

**RACIOCÍNIO MATEMÁTICO: PROFESSORES DO 1.º E 2.º CEB E O
PROCESSO DE GENERALIZAR**

**MATHEMATICAL REASONING: TEACHERS OF 1ST AND 2ND CEB AND
THE GENERALIZATION PROCESS**

Lurdes Serrazina

*Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Lisboa, UIDEF, Instituto de
Educação, Universidade de Lisboa*

lurdess@eselx.ipl.pt

Margarida Rodrigues

*CIED, Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Lisboa, UIDEF,
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa*

margaridar@eselx.ipl.pt

Resumo: Esta comunicação tem por base uma experiência de formação realizada no âmbito do projeto REASON, que tinha como objetivo o desenvolvimento do conhecimento de professores do 1.º e 2.º CEB sobre processos de raciocínio matemático. Trata-se de um estudo qualitativo de carácter interpretativo focado no processo de generalizar. Os dados foram recolhidos através da gravação das sessões de formação e de notas de campo das formadoras e incidiram sobre a apresentação das produções dos alunos aquando da realização de tarefas em sala de aula, em especial na discussão dos processos de raciocínio identificados nas mesmas pelas formandas. Da análise realizada pode concluir-se que foi possível clarificar dúvidas das formandas sobre o processo de generalizar. Essas dúvidas incidiam, por um lado no facto deste processo estar associado à ideia de “tornar geral” e, portanto, de infinito e por outro a ideia de que uma generalização tem de ser sempre verdadeira. A discussão realizada, a partir das resoluções dos alunos, permitiu esclarecer estes equívocos e clarificar aquele processo de raciocínio.

Palavras-chave: Conhecimento do Professor; Generalizar; Processos de Raciocínio Matemático; Raciocínio Matemático.

Abstract: This communication is based on a teacher education experience carried out within the scope of the REASON project, which aimed to develop the knowledge of teachers of 1st and 2nd CEB on mathematical reasoning processes. This is a qualitative study of an interpretive nature focused on the generalization process. Data were collected by recording the education sessions and field notes of the educators and focused on the presentation of the students' productions when carrying out tasks in the classroom, especially in the discussion of the reasoning processes identified by the teachers. From the analysis carried out, it can be concluded that it was possible to clarify doubts of the teachers about the generalization process. These doubts focused on the one hand, on the

fact that this process is associated with the idea of “making general” and, therefore, on infinity and, on the other hand, on the idea that a generalization must always be true. The discussion, based on the students' resolutions, made it possible to clarify these misconceptions and clarify that reasoning process.

Keywords: Generalizing; Mathematical Reasoning; Mathematical Reasoning Processes; Teacher's knowledge.

Introdução

Este artigo enquadra-se no Projeto *Raciocínio Matemático e Formação de Professores* (REASON), o qual visa estudar o conhecimento matemático e didático que os professores precisam para conduzir uma prática que promova o raciocínio matemático dos alunos e estudar formas de apoiar o seu desenvolvimento em professores e futuros professores dos ensinos básico e secundário. No âmbito do projeto, foi desenvolvida uma experiência de formação, na modalidade oficina de formação, com professores do 1.º e 2.º ciclo do ensino básico (CEB). Um dos aspetos trabalhados na oficina foi a análise e resolução de tarefas de formação focadas nos processos de raciocínio matemático (Jeannotte & Kieran, 2017). Nesta comunicação, pretendemos identificar a forma como formandas, com larga experiência como professoras, olharam para as produções dos seus alunos no que se refere aos processos de generalizar e de conjecturar, bem como a discussão que essa análise suscitou no grupo de formação.

Raciocínio matemático e seus processos

O termo raciocínio matemático aparece muitas vezes associado ao de pensar matematicamente. Assumimos como raciocínio matemático o “realizar inferências de forma fundamentada, ou seja, partir de informação dada para obter nova informação através de um processo justificado” (Ponte et al., 2020, p. 7). Nesta perspetiva, raciocinar matematicamente é menos abrangente do que pensar matematicamente.

Jeannotte e Kieran (2017), com base numa revisão de literatura, consideraram dois aspetos dentro do raciocínio matemático: o aspeto estrutural e o aspeto processual. No primeiro incluem os tipos de raciocínio: dedutivo, indutivo e abduutivo, enquanto no segundo referem o que designam por processos de raciocínio. O raciocínio dedutivo encadeia um conjunto de asserções de forma lógica, justificando esse encadeamento e, se essa cadeia de deduções não contiver erros chega-se a uma conclusão necessariamente verdadeira. Este tipo de raciocínio é muitas vezes considerado o raciocínio matemático. Mas, um relevo especial ao raciocínio indutivo em matemática foi atribuído por Polya (1990), quando considerou que ele está presente quando se chega a uma regra a partir da observação do que acontece em diferentes casos particulares, por exemplo, quando através da observação de uma regularidade se estabelece uma generalização. No que se refere ao raciocínio abduutivo, este aparece muitas vezes associado ao raciocínio indutivo. Silva (2009), referindo-se aos estudos de Pierce, considera abdução como “um processo de inferência que parte de um facto insólito ou invulgar e que procura uma explicação para a sua ocorrência” (p. 39). Para esta autora, abduzir é levantar hipóteses, como formas de explicar fenómenos surpreendentes que se observam. Oliveira (2008) analisou o trabalho de diferentes matemáticos e considera o raciocínio dedutivo fundamental quando se conclui uma investigação matemática. Normalmente, a prova é precedida por uma fase

