



ESCOLA SUPERIOR
DE EDUCAÇÃO
DE LISBOA



**POLITÉCNICO
DE LISBOA**

PROCESSOS NA RESOLUÇÃO E FORMULAÇÃO DE PROBLEMAS NUMA TURMA DE 3.º ANO DE ESCOLARIDADE

Ana Lúcia Bento Miguens

(N.º 2017161)

Relatório de Estágio realizado no âmbito da Prática de Ensino Supervisionada II e apresentado à Escola Superior de Educação de Lisboa para obtenção de grau de mestre em Ensino do 1.º Ciclo e de Matemática e Ciências Naturais no 2.º Ciclo do Ensino

Básico

2019



ESCOLA SUPERIOR
DE EDUCAÇÃO
DE LISBOA



**POLITÉCNICO
DE LISBOA**

PROCESSOS NA RESOLUÇÃO E FORMULAÇÃO DE PROBLEMAS NUMA TURMA DE 3.º ANO DE ESCOLARIDADE

Ana Lúcia Bento Miguens

(N.º 2017161)

Relatório de Estágio realizado no âmbito da Prática de Ensino Supervisionada II e
apresentado à Escola Superior de Educação de Lisboa para obtenção de grau de mestre
em Ensino do 1.º Ciclo e de Matemática e Ciências Naturais no 2.º Ciclo do Ensino

Básico

Orientador: Professor Doutor Pedro da Cruz Almeida

2019

RESUMO

Este trabalho surge no âmbito da Unidade Curricular de Práticas de Ensino Supervisionada II (PES II) e está repartido em dois grandes capítulos, um dedicado à descrição e à análise crítica da prática pedagógica desenvolvida nos contextos do 1.º Ciclo do Ensino Básico (CEB) e 2.º CEB e o outro dedicado à apresentação de um estudo desenvolvido na turma de 3.º ano de escolaridade em que foi realizada a intervenção.

Na segunda parte apresenta-se o estudo, que procura **descrever e compreender os processos de resolução e de formulação de problemas**, tendo em conta um modelo de análise definido por Singer e Voica (2013). Trata-se de uma investigação qualitativa, procurando-se, por meio de entrevistas realizadas a alunos selecionados, um conhecimento em profundidade do objeto de estudo.

Foram aplicadas duas entrevistas a cada participante, que incidiram na realização de duas tarefas que foram audiogravadas: uma de formulação e outra de resolução de problemas. O quadro teórico, imprescindível para a descrição e interpretação dos processos de resolução/formulação de problemas que as crianças mobilizaram, envolve literatura sobre formulação e resolução de problemas, com ênfase no modelo proposto por Singer e Voica (2013), em que delineiam categorias operacionais: Descodificar, Representar, Processar e Executar.

Os resultados do estudo permitiram descrever e compreender os processos explicitados pelos alunos e compreender as relações entre estes. Assim como permitiram perceber o quão importante é cada categoria operacional para a recolha e análise das evidências do pensamento dos alunos, aspeto essencial para o processo ensino-aprendizagem

Palavras-chave: formulação de problemas; resolução de problemas; educação matemática.

ABSTRACT

This dissertation arose from the Curricular Unit of Supervised Teaching Practices II (PES II). It is subdivided into two major chapters, one of which dedicated to the critical description and analysis of the pedagogical practice developed within the 1st and 2nd Basic Education Cycles contexts, whilst the other chapter focuses on presenting a study undergone within a 3rd year class in which an intervention was presented.

The dissertation's second half introduces the study, aiming to describe and understand the processes in which problems are formulated and solved. It is worth mentioning that this is a qualitative investigation, taking into account an analytical model defined/created by Singer and Voica (2013).

Each participant partook in two interviews, both were audio recorded and each comprised of a different task: one of problem posing, and another of problem solving. The theoretical board, fundamental to the description and interpretation of problem solving/posing processes depicted by the students, requires literature on problem posing and problem solving, with emphasis on the model proposed by Singer and Voica (2013), which outlines the operational categories: decodify, represent, process and execute.

The study's results enabled the description and comprehension of processes depicted by the participants and the understanding of the relationships between students/participants. Similarly, the results enabled the perception of how important each operational category is to the gathering and analysis of evidences of the participants' thoughts, a fundamental feature to the teaching-learning process.

Keywords: problem posing; problem solving; mathematical education.

ÍNDICE GERAL

Introdução	1
1.ª Parte	3
1.1. Descrição da prática pedagógica desenvolvida no contexto do 1.º CEB	4
1.2. Descrição da prática pedagógica desenvolvida no contexto do 2.º CEB	10
1.3. Análise crítica e reflexiva das práticas desenvolvidas no 1.º e no 2.º CEB	16
2.ª Parte	21
2.1. Apresentação do estudo	22
2.2. Fundamentação teórica	24
2.2.1. A resolução e formulação de problemas no currículo	24
2.2.2. A resolução e formulação de problemas.....	25
2.2.3. Processos na resolução e formulação de problemas	27
2.2.3.1. Apresentação das categorias operacionais de Singer e Voica (2013)	28
2.3. Metodologia.....	31
2.3.1. Seleção dos participantes	31
2.3.2. Técnicas de recolha de dados:	32
2.3.3. Técnicas de análise de dados	32
2.3.4. Dimensão ética	33
2.4. Resultados.....	34
2.4.1. Tarefa de formulação.....	34
2.4.1.1. Primeiro problema formulado	36
2.4.2. Tarefa de resolução.....	41
2.4.3. Síntese geral dos resultados	47
2.5. Conclusões.....	56
Reflexão final	60
Referências	64
Anexos	69
Anexo A. Gráfico de distribuição e evolução do 1.º objetivo geral da prática de 1.º ciclo	70

Anexo B. Gráfico de distribuição e evolução do 2.º objetivo geral da prática de 1.º ciclo	71
Anexo C. Organização tabelar e diagramas de extremos e quartis referentes aos dados recolhidos para avaliação das aprendizagens dos alunos na prática de 1.º ciclo.....	72
Anexo D. Grelha e gráficos de avaliação das questões de aula pré e pós melhoria (turma G) na prática de 2.º ciclo.....	75
Anexo E. Análise do objetivo “desenvolver competências de comunicação e de partilha de ideias e de conhecimentos” na prática de 2.º ciclo	79
Anexo F. Análise do objetivo “participar ativamente nas atividades propostas em contexto de sala de aula” na prática de 2.º ciclo.....	87
Anexo G. Informações fornecidas pela professora titular	89
Anexo H. Guião de entrevista aos participantes do estudo	93
Anexo I. Entrevista transcrita – Ilda a 14/05/19.....	95
Anexo J. Entrevista transcrita – David a 14/05/19	101
Anexo K. Resolução das tarefas pela Ilda a 14/05/19	108
Anexo L. Resolução das tarefas pela Ilda a 14/05/19	112
Anexo M. Análise categorial dos dados recolhidos - Ilda.....	118
Anexo N. Análise categorial dos dados recolhidos - David.....	129
Anexo O. Figuras para aplicação das questões de confirmação/verificação.....	143

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Escala de avaliação das aprendizagens retirada dos documentos oficiais do colégio em intervenção no 1.º Ciclo.....	8
Figura 2. Fases do quadro conceptual dos processos de formulação de problemas. Adaptado de Singer e Voica (2013, p. 20)	29
Figura 3. Enunciado da tarefa de formulação aplicada a 14-05-2019.....	35
Figura 4. Resolução do primeiro problema inventado pela Ilda a 14/05/19.....	36
Figura 5. Resolução do primeiro problema inventado pelo David a 14/05/19.....	37
Figura 6. Resolução do problema de verificação sobre o segundo problema inventado pela Ilda a 14/05/19	39
Figura 7. Enunciado da tarefa de resolução aplicada a 14/05/2019	42
Figura 8. Resolução da primeira parte da tarefa de resolução da Ilda a 14/05/19.....	43
Figura 9. Resolução da primeira parte da tarefa de resolução do David a 14/05/19	43
Figura 10. Resolução da segunda parte da tarefa de resolução da Ilda a 14/05/19	45
Figura 11. Resolução da segunda parte da tarefa de resolução do David a 14/05/19	46

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1. Objetivos gerais, respetivos indicadores e consequentes estratégias e atividades globais de trabalho.....	5
Tabela 2. Objetivos gerais e respetivos objetivos específicos e consequentes estratégias e atividades globais de trabalho.....	11
Tabela 3. Médias gerais das cotações das questões de aula pré e pós melhoria.....	13
Tabela 4. <i>Problemas formulados pela Ilda e pelo David a 14/05/19</i>	35
Tabela 5. Tabela síntese da tarefa de resolução de problemas	52
Tabela 6. Tabela síntese da tarefa de formulação de problemas	54

LISTA DE ABREVIATURAS

CEB	Ciclo do Ensino Básico
CN	Ciências Naturais
EM	Estudo do Meio
FP	Formulação de Problemas
OC	Orientador Cooperante
PE	Projeto Educativo
PES II	Práticas de Ensino Supervisionada II
PI	Projeto de Intervenção
QA	Questão Aula
RP	Resolução de Problemas
TEA	Tempo de Estudo Autónomo
TEIP	Territórios Educativos de Intervenção Prioritária
TI	Tecnologia de Informação
UC	Unidade Curricular

INTRODUÇÃO

O presente relatório surge no âmbito da unidade curricular (UC) de Prática de Ensino Supervisionada II (PES II), no curso do Mestrado em Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico (CEB) e de Matemática e Ciências Naturais no 2.º CEB da Escola Superior de Educação de Lisboa. Este documento tem como objetivos apresentar uma síntese da prática efetuada no 1.º e 2.º CEB e apresentar os resultados da investigação realizada.

Este trabalho está organizado em duas grandes secções denominadas de 1.ª Parte e 2.ª Parte.

A primeira está dividida em três subsecções que consistem na (1.1) descrição sintética da prática pedagógica desenvolvida no contexto do 1.º CEB, na (1.2) descrição sintética da prática pedagógica desenvolvida no contexto do 2.º CEB e na (1.3) análise crítica da prática ocorrida em ambos os ciclos. Em cada um dos dois primeiros pontos é apresentado o funcionamento da escola em que decorreu a prática, a conceção e implementação de projetos curriculares de intervenção e a elaboração de instrumentos intelectuais e práticos de gestão curricular.

Na segunda parte do relatório é realizada a apresentação do estudo (2.1), em que se apresenta a contextualização que inclui a identificação do tema do objeto de estudo e os respetivos objetivos. Segue-se a fundamentação teórica (2.2), que engloba uma revisão bibliográfica, isto é, o quadro conceptual e explicitam-se os conceitos fundamentais associados ao estudo. Na subsecção da metodologia (2.3), em que retomados os objetivos do estudo e em que se caracteriza a amostra, identificam-se as opções metodológicas e os princípios éticos do processo de investigação. No ponto 2.4 são apresentados os resultados e a discussão do estudo, seguidos das respetivas conclusões, presentes no ponto 2.5.

Por último, apresenta-se uma reflexão final, em que se explicita o contributo das experiências de formação, previamente descritas, e do processo de investigação, para o desenvolvimento de competências pessoais e profissionais, no sentido da construção da identidade profissional.

1.ª PARTE

Na primeira parte do Relatório Final é elaborada uma descrição sintética das práticas pedagógicas desenvolvidas no contexto do 1.º Ciclo do Ensino Básico e do 2.º Ciclo do Ensino Básico, no ano letivo de 2018/2019.

Apresenta-se também uma análise crítica à prática ocorrida em ambos os ciclos de escolaridade, previamente referidos.

1.1. Descrição da prática pedagógica desenvolvida no contexto do 1.º CEB

A prática pedagógica desenvolvida no contexto de 1.º ciclo teve lugar num colégio privado, que se localiza no concelho de Lisboa. É de notar que, de acordo com os censos de 2011, nesta freguesia mais de metade das propriedades pertencem ao ocupante, o que permite deduzir que há um predomínio de habitações unifamiliares (Câmara Municipal de Lisboa, 2018), isto é, que a população residente e escolar pertence às classes mais favorecidas, isto é, classe média e média-alta (Gaspar, 2003).

No que concerne ao Projeto Educativo (PE) da instituição, o principal objetivo explicitado é o de formar crianças com uma formação completa em variadas dimensões potenciando a construção e desenvolvimento de competências e de ferramentas para o mundo global. Isto é, permitindo-lhes que cresçam autónomas, empáticas, colaborativas, comunicadoras, com gosto por aprender, confiantes, corajosas, respeitadoras, determinadas e reflexivas.

Especificamente, em relação ao 1.º CEB, os três pilares que sustentam a prática pedagógica são a inovação, a responsabilidade e a felicidade, pelo que é privilegiada a “aprendizagem ativa, construída com cada aluno de forma individualizada”, de forma a que os alunos gostem de aprender e sejam “o motor do seu conhecimento”.

A turma em que decorreu a intervenção encontrava-se no 3.º ano do 1.º CEB e era constituída por 23 crianças, 3 delas integradas no grupo, no presente ano letivo. As suas idades estavam compreendidas entre os oito e os nove anos, havia 9 discentes do sexo feminino e 14 do sexo masculino.

Salienta-se que havia projetos informáticos que decorriam na turma, na disciplina de tecnologia de informação (TI), que tinham como objetivo levar os alunos a “explorar o conhecimento, num ambiente seguro e na sua própria linguagem”. Encontrava-se em curso um outro projeto que se traduzia na ocorrência de uma rotina diária, em que se desenvolviam técnicas de meditação/*mindfulness*, com o objetivo de que os alunos trabalhassem a calma, a atenção e, conseqüentemente, melhorassem os seus resultados académicos (Breyner, 2017).

Ao longo das semanas de observação inferiu-se que a generalidade dos alunos revelava bastante interesse nas atividades propostas pela docente, com uma particular apetência e motivação para o trabalho realizado na área da Matemática. Não obstante, esta era, igualmente, a área em que se encontravam maiores discrepâncias ao nível da apropriação dos conteúdos. Relativamente ao domínio de números e operações, alguns alunos apresentavam fragilidades na resolução de problemas envolvendo situações de partilha equitativa e de agrupamento. No domínio da geometria e medida, determinar as simetrias de figuras simétricas e resolver problemas de até três passos, envolvendo medidas de tempo eram tarefas em que os discentes expressavam dificuldades.

No que diz respeito às aprendizagens no âmbito da Língua Portuguesa, no domínio da leitura e da escrita, os discentes demonstravam fragilidades na interpretação dos sentidos de linguagem figurada.

Na área do Estudo do Meio (EM) (cf. Anexo L) as fragilidades prendiam-se com a apetência para referir por palavras suas as informações selecionadas, competência que se relaciona com a área do português.

Neste enquadramento, definiu-se como problemática central para a intervenção pedagógica a desenvolver: *a promoção da igualdade de género e das capacidades de ler e interpretar a realidade, a partir de fontes de diferentes áreas do conhecimento, por forma a contribuir para o desenvolvimento de competências cidadãs nos alunos do 1.º CEB.*

Numa perspetiva de seguimento dos princípios e valores da pedagogia do colégio foram definidos dois objetivos gerais e respetivos objetivos específicos, para os quais se delineou um conjunto de estratégias e atividades globais de trabalho de integração curricular que foram implementadas ao longo da prática (cf. Tabela 1).

Tabela 1.
Objetivos gerais, respetivos indicadores e consequentes estratégias e atividades globais de trabalho.

OBJETIVO GERAL	INDICADORES	ESTRATÉGIAS E ATIVIDADES GLOBAIS
(1) Estabelecer relações interpessoais, manifestando respeito pela	(1.1) Cria momentos de diálogo, quer com rapazes, quer com raparigas; (1.2) Manifesta comportamentos de respeito com os seus pares, rapazes e raparigas;	- Mobilização de diferentes tipologias textuais e da literatura infantojuvenil como indutores de momentos de debate/discussão;

diferença/igualdade de género.	(1.3) Partilha espaços e materiais com todos os colegas, de forma indistinta; (1.4) Analisa e reflete acerca de estereótipos de género; (1.5) Participa ativamente em debates críticos em que se confrontem pontos de vista díspares e se analisem as diferentes vertentes de uma problemática, tendo em vista a sensibilização dos/as participantes para a promoção da igualdade de género.	- Continuação e promoção de atividades de parceria entre alunos de géneros opostos; - Dinamização de jogos cooperativos; - Atividades de expressão dramática: <i>role play</i> ; - Atividades de artes: a imagem do homem e da mulher; - Atividades de desconstrução de estereótipos; - Atividades de resolução de problemas; - Debates prós e contras;
(2) Interpretar e escrever textos de diferentes áreas do conhecimento.	(2.1) Constrói sequências de ideias com coerência; (2.2) Expressa-se com correção e respeito pelas normas linguísticas; (2.3) Identifica e seleciona a informação pertinente do texto; (2.4) Aperfeiçoa a sua escrita; (2.5) Mobiliza vocabulário específico das diferentes áreas do conhecimento.	- Continuação de momentos de produção de textos; - Continuação da rotina Blog da turma; - Continuação da rotina Problema da Semana e da Discussão coletiva do mesmo; - Momentos de explicitação escrita de raciocínios; - Trabalhos de projeto; - Exploração dos textos descritivo e explicativo, aquando das atividades experimentais; - Associação do património do meio próximo a conceitos matemáticos, no domínio da geometria, aquando da visita de estudo a Lisboa.

As atividades que tomaram lugar para o alcance dos objetivos delineados envolveram todas as áreas do currículo de 1.º CEB, isto é, ocorreram no âmbito da Língua Portuguesa, da Matemática, do Estudo do Meio, da Educação Artística (Artes Visuais, Expressão Dramática/Teatro), da Cidadania e Desenvolvimento e da Educação Física, tendo algumas um carácter interdisciplinar.

É importante salientar que, dado o carácter genérico dos objetivos, a avaliação dos mesmos foi feita a longo prazo, numa lógica de progressão, na medida em que a evolução de competências avaliadas é apenas visível a longo prazo e requer um trabalho contínuo. Por essa mesma razão, fez-se uma avaliação dos indicadores no início e no final da prática de ensino.

No que diz respeito ao primeiro objetivo (cf. Anexo A), analisando as diferenças entre cada indicador no início e no final da intervenção, verifica-se que ocorreu uma evolução no que ao desempenho dos alunos diz respeito. Verificou-se uma evolução, visto

que uma percentagem significativa de alunos, no final da intervenção, demonstrou cooperar e trabalhar com os colegas, de forma indiferenciada de género.

No primeiro indicador, constatou-se que ocorreu uma diminuição da percentagem de alunos com um desempenho “insuficiente”, ao passo que cerca de 50% da turma continuou no nível “suficiente”. Este indicador foi avaliado através dos debates e das opiniões veiculadas pelos alunos, mas também nas suas intervenções espontâneas nos vários momentos da agenda semanal. O indicador referente à “partilha espaços e materiais com todos os colegas, de forma indistinta” (1.3) destaca-se que cerca de 39% dos alunos passaram a encontrar-se no nível “bom”. De referir que o indicador (1.4) foi avaliado de uma forma atípica, dada a inexistência de dados sobre o mesmo no início da intervenção.

Após o desenvolvimento de várias atividades, elencadas em diferentes estratégias de intervenção, verificou-se que toda a turma se encontrou num nível satisfatório, no que respeita à discussão e ao posicionamento face a questões de natureza identitária e de género, medido pelo último indicador de avaliação (1.5), diretamente relacionado com o anterior. Apesar de a maioria dos alunos ter demonstrado uma atitude positiva e uma participação efetiva, motivada e consciente nas questões provocatórias que foram lançadas, nem todos o fizeram de forma consistente. Houve alunos que passaram a integrar o nível “bom”, ocorrendo, também, uma diminuição em termos percentuais dos níveis de desempenho “suficiente” e “insuficiente”.

Relativamente ao segundo objetivo (cf. Anexo B), procedemos, à análise das grelhas de avaliação, tratadas através de gráficos de barras. Verificou-se que os indicadores (2.3), (2.4) e (2.5) são aqueles em que se observou um maior crescimento, isto é, a taxa percentual aumentou ao nível da evolução dos alunos. Quanto ao indicador (2.3) afere-se que estratégias como a leitura atenta do mesmo texto três vezes, o sublinhar/localizar a informação pertinente e o questionar para focar a atenção, foram fulcrais para as melhorias observadas. Após reflexão, julgamos que, para o indicador seguinte (2.4), foram diversas as atividades que permitiram trabalhar o aperfeiçoamento da escrita, por parte dos alunos e que ocorreram em variadas rotinas e áreas curriculares (Língua Portuguesa, Matemática e EM). Já o último indicador (2.5) teve por base a mobilização de vocabulário específico em momentos de discussão em grupo, a

reformulação do discurso oral dos alunos, na medida em que o oral influencia o escrito e o nosso *feedback* oral e escrito em momentos coletivos e individuais de revisão de textos.

Em contrapartida, nos dois primeiros indicadores não se observaram melhorias significativas. Este facto resulta de estes serem aspetos em que a apreensão de competências é gradual e lenta, pelo que não se podem esperar resultados imediatos. Considera-se, igualmente, que questões como a modalidade de trabalho influenciaram o respeito pelas normas linguísticas, por parte dos alunos (aspeto em consolidação). Efetivamente, o trabalho colaborativo, em pares ou em grupo permitiu o aproveitamento das potencialidades de cada indivíduo. Esta modalidade de trabalho, tem como fragilidade o acarretar um certo nível de distração.

Por último, na medida em que as atividades implementadas contribuíram naturalmente para a consolidação e aprendizagem de conhecimentos, avaliou-se, igualmente, as aprendizagens dos alunos (cf. Anexo C), através da análise das produções dos alunos num primeiro momento (teste 1) e num momento final (teste 2), recolheram-se dados que foram classificados, recorrendo à escala de avaliação das aprendizagens (Figura 1), que foram transpostos para grelhas, organizadas por área curricular. De seguida, recorreu-se a diagramas de extremos e quartis para comparar várias amostras de informação relativas a cada área.

0 – 49%	Não Satisfaz	
50 – 69%	Satisfaz	
70 – 89%	Bom	
90 – 95%	Muito Bom	
96 – 100%	Excelente	

Figura 1. Escala de avaliação das aprendizagens retirada dos documentos oficiais do colégio em intervenção no 1.º Ciclo.

No que diz respeito às aprendizagens na área da Língua Portuguesa, é de referir que três quartos das cotações dos alunos no segundo teste foram superiores a 70%, enquanto que no primeiro teste apenas metade das classificações dos discentes foram superiores a 70%. Porém, há uma maior dispersão das classificações inferiores, isto é, existe uma maior variabilidade na classificação dos alunos de notas inferiores. Quanto às

aprendizagens na área da Matemática a média das classificações dos alunos manteve-se em ambos os momentos de avaliação. No primeiro teste verificou-se uma maior dispersão das classificações inferiores, sendo que um quarto dos alunos teve ponderações entre os 40 % e os 68 %. Já, no segundo momento de avaliação sumativa, o mesmo quartil está associado a classificações entre os 43% e os 60%. Isto é, apesar das médias e das medianas não apresentarem variações significativas, ocorreu um decréscimo nas pontuações dos discentes, pelo que houve uma grande dispersão dos resultados. Por fim, ao nível do EM, é de salientar que as classificações obtidas começam na ordem dos 70%, o que pode estar relacionado com a motivação e interesse sobre os temas avaliados, na medida em que são trabalhados através da metodologia de trabalho de projeto.

Na globalidade, os alunos demonstraram melhorias no seu desempenho, contudo estas não foram substanciais, reforçando a ideia de que é fundamental dar continuidade ao trabalho desenvolvido ao longo do tempo de intervenção.

1.2. Descrição da prática pedagógica desenvolvida no contexto do 2.º CEB

A prática pedagógica desenvolvida no contexto do 2.º Ciclo teve lugar numa escola pública localizada no concelho de Lisboa. De acordo com o PE do Agrupamento, esta faz parte de um agrupamento escolas que abrange um núcleo populacional bastante heterogéneo, pertencente a diferentes origens culturais, havendo uma grande incidência de alunos de origem africana e de etnia cigana. É, ainda, de referir que a escola se encontra num contexto socioeconómico desfavorecido, em que cerca de três quartos dos alunos beneficia do apoio da ação social escolar.

No que diz respeito à escola, esta é a sede de um Agrupamento que integra outras cinco escolas (com valências do pré-escolar ao 3.º CEB). O Agrupamento integra o projeto Territórios Educativos de Intervenção Prioritária (TEIP) e a sua missão passa por *promover uma ação transformadora e progressiva dos alunos na sociedade, proporcionando-lhes as ferramentas necessárias para exercerem a sua cidadania, de forma crítica, criativa, consciente e informada.*

A intervenção foi realizada em duas turmas do 5.º ano de escolaridade do 2.º CEB: no 5.º C e no 5.º G, nas disciplinas de Matemática e de Ciências Naturais (CN).

A turma do 5.º C era constituída por 25 alunos que tinham idades compreendidas entre os 9 e os 17 anos, cuja média de idades era de 11 anos. Quatro dos discentes eram abrangidos pelas medidas seletivas e um outro por medidas adicionais (capítulo II do Decreto-Lei 54/2018).

Relativamente ao 5.º G, esta era uma turma constituída por 17 alunos, com uma média de idades de 12 anos (idades compreendidas entre os 9 e os 17 anos), sendo que seis deles não frequentavam a escola. Realça-se o facto de dois dos alunos apresentarem atitudes e comportamentos inadequados às aulas, perturbando o bom funcionamento das mesmas e prejudicando a aprendizagem dos colegas.

Para constatar as potencialidades e fragilidades das turmas, realizaram-se observações *in loco*, aliadas a informações recolhidas em conversas informais com os cooperantes e também se procedeu à análise das informações existentes nos testes

diagnósticos, aplicados pelos docentes no início do ano. Nesse sentido, elaboraram-se grelhas de avaliação diagnóstica para cada uma das turmas. Através da análise desses registos foi possível perceber que não existiam diferenças significativas entre as duas turmas, quer ao nível dos conhecimentos das áreas de Matemática e das CN, quer das competências sociais. Deste modo, foi-nos possível afirmar que, em sala de aula, os alunos apresentavam características similares.

No que concerne às fragilidades e potencialidades das turmas, foi o baixo desempenho escolar, decorrente da falta de motivação dos alunos, que mereceu uma maior atenção. De facto, a falta de motivação traduz-se num acréscimo do desinteresse e na conseqüente diminuição do esforço e do investimento (Marchesi, 2004; Martinelli & Sassi, 2010). Esta desmotivação acaba por se traduzir em baixas classificações, em elevada taxa de absentismo e em comportamentos inapropriado dos alunos. Assim, a problemática selecionada foi: *como envolver os alunos nos processos de ensino-aprendizagem?*

Definida a problemática surgiram os dois objetivos gerais e específicos orientadores do projeto de intervenção (PI) (cf. Tabela 2).

Tabela 2.

Objetivos gerais e respetivos objetivos específicos e conseqüentes estratégias e atividades globais de trabalho.

OBJETIVOS GERAIS	OBJETIVOS ESPECÍFICOS	ESTRATÉGIAS E ATIVIDADES GLOBAIS
1) Desenvolver competências de comunicação e de partilha de ideias e de conhecimentos.	1.1) Aguardar a sua vez para falar; 1.2) Utilizar um tom de voz adequado; 1.3) Apresentar uma postura corporal adequada; 1.4) Dar a sua opinião; 1.5) Justificar as suas opiniões; 1.6) Criar o seu próprio discurso; 1.7) Expressar-se oralmente de acordo com as normas linguísticas; 1.8) Construir seqüências de ideias com coerência; 1.9) Mobilizar adequadamente a linguagem científica.	Existência de momentos de apresentações; Realização de atividades práticas e exploratórias; Construção e mobilização de um glossário de vocabulário; Ocorrência de reforço positivo; Mobilização de temáticas socio científicas / socioambientais; Utilização de material manipulável;
2) Participar ativamente nas atividades propostas em contexto de sala de aula.	2.1) Intervir de forma ordeira; 2.2) Participar nas atividades; 2.3) Realizar tarefas autonomamente; 2.4) Colocar dúvidas e questões;	Ocorrência de reforço positivo; Realização de atividades práticas; Realização de analogias com o quotidiano; Mobilização de temáticas socio científicas / socioambientais;

	2.5) Apresentar um espírito crítico (questionar situações, refletir e tomar decisões); 2.6) Procurar aprofundar os seus conhecimentos; 2.7) Trabalhar em grupo com um objetivo comum.	Realização de trabalhos de pesquisa; Existência de uma caixa de questões; Existência de um sistema de recompensa.
--	---	---

Após definidos os objetivos de intervenção, delinearam-se estratégias e atividades diferenciadas de aprendizagem, como forma de estimular as potencialidades e colmatar as fragilidades identificadas.

No que concerne à avaliação das aprendizagens dos alunos, os dados recolhidos a partir das produções dos alunos foram transpostos para grelhas e organizados por tema de questão aula (QA), subdivididos em classificações pré e pós melhoria (cf. Anexo C). Utilizou-se diagramas de extremos e quartis para comparar diversas amostras de informação relativas a cada QA (pré e pós melhoria).

Na globalidade das duas turmas, há que afirmar que os alunos melhoraram o seu desempenho aquando da realização da melhoria das QA (cf. Tabela 3). A primeira QA transparece resultados pouco satisfatórios, o que parece explicado pelo facto de ser a primeira QA com que os alunos tomaram contacto.

No que concerne às primeiras QA, na turma C estas têm médias com uma diferença na ordem dos 10% nas pré e pós melhoria. Já, na turma G praticamente não há variação na mediana. Concluindo, os alunos melhoram os seus trabalhos (aumento da média). Na turma C os extremos mantiveram-se, mas as classificações dos alunos em geral subiram, enquanto na turma G as classificações dos alunos mais nos extremos subiram e as dos medianos mantiveram-se.

Na segunda QA, os resultados da turma C encontram-se mais dispersos, isto é, os quartis estão mais espalhados. A turma G tem o primeiro quartil mais disperso, mas na generalidade 75% dos alunos estão muito mais concentrados na parte superior do gráfico, do que na C.

Na terceira QA acontece exatamente o contrário, a turma C tem a menor dispersão, está extremamente concentrada em cima até nos extremos inferiores, enquanto a turma G tem uma dispersão enorme. Em suma, os alunos de ambas as turmas têm médias gerais

dentro da mesma ordem (60%), sendo que as principais diferenças se encontram na dispersão das notas e na melhoria das QA. A turma C apresenta em geral resultados medianos, em contraste com a G, que é constituída por alunos com muito bom aproveitamento e muito baixo aproveitamento, resultando numa grande dispersão dos resultados. Por outro lado, a turma G apresenta de forma geral ligeiramente mais facilidade em melhorar os seus resultados, observado no aumento da média. É de notar que o facto da média se encontrar abaixo da mediana indica que a metade com mais fragilidades apresenta um maior desvio em relação à mediana, do que a metade com mais facilidades.

Tabela 3.

Médias gerais das cotações das questões de aula pré e pós melhoria.

5.º	Números Primos		Decomposição em fatores primos		Mmc		mdc		Média das QA	
	Pré-melhoria	Melhoria	Pré-melhoria	Melhoria	Pré-melhoria	Melhoria	Pré-melhoria	Melhoria	Pré-melhoria	Melhoria
C	43,3	48,0	53,9	60,5	85,0	87,5	61,0	63,8	60,8	64,5
G	52,4	59,0	74,4	78,4	58,8	62,2	49,4	52,2	58,4	65,0

Ao longo da intervenção aplicaram-se três testes sumativos, dois na turma C (Matemática e CN) e um na turma G (CN) (cf. Anexo D). Considerando que, no período anterior, as pautas de classificação dos discentes de ambas as turmas refletiam dois terços de notas inferiores a suficiente, considera-se que as aprendizagens dos alunos são bastante positivas do ponto de vista sumativo dos conhecimentos. Na turma C na disciplina de Matemática cerca de metade da turma teve classificação de pelo menos suficiente (mediana de 48,5 %). A CN houve quase três quartos de positivas. Igualmente, na turma G, a CN, houve quase três quartos de positivas.

É de referir que a aprendizagem não passa apenas pelo aglutinar de conhecimentos, mas sim pelo desenvolvimento de capacidades e de competências (Martins, et al., 2017). Efetivamente, os objetivos delineados para o PI concorriam para a área de competência do relacionamento interpessoal, encontrando-se este avaliado na subsecção seguinte, considerando-se também como positivo.

Quanto à avaliação dos objetivos gerais, procedeu-se à sua avaliação em 3 momentos: no início, no meio e no final da prática de ensino. Esta decisão, relativa à divisão temporal das semanas de intervenção, deveu-se ao facto de que, a evolução de competências de comunicação e de motivação só ser visível a longo prazo, visto que essas competências necessitam de ser trabalhadas continuamente.

Para o primeiro objetivo geral, *desenvolver competências de comunicação e de partilha de ideias e de conhecimentos*, procedeu-se à análise das grelhas de avaliação, tratadas através de gráficos de barras (cf. Anexo E). Quanto às observações efetuadas em CN, optou-se por, em ambas as turmas, avaliar os alunos em atividades específicas de apresentação oral, pelo que, de forma a gerir o comportamento e foco da turma, foi pedido que cada grupo elegesse um porta voz, o que levou a que só fossem observados os porta vozes.

No âmbito da área de Matemática, o número de discentes observados em cada turma foi superior. Verificou-se que na turma G os indicadores ‘aguarda a sua vez para falar’ e ‘justifica as suas opiniões’ são aqueles em que se observou um maior crescimento. Na turma C, ‘dá a sua opinião’, “justifica as suas opiniões também” e ‘utiliza um tom de voz adequado’ são aqueles cuja taxa percentual aumentou de forma consistente.

No segundo objetivo geral (cf. Anexo F), estritamente relacionado com a motivação dos alunos para o momento de ensino-aprendizagem, foi aquele em que se verificou um maior incremento na avaliação dos alunos, em ambas as turmas, na medida em que a apreciação de todos os indicadores é positiva, revelando crescimento.

Concluindo, não se pode demonstrar uma acentuada evolução na comunicação e na participação dos alunos, em virtude de estas serem competências que precisam de ser trabalhadas continuamente, sendo as melhorias apenas visíveis a longo prazo, dada a morosidade de toda a evolução comportamental.

Ainda como conclusão, pode-se indicar que as competências sociais mostraram uma evolução mais positiva, na razão direta do interesse dos alunos na atividade. Foi notória a diferença de postura, pela positiva, dos alunos desmotivados em aulas de ensino diversificado, como foi o caso do ensino exploratório, em que os discentes se mostraram

mais participativos e interessados. De facto, os alunos não podem ser meros recetores de conhecimento, mas sim os intervenientes principais na produção do mesmo.

