A Lua aqui tão perto . . . e o George Clooney também!

Lina Brunheira

Quando na minha licenciatura fui aluna de Paulo Abrantes[1] na disciplina de Metodologia do Ensino da Matemática, fui desafiada a resolver um dos problemas[2] que passou, desde então, um dos meus preferidos:

Quantas vezes seria necessário dobrar ao meio uma folha de papel para se atingir a distância da Terra à Lua?

Se não conhece o problema, pode estar já a pensar que se trata de um valor ridiculamente grande, tão grande que nem vale a pena estudá-lo a sério. Se já está a perceber que tipo de modelo matemático está presente nesta situação, poderá supor que, ainda assim, é um número mesmo muito grande. No entanto, vale a pena investigar. Tomemos 384 403 km para o valor da distância da Terra à Lua (embora varie conforme o curso da órbita da Lua) e 0,1 mm para o valor da espessura de uma folha de papel vulgar. No artigo da EeM de 1987, Paulo Abrantes sugeria que fizéssemos um programa simples em linguagem computacional *Basic* ou utilizássemos uma folha de cálculo. Hoje podemos usar também uma calculadora gráfica, or-

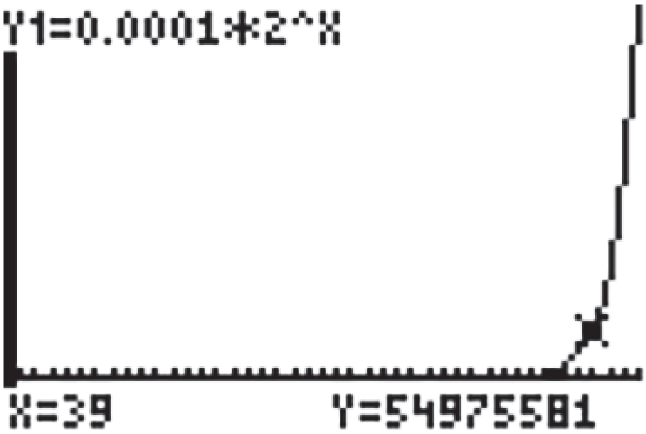

Figura 1.—Gráfico da função f(n)=0,0001×2^n

N.º de dobragens	Espessura em metros
0	0,0001
1	0,0002
2	0,0004
3	0,0008
4	0,0016
5	0,0032
...	
12	0,410
13	0,819
14	1,638
15	3,277
16	6,554
...	
39	54 975 581,389
40	109 951 162,778
41	219 902 325,555
42	439 804 651,110

Figura 2.—Tabela do número de dobragens/espessura

ganizar os dados numa tabela e traçar o gráfico[3] (figura 1) da função que nos dá a espessura da folha (em metros) a partir de um número n de dobragens: $f(n) = 0,0001 \times 2^n$.

A análise do gráfico permite-nos ver que a espessura obtida pela dobragem da folha só ganha um valor considerável perto da 40.ª dobragem, altura em que a função aumenta drasticamente o seu crescimento. Através da tabela (figura 2) acedemos mais detalhadamente à forma como os valores variam. Nas primeiras dobragens, digamos que não acontece nada de especial... a folha é tão fina que, mesmo dobrada várias vezes, não vamos longe. Só na 14.ª dobragem ultrapassamos o metro na espessura e na 20.ª os 100 metros . . . No entanto, pouco depois chegamos ao quilómetro e, surpreendentemente, na 30.ª dobragem atingimos os 100 000 km. Neste momento começamos a acreditar, embora por ventura com ceticismo, no que a tabela nos mostra: com 42 dobragens obtemos uma espessura que chega e ultrapassa a distância pretendida. Por esta altura, acredito que já esteja à procura de um erro na tabela. Pode repetir os cálculos, experimentar outras ferramentas e até é bom que o faça. Porém, a resposta não mudará. De facto, mesmo para quem está familiarizado com a função exponencial, este crescimento não deixa de surpreender e chocar o senso comum.

O passo seguinte será reclamar: os cálculos estão corretos, mas ninguém consegue dobrar uma folha tantas vezes! De acordo, é claro que o problema é artificial pois, efetivamente, a experiência deixa de ser praticável a partir de um reduzido número de repetições. No entanto, o facto de conseguirmos ligá-lo a experiências pessoais, mesmo que de uma forma limitada, faz com que ele tenha um efeito marcante na maneira como passamos a olhar o crescimento exponencial.

