



**Instituto Politécnico de Lisboa
Escola Superior de Educação**



**A GEOMETRIA NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES:
CONTRIBUTOS PARA A CARACTERIZAÇÃO DO CONHECIMENTO
DOS ESTUDANTES**

Dissertação apresentada para obtenção do grau de Mestre em Educação
Matemática na Educação Pré-Escolar e nos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico

Tiago Bruno Correia Tempera

2010



Instituto Politécnico de Lisboa
Escola Superior de Educação



**A GEOMETRIA NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES:
CONTRIBUTOS PARA A CARACTERIZAÇÃO DO CONHECIMENTO
DOS ESTUDANTES**

Dissertação apresentada para obtenção do grau de Mestre em Educação
Matemática na Educação Pré-Escolar e nos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico

Orientadora: Professora Doutora Maria de Lurdes Serrazina

Co-orientadora: Mestre Maria Cristina Loureiro

Tiago Bruno Correia Tempera

2010

RESUMO

Este estudo pretende proporcionar contributos para a caracterização dos conhecimentos factuais e relacionais em geometria dos estudantes da licenciatura em Educação Básica de uma Escola Superior de Educação do centro do país, tendo em vista a melhoria da formação inicial de professores do 1.º e 2.º ciclos do ensino básico e educadores de infância e, conseqüentemente, das práticas educativas na educação básica.

Trata-se de um estudo exploratório que tem como objectivos orientadores (i) caracterizar o conhecimento em geometria dos estudantes no início do curso da licenciatura em Educação Básica, após um ano do curso e no último ano do curso; (ii) compreender que conhecimentos em geometria os estudantes possuem à entrada do ensino superior; e (iii) compreender o que as unidades curriculares da licenciatura acrescentam ao conhecimento em geometria dos estudantes. O estudo consistiu na criação, implementação e análise de resultados de um teste centrado nos conceitos essenciais para o ensino da geometria na educação básica, tendo sido aplicado aos estudantes de todos os anos do curso da licenciatura. A forma como o instrumento foi construído permitiu retirar informações válidas acerca dos conhecimentos dos estudantes ao nível do raciocínio espacial, classificação, congruência, equivalência / área, semelhança, propriedades de figuras 2D e simetria.

A abordagem metodológica mista adoptada, interligando as metodologias quantitativa e qualitativa, permitiu recolher um número elevado de dados e interpretar os resultados obtidos, enquadrando-os na realidade e contexto em que se inserem.

Os resultados do estudo revelam que os estudantes possuem conhecimentos errados em diversas áreas da geometria, permitindo levantar hipóteses sobre a sua origem e soluções. Para além disso, é possível constatar que o seu conhecimento é limitado em algumas áreas da geometria elementar, podendo corresponder a concepções adquiridas na sua escolaridade. Através dos resultados obtidos nesta investigação observa-se que o tipo de conhecimentos em geometria destes estudantes não é linear, isto é, há diferenças nos níveis e tipos de conhecimento em diversas áreas da geometria e a formação inicial parece não estar a conseguir dar resposta às suas dificuldades. Em particular, a frequência de uma unidade curricular de geometria no curso parece não corresponder aos resultados esperados.

Identifica-se, assim, uma necessidade de reflectir acerca da formação inicial, tendo em conta os conhecimentos e ideias generalizadas dos estudantes.

Palavras-chave: Formação inicial, educação básica, geometria, raciocínio espacial, classificação, congruência, equivalência, semelhança, propriedades de figuras 2D, simetria.

ABSTRACT

This study aims to contribute to the characterization of factual and relational knowledge in geometry of students taking a degree in the course of Basic Education in an education school in the central area of the country (Portugal), with the perspective of improving the initial training of first years and kindergarten teachers and hence of educational practices in basic education.

This is an exploratory study that aims to (i) characterize the knowledge in geometry of students in the beginning of the course of Basic Education, in their second year and in their senior year; (ii) understand what type of knowledge in geometry students have in the beginning of the course; and (iii) understand what the course's disciplines add to the knowledge in geometry of students. The study consisted in the creation, implementation and analysis of the results of a test focusing on the essential concepts for teaching geometry in basic education. The test has been applied to students of all years of the course. The way the instrument was built allowed to withdraw valid information about the students' knowledge in spatial reasoning, classification, congruence, equivalence / area, similarity, properties of 2D figures and symmetry.

The mixed method approach, linking quantitative and qualitative methodologies, allowed to collect a large number of data and interpret the results, framing them in the reality and context in which they occur.

The study results indicate that students have wrong concepts in various areas of geometry, allowing to make hypotheses about its origin and solutions. In addition, it is possible to verify that their knowledge is limited in some areas of elementary geometry, probably corresponding to the concepts acquired in their education. Through the results obtained in this investigation, it is observed that the type of knowledge in geometry these students have is not linear, meaning that there are differences in the levels and types of knowledge in various areas of geometry and the initial training of teachers does not seem to be able to cope with the students' difficulties. In particular, the frequency of the discipline of geometry in the course does not seem to match the expected results.

It is identified, therefore, a need to reflect on the initial training of teachers, given the students' widespread of knowledge and ideas.

Keywords: Initial training of teachers, basic education, geometry, spatial reasoning, classification, congruence, equivalence/area, similarity, properties of 2D figures, symmetry.

AGRADECIMENTOS

Às minhas orientadoras, Professora Doutora Maria de Lurdes Serrazina e Mestre Maria Cristina Loureiro, que me apoiaram e orientaram neste longo percurso. As suas observações e críticas foram sempre pertinentes e as nossas discussões extremamente produtivas.

À Professora Joana Castro, pelo valioso apoio no tratamento estatístico dos dados e pela reflexão que criou durante esse processo.

A todos os professores do domínio científico de matemática da Escola Superior de Educação de Lisboa, pelas opiniões construtivas e oportunidades de debate relativas às questões emergentes da dissertação.

E a todos os que acreditaram em mim e no meu trabalho.

ÍNDICE

Resumo	i
Abstract	ii
Agradecimentos	iii
Capítulo 1 – Problema e Contexto do Estudo	1
1.1. Problema e objectivos do estudo	1
1.2. Enquadramento e pertinência do estudo	2
1.3. Organização da tese	4
Capítulo 2 – Revisão da Literatura	5
2.1. O ensino e a aprendizagem da geometria	6
2.2. A geometria e o currículo	8
2.3. O conhecimento em geometria dos professores e futuros professores	13
2.4. Conceitos essenciais no ensino da geometria	16
2.4.1. Raciocínio espacial	18
2.4.2. Classificação	21
2.4.3. Congruência	26
2.4.4. Equivalência / Área	27
2.4.5. Semelhança	29
2.4.6. Propriedades de figuras 2D	31
2.4.7. Simetria	33
Capítulo 3 – Metodologia	35
3.1. Opções metodológicas	35
3.2. Caracterização dos participantes	38
3.3. Caracterização do currículo de Matemática na licenciatura em Educação Básica	41
3.3.1. As unidades curriculares do domínio científico da matemática	41
3.3.2. A unidade curricular de “Geometria”	42

3.4.	Construção do instrumento de recolha de dados	44
3.4.1.	Processo de construção do teste	44
3.4.2.	Fundamentação das questões integrantes do teste	46
3.4.2.1.	Raciocínio espacial	47
3.4.2.2.	Classificação	49
3.4.2.3.	Congruência	50
3.4.2.4.	Equivalência / Área	50
3.4.2.5.	Semelhança	51
3.4.2.6.	Propriedades de figuras 2D	52
3.4.2.7.	Simetria	53
3.4.3	Apreciação do teste	53
3.5.	Procedimento de recolha e análise de dados	54
Capítulo 4 – Análise de Dados e Discussão dos Resultados		56
4.1.	Análise e discussão geral dos dados	56
4.2.	Análise e discussão categórica dos dados	59
4.2.1.	Raciocínio espacial	60
4.2.2.	Classificação	64
4.2.3.	Congruência	72
4.2.4.	Equivalência / Área	74
4.2.5.	Semelhança	77
4.2.6.	Propriedades de figuras 2D	81
4.2.7.	Simetria	83
Capítulo 5 – Conclusões e Recomendações		88
5.1.	Síntese do estudo	88
5.2.	Conclusões	89
5.3.	Recomendações, extensão e limitações do estudo	94
5.4.	Reflexão final.....	98
Referências Bibliográficas		100

Anexos

Anexo 1 – Folha de identificação dos participantes	107
Anexo 2 – Instrumento de recolha de dados (teste)	108
Anexo 3 – Folha de registo da apreciação do teste realizado	129
Anexo 4 – Consentimento informado	130

Índice de Quadros

Quadro 1 Distribuição dos participantes pelos anos do curso	39
Quadro 2 Nível de escolaridade em Matemática dos participantes	40
Quadro 3 Ciclo de estudos a prosseguir pelos estudantes	40
Quadro 4 Unidades curriculares do domínio científico da matemática na licenciatura em Educação Básica	41
Quadro 5 Tabela de quantis das respostas correctas ao teste	57
Quadro 6 Distribuição das respostas correctas à categoria de questões “Raciocínio Espacial”	60
Quadro 7 Distribuição das escolhas das representações de planificações do cubo	63
Quadro 8 Distribuição das escolhas das representações que não correspondem a planificações do cubo	63
Quadro 9 Distribuição das respostas correctas à categoria de questões “Classificação”	65
Quadro 10 Distribuição das escolhas das representações de triângulos	66
Quadro 11 Distribuição das escolhas das representações que não correspondem a triângulos	67

Quadro 12	67
Distribuição das escolhas das representações de rectângulos	
Quadro 13	69
Distribuição das escolhas das representações que não correspondem a rectângulos	
Quadro 14	70
Distribuição das escolhas das representações de polígonos	
Quadro 15	71
Distribuição das escolhas das representações que não correspondem a polígonos	
Quadro 16	73
Distribuição das respostas correctas à categoria de questões “Congruência”	
Quadro 17	75
Distribuição das respostas correctas à categoria de questões “Equivalência / Área”	
Quadro 18	76
Distribuição das escolhas das figuras equivalentes ao modelo fornecido	
Quadro 19	77
Distribuição das respostas correctas à categoria de questões “Semelhança”	
Quadro 20	78
Distribuição das escolhas dos triângulos identificados como semelhantes ao modelo apresentado	
Quadro 21	79
Distribuição das escolhas dos rectângulos identificados como semelhantes ao modelo apresentado.	
Quadro 22	81
Distribuição das respostas correctas à categoria de questões “Propriedades de figuras 2D”	
Quadro 23	84
Distribuição das respostas correctas à categoria de questões “Simetria”	
Quadro 24	85
Distribuição das escolhas das figuras com simetria	

Capítulo 1

PROBLEMA E CONTEXTO DO ESTUDO

1.1 – Problema e objectivos do estudo

A geometria é considerada um dos tópicos mais importantes da matemática (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2008) e, nesse sentido, a educação em geometria necessita de começar desde cedo (Clements & Sarama, 2000; Lehrer *et al.*, 1998). Alguns autores afirmam ser surpreendente o pouco que as crianças aprendem sobre as formas, do pré-escolar ao ensino secundário (como por exemplo, Clements & Sarama, 2000). Por outro lado, não se pode ignorar o facto de que, apesar da importância da geometria, os estudantes continuam a ter dificuldades em aprendê-la com a profundidade desejada e de forma significativa (Battista, 2007). Será, então, necessário conhecer quais são os conhecimentos em geometria dos futuros professores, o que poderá ajudar a definir linhas de actuação que ajude a prepará-los devidamente para promoverem nos seus alunos uma nova abordagem ao ensino da geometria.

Este estudo procura caracterizar os conhecimentos em geometria dos estudantes em formação inicial de professores, tendo sido desenvolvido com os estudantes da licenciatura em Educação Básica de todos os anos do curso.

Através da concepção, implementação e análise dos resultados de um teste de resposta múltipla, estruturado com base em conceitos considerados essenciais no ensino da geometria elementar, pretendeu-se dar resposta à questão central do estudo: *Quais os conhecimentos em geometria que os estudantes em formação inicial de professores possuem?*

Para um melhor aprofundamento do problema foram definidos os seguintes objectivos orientadores:

- Caracterizar o conhecimento em geometria dos estudantes no início do curso da licenciatura em Educação Básica, após um ano do curso e no último ano do curso;

- Compreender que conhecimentos em geometria os estudantes possuem à entrada do ensino superior;
- Compreender o que as unidades curriculares da licenciatura acrescentam ao conhecimento em geometria dos estudantes.

Tendo em conta o perfil dos estudantes envolvidos no estudo, a concepção e elaboração do instrumento de recolha de dados (questionário) norteou-se pelos seguintes princípios:

- A elaboração de questões sobre aspectos conceptuais adequados ao ensino básico;
- A acessibilidade de resolução para todos os participantes, independentemente do seu nível de escolaridade em Matemática;
- O estabelecimento de questões de resposta rápida, de modo a manter o interesse e motivação durante todo o teste.

1.2 – Enquadramento e pertinência do estudo

Com base na minha prática profissional em contextos educativos de observação de práticas nos 1.º e 2.º ciclos do ensino básico e enquanto professor no ensino superior, tenho observado que, no campo da geometria, os estudantes revelam baixos níveis de desempenho a nível científico e didáctico. No que se refere à investigação, esta é pouco realizada focando contextos de formação inicial de professores, debruçando-se pouco sobre temáticas científico-didácticas na área da geometria.

Estes dois aspectos justificam a necessidade de investigar a formação inicial de professores e, em particular, o papel da geometria nessa formação, na medida em que (i) o percurso escolar dos estudantes parece não permitir a aprendizagem da geometria com o carácter significativo desejado (Battista, 2007), (ii) na sua vida profissional, os professores demonstram as mesmas dificuldades conceptuais em geometria dos alunos que ensinam (Owens &

Outhred, 2006) e (iii) a formação inicial não se tem revelado suficiente para colmatar esta problemática (Alatorre & Sáiz, 2009).

Desde 2006 que exerço funções docentes numa Escola Superior de Educação no centro do país. Este período tem sido enriquecido por uma reflexão acerca de questões didácticas no âmbito da matemática e, mais particularmente, na área da geometria. Uma das questões em reflexão diz respeito às dificuldades demonstradas pelos estudantes nas aprendizagens e na mobilização de aprendizagens na área da geometria, durante os estágios de prática pedagógica tutorizada. Enquanto formador, tenho acompanhado de perto a realidade das práticas pedagógicas dos estudantes e debatido situações relevantes do domínio científico com os professores. Essa troca de experiências e trabalho colaborativo contribuiu para uma reflexão mais aprofundada da realidade com que nos deparamos actualmente nos cursos oferecidos pela instituição.