exploratória onde se experimentam tentativas, avanços e recuos, analogias ou intuições, emergindo tipos de raciocínio indutivo e abduutivo associados ao processo de generalizar.

Para Jeannotte e Kieran (2017), o aspeto processual do raciocínio matemático envolve os processos de procura por semelhanças e diferenças (generalizar, conjecturar, identificar um padrão, comparar e classificar) e os processos relacionados com a validação (justificar e provar). Ponte et al. (2020) destacam conjecturar, generalizar e justificar como processos essenciais do raciocínio matemático, sendo conjecturar central no raciocínio abduutivo, generalizar, ou seja, formular conjecturas de natureza geral, um processo-chave dos raciocínios indutivo e abduutivo e justificar, um processo essencial do raciocínio dedutivo. De acordo com Lannin et al. (2011), o processo de generalizar ocorre quando um indivíduo identifica aspetos comuns em casos diferentes ou quando estende o raciocínio além do conjunto em que originalmente identificou os elementos comuns. Tal como sustentado por estes autores, “generalizar em casos diferentes, quer resulte em generalizações verdadeiras ou falsas, pode ser uma introdução importante ao processo de raciocínio e pode aprofundar a compreensão do aluno” (Lannin et al., 2011, p. 20). Para Jeannotte e Kieran (2017), generalizar consiste em inferir afirmações sobre um conjunto de objetos, ou uma relação sobre esses objetos, a partir da análise de um subconjunto desses objetos. As autoras consideram ainda o processo de exemplificar como apoio aos outros processos de raciocínio matemático, nomeadamente ao processo de generalizar.

Desde o início da escolaridade, é fundamental desenvolver o processo de generalizar, com ênfase na construção de significados e na compreensão, (Cusi & Malara, 2007; Kaput, 1999). Este processo tem o potencial de contribuir para o aprofundamento da compreensão da Matemática. Warren e Cooper (2007) consideram a descrição de uma dada regularidade através da linguagem natural de grande importância para os alunos conseguirem, depois, exprimir a generalização através de notação simbólica.

Assim, consideramos que o processo de generalizar é fundamental em Matemática quando pretendemos “fazer afirmações gerais sobre propriedades, conceitos ou procedimentos” e que a “justificação é central para que seja possível validar matematicamente” aquelas afirmações (Mata-Pereira & Ponte, 2018, p. 783). Estes dois processos interagem entre si. Em muitas situações, a linguagem utilizada na justificação tem de ser geral de modo que seja clara a sua aplicabilidade a todo o domínio. Para Jeannotte e Kieran (2017), exemplificar é um processo auxiliar de generalizar e justificar, que permite inferir dados sobre um problema ao gerar elementos que apoiam aqueles processos. No processo de generalizar, é fundamental a procura de semelhanças e diferenças através da produção de exemplos, sendo neste caso necessário mobilizar o processo de comparar. Também no justificar, os exemplos podem ser fundamentais, como quando se utilizam contraexemplos. Já o processo de conjecturar corresponde a inferir, pela procura de semelhanças e diferenças, uma dada afirmação acerca de alguma regularidade que se considere ser provavelmente verdadeira e que, embora não se encontre validada, tem o potencial para uma teorização matemática (Jeannotte & Kieran, 2017).

Conhecimento do professor sobre raciocínio

Mas, para que os professores possam trabalhar com os seus alunos de modo a desenvolverem os diferentes processos de raciocínio, não basta saberem identificá-los, é essencial que tenham uma compreensão profunda do significado de cada um de modo a conseguir estabelecer relações entre eles, alcançando deste modo um nível elevado de conhecimentos (Rodrigues et al., 2021).

Vários estudos (por exemplo, Lannin et al., 2011; Stylianides & Ball, 2008; Stylianides & Stylianides, 2006) referem que os professores do ensino elementar devem ter oportunidades de desenvolver o seu raciocínio matemático se se pretende que o venham a trabalhar com os seus alunos, alargando assim o seu conhecimento didático sobre como incentivar e encorajar o trabalho com raciocínio nas suas aulas (NCTM, 2000). Pois, para que os professores possam desenvolver a capacidade de raciocínio nos seus alunos precisam de considerar uma variedade de fatores como: identificar o potencial da tarefa para desenvolver o raciocínio; saber que ações devem tomar para facilitar o processo de desenvolvimento do raciocínio e ter consciência do conhecimento dos alunos sobre o assunto (Davidson et al., 2018).