Prossigamos com uma ideia que Paulo Abrantes refere a propósito da resolução de problemas: «um dos poderes da matemática é relacionar o que pode não parecer relacionável». Este poder entra em ação quando percebemos que existem problemas que, aparentemente, são diferentes, mas acabam por ser modelados da mesma forma. É o caso do problema do tabuleiro de xadrez e os grãos de milho, ou outros que surgem com frequência nos manuais escolares. No entanto, pensemos agora em situações reais.

No verão de 2014, surgiu a moda dos banhos públicos nas redes sociais, um desafio que terá começado nos EUA com uma iniciativa de solidariedade. As regras são simples: uma pessoa escolhe três amigos do *Facebook* e lança o desafio de, em 48 horas, publicarem nas redes sociais um vídeo a tomarem banho. Para dificultar, o banho tem de ser de água fria e num lugar público. A moda terá *pegado* por várias razões, mas certamente que o modelo matemático envolvido assume aqui um papel importante. Claro está, temos de novo uma progressão geométrica, só que desta vez de razão 3 em vez de 2. No entanto, quando estudamos situações da vida real como estas e procuramos modelos matemáticos que as expliquem, devemos percorrer o ciclo *realidade — matematização — teoria — regresso à realidade,* também referido por Paulo Abrantes. Assim sendo, percebemos que o modelo de progressão geométrica de razão 3 não se ajusta perfeitamente à situação pois não tem em conta diversas variáveis, como a quebra da cadeia por parte de algumas pessoas. Se assim não fosse, ao fim de 25 repetições desta cadeia, todo o planeta já teria tomado um banho público . . .

Partindo da realidade, há várias situações em que admitimos aplicar o modelo da função exponencial e em que ele poderá desempenhar um papel, mas, na verdade, serão poucas as que podem ser completamente modeladas por aquela função, havendo normalmente algum fator que limita o crescimento. Vejamos o caso da teoria dos seis graus de separação. De que trata esta teoria?

Já deve ter ouvido e até repetido várias vezes a expressão *o mundo é muito pequeno*. Usamo-la, por exemplo, quando percebemos que um amigo nosso afinal tem uma prima que é vizinha do primeiro-ministro... Digamos que esta situação traduz a existência de mais ligações entre as pessoas do que imaginávamos: na situação hipotética que acabei de formular, eu estaria apenas a 3 graus de separação do primeiro-ministro (eu — amigo — prima — primeiro-ministro). A teoria dos seis graus de separação diz, nem mais nem menos, que duas quaisquer pessoas do planeta estão, em média, a seis graus de separação. Impossível, estará a pensar . . . Existirá algum fundamento nesta afirmação, ou será um mito?

Tudo começou em 1969 com um estudo do psicólogo norte-americano Stanley Milgram, que desenvolveu a seguinte experiência: enviou 160 cartas a cidadãos do Wichita e Omaha para que estes as fizessem chegar a uma dada pessoa em Boston, com quem não tinham relação, através de intermediários. Estes cidadãos foram enviando as cartas a pessoas que conheciam e que, mesmo não conhecendo o destinatário em Boston, pudessem continuar a cadeia e se aproximassem sucessivamente do destino. Surpreendentemente, estas cartas levaram, em média, cinco passos até chegarem ao destino, número que Milgram alterou para seis, atendendo a que algumas acabaram por se perder. É claro que esta é apenas uma experiência e, além disso, limitada aos cidadãos dos EUA. No entanto, apesar de o nosso senso comum negar esta afirmação, ela foi ganhando adeptos e deu origem a uma peça de teatro, a um filme e a um *site*, o *Oráculo de Bacon*,[4] concebido a partir de um programa informático desenhado nos anos 90 por estudantes universitários, que permite descobrir os graus de separação entre quaisquer dois atores, inclusivamente atores portugueses.