A licenciatura em Educação Básica constitui um contexto privilegiado para a realização deste estudo dado que é um curso no qual lecciono diversas unidades curriculares do domínio científico da matemática e em várias turmas. Deste modo, não sou exterior ao contexto sobre o qual se debruça este estudo, tendo um conhecimento geral dos estudantes que o integram. O próprio conhecimento que possuo das dificuldades dos estudantes, levou-me a questionar e a investigar sobre a sua realidade. Apesar de ser um contexto específico de uma escola do ensino superior, este estudo poderá contribuir para uma reflexão crítica geral sobre a formação inicial de professores.

Enquanto professor dos estudantes envolvidos na investigação, este estudo constitui-se relevante para a minha formação pessoal e profissional, no sentido em que uma melhor percepção dos conhecimentos e dificuldades destes estudantes poderá contribuir para a melhoria das práticas nas unidades curriculares que lecciono.

Enquanto futuro investigador, creio tratar-se de um estudo que poderá colmatar lacunas em relação a outros estudos já efectuados nesta área da matemática, na medida em que se debruça sobre futuros professores em formação inicial. Através dos resultados obtidos, este estudo procura contribuir para o avanço do campo científico, no domínio da educação matemática. Não é demais sublinhar que a finalidade última deste estudo se prende com a

melhoria das práticas educativas do ensino básico, pelo que poderá ter interesse para a comunidade educativa em geral e, em particular, para a instituição do ensino superior em que trabalho.

1.3 – Organização da tese

A tese encontra-se organizada em cinco capítulos. O primeiro capítulo procura apresentar o estudo, explicitando o problema de partida e os objectivos do mesmo. Faz também referência ao seu enquadramento, contexto e pertinência.

No segundo capítulo é apresentada a revisão da literatura que fundamenta o próprio estudo. Estão presentes as temáticas subjacentes ao problema central do estudo, procurando (i) aprofundar problemáticas relacionadas com o ensino e a aprendizagem da geometria, (ii) analisar e especificar os conteúdos de geometria contidos nos programas e orientações curriculares internacionais e nacionais, (iii) analisar o panorama recente e actual do conhecimento em geometria dos professores e futuros professores, e (iv) definir conceitos essenciais no ensino da geometria, especificando-os através da investigação empírica realizada.

O terceiro capítulo contempla as opções metodológicas tomadas, bem como o processo de recolha de dados, fundamentando o instrumento utilizado para o efeito, desde a sua concepção à sua aplicação. É apresentada também uma caracterização dos participantes envolvidos no estudo e do seu contexto de formação no domínio científico da matemática.

O quarto capítulo apresenta os dados recolhidos, a análise e discussão dos resultados, fazendo um paralelo com a revisão da literatura descrita no capítulo 2.

Por fim, o quinto capítulo sintetiza as conclusões retiradas na análise de dados numa reflexão final, na qual se sugerem algumas recomendações e extensões do estudo.

Capítulo 2

REVISÃO DA LITERATURA

Este capítulo pretende contextualizar o problema definido através da análise de referenciais teóricos.

Numa primeira fase, procuro analisar a evolução teórica da aprendizagem da geometria, especificando alguns problemas no ensino da mesma. O segundo sub-capítulo analisa a evolução e especifica os conteúdos dos programas e orientações curriculares internacionais e nacionais. Uma terceira parte pretende dar um panorama do conhecimento dos estudantes em formação inicial e dos professores em exercício profissional, fazendo uma breve análise das dificuldades mais comuns demonstradas em estudos internacionais e nacionais. Por fim, procuro definir conceitos essenciais no ensino da geometria, especificando-os através da investigação empírica realizada.

Parto do princípio de que a geometria é considerada um dos tópicos mais importantes da matemática (NCTM, 2008). M. Senechal (comunicação pessoal, como citada em Sarama & Clements, 2009, p.201) afirma mesmo que nenhuma área da matemática será mais relevante do que a geometria, por se constituir no cerne de outras áreas como a física, a química, a biologia, a geologia, a geografia, a arte e a arquitectura. A um nível lato, poder-se-á definir geometria simplesmente como a ciência do espaço (Gordo, 1994), ou a um nível mais elementar, como a compreensão do espaço em que se vive, movimenta e respira (Costa, 2000). Mas especificamente, a geometria é uma complexa rede de conexões de conceitos, modos de raciocinar e sistemas de representação, que é utilizada para conceptualizar e analisar ambientes espaciais físicos e imaginários (Battista, 2007). Consiste, assim, na construção e utilização de sistemas conceptuais formais para investigar a forma e o espaço (Battista, 2001).

Partindo destes pressupostos, procuro relacionar a geometria enquanto área da matemática e a Geometria enquanto disciplina, interrelacionando-as e enquadrando-as no âmbito da educação matemática.

2.1 – O ensino e a aprendizagem da geometria

Alguns autores (por exemplo, Clements & Sarama, 2000) consideram que a educação em geometria necessita de começar desde cedo, afirmando ser surpreendente o pouco que as crianças aprendem sobre as formas, do pré-escolar ao ensino secundário. Este facto deve ser contrariado pois a aprendizagem da geometria desenvolve diversas capacidades como a visualização, a verbalização, a construção e manipulação de objectos geométricos, a organização lógica do pensamento matemático e a aplicação dos conhecimentos geométricos a outras situações (Matos & Serrazina, 1996). Lehrer *et al.* (1998) recomendam, inclusivamente, que as práticas e políticas pedagógicas que ignoram a matemática do espaço nos primeiros anos sejam reexaminadas.

Por outro lado, não se pode ignorar o facto de que, apesar da importância da geometria, os estudantes continuam a ter dificuldades em aprendê-la com a profundidade desejada e de forma significativa (Battista, 2007), como tem sido verificado nos resultados mais recentes do Third International Mathematics and Science Study [TIMSS] (Clements, 2003). Porém, só com o conhecimento e compreensão das concepções e percepção das crianças se poderá desenvolver um programa de geometria eficiente e apropriado (Hannibal, 1999).

Na tentativa de compreender essas concepções e percepções, desde cedo se tem investigado e construído teorias a partir da investigação em Psicologia. Piaget e Inhelder (2004) teorizaram acerca de importantes temas da geometria, nomeadamente sobre a conceptualização e a representação do espaço. A representação do espaço poderá ser definida como a imagem mental do espaço real em que a criança actua, sendo construída através da progressiva organização de acções motoras e materiais de carácter lógico. Esta imagem mental não se constitui apenas como uma simples memorização, mas como uma reconstrução activa de um objecto ao nível simbólico (Martin, J. L., 1976, como citado em Hershkowitz, 1990, p.72).

Enquanto que a teoria de Piaget e Inhelder se relaciona principalmente com a geometria enquanto ciência do espaço, a teoria de van Hiele combina esta geometria com a geometria enquanto meio de demonstração da estrutura

matemática (Hershkowitz, 1990). De acordo com a teoria de Pierre e Dina van Hiele (Van Hiele, 1999), os estudantes progredem através de níveis sequenciais e hierárquicos de pensamento em geometria: O *nível visual*, nível mais elementar, no qual as figuras são reconhecidas apenas pela sua aparência; o *nível descritivo*, no qual as figuras já são reconhecidas através das suas propriedades; e o *nível de dedução informal*, no qual as figuras são ordenadas de uma forma lógica através das suas propriedades. Os níveis de *dedução formal* e *rigor* são considerados níveis superiores, apenas alcançáveis por estudantes de idade e níveis de ensino mais elevados.

A teoria de Van Hiele tem sido grandemente discutida e questionada devido à sua natureza e à sua limitação às figuras no plano (Battista, 2007). Matos (1999) refere que esta teoria não contempla especificamente áreas como a orientação espacial e representação, a medida, a trigonometria, ou a geometria analítica, abordagens contemporâneas importantes à geometria. E o facto de se considerar o estudante como pertencente a um grupo homogéneo, categorizando-o em um único nível, impossibilita a ponderação das diferenças individuais. Ao considerar -se os níveis como unidades discretas, não existe a previsão da oscilação dos estudantes na passagem de níveis, nem a consideração do ponto de partida dos estudantes em diferentes níveis para diferentes conceitos. Mayberry (1983) refere a existência de muitos estudos empíricos indicativos de que os indivíduos demonstram comportamentos diferentes em diferentes temas da geometria. Apoiados por este aspecto, Clements e Battista (2001 como citado em Battista, 2007) sugerem os níveis de Van Hiele como *níveis* contínuos e aplicáveis a diferentes domínios da geometria ao invés de *estágios* discretos e globalizantes.

Alguns estudos têm procurado adaptar os níveis de Van Hiele para além das figuras no plano, estendo-os às figuras 3D e transformações geométricas (Gutiérrez, Jaime, & Fortuny, 1991) ou procurando compreender os modelos cognitivos para o conceito de ângulo (Matos, 1999). E também nestas áreas, os investigadores assumem os níveis como contínuos, identificando raciocínios que se enquadram em níveis diferentes.

No que diz respeito ao ensino da geometria, alguns autores consideram que “não basta saber matemática para saber ensinar matemática” (Monteiro, Costa, & Costa, 2004a). Embora o professor precise de saber a matemática

que os alunos irão aprender, esta deverá ser mais ampla e mais aproximada à própria natureza da matemática (Fennema & Franke, 1992). O conhecimento superficial da matemática elementar que os professores possam possuir não é suficiente para garantir um ensino eficiente no 1.º ciclo (Brown & Borko, 1992), devendo existir um conhecimento ao nível da interacção dos conhecimentos em matemática, dos procedimentos pedagógicos e dos próprios alunos (Fennema & Franke, 1992). Ball e Bass (2000) definem três problemas centrais para o ensino da matemática: o que os professores precisam saber, de que modo precisam sabê-lo e como ajudá-los a usá-lo. Só na resolução destes problemas se conseguirá resolver a preparação científica e metodológica dos professores. Isto significa que, para se ensinar, é necessário aprender a relacionar a matemática e a pedagogia, bem como perceber o funcionamento dessa relação com a realidade dos alunos (Monteiro *et al.*, 2004a). Inclusivamente, Matos (1999) considera que o ensino da geometria se inicia pela liberdade que se deve conferir aos alunos para organizar fenómenos espaciais e manipular esses meios de organização e não por familiarizar as crianças com estruturas matemáticas latas, estranhas à sua própria realidade. Para a maioria dos alunos, os tópicos geométricos superiores só podem ser atingidos se forem construídos sobre esta organização inicial. Em concordância, Loureiro (2009) refere que o trabalho em geometria não se deve centrar apenas nos objectos geométricos, devendo atender às acções que poderão ser aplicadas sobre eles. O desenvolvimento do raciocínio geométrico deverá advir de uma diversidade de acções e representações adaptadas ao raciocínio a desenvolver.

2.2 – A geometria e o currículo

A forma como os currículos de Matemática tratam a geometria é questionada por diferentes autores. Para uns, os próprios currículos encaram a geometria como independente da realidade dos alunos, bem como dos seus conhecimentos e experiências anteriores (Panorkou & Pratt, 2009). Embora tal não aconteça, a geometria no ensino da Matemática deveria constituir-se como o conhecimento matemático do espaço, baseada em situações intuitivas e de

experimentação (Alsina, 1999). Ao observar-se a tendência de centrar o ensino da geometria simplesmente no reconhecimento e nomeação de formas geométricas e na utilização de fórmulas em medições geométricas (Clements & Battista, 1992; Porter, 1989), Clements (2003) considera que a realidade da maioria dos currículos e de práticas pedagógicas são preocupantes. Para este autor, será necessário repensar em currículos alternativos para o ensino da geometria¹, baseados nos princípios e normas para a matemática escolar propostos pelo NCTM.

Como a investigação tem mostrado, um currículo eficaz por si só não garante o sucesso da aprendizagem da geometria. Albuquerque *et al.* (2008) sugerem que o professor deve (i) tomar em conta as experiências prévias dos alunos como ponto de partida para as suas aprendizagens matemáticas, (ii) propor actividades significativas conducentes aos objectivos definidos, e (iii) promover uma reflexão sobre a experiência dos alunos.

Segundo Veloso (1999), tem existido uma tradição negativa no ensino da geometria em Portugal ao longo dos anos caracterizada por uma importância excessiva conferida ao papel das definições *a priori* da experimentação e da marginalização da geometria no currículo da Matemática, adoptando um carácter independente e sem relação com os restantes conteúdos. Inclusivamente, nas décadas de 70 e 80 a geometria era encarada com um desinteresse inerente para o prosseguimento dos estudos (Abrantes, Serrazina, & Oliveira, 1999).

Contudo, no final dos anos 80, o papel da geometria começou a ser repensado, tendo-se produzido a *Renovação do Currículo de Matemática* (Associação de Professores de Matemática [APM], 2009) com princípios e orientações curriculares para a resolução desses problemas. Este documento surgiu no âmbito do Seminário de Vila Nova de Milfontes realizado em 1988, trazendo uma nova perspectiva relativamente a objectivos e orientações para o ensino da matemática. Reconhecendo a necessidade da selecção dos conteúdos matemáticos a introduzir nos currículos escolares e a reavaliação

¹ Clements (2003) descreve uma pequena amostra de currículos alternativos tais como: ambientes educativos desenvolvidos por Lehrer, Jacobson, and Colleagues; o currículo da Holanda; a reforma curricular pelo University of Chicago School Mathematics Project (UCSMP); o programa Jasper; e o currículo Investigations in Number, Data, and Space. Embora não haja estudos suficiente para comprovar a eficácia destas abordagens, Clements considera-as uma melhoria relativamente às abordagens tradicionais.

das propostas de exploração e desenvolvimento desses conteúdos, os autores especificam, a título de exemplo, a geometria como um dos campos onde seria fundamental a reorientação do ensino para os processos e actualização de conteúdos.