Vários autores (por exemplo, Francisco & Maher, 2011; Loong et al., 2017) referem a necessidade de criar oportunidades para que os professores aprendam sobre como desenvolver o raciocínio matemático nos alunos. No mesmo sentido, Stylianides e Ball (2008) defendem a necessidade de desenvolver nos professores a capacidade de planear e implementar tarefas promotoras do desenvolvimento do raciocínio nos seus alunos. Melhuish et al. (2019) referem que se queremos que os professores promovam a capacidade de generalizar dos seus alunos, devemos proporcionar-lhes oportunidades para analisarem evidências desses processos durante a sua formação, de modo a desenvolverem a sua capacidade de perceber quando os alunos estão envolvidos nesses processos. O facto de os professores selecionarem tarefas que promovam processos de raciocínio, implementarem-nas na sala de aula e posteriormente refletirem sobre as produções dos alunos com outros professores pode ser uma forma de alargar o seu conhecimento didático sobre como desenvolver o raciocínio matemático dos seus alunos (Herbert & Bragg, 2021).

Metodologia

O presente estudo seguiu uma abordagem qualitativa-interpretativa (Patton, 2002; Quivy & Campenhout, 2008), incidindo nos processos e nos significados dos participantes, professoras do 1.º e 2.º ciclo do ensino básico. Foi desenvolvido no contexto de uma experiência de formação, correspondendo ao 2.º ciclo da Investigação Baseada em Design (Cobb et al., 2003), com professoras do 1º CEB e Professores de Matemática e Ciências do 2.º CEB. Estas professoras (num total de 19) constituíam uma turma da oficina de formação realizada numa das instituições do Projeto. Eram professoras com larga experiência, sendo 6 do 1.º CEB e 13 do 2.º CEB. Embora esta formação tivesse sido prevista para ser realizada presencialmente, acabou por ser realizada online, devido à pandemia, no 2.º semestre de 2020/2021. Os formadores foram três elementos da equipa do Projeto.

A experiência realizada contemplou oito sessões síncronas, tendo as participantes de preparar e realizar duas tarefas com os seus alunos – uma antes da sessão 4 (Levar à prática I) e outra a seguir à sessão 7 (Levar à prática II). Tinham ainda de preparar uma apresentação a fazer na sessão de formação seguinte que englobasse uma reflexão crítica sobre o trabalho realizado pelos seus alunos. Nas restantes sessões de formação, foram exploradas e discutidas tarefas de formação que se propunham desenvolver nas professoras o conhecimento das práticas de ensino promotoras do desenvolvimento do raciocínio nos alunos. Todas as tarefas foram inicialmente exploradas autonomamente pelas professoras, organizadas em grupos, sendo posteriormente discutidas pelo coletivo das formandas.

Este artigo contempla a apresentação e discussão no coletivo do trabalho realizado no *Levar à prática I* e no *Levar à Prática II* por um par de formandas do 2.º CEB que propuseram as mesmas tarefas numa turma do 5.º ano e numa turma do 6.º ano. Estas formandas, aqui designadas por Alice e Fernanda, eram professoras com mais de vinte anos de experiência, consideradas pelos seus pares e pela comunidade, sendo ambas professoras cooperantes. Na discussão coletiva, após a apresentação participaram outras formandas. Todos os nomes usados são fictícios.

A apresentação devia contemplar uma identificação, por parte das professoras, dos processos de raciocínio utilizados pelos alunos. Os dados foram recolhidos através da gravação das sessões de formação onde essa discussão aconteceu e posterior transcrição, complementadas por notas de campo das formadoras. A análise foi realizada através de análise de conteúdo dos dados recolhidos (Bardin, 2010).

Discutindo o processo de generalizar

Generalizar a um número limitado ou infinito de casos

Episódio 1

Na quarta sessão, em que os grupos de formandas apresentaram a implementação de uma tarefa na sala de aula (*Levar à Prática I*), a apresentação de Alice e Fernanda suscitou discussão no seio do grupo de formandas. A Figura 1 apresenta a tarefa explorada pelos alunos dos 5.º e 6.º anos de escolaridade das suas turmas.

“Levar à Prática I”

TAREFA – NÚMEROS NATURAIS¹

Observa os seguintes produtos.

$37 \times 3 = 111$	$37 \times 12 = 444$
$37 \times 6 = 222$	$37 \times 15 = 555$
$37 \times 9 = 333$	

1. Encontras alguma regularidade nestes produtos?
Justifica a tua resposta.

2. Com base na regularidade que observaste nos produtos anteriores, determina o valor de:

37×27

Mostra como chegaste à tua resposta.