1.3. Análise crítica e reflexiva das práticas desenvolvidas no 1.º e no 2.º CEB

Na presente subsecção analisa-se crítica e reflexivamente a prática desenvolvida em ambos os níveis de ensino, comparando os processos de regulação do comportamento, as formas de gestão do currículo, a relação pedagógica e o envolvimento dos alunos no processo de aprendizagem.

Começando com os **processos de regulação do comportamento**, é de destacar que o clima em sala de aula vivenciado em ambos os ciclos de ensino é completamente díspar.

Em ambas as turmas de 2.º ciclo ocorreram momentos de indisciplina, o que pode ser explicado pela heterogeneidade dos discentes a um nível social, cultural e cognitivo. Estas observações vêm justificar o facto do Agrupamento pertencer ao projeto TEIP, que inclusivamente tem como um dos objetivos centrais a redução da indisciplina (Direção-Geral da Educação, s.d.). Algumas das estratégias que os docentes aplicavam constantemente eram: i) a elevação do tom de voz e, ii) o encaminhamento dos alunos para a sala de apoio. No entanto, as estratégias antes elencadas não se mostraram produtivas, pois o comportamento dos discentes mantinha-se no mesmo registo e, por exemplo, quando mandados sair, dirigiam-se até à zona de recreio, permanecendo no mesmo, não se dirigindo para a sala de apoio, contrariamente às instruções recebidas do docente. Esta situação, para além de não modificar as atitudes comportamentais, também acarretava a compreensão deficitária ou nula dos conhecimentos lecionados, pelo que, conseqüentemente, potenciava que esses alunos viessem a deixar de frequentar as aulas, devido à dificuldade em acompanhar as matérias lecionadas. Um terceiro impacto negativo resulta na destabilização do ambiente de sala de aula, tendo um efeito nefasto nos outros colegas. Ao longo da intervenção o comportamento dos discentes tornou-se mais aceitável. Infere-se que esta alteração comportamental tenha resultado do facto de as atividades propostas serem estimulantes para os discentes, suscitando o seu interesse e atenção, com impacto positivo no comportamento.

No 1.º ciclo, apesar de ocorrerem alguns focos de instabilidade em sala de aula, quando a orientadora cooperante (OC) aplicava determinadas estratégias, o comportamento do grupo turma era regulado.

Salientam-se estratégias como i) a de meditação e de retorno à calma; ii) o apagar das luzes; iii) a permissão para ler um livro, após a realização do trabalho proposto; iv) nos casos de indisciplina mais notórios, o nome do aluno em causa era escrito no quadro e, caso houvesse uma segunda chamada de atenção, esse aluno seria obrigado a fechar os cadernos / livros não podendo terminar as tarefas em curso mas permanecendo na sala de aula. As tarefas que ficaram em suspenso seriam terminadas ou num momento de intervalo ou num momento de tempo de estudo autónomo (TEA).

A observação de estratégias eficazes aumenta o nosso repertório de estratégias para regular os comportamentos. De facto, se a prática de 2.º ciclo tivesse ocorrido após a de 1.º ciclo, ter-se-ia experimentado aplicar algumas das estratégias elencadas.

As distintas **formas de organização e gestão do currículo** em ambos os ciclos de ensino foram marcantes. Talvez os regimes de monodocência no 1.º CEB e de pluridocência no 2.º CEB influenciem as atividades dinamizadas. No 2.º ciclo as tarefas restringiam-se estritamente à Matemática ou às Ciências Naturais e no 1.º CEB algumas tarefas integravam diferentes áreas curriculares. Um fator que pode justificar o ocorrido é o facto de no 1º ciclo se lecionar 5 horas por dia e de se ter de lidar com uma maior diversidade de currículos, para além da Matemática e CN, o que talvez lhes confira mais oportunidades de planificação de atividades mais significativas para os alunos, como as de integração curricular. Para além deste fator, num regime de pluridocência, para que aconteça interdisciplinaridade, há a necessidade de cooperar com os restantes professores, por forma a se poder estar em concordância temporal e didática com o que foi lecionado nas restantes unidades curriculares e ainda de como as matérias foram lecionadas.

Uma outra diferença marcante na prática pedagógica prende-se com os momentos de consolidação e revisão de conteúdos. No 1.º CEB os alunos possuíam mais tempo para sistematizar as suas aprendizagens. Recorriam ao TEA para gerir o seu tempo, para a exploração, revisão, identificação de dificuldades e consolidação das mesmas. Por outro lado, no 2.º CEB, não existia uma rotina em que os alunos pudessem usufruir de um tempo

de trabalho autónomo, que lhes fornecesse material de estudo e verificação e que lhes possibilitasse confrontar os seus conhecimentos quanto aos diversos conteúdos abordados e assim melhor compreender as suas dificuldades.

Salienta-se que num ambiente desfavorecido socioeconomicamente a casa pode não ser o melhor ambiente para a realização de estudo autónomo. Este conhecimento, acrescido à consciência da eficácia do TEA para a aprendizagem dos discentes, a variados níveis, conduz à perceção da necessidade de promover rotinas como esta. Acrescenta-se que a existência de um conjunto de rotinas consolidadas permite mais facilmente organizar e estruturar a semana, o que foi vivenciado na turma em que decorreu a intervenção em 1.º CEB.

Um dos pontos fortes da prática de 1.º e 2.º CEB traduziu-se na gestão do grupo, a qual se associa, por conseguinte, à **relação pedagógica** e socioafetiva que foi desenvolvida com os alunos. É de notar que no 1.º CEB a relação foi mais aprofundada, devido ao maior número de horas diárias que permitiam maior acompanhamento dos alunos, em contraste com a situação em 2.º ciclo. Contudo, foi neste último contexto que o estabelecer de uma relação afetiva acarretou mais resultados relacionados com o desempenho e motivação dos alunos. A realização de algumas leituras e o diálogo com os professores tutores, trouxe consciência para o que Miguel, Rijo e Lima (2013) afirmam: é fundamental que os alunos percecionem que existe suporte emocional da parte do professor, para que possam ter uma maior motivação para a aprendizagem e, consequentemente, melhores resultados. Rosa e Mata (2012) acrescentam, ainda, que “uma relação positiva com o professor pode levar os alunos a quererem agradá-lo e a esforçarem-se por apresentarem um desempenho adequado às expectativas do professor” (p. 1178). De facto, tornou-se visível que a construção de uma vinculação com os alunos, isto é, a criação de uma relação positiva, num clima de confiança (Estrela, 2002), se mostrou essencial, inclusivamente, na participação dos alunos, em que estes deixaram de ter tanto medo de errar. Isto é, a relação pedagógica possui um forte valor emocional, que possibilita ao aluno a transferência e a construção do valor das suas vivências para sala de aula, o que permite atingir o sucesso na gestão do grupo. Salienta-se, assim, também, a importância da adaptação do pessoal docente, nomeadamente da minha futura adaptação

enquanto professora, aos contextos onde se exerce a prática profissional, assim como às características dos alunos.

Outro ponto interessante a analisar é relativo aos **processos de ensino-aprendizagem**. Um dos aspetos que se considerou mais desafiante na prática de 2.º ciclo passou pela constante preocupação dos OC para com as classificações dos alunos nos testes intermédios. Desse modo, era-nos solicitado que propuséssemos tarefas específicas para estas provas, o que condicionava a riqueza do ensino ao nível do raciocínio, da resolução de problemas e da comunicação matemática. De acordo com Serrazina (2015), é difícil alterar as conceções que os alunos têm acerca da Matemática, pelo que é essencial que desde cedo os discentes reconheçam o valor da mesma e a sua utilidade em situações do dia a dia. Neste sentido, “espera-se que os alunos sejam envolvidos em experiências relevantes” de reflexão sobre atividades, como a resolução de problemas, “de modo a que tenham uma autêntica experiência matemática e que conceitos fundamentais da matemática sejam aprendidos” (p. 1). Ou seja, não é pretendido que professores ‘preocupados’ com as classificações dos seus alunos utilizem todos os meios e tempos para os treinar apenas para um único momento de avaliação. De forma contrastante, no 1.º CEB fazia parte do horário semanal uma hora por dia “em que os alunos desenvolvem individualmente, a pares ou em pequenos grupos, um conjunto de a[c]tividades por eles sele[c]cionadas de acordo com as suas necessidades, dificuldades e interesses” (Abreu, 2006, p. 38), isto é, o TEA. Práticas educativas como a referida permitem uma diferenciação pedagógica, que permite responder às necessidades educativas dos alunos.

2.^a PARTE

Na segunda parte do Relatório Final será apresentado um estudo com o tema *os processos de resolução e de formulação de problemas*. O capítulo está subdividido em 5 partes que correspondem à apresentação do estudo, à fundamentação teórica, à metodologia, à apresentação e interpretação de resultados e às conclusões.

2.1. Apresentação do estudo

Este estudo surge no âmbito da Unidade Curricular de Práticas de Ensino Supervisionada II (PES II), tem como tema os processos de resolução e de formulação de problemas e teve a duração de quase dois meses.

A escolha deste tema para o estudo surgiu da necessidade de trabalhar a capacidade transversal de resolução de problemas com a turma afeta à intervenção, no âmbito da UC.

Para realizar este estudo foi essencial a preparação / seleção de um conjunto de tarefas que permitissem envolver ativamente os alunos selecionados, na resolução de problemas propostos. Só dessa forma seria possível aceder ao pensamento matemático dos alunos (NCTM, 2014).

Quanto às motivações intrínsecas para este tema, destaca-se o facto de aquando da realização de trabalho para a resolução e a formulação de problemas, com uma turma de 3.º ano de escolaridade no contexto de Prática de Ensino Supervisionada I, ter existido a perceção da importância da recolha e da interpretação das evidências do pensamento dos alunos. Só dessa forma o docente poderá determinar a forma como orientar as suas interações de ensino e aprendizagem para o desenvolvimento das capacidades dos alunos. Efetivamente, a investigação na área da resolução / formulação de problemas tem estudado os processos e as estratégias mobilizadas pelos alunos aquando destas atividades. Singer e Voica (2013), procuraram descrever tais processos explicitados pelos alunos, tendo delineado categorias operacionais, com o objetivo de os categorizar.

Assim, o conjunto de reflexões realizadas, relativamente ao tema, despoletaram o seguinte objetivo geral, que se direccionou para este estudo: **Descrever e compreender os processos de resolução e de formulação de problemas, à luz do modelo de análise definido por Singer e Voica (2013)**

Consequentemente, para responder ao objetivo do estudo, foi fundamental identificar os processos explicitados pelos alunos, aquando da resolução e da formulação de problemas e, posteriormente, enquadrar esses processos nas categorias operacionais delineadas por Singer e Voica (2013). São definidos, portanto, dois objetivos específicos:

- (1) Descrever os processos de resolução / formulação de problemas mobilizados pelos alunos;
- (2) Interpretar os processos de resolução / formulação de problemas à luz das categorias operacionais de Singer e Voica (2013).

2.2. Fundamentação teórica

Nesta secção apresenta-se um conjunto de subsecções referentes à resolução e formulação de problemas no currículo, seguido de um breve enquadramento de resolução e formulação de problemas e de um conjunto de estudos referentes aos processos e estratégias envolvidos na resolução e formulação de problemas. Por fim, apresenta-se, de forma mais aprofundada, as categorias operacionais que constituem o modelo operacional e cognitivo de Singer e Voica (2013).

A expressão “resolução de problemas” (RP) pode ser interpretada como uma atividade, a atividade de resolver problemas, mas pode também ser interpretada como uma capacidade, a capacidade de resolver problemas. Enquanto atividade, a RP pode ser um modo de aplicação de conhecimentos anteriormente adquiridos, mas, também, como uma metodologia para o ensino da matemática, como detonadora de aprendizagem de conteúdos matemáticos.

2.2.1. A resolução e formulação de problemas no currículo

Em 1980 iniciou-se um movimento com o objetivo de que a RP tivesse um papel central no ensino da matemática. Princípio este que foi catalisado por uma publicação da associação National Council Of Teachers Of Mathematics (NCTM, 1980), uma associação reconhecida a nível internacional, que tem elaborado recomendações curriculares (eg. NCTM, 1980, 1989, 2000, 2014). Decorrida uma década, esta recomendação foi assumida no currículo de matemática para o 1.º CEB em Portugal (DGEBS, 1990). Neste novo currículo foi reconhecido que a aprendizagem da matemática deveria passar pela resolução de problemas, considerando a RP como veículo da aprendizagem e como uma capacidade, a par de outras duas: o raciocínio e a comunicação matemática. Estas três capacidades foram apresentadas, igualmente, como finalidades a desenvolver no ensino da Matemática, isto é, atualmente considera-se que o ensino da Matemática deve promover o desenvolvimento da capacidade de raciocínio, da comunicação matemática e também da resolução de problemas.

No Programa de Matemática do ensino básico, homologado em 2007 (Ponte et al., 2007), a resolução de problemas aparece também como uma capacidade e como uma

atividade privilegiada para o ensino da Matemática, que enquanto capacidade deve ser ensinada, destacando conteúdos e objetivos específicos. Acrescentar que neste programa, a formulação de problemas (FP) surge como um sub-objetivo dentro do objetivo geral (6.º, p. 5) da capacidade de resolver problemas.

No Programa de Matemática para o ensino básico, homologado em 2013 (Bivar, Grosso, Oliveira & Timóteo, 2013), atualmente em vigor, a FP não aparece, nem associada à RP. Esta última surge a par com o raciocínio matemático, a comunicação matemática e o conhecimento de factos e procedimentos. No entanto, é recomendado que a resolução de problemas se faça após a aprendizagem de factos, conceitos, relações, regras e procedimentos e não como uma atividade exploratória (2013, p. 5).

Nas Aprendizagens Essenciais do 3.º ano, do 1.º ciclo de Matemática (2018), a resolução de problemas é valorizada como um objetivo e como uma prática essencial de aprendizagem. A destacar que a formulação de problemas aparece associada à resolução de problemas.

É de salientar que na última recomendação curricular publicada pelo NCTM (2014), *Princípios Para A Ação*, é referido que “um ensino eficaz da matemática envolve todos os alunos na resolução e discussão de tarefas que promovem o raciocínio matemático e a resolução de problemas, além de permitirem diferentes abordagens e estratégias” (p. 17). Conclui-se, portanto, que a RP tem vindo a ser considerada uma atividade essencial na aprendizagem da Matemática e que a FP, embora não tenha um papel de destaque, é algumas vezes apontada como uma prática que contribui para o desenvolvimento da capacidade de RP.

2.2.2. A resolução e formulação de problemas

De acordo com Lester (1980), um problema é uma situação em que não há uma forma mecânica imediata que permita determinar completamente o método de resolução (p. 287). Em conformidade, Ponte e Serrazina (2000) também apontam que uma questão é um problema para um determinado aluno, “se ele não tiver nenhum meio para encontrar uma solução num único passo” (p.52). Efetivamente, tal dificuldade aquando da resolução supõe “um processo de elevado nível de complexidade” (idem). Para a definição de

problema apresentada, Lester (1980) afirma que a RP é um conjunto de ações efetuadas para resolver uma tarefa e que é uma atividade de extrema complexidade, na medida em que o modo como o problema é apresentado, a experiência matemática e o interesse e a motivação do resolvidor são aspetos que podem influenciar o sucesso do indivíduo na concretização da tarefa. A perspectiva de Schoenfeld (1992) reforça o que Lester (1980) afirma, caracterizando a resolução de problemas como uma atividade que envolve conhecimento (de base), estratégias de resolução de problemas, monitorização e controlo, crenças e afetos e práticas.

Boavida, Paiva, Cebola, Vale e Pimentel (2008), mencionam como vantagens associadas a hábitos adquiridos aquando da RP, as de persistência, curiosidade e confiança perante situações desconhecidas, práticas fulcrais em todas as vertentes da vida dos indivíduos. A acrescentar que nesta obra a FP é referida como “uma atividade de importância inquestionável, pois contribui não só para a compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos, mas também para a compreensão dos processos suscitados pela sua resolução” (p. 27).

Diversos investigadores começaram a aperceber-se de que o trabalho da formulação de problemas (FP) é tão importante quanto o trabalho da RP no ensino e aprendizagem da matemática. Stoyanova e Ellerton (1996) definiram, então, a FP como “o processo através do qual, com base na experiência matemática, os estudantes constroem interpretações pessoais de situações concretas e reformulam-nas, construindo problemas matemáticos significativos” (p. 1).

Há dois aspetos que acarretam o reconhecimento da inextricável relação entre a capacidade de resolução e de formulação de problemas (eg. Silver, 1994; Schoenfeld, 2013). A pergunta que se coloca e a respetiva resolução do problema formulado permitem observar o que os alunos compreendem sobre os conceitos matemáticos envolvidos. E a compreensão do enunciado de um problema proposto requer a interpretação da situação em questão, por parte do solucionador. Tal relação demonstra a pertinência de ambas as atividades no ensino e aprendizagem da matemática.

2.2.3. Processos na resolução e formulação de problemas

Com o objetivo de compreender e caracterizar os processos e estratégias pelos quais os indivíduos passam quando da realização de atividades de resolução e de formulação de problemas, surgiram variadas propostas, de entre as quais se destaca de Polya (1957), de Christou, Mousoulides, Pittalis, PittaPantazi e Sriraman (2005) e de Singer e Voica (2013).

Na publicação *How to solve it*, Polya (1957) identifica um conjunto de fases de resolução de um problema. Refere que primeiramente se deve compreender o problema, cuja solução é desejada, percebendo de forma clara o que é requerido. De seguida, indicada como a fase de maior conquista, deve determinar-se como os diversos aspetos do problema estão relacionados, por forma a estabelecer um plano. Em terceiro lugar executa-se o plano, em que o aluno deve ter a certeza, conseguindo provar a correção de cada passo efetuado. Por fim, faz-se a revisão e discussão da resolução do problema e dos passos seguintes, de forma a avaliar a própria solução. Este é um modelo comportamental, ou seja, estabelecem-se as ações que os solucionadores devem seguir. O autor, sugere, ainda, um conjunto de questões com que o solucionador deve estar familiarizado, com o intuito de as mobilizar ao longo do seu processo de resolução.

No estudo de Christou et al. (2005) foi construída uma taxonomia no sentido de identificar e classificar os processos cognitivos presentes na formulação de problemas. Essa taxonomia possibilitou uma hierarquização e segmentação do nível de desempenho dos alunos, com base nas suas habilidades cognitivas. Na sua investigação, os autores recorreram a quatro tipos de tarefas de formulação, correspondendo cada uma a um processo cognitivo. Os processos cognitivos que estabeleciam uma hierarquia de exigência crescente foram denominados de: (i) compreender (em que é fornecido uma equação ou cálculo, a partir do qual o solucionador deve formular um problema/contexto), (ii) traduzir (em que é fornecido um gráfico, diagrama/tabela, a partir do qual o solucionador deve formular um problema sob certas condições), (iii) editar (em que são fornecidos determinados dados, a partir dos quais o solucionador deve formular um problema) e (iv) selecionar (em que é fornecida determinada resposta e o solucionador da tarefa tem de formular a pergunta correspondente).

Na sua investigação, Singer e Voica (2013) procuravam um modelo mais geral do que o apresentado por Christou et al. (2005), que fosse aplicável a diversas populações e contextos, centrado não só nos processos cognitivos, mas também nas operações dos alunos ativadas ao longo da resolução e formulação de problemas. Através da modalidade de entrevista a alunos de alto nível em competições matemáticas, os investigadores situaram os discentes numa posição de confronto com o seu próprio problema, que permitiu destacar os traços gerais das estratégias de resolução mobilizadas pelos solucionadores, aquando da realização das tarefas de formulação. A metodologia aplicada possibilitou a Singer e Voica (2013) correlacionar habilidades de resolução com habilidades de formulação e a consequente construção de um quadro teórico relativo aos processos de resolução de problemas. O modelo delineado comporta quatro categorias operacionais: Descodificar, Representar, Processar e Executar. Os autores referem que o quadro teórico formulado pode ser usado em níveis de complexidade distintos e sobre uma variedade de indivíduos, independentemente do seu nível de processamento em Matemática.

2.2.3.1. Apresentação das categorias operacionais de Singer e Voica (2013)

As categorias operacionais delineadas por Singer e Voica (2013), observe-se a Figura 2, são um conjunto de processos cognitivos ou ações que o sujeito (solucionador do problema) realiza quando resolve ou formula um problema: Descodificação, Representação, Processamento e Execução. O diagrama abaixo esquematiza o percurso realizado na resolução de um problema e situa cada uma dessas categorias operacionais. O solucionador (quem passa pelos processos de resolução do problema) começa por transpor o texto para relações mais explícitas entre os dados e os operadores, induzidos pelas restrições (**Descodificar**), o que, por sua vez, origina representações mentais (**Representar**). Através das representações mentais e do seu conhecimento matemático, o sujeito identifica um modelo matemático adequado ao problema (**Processar**). Por fim, implementa técnicas matemáticas específicas do modelo matemático (**Executar**), com o objetivo de encontrar a solução do problema.

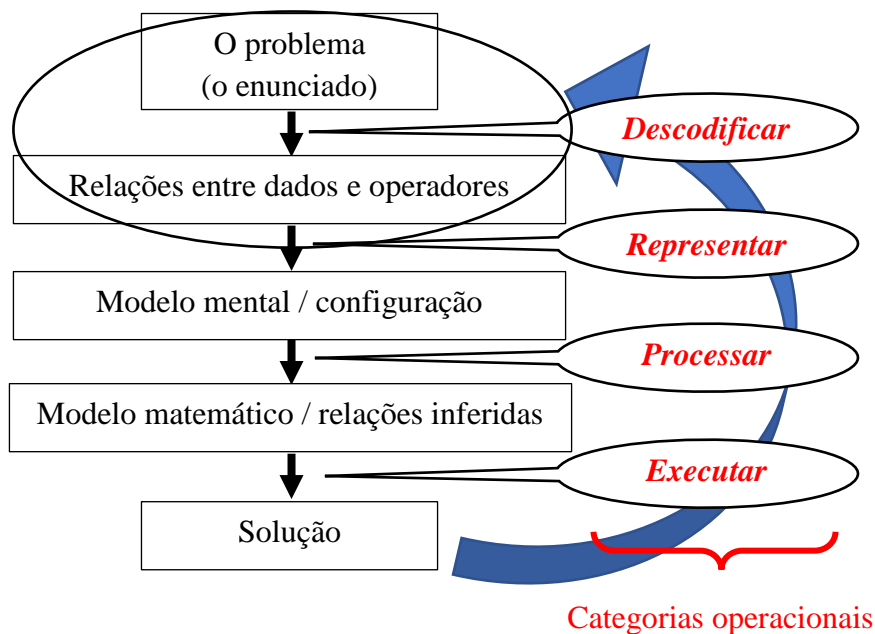


Figura 2. Fases do quadro conceptual dos processos de formulação de problemas. Adaptado de Singer e Voica (2013, p. 20)

A categoria **Descodificar** refere-se à interpretação do enunciado. Essa interpretação consiste na extração das relações entre o contexto geral, os dados e os esquemas operatórios, induzidos pelas restrições do problema, clarificando-os. O contexto geral expressa o tema do problema e é caracterizado por um ou mais parâmetros, isto é, aquilo a que se referem os dados (numéricos ou literais). Por sua vez, os esquemas operatórios são as ações sugeridas pelo texto do problema, de forma implícita ou explícita. No que diz respeito às restrições, há dois tipos: (i) as que estabelecem relações entre o contexto geral, os dados e os esquemas operatórios; (ii) as que implicam pelo menos um valor de um parâmetro desconhecido e que conseqüentemente indicam as relações entre os dados, os esquemas operatórios e a questão problema. De facto, são as restrições que tornam um problema diferente de outro, ainda que ambos possam ter o mesmo tema, os mesmos valores numéricos e os mesmos esquemas operatórios. Quando um sujeito formula e, conseqüentemente, soluciona o problema que inventou, um aspeto essencial a considerar na resolução são todas as conseqüências das restrições que definiu.

O **Representar**, conduz o solucionador a um modelo mental, que visa a resolução do problema. O conjunto estruturado de representações mentais que podem ser expressas

através de desenhos, de imagens, de movimentos, da manipulação de objetos físicos e da utilização de uma linguagem mais familiar permitem revelar o modelo mental do sujeito. A título de exemplo, o movimento vertical das mãos do solucionador, elevando uma, enquanto baixa a outra, pode ser um modelo mental que representa a variação no sentido inverso de duas variáveis. É de notar, igualmente, que a resolução de um problema através de uma sucessão de tentativa-erro pode demonstrar a ativação de um modelo mental.

O **Processar** é a identificação do modelo matemático a partir do modelo mental e do conhecimento matemático do solucionador. O modelo matemático é descrito através da mobilização de linguagem e/ou simbologia matemática, na medida em que é definido por conceitos, processos e técnicas próprias da Matemática. Desse modo, o modelo matemático pode ser uma operação ou equação, uma representação gráfica, um conjunto de algoritmos, entre outros. Em conformidade, a inferência de um modelo matemático, a partir da exploração de possíveis situações através de desenhos ou da transposição do texto para uma equação podem ser exemplos deste processo. É de notar que o modelo mental, que antecede o modelo matemático, pode não ser ativado, na medida em que pode ter sido ultrapassado por um modelo matemático, como é o caso dos enunciados muito simples, em que se torna evidente o modelo matemático a mobilizar.

Por último, no processo de **Executar** o indivíduo implementa um conjunto de procedimentos matemáticos específicos, já conhecidos, associados ao modelo matemático, e que permitem encontrar a solução do problema. Estas técnicas podem passar por: comparar e otimizar resultados; eliminar valores que não satisfaçam as restrições do problema; usar construções auxiliares; usar algoritmos conhecidos; entre outros. Um aspeto frisado pelos investigadores é o de que mesmo nos problemas matemáticos mais básicos ocorre o processo de execução, que consiste em tornar-se consciente do modelo matemático e de aplicá-lo.

2.3. Metodologia

No que concerne à metodologia, o primeiro requisito a ter em consideração é a coerência metodológica, que passa por assegurar uma articulação entre o objetivo de investigação e os procedimentos metodológicos a aplicar, pois “o modo como se formula o problema é fundamental para se desenhar o caminho que se há de tomar em termos de metodologia de pesquisa” (Amado, 2014, p. 119).

Como referido na apresentação do estudo, o objetivo geral é o de descrever e compreender os processos implicados na resolução e formulação de problemas e olhá-los à luz do quadro de análise de Singer e Voica (2013). Assim, devido à natureza do objeto a investigar e ao conjunto de dados empíricos a recolher (cf. Amado, 2014), optou-se pela adoção de uma metodologia qualitativa. Efetivamente, devido à sua abordagem naturalista e interpretativa: a metodologia de natureza qualitativa permite o ajuste ao objeto estudado, neste caso, no local onde ocorre; a informação recolhida pelo investigador através de uma interação social não é reduzida a “simples variáveis” (Flick, 2005, p. 5). Neste estudo procura-se compreender em profundidade um fenómeno, através da perspectiva dos participantes, com a intenção de o descrever (Amado, 2014).

2.3.1. Seleção dos participantes

De forma a estudar o que se pretende, foram selecionados alguns alunos da turma de 3.º ano de escolaridade em que a PES II foi realizada. De facto, o principal aspeto a ter em consideração para a seleção dos participantes foi a capacidade de falarem com à vontade e explicitarem com clareza os seus raciocínios, pois esta capacidade é de extrema relevância para a posterior análise dos dados, por facilitar a realização de um estudo em profundidade, dos processos implicados na resolução e formulação de problemas. As informações fornecidas pela professora titular (cf. Anexo G), aquando de conversas informais sobre as avaliações dos discentes permitiram aferir quais os alunos a selecionar para o estudo. Por fim, selecionou-se dois dos alunos da turma para participarem na investigação. Alunos com uma boa capacidade de comunicação e um bom nível de desempenho.

2.3.2. Técnicas de recolha de dados

Definido o problema e avaliada a sua natureza (qualitativa), seguiu-se a fase do processo investigativo, que passa pela “escolha das técnicas de recolha e análise de dados que lhe darão concretização” (Amado, 2014, p. 120). Em complementaridade, Quivy e Campenhoudt (2017) referem que neste ponto se deve atender a três questões: a quem, o quê e como?; que se referem, respetivamente, aos participantes, às técnicas e aos instrumentos utilizados para a recolha de dados, com o intuito de recolher “informação suficiente e pertinente” (Meirinhos & Osório, 2010, p. 59).

A aplicação da técnica de observação direta teve como intenção captar a realidade com objetividade, procurando não considerar qualquer observação subjetiva. Ao longo do período de observação do estágio em 1.º CEB as intervenções dos alunos consistiram num foco de atenção, em que se procurou identificar evidências de facilidade de transmissão do pensamento e raciocínio, ou seja, em que se procurou identificar quais os alunos que tinham à vontade para falar e para explicar os seus raciocínios. É de referir que esta técnica de recolha de dados permite ao investigador uma “recolha de informação, de modo sistemático, através do contacto directo [*sic*] com situações específicas” (Aires, 2015, p. 24).

As entrevistas permitem “captar a diversidade de descrições e interpretações” (Meirinhos & Osório, 2010, p. 62), pelo que foram aplicadas quatro entrevistas, duas a cada participante. Optou-se por realizar entrevistas semiestruturadas, porque nestas se confere uma grande liberdade de resposta ao entrevistado, em que as questões derivam de um plano prévio, isto é, de um guião de entrevista (cf. Anexo H). Segundo Amado (2014), “quanto mais tivermos ideias claras sobre o que procuramos compreender e sobre o melhor modo de o perguntar, mais podemos aprender [sobre o objeto de estudo] seja qual for o informante” (p. 213). Será importante referir que os dados obtidos através das entrevistas foram audiogravados e posteriormente transcritos (cf. Anexo I e J).

2.3.3. Técnicas de análise de dados

Ressalva-se que, de acordo com Quivy & Campenhoudt (2017), após a descrição das técnicas e instrumentos de recolha de dados, se segue para a etapa da análise dos

mesmos. A técnica de tratamento que se privilegiou para obter conclusões sobre a problemática em estudo foi a de análise de conteúdo. Segundo Bardin (2013), o método de análise categorial de conteúdo “funciona por operações de desmembramento do texto em unidades, em categorias segundo reagrupamentos analógicos” (p. 153), por forma a conferir transparência à linguagem e, desse modo, melhor compreender o pensamento do sujeito.

Foram aplicados dois tipos de tarefas: de formulação e de resolução de problemas (cf. Anexos K e L). E foram aplicadas entrevistas para determinar os processos explicitados, aquando da resolução das mesmas. Para tal, tornou-se fundamental transcrevê-las, na medida em que a transcrição “permite o manuseio indispensável na sua análise, além de permitir melhor conservação e melhor acesso aos dados” (Amado, 2014, p. 220).

Na análise de conteúdo, os dados recolhidos foram organizados numa tabela segmentada em quatro partes: primeiro problema formulado, segundo problema formulado, primeira parte da tarefa de resolução e segunda parte da tarefa de resolução. Efetuou-se a subdivisão de cada uma dessas partes da entrevista transcrita por unidades de análise numeradas. De seguida, fez-se a descrição das mesmas, identificou-se os processos que os alunos explicitaram em cada uma e procedeu-se à caracterização dos mesmos, fazendo uso das categorias pré-definidas por Singer e Voica (2013). Salienta-se que para cada aluno foi elaborada uma tabela como a acima descrita (cf. Anexos M e N).

2.3.4. Dimensão ética

Relativamente à dimensão ética, esta teve um carácter transversal a todo o estudo. A vontade dos participantes foi tida em consideração, podendo os mesmos deixar de participar no estudo a qualquer momento. Os nomes referenciados são fictícios, isto é, o anonimato foi respeitado. Pois, “a investigação ética baseia-se em princípios de respeito entre o investigador e os sujeitos de investigação” (Walsh citado por Folque, 2014, p. 135).

2.4. Resultados

Nesta secção será efetuada a apresentação da tarefa de formulação, seguida da análise dos processos explicitados pelos alunos no primeiro e no segundo problema por eles inventado. Posteriormente, será exposta a apresentação da tarefa de resolução, seguida da análise dos processos explicitados pelos alunos na primeira e na segunda parte do problema, respetivamente. Por fim, apresentar-se-á uma síntese geral dos resultados.

Conforme explicitado na metodologia, procedeu-se à recolha de dados de natureza qualitativa, com o intuito de responder aos objetivos definidos para a investigação e com o intuito de elaborar conclusões sobre os resultados obtidos, através da análise dos mesmos.

Foram aplicados aos alunos dois tipos de tarefas no mesmo dia, primeiro uma de formulação e, logo de seguida, uma de resolução. Tanto no que respeita à tarefa de formulação como de resolução, foi aplicada a mesma a cada participante do estudo.

Após a resolução de cada uma das tarefas foi colocado um conjunto de perguntas aos alunos, por forma a tornar explícitos os processos que efetuaram (cf. Guião de Entrevista – Anexo H). Do conjunto de questões colocadas a cada parte das tarefas, as últimas foram de confirmação ou de verificação das respostas às questões anteriores. Estas consistiram na proposta de resolução de um problema semelhante àquele que tinham acabado de resolver. As modificações incidiram na alteração dos dados fornecidos (figura e/ou dado numérico) sem alterar as restrições do problema (cf. Anexo O).

Os excertos de entrevista que vão ser apresentados são da **Ilda** e do **David**. A entrevista à **Ilda** encontra-se no Anexo I e a entrevista ao **David** no Anexo J.

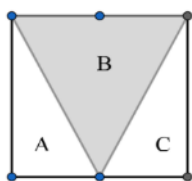
2.4.1. Tarefa de formulação

A tarefa de formulação (cf. Figura 3) consistiu no pedido de invenção de dois problemas, tendo como ponto de partida a imagem de uma composição geométrica. Nesse sentido, assumiu-se a possibilidade de os discentes mobilizarem conhecimentos relativos a figuras geométricas, a área e a comprimento. Nas perguntas envolvendo comprimento e área, poderiam incluir números racionais, uma vez que esse conteúdo se encontrava a

ser trabalhado em sala de aula. Os conhecimentos elencados tinham já sido bastante explorados em sala de aula, com a exceção dos conceitos de perímetro e de área, que estavam em desenvolvimento.

Após a invenção dos problemas, foi solicitado que os participantes procedessem à resolução dos mesmos. Na fase de resolução foi disponibilizado um conjunto de imagens iguais à do enunciado, às quais os participantes poderiam recorrer para mostrar o seu raciocínio.

Figuras Fascinantes



A figura ao lado é um quadrado que está dividido em 3 triângulos: os triângulos A e C com fundo branco e o triângulo B com um fundo sombreado.