Tendo em conta estas novas orientações, foi elaborado um novo Programa de Matemática para o 1.º ciclo do ensino básico (publicado em 1990, pela Direcção Geral do Ensino Básico e Secundário), tendo como aspecto fundamental a natureza do tipo de actividades a desenvolver (problemas, situações de exploração e descoberta, e situações de aplicação) interligando todos os blocos de conteúdos. No bloco Forma e Espaço, constituído como uma iniciação à geometria, os conteúdos essenciais prendiam-se com (i) a organização espacial, (ii) sólidos geométricos, (iii) figuras geométricas planas, (iv) transformações no plano², e (v) utilização de instrumentos de desenho. Com base nestes conteúdos e no recurso a actividades de manipulação, exploração, construção, transformação e relação, pretendia-se que os alunos no final do 1.º ciclo fossem capazes de:

- Comparar objectos segundo algumas das suas propriedades;
- Reconhecer, nomear e comparar figuras planas;
- Reconhecer elementos e propriedades de figuras planas;
- Reconhecer figuras geométricas em diversas posições;
- Fazer composições com figuras geométricas planas;
- Construir um cubo a partir de uma dada planificação;
- Explorar simetrias;
- ...

(adaptado de Ministério da Educação [ME], 1998, pp.167-195)

Este movimento de revalorização da geometria foi continuado ao longo dos anos 90, tendo surgido documentos essenciais para o desenvolvimento da competência matemática nos seus vários domínios, tais como o *Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências Essenciais* (ME, 2001), o *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (NCTM, 2008), ou o *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME, 2007).

² Neste documento, as transformações no plano são entendidas como composição e decomposição de figuras, não como transformações geométricas.

Em 2001 foi publicado o *Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências Essenciais* pelo ME, definindo os vários aspectos da competência matemática a serem desenvolvidas ao longo do ensino básico. Segundo este documento, no domínio da geometria, os estudantes deveriam desenvolver:

- a aptidão para realizar construções geométricas e para reconhecer e analisar propriedades de figuras geométricas;
- a aptidão para utilizar a visualização e o raciocínio espacial;
- a compreensão de conceitos como a área;
- o reconhecimento e utilização de ideias geométricas em diversas situações;
- ...

(adaptado de ME, 2001, pp.57-71)

A nível internacional, um documento de referência inquestionável é o *Principles and Standards for School Mathematics* publicado pelo NCTM em 2000 (e pela APM em 2008 com o título *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*), que define orientações para a educação matemática do pré-escolar ao 12.º ano. No âmbito da geometria, os alunos devem ser capazes de:

- analisar as características e propriedades de formas geométricas bi e tridimensionais e desenvolver argumentos matemáticos acerca de relações geométricas;
- especificar posições e descrever relações espaciais;
- aplicar transformações geométricas e usar a simetria para analisar situações matemáticas;
- usar a visualização, o raciocínio espacial e a modelação geométrica para resolver problemas.

(adaptado de NCTM, 2008, p.44)

Para além destas orientações, são definidas expectativas para os estudantes dos vários níveis de ensino. Do pré-escolar ao 2.º ciclo, é esperado que os estudantes:

- reconheçam, designem, comparem e classifiquem figuras bi e tridimensionais;

- descrevam e classifiquem formas bi e tridimensionais através das suas propriedades e partes componentes;
- investiguem e prevejam os resultados obtidos pela composição e decomposição de várias figuras bi e tridimensionais;
- explorem a congruência e a semelhança;
- descrevam a posição e o movimento através da linguagem corrente e vocabulário geométrico;
- prevejam e descrevam os resultados obtidos por translação, reflexão e rotação de figuras bidimensionais;
- descrevam os movimentos que mostrem a congruência de duas figuras;
- identifiquem e descrevam a simetria linear e rotacional em formas e figuras bi e tridimensionais;
- criem imagens mentais das figuras geométricas, usando a visualização espacial;
- identifiquem e construam um objecto tridimensional a partir de representações bidimensionais desse objecto;
- identifiquem e desenhem representações bidimensionais de um objecto tridimensional;
- ...

(adaptado de NCTM, 2008, pp. 112, 190)

Actualmente, em Portugal, vigora o *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME, 2007), propondo algumas alterações relativamente ao programa anterior e centrando o ensino da geometria no desenvolvimento do sentido espacial dos estudantes, com especial ênfase na visualização e na compreensão de propriedades de figuras geométricas bi e tridimensionais. As alterações mais significativas dizem respeito à introdução das transformações geométricas logo no 1.º ciclo e a conexão com a Medida, constituindo um único tema: Geometria e Medida. Os autores definiram, assim, como objectivos gerais de aprendizagem:

- Desenvolver a visualização e a capacidade de representar, descrever e construir figuras no plano e no espaço e de identificar propriedades que as caracterizam;
- Identificar e interpretar relações espaciais;
- Compreender grandezas, como a área;
- ...

(adaptado de ME, 2007, p.36)

Existe um aspecto transversal a todos os programas e orientações curriculares referidos anteriormente, considerado essencial no processo de ensino e aprendizagem da geometria: o recurso às novas tecnologias. Vários investigadores desenvolveram estudos nesse sentido, reforçando a importância que o software de Geometria Dinâmica assume na aprendizagem dos conceitos em geometria (Battista, 2001, 2007; Clements, 2004; Clements & Battista, 1992; Clements, Battista, Sarama, Swaminathan, & McMillen, 1997; Clements & Sarama, 2000; Gutiérrez, 1996a; Hershkowitz, 1990; Jones, 2000).

2.3 – O conhecimento em geometria dos professores e futuros professores

Dado que aprender a ensinar constitui-se como um processo contínuo a desenvolver ao longo da vida de um professor, a formação inicial deverá fornecer alicerces sólidos para a sua aprendizagem, tal como a capacidade de raciocínio crítico que ajude os futuros professores a pensar a partir de princípios matemáticos básicos (Tucker, 2001). Neste sentido, a formação inicial deve ser entendida como apenas o início de um processo de construção e identidade profissional (Sousa & Fernandes, 2004). Gomes (2004) considera indiscutível a importância que a formação inicial assume na preparação para o ensino de ideias e conceitos matemáticos de um futuro professor e educador. Refere ainda que as instituições de formação de professores têm vindo a conferir uma importância gradual ao ensino da geometria, integrando diversos conteúdos geométricos no programa das várias disciplinas e unidades curriculares.

Blanco e Barrantes (2003) apelam à necessidade de se prestar mais atenção à formação inicial dos professores como elemento chave para se produzir mudanças no panorama educativo. Verifica-se frequentemente que os estudantes em formação inicial repetem as mesmas conceptualizações erradas adquiridas durante a sua escolaridade e estas ideias têm tendência a tornar-se implícitas, estáveis e resistentes à mudança.

Por esse motivo, não se poderá assumir que os estudantes possuem os conhecimentos prévios adquiridos e este não será o único factor que constitui um obstáculo na formação inicial. Os modelos implícitos do ensino da matemática adquiridos durante a sua escolarização poderão condicionar a condução da actividade matemática em sala de aula (Albuquerque *et al.*, 2008) e a formação matemática científica adquirida poderá não se relacionar com a matemática que o futuro professor vai ensinar ou mesmo tornar-se ineficaz devido à compartimentação de disciplinas nos planos de estudos (Monteiro, Costa, & Costa, 2004b).

Segundo Loureiro (2004), a problemática da formação matemática dos futuros professores e educadores tem vindo a ganhar uma importância acrescida, nomeadamente no quadro das novas orientações curriculares, devendo dar resposta a um conjunto de questões emergentes relacionadas com o tipo de conhecimento matemático necessário ao ensino da disciplina, ou com a relação entre o conhecimento matemático e a própria prática profissional. Gomes e Ralha (2005) reforçam esta ideia referindo que os futuros professores parecem não estar em condições de promover um ensino significativo, na medida em que não apresentam conhecimentos científicos suficientes e adequados aos conteúdos programáticos que têm de leccionar.

Evidencia-se, assim, a importância da formação inicial na formação dos professores como ponto de partida para a mudança conceptual dos estudantes, bem como das suas ideias generalizadas sobre o ensino e metodologias, tal como se constata num estudo realizado por Blanco e Barrantes (2003). Este estudo, realizado com estudantes para professores em Espanha, revela dados curiosos acerca das suas concepções sobre a Geometria. Sobre o ensino e aprendizagem, os estudantes consideram a geometria escolar mais difícil do que os outros temas da matemática escolar, pouco motivante, difícil de ensinar e menos importante do que os temas numéricos. Em termos metodológicos, consideram que é suficiente a explicação dos conteúdos e a realização de actividades como exercícios e problemas, para colmatar as dúvidas dos alunos. Acerca dos conteúdos, afirmam que a geometria plana é mais fácil do que a espacial, que os alunos deveriam aprender mais geometria plana do que espacial e que, de todos os conteúdos, os temas relacionados com a medida são os mais importantes (e dentro desta, a área das figuras planas).

O baixo nível de conhecimentos trazidos do ensino básico e secundário leva a que os professores da formação inicial necessitem de ter especial atenção aos conceitos errados dos estudantes. Por exemplo, num teste diagnóstico realizado numa instituição superior de formação de professores (Monteiro *et al.*, 2004a), verificou-se que, numa amostra de 120 alunos, nenhum respondeu correctamente a todas as questões do teste e apenas 14% dos alunos da variante Matemática/Ciências da Natureza responderam correctamente a mais de metade das questões relacionadas com a geometria. Para além destes valores, metade dos estudantes não soube identificar um ângulo obtuso de uma figura e, quando questionados acerca da descrição de um prisma hexagonal, houve respostas como “é uma pirâmide”, “é constituído por duas faces hexagonais” ou “é um pentágono”.

Também Linchevsky, Vinner e Karsenty (1992) detectaram conceptualizações erradas semelhantes num estudo realizado junto de professores em formação inicial, obtendo constatações dos participantes tais como “um rectângulo não é um paralelogramo”, “existe um paralelogramo com um ângulo recto e que não é rectângulo [referindo-se a um trapézio rectângulo]” ou “figuras semelhantes são as mesmas figuras, mas com diferentes tamanhos”.

Este tipo de afirmações pode conduzir à ideia de que os estudantes que as proferem poderão não ter realizado a disciplina de Geometria no ensino secundário. Mas um estudo realizado por Mayberry (1983) revela que, num teste com conteúdos geométricos, 70% dos padrões de resposta de um estudante que tenha realizado a disciplina de Geometria no ensino secundário, se encontram abaixo do nível 3 de van Hiele sendo, portanto, dados reveladores da falta de preparação para a compreensão formal dos conceitos. Reconhecendo as próprias limitações do estudo, a investigadora constatou que apenas 25% dos participantes se encontravam no nível 4 e nenhum se enquadrava num nível superior a esse.

Mas a realidade é que, por vezes, a formação inicial não é suficiente para colmatar esta problemática e, quando em exercício profissional, os professores demonstram dificuldades, comportam-se como os próprios alunos e agravam as conceptualizações erradas dos seus alunos com as suas próprias concepções (Alatorre & Sáiz, 2009). Vários estudos revelam que os

professores apresentam as mesmas dificuldades conceptuais em geometria e medida dos alunos que ensinam (Owens & Outhred, 2006). O seu conhecimento matemático é baixo (Hershkowitz & Vinner, 1984; Mayberry, 1983; Swafford, Jones, & Thornton, 1997) e este aspecto tem sido tomado em consideração, já que os professores com conhecimento conceptual incompleto transmitem conceitos errados e incompletos aos seus alunos (Zaslavsky, 1991).

Torna-se, então, necessário um investimento na formação contínua, tal como se verifica num estudo realizado por Swafford *et al.* (1997). Através de um programa de intervenção, com a duração de quatro semanas, destinado a aumentar o conhecimento em geometria dos professores, os investigadores verificaram que 74% dos participantes evoluíram em pelo menos um nível de van Hiele (detectado no pré-teste), resultando em alterações positivas face aos seus conhecimentos matemáticos e formas de ensino.

2.4 – Conceitos essenciais no ensino da geometria

Um currículo de Geometria orientado para os objectivos e capacidades a desenvolver pressupõe uma abordagem de conceitos diversificados. Vários autores e investigadores parecem estar de acordo quanto aos conceitos essenciais no ensino da geometria para os primeiros anos.

Segundo Alsina (1999), o professor deveria estar preparado para uma geometria moderna, actual, divertida, prática e emocionante baseada na intuição e experimentação, que envolvesse representação, ordenação, classificação, e movimento de figuras planas e espaciais, induzindo à compreensão do diálogo plano-espaco. Em concordância, Abrantes *et al.* (1999) especificam que as aprendizagens essenciais na educação básica devem contribuir para o desenvolvimento do pensamento geométrico, através de actividades que envolvam a visualização e representação, medição, transformações geométricas e organização do pensamento geométrico.

No âmbito das recomendações específicas para a formação matemática dos futuros educadores de infância e professores dos 1.º e 2.º ciclos do ensino básico, Albuquerque *et al.* (2008) sugerem que os estudantes de formação

inicial desenvolvam competências ao nível (i) da perspectiva histórica da geometria, (ii) da visualização e representação espacial (representações a duas dimensões de objectos a três dimensões e construção de objectos do espaço tridimensional a partir das suas planificações), (iii) das formas geométricas básicas, suas propriedades e relações entre elas, (iv) das transformações geométricas, isometrias e semelhança, (v) da comunicação de ideias geométricas, e (vi) da noção de grandeza e de medida. Relativamente à importância da visualização espacial, Gordo (1994) recomenda que os professores de formação inicial efectuem investigações no 1.º ciclo do ensino básico, no sentido de aprofundarem conhecimentos sobre a sua realidade, já que a visualização espacial se encontra presente em muitas áreas da Matemática.

Também Loureiro (2004) sugere que se adoptem os objectivos fundamentais para a formação de professores do ensino secundário (definidos por J. Malkevitch em 1991) aos estudantes de formação inicial de professores, constituindo-se como o desenvolvimento de competências ao nível (i) do pensamento e raciocínio visual, (ii) da relação entre Geometria e outras áreas da Matemática, (iii) da classificação e definição de objectos geométricos, e (iv) da simetria e transformações geométricas.

Ao nível internacional, nos Estados Unidos, o National Council of Supervisors of Mathematics [NCSM] (1990) refere como essencial o desenvolvimento de algumas competências matemáticas no ensino básico ao nível de conceitos como paralelismo, perpendicularidade, congruência, semelhança e simetria. Adicionalmente, refere a importância do conhecimento das propriedades das figuras planas e dos sólidos geométricos, da visualização e das transformações geométricas, devendo ser explorados através de actividades de medição e resolução de problemas. No Reino Unido, Jones & Mooney (2003) reforçam a importância de algumas prioridades geométricas da National Numeracy Strategy [NNS], tais como, representação, propriedades e classificação de figuras bi e tridimensionais, eixos de simetria, visualização de objectos e transformações geométricas.