REASON
Raciocínio Matemático e Formação de Professores

¹Adaptado de Algoritmo 5º ano

Figura 1. Tarefa implementada em *Levar à Prática I*.

A Figura 2 apresenta várias resoluções quer de alunos do 5.º ano quer do 6.º ano à questão 1 bem como a identificação pelas formandas dos processos de raciocínio evidenciados pelos alunos.

Sim, o número 37 quando é multiplicado por múltiplos de 3, aumenta 111. Logo, quando o multiplicador é múltiplo de 3, os algarismos do produto serão todos iguais até ao 999. **6º ano** **Generalizar**
Justificar

Eu encontro duas regularidades, a primeira é que o resultado tem sempre todos os algarismos, que aumentam sempre de 111 em 111. A segunda é que o multiplicador aumenta sempre de 3 em 3. **6º ano** **Generalizar** **Justificar**

Sim, estão a multiplicar, 3, 6, 9, 12, 15 (a tabuada de três) logo a seguir era $37 \times 18 = 666$. O resultado aumenta sempre 111. **6º ano** **Generalizar** **Justificar**

A regularidade é quando nós multiplicamos 37 por ex por 12 e quando 3×4 o número 4 vai dizer que o resultado é 444 por $24 = 3 \times 8$ então o resultado é 888 e continua sempre com o tabuada do 3. **5º ano** **Generalizar** **Justificar**

$37 \times 3 = 111$
 $37 \times 6 = 222$
 $37 \times 9 = 333$
 $37 \times 12 = 444$
 $37 \times 15 = 555$

\downarrow
 sempre mais 3.

Figura 2. Resoluções à questão 1 da tarefa.

Alice e Fernanda apresentaram a sua análise das resoluções selecionadas. Vejamos o extrato relativo à última resolução da Figura 2.

Alice: (lê a resposta do aluno) É assim, estes alunos identificaram imediatamente que era a tabuada do 3. Alguns “Ah, professora, o que é aquilo por que se multiplica?”. Portanto, queriam perguntar o que é que é o multiplicador, mas depois tiveram alguma dificuldade em explicar, e então eu dei assim uma pequena dica. Eu disse “então se é a tabuada do 3, vamos lá fazer a tabuada do 3”. Pronto. E depois a partir daí, depois de ter sugerido que fizessem a tabuada do 3, não dei assim mais nenhuma indicação particular. E então, ele conseguiu fazer sempre o 37, por números da tabuada do 3, por 3×1 , por 3×2 . No fundo, penso que é isso que ele quer dizer, embora ele tenha só dado dois exemplos.

Fernanda: Ele só deu dois exemplos, mas ele consegue descobrir que o 3 mantém-se, que no 3×4 vai ser 4, 4, 4. Se for 3×5 vai ser 5, 5, 5. Tanto que o 3×8 é 8, 8, 8. E continua, diz ele, “sempre com a tabuada do 3”, salvaguardando.

A Figura 3 apresenta as resoluções de dois alunos do 6.º ano à questão 2, assim como a identificação pelas formandas dos processos de raciocínio evidenciados pelos alunos.

$37 \times 27 = 999$, porque se seguirmos a sequência do exercício anterior (de 3 em 3) e continuarmos na última conta seria: $37 \times 15 = 555$
 então temos o resultado.

6º ano

$37 \times 18 = 666$
 $37 \times 21 = 777$
 $37 \times 24 = 888$
 $37 \times 27 = 999$

6º ano

eu cheguei à minha resposta com a lógica do exercício 1.

Generalizar

Justificar

Exemplificando

Figura 3. Resoluções à questão 2 da tarefa.

Após a apresentação, Maria questiona a evidência do processo de generalizar nas resoluções dos alunos.

Maria: Foi muito interessante, para já, ver as resoluções deles. Eu questiono é se eles estão a generalizar para além do domínio, se vão para além do domínio que estão a trabalhar. Se é uma generalização ou se é mais uma justificação com exemplos. Porque eles se forem para lá do 27, já não vai acontecer esta regularidade. Então a minha questão é: eles estarão a generalizar ou estão a justificar perante o domínio em que estão a trabalhar? É porque isto só funciona mesmo até ao 27. Portanto é só essa a minha questão.

Fernanda: Nós considerámos generalizar no âmbito da tarefa, não pensámos em generalizar para além de, porque ela não o permitia.

Maria: Então, mas generalizar não é estender para além do raciocínio do...?

Formadora 1: (...) Na minha interpretação, eu encontro generalização no modo como eles identificam essa regularidade. (...) Quando eles conseguem ir para além do 555, podemos considerar que estão a ir para além (...) dos exemplos que lhes são apresentados.