1. Inventa duas perguntas desafiantes que possam ser respondidas através dos dados que a imagem te sugere.

2. Agora que és inventor, resolve os problemas que inventaste.

Figura 3. Enunciado da tarefa de formulação aplicada a 14-05-2019

Na Tabela 4 são apresentados os problemas inventados pelos alunos.

Tabela 4.
Problemas formulados pela Ilda e pelo David a 14/05/19

Participantes Problema formulado	Ilda	David
1.º problema	Qual é a área do triângulo B sabendo que o triângulo A tem como área 3?	Quantas figuras A se precisam para fazer uma figura B?
2.º problema	Qual é o perímetro da figura B, sabendo que a figura A é 7?	Quantas figuras A se precisam para fazer o painel?

Os dois problemas da **Ilda** são distintos, apesar de serem relativos à mesma imagem. O primeiro incide no conteúdo de área e o segundo no de perímetro. As

perguntas do **David** têm como tema a área e a segunda questão que inventou vem no seguimento lógico da primeira, em que são mantidos o tema e as restrições.

2.4.1.1. Primeiro problema formulado

A **Ilda**, na resolução do primeiro problema que formulou, começou por identificar a relação de equivalência das áreas dos triângulos A e C (informação presente na figura) e por assumir a área de A como unidade de medida. Explicitou as relações que permitem resolver o problema, traçou um eixo de simetria de B e uniu as figuras A e C, sobrepondo-as em B. Determinou que correspondem, respetivamente, a metade da figura B e anotou no painel a área de cada figura. Referiu que a figura B tem 6 unidades de área, porque é composta por duas figuras A, na medida em que cada A tem 3 unidades de área. Quando lhe foram colocadas perguntas de confirmação, modificando a figura sobre a qual elabora o problema (cf. Anexo O), a discente realiza os mesmos passos.

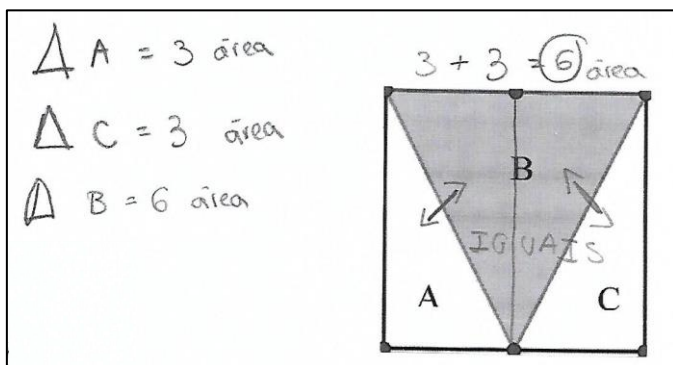


Figura 4. Resolução do primeiro problema inventado pela Ilda a 14/05/19

Na resolução do primeiro problema que formulou, o **David** começou por identificar a equivalência das áreas dos triângulos A e C e, implicitamente, tomou a área de A como unidade de medida. Identificou que teria de determinar o número desconhecido de figuras A que compõem a figura B e contou o número de vezes que o A é usado para compor o painel. Indicou que A cabe 4 vezes no mesmo. Referiu que, já à partida, sabia que a figura A correspondia a metade de B e dobrou o papel para demonstrar como dividiu a figura mentalmente. Referiu, também, que poderia manipular fisicamente as figuras, isto é, sobrepor figuras A em B, indicando a ação de realizar rotações nas

mesmas, por forma a determinar quantos A's cabiam em B, efetuando uma pavimentação. Afirmou que dois A's compõem um B, isto é, que as metades de B são A's (cf. Figura 4).

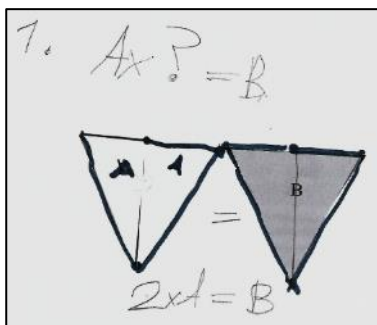


Figura 5. Resolução do primeiro problema inventado pelo David a 14/05/19

Ambos, a **Ilda** e o **David**, estão a **Descodificar** quando identificam o tema e os dados. A **Ilda** identifica a incógnita, em oposição ao **David** que identifica, também, a incógnita e o contexto geral do problema, verifique-se:

Inv. O problema é sobre o quê?

David. É sobre a área. [Identifica o tema]

David. Cada um dos meus problemas é sobre o A. [Identifica dados]

Inv. E o que é que tu tens de descobrir?

David. Quantas figuras A se precisam para fazer uma figura B. [Identifica incógnita]

David. A geometria é assim... [Identifica contexto geral]

(cf. Anexo J)

Através da ação sobre objetos físicos os dois participantes mostram um modelo mental (pavimentação). Repare-se no diálogo com o **David** e na resolução do mesmo (cf. Figura 5): “**Inv.** E deu, e foi isso que tu imaginaste? **David.** Sim. Parti B ao meio [dobrou B por um dos eixos de simetria]” (cf. Anexo J). Agora observe-se um excerto da entrevista à **Ilda**: “**Ilda.** (...) Primeiro fiz a área do A e do C, como percebi que eram iguais... **Inv.** Como é que percebeste que elas eram iguais? **Ilda.** Olhando para a figura. Também pus assim por cima”. O que os alunos aqui explicitam são processos ilustrativos da categoria **Representar**.

No **Processar** ambos identificam os conceitos relacionados com o processo que usaram para resolver o problema e inferem relações matemáticas que passam pela decomposição de figuras. Para além disso, tanto o **David** como a **Ilda** identificam o

modelo matemático (pavimentação) que lhes permite alcançar a solução, que é uma forma de lidar com as relações matemáticas entre as figuras que compõem o painel. Tal é perceptível quando a **Ilda** responde: “ (. . .) depois vi que metade do triângulo B é um triângulo A ou C. Então eu juntei, é como se tivesse juntado o A e o C e formou-se uma única figura” (cf. Anexo I) e quando o **David** confirma: “**Inv.** Tu estás a unir dois A’s, para ver se vão dar um B, é isso? **David.** Sim. E deu” (cf. Anexo J).

Por último, no **Executar** os dois participantes aplicam as relações matemáticas que descobriram. O **David** aplica esse modelo fazendo uma contagem: “**Inv.** Ok. E quais são os dados importantes? **David.** Já sabia que era metade: 1, 2, 3, 4 é 4.” (cf. Anexo J). A **Ilda** executa um passo intermédio para extrair a informação de que A e C, “(. . .) estes dois são iguais [são metades de B]” (cf. Figura 5). O **Executar** é, igualmente, verificado nas resoluções das questões de verificação em ambos os casos. Observe-se o exemplo da **Ilda**, que obteve a solução ao mesmo tempo que identificou as relações matemáticas: “e se acrescentássemos aqui, era 24. Então o quadrado todo é 24 de área menos um quadrado, é 21 (. . .)” (cf. Anexo I).

2.4.1.2. Segundo problema formulado

No segundo problema, a **Ilda** identifica que o triângulo C tem 7 unidades de medida de perímetro e que tem de descobrir o valor do perímetro do triângulo B. Corta as figuras A, B e C e sobrepõe a figura C em A, determinando que A e C têm o mesmo tamanho e que B ocupa o dobro do espaço de A. Afirma que a figura B tem o dobro do perímetro de A, porque tem o dobro da área de A, pelo que o perímetro de B é 14 (7+7). Ao ser colocada a mesma questão, mantendo a figura e alterando o valor do perímetro de A para 20, a **Ilda** volta a afirmar que B é o dobro de A e de C, pelo que o perímetro de B será o dobro do perímetro de A ou de C, ou seja, que o perímetro de B é 20 (2x10). Quando é alterada a figura do problema (cf. Anexo O), a aluna aplica o mesmo processo e recita os produtos da tabuada do 7 até aos fatores 7x7 e afirma que o perímetro da figura branca é 49 (7x7) (cf. Figura 6). A acrescentar que as ferramentas matemáticas ao dispor de um aluno de 3.º ano de escolaridade não permitem solucionar o segundo problema que a **Ilda** formulou. Neste último, a **Ilda** não fornece os dados necessários (a medida de

comprimento dos lados) para que o possa resolver, tendo em conta os conhecimentos que detém.

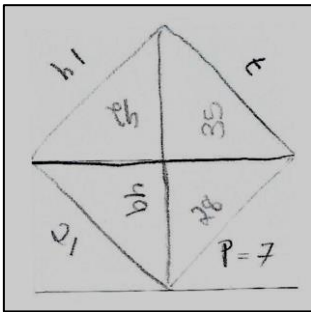


Figura 6. Resolução do problema de verificação sobre o segundo problema inventado pela Ilda a 14/05/19

O **David** começa por identificar a relação de equivalência das áreas dos triângulos A e C e, implicitamente, identifica as relações que estão presentes no painel. Assume, de forma implícita, a área da figura A como unidade de medida. Refere que terá de descobrir o número de figuras A que compõem o painel e que percebeu, através do enunciado, que teria de multiplicar a figura A, para determinar quantos A's precisaria para compor o painel. Acrescenta que poderia sobrepor figuras A no painel, isto é, efetuar uma pavimentação, para determinar a solução. Refere que o B é formado por dois A's e que o painel é composto por dois B's. Logo, que o painel é composto por quatro A's ($B+2A=4A$'s). Como resposta à questão de verificação que lhe foi colocada (cf. Anexo O), menciona que o painel seria composto por oito A's (1×8). Explicita que dividiu cada um dos quatro quadrados, que delineou na figura, (quatro quartos) em duas partes iguais, pelo que se no quadrado grande há 4 quadrados, que há o dobro de metades desses quadrados e que, assim, o triângulo A corresponde a um oitavo da área do painel.

Analise-se os diálogos da **Ilda** e do **David**, respetivamente, em que é possível perceber que: a **Ilda** identifica o tema, os dados e a incógnita; o **David** também identifica o tema, os dados, a incógnita.

Inv. Qual é o tema do problema?

Ilda. É o perímetro. [identifica o tema]

Inv. Quais são os dados importantes?

Ilda. Que nós queremos saber qual é o perímetro do triângulo B e saber que o triângulo C tem como perímetro 7. [identifica a incógnita; e um dado]
(cf. Anexo I)

Inv. O problema é sobre o quê?

David. É sobre a área. [identifica o tema]

David. Cada um dos meus problemas é sobre o A. [identifica um dado]

Inv. Sobre o A? Então o problema é sobre o quê?

David. É igual ao C. [identifica um dado]

Inv. Ok. E quais são os dados importantes?

David. É como é o painel, como são as figuras. [implicitamente identifica as relações]

(cf. Anexo J)

Os sujeitos, ao explicitarem estes aspetos, estão a fazer aquilo a que Singer e Voica (2013) denominam **Descodificar**, isto é, a interpretar o enunciado.

Ambos os discentes mostram um modelo mental através da ação sobre objetos físicos, observe-se o caso do **David** “*se tinha imensas A’s, podia pô-los em cima do painel e ver quantos cabiam*” (cf. Anexo J). e da **Ilda** “*eu cortei a figura, como cortei todas as figuras. Cortei assim a C, a B e a A e depois vi que a C tinha 7 de perímetro [sobrepôs C em A]*” (cf. Anexo I). Estes processos pertencem à categoria **Representar**.

Os processos explicitados que correspondem à categoria operacional delineada por Singer e Voica (2013) **Processar** são aqueles em que a **Ilda** explicita os conceitos que relaciona com o processo que usou para resolver o problema e em que descobre relações entre o perímetro e a área, inferindo que ao dobro da área corresponde o dobro do perímetro veja-se: “*como eu já tinha feito antes, a B é o dobro da figura C, ou seja, este [A] é a metade deste [B]. A B é o dobro da A e da C, então temos de juntar para saber o perímetro da B*” (cf. Anexo I). Consequentemente, também o **David** explicita processos que se encontram na mesma categoria, quando: identifica os conceitos relacionados com o processo que usou para resolver o problema; usa linguagem matemática para explicitar as relações que descobre naquilo que visualiza; infere as relações matemáticas que lhe permitem chegar à solução, que implicam determinar em quantas partes iguais a figura é composta, “*tem de ser o dobro porque dividi ao meio os*

quatro quadrados pequenos [discerne que o número de metades de quadrado é o dobro do número de quadrados]” (cf. Anexo J).

O **Executar** consiste na passagem de um modelo matemático ou das relações inferidas para o determinar da solução. Este processo é explicitado pela **Ilda** quando diz, inclusivamente, “*7,14,21,28,35,42 e 49 é a tabuada do 7, do 7×7 , [a figura branca] tem 49 [de perímetro]*” (cf. Anexo I). Aplica as descobertas matemáticas identificadas anteriormente (ver o parágrafo anterior) e executa um procedimento. Para solucionar o seu problema, o **David** executa um passo intermédio para extrair a informação de que o painel é decomponível em quatro quadrados; explicita a solução ao mesmo tempo que identifica as relações matemáticas “*um B é dois A’s, então dois B’s seriam quatro A’s, porque seria a multiplicar os dois por dois é quatro*” (cf. Anexo J). É de frisar que aplica sistematicamente a representação matemática: o número de metades de quadrado é o dobro do número de quadrados, o que demonstra uma relação clara metade dobro “*tem de ser o dobro porque dividi ao meio os quatro quadrados pequenos*” (cf. Anexo J).

2.4.2. Tarefa de resolução

A tarefa de resolução consistiu em duas partes, como mostrado na Figura 7. Na primeira parte da tarefa, “consegues imaginar como é que eu fiz este quadrado a partir do primeiro?”, são mobilizados conhecimentos de figuras geométricas. Na segunda parte, a questão “tomando como unidade de medida a área do quadrado gigante, que fração representa a medida da área da figura (com fundo branco) que está no seu centro?”, tem como tema área, envolvendo números racionais, com o sentido de representação de medidas de área. É de notar que os discentes só tiveram contacto com a segunda questão proposta, após a resolução da primeira. Em cada momento de resolução, foi disponibilizado um conjunto de imagens iguais às do enunciado de cada uma das partes da tarefa, a que os participantes poderiam recorrer para mostrar o seu raciocínio.

Este é outro quadrado que desenhei usando o anterior.

1. Consegues imaginar como é que eu fiz este quadrado a partir do primeiro?
Podes usar desenhos para auxiliar a tua explicação.

2. Tomando como unidade de medida a área do quadrado gigante, que fração representa a medida da área da figura (com fundo branco) que está no seu centro?
Explica como pensaste (podes usar desenhos para auxiliar a tua explicação).

Figura 7. Enunciado da tarefa de resolução aplicada a 14/05/2019

2.4.2.1. Primeira parte da tarefa

Na resolução da primeira parte da tarefa a **Ilda** rodou e sobrepôs o quadrado original no quadrado gigante, para a determinar o número de figuras originais que formam o quadrado gigante. A aluna identificou as partes do quadrado gigante que correspondiam aos triângulos A, B e C do quadrado original e referiu que a figura foi construída por quatro quadrados originais (cf. Figura 8). Como resposta à pergunta de verificação (cf. Anexo O), que consistiu na alteração da imagem, aplicou as mesmas relações matemáticas de antes: manipulou a figura original (rodou e deslizou), para determinar como o quadrado gigante era composto.

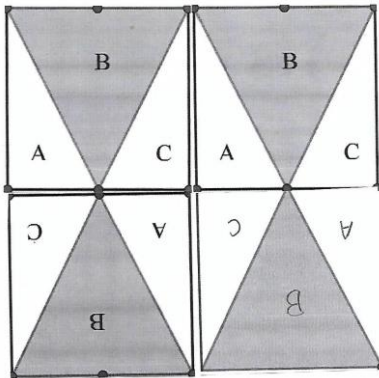


Figura 8. Resolução da primeira parte da tarefa de resolução da Ilda a 14/05/19

Por sua vez, o **David** começou por dobrar o quadrado gigante em quatro partes iguais, visualizando a figura original. Referiu que obteve o quadrado gigante a partir de 4 quadrados originais, compondo o mesmo através do desenho da figura original (cf. Figura 9). Por fim, afirmou que o quadrado gigante é quatro vezes maior do que o quadrado original e que o quadrado original corresponde à quarta parte do quadrado gigante.

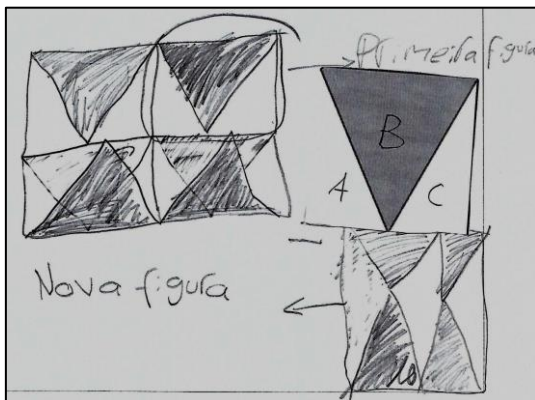


Figura 9. Resolução da primeira parte da tarefa de resolução do David a 14/05/19

Na entrevista o **David** identifica o tema e os dados, assim como a **Ilda**.

Quando a **Ilda** afirma “eu peguei num quadrado [original] e pus em todos os lados do quadrado grande” (cf. Anexo I) e quando o **David** transmite “eu comecei a dobrar [o quadrado gigante] ... em quatro” (cf. Anexo J), ambos mostram um modelo mental através da ação sobre objetos físicos, o que corresponde à categoria do **Representar**, definida pelos autores.

No **Processar**, a aluna infere as relações matemáticas que lhe permitem determinar a solução, em que a relação que estabelece implica identificar em quantas partes iguais a figura é composta e aplica as relações matemáticas identificadas anteriormente (contexto de pavimentação), veja-se o exemplo, “*é a mesma coisa só que a figura é virada ao contrário. Mas aqui, nas partes de cima, a figura está virada ao contrário da figura original e nas partes de baixo está para cima*” (cf. Anexo I), e identifica os conceitos relacionados com o processo que usou para resolver o problema. Já o **David** infere as relações matemáticas através do desenho das figuras originais para compor o quadrado gigante (figura 9) e explicita o que descobre naquilo que visualiza: “**David.** *Fiz os quadrados anteriores multiplicando-os muitas vezes*” (Anexo J).

Os alunos encontram-se no processo de **Executar** quando, por exemplo, a **Ilda** determina a solução, explicitando a contagem e a simetria, determina dados através das relações matemáticas que infere da imagem e aplica-as: “*eu primeiro não estava a ver, mas quando disse que usámos o anterior, eu peguei num quadrado dos pequeninos e fui juntando [pavimentou, usando 4 quadrados originais, rodando-os]*” (cf. Anexo I). O **David** aplica a representação matemática de relação quádruplo e quarta parte e determina a solução a partir das relações que infere da imagem, explicitando a multiplicação da figura original pelo número de vezes que é repetida. Porém, não identifica as simetrias que o quadrado original sofreu para formar o quadrado gigante:

Inv. Como é que eu construí esta figura?

David. Multiplicando por quatro.

Inv. Multiplicando por quatro, só isso? Como é que eu consegui que ela tivesse esta forma?

David. Não sei...

(cf. Anexo J)

2.4.2.2. Segunda parte da tarefa

Na sua resolução, a **Ilda** identifica cada triângulo e o losango por uma letra, afirmando que o fez para facilitar a referência à unidade de medida. Afirma que terá de descobrir a área do losango do meio. E refere a necessidade de pensar que a figura (quadrado gigante) está dividida em partes. Identifica que o quadrado gigante é composto por 8 triângulos e, logo de seguida, refere que a fração que representa a área das figuras

B, C, D e E é um sétimo. Afirma que o quadrado é composto por sete figuras e que o losango corresponde a dois sétimos do quadrado gigante, pois é composto por dois triângulos (cf. Figura 10). Como resposta ao problema de verificação, em que a figura foi alterada (cf. Anexo O), a discente aplica o mesmo processo.

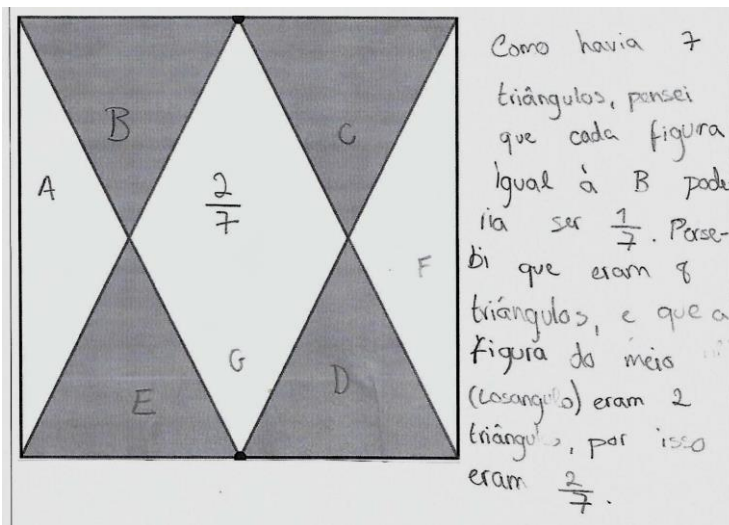


Figura 10. Resolução da segunda parte da tarefa de resolução da Ilda a 14/05/19

Na sua resolução, o **David** refere imediatamente que vai determinar quantos losangos compõem a figura. Visualiza os eixos de simetria horizontais e verticais do losango e manipula os triângulos sombreados, unindo os lados menores de cada um, determinando que assim formam um losango. Conta quantos losangos pavimentam o quadrado gigante e refere que o painel é composto por quatro losangos, indicando que a área do losango do centro é um quarto da área do painel (cf. Figura 11). Quando é aplicada a questão de verificação (cf. Anexo O), o participante aplica o mesmo processo.

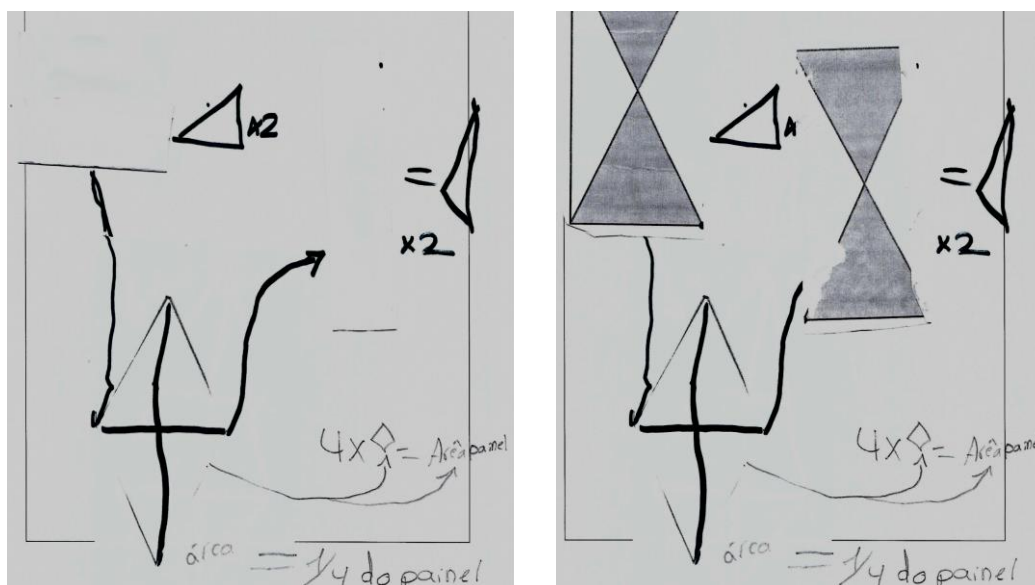


Figura 11. Resolução da segunda parte da tarefa de resolução do David a 14/05/19

No que concerne à segunda parte da tarefa de resolução, no **Descodificar**, ambos os participantes identificam dados e a incógnita. A **Ilda** explicita o tema do problema como “contagens” (cf. Anexo I), contudo, o tema identificado deveria ser área ou frações.

Nenhum dos participantes explicita processos que correspondem à categoria de **Representar**, ou seja, talvez se possa inferir que o modelo mental foi ultrapassado, eventualmente por já terem analisado a imagem em questão, aquando da resolução da primeira parte da tarefa.

Relativamente ao **Processar**, ambos os participantes identificam conceitos relacionados com o processo que usaram para resolver o problema. A **Ilda** infere as relações matemáticas que lhe permitem chegar à solução (unidade de medida):

Inv. O que é que pensaste que te levou a anotar essas letras?

Ilda. Eu tive de escrever as letras para que quando escrevesse o texto soubesse qual era a figura que eu teria de dizer que era a unidade de medida.

Inv. Ok. Como é que sabias onde escrever as letras?

Ilda. Porque são os triângulos.

Ilda. Temos de pensar que a figura está dividida em partes certo?

(cf. Anexo I)

O **David** infere as relações matemáticas que lhe permitem chegar à solução, que implicam determinar em quantas partes iguais a figura é composta, aplicando a contagem pela correspondência de 1 para 1:

David. Eu vou ver quantas vezes é que [losangos] estão aqui.

(. . .)

David. Isto [triângulo correspondente a B] mais isto [triângulo correspondente a B], mais ou menos como fiz na outra, é juntar as pontas [uniu os menores lados de dois triângulos B].

Inv. Estás a enrolar a figura e a unir as pontas e assim vês que...

David. Eu vou ver quantas vezes é que estão aqui [quantos losangos compõem o quadrado gigante]. Uma, duas, três e quatro, estão quatro.

Inv. Eu não percebi podes explicar melhor?

(cf. Anexo J)

Na categoria **Executar**, a **Ilda** determina a solução a partir das relações que infere (pavimentação). No entanto, não identifica o número de figuras congruentes que formam o quadrado gigante e mobiliza erradamente o número de figuras equivalentes que formam o quadrado gigante, que identificou primeiramente (cf. Figura 8). O **David** determina a solução a partir das relações que infere: “**Inv.** Qual é a medida da área desta figura? **David.** Eu sei que é quatro figuras. **Inv.** Mas nós queremos saber qual é a área desta. **David.** É um quarto do painel” (cf. Anexo J).

2.4.3. Síntese geral dos resultados

Importa discriminar os processos identificados e a sua correspondência com as categorias operacionais de Singer e Voica (2013) e conseqüentemente discutir as relações estabelecidas entre os processos e as categorias. Nesse sentido são apresentadas duas tabelas estabelecendo uma correspondência entre os processos explicitados pelos alunos e as categorias operacionais do modelo seguido. Foram selecionadas evidências do discurso dos participantes para ilustrar cada processo.

A Tabela 5 contém as evidências dos processos seguidos na formulação dos problemas. A Tabela 6 contém as evidências dos processos seguidos na resolução dos problemas.

Apresenta-se, de seguida, os resultados referentes aos problemas formulados pelos alunos, tendo como ponto de partida a imagem de uma composição geométrica, que constam na Tabela 5. Após a invenção dos problemas, foi solicitado que os participantes procedessem à resolução dos mesmos, tendo sido, na fase de resolução, disponibilizado um conjunto de imagens iguais à do enunciado, às quais os participantes puderam recorrer para mostrar o seu raciocínio.

Descodificar

Relativamente à primeira categoria, pode-se observar que de um modo geral, os alunos conseguem identificar o tema, os dados e a incógnita. Nos dois problemas formulados pelo **David**, as duas últimas colunas, ao responder à pergunta sobre a identificação do tema, diz que cada um dos problemas é sobre o A. Na interpretação que se pode fazer parece que tanto num problema como no outro, o triângulo A tem a mesma função, serve de unidade. Daí considera-se que a sua resposta se enquadra de algum modo na identificação dos dados.

Representar

Verifica-se que em todos os casos há uma explicitação de uma ação exercida sobre os objetos. Pode-se, então, reconhecer que os dois alunos recorreram aos materiais disponibilizados para explicitar o seu modo de resolução. Singer e Voica (2013) interpretam esta manipulação como uma forma de manifestar o modelo mental que visa a resolução do problema.

Processar

Relativamente à categoria Processar, tendo em conta que Singer e Voica (2013) afirmam que o modelo matemático é definido por conceitos, processos e técnicas próprias da Matemática, tomou-se a decisão de questionar os alunos quanto aos conceitos que estes relacionavam com a resolução do problema. Os conceitos que foram capazes de identificar são coerentes com as relações matemáticas explicitadas para resolver o problema. O **David** identifica o conceito de eixo de simetria, ao qual recorreu quando dobrou a figura B ao meio.

Executar

No que diz respeito à categoria Executar, Singer e Voica (2013) referem que o indivíduo implementa um conjunto de procedimentos matemáticos específicos associados às representações matemáticas, que permitem encontrar a solução do problema. Na tabela 5, a categoria Executar encontra-se subdividida em dois processos: (i) obtém a solução ao mesmo tempo que identifica as relações matemáticas; (ii) executa um procedimento. A inclusão do primeiro processo (i) deve-se ao facto dos alunos terem obtido a solução aos problemas que formularam ao mesmo tempo que explicitavam as relações matemáticas, não tendo propriamente executado nenhum procedimento. Esta é uma possibilidade que não foi tida em consideração por Singer e Voica (2013).

Os alunos só executaram um procedimento quando foram confrontados com o problema de verificação colocado pela investigadora, para verificação das respostas dadas anteriormente. O facto de a figura desse problema de verificação ser mais exigente, poderá ter sido a razão para os alunos explicitarem um procedimento.

Apresenta-se agora os resultados analisados na resolução da tarefa proposta pela investigadora e que se encontram na tabela 6. A tarefa de resolução consistiu em duas perguntas sobre uma imagem de uma composição geométrica, em que os discentes só tiveram contacto com a segunda questão, após a resolução da primeira. Em cada momento de resolução, foi disponibilizado um conjunto de imagens iguais às do enunciado, a que os participantes poderiam recorrer para mostrar o seu raciocínio.

Descodificar

Ambos os alunos identificam o tema e os dados. Na segunda parte do problema, a questão sobre a identificação do tema não foi colocada ao **David**.

Na primeira parte da tarefa, ao perguntar-se quais são os dados importantes, a **Ilda** responde que o quadrado gigante foi composto por quatro dos quadrados originais, (os da tarefa de formulação realizada previamente). Está a dizer que o dado importante é aquele que está na própria pergunta, isto é, que o quadrado gigante foi contruído a partir do anterior. Ela acrescenta que são quatro os quadrados, o que não é um dado, mas sim uma conclusão da aluna, fazendo parte da resposta ao problema. A identificação da incógnita

não está presente na primeira parte da tarefa, mas na segunda parte está, porque só aí os participantes foram questionados diretamente. O **David** explicita-a claramente, mas a **Ilda** não.

Representar

Na categoria Representar, na primeira parte da tarefa, os alunos explicitam os processos de ação sobre objetos físicos e de desenho de figuras. A **Ilda**, mais uma vez, recorreu à manipulação dos objetos disponibilizados, para explicitar o seu modo de resolução. Por sua vez, o **David** recorreu ao desenho para representar o modelo mental que o pode conduzir à resolução do problema.

Na segunda parte da tarefa, nenhum dos alunos manifesta processos que estejam dentro da categoria Representar, passando imediatamente a explicitar as relações matemáticas, tal como Singer e Voica (2013) referem quando dizem que os alunos podem ultrapassar o modelo mental e identificar o modelo matemático.

Processar

Na categoria Processar ocorrem duas situações distintas, no que se refere à primeira parte da tarefa. A **Ilda** consegue responder à pergunta sem recorrer a linguagem matemática. A sua explicitação do modelo mental foi considerada suficiente como resposta ao problema. No entanto, o **David** explicita as relações matemáticas e faz uso delas para resolver o problema.

Na segunda parte da tarefa, ambos os alunos foram capazes de identificar e de explicitar conceitos matemáticos coerentes com as relações matemáticas explicitadas para resolver o problema. A **Ilda** identifica frações e contagens. No entanto, recorre ao número de figuras em que o quadrado gigante estava dividido (6 triângulos e 1 losango) como se fossem equivalentes, para obter a fração que representa a área de cada uma dessas figuras (um sétimo). Esta é a relação matemática que ela explicita, ainda que não seja a correta. O **David** identifica os conceitos de área e de eixo de simetria. Ele estabelece uma relação entre a área do quadrado gigante e a área do losango. O aluno, compõe triângulos a partir da identificação dos eixos de simetria horizontais e verticais do losango.

Executar

Relativamente ao Executar, quanto à primeira parte da tarefa, já acima se mencionou que a **Ilda** apresentou a sua resposta baseada apenas no modelo mental. O **David** obteve a solução ao mesmo tempo que identificou as relações matemáticas do problema. Como se pode ver na Tabela 6, é igual o excerto retirado do diálogo que está no Processar e no Executar.

Na segunda parte da tarefa, a resposta da **Ilda** é coerente com as relações matemáticas que infere erradamente, ao pressupor que a figura é composta por sete partes equivalentes. O **David** estabelece relações matemáticas para responder à pergunta, refere que sabe que o quadrado gigante é composto por quatro figuras e relaciona o quádruplo com um quarto, afirmando que o losango é um quarto do painel. O **David** também executa um procedimento: conta o número de losangos que compõem o quadrado gigante.

Tabela 5.

Tabela síntese da tarefa de resolução de problemas

Tarefa de Formulação					
		Qual é a área do triângulo B sabendo que o triângulo A tem como área 3?	Qual é o perímetro da figura B, sabendo que a figura A é 7?	Quantas figuras A se precisam para fazer uma figura B?	Quantas figuras A se precisam para fazer o painel?
DESCODIFICAR Identifica o/a (s)	Contexto geral			(. . .) a geometria é assim.	
	Tema	A área. [Ilda.]	É o perímetro. [Ilda.]	É sobre a área. [David.]	É sobre a área. [David.]
	Dados	O triângulo A tem como [área] 3. [A área do] triângulo C é igual a A. [Ilda.]	O triângulo C tem como perímetro 7 [Ilda.]	Cada um dos meus problemas é sobre o A. [A figura A] É igual ao C. [David.]	Cada um dos meus problemas é sobre o A. [A figura A] É igual ao C. [David.]
	Incógnita	Queremos saber qual é a área do triângulo B. [Ilda.]	Queremos saber qual é o perímetro do triângulo B. [Ilda.]	Quantas figuras A se precisam para fazer uma figura B. [David.]	Quantas figuras A se precisam para fazer o painel. [David.]
REPRESENTAR Efetua um(a)	Ação sobre objetos físicos	Eu dividi [traçou um eixo de simetria] o B e vi que se juntarmos A e C, que estes dois são iguais [sobrepôs A e C]. [Ilda.]	Eu cortei a figura, como cortei todas as figuras. Cortei assim a C, a B e a A e depois vi que a C tinha 7 de perímetro [sobrepôs C em A]. [Ilda.]	Parti B ao meio [dobrou B num eixo de simetria]. [David.]	(. . .) Se tinha imensos A's podia pô-los em cima de B e ver quantos cabiam. [David.]
	Referência a possíveis ações				Se tinha imensos A's, podia pô-los em cima do painel e ver quantos cabiam. [David.]
	Desenho das figuras/esquemas				
PROCESSAR Identifica / infere	Conceitos relacionados com o processo para resolver o problema	A área e a adição. [Ilda.]	O perímetro e a adição. [Ilda.]	Multiplicação e figuras. Os eixos de simetria que tenho. [David.]	Multiplicação e figuras. Os eixos de simetria que tenho. [David.]
	Modelo matemático/ Relações matemáticas	A [área] do A é 3 e o triângulo C é igual a A, por isso são os dois 3 e depois vi que metade do triângulo B é um triângulo A ou C (. . .) metade do triângulo B é igual a um	A [área de] B é o dobro da figura C, ou seja, este [A] é a metade deste [B]. A B é o dobro da [da área de] A e da C, então temos de	Vejo metades. Vi um x de multiplicação. [David.]	Sim. Mas tem de ser o dobro porque dividi ao meio os quatro quadrados pequenos. [David.]