2.4.1 – Raciocínio espacial

A maior parte do pensamento geométrico é baseada no raciocínio espacial: a capacidade de observar, interpretar e reflectir sobre objectos espaciais, imagens, relações e transformações (Battista, 2007). O raciocínio espacial implica, deste modo, gerar, analisar, transformar e operar sobre imagens físicas ou mentais (Clements & Battista, 1992).

Para Gutiérrez (1996a), não existe um consenso geral quanto à utilização da terminologia utilizada nesta área, pelo que não haverá diferenças entre os conceitos “raciocínio espacial” e “visualização espacial” utilizados por diversos autores. No entanto, todos estão de acordo quanto à importância desta área para o desenvolvimento de competências ao nível da geometria (Gordo, 1994). Hershkowitz, Parzysz e Dormolen (1996) referem diversas razões para se investir no desenvolvimento do raciocínio espacial a partir do pré-escolar, nomeadamente, (i) a compreensão do mundo visual que nos rodeia, (ii) a compreensão dos conceitos, processos e fenómenos em diferentes áreas da matemática e ciência, e (iii) a percepção da mutabilidade dos objectos.

As capacidades de raciocínio espacial também têm sido estudadas. Del Grande (1990) sugere a existência de 7 capacidades espaciais³ com especial relevância para o estudo da geometria:

- *Coordenação visual-motora* (capacidade de coordenar a visão com os movimentos do corpo);
- *Percepção figura-fundo* (capacidade de identificar um componente específico numa determinada situação e envolve a mudança de percepção de figuras contra fundos complexos);
- *Constância perceptual* (capacidade para distinguir figuras geométricas em diversas posições, tamanhos, contextos e texturas);
- *Percepção da posição no espaço* (capacidade de relacionar um objecto connosco);

³ Del Grande (1990) refere que, na literatura da matemática e psicologia, o sentido espacial é usualmente referido como *percepção espacial* ou *visualização espacial*, pelo que deve ser entendido como o mesmo conceito.

- *Percepção de relações espaciais* (capacidade de ver dois ou mais objectos em relação connosco ou consigo próprios);
- *Discriminação visual* (capacidade para identificar semelhanças ou diferenças entre objectos);
- *Memória visual* (capacidade de recordar objectos que já não estão visíveis e relacionar as suas características com outros objectos visíveis ou não).

É certo que os estudantes não desenvolvem estas capacidades ao mesmo nível, existindo diferentes desempenhos consoante a capacidade envolvida em uma determinada tarefa proposta (Gordo, 1994). Contudo, será possível desenvolvê-las a partir de um conjunto de actividades que as privilegiem. Del Grande (1987) sugere que os professores do 1.º ciclo devam ter em conta as capacidades espaciais dos alunos que ensinam para adaptarem as actividades a essas capacidades; as actividades de visualização espacial só serão eficazes se forem integradas num programa que tenha em conta o desenvolvimento global da criança. E considerando as experiências informais dos alunos nesta área na chegada à escola, Abrantes *et al.* (1999) sugerem a sua continuidade através de actividades de manipulação, construção e ordenação de objectos, alargando o plano da percepção ao campo da representação.

Sobre este aspecto, Jones e Mooney (2003) consideram que a representação dos objectos tridimensionais potencia não só o desenvolvimento do sentido espacial, intuição geométrica e capacidades de visualização, como também o conhecimento e compreensão de propriedades geométricas e teoremas. É necessário tomar em consideração que um único tipo de representação dificilmente representa integralmente um objecto 3D (Pittalis, Mousoulides, & Christou, 2009) e que as dificuldades em geometria surgem, por vezes, porque os estudantes raciocinam acerca dessas representações, enquanto deveriam estar a fazê-lo sobre objectos geométricos teóricos (Laborde, 1993, como citado em Battista, 2007, p.844). Por esse motivo, Ho e Eastman (2006) consideram que as mudanças entre representações 2D e 3D são importantes no desenvolvimento do raciocínio espacial.

A análise das dificuldades dos estudantes face às questões relacionadas com o raciocínio espacial também tem procurado contribuir para a compreensão do desenvolvimento do pensamento geométrico.

Um estudo feito junto de alunos do 3.º ano de escolaridade por Gordo (1994) revela que a capacidade de *percepção de relações espaciais* será, porventura, das mais delicadas de desenvolver neste nível etário, devido à dificuldade de descentração do seu próprio corpo.

A passagem do objecto 3D para uma representação 2D e vice-versa não é um assunto pacífico, dado que Gutiérrez (1996b) não consegue concluir que representar será mais fácil do que construir. Os resultados do seu estudo demonstram que desenhar vistas de lado é mais fácil do que construir a partir de vistas de lado, mas desenhar projecções isométricas é mais difícil do que construir a partir de uma representação isométrica.

Ainda sobre este assunto, Pittalis *et al.* (2009) constata que os estudantes não conseguem compreender a natureza dos objectos 3D quando representados no plano e não conseguem conceptualizar as convenções necessárias no desenho e interpretação de representações 2D de objectos 3D.

Será necessário, portanto, a introdução deste tipo de actividades desde o pré-escolar, dado que se tem verificado que, tanto as crianças como os professores apresentam dificuldades na passagem de um objecto 3D para uma representação em 2D (Hershkowitz, 1990). Clements (2003) sugere actividades de construção com blocos, de modo que as crianças ganhem a noção de perspectiva através da observação do objecto sob vários pontos de vista e de identificação das vistas relacionadas com o objecto. O *Princípios e Normas para a Matemática escolar* do NCTM (2008) inclui propostas de análise e desenho de vistas de uma estrutura de blocos, representação de sólidos geométricos através de planificações, nomeadamente, o cubo. Também Gutiérrez (1996b) sugere que se trabalhe este tema a partir dos tipos de representações no plano mais utilizados no contexto da geometria: camadas, vistas ortogonais ou laterais, vistas ortogonais ou laterais codificadas e isométricas. E Pittalis *et al.* (2009) recomendam que se realizem actividades de leitura, interpretação e representação no plano de figuras 3D.

2.4.2 – Classificação

Considerando a classificação como a organização de um conjunto de objectos segundo um determinado critério (Loureiro, 2008), Smith (1995) descreve o acto de classificar como um processo individual de apelar às representações mentais das várias categorias para decidir em qual incluir determinado objecto. É certo que o pensamento geométrico das crianças não é apenas visual (Clements, Swaminathan, Hannibal, & Sarama, 1999) mas usualmente decidem se um objecto pertence a uma categoria se for suficientemente similar a outro objecto anteriormente observado (Smith, 1995). Inclusivamente, Clements e Battista (1992) sugerem que as crianças diferenciam as formas através da combinação de protótipos visuais (exemplares de figuras) e um parco conhecimento das suas propriedades.

Os protótipos são importantes na fase inicial da aprendizagem da geometria, pois proporcionam exemplos que permitem às crianças associar nomes a vários tipos de figuras (Edwards & Harper, 2010). Crianças pequenas podem produzir protótipos na classificação de figuras sem atender necessariamente às propriedades e componentes específicos dessas figuras (Sarama & Clements, 2009). Porém, as formas limitadas de protótipos dos estudantes conduzem à centralização da observação numa característica em especial, em detrimento de outros atributos. Por exemplo, quando confrontados com um quadrado que sofreu uma rotação de 45° , classificam-no muitas vezes como um losango, dado que as suas experiências anteriores não lhes permitem relacionar as propriedades da figura, centrando-se apenas na posição relativa dos seus lados; seria um quadrado se a figura apresentasse os lados na horizontal e na vertical (Battista, 2007; Clements & Sarama, 2000).

Este tipo de conceptualizações é muito comum, estabelecendo certos padrões dentro das mesmas populações (Hershkowitz, 1990): (i) *conceptualizações erradas que perduram* ao longo dos níveis de ensino em estudantes do ensino básico, secundário, superior e professores; (ii) *conceptualizações erradas que diminuem* com a aquisição conceptual, tal como é esperado; e (iii) *conceptualizações erradas que aumentam* com a aquisição conceptual, desenvolvidas no processo de aprendizagem, muitas vezes devido ao limitado contacto com figuras prototípicas. Del Grande (1990) sugere

actividades de constância perceptual, no sentido de reduzir estes erros de conceptualização.

Na procura da compreensão dos mecanismos de raciocínio das crianças relativamente à classificação de figuras, Lehrer, Jenkins e Osana (1998) efectuaram um estudo no qual apresentavam tríades de figuras e questionavam os participantes no sentido de perceber qual o grupo com figuras mais idênticas. Os resultados obtidos baseavam-se na aparência das figuras, comparando-as com protótipos de outras figuras (“parece um quadrado”), com protótipos de objectos da vida real (“parece uma rampa”), pelo tamanho (“é magrinho⁴”) ou pelos atributos das propriedades dos ângulos (“é bicudo⁵”, “é inclinado⁶”). Os investigadores concluíram que os melhores resultados provinham de crianças que se apercebiam das relações entre as figuras a partir de transformações dinâmicas (uma figura transformar-se noutra).

Vários estudos têm sido realizados acerca da classificação de triângulos e quadriláteros, identificando as conceptualizações erradas das crianças baseadas nos protótipos que possuem. Relativamente à classificação de triângulos:

- as crianças aceitam formas triangulares com lados curvos, mas rejeitam triângulos “muito longos” ou “inclinados⁷” (Clements & Sarama, 2000);
- os triângulos são reduzidos a formas que se assemelham a “fatias de pizza” (Edwards & Harper, 2010);
- embora algumas protestem, a maioria das crianças aceita triângulos cuja base não se encontra na horizontal. Muitas rejeitam triângulos sem simetria (se “o topo não se encontra ao meio⁸”) (Clements, 2003);
- o protótipo de triângulo das crianças do pré-escolar é o triângulo isósceles. Os triângulos “muito fininhos” ou “pouco largos” são rejeitados (Clements, 2004);

⁴ “it’s skinny”, no original.

⁵ “it’s pointy”, no original.

⁶ “it’s slanty”, no original.

⁷ “bent over”, no original.

⁸ “the point on top is not in the middle”, no original.

- num conjunto de figuras, os triângulos equiláteros e os triângulos rectângulos são mais facilmente reconhecidos do que os triângulos escalenos (Hannibal, 1999);
- para os alunos do ensino básico e secundário, a única maneira de uma figura poder ser um triângulo é sendo equilátero. Um papagaio côncavo é mais “parecido” com um triângulo do que com um rectângulo (Clements & Battista, 1992);
- poucas crianças de 7-8 anos reconhecem triângulos rectângulos em orientações não-convencionais (com os catetos noutras posições que não a horizontal e a vertical) (Cooper & Krainer, 1990).

Quanto à classificação de quadriláteros:

- as figuras são rectângulos, quando se assemelham a protótipos de portas (Clements & Sarama, 2000);
- as crianças tendem a aceitar paralelogramos obliquângulos e trapézios rectângulos como rectângulos (Clements, 2003; Clements, 2004; Clements & Battista, 1992; Clements & Sarama, 2000; Sarama & Clements, 2009);
- o protótipo de rectângulo parece ser uma figura de quatro lados com dois lados paralelos longos e “cantos⁹” parecidos com os dos quadrado (Sarama & Clements, 2009);
- os quadrados que sofrem uma rotação de 45° são losangos (Battista, 2007; Clements & Sarama, 2000);
- “um losango é um quadrado bêbedo, porque é como um quadrado, só que doente¹⁰” (Jones, 2000).

Clements e Sarama (2000) procuraram encontrar justificações para estas ideias geométricas generalizadas, apercebendo-se que, na maioria das lojas de brinquedos, lojas de apoio pedagógico e catálogos de materiais escolares, só aparecem representados os protótipos de triângulos, rectângulos

⁹ “corners”, no original.

¹⁰ “a rhombus [is] a drunken square, because it’s like a square, only sick”, no original.

e quadrados: a maioria dos triângulos é equilátero ou isósceles com a base na horizontal; a maioria dos retângulos está posicionada com os lados na horizontal ou vertical, com uma proporção de 2 por 3; e a maioria dos quadrados tem os lados na horizontal e vertical. Se não se contrariar esta tendência desde cedo, estes conceitos errados tenderão a persistir. Por exemplo, se os octógonos forem reduzidos a “sinais de stop”, os estudantes não reconhecerão as figuras irregulares de oito lados como sendo também octógonos (Edwards & Harper, 2010). Embora os resultados das investigações apontem para uma maior facilidade no reconhecimento de triângulos do que retângulos (Clements *et al.*, 1999), os estudantes possuem dificuldades em identificar figuras “extremamente obtusas”, talvez pela sua inexistência nos manuais escolares (Wu & Ma, 2005).

Estudos realizados com professores revelam os mesmos padrões de resultados no que diz respeito à classificação de figuras. Alatorre e Sáiz (2009) aperceberam-se de que os triângulos são identificados a partir de protótipos existindo uma ideia marcada de que a base é necessariamente horizontal, a altura é necessariamente vertical e interna e os triângulos são necessariamente isósceles.

Confrontando estes estudos, pode supor-se que as dificuldades dos estudantes (e dos próprios professores) advirão das ideias de classificação que lhes foram transmitidas na sua escolaridade (Heinze, 2002). Sophocleous, Kalogirou e Gagatsis (2009) demonstram a melhoria de resultados em tarefas de classificação quando os estudantes baseiam as suas respostas nos atributos críticos das figuras (conjunto de propriedades) e não nos atributos visuais (aparência). Vinner e Hershkowitz (1980 como citado em Clements & Battista, 1992, p.447) referem que muitas vezes, na classificação de figuras, são utilizadas imagens conceptuais (modelos mentais) em vez de definições conceptuais (combinação dos modelos mentais com propriedades associadas ao conceito). Na maior parte das vezes, essas imagens conceptuais são coerentes com o tipo de definições que utilizam: partitivas ou exclusivas, em vez de hierárquicas ou inclusivas (Heinze, 2002; Jones, 2000; de Villiers, 1994).