Maria: Mas sendo assim, estamos a partir do princípio que a generalização... Como seria depois do 27?

Formadora 1: Já não funciona esta regularidade, ou seja, esta tarefa não é... Ainda há pouco, colocámos a questão do generalizar quando estávamos a discutir o da (...). Naquele caso, eram questões que funcionavam até ao infinito. Neste caso, não eram. (...)

Maria: É por isso mesmo que eu questiono aqui a generalização, tanto que no outro era uma questão dos próprios alunos em termos de conhecimento. Eles estão a chegar à generalização máxima dos conhecimentos deles. Aqui não é bem a generalização máxima dos conhecimentos deles porque se calhar se nós questionássemos: “Então e depois?”

Formadora 1: Podia até ser uma extensão desta tarefa levar os alunos a equacionar até quando é que esta regularidade funcionava. Portanto, eles tirarem essa conclusão. Mas apesar de aqui, (...) a regularidade (...) vai só até ao produto que é pedido, na pergunta 1, eles até podiam não encontrar regularidade nenhuma.

Maria parece questionar a existência do processo de generalizar pelo facto de a regularidade identificada nos primeiros produtos ser aplicável a um número limitado de casos, até ao produto 37×27 , deixando de funcionar para os multiplicadores seguintes múltiplos de 3. Por um lado, esta dúvida parece ancorar-se no facto de os múltiplos de 3 gerarem uma sequência infinita enquanto os produtos, nos quais se verifica a regularidade, são em número limitado. Por outro lado, Maria questiona a evidência da generalização por não se explorar se a regularidade identificada se aplicaria à infinidade dos múltiplos de 3 (“Aqui não é bem a generalização máxima dos conhecimentos deles porque se calhar se nós questionássemos: “Então e depois?””).

Em contrapartida, Fernanda parece interpretar o processo de generalizar dos alunos como um processo em que, observando uma dada regularidade num conjunto de exemplos, os alunos estendem essa regularidade aos restantes casos contemplados na tarefa, independentemente de serem em número limitado ou infinito: “Nós considerámos generalizar no âmbito da tarefa, não pensámos em generalizar para além de, porque ela não o permitia”. Em seguida, a formadora explicita a sua convergência com a perspectiva de Fernanda.

Episódio 2


Na última sessão, em que os grupos de formandas apresentaram a implementação das tarefas na sala de aula (*Levar à Prática II*), foi colocada para discussão, em grande grupo, uma questão relativamente ao processo de generalizar, por parte de um grupo. Alice apresentou a tarefa implementada, *O V mágico*, (Figura 4) e a resolução de um aluno a questão 2 (Figura 5).

REASON
Raciocínio Matemático e Formação de Professores

▪ Tarefa proposta:

O V mágico

Os dois V seguintes são formados pelos números de 1 a 5.



O segundo V é mágico porque as somas dos dois “braços” do V são iguais ou seja:

$$4+2+3=5+1+3$$

1. Forma outros V e regista-os na tua folha de papel.
2. Consegues formar algum V mágico cujo vértice seja 2? Porquê?
3. O André diz que num V mágico o vértice tem sempre de ser ímpar.

Concordas com o André? Porquê?

Figura 4. Tarefa implementada em *Levar à Prática II*.

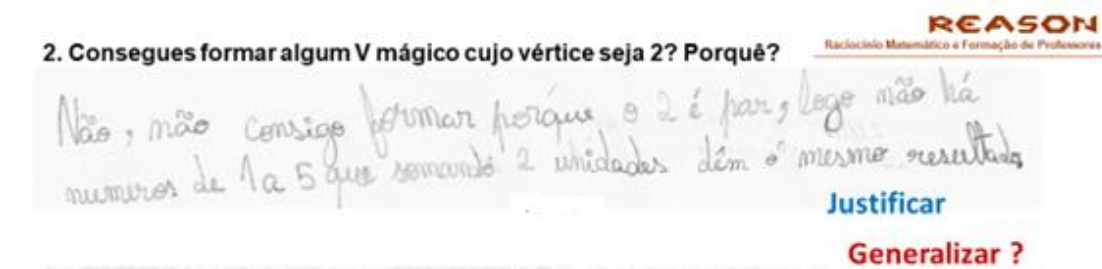


Figura 5. Resolução do aluno à questão 2 da tarefa.

Vejamos um extrato dessa apresentação:

Alice: Ele diz “Não, não consigo formar, porque o 2 é par, logo não há números de 1 a 5 que somando duas unidades deem o mesmo resultado”. Nós considerámos esta resposta do Tomás como uma justificação e colocámos aqui o generalizar com um ponto de interrogação e a opção foi manter o ponto de interrogação. Pareceu-nos que foi uma generalização, mas ao mesmo tempo, o aluno, da maneira como ele formula a resposta, está claramente a limitar, aqui, aos números de 1 a 5. E, então, nós pretendemos também lançar aqui um bocadinho a discussão.