		A e a outra metade é igual a um C. Então, se juntarmos, como os dois têm 3 de área. [Ilda.]	juntar para saber o perímetro da B. [Ilda.]		Eu já sei que o B é dois A's, então, se aqui está um B mais dois A, seriam dois B's. E um B é dois A's, então dois B's seriam quatro A's, porque seria a multiplicar os dois por dois é quatro. [David.]
EXECUTAR	Obtém a solução ao mesmo tempo que identifica as relações matemáticas	Metade do triângulo B é igual a um A e a outra metade é igual a um C. Então, se juntarmos são 6 [B tem 6 unidades de área]. [Ilda.]	Porque como eu disse, a figura A e a C são metade da B, portanto é o dobro (. . .) [Ilda.]	Eu multipliquei. (. . .) fiz a mesma figura: os dois A's juntos, formam a figura B. É mais ou menos igual. [O A teve de multiplicar] Duas vezes. (. . .) Porque eu vi logo que era metade, porque o triângulo B faz um triângulo grande, porque a geometria é assim. [David.]	Eu já sei que o B é dois A's, então, se aqui está um B mais dois A, seriam dois B's. E um B é dois A's, então dois B's seriam quatro A's, porque seria a multiplicar os dois por dois é quatro. [David.]
	Executa um procedimento				

Tabela 6.

Tabela síntese da tarefa de formulação de problemas

Tarefa de Resolução		
		<p>Consegues imaginar como é que eu fiz este quadrado a partir do primeiro?</p> <p>Tomando como unidade de medida a área do quadrado gigante, que fração representa a medida da área da figura (com fundo branco) que está no seu centro?</p>
DESCODIFICAR Identifica o/a (s)	Tema	<p>Simetrias. [Ilda.] É sobre figuras. [David.]</p>
	Dados	<p>É o quadrado, é a figura. [David.] Que esta figura foi construída por quatro quadrados dos de antes. [Ilda.]</p>
	Incógnita	<p>A medida da área da figura grande do meio. [David.] Qual era a unidade de medida de área, para saber o que era o losango do meio. [Ilda.]</p>
REPRESENTAR Efetua um(a)	Ação sobre objetos físicos	<p>O primeiro eu pus aqui assim e virei e percebi logo que dava. [Ilda.] Eu peguei num quadrado dos pequeninos e fui juntando. [Ilda.] Eu vi e depois dobrei um pouco. [David.]</p>
	Referência a possíveis ações	
	Desenho das figuras/esquemas	<p>Eu pensei no desenho. [David.] Desenhei. [David.] Eu vi e depois dobrei um pouco. Era a primeira [a figura original]. [David.]</p>
PROCESSAR Identifica / infere	Conceitos relacionados com o processo para resolver o problema	<p>Simetria. [Ilda.]</p>
	Modelo matemático/ Relações matemáticas	<p>[O quadrado original] Que era uma quarta parte do novo. Quatro vezes esse é o desenho novo [quadrado gigante]. [David.] Eu primeiro não estava a ver, mas quando disse que usámos o anterior, eu peguei num quadrado dos pequeninos e fui juntando e percebi que havia 4 [quadrados originais]. [Ilda.]</p>
		<p>A área, os eixos de simetria e não sei. [David.] As frações, as contagens mais nada. [Ilda.]</p> <p>Eu vou ver quantas vezes é que estão aqui [quantos losangos compõem o quadrado gigante]. [David.] Como havia 7 triângulos, pensei que cada figura igual à B poderia ser um sétimo. [Ilda.]</p>

EXECUTAR	Obtém a solução ao mesmo tempo que identifica as relações matemáticas	<p>[O quadrado original] Que era uma quarta parte do novo. Quatro vezes esse é o desenho novo [quadrado gigante]. [David.]</p> <p>Eu primeiro não estava a ver, mas quando disse que usámos o anterior, eu peguei num quadrado dos pequeninos e fui juntando e percebi que havia 4 [quadrados originais]. [Ilda.]</p>	<p>Percebi que eram 8 triângulos e que a figura do meio, o losango, eram dois triângulos, por isso eram dois sétimos. [Ilda.]</p> <p>Eu sei que é quatro figuras [losango]. É um quarto do painel. [David.]</p>
	Executa um procedimento		<p>Uma, duas, três e quatro, estão quatro [losangos]. [David.]</p> <p>São dois doze avos. Porque havia 12 figuras e aquelas eram duas só. [Ilda.]</p>

2.5. Conclusões

O presente estudo teve como objetivo descrever e compreender *os processos de resolução e de formulação de problemas* à luz do modelo de análise proposto por Singer e Voica (2013). O estudo teve uma natureza qualitativa, tendo sido recolhidos dados a partir da realização de duas tarefas: uma de formulação e outra de resolução de problemas. As tarefas foram aplicadas a alunos do 3.º ano de escolaridade, no contexto de uma entrevista em profundidade a cada um dos dois alunos, individualmente.

O modelo de análise utilizado permitiu agrupar os processos que os alunos explicitaram quando realizaram os problemas de formulação e de resolução. Esses processos foram agrupados em categorias operacionais, que auxiliaram na identificação das principais etapas de resolução de problemas, tornando a análise das evidências do pensamento dos discentes mais clara e objetiva.

Foi considerado pertinente relacionar alguns tipos de processos que Singer e Voica (2013) categorizam, com a natureza das representações: ativas, icónicas e simbólicas (Ponte & Serrazina, 2000). Na categoria Representar, Singer e Voica (2013) afirmam que o modelo mental pode ser expresso através de ações (representações ativas) e desenhos (representações icónicas). Na categoria Processar, os autores indicam que o modelo matemático e/ou relações matemáticas são descritas ou representadas através da mobilização de linguagem matemática (representações simbólicas).

Foi possível discriminar e compreender os processos explicitados pelos alunos, o que permitiu perceber que, ao longo da realização de um problema, os alunos:

- i) identificam o tema, os dados, a incógnita, que correspondem a processos da categoria Descodificar;
- ii) manifestam o modelo mental que visa a resolução do problema através de uma ação sobre objetos físicos, uma referência a possíveis ações, um desenho de figuras/esquemas, que correspondem a processos da categoria Representar;
- iii) identificam/inferem relações matemáticas para resolver um problema, processos que se enquadram na categoria Processar;

- iv) obtêm a solução para o problema ao mesmo tempo que identificam as relações matemáticas e executam um procedimento, processos que correspondem à categoria Executar.

Assim, o estudo realizado permitiu perceber o quão importante é cada categoria operacional para a resolução dos problemas.

Recorrendo ao modelo de análise, foi possível identificar os conhecimentos não consolidados pelos alunos. Exemplo disso foi o caso da **Ilda**, quando inferiu relações matemáticas entre o perímetro e a área, afirmando que ao dobro da área corresponde o dobro do perímetro. Esta situação corresponde àquilo que os autores procuravam num modelo de análise. Os investigadores desejavam um modelo de análise que permitisse aos professores a análise das resoluções dos alunos, identificando pontos críticos sobre os quais poderiam / deveriam incidir as tarefas de resolução ou de formulação de problemas que construíssem para os seus alunos.

Aparentemente os enunciados das tarefas influenciam os processos que os alunos utilizam quando resolvem os problemas. Dessa forma, há categorias que podem ser consideradas mais relevantes do que outras para a resolução de cada problema proposto.

Neste sentido, uma componente fulcral dos resultados relacionou-se com o facto de as tarefas propostas terem sido ótimas para realçar a explicitação de modelos mentais, assim como para realçar a correspondência destes (modelos mentais) com as relações matemáticas. Os alunos construíam um modelo mental, através do qual inferiam relações matemáticas para resolver o problema. Como aconteceu na realização da primeira parte da tarefa de resolução, quando o **David** dobrou o quadrado gigante e visualizou o quadrado original. Logo de seguida, afirmou que o quadrado original era uma quarta parte do quadrado gigante. Com esta situação foi possível afirmar que o material manipulável distribuído foi essencial para que os participantes explicitassem a construção dos seus modelos mentais que, por sua vez, permitiram inferir relações matemáticas para resolver o problema.

Ainda, quanto ao Representar, na segunda parte da tarefa de resolução, afigurou-se que os alunos tinham resolvido o problema sem identificar um modelo matemático. Nesse sentido foram aplicadas perguntas de confirmação, de modo a verificar que os alunos não tinham necessitado de descobrir relações matemáticas ou de identificar um modelo matemático para resolver o problema.

De facto, para as tarefas que se escolheu aplicar, a categoria do executar não é muito significativa. Porém, aquando da análise dos processos que correspondem a esta categoria, incluiu-se um processo que não foi tido em consideração por Singer e Voica (2013). Este processo identificado consistiu na obtenção da solução do problema ao mesmo tempo que se explicitou as relações matemáticas, não tendo sido, propriamente, executado nenhum procedimento.

De entre as quatro categorias delineadas por Singer e Voica (2013), destaca-se, especificamente, para este problema a categoria Representar e a relação entre Representar e Processar. Quando os solucionadores têm um modelo mental claro, conseguem definir relações matemáticas para resolverem o problema. Ao observar e analisar o processo de resolução de uma criança, é possível afirmar-se, por exemplo, que ‘ela está a tentar inferir relações matemáticas a partir da ação que realiza’.

Imagine-se que um aluno faz referência a ações, efetua um esquema ou realiza ações físicas sobre objetos (categoria Representar). Ao conseguir identificar uma representação matemática, passa a encontrar-se na etapa de Processar. Também acontece os solucionadores não precisarem de efetuar um modelo mental, quando já conhecem uma relação matemática para a tarefa a realizar. Nesses casos, a identificação da relação matemática que permite a resolução do problema é imediata.

Efetivamente, a interpretação dos processos evidenciados pelos solucionadores pode permitir identificar as relações estabelecidas entre conhecimentos, inclusivamente, dificuldades de aprendizagem e conhecimentos não consolidados. É fulcral a interpretação dos processos para que se adeque o processo ensino-aprendizagem, inclusive através da formulação de problemas específicos para desenvolvimento dos processos envolvidos numa determinada categoria (Descodificar, Representar, Processar e Executar). Como referido por William (2007), na avaliação formativa, “a evidência

sobre a aprendizagem dos alunos é usada para ajustar o ensino de modo a ir ao encontro das suas necessidades” (p. 191), com o intuito de uma diferenciação pedagógica.

A acrescentar que a investigação tem mostrado que a formulação de problemas é um ótimo instrumento para a avaliação do conhecimento dos alunos.

Nesse seguimento, na medida em que na generalidade os discentes formulam problemas sobre temas que dominam, propôs-se, para além de uma tarefa de formulação, outra de resolução. Assim, seria possível determinar se os discentes dominavam determinados conhecimentos matemáticos. Após a análise dos dados obtidos, determinou-se que o conhecimento de perímetro não se encontrava consolidado pela **Ilda**. Todavia, permaneceram desconhecidas as relações entre o perímetro e a área que o **David** estabelece. Tornou-se perceptível que se deveria ter preparado uma outra parte da tarefa de resolução, que tivesse como tema o perímetro.

Não obstante, de forma a conferir maior complexidade e acuidade ao estudo, seria pertinente obter um maior número de evidências, que permitissem uma maior discussão e compreensão das categorias operacionais e que, portanto, permitisse uma compreensão mais profunda dos processos de resolução e de formulação de problemas.

Quanto à validade do estudo, considera-se que o facto de se ter transcrito as entrevistas e de, seguidamente, se ter apurado e depurado o seu conteúdo, por repetida audição das mesmas, trouxe validade ao estudo. No entanto, uma outra técnica que seria benéfica para a validação do mesmo passaria pela análise das entrevistas por diversos indivíduos, o que permitiria cruzar dados e estabelecer comparações em relação às diversas interpretações.

REFLEXÃO FINAL

Após terminar o percurso realizado durante a prática pedagógica no 1.º CEB e no 2.º CEB, importa atentar algumas considerações reflexivas, na medida em que, segundo Marques et al. (2007) “ser professor reflexivo significa ser um profissional que reflecte [*sic*] sobre o que é, e o que realiza, o que sabe e o que ainda procura” (p. 132). É de frisar que nos estágios curriculares realizados me deparei com desafios, que aliados à reflexão me conduziram à construção de um ideal da profissional que ambiciono ser. De facto, estas experiências são o primeiro contacto que se tem com o saber profissional específico e apoiam à construção da identidade profissional (Mesquita-Pires, 2008).

Ao longo das práticas ocorreram diversas situações que requereram a improvisação e a aplicação de soluções imediatas. Através destas verifiquei e vivenciei que “a capacidade de improviso e de resposta a situações inesperadas por parte do professor é decisiva” (Ponte, Quaresma & Pereira, 2015). Pois, nem sempre as situações se processam da forma como as previmos. Porém, tal não descarta uma preparação adequada das aulas, antes pelo contrário, pois só se consegue improvisar corretamente sobre os temas que se dominam.

Sabemos que determinados aspetos da preparação efetuada necessitam de ajustes, conforme as necessidades ditadas pelas circunstâncias e pela realidade da sala de aula. Ainda, no que concerne à relevância da construção sistemática de planificações e de reflexões antes, durante e após a concretização das primeiras (Shon, 2000), o conjunto das ocorrências que tomaram lugar ao longo da intervenção dotaram-me da progressiva consciencialização da importância da prática do exercício de (i) preparar previamente as aulas e de antever possíveis respostas dos alunos às minhas questões, de (ii) preparar e realizar uma moderação da dinâmica de sala e de estratégias que permitam aos alunos o desempenho de um papel ativo e de (iii) realizar uma introspeção constante e sistemática, por forma a efetuar um balanço do trabalho desenvolvido e a, conseqüentemente, evoluir como profissional de educação. Como Roldão e Leite (2012) afirmam: “o conhecimento profissional não se reduz, portanto, ao saber fazer”, uma vez que implica também “o saber fazer, saber como fazer, e saber porque se faz” (p. 483).

Quanto a esta última, à reflexão sobre a reflexão na ação, apercebi-me de que apesar da impossibilidade de prever todas as situações que possam ocorrer, a antecipação das intervenções dos alunos permite criar maior segurança no decorrer da discussão de tarefas. Principalmente, para nos dotarmos dos conhecimentos e da organização da sequência didática, para que, mesmo com percalços, consigamos dar continuidade às sessões de forma fluida, sempre adaptadas em função do grupo e da sua espontaneidade subjacente. Em complementaridade, esta antecipação permite, igualmente, a planificação do ensinar e do aprender, segundo uma abordagem mais construtivista, com enfoque nas aprendizagens dos alunos, através da promoção de situações que estimulem a construção do saber cooperativo e que permitam ultrapassar dificuldades (cf. Carvalho & Ponte, 2013). Ao longo das práticas foi-se tornando cada vez mais espontânea a observação das dinâmicas em sala de aula com “olhos de quem aprende” (NCTM, 2014), que, tal como mencionado previamente, me levou, por vezes, a desviar daquilo que estava planeado, visto ser necessário atender às necessidades e disposições dos alunos. Apercebi-me de que tais desvios podem passar pela seleção de uma outra tipologia de trabalho (individual, pares, grupo, coletivo), e por um outro tipo de questionamento e interação (Fernandes, 2017).

A acrescentar que o estudo que realizei me dotou de conhecimentos, tanto ao nível do questionamento, como da avaliação formativa. Apropriei-me de um questionamento direcionado para a recolha de evidências do pensamento e raciocínio dos alunos, o que nem sempre se mostrou algo fácil de aplicar. Por hábito, aplicava uma indagação dialógica, para que ocorresse argumentação e discussão em grupo (Wells, 1999) e provocava o pensamento das crianças através do questionamento, para que explicitem e justificassem as suas ideias (Ponte & Serrazina, 2000). Desenvolvi bases para a aplicação de avaliação formativa, na medida em que a compreensão dos processos explicitados pelos alunos me permitiu determinar o quão essencial é recolher evidências do pensamento dos alunos. O erro deve ser utilizado em sala de aula, do ponto de vista da aprendizagem (Pinto & Santos, 2006), no entanto, é fulcral perceber o que está por de trás do erro, para que, de facto, este seja usado no processo ensino-aprendizagem.

Considero que esta experiência de elaboração de reflexões me permitiu crescer substancialmente na minha prática. Quando releio as minhas reflexões noto que há um

distanciamento crítico em relação a diversos aspetos da minha intervenção, o que me auxilia a clarificar o caminho pedagógico a seguir (Niza, 2013). Foi após tal perceção que compreendi a necessidade de manter presente que a confusão ou frustração momentâneas e as dificuldades são etapas naturais e que precedem o recuperar do caminho por onde prosseguir. Acredito que é através da resiliência, que toma forma na reflexão e na tentativa de uma constante aprendizagem, que é o caminho (Folque, 2012). E que a transformação da minha identidade, enquanto futura profissional de educação passará por uma constante desconstrução e reconstrução dos meus princípios e estratégias educativas.

No estágio de 2.º CEB um professor sugeriu-me desenvolver uma relação mais próxima com os alunos, com base na premissa de “firmeza com delicadeza”. Assumo que no momento em questão não compreendi o porquê de dever mudar a minha interação com as crianças. No entanto, segui as orientações do professor e, através das brincadeiras com os discentes que decorreram nos recreios e em sala de aula e dos diálogos com os mesmos, após conflitos entre pares, em que procurei mostrar compreender os seus pontos de vista, verifiquei que a construção de uma vinculação com os alunos, isto é, a criação de uma relação positiva, num clima de confiança (Estrela, 2002) é essencial, inclusivamente, para a participação espontânea dos mesmos. Compreendi, vivenciando, que a relação pedagógica possui um forte valor emocional, que possibilita ao aluno a transferência e a construção do valor das suas vivências para a sala de aula. É de salientar, que esta experiência me permitiu evoluir, no que respeita à gestão do grupo, destacando a importância da nossa adaptação às características dos alunos e aos contextos em que exercemos a prática profissional.

Entende-se, portanto, a necessidade de continuar a desenvolver a capacidade de me organizar perante situações problemáticas, questionando-me de forma intencional e sistemática, para alcançar compreensão e solucionar os problemas com que me deparo.

Uma prática em que quero participar, por forma a progredir na minha profissionalidade e formação, passa pela participação em grupos cooperativos, uma vez que consistem em momentos de partilha, em que existe apoio e se reflete sobre diversos temas.

De acordo com o que foi referido, assume-se a identidade profissional como um processo social e humano (Sarmiento, 2015), uma vez que o desenvolvimento da mesma

é indissociável das características do indivíduo e das situações que vai experimentando ao longo da vida (Silva & Pereira, 2011). Neste sentido, conclui-se que a identidade profissional é algo que se vai construindo ao longo da vida por meio de exercícios de reflexão como o presente, ambiciono uma transformação no âmbito da minha identidade profissional, pelo que fica a intensão de continuar um percurso centrado na reflexão, na experimentação e no questionamento, sabendo que a formação inicial é apenas uma etapa desse mesmo caminho.

REFERÊNCIAS

- Abreu, M. (2006). O Tempo de Estudo Autónomo na aprendizagem da língua estrangeira: treinar, consolidar, aprofundar conhecimentos e competências. *Escola Moderna*, 27 (5), 8-51.
- Aires, L. (2015). *Paradigma qualitativo e práticas de investigação educacional*. Lisboa: Universidade Aberta.
- Amado, J. (2014). *Manual de Investigação qualitativa em Educação* (2.^a ed.). Coimbra: Imprensa da Universidade de Coimbra.
- Bardin, L. (2013). *Análise de conteúdo*. São Paulo: Edições 70.
- Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F. & Timóteo, M. C. (2013). *Programa de Matemática para o Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação/Direção Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular.
- Boavida, A. R., Paiva, A., Cebola, G., Vale, I. & Pimentel, T. (2008). *A Experiência Matemática no Ensino Básico: Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação/Direção Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular.
- Breyner, T. M. (2017). *O projeto*. Consultado a 15 de abril de 2019, em <https://www.opequenobuda.com/>
- Carvalho, R. & Ponte, J. P. (2013). Prática profissional para a promoção do cálculo mental na sala de aula: Uma experiência no 6.º ano. *Quadrante*, 22(2), 83-105.
- Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D. & Sriraman, B. (2005). An empirical taxonomy of problem posing processes. *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, 37(3), 149–158.
- Decreto-Lei nº 54/2018 de 06-07-2018 CAPÍTULO II - *Medidas de suporte à aprendizagem e à inclusão*, consultado em <https://dre.pt/application/conteudo/115652961>

- DGE (s.d.). Direção-Geral da Educação. *Programa Territórios Educativos de Intervenção Prioritária*. Lisboa. Obtido de <http://www.dge.mec.pt/teip>
- Direção Geral do Ensino Básico e Secundário. (1990). *Reforma Educativa: Ensino Básico: Programa do 1.º Ciclo*. Lisboa: Direção Geral do Ensino Básico e Secundário.
- Direção-Geral da Educação (DGE). (2018). *Aprendizagens essenciais | Articulação com o perfil dos alunos: 3.º ano / 1.º ciclo do ensino básico matemática*. Lisboa: República Portuguesa. Consultado em, http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/1_ciclo/matematica_1c_3a_ff_18de_julho_rev.pdf
- Estrela, M. T. (2002). *Relação Pedagógica, Disciplina e Indisciplina na Aula*. Porto: Porto Editora.
- Fernandes, M. d. (2017). *Interdisciplinaridade na aprendizagem na aprendizagem da Matemática*. Faculdade de Ciências e Tecnologias, Licenciatura em Gestão de Empresas. Lisboa: Universidade Nova de Lisboa.
- Flick, U. (2005). *Métodos Qualitativos na Investigação Científica*. Lisboa: Monitor.
- Folque, M. A. (2012). *Aprender a aprender*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.
- Folque, M. A. (2014). *O aprender a aprender no pré-escolar: o modelo pedagógico do Movimento da Escola Moderna* (2.ª ed). Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.
- Gaspar, L. B. (2003). *Auto-segregação Sócio-espacial em Lisboa*. Estudos Regionais, pp. 75-93.
- Lester, F. K. (1980). Research on mathematical problem solving. In R. J. Shumway (Ed.), *Research in Mathematics Education* (pp. 286–323). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Marchesi, A. (2006). *O que será de nós, os maus alunos?* Porto Alegre: Artmed.
- Marques, M., Oliveira, C., Santos, V., Pinho, R., Neves, I. & Pinheiro, A. (2007). O educador como prático reflexivo. *Cadernos de Estudo*, 6, pp. 129-142.
- Martinelli, S. d., & Sassi, A. d. (2010). Relação entre autoeficácia e motivação acadêmica. *Psicologia: Ciência e Profissão*, 30(4), pp. 780-791.

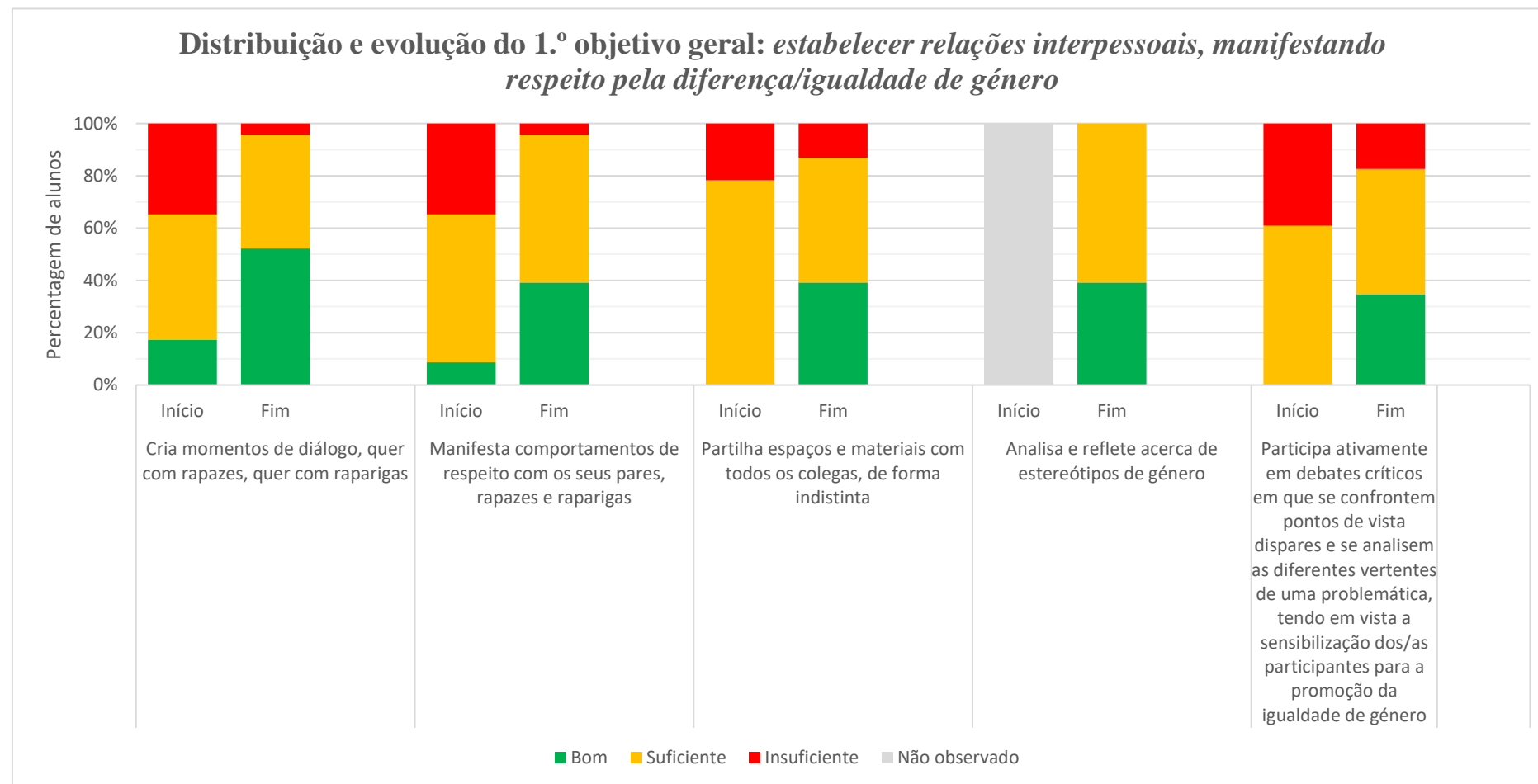
- Martins, G. O., Gomes, C. A. S., Brocardo, J. M. L., Pedroso, J. V., Carrilho, J. L. A., Silva, L. M. U., Encarnação, M. M. G. A., Horta, M. J. V., Calçada, M. T. C. S., Nery, R. F. V. & Rodrigues, S. M. C. V. (2017). *Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória*. Lisboa: Ministério da Educação/ Direção-Geral da Educação.
- Meirinhos, M. & Osório, A. (2010). O estudo de caso como estratégia de investigação em educação. *EDUSER: Revista de educação*, 2(2), 49-65.
- Mesquita-Pires, C. (2008). *Educador de Infância – Teorias e práticas*. Porto: Profedições.
- Miguel, R. R., Rijo, D., & Lima, L. N. (2013). Insucesso escolar e factores de risco do aluno – Validação de uma nova medida de auto-resposta numa amostra alargada de alunos do 2º e 3º ciclo do ensino básico. *Laboratório de Psicologia*, 11(2), pp. 143-161.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (1980). *An Agenda for Action: Recommendations for school mathematics of the 1980s*. Reston, VA: NCTM.
- NCTM (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- NCTM (2014). *Principles to Actions: Ensuring Mathematical Success for All*. Reston, VA: NCTM.
- Niza, I. (2013). A produção escrita dos professores e a prática educativa. *Escola Moderna*, 1, 6.ª série, 98-109.
- Pinto, J., & Santos, L. (2006). *Modelos de avaliação das aprendizagens*. Lisboa: Universidade Aberta.
- Polya, G. (1957). *How To Solve It: A new aspect of mathematical method (2nd)*. New Jersey: Press, Princeton University.
- Ponte, J. P. & Serrazina, M. (2000). *Didática da Matemática do 1º Ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.

- Ponte, J. P., Quaresma, M. & Pereira, J. M. (2015). É mesmo necessário fazer planos de aula?. *Educação e matemática*, (133), 26-35.
- Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H. M., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., ... Oliveira, P. A. (2007). Programa Matemática do ensino básico. Lisboa: Lisboa: Ministério da Educação/Direção Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular.
- Quivy, R. & Campenhout, L. V. (2017). *Manual de Investigação em Ciências Sociais*. Lisboa: Gradiva.
- Roldão, M. D. & Leite, T. (2012). O processo de desenvolvimento profissional visto pelos professores mentores. *Ensaio: Avaliação e Políticas Públicas em Educação*, 20(76), pp. 481-502.
- Rosa, N. S. & Mata, M. D. (2012). 12.º Colóquio Internacional de Psicologia e Educação: Educação, aprendizagem e desenvolvimento: Olhares contemporâneos através da investigação e da prática. *Motivação para a aprendizagem e percepção de clima de sala de aula em alunos do 2º ano de escolaridade*, (pp. 1169-1184).
- Sarmiento, T. (2015). Identidades Profissionais e Contextos de Trabalho na Educação de Infância. In F. Ferreira & C. Anjos (Eds.), *Educação de Infância: Formação, Identidades e Desenvolvimento Profissional* (pp. 69–86). Santo Tirso: De Facto Editores.
- Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). New York: MacMillan.
- Schoenfeld, A. H. (2013). Reflections on Problem Solving Theory and Practice. *TME*, 10, 9-32). Berkeley: University of California.
- Serrazina, L. (2015). Exames no final do 1.º e 2.º ciclos do ensino básico, para quê?. *Educação e matemática*, (133), 1.

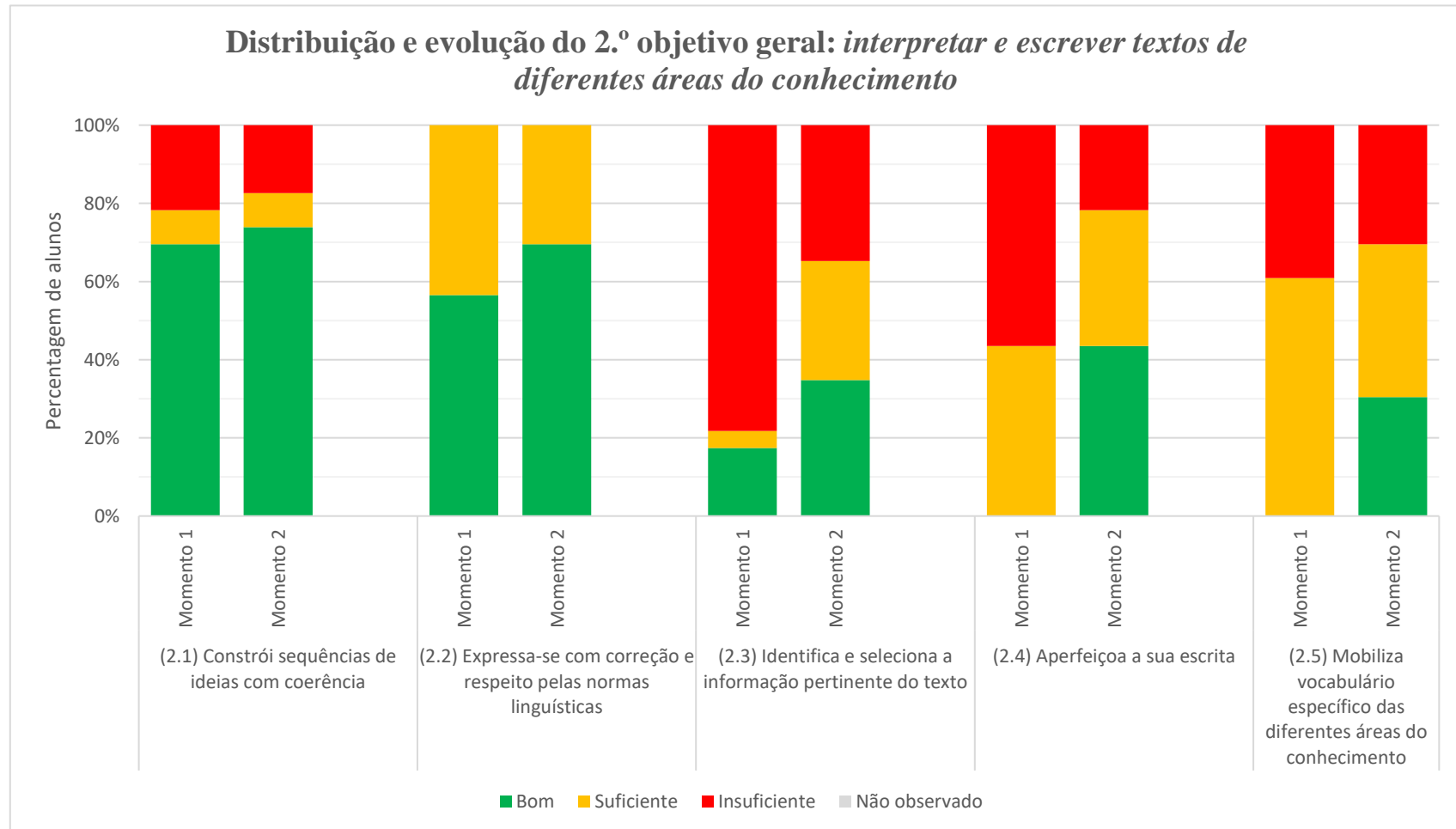
- Shon, D. A. (2000). *Educando o profissional reflexivo: um novo design para o ensino e a aprendizagem*. Porto Alegre: Artmed.
- Silva, M., & Pereira, F. (2011). Formação contínua de educadores de infância em contexto de trabalho: processos de formação. In *Atas do XI Congresso da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação* (pp. 547–552). Guarda: Instituto Politécnico da Guarda.
- Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 19-28.
- Singer, F. M. & Voica, C. (2013). A problem-solving conceptual framework and its implications in designing problem-posing tasks. *Educational Studies in Mathematics*, 83, 9–26.
- Stoyanova, E. & Ellerton, N. F. (1996). A framework for research into Students' problem posing in school mathematics. In P. C. Clarkson (Ed.), *Technology in mathematics education (Proceedings of the 19th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia)* (pp. 518–525). Melbourne: MERGA.
- Wells, G. (1999). The zone of proximal development and its implications for learning and teaching. In *Dialogic inquiry: Towards a sociocultural practice and theory of education* (pp.313-334). Cambridge: Cambridge University Press.
- William, D. (2007). Content then process: teacher learning communities in the service of formative assessment. In D. Reeves (Ed.), *The power of assessment to transform teaching and learning* (pp. 183-204). Bloomington, Ind.: Solution Tree Press.