Mais recentemente, os investigadores Steve Strogatz[5] e Duncan Watts[6] começaram a testar a teoria dos seis graus de separação a propósito do fenómeno da sincronicidade. Intrigava-os questões que nos são tão familiares como: Por que razão os grilos cantam em uníssono? Os cientistas sabiam que os grilos interagem ajustando o seu som ao dos seus vizinhos, o que os levou a considerar de forma mais séria a teoria dos seis graus de separação. Afinal, a afirmação de que quaisquer duas pessoas no planeta estão em média a seis graus de separação seria verdadeira ou um mito? Como explica Steve Strogatz num documentário da BBC[7] sobre este assunto, «se uma pessoa conhece 100 pessoas e cada uma delas conhece 100 pessoas, ao fim de 5 passos temos o planeta inteiro!». Voltamos a ter uma progressão geométrica, desta vez com crescimento ainda mais rápido, atendendo ao valor da razão. No entanto, mais uma vez, este modelo acaba por não explicar convenientemente a situação, porque existem muitas sobreposições, ou seja, muitas das pessoas que cada um de nós conhece são também conhecidas entre si e é isso que torna o problema tão difícil. Como explica aquele matemático, as pessoas tendem a conviver com outras que frequentam os mesmos ambientes e conhecem pessoas que têm entre si muitas afinidades — vivem de certa forma agrupadas em *clusters*. Por esse motivo, parece-nos tão difícil chegar a outras pessoas que vivem noutras partes do mundo e em comunidades tão diferentes da nossa. De facto, se tentássemos chegar até elas através de amigos e conhecidos com um perfil semelhante ao nosso, levaríamos muitos passos até lá chegarmos. No entanto, Watts e Strogatz fizeram uma descoberta que altera drasticamente este número — muitos de nós conhecemos alguém que se mudou para um lugar distante, o que se traduz num elo entre comunidades geograficamente distantes. Estes elos não mudam a organização da sociedade que mantém os seus indivíduos essencialmente agrupados em *clusters*, pois basta a existência de algumas ligações para *unir o mundo*. Visualmente, os dois grafos da figura 3, em que cada ponto representa uma pessoa, mos-

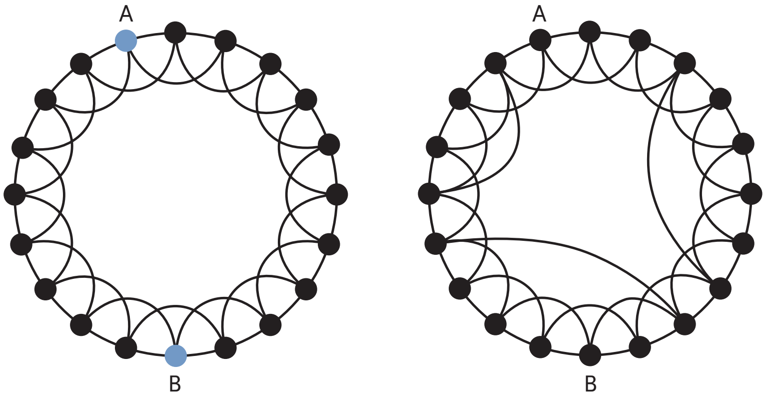

Figura 3.—O modelo de Watts e Strogatz de mundo pequeno (à direita).

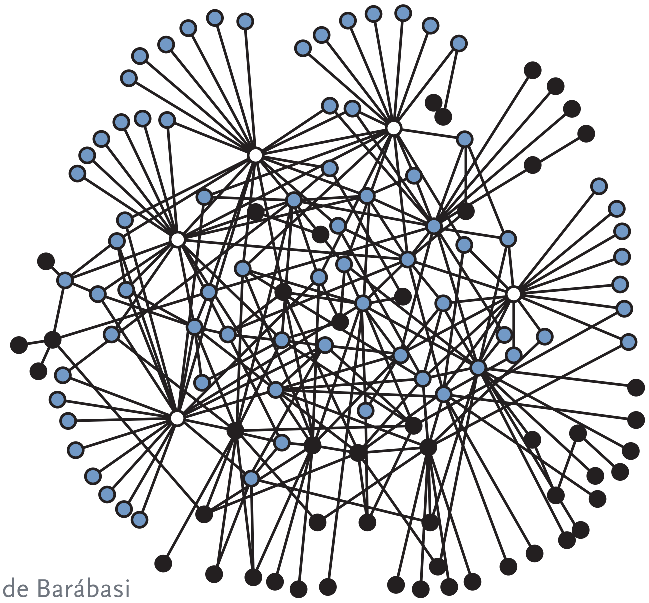

Figura 4.—Modelo de Barábasi

tram-nos esta situação: no grafo da esquerda, para chegar de A a B, precisamos de passar por várias pessoas; no grafo da direita, vemos que a existência de um pequeno número de ligações entre pessoas que não estão próximas encurta enormemente a *distância entre* A *e* B. Este último grafo é representativo da noção de *mundo pequeno* de Watts e Strogatz (figura 3).