Após a apresentação deste grupo, foi lançada a discussão, primeiramente sobre a questão colocada. Apresentamos, em seguida, um extrato dessa discussão:

Formadora 2: Vamos lá ver o que é que vos leva a dizer ou a questionar que isto pode ser um generalizar? E, já agora, se estão a generalizar, estão a generalizar o quê mais precisamente?

Fernanda: Nós, primeiro, de princípio, e até ao fim, focámos no justificar. O que é que mais tarde, depois de olhar, quando ele diz “logo não há números de 1 a 5 que somando 2 unidades deem o mesmo resultado” ... A nossa dúvida é: é só de 1 a 5 ou a criancinha até pensou mais do que aquilo que nós estamos a pensar? Somando sempre não vai dar sempre o mesmo resultado nestes números quando somamos 2 unidades ou em todos os números.

Formadora 2: Portanto, no fundo, a vossa dúvida tem a ver com esta afirmação se circunscrever a um número limitado de elementos. E então o que é que o grupo acha sobre isto? Vamos lá ouvir algumas opiniões. Será que o generalizar tem de ser referente a um número ilimitado de elementos?

Paula: Desculpe, eu acho que não. Eu acho que pode ser uma generalização dentro daqueles números que eles estavam a fazer, de 1 a 5, e ele ter chegado a uma generalização. Embora não seja para todos os números eu acho que pode ser considerado, acho eu, uma generalização dentro da atividade que estava a fazer. Dentro da atividade que estava a fazer, como era um número limitado de 1 a 5, ele chega à generalização que nunca dá, somando as duas unidades.

Formadora 2: E esta ideia da Paula é partilhada por mais pessoas?
(...)

Gina: Eu penso que não seria uma generalização. (...) Eu acho que ele justifica. Eu até aceito, e aí estou de acordo com a Paula, que para se tornar uma generalização pode ser apenas referente a um grupo limitado de hipóteses. (...) Portanto, pode ser apenas para este V mágico em que os algarismos

que compõem o V sejam de 1 a 5. Eu acho é que ele não escreve de maneira a poder generalizar, neste aspeto.

Fernanda e Alice questionam se o generalizar se pode aplicar a um conjunto finito de casos. Paula afirma que sim, referindo que o generalizar não tem de ser referente a um número ilimitado de casos, em resposta à questão lançada pela formadora. Paula considera, portanto, que a resposta do aluno em causa evidencia o processo de generalizar. Por sua vez, Gina, embora concordando com Paula, no que respeita à possibilidade de se generalizar a um número limitado de elementos, discorda que a resposta evidencie esse processo, considerando a presença apenas do processo de justificar, sem conseguir explicitar claramente porquê.

A formadora, partilhando da perspetiva expressa por Gina, decidiu encerrar este ponto da discussão:

Formadora 2: Ok, pronto então, enfim eu acho que nós podíamos ficar a discutir isto muito tempo, mas como também temos que avançar, eu vou fazer aqui um bocadinho um ponto da situação. Em relação àquela questão de ser um número limitado, de facto, isso não é impedimento para ser uma generalização. Podemos pensar por exemplo numa sequência, uma sequência infinita, em que nós descobrimos uma regularidade. Nós podemos generalizar o que está a acontecer nessa sequência, portanto fazemos uma generalização ao dizer que acontece sempre, os elementos vão sucedendo de uma certa forma e temos um número infinito. Da mesma forma, se pensarmos – às vezes eu dou este exemplo – nos sólidos platónicos, posso fazer uma generalização sobre o conjunto dos sólidos platónicos uma propriedade que têm todos, no entanto eles são só cinco. Portanto, isso não é impedimento. Agora, outra coisa que eu acho que deve estar em discussão é se efetivamente isso é uma generalização. (...) [o aluno está] a expressar esta informação com o intuito de justificar (...) a afirmação, neste caso de que o 2 não é possível ter como vértice do V.

Assim, o grupo global de formandas consensualizou de que o processo de generalizar pode ser aplicado a um conjunto limitado de casos e que na produção do aluno, em análise, este usou o processo de justificar a razão da impossibilidade do vértice 2, mas não o de generalizar, já que não alargou uma dada propriedade, observável num número menor de casos, ao conjunto dos números em causa, de 1 a 5.

Generalizar e conjecturar

Episódio 3

O Episódio 3 incide na sequência da discussão em torno do processo de generalizar, apresentada no Episódio 1, reportando-se também à apresentação de Fernanda e Alice.

Até à quarta sessão, ainda não tinha sido explorado o processo de conjecturar. Foi no decurso da discussão que este processo foi abordado por Maria.