ANEXOS

Anexo A. Gráfico de distribuição e evolução do 1.º objetivo geral da prática de 1.º ciclo



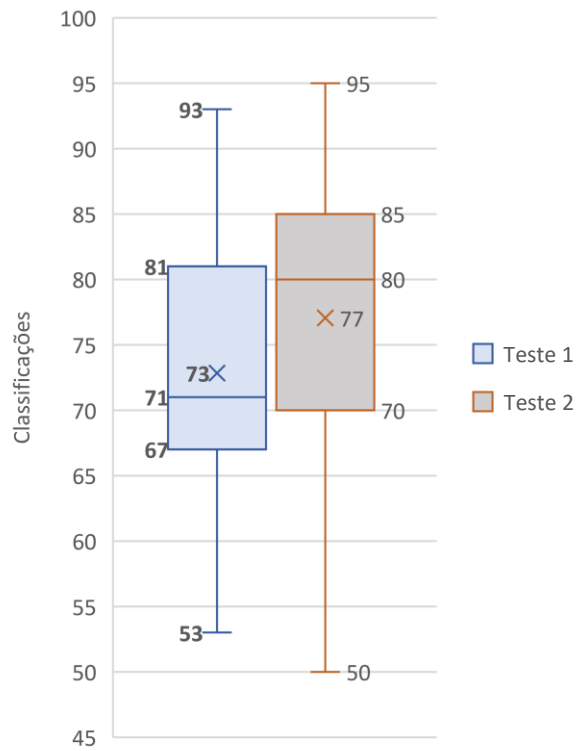
Anexo B. Gráfico de distribuição e evolução do 2.º objetivo geral da prática de 1.º ciclo



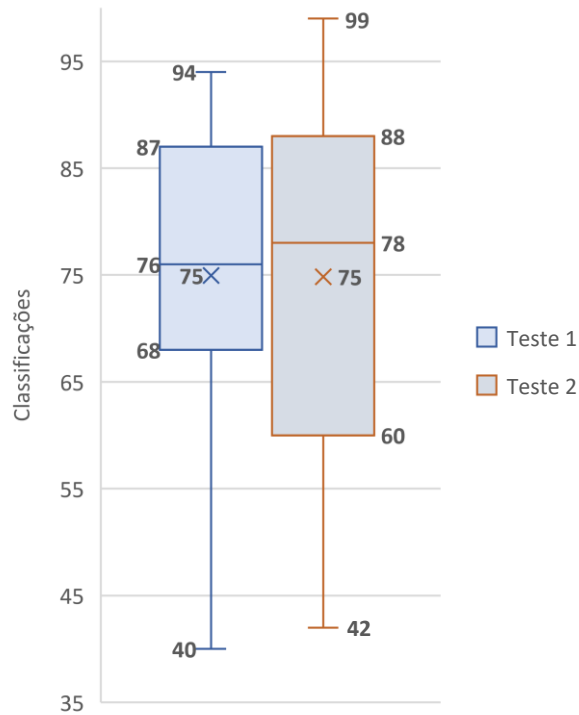
Anexo C. Organização tabelar e diagramas de extremos e quartis referentes aos dados recolhidos para avaliação das aprendizagens dos alunos na prática de 1.º ciclo

	Língua portuguesa		Matemática		Estudo do Meio	
	1	2	1	2	1	2
A	78	84	92	89	100	92
C	81	82	77	94	94	90
D.F	84	95	92	87	96	99
F.Ca	75	80	88	82	91	84
F.P	60	80	81	82	84	81
F.V	71	80	80	78	94	91
F.S	71	67	55	43	87	87
F.Co	93	74	87	94	88	99
Fr	72	64	74	52	74	77
G	83	77	64	92	98	96
I.Pa	67	72	81	71	94	79
I.Pa	86	93	94	99	91	99
J	59	85	49	55	86	81
La	79	84	89	88	89	92
Le	91	91	76	70	92	94
Mf	53	50	66	78	61	88
M.D	75	86	75	88	93	94
M.R	70	85	68	64	88	87
M	65	67	72	60	80	93
S	69	73	40	57	82	-
S.B	55	50	76	42	86	91
V.C	70	70	72	78	94	98
V.R	68	83	76	78	93	81
Médias	73	77	75	75	88	90

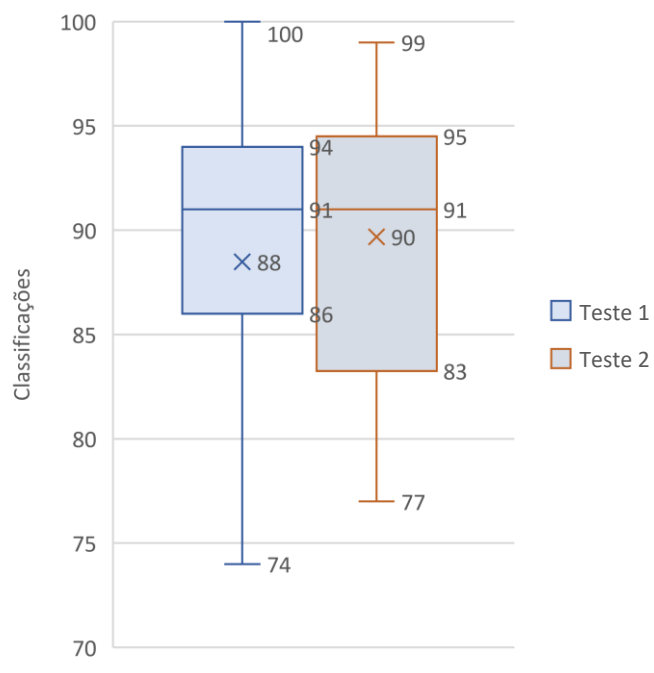
Distribuição das cotações relativas ao teste de Língua Portuguesa



Distribuição das cotações relativas ao teste de Matemática



Distribuição das cotações relativas ao teste de Estudo do Meio

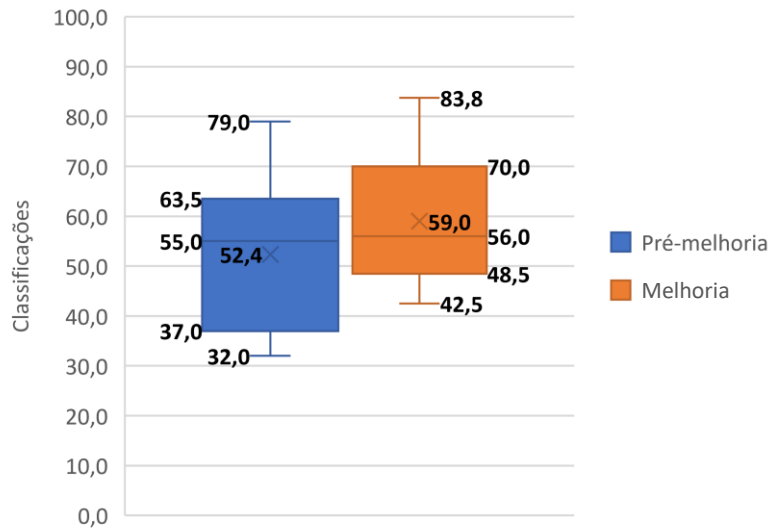


Anexo D. Grelha e gráficos de avaliação das questões de aula pré e pós melhoria (turma G) na prática de 2.º ciclo

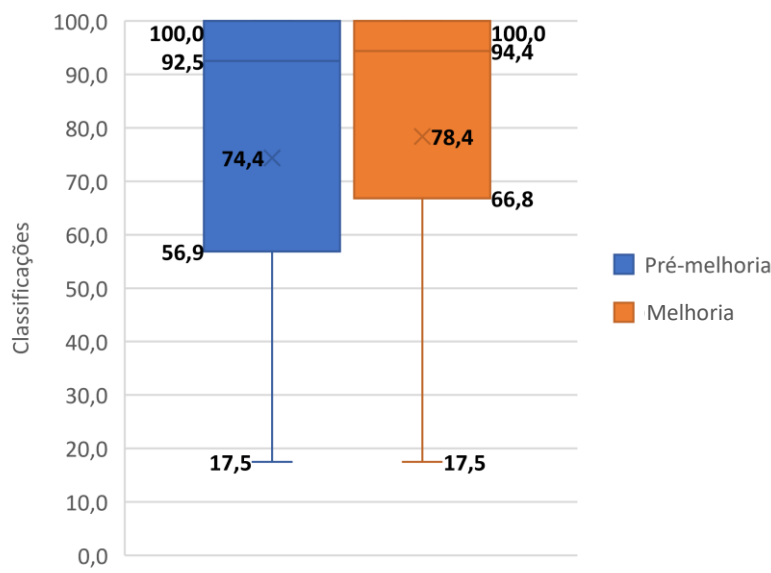
	QA Números Primos		QA Decomposição em fatores primos		QA mmc		QA mdc		Média do conjunto das QA	
	Pré-melhoria	Melhoria	Pré-melhoria	Melhoria	Pré-melhoria	Melhoria	Pré-melhoria	Melhoria	Pré-melhoria	Melhoria
3	32,0	45,0	70,0	77,8	100	100	0,0	0,0	50,5	74,3
4	64,0	64,0	100,0	100,0	35	51,25	35,0	42,5	58,5	64,4
5	75,0	78,3	100,0	100,0	100	100	100,0	100,0	93,8	94,6
6	37,0	42,8	100,0	100,0	50	57,5	85,0	85,0	68,0	71,3
7	74,0	74,0	-	-	60	67,5	20,0	20,0	51,3	53,8
8	56,0	61,5	100,0	100,0	70	70	86,0	86,0	78,0	79,4
10	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
13	58,0	58,0	17,5	17,5	0	0	-	-	17,5	37,8
14	62,0	72,0	100,0	100,0	100	100	100,0	100,0	87,3	90,7
15	37,0	52,0	-	-	-	-	0,0	0,0	18,5	26,0
17	38,0	48,0	17,5	33,9	30	30	50,0	52,5	33,9	41,1
18	-	-	-	-	-	-	-	-	100,0	100,0
19	32,0	42,5	85,0	88,8	90	92,5	40,0	42,5	61,8	66,6
21	35,0	50,0	85,0	88,8	100	100	75,0	81,3	73,8	80,0
23	79,0	83,8	100,0	100,0	0	0	0,0	13,8	44,8	49,4
24	54,0	54,0	17,5	33,9	30	40	51,0	54,8	38,1	45,7

52,4	59,0	74,4	78,4	58,8	62,2	49,4	52,2	58,4	65,0
------	------	------	------	------	------	------	------	------	------

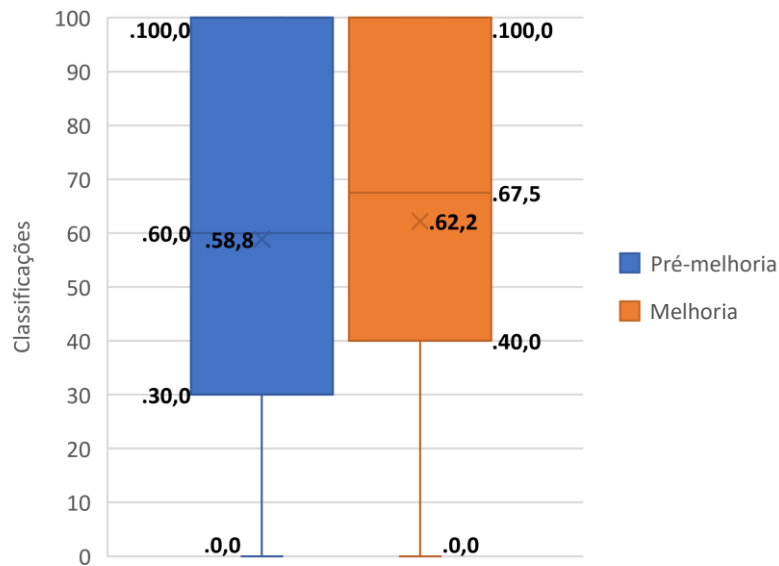
Distribuição das Cotações Relativas à Questão de Aula: Números Primos e Compostos (turma G)



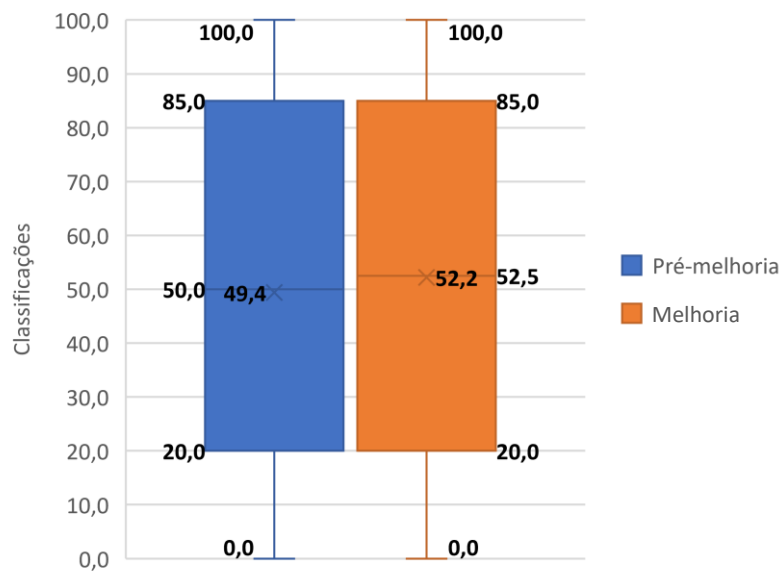
Distribuição das Cotações Relativas à Questão de Aula: Decomposição em Fatores Primos (turma G)

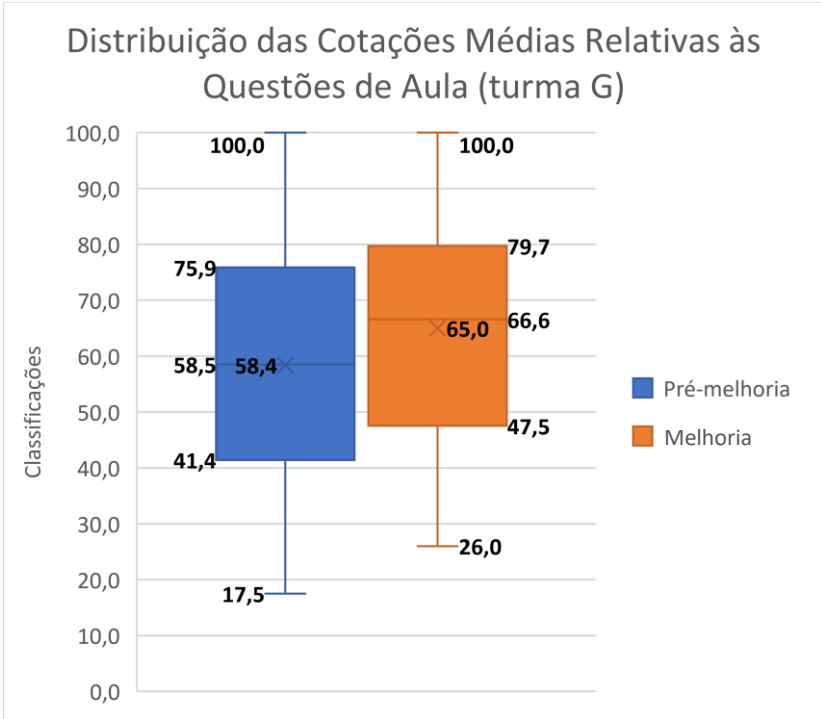


Distribuição das Cotações Relativas à Questão de Aula: Mínimo Múltiplo Comum (turma G)



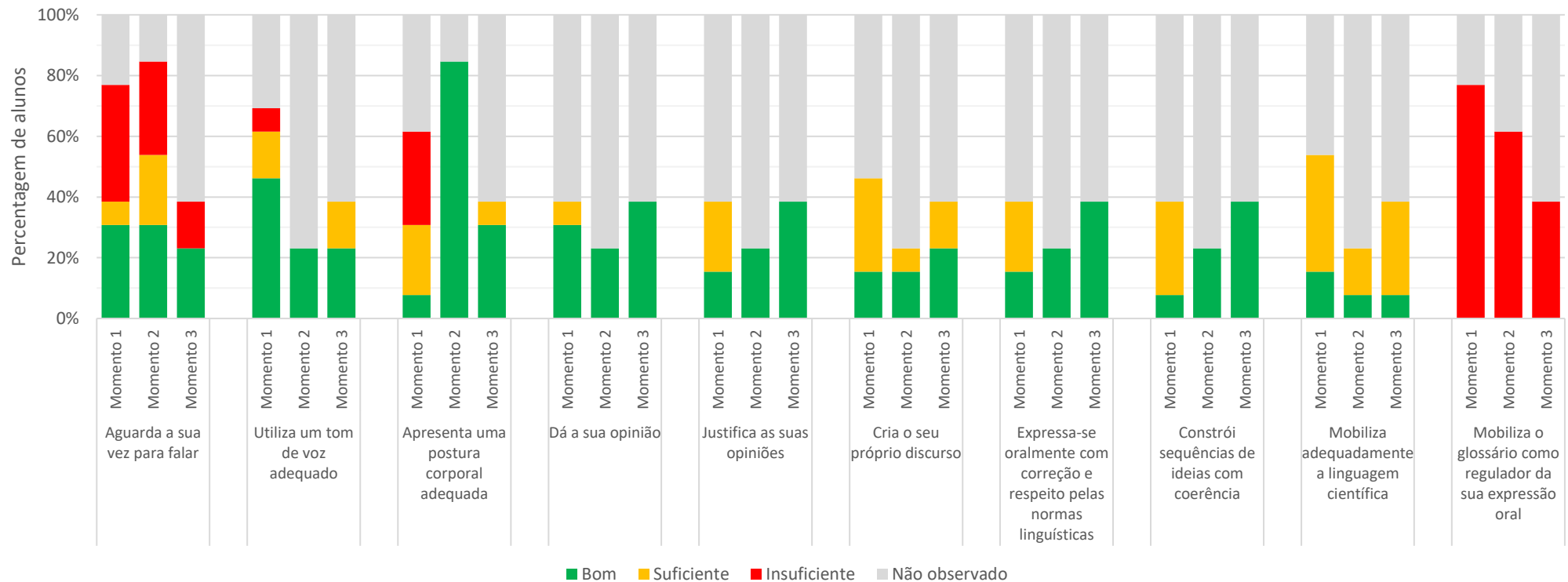
Distribuição das Cotações Relativas à Questão de Aula: Máximo Divisor Comum (turma G)



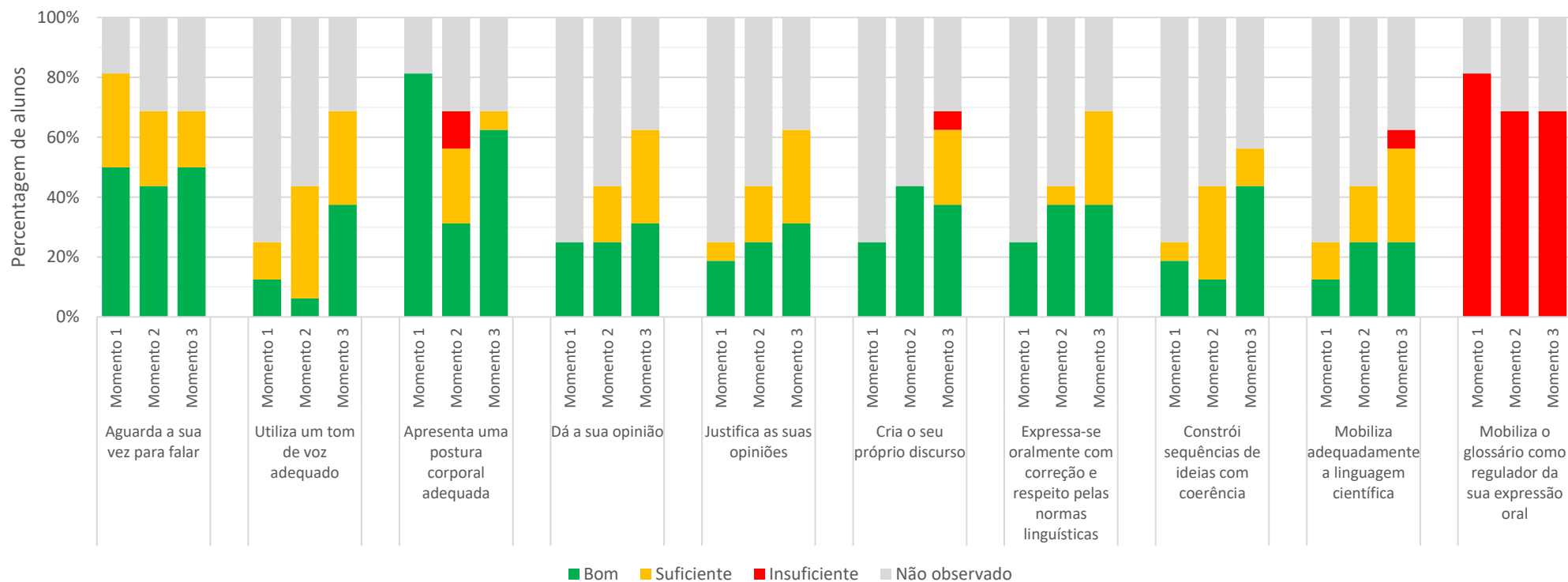


Anexo E. Análise do objetivo “desenvolver competências de comunicação e de partilha de ideias e de conhecimentos” na prática de 2.º ciclo

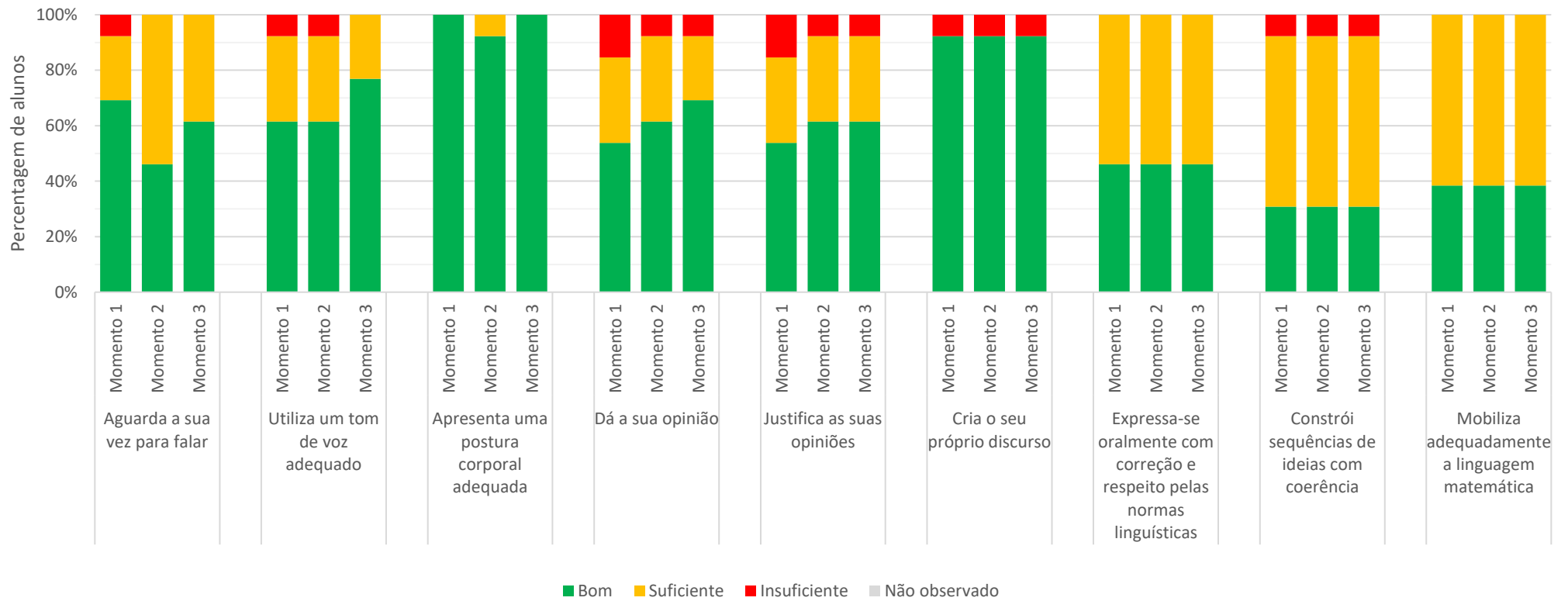
Distribuição e evolução da avaliação do 1.º objetivo na turma 5.º C (na disciplina de CN)



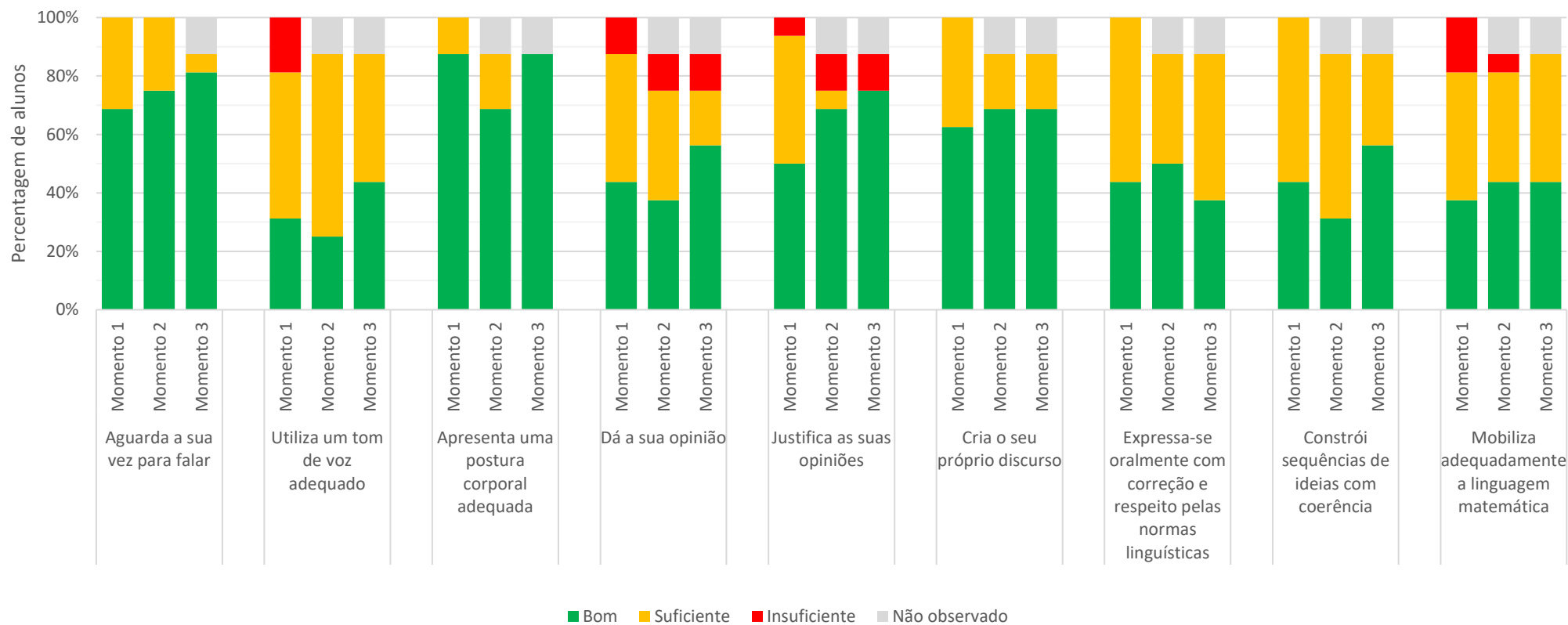
Distribuição e evolução da avaliação do 1.º objetivo na turma 5.º G (na disciplina de CN)



Distribuição e evolução da avaliação do 1.º objetivo na turma 5.º C (na disciplina de Matemática)



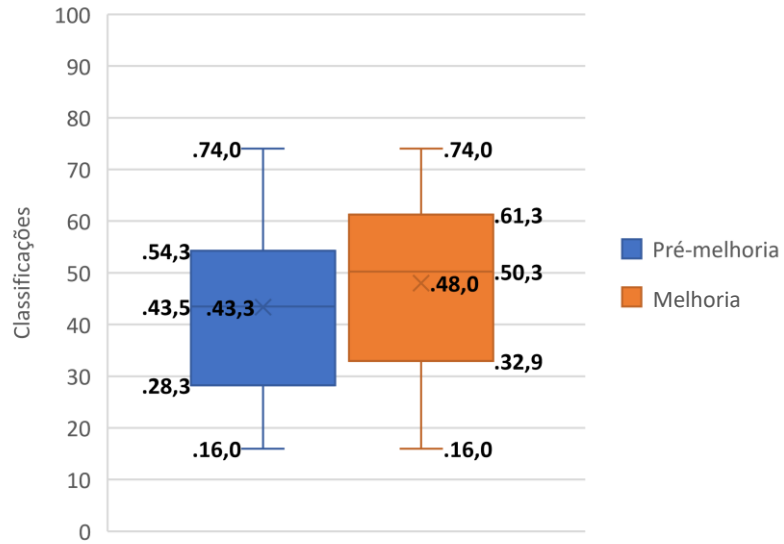
Distribuição e evolução da avaliação do 1.º objetivo na turma 5.º G (na disciplina de Matemática)



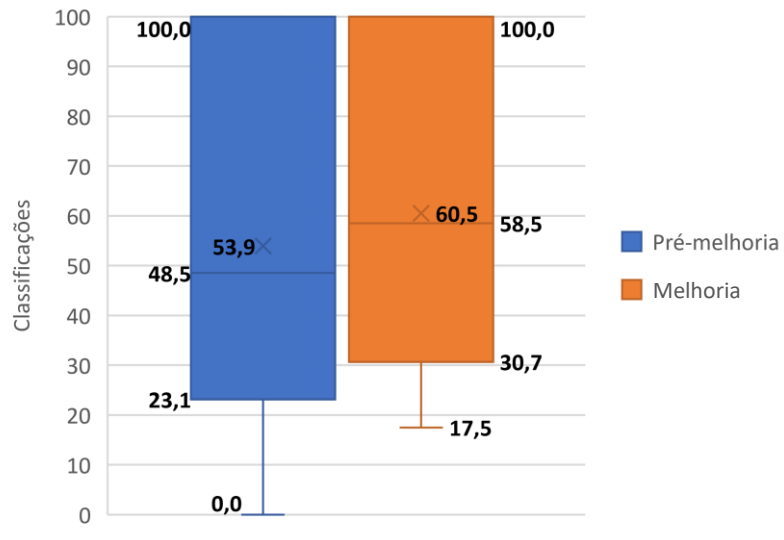
Anexo E. Grelha e gráficos de avaliação das questões de aula pré e pós melhoria (turma C)

	Números Primos		Decomposição em fatores primos		mmc		mdc		Média das QA	
	Pré-melhoria	Melhoria	Pré-melhoria	Melhoria	Pré-melhoria	Melhoria	Pré-melhoria	Melhoria	Pré-melhoria	Melhoria
1	23	33,25	100	100	65	75	100	100	72,0	77,1
2	58	71	5	17,6	70	77,5	50	58,75	45,8	56,2
3	74	74	17,5	17,5	70	70	50	50	52,9	52,9
5	-	-	100	100	-	-	30	37,5	65,0	68,8
7	52	52	50	54,4	90	92,5	100	100	73,0	74,7
8	36	49,5	100	100	100	100	-	-	78,7	83,2
10	72	72	100	100	-	-	-	-	86,0	86,0
14	30	39,5	75	78,8	65	67,5	0	0	42,5	46,5
16	23	28	0	25,2	90	92,5	-	-	37,7	48,6
17	32	32	27,5	32,5	100	100	100	100	64,9	66,1
18	16	16	-	-	-	-	80	83,75	48,0	49,9
22	53	58	47	62,6	100	100	100	100	75,0	80,2
23	51	51	25	37,6	100	100	0	7,5	44,0	49,0
	43,3	48,0	53,9	60,5	85,0	87,5	61,0	63,8	60,8	64,5

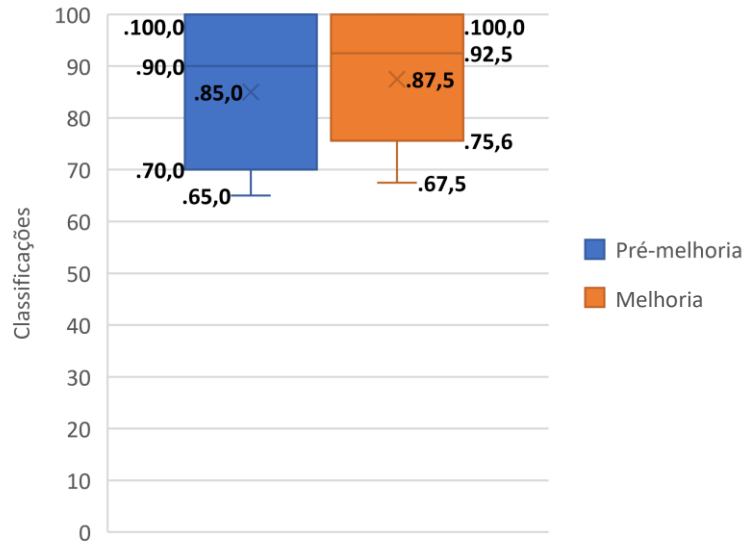
Distribuição das Cotações Relativas à Questão de Aula: Números Primos e Compostos (C)