Embora os matemáticos privilegiem as definições inclusivas (Heinze, 2002), vários estudos demonstram que os estudantes apresentam dificuldades

nesse tipo de definições, compreendendo-as mas com dificuldades na sua aceitação (Clements & Battista, 1992; Jones, 2000; de Villiers, 1994). Leung (2008) reforça a importância das definições inclusivas, afirmando que classificar apenas pela comparação da forma não ajuda os alunos a compreender as suas propriedades inclusivas e transitivas. Sugere, também, a necessidade de compreender as figuras dinamicamente, confirmando as propriedades que se mantêm durante a sua transformação dinâmica. Apesar do seu estudo se centrar na classificação de quadriláteros, Leung aconselha a extensão deste tipo de análise à família dos triângulos.

Mas a compreensão das definições inclusivas depende dos modelos visuais pessoais, pois é necessário que as imagens conceptuais sejam coerentes com as definições conceptuais. Por exemplo, a classificação do quadrado como um rectângulo parece depender das propriedades em que os estudantes se focam (Matsuo, 1993). Acerca deste exemplo, Linchevsky *et al.* (1992) afirmam que todos os alunos do ensino secundário deveriam saber que um quadrado é um rectângulo. Esta percepção poderá ser positivamente auxiliada pela utilização da palavra “especial” nas relações inclusivas (Okazaki, 2009). Ou então, na não limitação das definições aos protótipos das figuras (Hannibal, 1999).

A transição da percepção das figuras para a sua definição e desta para a definição inclusiva não é um processo fácil (Cannizzaro & Menghini, 2004), mas o recurso a software geométrico poderá facilitar esta passagem com compreensão (Jones, 2000). E, tal como nos outros temas da Geometria, ter a consciência de que os estudantes já trazem alguns conhecimentos sobre as figuras baseados em experiências prévias e construir os novos conceitos a partir destes (Clements *et al.*, 1999).

Dado que uma compreensão básica das formas geométricas é essencial para o estudo da geometria, Hannibal (1999) sugere que os educadores e professores repensem as suas metodologias. Vários autores sugerem linhas orientadoras ou propostas de aprendizagem significativas, tais como Abrantes *et al.* (1999) que reforçam a ideia da organização do pensamento geométrico através de actividades de construção, visualização e classificação como meio para uma consequente construção (não memorização) de definições; como o NCTM (2008) que propõe a observação de exemplos e contra-exemplos de

figuras geométricas para a classificação e construção de conceitos; ou como o ME (2007) que, no *Programa de Matemática do Ensino Básico*, salienta a necessidade de se considerar o quadrado como um caso particular do rectângulo.

2.4.3 – Congruência

Vários estudos indicam que as crianças aplicam diferentes tipos de acções cognitivas sobre as figuras (Lehrer, Jenkins & Osana, 1998), estabelecendo relações entre elas. Uma das relações que começa a ser desenvolvida desde cedo está inerente ao conceito de congruência (Clements, 2003). Se numa fase inicial, as crianças identificam figuras congruentes por sobreposição, mais tarde referem-se às propriedades das figuras e transformações geométricas nas suas justificações, ainda que nem sempre rigorosas (Rosser, 1994).

Embora alguns estudos o contradigam (Clements, 2003), até as crianças mais pequenas conseguem aprender algo sobre as transformações geométricas e até mesmo interiorizá-las (Clements, Battista, Sarama, & Swaminathan, 1996). Del Grande (1990) reforça esta ideia ao referir que a capacidade de *percepção da posição no espaço* poderá ser desenvolvida através da identificação de figuras congruentes que tenham sofrido transformações geométricas de translação, rotação, reflexão e suas composições. Uma correcta identificação de figuras congruentes estará dependente do desenvolvimento da capacidade de *constância perceptual*, adquirida através de experiências que envolvam a manipulação de objectos.

Apesar de se proporem actividades relacionadas com transformações geométricas a partir do pré-escolar, é necessário tomar em consideração que o tipo de transformação geométrica e a orientação da transformação geométrica poderão estar na origem de algumas dificuldades demonstradas por estudantes.

Alguns estudos indicam que os resultados são superiores em tarefas que envolvam rotação relativamente às que envolvam reflexão (Jacobson & Lehrer, 2000). Um estudo realizado pelo National Assessment of Educational Progress [NAEP] (Clements & Battista, 1992) nos Estados Unidos em 1986, revela que apenas 60% de estudantes do 7.º ano identificaram correctamente a

imagem de um objecto reflectido segundo um eixo. Outros estudos revelam que os resultados também são superiores em tarefas que envolvam translação relativamente às que envolvam rotação (Clements *et al.*, 1996; Schultz & Austin, 1983). Este caso poderá dever-se ao facto de os estudantes associarem as transformações geométricas a experiências pessoais e, no mundo real, quando se realiza um movimento de rotação também se avança, o que não acontece com a rotação em torno de um centro de rotação (Clements *et al.*, 1996).

Relativamente à orientação das transformações geométricas que envolvem reflexão, parece existir uma dificuldade de compreensão da própria transformação quando esta tem subjacente um eixo oblíquo (Schultz & Austin, 1983).

Embora no ensino básico se trabalhe sobretudo com transformações geométricas no plano, Ho e Eastman (2006) aconselham uma extensão ao espaço tridimensional com actividades que envolvam a rotação de figuras 3D. Também Gutiérrez e Jaime (1993) sugerem que se realizem experiências variadas com objectos concretos e virtuais no intuito de se promover estratégias de análise de rotação de imagens e o desenvolvimento do raciocínio espacial. Ao investir-se no desenvolvimento do raciocínio espacial através de actividades de transformação prepara-se os estudantes para o estudo das características das formas bi e tridimensionais (Abrantes *et al.*, 1999). Neste sentido, o NCTM (2008) sugere a exploração das noções informais dos estudantes acerca do movimento das formas, através de actividades que envolvam translações, rotações e reflexões.

2.4.4 – Equivalência / Área

O conceito de medida em geometria é lato e normalmente encontra-se associado à atribuição de números a uma entidade geométrica (Battista, 2007). Por esse motivo, muitos professores consideram o estudo da área como um conjunto de tarefas numéricas, baseadas em cálculos, não trabalhando as estruturas espaciais nem dando relevo à região que determinada figura ocupa (Tierney, Boyd, & Davis, 1990).

Vários estudos indicam que os estudantes têm poucos conhecimentos acerca da área (Owens & Outhred, 2006), mas os próprios professores também

revelam um conhecimento limitado ao reduzir o conceito de área à aplicação linear de fórmulas (Tierney *et al.*, 1990). De facto, estas dificuldades parecem advir de uma introdução prematura de fórmulas que conduzem a um raciocínio superficial em substituição de uma compreensão do conceito (Battista, 2007).

Segundo Battista (2007), existem dois tipos de raciocínio associado à medida: O raciocínio *nonmeasurement*, que não envolve números mas inferências visuais-espaciais baseadas em comparações, transformações mentais e propriedades geométricas; e o raciocínio *measurement*, que envolve uma iteração unidade-comprimento, ou seja, a determinação de quantas vezes a unidade de medida cabe no objecto sem falhas nem sobreposições. Para o desenvolvimento destes tipos de raciocínio torna-se essencial a utilização de unidades de medida de natureza diferente, pois o tamanho e a forma da unidade de medida podem afectar a determinação da área (Owens & Outhred, 2006).

Embora em número limitado (Clements, Sarama, & Wilson, 2001), alguns estudos debruçam-se sobre a determinação da área a partir de composições de figuras. Neste campo, os resultados do NAEP no ano 2000 (Battista, 2007) acerca da área foram preocupantes, pois apenas 14% de estudantes do 8.º ano foram capazes de determinar o número de quadrados necessários para cobrir uma determinada região. Lehrer, Jenkins e Osana (1998) identificaram que apenas um número limitado de crianças raciocinam com base na composição aditiva da área através de tarefas que requeriam a identificação de figuras equivalentes que apresentavam formas diferentes. E quando se utiliza especificamente o termo *área* na proposta de tarefas, os resultados diminuem consideravelmente (Outhred & Mitchelmore, 1996).

Apesar destas dificuldades, os estudantes poderão evoluir na composição e decomposição de figuras através de um ensino adequado, como se comprova pelo estudo realizado por Clements *et al.* (2001). Este estudo mostrou que os alunos foram capazes de compor formas geométricas, de sintetizar essas combinações de formas em novas formas compostas e, em alguns casos, de realizar iterações sobre essas mesmas formas compostas.

A utilização de materiais não convencionais de medida toma uma importância fulcral no desenvolvimento do conceito de área. No seu estudo, Nunes, Light, Mason e Allerton (1994) aperceberam-se de que os estudantes

que utilizaram materiais não convencionais (tijolos) para determinar a área de uma superfície superaram os estudantes que utilizaram a régua. Os investigadores sugerem que a fórmula que lhes é ensinada não se encaixa com os padrões de raciocínio que os estudantes desenvolvem por si próprios. Reforçam ainda a ideia de que ensinar o próprio conceito de área é difícil, pelo que é necessário prestar-lhe uma atenção especial.

Tendo em conta esta dificuldade, o NCTM (2008) propõe que o conceito seja trabalhado através de experiências concretas de preenchimento de superfícies utilizando unidades de medida convencionais e não convencionais, e do estabelecimento de comparações entre figuras verificando relações de equivalência. Este tipo de tarefas também está previsto no *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME, 2007) especificando que, para o estabelecimento de relações de equivalência entre figuras, poder-se-á propor aos alunos que sobreponham as figuras a comparar. Battista (2007) ainda sugere que os professores não se limitem a propor figuras convencionais para a análise da área, mas que este trabalho se generalize às figuras curvas, às figuras irregulares e a figuras de grandes dimensões. Este autor considera que, apesar das dificuldades dos alunos em medida serem alarmantes, já que a medida é essencial para a aplicação de conceitos geométricos na vida real, ainda não foram feitos estudos que investiguem a sua influência na aprendizagem de outros conceitos matemáticos mais avançados.

2.4.5 – Semelhança

Sob condições favoráveis, crianças de todas as idades conseguem aplicar transformações de semelhança às figuras (Sarama & Clements, 2009). O conceito de semelhança parece providenciar imagens mentais concretas de raciocínio proporcional, sendo considerado uma das ideias mais básicas de compreender a geometria das medidas indirectas, do desenho à escala, dos modelos à escala e da natureza do crescimento (Hershkowitz, 1990).

Contudo, segundo Zaslavsky (1991), o conceito de semelhança é considerado um dos tópicos mais difíceis de ensinar e aprender em geometria. Os próprios professores têm conceitos errados acerca da semelhança ao excluir o caso especial da congruência. Para alguns, todos os rectângulos são

semelhantes, desde que não sejam congruentes, todos os triângulos isósceles são semelhantes e todos os triângulos rectângulos são semelhantes.

Um estudo realizado por Mayberry (1983) revela que, dos sete conceitos geométricos seleccionados para testar professores do ensino básico, os participantes erraram mais nas questões acerca da semelhança, tendo obtido respostas como “dois triângulos isósceles são sempre semelhantes”, “às vezes um rectângulo e um triângulo são semelhantes” e “dois triângulos congruentes nunca são semelhantes”. Contudo, um elevado número de participantes também afirmou que “dois quadrados são sempre semelhantes” e “um rectângulo e um triângulo nunca são semelhantes”. Importa, assim, dar atenção à ideia de congruência como um caso particular da semelhança.

Alguns estudos realizados junto de estudantes procuraram compreender e detectar as suas considerações acerca deste conceito. Em tarefas de identificação de figuras semelhantes, Vollrath (1977) verificou que muitos estudantes seleccionaram os rectângulos com o mesmo comprimento, considerando que o atributo “ter o mesmo comprimento” se sobrepõe ao atributo “ter a mesma razão de comprimento entre os lados”. E que é frequente seleccionarem todos os rectângulos como um conjunto de figuras semelhantes. Constatou, portanto, uma diversidade de respostas que assumiu dever-se à aquisição de uma variedade de sentidos e interpretação para o conceito de semelhança. Para alguns, “ter a mesma forma” significa “ter o mesmo tipo de forma”. Neste sentido, McDonald (1989) reforça a ideia da importância da utilização correcta da linguagem geométrica, pois muito erros detectados surgem a partir de confusões terminológicas. Os resultados do seu estudo recomendam que os professores de Geometria considerem o papel que a linguagem assume na compreensão das relações entre conceitos pelos estudantes.

Considerando a dificuldade e a importância deste conceito, Abrantes *et al.* (1999) sugerem que as experiências iniciais com transformações geométricas não se restrinjam à observação de figuras simétricas e congruentes, mas também semelhantes. O raciocínio proporcional directamente ligado ao conceito começa a desenvolver-se com a observação do que muda e do que se mantém numa figura que é aumentada ou reduzida. O NCTM (2008) também propõe a análise e a construção de figuras com

determinadas condições, de modo a verificar-se relações de semelhança entre elas. Apesar da abordagem ao conceito de proporcionalidade estar prevista apenas no 6.º ano, os estudantes do 1.º ciclo poderão começar a desenvolver o raciocínio proporcional através das relações entre figuras que foram ampliadas ou reduzidas.

2.4.6 – Propriedades de figuras 2D

É muito comum as crianças pensarem sobre as figuras apenas pela sua aparência física. Os professores têm tendência a listar um conjunto de características das figuras, pelo que os alunos as distinguem pela forma e pela verificação das características listadas. Esta metodologia inibe a capacidade de resolver problemas geométricos abstractos que requeiram raciocínio cognitivo lógico (Leung, 2008), pelo que é necessário estudar as características comuns a todos os elementos de uma classe de figuras (propriedades das figuras) e não só a sua representação (Parzysz, 1988).

Apesar de algumas evoluções nesse sentido, os currículos do pré-escolar e ensino básico continuam a incluir pouco mais do que reconhecer e nomear figuras geométricas (Porter, 1989; Clements & Battista, 1992). É necessário considerar que as imagens podem ser evocadas na ausência de material perceptual (Battista, 2007), pelo que é imprescindível que os estudantes desenvolvam competências nessa área.

Estudos sobre a base perceptual para a formação de conceitos geométricos são raros (Mitchelmore, 1992). No caso das propriedades de figuras geométricas verifica-se geralmente que os estudantes possuem diferentes concepções acerca do mesmo conceito. Por exemplo, é comum os estudantes não considerarem os ângulos como uma propriedade saliente das figuras geométricas (Clements *et al.*, 1996).