Maria: Eu fico na dúvida se eles estão a generalizar ou se estão a fazer uma conjectura. Estão a observar regularidades. Estão a observar que dá sempre 5, 5, 5 ou 1, 1, 1, 2, 2, 2. Portanto eles estão a fazer uma conjectura, é essa a minha questão. Eles acham que aquilo vai funcionar sempre.

Formadora 1: Não sabemos. Não sabemos se eles consideram que isso é uma regularidade que se vai aplicar a todos os produtos. Isso agora só podíamos referir se essa questão fosse colocada.

Fernanda: Eu posso só acrescentar que na turma do 6º ano não foi dada rigorosamente dica nenhuma, nem levantada mais nenhuma questão.

Alice: E na do 5º fui só aproveitando a resposta porque eles disseram imediatamente “Ah isto é a tabuada do 3” e eu parti daí: “então experimentem com a tabuada do 3”.

Formadora 1: Eu presumo que os alunos, talvez, até com base na experimentação que fizeram, tenham concluído que aquilo termina ali, porque depois já não era possível. Quer dizer, atingiram o algarismo máximo, eles já chegaram ao produto 999. Tudo aquilo que viesse a seguir já tinha outros algarismos, digo eu.

Fernanda: Não faço a mínima ideia o que é que terão pensado.

Alice: Aquilo continua a haver uma regularidade com outros algarismos.

Maria: Mas os múltiplos de 3 continuam.

Alice: Os múltiplos de 3 continuam e eu e a Fernanda anotámos isso.

Fernanda: E falámos entre nós. Era mesmo ver o que é que sai, nenhum levantou essa questão. Nada.

Maria infere que os alunos estendem a regularidade identificada à infinidade dos produtos, já que os múltiplos de 3 são infinitos. E nesta inferência, assume que os alunos estabelecem uma conjectura (“Eles acham que aquilo vai funcionar sempre”). Fernanda e Alice referem que nenhum aluno verbalizou essa ideia e que não sabem o que terão os alunos pensado a este respeito. Também a formadora refere que não se sabe se assim é ou não, na ausência de uma questão que interpelasse os alunos sobre a continuidade da regularidade, e infere no sentido contrário, presumindo que os alunos entenderiam que a regularidade se estende apenas até ao produto 999.

Com base nesta inferência, Maria coloca à discussão do grupo a dúvida sobre se os alunos estariam a generalizar ou a conjecturar, tendendo para o processo de conjecturar, colocando-o como alternativo ao de generalizar. Por um lado, Maria parece considerar que estes dois processos não podem ser simultâneos: ou um ou outro. Por outro lado, poderemos inferir que Maria só reconhece o processo de generalizar se este for correto. Ao assumir que os alunos pensam que a regularidade funciona sempre para a infinidade dos múltiplos de 3, ideia esta que é falsa, e que, ao ser testada, poderia ser refutada, Maria identifica, nos alunos, o processo de conjecturar, descartando o generalizar. Assim, parece associar o generalizar à produção de afirmações gerais válidas e corretas.

O significado do processo de conjecturar, incidindo também na respetiva interseção com o processo de generalizar, só foi explorado e discutido na sessão seguinte, relacionando com outras apresentações das formandas.

Considerações finais

Através da análise e discussão das produções concretas dos alunos, foi possível esclarecer, com as formandas, aspetos omissos na definição do processo de generalizar, tal como discutida e apresentada nas sessões iniciais de formação. Uma vez que os objetos matemáticos, na maioria dos casos, lidam com o infinito, nomeadamente os números naturais contemplados nas duas tarefas apresentadas por Alice e Fernanda, surgiu como aspeto crítico do conhecimento sobre o processo de generalizar se este se circunscreve à extensão do raciocínio a uma infinidade de casos ou se pode também ser aplicado a um número limitado de elementos. Outro aspeto crítico prende-se com a visão dicotómica dos processos de generalizar e conjecturar, como se fossem processos alternativos que não

pudessem coincidir. Esta dicotomia parece assumir a necessidade de correção para que se verifique o processo de generalizar.

Assim, a discussão das apresentações das duas tarefas, implementadas em sala de aula, associada à exploração de desacordos entre as formandas, relativamente à sua interpretação dos processos de raciocínio evidenciados nas produções dos alunos, permitiu aprofundar e aprimorar o conhecimento destas professoras, neste caso específico, do processo de generalizar, tendo como base o trabalho concreto dos alunos.

Em suma, o processo de generalizar levantou dúvidas entre as formandas por, por um lado estar associado à ideia de “tornar geral” e, portanto, de infinito e por outro a ideia de que uma generalização tem de ser sempre verdadeira. A discussão das resoluções dos alunos permitiu esclarecer estes equívocos e concluir que a generalidade pode ser num conjunto finito (Jeannotte & Kieran, 2017), e pode ser falsa (Lannin et al., 2011).

