

STATISTICAL PROCESS CONTROL FOR A RESTRICTED AMOUNT OF DATA

Controlo Estatístico do Processo para Número Reduzido de Dados

José Gomes Requeijo - jfgr@fct.unl.pt

UNIDEMI, Departamento de Engenharia Mecânica e Indústria

Ana Sofia Matos - asvm@fct.unl.pt

UNIDEMI, Departamento de Engenharia Mecânica e Industrial

António Abreu - ajfa@dem.isel.ipl.pt

ISEL/IPL □ Instituto Politécnico de Lisboa, Portugal

Abstract

Some production systems control many quality characteristics with a restricted amount of data, not allowing a convenient estimation of the process parameters (mean and variance), thereby creating a difficulty in implementing the traditional Statistical Process Control (SPC). In order to address this question, the approach suggested is to adopt the developments proposed by Charles Quesenberry, which consists in the statistics sample transformation at time i . This transformation is based on parameter estimation at time $(i - 1)$. This paper addresses two situations, the univariate and multivariate SPC, with the use of Q dimensionless statistics. Both univariate (Q) and multivariate (MQ) statistics are distributed according to standard Normal distribution. It is also suggested the application of new capability indices QL and QU to study the univariate process capability, which are represented in the mean Q control chart to evaluate in real time the performance of the various processes and predict the possibility of production of nonconforming product, which will increase customer satisfaction. The methodology is applicable to different production systems, both for industry and services. Based on a methodology developed, a case study is presented and discussed.

Resumo

Em alguns sistemas produtivos pretende-se controlar várias características da qualidade com um número restrito de dados, não sendo possível estimar convenientemente os parâmetros do processo (média e variância), impossibilitando a implementação do Controle Estatístico do Processo tradicional (SPC). Como resposta, sugere-se a adoção dos desenvolvimentos de Quesenberry, que consiste na transformação das estatísticas no instante i através dos parâmetros estimados no instante $(i - 1)$ considerando-se todos os dados ocorridos até este instante. Este artigo aborda duas situações, o SPC univariado e multivariado, com a aplicação de estatísticas Q . Tanto a estatística Q univariada como a MQ multivariada são distribuídas segundo a distribuição Normal reduzida e assim, o controlo de cada característica pode ser representado num mesmo documento (carta de controlo). É sugerido a aplicação dos índices QL e QS para o estudo univariado da capacidade do processo, que são representados na respetiva carta de controlo Q . Assim é possível em tempo real avaliar o desempenho dos processos e prever a possibilidade de produzir produtos não conformes, aumentando a satisfação do cliente. A metodologia proposta é aplicável a diferentes sistemas produtivos (indústria e serviços). É apresentado um estudo de caso com recurso à metodologia proposta

Keywords

SPC (Statistical Process Control), Q Control Charts, MQ Control Charts, Process Capability

Palavras-chave

SPC (Controlo Estatístico do Processo), Cartas de Controlo Q , Cartas de Controlo MQ , Capacidade do Processo

Controlo Estatístico do Processo para Número Reduzido de Dados

1. Introdução

Os primeiros desenvolvimentos do Controlo Estatístico do Processo (SPC) foram apresentados por Shewhart [1] na Bell Telephone Laboratories, tendo constituído um contributo valioso para a melhoria contínua da qualidade. As cartas de controlo concebidas e desenvolvidas por Shewhart consideram uma única característica da qualidade em estudo e são aplicadas a processos que disponibilizam um grande número de dados. A implementação adequada destas cartas de Shewhart assenta nos seguintes princípios:

- 1) Amostras homogéneas;
- 2) Frequência de amostragem deve maximizar a oportunidade de variação entre amostras;
- 3) Dados independentes, *i. e.*, $x_{ik} = \mu + \varepsilon_{ik}$ ($i = 1, \dots, n$; $k = 1, \dots, m$), onde $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$ é uma variável aleatória designada por ruído branco;
- 4) Limites de controlo das diversas cartas situam-se, relativamente à média da distribuição da estatística amostral (linha central), a ± 3 desvios padrão da mencionada estatística amostral, o que corresponde a um nível de significância igual a 0,27% se a distribuição daquela estatística for Normal.