A esta descoberta, juntou-se uma outra do físico húngaro Barábasi[8] que estudava na altura redes na internet. Neste caso, Barábasi procurava a resposta para uma pergunta semelhante: Qual a *distância* entre quaisquer dois documentos na *internet*? Ou seja, partindo de um documento que contém *links*, acedemos a outros que, por sua vez, estão ainda ligados a outros documentos diferentes. O primeiro número a que chegou foi curiosamente muito superior a seis, no entanto, Barábasi percebeu que nem todos os sites têm a mesma importância, pois alguns têm uma visibilidade muito maior. É o caso da Amazon, do Yahoo, do Google . . . Esta descoberta estendeu-se também ao trabalho de Whatts e Strogatz pois, assim como há *sites* que são muito mais visitados do que outros, também há pessoas que têm muitas mais ligações do que outras. Os cientistas chamam-lhes *hubs* — nós com muitas conexões que exercem um papel central em qualquer rede (figura 4). Na verdade, isto acontece para as redes da internet, para as redes sociais, redes de transportes e até para as ligações entre as proteínas no interior das células.

Muitas vezes podemos ter a resolução do problema, mas é preciso *senti-la*. Foi o que me aconteceu com o problema da Lua e se repetiu com a teoria dos seis graus de separação. Neste caso, esta ideia significou para mim algo muito claro: tinha de testar a teoria. Sentei-me com alguns colegas, identificámos algumas pessoas da vida pública portuguesa e tentámos chegar a elas o que, na maioria dos casos, veio a acontecer. Afinal, estou muito mais próxima das pessoas públicas que tinha escolhido do que imaginava. Tornei-me ambiciosa. Escolhi um ator de Hollywood *aleatoriamente* — George Clooney. Como chegar até ele? Bom . . . na minha adolescência fiz amizade com um ator português chamado Adriano Carvalho. Pensei que não chegaria através dele, mas consultando o *Oráculo de Bacon*, descobri que o Adriano participou no filme *Star Crossed*, em que contracenou com Wayne Duvall, que por sua vez participou no filme *Leatherheads* com George Clooney! São portanto 3 graus!

Resolvi levar esta situação para a sala de aula. Os alunos reuniram-se em grupo e tentaram chegar a várias figuras públicas portuguesas de diferentes quadrantes. Sem problema, facilmente se chegou ao atual e ao antigo Primeiro-ministro, ao Presidente da República, a Cristiano Ronaldo ou a Judite de Sousa. Os meus alunos estavam renitentes em nomear pessoas estrangeiras, mas quando perceberam que poderíamos chegar a Diogo Morgado ou a Daniela Ruah, abriu-se um mundo de possibilidades (figura 5).

No meu exemplo, os atores portugueses Diogo Morgado e Daniela Ruah representam simultaneamente exemplos de pessoas que geograficamente se distanciaram, permitindo estabelecer ligações com outras pessoas nos EUA, mas também são casos de nós com muitas conexões na rede e