Mitchelmore (1992) considera que o conceito de ângulo tem uma natureza complexa, pelo que se torna essencial relacionar as representações estáticas com modelos dinâmicos. O seu estudo revela que um terço dos estudantes do 1.º ciclo reconhece ângulos rectos na maioria das figuras, mas falham na sua identificação em figuras menos usuais. Este facto poderá dever-se ao conceito restrito de ângulo recto, na medida em que o relacionam com rectas perpendiculares dispostas em orientações convencionais

(horizontalmente e verticalmente, como os cantos de uma folha de papel). E a noção de perpendicularidade não é “perceptualmente primitiva” como a noção de paralelismo, pois a relação entre rectas paralelas é visualmente óbvia o que não acontece com rectas perpendiculares.

Outro estudo nesta área (Matos, 1999) revela que a imagem mental de ângulo dos alunos é o agudo e o recto, constituindo-se estes como o protótipo de ângulo. Além disso, a posição prototípica de um ângulo é aquela em que um dos lados está na posição horizontal ou vertical.

Os próprios estudantes de formação inicial revelam deficiências perceptuais nesta área. Um estudo realizado por Gomes e Ralha (2005) junto de futuros professores do 1.º ciclo revela que estes possuem uma conceptualização limitada acerca dos ângulos, baseada em exemplos associados a protótipos, sem relação com uma definição rigorosa e poucas vezes associada à definição dada pelo próprio indivíduo.

Na base destes conceitos errados ou restritos está o fraco conhecimento que os estudantes apresentam sobre propriedades das figuras no ensino básico e secundário. Vários autores (Clements & Battista, 1992; Fuys, Geddes, & Tischler, 1988; Hoffer, 1983, como citado em Clements & Battista, 1992, p.422; e Sarama & Clements, 2009) apresentam exemplos destas conceptualizações erradas:

- um ângulo tem de possuir uma semi-recta horizontal;
- dois ângulos rectos em orientações diferentes não têm a mesma amplitude;
- a soma da amplitude dos ângulos de um quadrilátero é a mesma que a sua área;
- para ser um lado de uma figura, o segmento tem de estar na vertical;
- um segmento não é uma diagonal se estiver na vertical ou horizontal;
- um quadrado não é um quadrado se a sua base não for horizontal;
- se uma figura tem quatro lados, é um quadrado;

- a altura de um triângulo ou paralelogramo é o lado adjacente à base.

No sentido de prevenir e colmatar alguns destes conceitos errados no ensino básico, Abrantes *et al.* (1999) sugerem que se investiguem propriedades geométricas e relações nos triângulos e quadriláteros e que se explore a invariância da soma da amplitude dos ângulos internos de um triângulo aquando da sua modificação. O NCTM (2008) propõe o estudo das características e propriedades das figuras, reforçando as componentes e propriedades das diversas classes de formas geométricas. Sugere ainda a realização de experiências com vários tipos de rectângulos, por exemplo, de modo a desenvolver a capacidade de conjecturar acerca das suas diagonais relativamente à congruência e bissecção.

2.4.7 – Simetria

As crianças têm noções de simetria desde os primeiros anos (Clements, 2003; Sarama & Clements, 2009), pelo que o trabalho a desenvolver nesse sentido deverá partir das suas experiências prévias.

Segundo Schattschneider (2009), os alunos começam por aprender a reconhecer a simetria das figuras através da observação de vários exemplos das mesmas, testando-as com espelhos, dobrando-as, rodando-as e sobrepondo-as. Porém, existem algumas variáveis que afectam a percepção da simetria de figuras e que devem ser consideradas no desenvolvimento deste tema no ensino básico (Hershkowitz, 1990): A orientação do eixo de simetria¹¹, a posição respectiva das diferentes partes da figura geométrica e do eixo (fenómeno dos protótipos), e a idade dos estudantes¹².

Os resultados de estudos relacionados com a simetria têm demonstrado algumas dificuldades nas conceptualizações dos estudantes. O NAEP de 1986 (Clements & Battista, 1992) revela que menos de 25% de estudantes do 11.º ano identificam correctamente figuras com simetria, embora seja um conceito estudado no ensino básico.

¹¹ Genkins (1975, como citado em Clements, 2003, p.162) considera que a simetria bilateral vertical é mais fácil de compreender do que a simetria horizontal.

¹² Genkins (1975, como citado em Clements, 2003, p.162) também considera que a maioria dos conceitos sobre simetria não se estabelecem firmemente antes dos 12 anos de idade.

Para o ensino da simetria no ensino básico, o ME (2007) define como objectivo específico do *Programa de Matemática do Ensino Básico* “identificar no plano eixos de simetria de figuras” (p.23) e como proposta de exploração, a utilização de espelhos e miras para as reflexões. O NCTM (2008) salienta as orientações metodológicas dos professores para a identificação, descrição e comprovação de características de simetria presentes em figuras. Como exemplo, sugerem a composição de figuras com simetria de rotação e reflexão utilizando peças poligonais, espelhos, recortes e dobragens em papel para investigar a existência de eixos de simetria. Sugerem ainda a exploração de figuras com mais de um eixo de simetria relacionando-a com a temática da classificação e das propriedades de figuras bidimensionais.

Capítulo 3

METODOLOGIA

O presente capítulo pretende dar uma panorâmica fundamentada da metodologia seguida no estudo. É feita uma análise das opções metodológicas tomadas e uma caracterização dos participantes envolvidos no estudo, bem como uma análise geral do currículo obrigatório de matemática da licenciatura em Educação Básica e, mais especificamente, da unidade curricular de “Geometria”.

O capítulo contempla também uma secção dedicada ao processo de construção do instrumento de recolha de dados, sendo incluída uma justificação e objectivos dos elementos constituintes do mesmo.

Por fim, é feita uma descrição dos procedimentos adoptados na recolha e análise de dados.

3.1 – Opções metodológicas

Sendo encarado como um estudo exploratório, na medida em que se constitui como uma primeira investigação numa área em que não há conhecimento produzido, este estudo compreende dois tipos de metodologia interligados entre si – o quantitativo e o qualitativo – podendo ser considerado como tendo uma *abordagem metodológica mista*¹³ (Greene & Caracelli, 2003; Teddlie & Tashakkori, 2003).

Considerado por Teddlie e Tashakkori (2003) como o terceiro movimento metodológico, este tipo de abordagem permite utilizar as metodologias quantitativa e qualitativa em relação às questões de investigação, aos métodos, à recolha de dados, aos procedimentos de análise e/ou às inferências. Tendo como foco principal a resposta às necessidades do contexto em que o estudo foi realizado, de modo a gerar interpretações compreensivas do real (Greene & Caracelli, 2003), a abordagem metodológica mista revela-se

¹³ “Mixed methods”, no original.

particularmente útil para esta investigação em três aspectos referidos por Tashakkori e Teddlie (2003): permite procurar responder a questões de investigação que outras metodologias não conseguem, permite fornecer inferências mais consistentes, e permite a possibilidade de apresentar uma grande diversidade de pontos de vista acerca do mesmo problema.

Em termos de análise de dados, a opção de interligação entre as metodologias quantitativa e qualitativa prende-se com dois factores: (i) o facto de permitir focar nos casos específicos observados, em vez de orientar para uma abstracção dos casos sob a forma de variáveis (Byrne, 2002); e (ii) a procura do sentido dos dados recolhidos, tendo em vista a compreensão do panorama actual da formação inicial na instituição onde se desenrolou o estudo e a sua possível melhoria. Perante estes dois factores, qualquer tipo de análise isolado (somente quantitativo ou somente qualitativo) revelar-se-ia pobre ou menos eficaz.

No que respeita ao primeiro factor identificado, as variáveis são entendidas como sistemas complexos que envolvem acção social e natural, sujeitas a modificações através da acção humana individual e social (Byrne, 2002). Segundo alguns autores, não é possível medir variáveis, mas os vestígios dos sistemas reais que compõem o mundo dinâmico. Neste sentido, as variáveis não são encaradas como estáticas, mas analisadas tendo em conta o momento e o espaço em que foram criadas.

De acordo com o segundo factor mencionado, a análise de dados está situada no paradigma interpretativo (Cohen, Manion, & Morrison, 2001), no sentido em que se preocupa em compreender a subjectividade da experiência humana. Procura-se manter a integridade do fenómeno investigado, fazendo o esforço de interpretação do mesmo sob o ponto de vista dos participantes. Assim, as inferências feitas emergem das situações particulares observadas, sendo o objectivo desta investigação compreender os resultados observados no momento e local específicos da sua recolha e compará-los com o que se observa em tempos e locais diferentes. Existe, então, a preocupação de compreender e interpretar o fenómeno observado tendo em conta os seus intervenientes.

As opções metodológicas tomadas prendem-se directamente com os objectivos do estudo, no sentido em que se procura não só perceber o

conhecimento em geometria dos estudantes e o conhecimento geométrico em si mesmo, como também que os dados recolhidos possam contribuir para a compreensão e a melhoria da formação inicial. E também nessa perspectiva, uma análise somente quantitativa ou qualitativa dos resultados não seria suficiente para efeitos da investigação. Desse modo, enquanto que a análise quantitativa procura tratar estatisticamente os dados recolhidos, a análise qualitativa segue dois parâmetros interligados entre si: (i) a análise e interpretação das questões integrantes no instrumento criado para a recolha de dados (questionário) e (ii) a interpretação dos resultados obtidos. Estes resultados são interpretados à luz dos conhecimentos dos alunos do ensino básico que poderão vir a constituir-se como os seus alunos, e com base nas expectativas do seu percurso ao longo do ensino superior.

De modo que os resultados contribuíssem para os objectivos propostos, foi tomada a opção de recolher o máximo de dados possíveis dentro da população em questão. Devido à natureza do estudo e à impossibilidade de generalização a outras realidades (não são feitas generalizações respeitantes aos anos do curso, mas são feitas inferências e levantadas hipóteses relativas aos estudantes de cada ano do curso), a utilização de uma amostra numerosa contribui para uma caracterização mais rigorosa dos participantes. Apesar de existirem três anos distintos do curso, a recolha de dados não é estratificada pois foi retirado o máximo de dados possíveis, independentemente do número de estudantes existentes em cada ano. Isto é, todos os elementos da população da qual se retirou a amostra tiveram a mesma probabilidade de serem incluídos na investigação. Assim, o estudo é feito numa perspectiva de uma população específica, dado que a amostra poderá ser considerada representativa.

Para a recolha de dados foi utilizado um questionário (permitindo medir a informação e conhecimentos individuais dos participantes) de resposta múltipla (devido à amostra numerosa utilizada). O questionário adopta a forma de teste, baseado nos testes de avaliações internacionais (*international assessments*). Segundo Robitaille e Travers (1992), os estudos internacionais baseados nestes testes de resposta múltipla podem permitir uma melhoria no ensino e aprendizagem da matemática constituindo-se como uma fonte de dados e informação válida, nos quais os educadores poderão comparar os

resultados com o currículo e a própria prática de ensino. Fazendo um paralelo com o contexto deste estudo, a aplicação de um teste desta natureza poderá fornecer informação válida para a melhoria da formação inicial e, conseqüentemente, das práticas de formação no ensino superior.

Apesar de um teste de resposta múltipla ser um meio privilegiado para a recolha de informação de um número elevado de participantes (Robitaille & Travers, 1992), as limitações dos resultados obtidos num teste desta natureza foram considerados. Por exemplo, não é possível retirar informação relativa ao modo de resolução ou raciocínio utilizados numa determinada situação. Desta forma, foi considerada a hipótese de realizar uma entrevista semi-estruturada aos participantes cujo teste se revelasse relevante para o efeito, possibilidade esta que não chegou a ser posta em prática.

3.2 – Caracterização dos participantes

Para a caracterização dos participantes foi constituída uma folha inicial de identificação (anexo 1), preenchida por todos os participantes do teste, de modo a recolher dados relevantes para o estudo, garantindo o anonimato dos mesmos.

A recolha de dados foi feita em 16 turmas da licenciatura em Educação Básica de uma Escola Superior de Educação do centro do país. De uma população total de 525 estudantes, o teste foi aplicado a todos os estudantes que estavam presentes no dia da sua aplicação – 404 estudantes. Como se pode observar através do quadro 1, 152 estudantes (37,6%) frequentam o 1.º ano do curso, 132 (32,7%) frequentam o 2.º ano e 120 (29,7%) frequentam o 3.º ano, sendo 393 (97,3%) do género feminino e 11 (2,7%) do género masculino.

Ano do curso	Frequência	Porcentagem
1º ano	152	37,6%
2º ano	132	32,7%
3º ano	120	29,7%
Total	404	100,0%

Quadro 1 – Distribuição dos participantes pelos anos do curso.

A diferença de representatividade destes estudantes não se deve ao facto de constituírem uma representação mais significativa da população de onde se retirou a amostra mas, como foi referido, coincide com a disponibilidade dos mesmos para a realização do teste. Deste modo, dado o elevado número de participantes que responderam ao teste, pode considerar-se uma amostra representativa da população.

As idades dos participantes estão compreendidas entre 17 e 52 anos, sendo a amplitude de 35 anos. A média das idades é de 20,5 anos com um desvio padrão de 3,958. Do total de estudantes, 25% têm entre 17 e 19 anos, 25% têm entre 19 e 20 anos e 25% têm entre 20 e 21 anos. Ou seja, sendo a idade esperada para a frequência da licenciatura de 18 a 21 anos, 75% dos estudantes têm entre 17 e 21 anos.

O nível de frequência dos participantes com aproveitamento nos ensinos básico e secundário da disciplina de Matemática (quadro 2) situa-se entre os 7 e os 12 anos. Destes estudantes, 70,3% têm, pelo menos, 11 anos de frequência com aproveitamento na disciplina de Matemática. Quase metade dos participantes (45,3%) tem 12 anos de Matemática. Dado o nível elevado de escolaridade em Matemática dos participantes, poder-se-á supor que estes terão tido Geometria ao longo da sua escolaridade. Confrontando estes dados com as suas idades, supõe-se que a frequência do ensino básico da maioria dos estudantes tenha tido como base os programas de Matemática de 1990 e de 1991, que dedicavam uma atenção significativa à geometria e continham orientações específicas para o seu ensino.

Resposta	Frequência	Percentagem	Percentagem Acumulada
não responde	7	1,7%	1,7%
7.º ano	1	0,2%	2,0%
9.º ano	79	19,6%	21,5%
10.º ano	33	8,2%	29,7%
11.º ano	101	25,0%	54,7%
12.º ano	183	45,3%	100,0%
Total	404	100,0%	

Quadro 2 – Nível de escolaridade em Matemática dos participantes.