A realidade atual dos sistemas produtivos é muito diferente da que se verificava quando Shewhart teorizou o controlo estatístico, havendo hoje em dia a considerar, no mesmo sistema, a produção simultânea de muitos artigos em quantidades cada vez menores, o que conduz à necessidade de se desenvolverem metodologias mais adaptadas aos novos contextos. Assim, o controlo estatístico univariado dos processos dos diversos produtos/características tem de ser implementado através de outras cartas de controlo que constituem uma alternativa às de Shewhart. Este assunto tem vindo a ser objecto de estudo por parte de vários investigadores, como Bothe [2], Wheeler [3], Pyzdek [4], Quesenberry [5], Montgomery [6] e Pereira e Requeijo [7], entre outros.

Este tipo de abordagem univariada é habitualmente conhecida como o controlo estatístico das “pequenas produções” (*short runs*). Quando não existem dados suficientes para estimar os parâmetros dos processos, Quesenberry [5] propõe a utilização de cartas de controlo *Q*. A implementação destas cartas de controlo é feita de modo a contemplar no mesmo documento todos os produtos/características, sendo uma forma expedita de controlar facilmente a estabilidade de todos os processos. No que respeita ao controlo estatístico multivariado das “pequenas produções” (*short runs*) para um número restrito de dados, a abordagem de Quesenberry [5] é a mais adequada através de estatísticas multivariadas *MQ*.

Neste artigo abordam-se o controlo das “pequenas produções” quando existe um número restrito de dados, tanto para o estudo univariado como para o multivariado e quando as variáveis em estudo são contínuas. É de referir que em ambas as situações os dados devem ser independentes e Normalmente distribuídos para todas as características da qualidade. No intuito de avaliar continuamente o desempenho dos processos, apresentam-se também os índices de capacidade univariados Q_u e Q_s desenvolvidos por Pereira e Requeijo [7] que possibilitam a análise da capacidade dos mesmos em tempo real.

No sentido de demonstrar a importância e validar a metodologia que se propõe, apresenta-se neste artigo um exemplo de aplicação que contempla o estudo univariado e multivariado através das cartas *Q* e *MQ*.

2. Metodologia

Quando o número de dados referentes às características da qualidade em estudo são em número restrito, *i.e.*, quando não existe informação suficiente para estimar

convenientemente os parâmetros dos processos, os autores do presente artigo sugerem a metodologia que se apresenta na Figura 1.