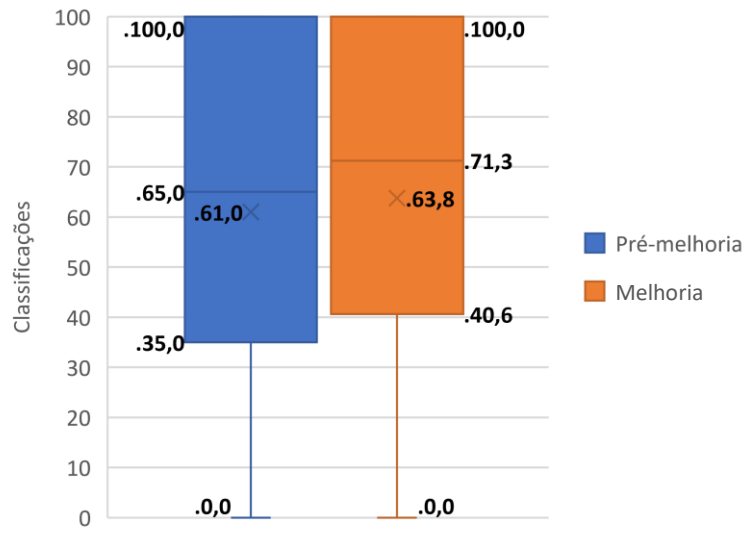
Distribuição das Cotações Relativas à Questão de Aula: Decomposição em Fatores Primos (C)



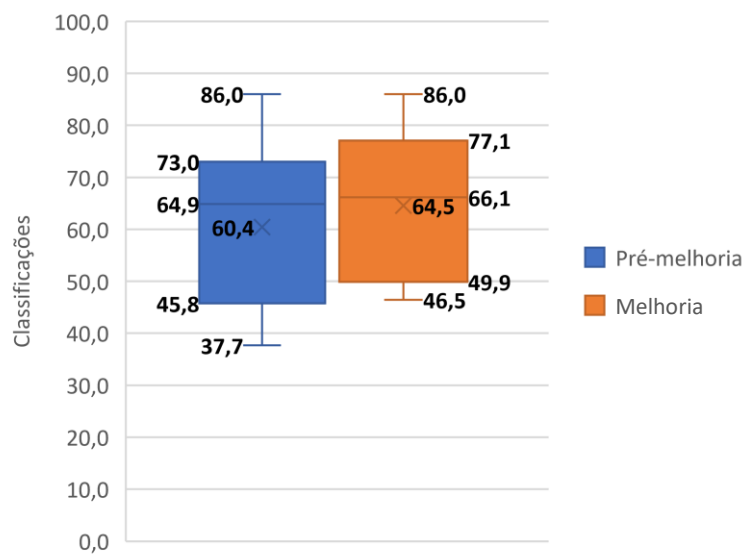
Distribuição das Cotações Relativas à Questão de Aula: Mínimo Múltiplo Comum (C)



Distribuição das Cotações Relativas à Questão de Aula: Máximo Divisor Comum (C)

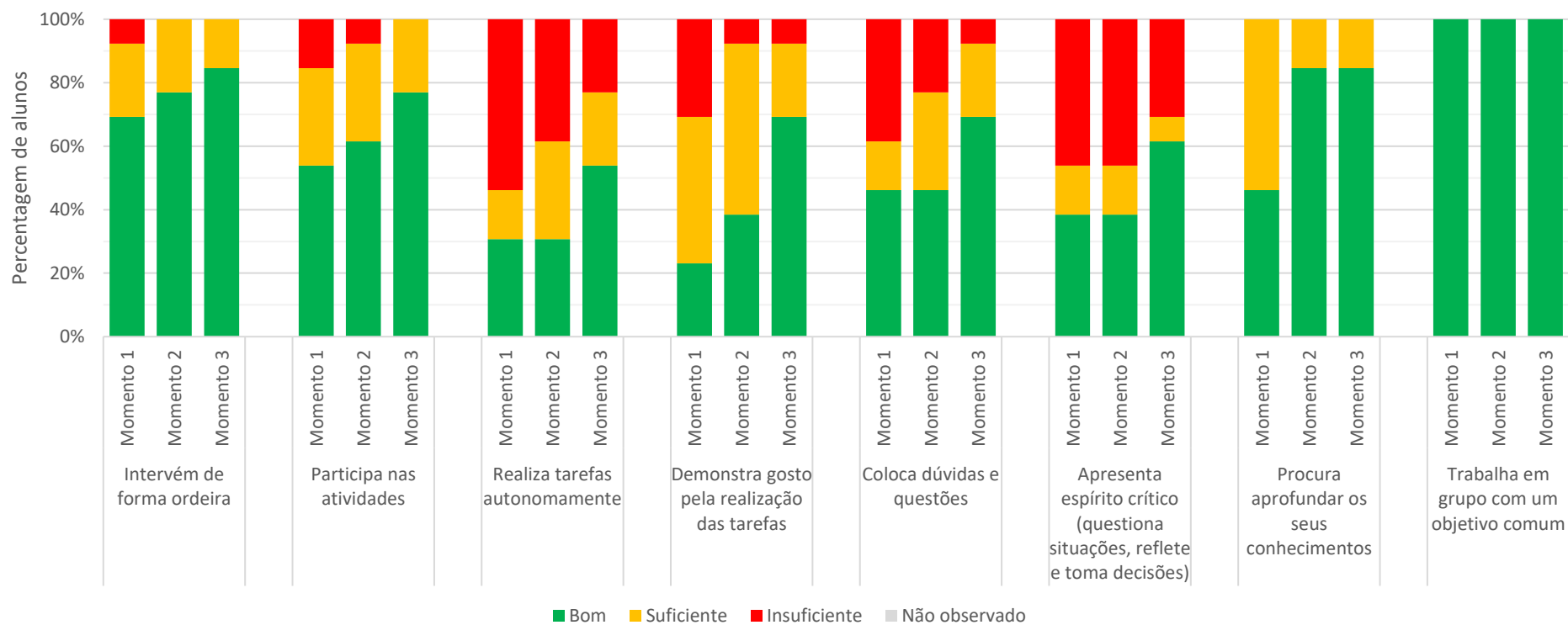


Distribuição das Cotações Médias Relativas às Questões de Aula (C)

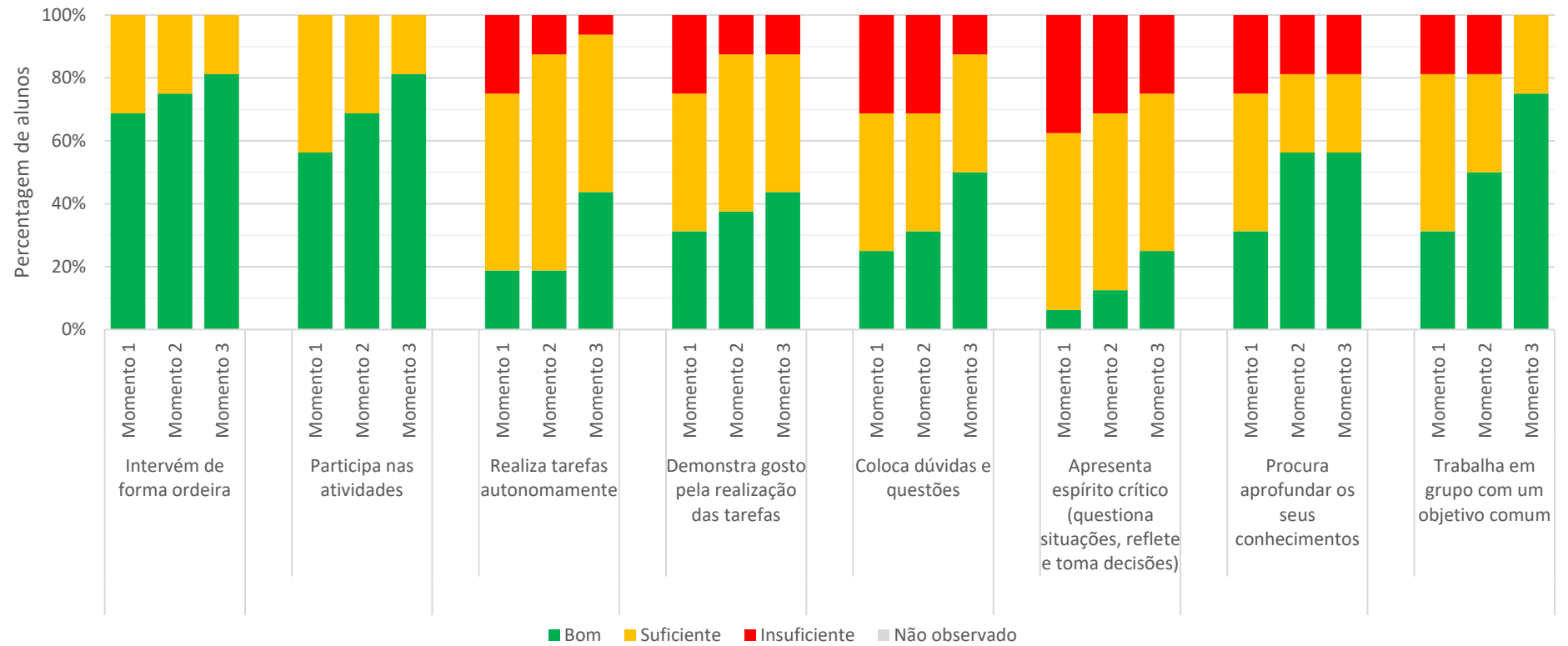


Anexo F. Análise do objetivo “participar ativamente nas atividades propostas em contexto de sala de aula” na prática de 2.º ciclo

Distribuição e evolução da avaliação do 2.º objetivo na turma 5.º C



Distribuição e evolução da avaliação do 2.º objetivo na turma 5.º G



Anexo G. Informações fornecidas pela professora titular

No que diz respeito aos dados fornecidos pela OC através de uma entrevista livre, foi-lhe pedido que fizesse uma descrição dos alunos em três vertentes relativas: ao interesse e desempenho dos discentes na resolução de problemas; à capacidade de interpretação e de comunicação; ao seu desempenho geral.

A **Ilda** e o **David** foram referidos como discentes que se envolvem na resolução de tarefas apoiando-se sobretudo em procedimentos normalizados pela prática em sala de aula. Contudo, é indicado que a **Ilda** realiza registos bastantes estruturados e que tal aspeto não se manifesta no **David**, talvez por saltar passos de raciocínio.

É afirmado que, no caso do **David**, o português não é a sua língua materna, pelo que tem alguma dificuldade em se expressar, mobilizando vocabulário específico. Não obstante, a OC acrescenta que, o que o aluno tenta comunicar é perceptível e que a sua capacidade de interpretação de textos também é elevada. É declarado que a **Ilda** demonstra uma boa interpretação/compreensão dos textos, ao nível do português e que comunica com clareza.

Quanto ao método de trabalho, é mencionado que os dois são discentes com um alto nível de desempenho a Matemática e a Língua Portuguesa. A OC acrescenta que a **Ilda** é uma aluna muito trabalhadora e empenhada, perfeccionista e focada, que demonstra ter um bom raciocínio, mas que joga pelo seguro.

De seguida, são apresentadas as avaliações dos discentes em relação: i) ao teste de matemática final de 2.º período, cujos conteúdos abordados se encontram discriminados abaixo; ao cálculo mental, que surgiram de uma competição de cálculo mental entre as diversas turmas da escola; à prova do Canguru matemático, que permite manifestações do pensamento e raciocínio matemático na resolução de problemas a diversos níveis.

Lista ordenada da prestação dos alunos aquando da(o):

	Prova de Canguru matemático	Teste final de 2.º período	Cálculo mental
1.	Aluno	Ilda	David
2.	Aluno	Aluno	Aluno
3.	Aluno	Aluno	Ilda
4.	Ilda	Aluno	Aluno
5.	Aluno	Aluno	Aluno
6.	Aluno	Aluno	Aluno
7.	Aluno	Aluno	Aluno
8.	Aluno	David	Aluno
9.	Aluno	Aluno	Aluno
10.	Aluno	Aluno	Aluno
11.	Aluno	Aluno	Aluno
12.	Aluno	Aluno	Aluno
13.	David	Aluno	Aluno
14.	Aluno	Aluno	Aluno
15.	Aluno	Aluno	Aluno
16.	Aluno	Aluno	Aluno
17.	Aluno	Aluno	Aluno
18.	Aluno	Aluno	Aluno
19.	Aluno	Aluno	Aluno
20.	Aluno	Aluno	Aluno
21.	Aluno	Aluno	Aluno
22.	Aluno	Aluno	Aluno
23.	Aluno	Aluno	Aluno

Domínios e Conteúdos avaliados no teste de final de 2.º período

Números e operações

- Leitura e escrita de número até à centena de milhar

- Numerais romanos

- **Números racionais não negativos**

- Fração como representação de medida de comprimento e de outras grandezas; numerais fracionários;

- - Ordenação de números racionais representados por frações com o mesmo numerador ou o mesmo denominador, ou utilizando a reta numérica ou a medição de outras grandezas;

- Frações próprias.

- **Adição e subtração de números**

racionais não negativos representados por frações

- Adição e subtração na reta numérica por justaposição retilínea de segmentos de reta;

- Produto de um número natural por um número racional representado por uma fração unitária;

- Adição e subtração de números racionais representados por frações com o mesmo denominador;

- Decomposição de um número racional na soma de um número natural com um número racional representável por uma fração própria.

- **Representação decimal de números racionais não negativos**

- Frações decimais; representação na forma de dízimas finitas;

- Redução de frações decimais ao mesmo denominador; adição de números racionais representados por frações decimais com denominadores até mil;

- Algoritmos para a adição e para a subtração de números racionais representados por dízimas finitas;

- Decomposição decimal de um número racional representado na forma de uma dízima finita.

Geometria e Medida

- Coordenadas em grelhas quadriculadas

- Segmentos de reta paralelos e perpendiculares

Organização e Tratamento de Dados

- Tabelas, gráficos, frequência absoluta, moda, extremos(mínimo e máximo) e amplitude

Problemas

- Problemas até três passos envolvendo situações de partilha equitativa e de agrupamento.
- Problemas envolvendo análise e organização de dados: frequência absoluta, moda e amplitude.

Anexo H. Guião de entrevista aos participantes do estudo

Guião de Entrevista

Destinatários: Participantes do estudo

Objetivos: Descrever e compreender os processos de resolução/formulação de problemas que as crianças mobilizam.

Fases da entrevista	Objetivos específicos	Questões orientadoras	Questões de recurso
A. Legitimação da entrevista e motivação do/a entrevistado/a	<ul style="list-style-type: none"> - Transmitir o objetivo da entrevista como a obtenção de informação para a realização do estudo em causa. - Transmitir o carácter confidencial e que o anonimato dos dados é garantido. - Pedir autorização para gravar áudio; - Informar devolução das gravações áudio. 	Queres participar nesta entrevista?	
B. Aplicação do problema ao entrevistado/a	<ul style="list-style-type: none"> - Pedir explicitação da interpretação do problema; 	O que é que compreendes deste problema?	<p>O problema é sobre o quê?</p> <p>Quais são os dados importantes?</p> <p>Existem dados que não importam?</p> <p>Há dados em falta no problema?</p> <p>Quais são as relações entre os dados?</p> <p>O que é que tens de descobrir?</p>

	- Pedir explicitação do modelo mental que efetua;	Como é que pensaste?	O que é que estás a ver? Estás a imaginar alguma coisa? Consegues desenhar o que pensaste?
	- Pedir explicitação da representação matemática que aplica;	Como é que podes resolver?	O que é que terás de fazer para resolver o problema? Consegues resolver o problema com um desenho? Que operação usaste? Que conceitos estão envolvidos na resolução do problema?
	- Pedir explicitação da aplicação dos conhecimentos matemáticos;	Como é que fizeste?	Quais foram os procedimentos matemáticos que aplicaste? Qual é a resposta ao problema? Como é que sabes que essa é a resposta correta?
	- Confirmar respostas às questões anteriores;	E se o problema fosse diferente?	Já saberias a resposta se o problema fosse com outra figura? E se alterássemos o valor de determinado dado, já saberias a resposta?
C. Conclusão da entrevista	- Confirmar se existe algo mais a acrescentar; - Agradecer a disponibilidade.	Há algo mais que gostarias de dizer?	

Anexo I. Entrevista transcrita – Ilda a 14/05/19

Investigador (Inv.) Relativamente a este teu primeiro problema qual é o tema? O problema é sobre o quê?

Ilda. A área.

Inv. E quais são os dados importantes que tu dás?

Ilda. Queremos saber qual é a área do triângulo B e o triângulo A tem como 3.

Inv. E o que é que tu tens de descobrir?

Ilda. Qual é a área do triângulo B.

Inv. E o que é que terás de fazer para descobrir isso?

Ilda. Saber qual é a área dos outros triângulos que é 3, a do A é 3 e o triângulo C é igual a A, por isso são os dois 3 e depois *vi* que metade do triângulo B é um triângulo A ou C. Então eu *juntei*, é como se tivesse juntado o A e o C e formou-se uma única figura.

Inv. Ok. Dizes isso porque sobreposeste a figura A em C e nas metades de B.

Ilda. Sim.

Inv. Puseste por cima. E como é que descobriste que a área do B era o dobro da área do A?

Ilda. Eu dividi o B e *vi* que se juntarmos A e C, que estes dois são iguais. [sobrepos o A nas duas metades de B e verificou que o A ou o C são metades de B]

Inv. Qual é a resposta ao problema?

Ilda. O triângulo A tem 3 de área e depois eu dividi o B ao meio e percebi que metade do triângulo B é igual a um A e a outra metade é igual a um C. Então, se juntarmos, como os dois têm 3 de área, temos de fazer, 3 mais 3 que são 6.

Ilda. 21 de área.

Inv. E como é que tu sabes isso?

Ilda. Porque o triângulo pequeno. E se acrescentássemos aqui era 24 então o quadrado todo é 24 de área menos um quadrado é 21 porque eu fui juntando à volta fui pondo, pontinho com pontinho até fazer tudo à volta e depois fiquei com um quadrado e então fui fazendo de várias maneiras até conseguir que o quadrado com o triângulo pequenino coubesse num quadrado daqueles.

Inv. E o que é que terás de fazer para descobrir isso?

Ilda. Saber quais os outros triângulos que a área é 3. A do A é 3 e o triângulo C é igual a A, por isso são os dois 3 e depois *vi* que metade do triângulo B é um triângulo A ou C. Então eu *juntei*, é como se tivesse juntado o A e o C e formou-se uma única figura.

Inv. Ok. Dizes isso porque sobreposeste a figura A em C e nas metades de B.

Ilda. Sim.

Inv. Então e que conceitos matemáticos é que achas que estão envolvidos nesse problema?

Ilda. A área.

Inv. Só, mais nada?

Ilda. E a adição.

Inv. Mais nada?

Ilda. Mais nada.

Inv. O que é que fizeste?

Ilda. Fui juntando à volta fui pondo, pontinho com pontinho até fazer tudo à volta e depois fiquei com um quadrado e então fui fazendo de várias maneiras até conseguir que o quadrado com o triângulo pequenino coubesse num quadrado daqueles.

Inv. E o que é que terás de fazer para descobrir isso?

Ilda. Saber qual é a área dos outros triângulos que é 3, a do A é 3 e o triângulo C é igual a A, por isso são os dois 3 e depois *vi* que metade do triângulo B é um triângulo A ou C. Então eu *juntei*, é como se tivesse juntado o A e o C e formou-se uma única figura.

Inv. Ok. Dizes isso porque sobreposeste a figura A em C e nas metades de B.

Ilda. Sim.

Inv. Antes de começares a resolver, o que é que tu viste na tua cabeça ou o que é pensaste?

Ilda. Nada.

Inv. Começaste a escrever sem pensar?

Ilda. Comecei a escrever qual era a área do A, a área do C e a área do B. Primeiro fiz a área do A e do C, como percebi que eram iguais e depois.

Inv. Como é que percebeste que elas eram iguais?

Ilda. Olhando para a figura. Também **pus** assim por cima.

Inv. Puseste por cima. E como é que descobriste que a área do B era o dobro da área do A?

Ilda. Eu dividi [traçou um eixo de simetria] o B e vi que se juntarmos A e C, que estes dois são iguais [sobrepôs A e C].

Inv. Qual é a resposta ao problema?

Ilda. O triângulo A tem 3 de área e depois eu dividi o B ao meio e percebi que metade do triângulo B é igual a um A e a outra metade é igual a um C. Então, se juntarmos, como os dois têm 3 de área, temos de fazer 3 mais 3, que são 6.

Inv. E, por exemplo, se eu te desse esta figura e te dissesse que este triângulo tem 3 de área e te perguntasse quanto é que a restante figura teria de área, como é que farias?

(cortou o triângulo pequeno e tenta determinar se pavimenta o quadrado)

Inv. Qual é o contexto do problema? Qual é o tema do problema?

Ilda. É o perímetro.

Inv. Quais são os dados importantes?

Ilda. Que nós queremos saber qual é o perímetro do triângulo B e saber que o triângulo C tem como perímetro 7.

Ilda. Eu escrevi como a A e a C são iguais, por isso têm o mesmo perímetro, que é 7 e depois como eu já tinha percebido que estas duas são metade do triângulo B, fiz 7 mais 7 que é 14.

Inv. E, por exemplo, tens outra figura e sabes que o perímetro deste triângulo é 7 e queres saber o perímetro da figura que está a branco. Como é que tu podes descobrir isso?

Ilda. Tenho de fazer a mesma divisão de antes, eu aprendi que temos de fazer isto. Neste problema tem a multiplicação.

Inv. Porquê?

Ilda. 7,14,21,28,35,42 e 49 é a tabuada do 7, do 7×7 , tem 49 (de perímetro).

Inv. Agora vamos pensar que continuavas com a mesma imagem do enunciado, mas que o A não tem perímetro 7, tem perímetro 10. Qual será o perímetro de B?

Ilda. 20

Inv. Porquê? Como é que tu sabes isso?

Ilda. Porque como eu disse, a figura A e a C são metade da B, portanto é o dobro...

Inv. Então, tu acabaste de me dizer o que nós queremos saber. E como é que podemos saber isso?

Ilda. Fazendo. Como sabemos o perímetro da figura C e como eu percebi antes que a figura A é igual a C, então é 7. Como eu já tinha feito antes, a B é o dobro da figura C, ou seja, este [A] é a metade deste [B]. A B é o dobro da A e da C, então temos de juntar para saber o perímetro da B.

Inv. E quais são os conceitos matemáticos envolvidos neste problema?

Ilda. O perímetro e a adição.

Inv. Mais nada?

Ilda. Mais nada.

Inv. O que é que tu imaginaste? Como é que tu pensaste?

Ilda. Eu cortei a figura, como cortei todas as figuras. Cortei assim a C, a B e a A e depois vi que a C tinha 7 de perímetro [sobrepôs C em A].

Inv. Então em relação a esta primeira parte, esta parte é sobre o quê?

Ilda. Simetrias.

Inv. Mais alguma coisa?

Ilda. Não.

Inv. Ok. E quais são os dados importantes?

Ilda. Que esta figura foi construída por quatro quadrados dos de antes.

Inv. Ok. E quais são os dados importantes?

Ilda. Que esta figura foi construída por quatro quadrados dos de antes.

Inv. E o que é que tu tens de fazer para descobrir como é que eu desenhei essa figura?

Ilda. Eu primeiro não estava a ver, mas quando disse que usámos o anterior, eu peguei num quadrado dos pequeninos e fui juntando e percebi que havia 4 [quadrados originais]. O primeiro eu pus aqui assim e virei e percebi logo que dava.

Ilda. O primeiro eu pus aqui assim e virei e percebi logo que dava.

Ilda. Este é o B, este é o A e este é o C.

Inv. E tu experimentaste logo ou será que viste isso antes na tua cabeça?

Ilda. Experimentei logo.

Inv. E o que é que tu tens de fazer para descobrir como é que eu desenhei essa

figura?

Ilda. Eu primeiro não estava a ver, mas quando disse que usámos o anterior, eu peguei num quadrado dos pequeninos e fui juntando [pavimentou, usando 4 quadrados originais, rodando-os] e percebi que havia 4.

Inv. E que conceitos matemáticos estão relacionados com esta parte?

Ilda. Simetria.

Inv. E se fosse outra figura, por exemplo, se fosse esta figura, como é que eu a construiria?

Ilda. É a mesma coisa só que a figura é virada ao contrário. Mas aqui, nas partes de cima, a figura está virada ao contrário da figura original e nas partes de baixo está para cima.

Inv. E o que é que tu tens de fazer para descobrir como é que eu desenhei essa figura?

Ilda. Eu peguei num quadrado [original] e pus em todos os lados do quadrado grande e depois percebi que havia 4 iguais.

Inv. Qual é o tema do nosso problema?

Ilda. Contagens.

Inv. E quais são os dados importantes?

Ilda. Os triângulos iguais ao B, o C, o D e o E eram um sétimo.

Inv. Esse é o nosso dado importante? Não há mais nada?

Ilda. Não.

Inv. Ok, e o que é que tu tens de descobrir?

Ilda. Qual era a unidade de medida de área, para saber o que era o losango do meio.

Inv. E quais são os dados importantes?

Ilda. Os triângulos iguais ao B, o C, o D e o E eram um sétimo.

Ilda. Como havia 7 triângulos pensei que cada figura igual à B poderia ser um sétimo. Percebi que eram 8 triângulos e que a figura do meio, o losango, eram dois triângulos, por isso eram dois sétimos.

Inv. Vamos lá ver... Esta é a nossa nova figura e sabemos que a área deste quadrado grande é um e queremos saber qual é a fração que representa a área deste losango.

Ilda. São dois doze avos.

Inv. Podes explicar-me porquê?

Ilda. Porque havia 12 figuras e aquelas eram duas só.

Inv. Ok, dividiste o quadrado grande em várias figuras.

Ilda. Já estavam divididas eu contei.

Inv. O que é que pensaste que te levou a anotar essas letras?

Ilda. Eu tive de escrever as letras para que quando escrevesse o texto soubesse qual era a figura que eu teria de dizer que era a unidade de medida.

Inv. Ok. Como é que sabias onde escrever as letras?

Ilda. Porque são os triângulos.

Ilda. Temos de pensar que a figura está dividida em partes certo?

Inv. E quais são os conceitos matemáticos que estão envolvidos, aqui?

Ilda. As frações, as contagens mais nada.

Inv. Mais nada? Não há mais nenhum conceito matemático aqui envolvido?

Ilda. Sim

Inv. Tens a certeza?

Ilda. Sim.

Anexo J. Entrevista transcrita – David a 14/05/19

Investigador (Inv.) Qual é o tema de cada um dos teus problemas?

Inv. O problema é sobre o quê?

David. É sobre a área.

David. Cada um dos meus problemas é sobre o A.

Inv. Sobre o A? Então o problema é sobre o quê?

David. É igual ao C.

Inv. E o que é que tu tens de descobrir?

David. Quantas figuras A se precisam para fazer uma figura B?

Inv. Ok. E quais são os dados importantes?

David. Já sabia que era metade: 1, 2, 3, 4 é 4.

Inv. Ok. E quais são os dados importantes?

David. Já sabia que era metade: 1, 2, 3, 4 é 4.

Inv. Como é que tu sabias que é metade?

David. Eu sabia desde o princípio.

Inv. Estás a dobrar o papel.

David. Eu pensava, porque eu parti ao meio

Inv. E como é que tu imaginaste isso?

David. Imaginando, pronto.

Inv. O que é que tu viste na tua cabeça?

David. Alguma coisa, não sei.

Inv. E relativamente a estes dois problemas que tu formulaste, o que é que tu tinhas de fazer para descobrir as respostas a esses problemas?

David. É multiplicar o A por números pares.

Inv. Porquê?

David. Porque se... porque aqui perguntava quantas figuras A é que se precisava para fazer a figura B.

Inv. Como é que tu sabias o que tinhas de fazer?

David. De ver quantos A's caberiam no B. [sobrepõe figuras A na figura B]

Inv. E como é que tu farias isso?

David. Se tinha imensos A's podia pô-los em cima de B e ver quantos cabiam.

Inv. E aqui tens a resolução, não é? Então o que é que tu fizeste aqui?

David. Eu multipliquei. Como não podia pôr em cima, eu fiz assim.

Inv. Isso é o quê?

David. E fiz a mesma figura: os dois A's juntos, formam a figura B. É mais ou menos igual.

Inv. Como é que tu conseguiste pensar nisso?

David. Pensei nas metades.

Inv. E na tua cabeça, o que é que viste?

David. Vejo metades. Vi um x de multiplicação.

Inv. E na tua cabeça, o que é que viste?

David. Vejo metades. Vi um x de multiplicação.

Inv. Viste um x de multiplicação?

David. Sim.

Inv. Então?

David. Porque sabia que tinha de multiplicar.

Inv. Como e porquê?

David. Por quantas vezes o A tinha de multiplicar para chegar ao B.

Inv. E quantas vezes é que o A teve de multiplicar para chegar ao B?

David. Duas vezes.

Inv. Duas vezes? Como é que tu pensaste nisso?

David. Porque eu vi logo que era metade, porque o triângulo B faz um triângulo grande, porque a geometria é assim.

David. Porque eu vi logo que era metade, porque o triângulo B faz um triângulo grande, porque **a geometria é assim.**

Inv. Tu estás a unir dois A's, para ver se vão dar um B, é isso?

David. Sim. E deu.

Inv. E deu, e foi isso que tu imaginaste?

David. Sim. Parti B ao meio [dobrou B num eixo de simetria].

Inv. E neste caso quais são os conceitos matemáticos que tu achas que estavam relacionados com estas...?

David. Multiplicação e figuras

Inv. Mais alguma coisa?

David. Os eixos de simetria que tenho.

Inv. O problema é sobre o quê?

David. É sobre a área.

David. Cada um dos meus problemas é sobre o A.

Inv. Sobre o A? Então o problema é sobre o quê?

David. É igual ao C.

Inv. Ok. E quais são os dados importantes?

David. É como é o painel, como são as figuras.

David. Quantas figuras A se precisam para fazer o painel?

Inv. E relativamente a estes dois problemas que tu formulaste, o que é que tu tinhas de fazer para descobrir as respostas a esses problemas?

David. É multiplicar o A por números pares.

Inv. Porquê?

David. Porque se... porque aqui perguntava quantas figuras A é que se precisava para fazer o painel.

Inv. Como é que tu sabias o que tinhas de fazer?

David. De ver quantos A's caberiam no painel.

Inv. E como é que tu farias isso?

David. Se tinha imensos A's, podia pô-los em cima do painel e ver quantos cabiam.

Inv. Ok, muito bem. E aqui, na pergunta 2 como é que tu fizeste isto?

David. Eu já sei que o B é dois A's, então, se aqui está um B mais dois A, seriam dois B's. E um B é dois A's, então **dois B's seriam quatro A's**, porque seria a multiplicar os dois por dois é quatro

Inv. Ok, muito bem. E aqui, na pergunta 2 como é que tu fizeste isto?

David. Eu já sei que o B é dois A's, então, se aqui está um B mais dois A, seriam dois B's. E um B é dois A's, então dois B's seriam quatro A's, porque seria a multiplicar os dois por dois é quatro

Inv. E neste caso, quais são os conceitos matemáticos que tu achas que estavam relacionados com estas...?

David. Multiplicação e figuras

Inv. Mais alguma coisa?

David. Os eixos de simetria que tenho.

Inv. Ok. E, por exemplo, se em vez de ser essa figura, tivéssemos esta e eu dissesse que este triângulo é o A e perguntasse quantos A's há nesse painel. Como é que tu responderias?

David. Oito.

Inv. Porquê? Podes explicar como é que fizeste?

David. Multipliquei 1×8 é 8.

David. Primeiro eu achava que a metade da metade...

[Aponta para o quadrado pequeno que obtive ao traçar a divisão da figura em quatro partes]

David. Isto é o quadrado, se é um cubo eu sei que é um quarto.

David. Um quarto de tudo, o quadrado.

David. Primeiro eu achava que a metade da metade...

[Aponta para o quadrado pequeno que obtive ao traçar a divisão da figura em quatro partes] eu achava que isto era o quadrado, se é um cubo eu sei que era um quarto.

Inv. Esse quadrado pequeno seria um quarto da figura?

David. Sim. Mas tem de ser o dobro porque dividi ao meio os quatro quadrados pequenos.

Inv. Esse quadrado pequeno seria um quarto da figura?

David. Sim. Mas tem de ser o dobro porque dividi ao meio os quatro quadrados pequenos.

David. Tem de ser um quarto e um oitavo vem de oito (triângulos iguais ao A que compõem a figura).

Inv. Estou a perceber.

Inv. E se aqui no teu problema o triângulo A fosse metade do tamanho inicial?

David. Era 16. (o painel seria composto por 16 triângulos)

David. E se fosse metade da metade era 32.

Inv. O problema é sobre o quê?

David. É sobre figuras.

Inv. E quais são os dados que tu tens?

Inv. É o quadrado, é a figura.

Inv. Então eu vou dar-te figuras iguais às originais e iguais ao quadrado gigante. Tenta ver como é que construímos o quadrado gigante.

David. Multiplicando por 4. Esta figura [original], multiplicando por 4.

David. Fiz os quadrados anteriores multiplicando-os muitas vezes.

Inv. Mas como é que fizeste isso? Desenhaste-te, ou fizeste o quê?

David. Desenhei.

Inv. A primeira coisa que tu fizeste foi desenhar?

David. Eu pensei no desenho.

Inv. Como é que pensaste?

David. Eu comecei a dobrar [o quadrado].

Inv. Quando começaste a dobrar....

David. Pensei nas figuras.

David. Eu vi e depois dobrei um pouco.

Inv. Dobraste a figura e viste o quê?

David. Outra.

Inv. Que era o quê?

David. Era a primeira.

Inv. Em quantas partes é que tu dobraste?

David. Em quatro.

Inv. Então tu dobraste o quadrado grande em quatro partes iguais e viste que cada parte correspondia ao quê?

David. Que era uma quarta parte do novo.

Inv. Ok. O que é que era uma quarta parte?

David. Quatro vezes esse é o desenho novo.

Inv. Quatro dessas figuras iniciais é isso?

David. Sim.

Inv. Como é que eu construí esta figura?

David. Multiplicando por quatro.

Inv. Multiplicando por quatro, só isso? Como é que eu consegui que ela tivesse esta forma?

David. Não sei.

David. Eu vou ver quantas vezes é que [losangos] estão aqui.

David. Quadrado grande...

Inv. Qual é o quadrado grande?

David. Este.

Inv. E estás a fazer esse movimento com o dedo à volta do contorno.

David. Sim.

Inv. E o que é que é pedido?

David. A medida da área da figura grande do meio.

David. Uma, duas, três e quatro, estão quatro (losangos).

Inv. Eu não percebi podes explicar melhor?