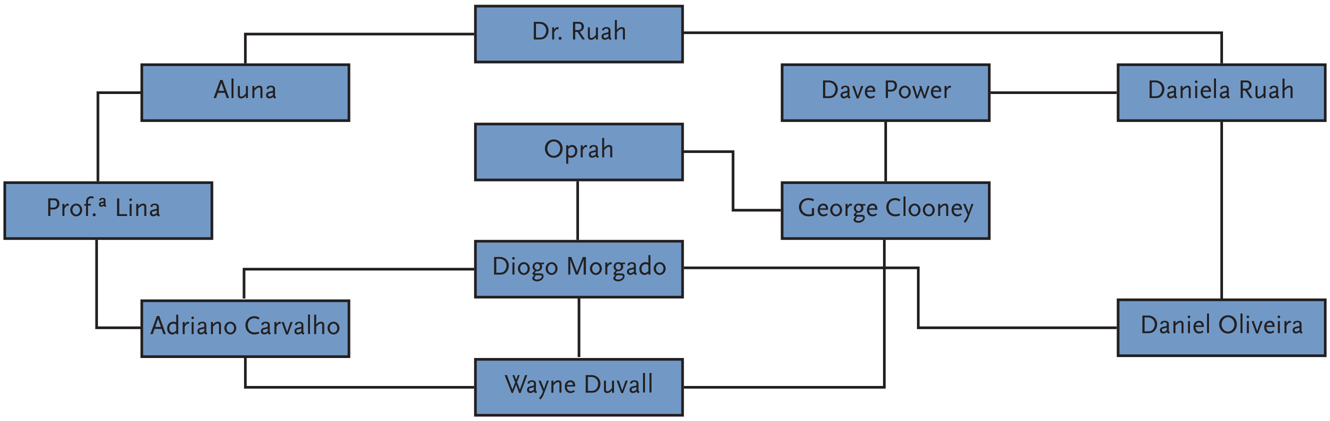

Figura 5.—Grafo com ligações a algumas celebridades

que conhecem outras pessoas ainda mais conectadas. Para chegar a elas, não precisei de mais do que quatro passos e, possivelmente, através delas chegarei a anónimos em sítios tão longínquos como Darfur, onde Clooney abraçou uma causa humanitária.

Podemos continuar a procurar pessoas e divertirmo-nos com este desafio, ao mesmo tempo que nos surpreendemos com a nossa proximidade em relação a pessoas que nem suspeitávamos. Mas quão séria é esta questão? O estudo de Strogatz e Watts deu origem a uma nova área de conhecimento — a ciência das redes — uma área interdisciplinar que promete abrir portas ao conhecimento de uma forma revolucionária. No documentário da BBC, vemos o geneticista Marc Vidal[9] a trabalhar numa equipa multidisciplinar para construir o primeiro mapa com todas as doenças e os genes que lhe estão associados, mostrando conexões entre todas as doenças humanas conhecidas (figura 6). A teoria das redes está a ajudar os informáticos a