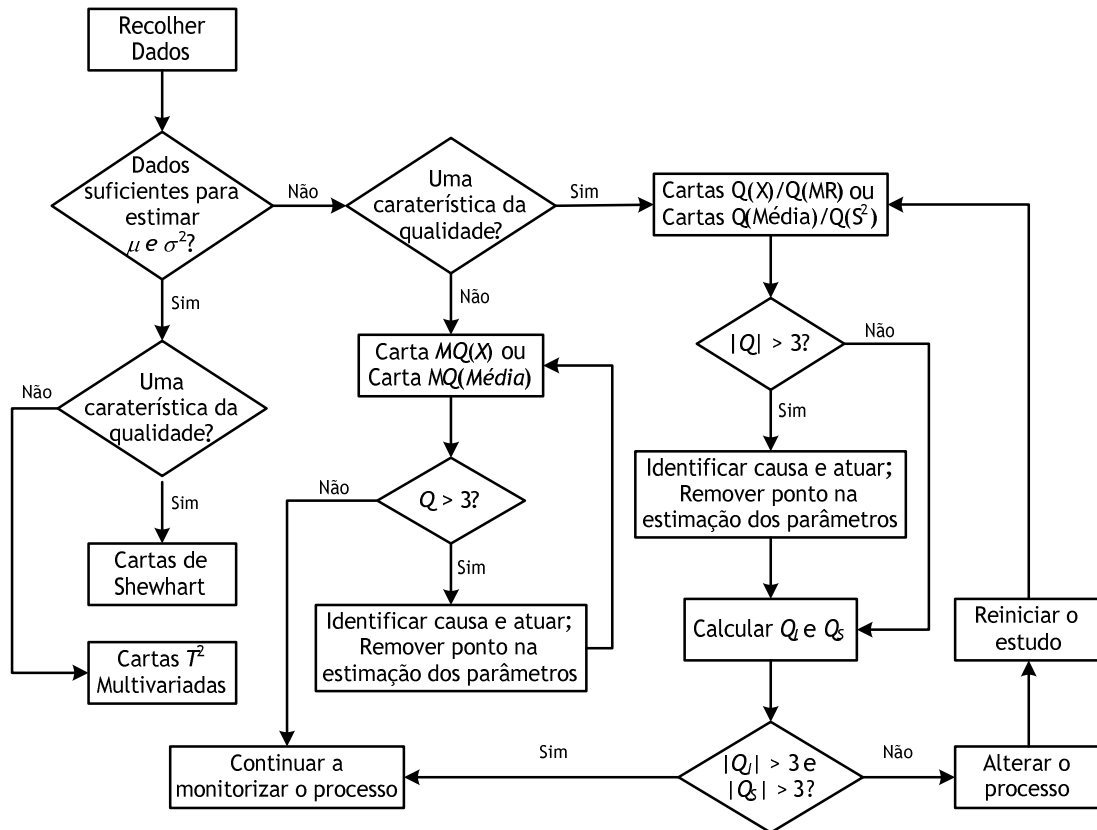


Figura 1 - Metodologia para implementação do SPC para um número restrito de dados

3. SPC para produções com um número restrito de dados

3.1. SPC Univariado

Em alguns casos, dada a existência de um pequeno número de dados, os parâmetros dos processos não poderão ser convenientemente estimados, criando uma manifesta dificuldade na construção das cartas tradicionais de Shewhart e das cartas adimensionais Z e W. Para responder a esta questão, sugere-se a adoção da metodologia desenvolvida por Charles Quesenberry, que consiste na transformação das estatísticas referentes a uma característica da qualidade X numa variável Q, em que X é uma variável contínua. A variável Q segue aproximadamente a distribuição Normal reduzida, com média zero e variância unitária, se a variável X for independente e aproximadamente Normal, $N(\mu, \sigma^2)$. Esta metodologia transforma as estatísticas determinadas no instante i através das estimativas dos parâmetros no instante (i - 1), considerando nessa estimação todos os dados anteriores a esse instante. Duas situações há a considerar, os dados são amostras ou são observações individuais.

3.1.1. Cartas Q para Observações Individuais e Amplitudes Móveis

A estatística Q, no instante r, obtém-se a partir da estatística X nesse instante e é definida por

$$Q_r(X_r) = \Phi^{-1} \left(G_{r-2} \left(\sqrt{\frac{r-1}{r}} \left(\frac{X_r - \bar{X}_{r-1}}{S_{r-1}} \right) \right) \right), \quad r = 3, 4, \dots \quad (1)$$

No que se refere à dispersão do processo, podem utilizar-se duas (ou mais) observações consecutivas para determinar as amplitudes móveis e determina-se uma estatística Q a partir das amplitudes móveis. Assim, a estatística Q , no instante r , que se obtém a partir da estatística MR nesse instante, é definida por

$$Q_r(MR_r) = \Phi^{-1} \left(F_{1,\nu} \left(\frac{\nu (MR_r)^2}{(MR_r^2 + \dots + (MR_{r-2})^2)} \right) \right), \quad r = 4, 6, \dots; \quad \nu = r/2 \quad (2)$$

Nas equações (1) e (2) considera-se X_r a observação no instante r , \bar{X}_{r-1} a média de $(r-1)$ observações, S_{r-1} o desvio padrão da amostra constituída por $(r-1)$ observações, MR_r a amplitude móvel determinada na observação r , $\Phi^{-1}(\bullet)$ o inverso da Função de Distribuição Normal, $G_\nu(\bullet)$ a Função de Distribuição t-student com ν graus de liberdade, $F_{\nu_1, \nu_2}(\bullet)$ a Função de Distribuição de Fisher com ν_1 e ν_2 graus de liberdade.

