esta conta, se já sabíamos este resultado aqui de cima que era 15 e já sabíamos que $\frac{1}{8}$ era metade de $\frac{1}{4}$, íamos fazer metade de 7,5.
E se quiséssemos ainda continuar, como A_7 estava a dizer, se quiséssemos $\frac{1}{16}$ de 60, o que é que estavas a pensar que seria A_7, quando disseste que $\frac{1}{16}$ é metade de $\frac{1}{8}$? Que resultado é que tu poderias dizer que era então $\frac{1}{16} \times 60$? Tinhas-me dito que $\frac{1}{16}$ é metade de $\frac{1}{8}$, então quanto é que seria aqui este resultado? Queres ajudar A_5?
A_5: Posso dizer?
P: Podes.
A_5: É $\frac{60}{16}$. Posso dizer a outra?
P: Sim.
A_5: 3,5.
P: O que é que tu pensaste para dizer 3,5?
Não é exatamente 3,5, mas eu acho que tu estás a ter um bom raciocínio.
Alguém quer tentar perceber o que A_5 pensou para dizer aqui que seria 3,5?
A_5: É que 3 + 3 é 6 e pensei que para dar 7 eu fiz 3,5.

P: É, faz sentido, mas tens mais 0,5, mas é isso mesmo, fizeste metade. Mas podes fazer dessa forma A_5, metade de 7 é 3,5 + 3,5, mas falta-te os 0,5. Quem é que me sabe dizer quanto é metade de 0,5?
A_7: É só acrescentar mais um zero, fica 0, 03... não!
P: E se tiver 7,50? Quanto é metade de 50?
A_6: É 25
P: Se pensarmos que é 50, metade de 50 é 25 e agora podemos fazer a conta toda.
E quanto é que agora isto dá? Esta conta toda. Nós queremos saber quanto é metade de 7,5. Sabendo isto, quanto é que vai ser metade de 7,5.
3,5 + 3,5 é igual a 7 e nós queremos saber metade de 7,5.
Façam na calculadora 7,5 a dividir por 2.
A_1: 3,75.
P: Vocês já viram que 3,75 vai ser igual a 3,5 + 0,25. Nós podemos dividir os números se nos der mais jeito para pensarmos. Vemos quanto é metade de 7 e quanto é metade de 0,5 e as duas juntas vão ser metade de 7,5.
Portanto, tu pensaste muito bem F, só te faltou o valor exato, não 3,5, mas 3,75.
A_7: Só a calculadora para resolver isso.
P: Mas nem sempre temos a calculadora ao nosso lado.
A_6: É por isso que é cálculo mental!
P: Exatamente! Isso é verdade, estamos a tentar chegar aos valores sem utilizarmos a calculadora e a utilizar coisas que nós já sabemos. Portanto, já sabemos este resultado, vamos tentar utilizá-lo para encontrar o seguinte e assim sucessivamente, por isso se chama uma cadeia numérica.