Relativamente ao ciclo de estudos a prosseguir (quadro 3), de acordo com o Decreto-Lei n.º 43/2007 de 22 de Fevereiro de 2007, a maioria dos estudantes (59,2%) pretende continuar estudos na realização do mestrado em Educação de Infância, enquanto que 35,4% dos estudantes pretendem ser professores do 1.º ciclo do ensino básico através do prosseguimento de estudos num mestrado de valência isolada ou dupla (Educação de Infância e 1.º ciclo; ou 1.º ciclo e 2.º ciclo).

Resposta	Frequência	Percentagem	Percentagem Acumulada
não sabe / não responde / responde a todas as opções	16	4,0%	4,0%
Educação de Infância	239	59,2%	63,1%
professor 1.º ciclo	59	14,6%	77,7%
professor 2.º ciclo	5	1,2%	79,0%
professor 1.º e 2.º ciclo	37	9,2%	88,1%
educador / professor 1.º ciclo	47	11,6%	99,8%
educador / professor 2.º ciclo	1	0,2%	100,0%
Total	404	100,0%	

Quadro 3 – Ciclo de estudos a prosseguir pelos estudantes.

Dos 5 estudantes que pretendem ser professores do 2.º ciclo, 3 possuem o 12.º ano de Matemática e os restantes o 11.º ano.

3.3 – Caracterização do currículo de Matemática na Licenciatura em Educação Básica

A licenciatura em Educação Básica constitui-se como um primeiro ciclo de estudos essencial para a habilitação profissional para a docência generalista na educação pré-escolar e nos 1.º e 2.º ciclos do ensino básico (Decreto-Lei n.º 43/2007 de 22 de Fevereiro de 2007), sendo composto por 180 créditos, distribuídos por 6 semestres, dos quais 30 créditos são de realização obrigatória no domínio científico da matemática.

3.3.1 – As unidades curriculares do domínio científico da matemática

O currículo de matemática da licenciatura na Escola Superior de Educação onde foi realizado o estudo é constituído por 8 unidades curriculares distribuídas por 6 semestres (quadro 4).

Ano	Semestre	Unidade Curricular
1.º	1.º	Fundamentos da Matemática
	2.º	Conceitos e Procedimentos Matemáticos Básicos Jogos e Matemática
2.º	3.º	Probabilidades e Análise de Dados
	4.º	Geometria
3.º	5.º	Matemática e Cultura Modelos Matemáticos Lógica e Padrões
	6.º	Didáctica da Matemática

Quadro 4 – Unidades curriculares do domínio científico da matemática na licenciatura em Educação Básica.

No momento da aplicação do teste, os alunos do 1.º ano ainda não tinham concluído nenhuma unidade curricular, encontrando-se a frequentar “Fundamentos da Matemática”, cujo currículo é centrado essencialmente no estudo das regularidades numéricas e famílias de números.

Os alunos do 2.^o ano encontravam-se a frequentar a unidade curricular de “Probabilidades e Análise de Dados” centrada no desenvolvimento de conhecimentos estatísticos e processos de análise de dados. De um modo geral, já frequentaram e/ou concluíram as unidades curriculares de (i) “Fundamentos da Matemática”; (ii) “Conceitos e Procedimentos Matemáticos Básicos” centrada em números e operações, grandezas e medida, e algumas questões relacionadas com a geometria, nomeadamente a visualização espacial com a representação no plano de objectos no espaço; e (iii) “Jogos e Matemática” centrada na experimentação, análise e fundamentação matemática de jogos de raciocínio, numéricos e de tabuleiro.

Os alunos do 3.^o ano encontravam-se a frequentar as unidades curriculares de (i) “Matemática e Cultura” centrada na História e actualidade da matemática, contendo um período dedicado ao estudo da simetria, pavimentações, frisos e rosáceas; (ii) “Modelos Matemáticos” centrada em modelos matemáticos e o seu papel na aprendizagem da Matemática e nos sentidos das operações elementares; (iii) “Lógica e Padrões” centrada no raciocínio lógico e pensamento algébrico. Para além das unidades curriculares concluídas pelos alunos do 2.^o ano, estes alunos já frequentaram e/ou concluíram também as unidades curriculares de “Probabilidades e Análise de Dados” e “Geometria”.

3.3.2 – A unidade curricular de “Geometria”

A unidade curricular de “Geometria” é centrada no estudo da visualização espacial, representação, classificação, decomposição e composição de figuras, relações entre figuras (congruência, equivalência, semelhança, transformações geométricas), figuras no plano (2D) e no espaço (3D) com especial relevo para a classificação de polígonos e poliedros, e relações entre famílias de polígonos e poliedros.

Todo o trabalho é desenvolvido procurando seguir as recomendações de Albuquerque *et al.* (2008) para a matemática na formação inicial de professores. Procura-se que a formação proporcione (i) uma compreensão aprofundada da matemática que se vai ensinar, (ii) uma compreensão aprofundada da natureza da própria matemática, (iii) um estudo da matemática de um ponto de vista superior e um estabelecimento claro das suas relações

com a Matemática que se vai ensinar, (iv) um desenvolvimento da capacidade de trabalhar em matemática, e (v) experiências matemáticas que correspondam a boas práticas de ensino.

Os conceitos são trabalhados a partir da resolução de problemas e de tarefas investigativas com recurso a materiais manipuláveis ou outros. Partindo do princípio que a matemática é uma actividade humana e desenvolvida através da interacção social (Edwards & Harper, 2010), todo o trabalho de sala de aula é feito em grupo, seguido de uma discussão inter-grupos acerca das conjecturas estabelecidas e conclusões retiradas. Deste modo, é considerado o aspecto sociocultural das aprendizagens matemáticas, tal como sugerido por Battista (1999), no estabelecimento de colaboração, comunicação e objectivos a atingir, entre os pares.

Os conceitos são abordados sempre na perspectiva do primeiro contacto com os mesmos e aprofundados tendo em conta fundamentos científico-didácticos e a perspectiva de que os estudantes serão educadores e professores. As aprendizagens seguem uma perspectiva construtivista e a natureza das tarefas é do mesmo tipo daquelas que se pretende que se realize com alunos do ensino básico. Procura-se, assim, um enriquecimento do currículo da formação inicial ao nível da articulação entre a formação científica e a formação didáctica, tal como sugerido por Gomes (2004).

É tomado em consideração o facto de os estudantes possuírem níveis de escolaridade em Matemática diferentes e conhecimentos em geometria diversificados, pelo que o recurso a materiais manipuláveis se torna um elemento imprescindível na abordagem dos conceitos, sendo facilitador no apoio à concretização das estruturas geométricas importantes para a construção dos conceitos geométricos (Clements & Battista, 1992). No entanto, os materiais são considerados como um meio e não um fim, ou seja, são valorizadas principalmente as actividades desenvolvidas, nas quais os materiais assumem um papel de apoio e representativo da estrutura geométrica subjacente.

A intervenção do professor durante todo o processo segue a tipologia de intervenção definida por Kieren e Pirie (1992): *provocativa*, no sentido de direccionar os estudantes para a solução; *invocativa*, encorajando os estudantes a procurar o significado matemático das situações problemáticas; e

validativa, no sentido de procurarem representar acções matemáticas verbalmente e simbolicamente.

3.4 – Construção do instrumento de recolha de dados

O teste foi construído com o princípio de se constituir como um conjunto de questões que vão ao encontro dos conceitos essenciais no ensino da geometria, e de obter respostas com a duração máxima de 30 minutos. O tempo estipulado para a resolução do teste obrigou a que as questões fossem construídas numa perspectiva de resposta rápida, de modo que os participantes não se desinteressassem durante a sua realização e que não respondessem às questões de forma irreflectida.

A versão final do teste (anexo 2) é constituída por 21 questões de resposta múltipla dividida em 7 categorias: “Raciocínio Espacial”, “Classificação”, “Congruência”, “Equivalência / área”, “Semelhança”, “Propriedades de Figuras 2D” e “Simetria”. Cada categoria encontra-se gradada, compreendendo 3 questões de níveis Fácil, Moderado e Difícil.

Esta versão do teste não é única, já que seguiu um percurso específico de construção e tomada de decisões relativamente às questões integrantes no mesmo.

3.4.1 – Processo de construção do teste

A construção do teste foi pensada de modo a medir conhecimentos factuais em geometria elementar bem como conhecimentos relacionais, na medida em que, em certas questões, é necessário que os participantes identifiquem propriedades geométricas e que as relacionem entre si. Para tal foram seleccionados sete conceitos considerados essenciais no ensino da geometria por vários autores (descritos no capítulo 2 deste estudo) a partir dos quais se constituíram as sete categorias de questões que compõem o teste. As questões foram inspiradas nos testes de 1995, 1999 e 2003 do TIMSS (National Center for Education Statistics [NCES], n.d.), nas tarefas propostas nos estudos de Clements *et al.* (1999), Diezmann e Lowrie (2009), Gutiérrez

(1996b), e Hannibal (1999), e nas sugestões e orientações contidas no *Princípios e Normas para a Matemática escolar* do NCTM (2008).

Após este processo de pesquisa e selecção foi constituída uma primeira versão do teste (o teste-piloto) que carecia de pré-testagem e validação devido às dúvidas que suscitava, nomeadamente na clareza dos enunciados das questões e na gradação das questões por categorias. A verificação da consistência e fidelidade do teste, tal como aconselhado por Tuckman (2002), ocorreu em duas fases: a *testagem* do teste-piloto junto de estudantes do ensino superior não envolvidos no estudo e a *validação* do teste-piloto junto de peritos do domínio científico da matemática.

A *testagem* teve como principal objectivo a identificação de dificuldades na interpretação das questões e dos conteúdos envolvidos.

O teste-piloto foi aplicado a 17 estudantes de outro curso. Estes foram informados acerca dos objectivos da testagem, pelo que lhes foi solicitado que respondessem com seriedade e que justificassem os casos de incompreensão ou dificuldades de resolução.

Foi também verificado se a dimensão do teste correspondia ao tempo estipulado para sua realização, trinta minutos. Apesar da reacção inicial ter sido desfavorável (alguns afirmaram ser “muito volumoso”), os estudantes demoraram entre 12 a 25 minutos a resolvê-lo, contrariando as suas próprias expectativas.

As observações dos estudantes e os resultados do teste foram analisados, pelo que, desta primeira fase, decorreram algumas alterações ao teste, nomeadamente no que diz respeito à reformulação de enunciados de questões e gradação de questões dentro de cada categoria.

A fase de *validação* envolveu as críticas de um conjunto de peritos do domínio científico da matemática. Esta ocorreu junto dos professores de matemática da instituição onde o estudo foi realizado. O teste-piloto foi enviado por e-mail, sem referência às opções de construção tomadas e, posteriormente, analisado em pequenas reuniões de discussão e reflexão, onde foram recebidas opiniões e críticas relativamente à formulação e adequação das questões, aos conteúdos envolvidos, aos processos de gradação das questões, à selecção de figuras e alíneas e aos procedimentos a seguir na recolha de dados. Os intervenientes no processo de validação

contribuíram também com sugestões concretas acerca de como melhorar o próprio teste.

Deste processo de validação resultaram algumas alterações ao nível da garantia de anonimato dos participantes do estudo, da clareza dos enunciados das questões, da alteração de figuras integrantes do teste e da gradação de questões dentro de cada categoria.

3.4.2 – Fundamentação das questões integrantes do teste

A versão final do teste foi construída no sentido de retirar sempre informação das respostas dos participantes. Não considerei pertinente que os participantes não fossem capazes de responder às questões por desconhecimento dos conceitos ou pela formulação das questões de forma pouco clara e pouco imediata. Neste sentido, o teste-piloto serviu para adaptar o enunciado das questões que foram respondidas de forma incorrecta ou que não foram respondidas pelos estudantes com os quais o pré-teste foi feito. Dessa forma, as questões foram formuladas de modo a que todos os participantes fossem capazes de responder, conhecendo ou desconhecendo os conceitos envolvidos, o que me permitiu retirar sempre informações para a análise posterior.

A ordem segundo a qual as categorias de questões aparecem no teste seguiu uma lógica de motivação. Nesse sentido, procurei que as primeiras categorias de questões fossem mais acessíveis e motivadoras para a continuação da resolução do teste. Considerei que, caso optasse por colocar as categorias de questões consideradas mais difíceis no início do teste, este poderia desmotivá-los e conduzi-los a respostas irreflectidas ao longo das restantes categorias. Procurei, assim, eliminar os factores constrangedores e negativos de um teste desta natureza que procura avaliar os conhecimentos individuais. Para essa decisão, contribuiu a análise dos resultados obtidos no teste-piloto, os quais revelaram níveis de sucesso mais elevados no início do teste e uma menor percentagem de respostas correctas nas últimas categorias de questões.

Num teste desta natureza, tendo como objectivo uma análise quantitativa e qualitativa de resultados, existiu a dificuldade de perceber qual a melhor forma de questionar os participantes. Por esse motivo, fiz algumas

opções no sentido de tornar as questões compreensivas para quem iria responder, tornando-as curtas, directas e sintéticas. Houve casos em que surgiu a necessidade de explicitar alguns conceitos, nomeadamente nas categorias “Congruência”, “Equivalência / Área” e “Semelhança”. Segundo Heinze (2002), os estudantes têm dificuldade em compreender a “linguagem matemática” em certas situações e dado que estes são conceitos especificamente da área da Geometria, senti a necessidade de fornecer uma definição dos mesmos de modo a permitir a resposta às questões da categoria, mesmo nos casos de desconhecimento dos conceitos. Assim, na primeira questão de cada categoria é definido o conceito no enunciado: “figuras congruentes” aparecem associadas a “geometricamente iguais”, “figuras equivalentes” aparecem como “ocupam a mesma porção de superfície” e “figuras semelhantes” aparecem associadas a “ampliação ou redução”¹⁴. No enunciado da segunda questão de cada categoria é utilizada apenas a definição na formulação da questão (“geometricamente iguais”, “ocupam a mesma porção de superfície” e “ampliação ou redução”) e no enunciado da terceira questão da categoria aparece somente a referência ao conceito (“figuras congruentes”, “figuras equivalentes” e “figuras semelhantes”).

Foi tomada a opção de colocar as questões de cada categoria agrupadas e seguidas (não aleatórias) dado que foram construídas segundo uma gradação. Deste modo permitiria que os participantes utilizassem a mesma linha de raciocínio e não se dispersassem pelos temas. Para esse efeito, a maior parte das questões em cada categoria são sequenciadas e encontram-se formuladas de um modo muito semelhante.