3.1.2. Cartas Q para Amostras

A partir da estatística amostral \bar{X} determina-se no instante i a estatística $Q(\bar{X})$ definida por

$$Q_i(\bar{X}_i) = \Phi^{-1} \left(G_{\nu_1 + \dots + \nu_i}(\omega_i) \right), \quad i = 2, 3, \dots \quad (3)$$

em que

$$\omega_i = \sqrt{\frac{n_i(n_1 + \dots + n_{i-1})}{n_1 + \dots + n_i}} \left(\frac{\bar{X}_i - \bar{\bar{X}}_{i-1}}{S_{p,i-1}} \right); \quad \nu_i = n_{i-1}; \quad S_{p,i}^2 = \frac{\sum_{j=1}^i \nu_j S_j^2}{\sum_{j=1}^i \nu_j} \quad (4)$$

Igualmente, a variância amostral é transformada na estatística $Q(S^2)$, dada por

$$Q_i(S_i^2) = \Phi^{-1} \left(F_{\nu_i, \nu_1 + \dots + \nu_{i-1}}(\theta_i) \right), \quad i = 2, 3, \dots \quad (5)$$

em que

$$\theta_i = S_i^2 / S_{p,i-1}^2 \quad (6)$$

Nas equações (3) a (6) considera-se n_i a dimensão da amostra i , \bar{X}_i a média da amostra i , $\bar{\bar{X}}_i$ a média das médias de i amostras, $S_{p,i}^2$ a variância combinada de i amostras.

3.1.3. Limites de Controlo

As estatísticas Q são variáveis Normais reduzidas, pelo que os limites de controlo para as cartas $Q(X)$, $Q(MR)$, $Q(\bar{X})$ e $Q(S^2)$ são ± 3 ($\alpha = 0,27\%$).

Um dos graves problemas das cartas Q , consiste na sua fraca sensibilidade na deteção de causas especiais de variação. Para resolver este inconveniente, será prudente utilizar regras destinadas a aumentar a sensibilidade das cartas. Sugere-se a aplicação conjunta da Regra 1

(um ponto fora dos limites de controlo) e Regra 6 (quatro de cinco pontos consecutivos na zona B ou A, do mesmo lado da linha central) referidas na norma ISO 7870-2:2013.

3.1.4. Capacidade do Processo

Sugere-se a utilização dos índices de capacidade Q_I e Q_S desenvolvidos por Pereira e Requeijo [7], definidos no instante r por

$$(\hat{Q}_I)_r = \frac{LIE - \hat{\mu}_r}{k \hat{\sigma}_r} \quad (7)$$

$$(\hat{Q}_S)_r = \frac{LSE - \hat{\mu}_r}{k \hat{\sigma}_r} \quad (8)$$

3.2. SPC Multivariado

Quando não existem dados suficientes para estimar os parâmetros do processo, a solução mais adequada para implementar o controlo estatístico multivariado, á semelhança do univariado, consiste na aplicação das estatísticas Q . Os desenvolvimentos que se apresentam baseiam-se no pressuposto de que a distribuição conjunta das p variáveis é uma distribuição Normal multivariada $N_p(\mu, \Sigma)$. Apenas se apresenta o controlo do vetor média do processo, utilizando cartas de controlo MQ_X e $MQ_{\bar{X}}$.