David. Faz um retângulo.

Inv. Faz um quê?

David. Faz a figura.

David. Eu vou ver quantas vezes é que estão aqui [quantos losangos compõem o quadrado gigante]. Uma, duas, três e quatro, estão quatro.

David. Uma, duas, três e quatro, estão quatro.

Inv. Eu não percebi podes explicar melhor?

David. Isto [triângulo correspondente a B] mais isto [triângulo correspondente a B], mais ou menos como fiz na outra, é juntar as pontas [uniu os menores lados de dois triângulos B].

Inv. Estás a enrolar a figura e a unir as pontas e assim vês que...

Inv. Qual é a medida da área desta figura?

David. Medida de área?

Inv. Sim.

David. Eu sei que é quatro figuras.

Inv. Mas nós queremos saber qual é a área desta.

David. Qual é a área?

Inv. A área desta.

David. É um quarto do painel.

Inv. Quais são os conceitos que estavam envolvidos?

David. A área, os eixos de simetria e não sei.

Inv. E agora tenho uma perguntinha que é: Qual seria a área da figura do meio, se em vez de termos esta figura, tivéssemos esta?

David. 1,2,3, 4. É igual.

Inv. Como é que tu sabes como seria a mesma?

David. Isto é o 4 desta figura. Esta figura $\times 2$ é 2, e $1 + 2$ é 3 com mais 1 é 4

David. É um quarto do painel.

Inv. E agora nós dizemos que a unidade de medida não é este painel, a unidade de medida é a nossa figura original.

David. É isto?

Inv. Esta é a nossa unidade de medida.

David. É um.

Inv. O que é um?

David. A área da figura do meio é um.

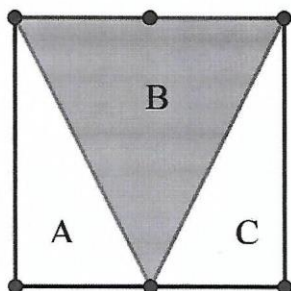
Inv. Porquê, como é que tu sabes isso?

David. O A e o C fazem um B dois B fazem este.

Inv. Fazem essa figura do meio. Ok.

Anexo K. Resolução das tarefas pela Ilda a 14/05/19

Figuras Fascinantes



A figura ao lado é um quadrado que está dividido em 3 triângulos: os triângulos A e C com fundo branco e o triângulo B com um fundo sombreado.

1. Inventa perguntas desafiantes que possam ser respondidas através dos dados que a imagem te sugere.

① Qual é a área do triângulo "B", sabendo que o triângulo A tem como área 3?

② Qual é o perímetro do triângulo "B", sabendo que o triângulo C tem como perímetro 7?

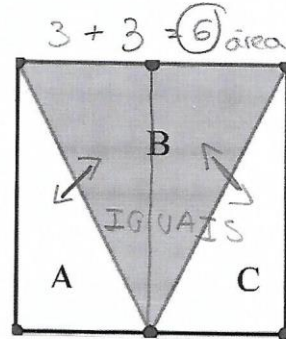
2. Agora que és inventor, resolve os problemas que inventaste.

①

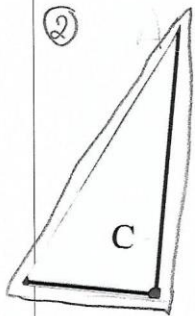
$$\triangle A = 3 \text{ área}$$

$$\triangle C = 3 \text{ área}$$

$$\triangle B = 6 \text{ área}$$



②

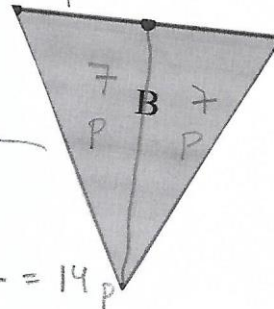


$$= 7 \text{ perímetro}$$

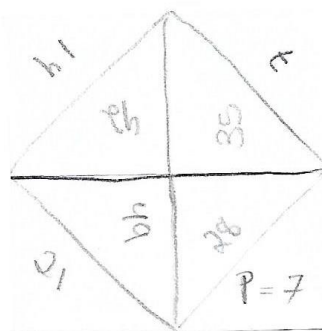
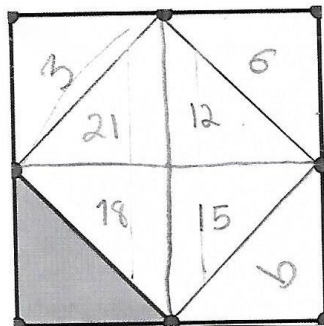


$$= 7 \text{ perímetro}$$

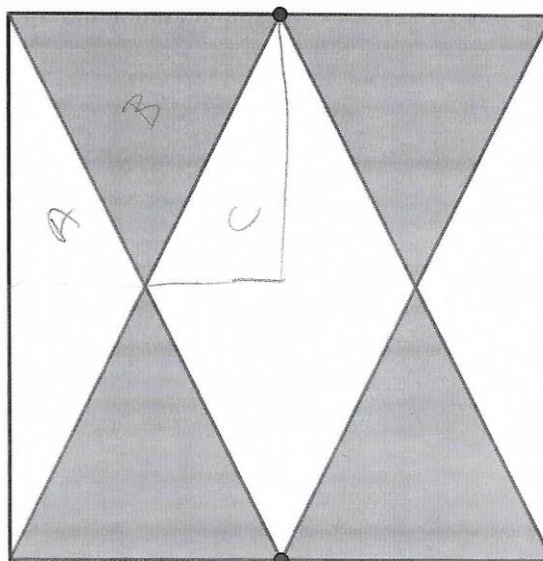
São iguais,
por isso têm
o mesmo
perímetro



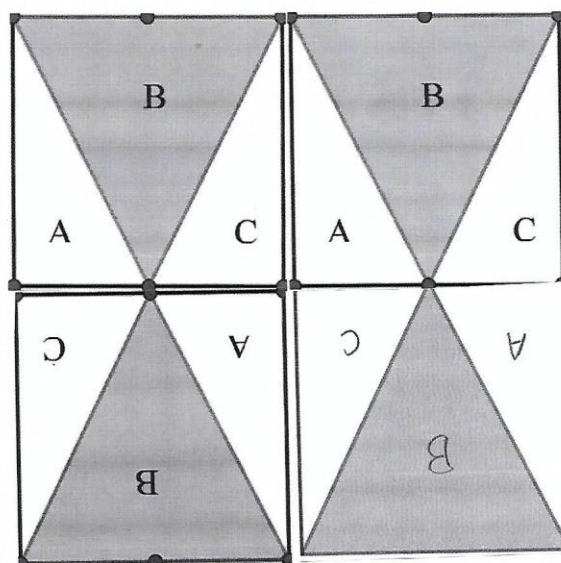
$$7 + 7 = 14p$$



Este é outro quadrado que desenhei usando o anterior.

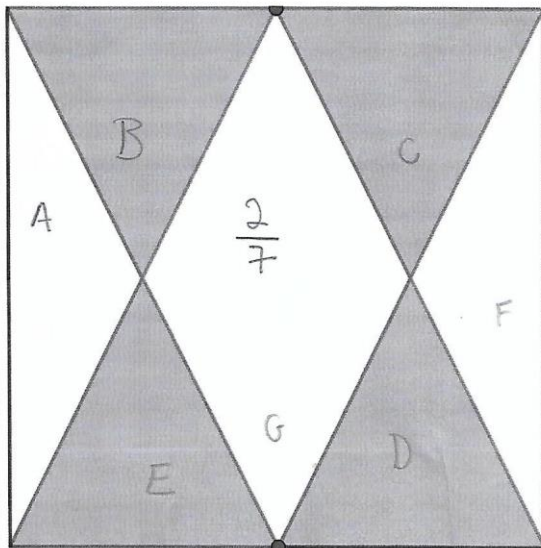


1. Consegues imaginar como é que eu fiz este quadrado a partir do primeiro? Podes usar desenhos para auxiliar a tua explicação.

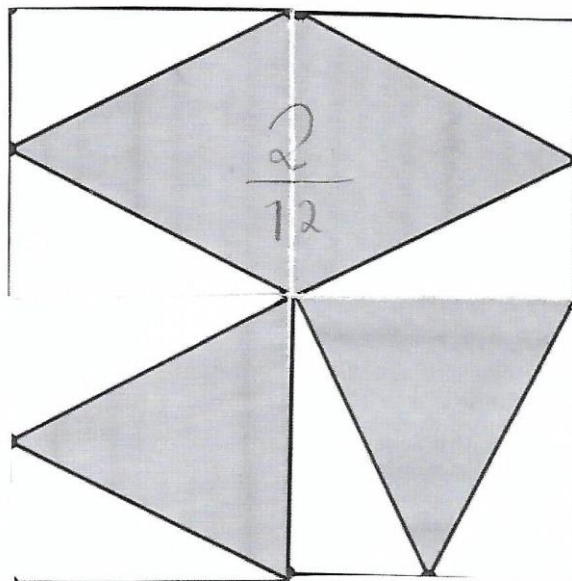


3. Tomando como unidade de medida a área do quadrado gigante, que fração representa a medida da área da figura (com fundo branco) que está no seu centro?

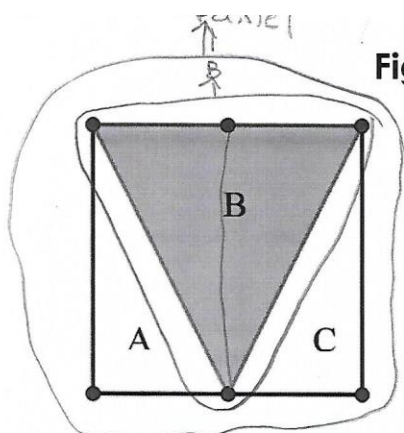
Explica como pensaste (podes usar desenhos para auxiliar a tua explicação).



Como havia 7 triângulos, pensei que cada figura igual à B poderia ser $\frac{1}{7}$. Pensei que eram 8 triângulos, e que a figura do meio (losângulo) eram 2 triângulos, por isso eram $\frac{2}{7}$.



Anexo L. Resolução das tarefas pela Ilda a 14/05/19



Figuras Fascinantes

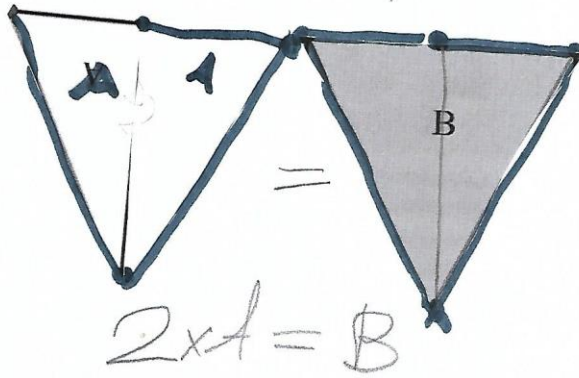
A figura ao lado é um quadrado que está dividido em 3 triângulos: os triângulos A e C com fundo branco e o triângulo B com um fundo sombreado.

1. Inventa perguntas que possam ser respondidas através dos dados que a imagem te sugere.

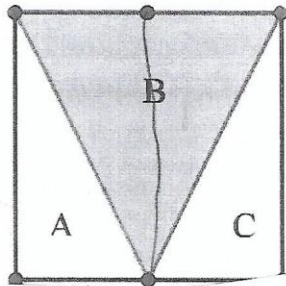
1. Quantas figuras "A" se precisam para fazer uma figura "B"?
2. Quantas figuras "A" se precisam para fazer o painel?

2. Agora que és inventor, resolve os problemas que inventaste.

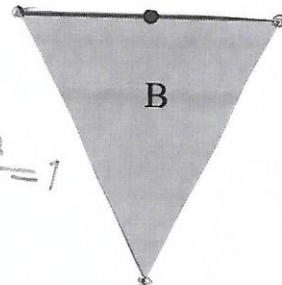
1. $A \times P = B$



2.

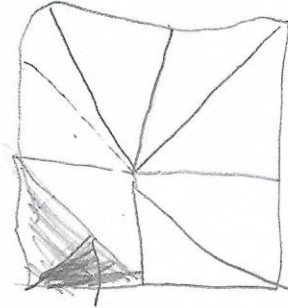


$1 \text{ "A"} + 1 \text{ "A"} = 2 \text{ "A"}$



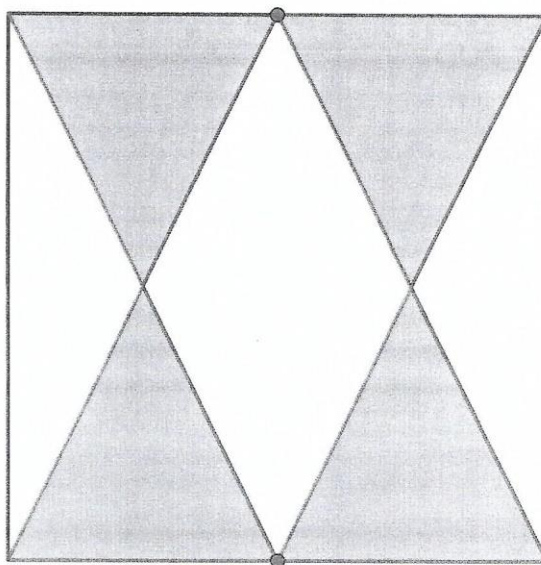
$2 \text{ "A"} = 1$

$2 \text{ "A"} \times 2 = 4 \text{ "A"}$

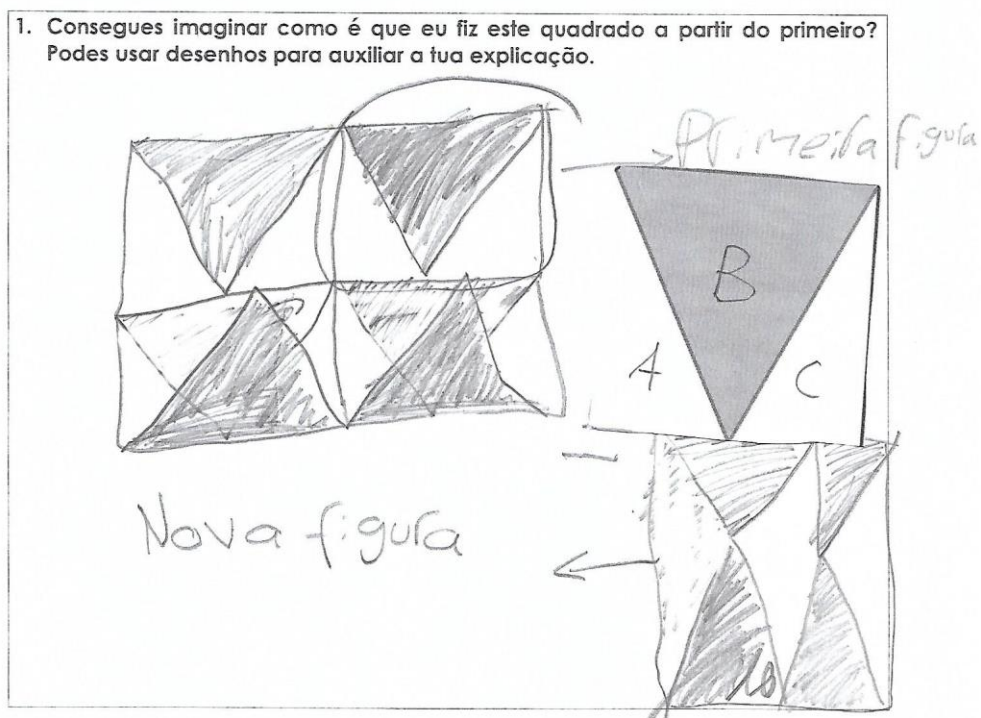


$$\frac{8}{8} = 8$$

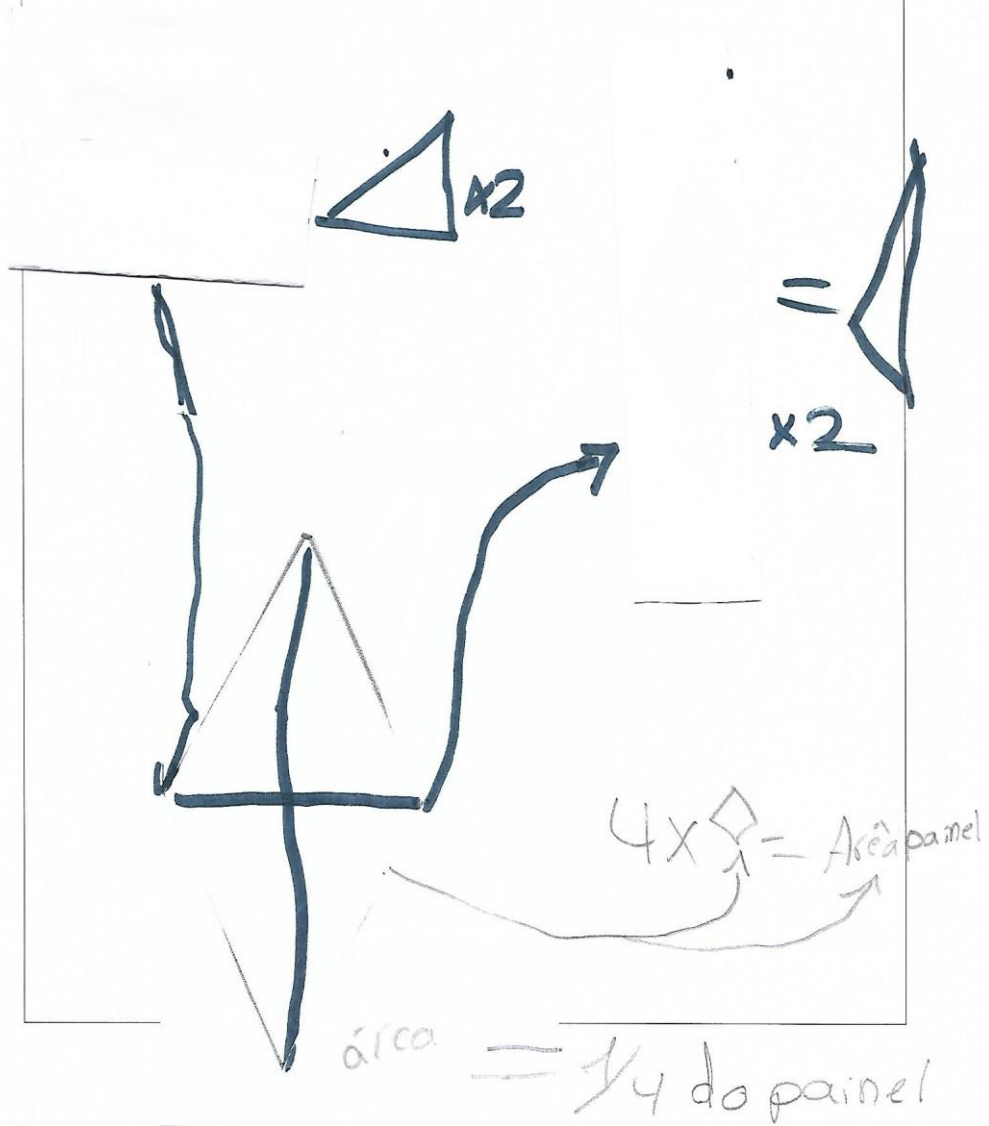
Este é outro quadrado que desenhei usando o anterior.



1. Consegues imaginar como é que eu fiz este quadrado a partir do primeiro?
Podes usar desenhos para auxiliar a tua explicação.



3. Tomando como unidade de medida a área do quadrado gigante, que fração representa a medida da área da figura (com fundo branco) que está no seu centro?
Explica como pensaste (podes usar desenhos para auxiliar a tua explicação).

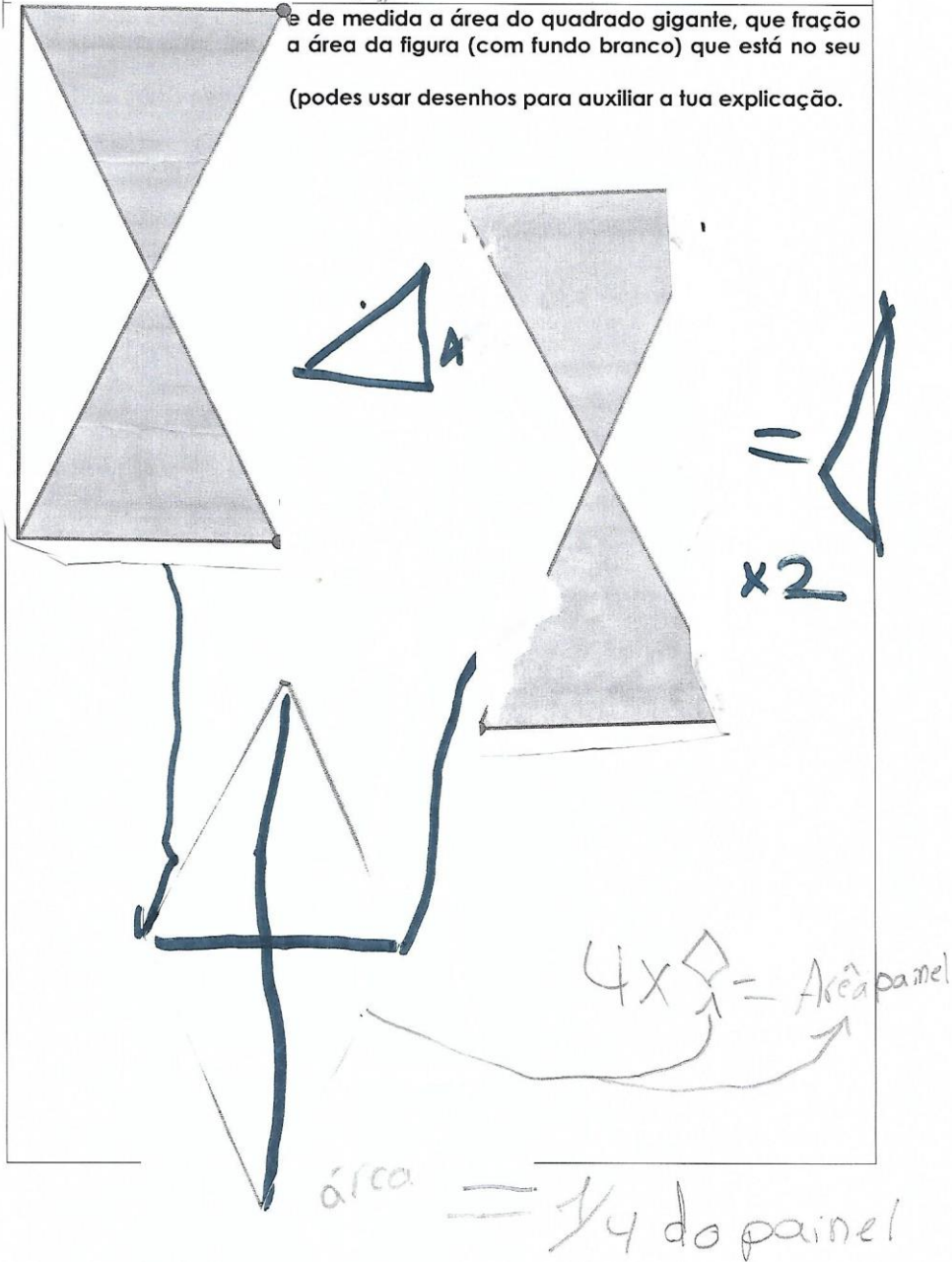


2. Como é que se chama a figura (com fundo branco) que está no centro deste quadrado gigante?

É um quadrado com diferente
ângulo.

Se de medida a área do quadrado gigante, que fração
a área da figura (com fundo branco) que está no seu

(podes usar desenhos para auxiliar a tua explicação.)



Anexo M. Análise categorial dos dados recolhidos - Ilda

FIGURAS FASCINANTES – Ilda				
Entrevista – Unidades de Análise		Leitura de Respostas	Processos	Categorias
1.º Problema formulado: Qual é a área do triângulo B sabendo que o triângulo A tem como área 3?				
1	Investigador (Inv.) Relativamente a este teu primeiro problema qual é o tema? O problema é sobre o quê? Ilda. A área.	Identifica o tema do problema: área.	Identifica o tema.	Descodificar
2	Inv. E quais são os dados importantes que tu dás? Ilda. Queremos saber qual é a área do triângulo B e o triângulo A tem como 3.	Identifica os dados: áreas dos triângulos B (incógnita) e A (dado); o triângulo A tem 3 unidades de medida de área.	Identifica os dados.	Descodificar
3	Inv. E o que é que tu tens de descobrir? Ilda. Qual é a área do triângulo B.	Identifica a área do triângulo B como sendo a incógnita.	Identifica a incógnita.	Descodificar
4	Inv. E o que é que terás de fazer para descobrir isso? Ilda. Saber qual é a área dos outros triângulos que é 3, a do A é 3 e o triângulo C é igual a A, por isso são os dois 3 e depois <i>vi</i> que metade do triângulo B é um triângulo A ou C. Então eu <i>juntei</i> , é como se tivesse juntado o A e o C e formou-se uma única figura. Inv. Ok. Dizes isso porque sobreposeste a figura A em C e nas metades de B.	Identifica os dados: área dos triângulos A e C; relação de equivalência das áreas dos triângulos A e C (informação presente na figura); explicitamente toma a área do A como unidade de medida.	Identifica os dados.	Descodificar

	Ilda. Sim.	Começa a explicitar as relações que permitem resolver o problema (restrições).		
6	Inv. Puseste por cima. E como é que descobriste que a área do B era o dobro da área do A? Ilda. Eu dividi o B e vi que se juntarmos A e C, que <u>estes dois são iguais</u> . [sobrepôs o A nas duas metades de B e verificou que o A ou o C são metades de B]	Determina que A e C são metades de B.	Obtém a solução ao mesmo tempo que identifica relações matemáticas.	Executar
8	Inv. Qual é a resposta ao problema? Ilda. O triângulo A tem 3 de área e depois eu dividi o B ao meio e percebi que metade do triângulo B é igual a um A e a outra metade é igual a um C. Então, se juntarmos, como os dois têm 3 de área, temos de fazer, 3 mais 3 que são 6.	Refere que a figura B tem 6 unidades de área, porque a figura B é composta por duas figuras A e cada A tem 3 unidades de área, pelo que a área de B será a adição da área de duas figuras A (3+3).	Executa um procedimento.	Executar
11	Ilda. 21 de área. Inv. E como é que tu sabes isso? Ilda. Porque o triângulo pequeno. <u>E se acrescentássemos aqui era 24 então o quadrado todo é 24 de área menos um quadradinho é 21</u> porque eu fui juntando à volta fui pondo, pontinho com pontinho até fazer tudo à volta e depois fiquei com um quadrado e então fui fazendo de várias maneiras até conseguir que o quadrado com o triângulo pequenino coubesse num quadrado daqueles.	Refere que a figura branca é composta por 7 triângulos (21:3). Refere que a o painel tem 24 unidades de medida de área, pelo que a figura branca terá 21 unidades de medida de área (24-3).	Executa um procedimento.	Executar

4	<p>Inv. E o que é que terás de fazer para descobrir isso?</p> <p>Ilda. <u>Saber quais os outros triângulos que a área é 3.</u></p> <p><u>A do A é 3 e o triângulo C é igual a A, por isso são os dois 3 e depois vi que metade do triângulo B é um triângulo A ou C. Então eu juntei, é como se tivesse juntado o A e o C e formou-se uma única figura.</u></p> <p>Inv. Ok. Dizes isso porque sobreposeste a figura A em C e nas metades de B.</p> <p>Ilda. Sim.</p>	<p>Une as figuras A e C para as sobrepor em B e determinar se correspondem, respetivamente, a metade da figura B.</p>	<p>Identifica / infere um modelo matemático / relações matemáticas.</p>	<p>Processar</p>
7	<p>Inv. Então e que conceitos matemáticos é que achas que estão envolvidos nesse problema?</p> <p>Ilda. A área.</p> <p>Inv. Só, mais nada?</p> <p>Ilda. E a adição.</p> <p>Inv. Mais nada?</p> <p>Ilda. Mais nada.</p>	<p>Identifica os conceitos matemáticos de área e adição.</p>	<p>Identifica / infere conceitos relacionados com o processo que usou para resolver o problema.</p>	<p>Processar</p>
10	<p>Inv. O que é que fizeste?</p> <p>Ilda. Fui juntando à volta fui pondo, pontinho com pontinho até fazer tudo à volta e depois fiquei com um quadrado e então fui fazendo de várias maneiras até conseguir que o quadrado com o triângulo pequenino coubesse num quadrado daqueles.</p>	<p>Sobre põe o triângulo na figura branca, para determinar o número de triângulos que compõem essa mesma figura.</p>	<p>Identifica / infere um modelo matemático / relações matemáticas.</p>	<p>Processar</p>
4	<p>Inv. E o que é que terás de fazer para descobrir isso?</p> <p>Ilda. Saber qual é a área dos outros triângulos que é 3, a do A é 3 e o triângulo C é igual a A, por isso são os</p>	<p>Une as figuras A e C.</p>	<p>Efetua uma ação sobre objetos físicos.</p>	<p>Representar</p>

	<p>dois 3 e depois <u>vi</u> que metade do triângulo B é um triângulo A ou C. <u>Então eu juntei, é como se tivesse juntado o A e o C e formou-se uma única figura.</u></p> <p>Inv. Ok. <u>Dizes isso porque sobreposeste a figura A em C e nas metades de B.</u></p> <p>Ilda. Sim.</p>			
5	<p>Inv. Antes de começares a resolver, o que é que tu viste na tua cabeça ou o que é pensaste?</p> <p>Ilda. Nada.</p> <p>Inv. Começaste a escrever sem pensar?</p> <p>Ilda. Comecei a escrever qual era a área do A, a área do C e a área do B. Primeiro fiz a área do A e do C, como percebi que eram iguais e depois.</p> <p>Inv. Como é que percebeste que elas eram iguais?</p> <p>Ilda. Olhando para a figura. Também pus assim por cima.</p>	<p>Anota no painel a área de cada figura.</p> <p>Refere que sobrepôs as figuras A e C.</p>	<p>Efetua uma ação sobre objetos físicos.</p>	<p>Representar</p>
6	<p>Inv. Puseste por cima. E como é que descobriste que a área do B era o dobro da área do A?</p> <p>Ilda. Eu dividi [traçou um eixo de simetria] o B e vi que se juntarmos A e C, que estes dois são iguais [sobrepôs A e C].</p>	<p>Manipula figuras A e traça um eixo de simetria de B.</p>	<p>Efetua uma ação sobre objetos físicos.</p>	<p>Representar</p>
8	<p>Inv. Qual é a resposta ao problema?</p> <p>Ilda. O triângulo A tem 3 de área e depois eu dividi o B ao meio e percebi que metade do triângulo B é igual a um A e a outra metade é igual a um C. Então, se</p>	<p>Refere que dividiu B sobrepôs as figuras A e C.</p>	<p>Efetua uma ação sobre objetos físicos.</p>	<p>Representar</p>

	juntarmos, como os dois têm 3 de área, temos de fazer 3 mais 3, que são 6.			
9	Inv. E, por exemplo, se eu te desse esta figura e te dissesse que este triângulo tem 3 de área e te perguntasse quanto é que a restante figura teria de área, como é que farias? (cortou o triângulo pequeno e tenta determinar se pavimenta o quadrado)	Corta o triângulo pequeno e sobrepõem-no na figura branca.	Efetua uma ação sobre objetos físicos.	Representar
2.º Problema formulado: Qual é o perímetro da figura B, sabendo que a figura A é 7?				
12	Inv. Qual é o contexto do problema? Qual é o tema do problema? Ilda. É o perímetro.	Identifica o tema: o perímetro.	Identifica o tema.	Descodificar
13	Inv. Quais são os dados importantes? Ilda. Que nós queremos saber qual é o perímetro do triângulo B e saber que o triângulo C tem como perímetro 7.	Identifica os dados: perímetros dos triângulos B e A; o triângulo C tem 7 unidades de medida de perímetro; Identifica a incógnita: o valor desconhecido do perímetro do triângulo B.	Identifica os dados.	Descodificar
16	Ilda. Eu escrevi como a A e a C são iguais, por isso têm o mesmo perímetro, que é 7 e depois como eu já tinha percebido que estas duas são metade do triângulo B, fiz 7 mais 7 que é 14.	Afirma que o perímetro de B é 14 (7+7).	Executa um procedimento.	Executar

18	<p>Inv. E, por exemplo, tens outra figura e sabes que o perímetro deste triângulo é 7 e queres saber o perímetro da figura que está a branco. Como é que tu podes descobrir isso?</p> <p>Ilda. Tenho de fazer a mesma divisão de antes, eu aprendi que temos de fazer isto. Neste problema tem a multiplicação.</p> <p>Inv. Porquê?</p> <p>Ilda. 7,14,21,28,35,42 e 49 é a tabuada do 7, do 7x7, tem 49 (de perímetro).</p>	Recita os produtos da tabuada do 7 até aos fatores 7x7 e afirma que o perímetro da figura branca é 49 (7x7).	Executa um procedimento.	Executar
19	<p>Inv. Agora vamos pensar que continuavas com a mesma imagem do enunciado, mas que o A não tem perímetro 7, tem perímetro 10. Qual será o perímetro de B?</p> <p>Ilda. 20</p> <p>Inv. Porquê? Como é que tu sabes isso?</p> <p>Ilda. Porque como eu disse, a figura A e a C são metade da B, portanto é o dobro...</p>	Determina que B é o dobro de A e de C, pelo que o perímetro de B será o dobro do perímetro de A ou de C. Determina o perímetro de B como 20 (2x10).	Executa um procedimento.	Executar
14	<p>Inv. Então, tu acabaste de me dizer o que nós queremos saber. E como é que podemos saber isso?</p> <p>Ilda. Fazendo. Como sabemos o perímetro da figura C e como eu percebi antes que a figura A é igual a C, então é 7. Como eu já tinha feito antes, a B é o dobro da figura C, ou seja, este [A] é a metade deste [B]. A B é o dobro da A e da C, então temos de juntar para saber o perímetro da B.</p>	Ultrapassa o modelo mental, devido aos conhecimentos anteriores. Pensa que a área varia com o perímetro: parece achar que o dobro da área corresponde ao dobro do perímetro.	Identifica / infere um modelo matemático / relações matemáticas.	Processar