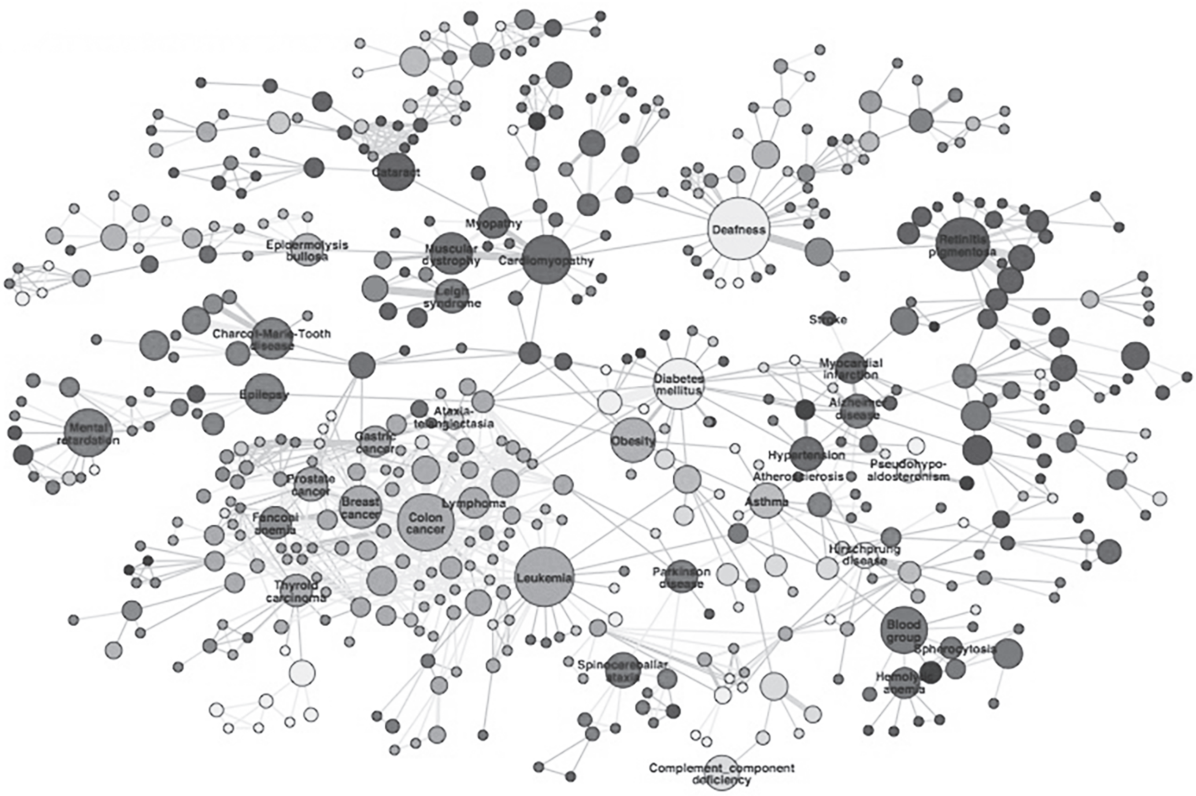

Figura 6.—Mapa das doenças humanas—Barábasi, Vidal e Cusick

compreender a razão pela qual alguns vírus informáticos se espalham tão facilmente e são tão resistentes, da mesma forma que explica a razão pela qual o vírus HIV continua a proliferar. A visão sobre um mundo tão pequeno promete ainda criar ferramentas para combater o terrorismo, prever pandemias ou tratar doenças.

Como Paulo Abrantes afirmou no livro *A viagem de ida e volta*, «na vida, as situações mais interessantes correspondem geralmente a experiências vividas — irrepetíveis e intransmissíveis. Podemos tentar descrevê-las aos outros, mas não conseguimos libertar-nos da sensação de que o mais importante ficou por dizer.» Esta mensagem pode ser válida para experiências diversificadas, mas proponho que pensemos nela a propósito da resolução de problemas — foi com esse objetivo que o Paulo a escreveu. Tudo o que aprendemos a partir de um problema, seja um conceito, uma propriedade, uma estratégia ou uma forma de pensar, é, na maioria das vezes, insubstituível. Penso que as situações que aqui apresentei ilustram esta ideia, mas a razão pela qual as escolhi prende-se também com os sentimentos que espoletaram – surpresa, desconfiança, admiração e, finalmente, fascínio sobre a forma como a matemática me continua a explicar o mundo. Podemos estar muito próximos uns dos outros, mas estas aprendizagens ficam com quem as vive e não se transmitem oralmente, nem pelo professor que está a um grau de distância.

Notas

1 Paulo Abrantes (1953–2003) iniciou a sua carreira como professor de Matemática do Ensino Secundário onde lecionou durante alguns anos. Foi professor no Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa e um reconhecido investigador na área da educação matemática em Portugal e no estrangeiro. Ocupou o cargo de Diretor do Departamento de Educação Básica no Ministério de Educação (1999–2002), sendo responsável pelo projeto de Gestão Flexível do Currículo e pelo Currículo Nacional do Ensino Básico (2001). Foi sócio fundador da APM e presidente da direcção da Associação, tendo integrado a redacção da Educação e Matemática desde a sua criação da revista em 1986, e sido seu director durante vários anos. Trabalhou na formação inicial e contínua de professores, e integrou e coordenou diversos projetos de desenvolvimento curricular e investigação, particularmente sobre problemáticas curriculares e da aprendizagem da Matemática, onde dedicou especial atenção à resolução de problemas e ao trabalho de projeto.

2 Publicado no número 2 da revista Educação e Matemática

3 Utilizei aqui a variável real positiva x em vez de natural para melhor visualização da curva

4 Disponível em http://oracleofbacon.org/movielinks.php

5 Steve Strogatz é professor de Matemática Aplicada na Cornell University. Doutorou-se em Harvard nesta área e tem trabalhado em dinâmica não linear e sistemas complexos. Tornou-se mundialmente conhecido pelo artigo publicado na revista científica Nature sobre *mundos pequenos*.

6 Duncan Watts foi aluno de Steve Strogatz, com quem trabalhou na construção do modelo de *mundos pequenos*. Atualmente é investigador principal da empresa Microsoft.

7 Disponível em https://archive.org/details/Seis.Graus.Separacao

8 Albert-László Barabási é professor e diretor do Northeastern University's Center for Complex Network Research e membro do Center of Cancer Systems Biology — Dana Farber Cancer Institute, Harvard University e professor no Center for Network Science, Central European University.

9 Marc Vidal é diretor do Center of Cancer Systems Biology — Dana Farber Cancer Institute, Harvard University e professor na Harvard Medical School. A sua investigação recorre à ciência das redes para compreender a forma como as proteínas das células interagem entre si.

Referências

Abrantes, P. (1987). A Lua aqui tão perto. *Educação e Matemática*. 2, 11–12.

Abrantes, P. (1988). *Viagem de ida e volta*. Lisboa: APM.

Barábasi, A. (2002). *Linked: The new science of networks*. Cambridge: Perseus.

Lina Brunheira
Escola Superior de Educação de Lisboa