Merece ser objeto de investigação futura a relação entre o desenvolvimento do conhecimento dos processos de raciocínio e as ações docentes, em sala de aula, focadas na promoção do raciocínio matemático dos alunos.

Por fim, salientamos algumas implicações que emergem deste trabalho para a formação dos professores no que respeita ao seu desenvolvimento profissional ao nível da promoção do desenvolvimento da capacidade do raciocínio dos seus alunos: a importância (i) de centrar a formação em experiências concretas na sala de aula, focando-a na análise das resoluções dos seus próprios alunos e nas evidências de processos de raciocínio; e (ii) da discussão em torno de como desafiar os alunos a avançar nos processos de raciocínio, nomeadamente o de generalizar, durante a discussão coletiva.

Agradecimento

Este artigo foi apoiado pela FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia, através do Projeto REASON – Raciocínio Matemático e Formação de Professores (Projeto IC&DT–AAC 02/SAICT/2017 AND PTDC/CED-EDG/28022/2017).

Referências

- Bardin, L. (2010). *Análise de conteúdo* (4.^a ed). Edições70.
- Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schaube, L. (2003). Designing experiments in educational research. *Educational Researcher*, 32(1), 9-13.
- Cusi, A., & Malara, N. A. (2007). Approaching Early Algebra: Teachers’ educational processes and classroom experiences. *Quadrante*, 16(1), 57–80. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22812>
- Davidson, A., Herbert, S., & Bragg, L. A. (2018). Supporting elementary teachers’ planning and assessing of mathematical reasoning. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*. 17(4) [https://doi: 10.1007/s10763-018-9904-0](https://doi.org/10.1007/s10763-018-9904-0).
- Francisco, J. M., & Maher, C. A. (2011). Teachers attending to students’ mathematical reasoning: lessons from an after-school research program. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 14(1), 49-66.

- Herbert, S., & Bragg, L. A. (2021). Elementary teachers' planning for mathematical reasoning through peer learning teams. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 22(1), 34-43.
- Jeannotte, D., & Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 96(1), 1-16. <https://doi:10.1007/s10649-017-9761-8>.
- Kaput, J. (1999). *Teaching and learning a new Algebra with understanding*. National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.
- Lannin, J. K., Elliott, R., & Ellis, A. B. (2011). *Developing essential understanding of mathematical reasoning for teaching mathematics in prekindergarten-grade 8*. NCTM.
- Loong, E. Y-K, Vale, C., Herbert, S., Bragg, L. A., & Widjaja, W. (2017). Tracking change in primary teachers' understanding of mathematical reasoning through demonstration lessons. *Mathematics Teacher Education and Development*, 19(1), 5-29.
- Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2018). Promover o raciocínio matemático dos alunos: Uma investigação baseada em design. *Bolema*, 32(62), 781-801. <https://doi:10.1590/1980-4415v32n62a02>.
- Melhuish, K., Thanheiser, E., & Fagan, J. (2019). The student discourse observation tool: Supporting teachers in noticing justifying and generalizing. *Mathematics Teacher Educator*, 7(2), 57-74.
- NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) (2000). *Principles and standards for school mathematics*. NCTM.
- Oliveira, P. (2008). O raciocínio matemático à luz de uma epistemologia soft. *Educação e Matemática*, 100, 3-9.
- Patton, M. (2002). *Qualitative research & evaluation methods* (3ª ed.). Sage.
- Pólya, G. (1990). *Mathematics and plausible reasoning* (ed. orig. 1954, Vol. 1). Princeton University Press.
- Ponte, J. P., Quaresma, M., & Mata-Pereira, J. (2020). Como desenvolver o raciocínio matemático na sala de aula? *Educação e Matemática*, 156, 7-11.
- Quivy, R., & Campenhoudt, L. (2008). *Manual de Investigação em Ciências Sociais*. Gradiva.
- Rodrigues, M., Brunheira, L., & Serrazina, L. (2021). A framework for prospective primary teachers' knowledge of mathematical reasoning processes. *International Journal of Educational Research*, 107, 101750-101761. <https://doi.org/10.1016/j.ijer.2021.101750>
- Silva, A. P. (2009). A problemática da descoberta e da prova. *Educação e Matemática*, 101, 37-41.
- Stylianides, A. J., & Stylianides, G. J. (2006). Content knowledge for mathematics teaching: the case of reasoning and proving. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th PME International Conference* (Vol. 5, pp. 201-208). PME.

- Stylianides, A. J., & Ball, D. L. (2008). Understanding and describing mathematical knowledge for teaching knowledge about proof for engaging students in the activity of proving. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11(4), 307-332.
- Warren, E., & Cooper, T. (2008). Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 year olds' thinking. *Educational Studies in Mathematics*, 67(2), 171-185.