3.2.1. Cartas MQ para Observações Individuais e Amplitudes Móveis

O vetor X é transformado na estatística MQ . Dado pretender-se detetar desvios do vetor X_r em relação ao vetor média μ e à estrutura da própria estatística, esta é definida, no instante r , por

$$MQ_r(X_r) = \max(0; \Phi^{-1}(F_{p, r-1-p}(A_r))) \quad (9)$$

em que

$$A_r = f \cdot (X_r - \bar{X}_{r-1})' S_{r-1}^{-1} (X_r - \bar{X}_{r-1}) \quad (10)$$

$$f = \left(\frac{(r-1)(r-1-p)}{rp(r-2)} \right), \quad r = p+2, p+3, \dots$$

As estatísticas amostrais das equações (9) e (10) são definidas por

$$X_r = (X_{r1}, X_{r2}, \dots, X_{rp})' \quad (11)$$

$$\bar{X}_r = \frac{1}{r} ((r-1)\bar{X}_{r-1} + X_r) \quad (12)$$

$$S_r = \left(\frac{r-2}{r-1} \right) S_{r-1} + \frac{1}{r} (X_r - \bar{X}_{r-1})' (X_r - \bar{X}_{r-1}) \quad (13)$$

3.2.2. Cartas MQ para Amostras

A estatística MQ no instante r , que representa a transformada do vetor \bar{X} nesse instante, é definida por

$$MQ_r(\bar{X}_r) = \max(0; \Phi^{-1}(F_{p, N_r - r - p + 1}(A_r))) \quad (14)$$

em que

$$A_r = g \cdot (\bar{X}_r - \bar{X}_{r-1})' S_{pool, r}^{-1} (\bar{X}_r - \bar{X}_{r-1}) \quad (15)$$

$$g = \left(\frac{n_r N_{r-1} (N_r - r + 1 - p)}{N_r p (N_r - r)} \right), r = 2, 3, \dots$$

As estatísticas amostrais das equações (14) e (15) são definidas por

$$\bar{X}_r = (\bar{X}_{r1}, \bar{X}_{r2}, \dots, \bar{X}_{rp})' \quad (16)$$

$$\bar{X}_r = \frac{1}{N_r} (N_{r-1} \bar{X}_{r-1} + n_r \bar{X}_r); N_r = n_1 + \dots + n_r \quad (17)$$

$$S_{pool, r} = \frac{1}{N_r - 1} ((N_{r-1} - r + 1) S_{pool, r-1} + (n_r - 1) S_r) \quad (18)$$

$$S_{pool, 0} = 0$$

3.2.3. Limites de Controlo

À semelhança das cartas T^2 , as cartas MQ apenas contemplam o limite superior de controlo, sendo o limite inferior de controlo igual a zero ($LCL = 0$). Assim, estes limites são dados por

$$\begin{aligned} LSC_{MQ} &= +3 \\ LIC_{MQ} &= 0 \end{aligned} \quad (19)$$

4. Estudo de Caso

De forma a ilustrar a aplicabilidade da metodologia sugerida para a implementação do SPC das “pequenas produções” para um número reduzido de dados, apresentada na Figura 1, serão aplicadas dois tipos de cartas de controlo distintos contemplando o estudo univariado e o estudo multivariado.

Foi objeto de estudo a produção de uma determinada tinta que se designa como “Tinta EC15”, tendo-se analisado 25 lotes de fabrico. As características da qualidade em controlo são a brancura, densidade e opacidade.

A abordagem univariada contempla a construção da carta de controlo Q_x para cada uma das três características, como apresentado na Figura 2. A estatística Q foi determinada com base na equação (1), enquanto os índices de capacidade Q_l e Q_s foram obtidos através da aplicação das equações (7) e (8).

Analisando as cartas de controlo univariadas Q_x (Figura 2) é possível detetar uma causa especial de variação referente à característica brancura no lote 21. Os restantes lotes, para as três características da qualidade, encontram-se sob controlo estatístico. No entanto, todas as características têm capacidade ($Q_l < -3$ e $Q_s > 3$, para todos os lotes e características, com exceção do lote 21 referente à característica da qualidade brancura).