		Afirma que a figura B tem o dobro do perímetro de A, porque é o dobro do tamanho de A. Refere que terá de adicionar os perímetros de A e de C para determinar o perímetro de B.		
17	Inv. E quais são os conceitos matemáticos envolvidos neste problema? Ilda. O perímetro e a adição. Inv. Mais nada? Ilda. Mais nada.	Identifica como conceitos matemáticos envolvidos no problema: perímetro e adição.	Identifica / infere conceitos relacionados com o processo para resolver o problema.	Processar
15	Inv. O que é que tu imaginaste? Como é que tu pensaste? Ilda. Eu cortei a figura, como cortei todas as figuras. Cortei assim a C, a B e a A e depois vi que a C tinha 7 de perímetro [sobrepôs C em A].	Corta as figuras A, B e C. Sobrepõe a figura C em A.	Efetua uma ação sobre objetos físicos.	Representar
Resolução de problema				
1.ª parte				
20	Inv. Então em relação a esta primeira parte, esta parte é sobre o quê? Ilda. Simetrias. Inv. Mais alguma coisa? Ilda. Não.	Identifica o tema do problema: simetrias.	Identifica o tema.	Descodificar

21	<p>Inv. Ok. E quais são os dados importantes?</p> <p>Ilda. Que esta figura foi construída por quatro quadrados dos de antes.</p>	Refere que a figura foi construída por quadrados originais.	Identifica os dados.	Descodificar
21	<p>Inv. Ok. E quais são os dados importantes?</p> <p>Ilda. Que esta figura foi construída por quatro quadrados dos de antes.</p>	Refere que a figura foi construída por quadrados de antes.	Obtém a solução ao mesmo tempo que identifica as relações matemáticas.	Executar
22	<p>Inv. E o que é que tu tens de fazer para descobrir como é que eu desenhei essa figura?</p> <p>Ilda. Eu primeiro não estava a ver, mas quando disse que usámos o anterior, eu peguei num quadrado dos pequeninos e fui juntando e percebi que havia 4 [quadrados originais]. O primeiro eu pus aqui assim e virei e percebi logo que dava.</p>	Refere que o quadrado gigante é composto por 4 quadrados originais.	Obtém a solução ao mesmo tempo que identifica as relações matemáticas.	Executar
23	<p>Ilda. O primeiro eu pus aqui assim e virei e percebi logo que dava.</p> <p>Ilda. Este é o B, este é o A e este é o C.</p> <p>Inv. E tu experimentaste logo ou será que viste isso antes na tua cabeça?</p> <p>Ilda. Experimentei logo.</p>	Identifica as partes que correspondem aos triângulos A, B e C do quadrado original. Refere simetrias de rotação.	Obtém a solução ao mesmo tempo que identifica as relações matemáticas.	Executar
22	<p>Inv. E o que é que tu tens de fazer para descobrir como é que eu desenhei essa figura?</p> <p>Ilda. Eu primeiro não estava a ver, mas quando disse que usámos o anterior, eu peguei num quadrado dos pequeninos e fui juntando [pavimentou, usando 4</p>	Sobrepõe o quadrado original no quadrado gigante, rodando-o, para determinar quantos dos originais formam o quadrado gigante.	Identifica / infere um modelo matemático / relações matemáticas.	Processar

	quadrados originais, rodando-os] e percebi que havia 4.			
24	Inv. E que conceitos matemáticos estão relacionados com esta parte? Ilda. Simetria.	Identifica conceitos matemáticos envolvidos no problema: simetria.	Identifica / infere conceitos relacionados com o processo para resolver o problema.	Processar
25	Inv. E se fosse outra figura, por exemplo, se fosse esta figura, como é que eu a construiria? Ilda. É a mesma coisa só que a figura é virada ao contrário. Mas aqui, nas partes de cima, a figura está virada ao contrário da figura original e nas partes de baixo está para cima.	Aplica o mesmo modelo matemático de antes: manipula a figura original (roda, desliza), para determinar como o quadrado gigante é composto.	Identifica / infere um modelo matemático / relações matemáticas.	Processar
22	Inv. E o que é que tu tens de fazer para descobrir como é que eu desenhei essa figura? Ilda. Eu peguei num quadrado [original] e pus em todos os lados do quadrado grande e depois percebi que havia 4 iguais.	Sobre põe o quadrado original no quadrado gigante.	Efetua uma ação sobre objetos físicos.	Representar
2.ª parte				
26	Inv. Qual é o tema do nosso problema? Ilda. Contagens.	Identifica o tema do problema: contagens.	Identifica o tema.	Descodificar
27	Inv. E quais são os dados importantes? Ilda. Os triângulos iguais ao B, o C, o D e o E eram um sétimo.	Identifica os dados: área dos triângulos B, C, D e E.	Identifica os dados.	Descodificar

	<p>Inv. Esse é o nosso dado importante? Não há mais nada?</p> <p>Ilda. Não.</p>			
28	<p>Inv. Ok, e o que é que tu tens de descobrir?</p> <p>Ilda. Qual era a unidade de medida de área, para saber o que era o losango do meio.</p>	Identifica a incógnita: área do losango do meio.	Identifica os dados.	Descodificar
27	<p>Inv. E quais são os dados importantes?</p> <p>Ilda. Os triângulos iguais ao B, o C, o D e o E eram um sétimo.</p>	Refere que a fração que representa a área das figuras B, C, D e E é um sétimo.	Obtém solução ao mesmo tempo que identifica as relações matemáticas.	Executar
32	<p>Ilda. Como havia 7 triângulos pensei que cada figura igual à B poderia ser um sétimo. Percebi que eram 8 triângulos e que a figura do meio, o losango, eram dois triângulos, por isso eram dois sétimos.</p>	<p>Afirma que cada figura corresponde a um sétimo da área do quadrado gigante.</p> <p>Afirma que a figura é composta por 8 triângulos e que o losango é composto por dois triângulos.</p> <p>Afirma que o losango corresponde a dois sétimos do quadrado gigante.</p>	Obtém a solução ao mesmo tempo que identifica as relações matemáticas.	Executar
34	<p>Inv. Vamos lá ver... Esta é a nossa nova figura e sabemos que a área deste quadrado grande é um e queremos saber qual é a fração que representa a área deste losango.</p> <p>Ilda. São dois doze avos.</p> <p>Inv. Podes explicar-me porquê?</p> <p>Ilda. Porque havia 12 figuras e aquelas eram duas só.</p>	<p>Identifica a fração que representa a área do losango como dois doze avos.</p> <p>Afirma que doze é o número de figuras que compõe o quadrado gigante e que dois é o número de figuras que compõe o losango.</p>	Executa um procedimento.	Executar

	<p>Inv. Ok, dividiste o quadrado grande em várias figuras.</p> <p>Ilda. Já estavam divididas eu contei.</p>			
30	<p>Inv. O que é que pensaste que te levou a anotar essas letras?</p> <p>Ilda. Eu tive de escrever as letras para que quando escrevesse o texto soubesse qual era a figura que eu teria de dizer que era a unidade de medida.</p> <p>Inv. Ok. Como é que sabias onde escrever as letras?</p> <p>Ilda. Porque são os triângulos.</p>	<p>Identificou cada triângulo por uma letra, para facilitar a referência à unidade de medida.</p> <p>Parece que refere o losango como um triângulo.</p>	<p>Identifica / infere um modelo matemático / relações matemáticas.</p>	<p>Processar</p>
31	<p>Ilda. Temos de pensar que a figura está dividida em partes certo?</p>	<p>Refere a necessidade de pensar que a figura está dividida em parte, supostamente iguais.</p>	<p>Identifica / infere um modelo matemático / relações matemáticas.</p>	<p>Processar</p>
33	<p>Inv. E quais são os conceitos matemáticos que estão envolvidos, aqui?</p> <p>Ilda. As frações, as contagens mais nada.</p> <p>Inv. Mais nada? Não há mais nenhum conceito matemático aqui envolvido?</p> <p>Ilda. Sim</p> <p>Inv. Tens a certeza?</p> <p>Ilda. Sim.</p>	<p>Identifica como conceitos matemáticos envolvidos no problema: frações e contagens.</p>	<p>Identifica / infere conceitos relacionados com o processo para resolver o problema.</p>	<p>Processar</p>

Anexo N. Análise categorial dos dados recolhidos - David

FIGURAS FASCINANTES – David					
Entrevista – Unidades de Análise		Leitura de Respostas	Processos	Categorias	
1.º Problema formulado: Quantas figuras A se precisam para fazer uma figura B?					
1	<p>Investigador (Inv.) Qual é o tema de cada um dos teus problemas?</p> <p>Inv. O problema é sobre o quê?</p> <p>David. É sobre a área.</p>	Identifica o tema do problema: área.	Identifica o tema.	Descodificar	
2	<p>David. Cada um dos meus problemas é sobre o A.</p> <p>Inv. Sobre o A? Então o problema é sobre o quê?</p> <p>David. É igual ao C.</p>	Identifica dados: área dos triângulos A e C; a equivalência das áreas dos triângulos A e C (informação presente na figura); implicitamente toma a área do A como unidade de medida.	Identifica os dados.	Descodificar	
3	<p>Inv. E o que é que tu tens de descobrir?</p> <p>David. Quantas figuras A se precisam para fazer uma figura B?</p>	Identifica a restrição que implica o número desconhecido de figuras A que compõem a figura B.	Identifica os dados.	Descodificar	
6	<p>Inv. E relativamente a estes dois problemas que tu formulaste, o que é que tu tinhas de fazer para descobrir as respostas a esses problemas?</p> <p>David. É multiplicar o A por números pares.</p>	Refere que percebeu, através do enunciado, que teria de multiplicar o A por números pares, para	Identifica os dados.	Descodificar	

	<p>Inv. Porquê?</p> <p>David. Porque se... porque aqui perguntava quantas figuras A é que se precisava para fazer a figura B.</p>	determinar quantos A's precisaria para compor uma figura B.		
8	<p>Inv. E como é que tu farias isso?</p> <p>David. Se tinha imensos A's podia pô-los em cima de B e ver quantos cabiam.</p>	Refere a ação de realizar rotações e reflexões para determinar o número de figuras A que cobriam B.	Identifica os dados.	Descodificar
15	<p>David. Porque eu vi logo que era metade, porque o triângulo B faz um triângulo grande, porque a geometria é assim.</p>	Identifica o contexto do problema: geometria e medida	Identifica o tema.	Descodificar
4	<p>Inv. Ok. E quais são os dados importantes?</p> <p>David. Já sabia que era metade: 1, 2, 3, 4 é 4.</p>	<p>Implicitamente identificou a forma como pode aplicar o modelo matemático: contagem.</p> <p>Conta o número de vezes que o A é usado para compor o quadrado.</p> <p>Indica que o A cabe 4 vezes no painel.</p>	Executa um procedimento.	Executar

9	<p>Inv. E aqui tens a resolução, não é? Então o que é que tu fizeste aqui?</p> <p>David. Eu multipliquei. Como não podia pôr em cima, eu fiz assim.</p> <p>Inv. Isso é o quê?</p> <p>David. E fiz a mesma figura: os dois A's juntos, formam a figura B. É mais ou menos igual.</p>	Indica que determinou o dobro, multiplicando por dois ou adicionando dois termos iguais $2x A=B$; $A+A=B$.	Obtém a solução ao mesmo tempo que identifica as relações matemáticas.	Executar
13	<p>Inv. E quantas vezes é que o A teve de multiplicar para chegar ao B?</p> <p>David. Duas vezes.</p>	Percebeu que metade de B era A e relacionou o facto de a figura B ser o dobro da figura A com a multiplicação (2x).	Obtém a solução ao mesmo tempo que identifica as relações matemáticas.	Executar
14	<p>Inv. Duas vezes? Como é que tu pensaste nisso?</p> <p>David. Porque eu vi logo que era metade, porque o triângulo B faz um triângulo grande, porque a geometria é assim.</p>	Refere que dois A's compõem um B, isto é, que as metades de B são A's.	Obtém a solução ao mesmo tempo que identifica as relações matemáticas.	Executar
4	<p>Inv. Ok. E quais são os dados importantes?</p> <p>David. Já sabia que era metade: 1, 2, 3, 4 é 4.</p>	Implicitamente identificou a forma como pode aplicar o modelo matemático: contagem.	Identifica / infere um modelo matemático / relações matemáticas.	Processar
5	<p>Inv. Como é que tu sabias que é metade?</p> <p>David. <u>Eu sabia desde o princípio.</u></p> <p>Inv. <u>Estás a dobrar o papel.</u></p> <p>David. Eu pensava, <u>porque eu parti ao meio</u></p> <p>Inv. E como é que tu imaginaste isso?</p> <p>David. Imaginando, pronto.</p> <p>Inv. O que é que tu viste na tua cabeça?</p>	Refere que à partida já sabia que figura correspondia a metade de B. Dobra o papel para demonstrar como dividiu a figura mentalmente.	Identifica / infere um modelo matemático / relações matemáticas.	Processar

	David. Alguma coisa, não sei.			
11	Inv. E na tua cabeça, o que é que viste? David. Vejo metades. Vi um x de multiplicação. Inv. Viste um x de multiplicação? David. Sim.	Associa a multiplicação à pavimentação, isto é, para ele a pavimentação é a repetição de figuras.	Identifica / infere um modelo matemático / relações matemáticas.	Processar
12	Inv. Então? David. Porque sabia que tinha de multiplicar. Inv. Como e porquê? David. Por quantas vezes o A tinha de multiplicar para chegar ao B.	Refere que percebeu que tinha de multiplicar o A um determinado número de vezes para determinar quantos A's seriam necessários para compor um B.	Identifica / infere um modelo matemático / relações matemáticas.	Processar
16	Inv. Tu estás a unir dois A's, para ver se vão dar um B, é isso? David. Sim. E deu.	Une dois A's, com a mesma a orientação de B e traça o eixo de simetria de B.	Identifica / infere um modelo matemático / relações matemáticas.	Processar
18	Inv. E neste caso quais são os conceitos matemáticos que tu achas que estavam relacionados com estas...? David. Multiplicação e figuras Inv. Mais alguma coisa? David. Os eixos de simetria que tenho.	Identifica os conceitos matemáticos de: multiplicação, figuras e eixos de simetria.	Identifica / infere conceitos relacionados com o processo para resolver o problema.	Processar
7	Inv. Como é que tu sabias o que tinhas de fazer? David. De ver quantos A's caberiam no B. [sobrepõe figuras A na figura B]	Refere que poderia manipular fisicamente as figuras, isto é, sobrepor figuras A em figuras B,	Efetua uma ação sobre objetos físicos.	Representar

		por forma a determinar quantos A cabiam em B. Efetua uma pavimentação, que é um modelo mental.		
10	<p>Inv. Como é que tu conseguiste pensar nisso?</p> <p>David. Pensei nas metades.</p> <p>Inv. E na tua cabeça, o que é que viste?</p> <p>David. Vejo metades. Vi um x de multiplicação.</p>	Refere que visualizou duas metades de B, ou seja, duas figuras A.	Efetua uma referência a possíveis ações.	Representar
17	<p>Inv. E deu, e foi isso que tu imaginaste?</p> <p>David. Sim. Parti B ao meio [dobrou B num eixo de simetria].</p>	Pensou em dividir a figura B em duas partes iguais.	Efetua uma ação sobre objetos físicos.	Representar
2.º Problema formulado: Quantas figuras A se precisam para fazer o painel?				
19	<p>Inv. O problema é sobre o quê?</p> <p>David. É sobre a área.</p>	Identifica o tema do problema: área.	Identifica o tema.	Descodificar
20	<p>David. Cada um dos meus problemas é sobre o A.</p> <p>Inv. Sobre o A? Então o problema é sobre o quê?</p> <p>David. É igual ao C.</p> <p>Inv. Ok. E quais são os dados importantes?</p> <p>David. É como é o painel, como são as figuras.</p>	Identifica dados: área dos triângulos A e C; relação de equivalência das áreas dos triângulos A e C e a figura B (informação presente na figura); implicitamente toma a área do A como unidade de medida Implicitamente identifica as relações (restrições) que estão presentes no desenho da figura.	Identifica os dados.	Descodificar

21	David. Quantas figuras A se precisam para fazer o painel?	Identifica a incógnita: número desconhecido de figuras A que compõem o painel.	Identifica os dados.	Descodificar
22	Inv. E relativamente a estes dois problemas que tu formulaste, o que é que tu tinhas de fazer para descobrir as respostas a esses problemas? David. É multiplicar o A por números pares. Inv. Porquê? David. Porque se... porque aqui perguntava quantas figuras A é que se precisava para fazer o painel.	Refere que percebeu, através do enunciado, que teria de multiplicar o A por números pares, para determinar quantos A's precisaria para compor o painel.	Identifica os dados.	Descodificar
24	Inv. Ok, muito bem. E aqui, na pergunta 2 como é que tu fizeste isto? David. Eu já sei que o B é dois A's, então, se aqui está um B mais dois A, seriam dois B's. E um B é dois A's, então dois B's seriam quatro A's , porque seria a multiplicar os dois por dois é quatro	Refere que o B é formado por dois A's E que o painel é composto por dois B's. Logo, que o painel é composto por quatro A's, ($2B \times 2A = 4A's$).	Obtém a solução ao mesmo tempo que identifica as relações matemáticas.	Executar
26	Inv. Ok. E, por exemplo, se em vez de ser essa figura, tivéssemos esta e eu dissesse que este triângulo é o A e perguntasse quantos A's há nesse painel. Como é que tu responderias? David. Oito. Inv. Porquê? Podes explicar como é que fizeste? David. Multipliquei 1×8 é 8.	Refere que o painel seria composto por oito A's (1×8).	Executa um procedimento.	Executar

27	<p>David. Primeiro eu achava que a metade da metade...</p> <p>[Aponta para o quadrado pequeno que obteve ao traçar a divisão da figura em quatro partes]</p> <p>David. Isto é o quadrado, se é um cubo eu sei que é um quarto.</p> <p>David. Um quarto de tudo, o quadrado.</p>	<p>Suponho que diz que é um cubo, porque vê uma composição de quadrados.</p> <p>Pode estar a pensar que a figura é composta por quatro quadrados.</p> <p>Refere que um quadrado corresponde a um quarto do painel</p>	<p>Obtém a solução ao mesmo tempo que identifica as relações matemáticas.</p>	<p>Executar</p>
28	<p>Inv. Esse quadrado pequeno seria um quarto da figura?</p> <p>David. Sim. Mas tem de ser o dobro porque dividi ao meio os quatro quadrados pequenos.</p>	<p>Refere que dividiu os quadrados ao meio e que o painel ficou repartido no dobro das figuras.</p>	<p>Obtém a solução ao mesmo tempo que identifica as relações matemáticas.</p>	<p>Executar</p>
29	<p>David. Tem de ser um quarto e um oitavo vem de oito (triângulos iguais ao A que compõem a figura).</p> <p>Inv. Estou a perceber.</p>	<p>Refere que a figura original é composta por oito triângulos.</p> <p>Refere que o triângulo A corresponde a um oitavo da área do painel.</p>	<p>Executa um procedimento.</p>	<p>Executar</p>
30	<p>Inv. E se aqui no teu problema o triângulo A fosse metade do tamanho inicial?</p> <p>David. Era 16. (o painel seria composto por 16 triângulos)</p> <p>David. E se fosse metade da metade era 32.</p>	<p>Usa com segurança a relação metade dobro.</p>	<p>Executa um procedimento.</p>	<p>Executar</p>

24	<p>Inv. Ok, muito bem. E aqui, na pergunta 2 como é que tu fizeste isto?</p> <p>David. Eu já sei que o B é dois A's, então, se aqui está um B mais dois A, seriam dois B's. E um B é dois A's, então dois B's seriam quatro A's, porque seria a multiplicar os dois por dois é quatro</p>	<p>Refere que o B é formado por dois A's E que o painel é composto por dois B's. Logo, que o painel é composto por quatro A's, ($2B \times 2A = 4A's$).</p>	<p>Executa um procedimento.</p>	<p>Processar</p>
25	<p>Inv. E neste caso, quais são os conceitos matemáticos que tu achas que estavam relacionados com estas...?</p> <p>David. Multiplicação e figuras</p> <p>Inv. Mais alguma coisa?</p> <p>David. Os eixos de simetria que tenho.</p>	<p>Identifica os conceitos matemáticos de: multiplicação, figuras e eixos de simetria.</p>	<p>Identifica / infere conceitos relacionados com o processo para resolver o problema.</p>	<p>Processar</p>
27	<p>David. Primeiro eu achava que a metade da metade...</p> <p>[Aponta para o quadrado pequeno que obtive ao traçar a divisão da figura em quatro partes] eu achava que isto era o quadrado, se é um cubo eu sei que era um quarto.</p>	<p>Refere que dividiu a figura duas vezes, em duas partes iguais, ficando com quatro quadrados. Refere-se à figura dividida em quatro quadrados congruentes como sendo um cubo.</p>	<p>Identifica / infere um modelo matemático / relações matemáticas.</p>	<p>Processar</p>

28	<p>Inv. Esse quadrado pequeno seria um quarto da figura?</p> <p>David. Sim. Mas tem de ser o dobro porque dividi ao meio os quatro quadrados pequenos.</p>	<p>Refere que dividiu cada um dos quatro quadrados (quatro quartos) em duas partes iguais</p> <p>Se no quadrado grande há 4 quadrados há o dobro de metades desses quadrados.</p>	<p>Identifica / infere um modelo matemático / relações matemáticas.</p>	<p>Processar</p>
23	<p>Inv. Como é que tu sabias o que tinhas de fazer?</p> <p>David. De ver quantos A's caberiam no painel.</p> <p>Inv. E como é que tu farias isso?</p> <p>David. Se tinha imensos A's, podia pô-los em cima do painel e ver quantos cabiam.</p>	<p>Refere que poderia manipular fisicamente as figuras, isto é, sobrepor figuras A no painel, por forma a determinar quantos A cabiam no painel. Efetua uma pavimentação, que é um modelo mental.</p>	<p>Efetua uma referência a possíveis ações.</p>	<p>Representar</p>
Resolução de problema				
1. ^a parte				
31	<p>Inv. O problema é sobre o quê?</p> <p>David. É sobre figuras.</p>	<p>Identifica o tema do problema: figuras.</p>	<p>Identifica o tema.</p>	<p>Descodificar</p>
32	<p>Inv. E quais são os dados que tu tens?</p> <p>Inv. É o quadrado, é a figura.</p>	<p>Identifica dados: forma da figura, ou seja, do quadrado gigante.</p>	<p>Identifica os dados.</p>	<p>Descodificar</p>
33	<p>Inv. Então eu vou dar-te figuras iguais às originais e iguais ao quadrado gigante. Tenta ver como é que construímos o quadrado gigante.</p> <p>D. Multiplicando por 4. Esta figura [original], multiplicando por 4.</p>	<p>Refere que obtém o quadrado gigante a partir de 4 quadrados pequenos.</p>	<p>Executa um procedimento.</p>	<p>Executar</p>

38	<p>Inv. Então tu dobraste o quadrado grande em quatro partes iguais e viste que cada parte correspondia ao quê?</p> <p>David. Que era uma quarta parte do novo.</p> <p>Inv. Ok. O que é que era uma quarta parte?</p> <p>David. Quatro vezes esse é o desenho novo.</p> <p>Inv. Quatro dessas figuras iniciais é isso?</p> <p>David. Sim.</p>	Refere que o quadrado gigante é quatro vezes maior do que o quadrado original e que o quadrado original corresponde à quarta parte do quadrado gigante.	Obtém a solução ao mesmo tempo que identifica as relações matemáticas.	Executar
39	<p>Inv. Como é que eu construí esta figura?</p> <p>David. Multiplicando por quatro.</p> <p>Inv. Multiplicando por quatro, só isso? Como é que eu consegui que ela tivesse esta forma?</p> <p>David. Não sei.</p>	Refere que o quadrado gigante foi formado por quatro figuras originais.	Executa um procedimento.	Executar
34	<p>David. Fiz os quadrados anteriores multiplicando-os muitas vezes.</p> <p>Inv. Mas como é que fizeste isso? Desenhaste-te, ou fizeste o quê?</p> <p>David. Desenhei.</p> <p>Inv. A primeira coisa que tu fizeste foi desenhar?</p> <p>David. Eu pensei no desenho.</p>	Compõe o quadrado gigante através do desenho da figura original, para determinar o número de figuras originais necessárias para formar o quadrado gigante.	Identifica / infere um modelo matemático / relações matemáticas.	Processar
34	<p>David. Fiz os quadrados anteriores multiplicando-os muitas vezes.</p>	Desenha quadrados originais.	Efetua um desenho das figuras / esquemas.	Representar

	<p>Inv. Mas como é que fizeste isso? Desenhaste-te, ou fizeste o quê?</p> <p>David. Desenhei.</p> <p>Inv. A primeira coisa que tu fizeste foi desenhar?</p> <p>David. Eu pensei no desenho.</p>			
34	<p>Inv. Mas como é que fizeste isso? Desenhaste-te, ou fizeste o quê?</p> <p>David. Desenhei.</p> <p>Inv. A primeira coisa que tu fizeste foi desenhar?</p> <p>David. Eu pensei no desenho.</p>	Refere que pensou no desenho e desenhou os quadrados.	Efetua um desenho das figuras / esquemas	Representar
36	<p>Inv. Quando começaste a dobrar....</p> <p>David. Pensei nas figuras.</p> <p>David. Eu vi e depois dobrei um pouco.</p> <p>Inv. Dobraste a figura e viste o quê?</p> <p>David. Outra.</p> <p>Inv. Que era o quê?</p> <p>David. Era a primeira.</p>	Refere que começou por dobrar o quadrado gigante e que depois visualizou a figura original.	Identifica / infere um modelo matemático / relações matemáticas.	Processar
35	<p>Inv. Como é que pensaste?</p> <p>David. Eu comecei a dobrar [o quadrado].</p>	Dobra o quadrado gigante.	Efetua uma ação sobre objetos físicos.	Representar
37	<p>Inv. Em quantas partes é que tu dobraste?</p> <p>David. Em quatro.</p>	Dobrou o quadrado gigante em quatro partes iguais.	Efetua uma ação sobre objetos físicos.	Representar
2. ^a parte				

41	<p>David. Quadrado grande...</p> <p>Inv. Qual é o quadrado grande?</p> <p>David. Este.</p> <p>Inv. E estás a fazer esse movimento com o dedo à volta do contorno.</p> <p>David. Sim.</p>	Identifica o quadrado gigante, movimentando o dedo à volta do seu contorno.	Identifica os dados.	Descodificar
42	<p>Inv. E o que é que é pedido?</p> <p>David. A medida da área da figura grande do meio.</p>	Identifica dados: losango. Identifica dados: área do losango (incógnita).	Identifica os dados.	Descodificar
52	<p>Inv. E agora nós dizemos que a unidade de medida não é este painel, a unidade de medida é a nossa figura original.</p> <p>David. É isto?</p> <p>Inv. Esta é a nossa unidade de medida.</p>	Identifica dado: unidade de medida.	Identifica os dados.	Descodificar
43	<p>David. Uma, duas, três e quatro, estão quatro (losangos).</p> <p>Inv. Eu não percebi podes explicar melhor?</p> <p>David. Faz um retângulo.</p> <p>Inv. Faz um quê?</p> <p>David. Faz a figura.</p>	Determina que o quadrado gigante estava dividido em quatro losangos.	Executa um procedimento.	Executar

44	<p>David. Eu vou ver quantas vezes é que estão aqui [quantos losangos compõem o quadrado gigante]. Uma, duas, três e quatro, estão quatro.</p> <p>David. Uma, duas, três e quatro, estão quatro.</p> <p>Inv. Eu não percebi podes explicar melhor?</p>	<p>Implicitamente identificou a forma como pode saber quantos losangos compõem o quadrado gigante: contagem.</p>	<p>Executa um procedimento.</p>	<p>Executar</p>
46	<p>Inv. Qual é a medida da área desta figura?</p> <p>David. Medida de área?</p> <p>Inv. Sim.</p> <p>David. Eu sei que é quatro figuras.</p>	<p>Refere que o painel é composto por quatro figuras (losangos).</p>	<p>Obtém a solução ao mesmo tempo que identifica as relações matemáticas.</p>	<p>Executar</p>
47	<p>Inv. Mas nós queremos saber qual é a área desta.</p> <p>David. Qual é a área?</p> <p>Inv. A área desta.</p> <p>David. É um quarto do painel.</p>	<p>Refere que a área do losango do centro é um quarto da área do painel.</p>	<p>Obtém a solução ao mesmo tempo que identifica as relações matemáticas.</p>	<p>Executar</p>
49	<p>Inv. E agora tenho uma perguntinha que é: Qual seria a área da figura do meio, se em vez de termos esta figura, tivéssemos esta?</p> <p>David. 1,2,3, 4. É igual.</p>	<p>Realiza a contagem. O modelo mental não foi ativado, foi ultrapassado por uma representação matemática.</p>	<p>Executa um procedimento.</p>	<p>Executar</p>
50	<p>Inv. Como é que tu sabes como seria a mesma?</p> <p>David. Isto é o 4 desta figura. Esta figura x2 é 2, e 1 +2 é 3 com mais 1 é 4</p>	<p>Indica que determinou o dobro, multiplicando por dois e adicionou outros termos iguais.</p>	<p>Obtém a solução ao mesmo tempo que identifica as relações matemáticas.</p>	<p>Executar</p>
51	<p>David. É um quarto do painel.</p>	<p>Indica que a área do losango é um quarto do painel.</p>	<p>Obtém a solução ao mesmo tempo que identifica as relações matemáticas.</p>	<p>Executar</p>

53	<p>David. É um. Inv. O que é um? David. A área da figura do meio é um.</p>	Refere que a área da figura do meio é um.	Obtém a solução ao mesmo tempo que identifica as relações matemáticas.	Executar
54	<p>Inv. Porquê, como é que tu sabes isso? David. O A e o C fazem um B dois B fazem este. Inv. Fazem essa figura do meio. Ok.</p>	Refere que $A+C=B$ e que $2B$ compõem a figura do meio.	Obtém a solução ao mesmo tempo que identifica as relações matemáticas.	Executar
40	<p>David. Eu vou ver quantas vezes é que [losangos] estão aqui.</p>	Refere que vai determinar quantos losangos compõem a figura.	Identifica / infere um modelo matemático / relações matemáticas.	Processar
45	<p>David. Isto [triângulo correspondente a B] mais isto [triângulo correspondente a B], mais ou menos como fiz na outra, é juntar as pontas [uniu os menores lados de dois triângulos B]. Inv. Estás a enrolar a figura e a unir as pontas e assim vês que...</p>	Manipulou as figuras, dobrando-as e unindo as pontas.	Identifica / infere um modelo matemático / relações matemáticas.	Processar
48	<p>Inv. Quais são os conceitos que estavam envolvidos? David. A área, os eixos de simetria e não sei.</p>	Identifica como conceitos envolvidos: área e eixos de simetria.	Identifica / infere um modelo matemático / relações matemáticas.	Processar

Anexo O. Figuras para aplicação das questões de confirmação/ verificação

Tarefa de Formulação

Questão de confirmação para o primeiro problema formulado pela Ilda:

A figura ao lado é um quadrado que está dividido em duas partes: num triângulo A e numa figura com fundo branco. O triângulo A tem 3 unidades de área. Qual é a área da figura branca?

Questão de confirmação para o segundo problema formulado pela Ilda:

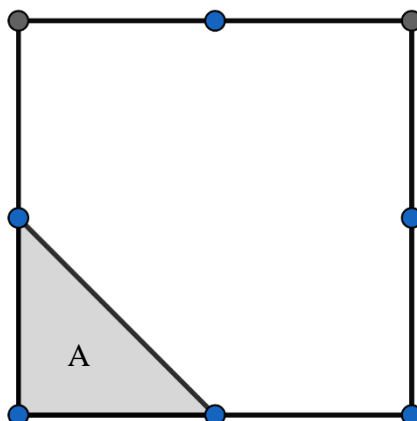
A figura ao lado é um quadrado que está dividido em duas partes: num triângulo A e numa figura com fundo branco. Qual é o perímetro da figura branca, sabendo que a figura A tem 7 de perímetro?

Questão de confirmação para o primeiro problema formulado pelo David:

A figura ao lado é um quadrado que está dividido em duas partes: num triângulo A e numa figura com fundo branco. Quantas figuras A são necessárias compor a figura branca?

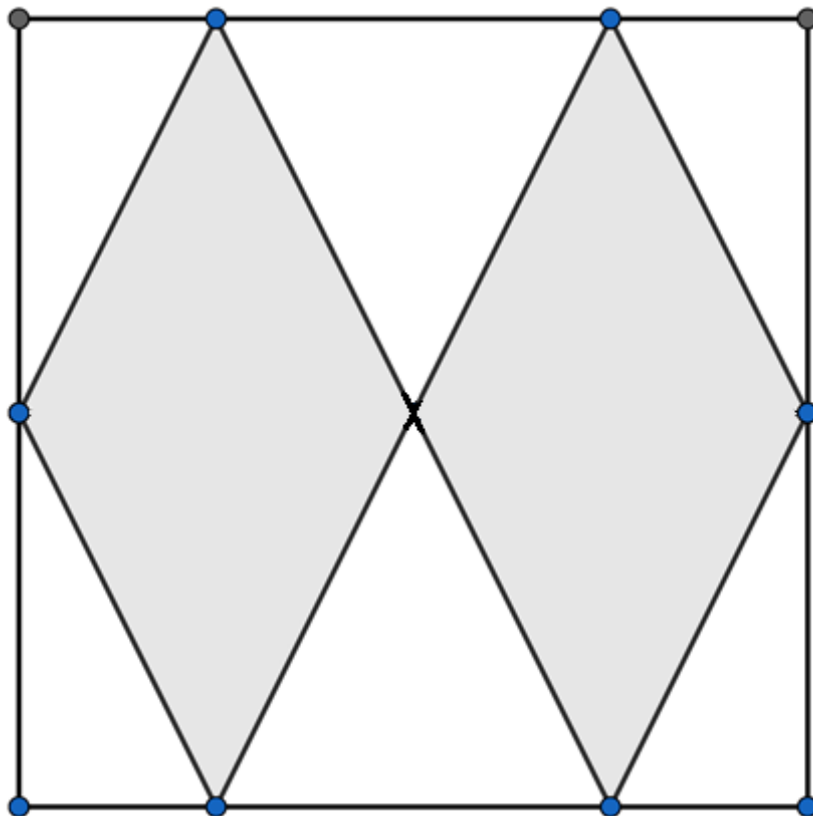
Questão de confirmação para o segundo problema formulado pelo David:

A figura ao lado é um quadrado que está dividido em duas partes: num triângulo A e numa figura com fundo branco. Quantas figuras A são necessárias compor o quadrado?



Tarefa de Resolução

1. Consegues imaginar como é que eu fiz este quadrado a partir do primeiro? Podes usar desenhos para auxiliar a tua explicação.



2. Tomando como uma unidade de medida área do quadrado gigante, que fração representa a medida da área da figura A. Explica como pensaste (podes usar desenhos para auxiliar a tua explicação).