O estudo multivariado foi realizado através da carta de controlo MQ_x , apresentada na Figura 3. As estatísticas multivariadas dos 25 lotes foram calculadas com base nas equações de (9) a (13).

Analisando o gráfico MQ_x para “Tinta EC15”, é possível verificar que não existem situações problemáticas, e, portanto, pode-se concluir que o processo está estabilizado para as três características da qualidade.

5. Conclusões

O tradicional SPC, univariado ou multivariado, quando existe um número restrito de dados, não é possível implementar dado que nas duas abordagens é indispensável a estimação dos parâmetros do processo. A sugestão apresentada neste artigo, com a utilização das cartas de controlo Q (estudo univariado) e das cartas de controlo MQ (estudo multivariado) revela-se a escolha mais adequada, não só para o controlo de um ou mais produtos como para vários conjuntos de características da qualidade.

A metodologia apresentada na Figura 1 apresenta diversas vantagens relativamente às abordagens tradicionais, sendo de referir:

- 1) As cartas Q possibilitam o controlo estatístico de todos os produtos/características da qualidade numa mesma carta, mesmo quando não existem dados suficientes para estimar convenientemente os parâmetros dos processos (média e variância);
- 2) As cartas MQ possibilitam o controlo estatístico simultâneo de diversas características da qualidade de vários produtos numa mesma carta, mesmo quando não existem dados suficientes para estimar convenientemente os parâmetros dos processos (vector média e matriz das covariâncias);
- 3) Permite estudar conjuntamente características diferentes;
- 4) Reduz drasticamente o tempo de análise;
- 5) A introdução no estudo univariado (cartas $Q(X)$ ou $Q(\bar{X})$) dos índices de capacidade Q_l e Q_s , permite monitorizar a capacidade dos processos, revelando-se uma mais valia importante;
- 6) A utilização dos índices de capacidade Q_l e Q_s , que permitem estudar a capacidade dos processos em tempo real, diminuiu a probabilidade de produzir unidades não conformes, *i.e.*, produto que não cumpre a especificação técnica.

Uma das maiores desvantagens das cartas de controlo Q consiste na dificuldade em analisar a existência de padrões não aleatórios, aumentando a complexidade desta análise com o número de produtos/características a controlar.

Uma outra desvantagem das cartas Q e MQ , em particular estas últimas, é a fraca sensibilidade em detetar causas especiais de variação, especificamente no início do estudo. Embora a falta de sensibilidade em detetar padrões não aleatórios seja uma limitação das cartas Q e MQ , a sua utilização mesmo assim revela ser de grande importância e utilidade, já que as abordagens tradicionais univariada e multivariada não são passíveis de implementação quando existe um número restrito de dados. Uma forma de aumentar a sensibilidade destas cartas consiste na utilização de cartas com memória, como as cartas de Somas Acumuladas ($CUSUMQ$ e $MCUSUMQ$) e cartas da Média Móvel Exponencialmente Amortecida ($EWMAQ$ e $MEWMAQ$), como referido em Pereira e Requeijo [7].

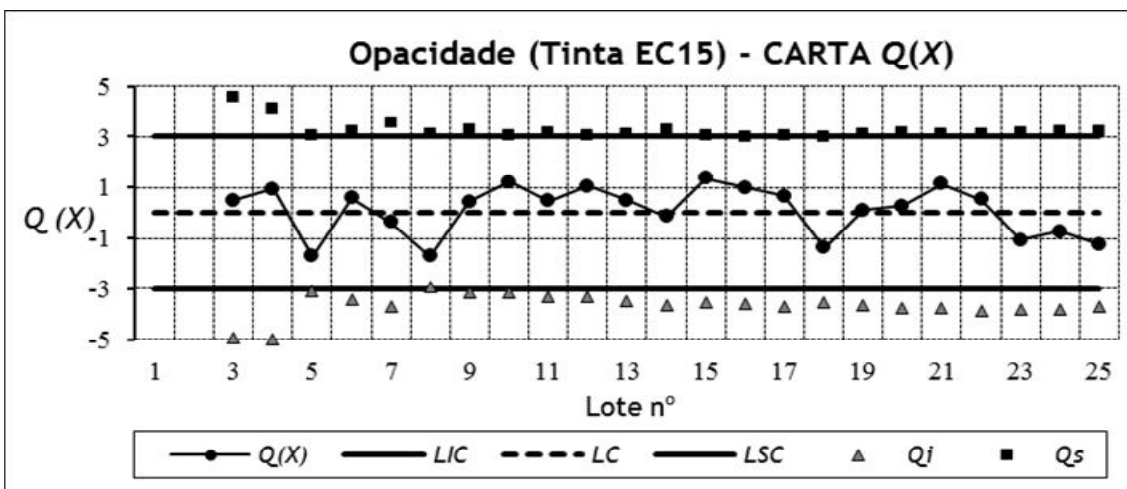
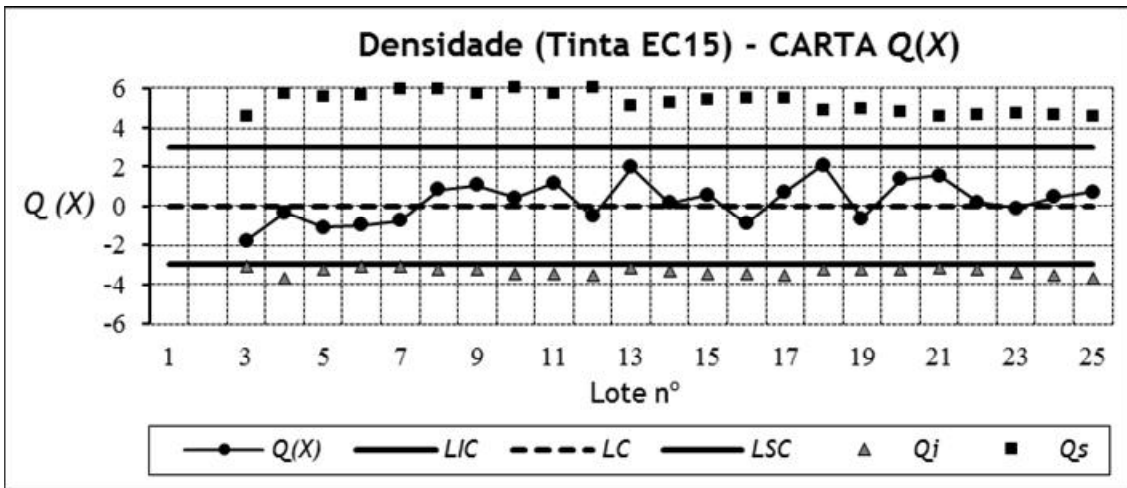
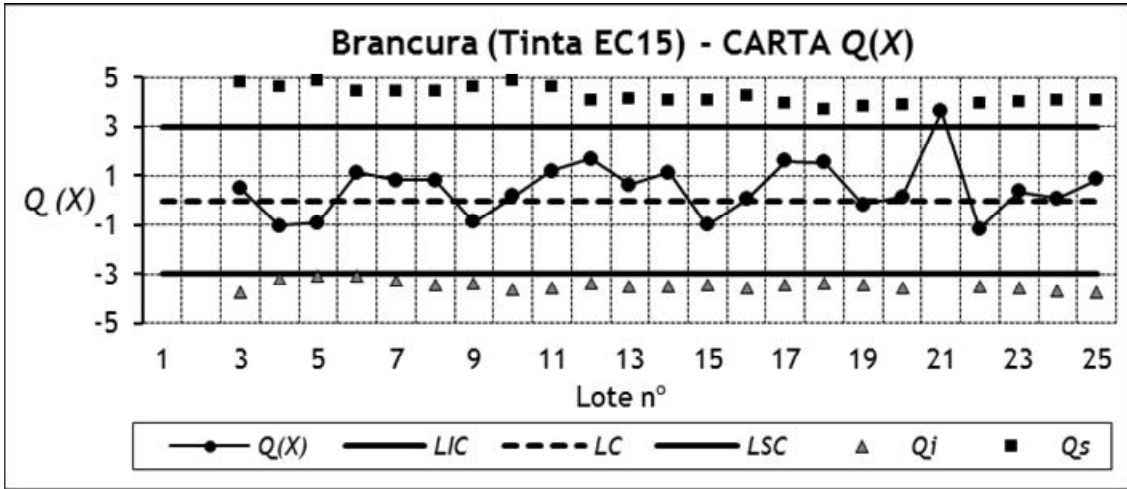


Figura 2 - Cartas de controlo Q_x para a Brancura, Densidade e Opacidade da “Tinta EC15”

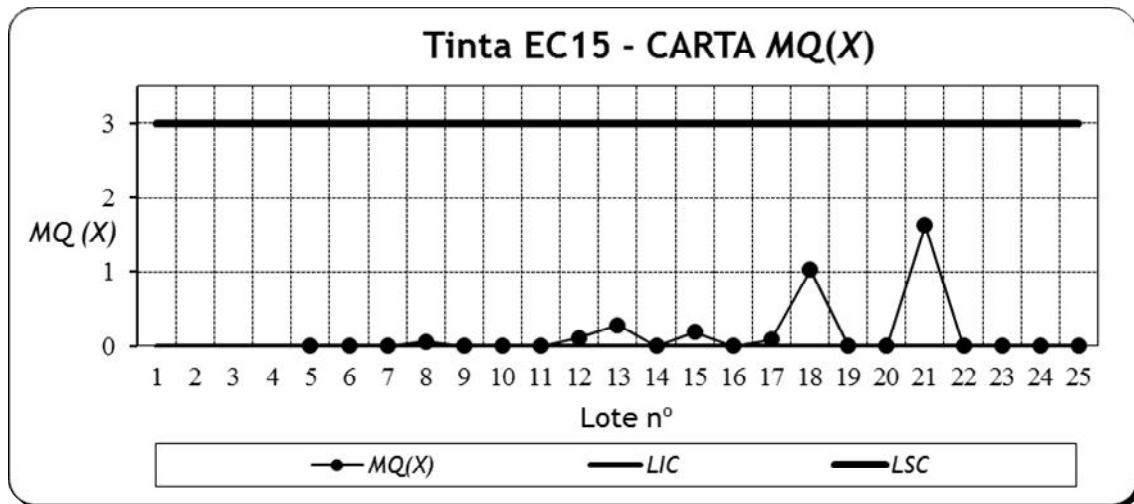


Figura 3 - Carta MQ_X para as características Brancura, Densidade e Opacidade da “Tinta EC15”

Referências

- [1] Shewhart, W. A. *Economic Control of Quality of Manufactured Product*, D. Van Nostrand Company, Inc., New York, 1931.
- [2] Bothe, D. R., 1988. SPC for Short Production Runs, *Quality*, Vol. 27, pp. 58-59, 1988.
- [3] Wheeler, D. J. *Short Run SPC*, SPC Press, Knoxville, Tennessee, 1991.
- [4] Pyzdek, T.: “Process Control for Short and Small Runs”, *Quality Progress*, Vol. 26(4) (1993), pp. 51-60.
- [5] Quesenberry, C. P. *SPC Methods for Quality Improvement*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1997.
- [6] Montgomery, D. C. *Introduction to Statistical Quality Control*, 7th Edition, John Wiley & Sons, Inc., New York, 2012.
- [7] Pereira, Z. L. e Requeijo, J. G. *Qualidade: Planeamento e Controlo Estatístico de Processos*, 2^a Edição, Fundação da FCT/UNL, Lisboa, 2012.