3.4.2.1 – Raciocínio espacial

A categoria de questões relacionadas com o raciocínio espacial centra-se na capacidade de *Percepção de Relações Espaciais* (Del Grande, 1990) e compreende três questões que relacionam o plano com o espaço (questão 1) e o espaço com o plano (questões 2 e 3).

¹⁴ A opção de utilizar os termos ampliação e redução como definição de semelhança surge no sentido de dar uma ideia do conceito aos participantes que desconhecem o termo. Nesta definição, a congruência não é contemplada como caso especial da semelhança. Mas os resultados do teste-piloto, no qual o desconhecimento do termo foi demonstrado pelo número reduzido de participantes que responderam a esta categoria, levaram-me a tomar esta opção de definir semelhança como ampliação ou redução de uma figura.

A escolha desta capacidade para representar a categoria “Raciocínio espacial” residiu na possibilidade de poder integrar figuras 3D nas questões e tem como principal objectivo perceber a capacidade dos participantes em interpretar e reflectir sobre objectos espaciais, imagens, relações e transformações (Battista, 2007).

A questão 1¹⁵ (identificação do cubo correspondente a uma planificação específica) procura perceber o sentido que os estudantes dão aos elementos perceptuais da imagem, relacionando-os espacialmente.

A questão 2 (identificação das vistas correspondentes a uma construção com cubos) surge após a observação das dificuldades dos estudantes em tarefas desta natureza no decorrer de uma unidade curricular do curso, tendo sido utilizados dois tipos de representações (perspectiva e vistas ortogonais) frequentemente utilizados no contexto do ensino da Matemática (Gutiérrez, 1996b). Como opções de resposta, a figura A foi incluída devido à tendência observada para representar unicamente o patamar inferior da construção com cubos. A figura B advém da dificuldade de visualização lateral das construções com cubos; neste caso, a vista frontal está correcta, embora a vista lateral não esteja. A figura D é justificada pela tendência de representar todos os cubos observados na construção tridimensional; embora a vista lateral esteja correcta, a vista frontal apresenta a representação dos quatro cubos observados na construção em posição incorrecta.

A questão 3 (identificação de possíveis planificações do cubo) foi seleccionada devido à familiaridade com tarefas desta natureza no percurso escolar dos participantes. Foram seleccionadas quatro planificações possíveis do cubo, sendo uma considerada a mais familiar (figura 1) e outra considerada a menos comum (figura 2). Nenhuma das planificações seleccionadas é igual à planificação apresentada na questão 1, de modo a que a resposta não pudesse ser influenciada por um modelo de planificação já fornecido.

A gradação seguiu o princípio de que a identificação do cubo correspondente a uma planificação específica (questão 1) será mais fácil do que a identificação das vistas correspondentes a uma construção com cubos (questão 2). Apesar da familiaridade com tarefas de identificação de

¹⁵ Retirada do TIMSS de 1999 para alunos do 8.º ano (NCES, n.d.).

planificações do cubo (questão 3), esta foi considerada a mais difícil na medida em que admite quatro opções de resposta correctas, em vez de apenas uma, como nas questões anteriores.

3.4.2.2 – Classificação

A categoria de questões relacionadas com a classificação tem como objectivo verificar a capacidade de identificação de figuras no plano, compreendendo três questões: uma de triângulos (questão 4), outra de rectângulos (questão 5) e ainda outra de outros polígonos (questão 6).

Os triângulos que integram a questão 4 foram seleccionados devido às suas posições pouco convencionais (figura 2) e dimensões pouco comuns (figuras 1 e 8). As restantes figuras foram construídas em posições que fazem lembrar o protótipo de triângulo (figuras 3, 4, 6 e 7) ou cujas formas lembram um triângulo (figura 5).

Quanto à questão 5, os rectângulos foram construídos tendo em conta dimensões pouco comuns (figura 3) e posições pouco comuns (figura 5). Dado que se constitui como um rectângulo especial, o quadrado (figura 7) integra o teste com o intuito de perceber o tipo de definição (inclusiva ou exclusiva) que os estudantes possuem acerca dos rectângulos. As restantes figuras foram construídas tendo em conta a forma aproximada de rectângulos (figuras 1, 2, 4, 6 e 8).

Na questão 6, foram incluídos polígonos regulares (figuras 2, 10 e 12), por serem as formas mais familiares de polígonos. Nesse sentido, o círculo (figura 1) foi incluído devido à familiaridade com esta figura, apesar de não ser um polígono. Foram também construídas figuras cujas formas lembram polígonos (figuras 3, 6, 8 e 11) e figuras que, pelo seu aspecto visual, poderiam não ser identificados como polígonos (figuras 4, 5, 7 e 9).

A gradação das questões baseia-se em estudos que indicam uma maior facilidade no reconhecimento de triângulos do que rectângulos (Clements, 2004; Sarama & Clements, 2009). A identificação de polígonos aparece como a última questão desta categoria dado que é a família de figuras que compreende mais elementos e de definição menos acessível.

3.4.2.3 – Congruência

A categoria de questões relacionadas com a congruência centra-se na capacidade de identificação de figuras congruentes a uma dada figura, quer seja uma figura bidimensional quer tridimensional.

As questões foram construídas e gradadas tendo em conta o tipo e transformação geométrica que a figura-modelo sofre e a dimensão espacial em que esta ocorre.

As duas primeiras questões (questões 7 e 8) têm em conta o tipo de transformação envolvida. Tal como indica o estudo de Jacobson e Lehrer (2000), os estudantes parecem ter melhores resultados em tarefas que envolvem rotação do que reflexão. Deste modo, a questão 7 envolve apenas congruência por rotação da figura-modelo plana e a questão 8 envolve apenas congruência por reflexão da figura-modelo plana.

A terceira questão desta categoria (questão 9) tem em conta a dimensão espacial em que a transformação geométrica ocorre. Apesar desta questão apenas envolver congruência por rotação, trata-se de uma figura tridimensional, em oposição às figuras no plano das questões anteriores. Como as tarefas que envolvem transformações geométricas no espaço são menos comuns no ensino básico (Ho & Eastman, 2006), esta questão aparece em último lugar nesta categoria. As figuras escolhidas como possíveis respostas tiveram em consideração uma ideia errada dos estudantes de que podem considerar a reflexão no espaço. Por esse motivo, as figura 3 e 4 (reflexões da figura-modelo) foram incluídas como hipótese de resposta.

3.4.2.4 – Equivalência / Área

A categoria de questões relacionadas com equivalência e área centra-se na capacidade de identificação e construção de figuras equivalentes a uma figura apresentada, compreendendo três questões de identificação de figuras equivalentes (questão 10) e construção de figuras equivalentes (questões 11 e 12).

Todas as figuras foram construídas numa malha quadriculada de modo a possibilitar a utilização de tipos de raciocínio diferentes para a determinação da área, nomeadamente os raciocínios dos tipos *nonmeasurement* e *measurement* (Battista, 2007).

Para a identificação de figuras equivalentes (questão 10) foram construídas figuras compostas apenas por quadrados inteiros (1, 2 e 4) e figuras compostas por quadrados inteiros e metades de quadrados (figura 3). Esta opção surge no interesse de verificar se o facto de existirem metades de quadrados condiciona as respostas dos participantes. A única figura que não é equivalente ao modelo (figura 1) tem a mesma forma que a figura-modelo – rectângulo – no sentido de perceber se o conceito de congruência não se confunde com o de forma. Esta questão foi escolhida para ser a primeira da categoria por ser apenas uma tarefa de contagem de quadrados para identificar figuras equivalentes.

A construção de figuras equivalentes compreende duas questões: construção de figuras equivalentes em que a figura-base (a unidade de medida) é composta por quadrados inteiros (questão 11) e construção de figuras equivalentes em que a figura-base é composta por quadrados inteiros e partes de quadrados (questão 12). Estas questões permitem que os participantes adoptem diversos modos de resolução. Poderão resolver a situação por contagem de quadrados, pela divisão da área da figura apresentada pela área da figura-base ou por composição da figura apresentada a partir da figura-base (através da sua rotação). A questão 12 aparece como última questão da categoria, dado que a figura-base é composta por quadrados inteiros e partes de quadrados, o que aumenta o seu grau de dificuldade.

3.4.2.5 – Semelhança

A categoria de questões relacionadas com a semelhança centra-se na capacidade de identificação de figuras semelhantes a uma figura apresentada e na identificação de pares de polígonos semelhantes, compreendendo três questões: identificação de triângulos semelhantes (questão 13), identificação de rectângulos semelhantes (questão 14) e identificação de pares de polígonos semelhantes (questão 15).

O enunciado das duas primeiras questões utiliza a expressão “... podem ser semelhantes...?” dado que, do modo como as figuras são apresentadas, não é possível provar que estas são efectivamente semelhantes ao modelo.

Para a identificação de triângulos semelhantes (questão 13) foram utilizados triângulos semelhantes em posições diferentes do modelo (figuras 2

e 3). Os triângulos não semelhantes constituem-se como um triângulo escaleno colocado numa posição parecida ao modelo (figura 5); um triângulo rectângulo (figura 1) que, apesar de ser uma figura do mesmo tipo do modelo e colocado na mesma posição, não possui a mesma razão de semelhança entre o comprimento dos lados; e um triângulo acutângulo (figura 4) que não possui nenhuma característica que o pudesse considerar como semelhante ao modelo.

Na questão da identificação de rectângulos semelhantes (questão 14) foram utilizados rectângulos semelhantes na mesma posição (figura 2) e em posição diferente (figura 3) do modelo. Os rectângulos não semelhantes foram construídos mantendo a medida do comprimento de dois lados paralelos e aumentando ou reduzindo a medida dos outros lados (figuras 1, 4 e 5).

Para a questão da identificação de pares de polígonos semelhantes (questão 15) foi utilizada a expressão "... são sempre semelhantes?" em oposição à expressão "... podem ser semelhantes...?" das questões anteriores, o que confere um grau de dificuldade acrescido, na medida em que será necessário conhecer as propriedades dos polígonos envolvidos para responder correctamente a esta questão.

A gradação das duas primeiras questões segue a mesma lógica da categoria de questões relacionada com a classificação: o tipo de figuras envolvidas (triângulos e rectângulos). A última questão foi considerada a mais difícil, na medida em que se constitui como uma generalização dos casos de semelhança, em contraste com a análise de casos particulares de semelhança das questões anteriores.

3.4.2.6 – Propriedades de figuras 2D

A categoria de questões relacionadas com propriedades de figuras 2D centra-se na capacidade de identificação de propriedades de famílias de polígonos, compreendendo três questões acerca de triângulos (questão 16), de rectângulos (questão 17) e de paralelogramos (questão 18).

As afirmações foram construídas no sentido de retirar informações acerca do conhecimento específico dos participantes acerca das famílias de figuras envolvidas.

A gradação das duas primeiras questões segue a mesma lógica das categorias de questões relacionadas com a classificação e com a semelhança: o tipo de figuras envolvidas (triângulos e rectângulos). A última questão foi considerada a mais difícil, na medida em que a família dos paralelogramos se constitui como a menos familiar das três.

3.4.2.7 – Simetria

A categoria de questões relacionadas com a simetria centra-se na capacidade de identificação de figuras com simetria, compreendendo três questões acerca de identificação de figuras com simetria (questão 19) e de identificação de figuras com um número específico de eixos de simetria (questões 20 e 21).

Para a questão de identificação de figuras com simetria (questão 19) foram construídas figuras com simetria de reflexão com orientações e número de eixos diferentes (figuras 1, 2, 3 e 6). Foi escolhida uma figura com simetria rotacional (figura 5) no sentido de perceber se os participantes apenas considerariam a simetria de reflexão. Foram também incluídas figuras sem qualquer simetria (figuras 4 e 7).

Nas questões de identificação de figuras com dois eixos de simetria (questão 20) e de identificação de figuras com, pelo menos, quatro eixos de simetria (questão 21) foram utilizadas figuras familiares tais como letras, polígonos e o círculo. Foram incluídas figuras que, pelo seu aspecto, poderão dar a sensação de possuírem mais ou menos eixos de simetria do que os pretendidos, como o caso do “X” (figura 3) da questão 20 ou os paralelogramos (figuras 1, 3, 4 e 7) da questão 21.

A primeira questão desta categoria foi considerada a mais fácil, dado que se poderá identificar figuras com simetria apenas pelo seu aspecto visual. As restantes questões foram consideradas mais difíceis na medida em que é necessário proceder a uma análise mais detalhada das figuras e localizar os eixos de simetria, para se responder correctamente a estas questões.

3.4.3 – Apreciação do teste

A apreciação do teste aplicado foi medida através da avaliação feita pelos estudantes com base no preenchimento de uma folha de registo da

apreciação do teste realizado (anexo 3). Numa escala de 1 a 5, os estudantes classificaram o teste segundo os critérios frustração-sucesso, desinteresse-interesse, dificuldade-facilidade e enfado-estímulo.

Ao nível da frustração-sucesso, os estudantes classificam-no com uma média de 3,31 e um desvio padrão de 0,755.

Relativamente ao desinteresse-interesse, os estudantes classificam-no com uma média de 4,13 e um desvio padrão de 0,812.

No âmbito da dificuldade-facilidade, os estudantes classificam-no com uma média de 3,14 e um desvio padrão de 0,827.

Ao avaliar o enfado-estímulo, os estudantes classificam-no com uma média de 3,85 e um desvio padrão de 0,826.

Através destes dados pode verificar-se que, de um modo geral, os participantes tiveram uma atitude positiva perante o teste, encarando-o como estimulante (75% dos participantes estão acima do nível 3 no critério enfado-estímulo) e interessante (75% dos participantes estão acima do nível 4 no critério desinteresse-interesse). Estes dados parecem indicar que a preocupação em criar um teste resolúvel num ambiente favorável foi positivamente conseguido.

3.5 – Procedimento de recolha e análise de dados

A recolha de dados foi feita entre 2 e 6 de Novembro de 2009. Durante esse período, visitei as salas de aula de 16 turmas da licenciatura em Educação Básica da instituição do ensino superior onde decorreu o estudo. Todos os estudantes que estavam nesse momento na sala de aula responderam ao teste e são participantes no estudo.

Foi seguido o princípio do consentimento informado (Lima, 2006; Tuckman, 2002), segundo o qual os participantes foram informados da natureza e propósito do estudo, dos seus riscos e benefícios, e da natureza voluntária e anónima da sua participação (anexo 4). Também foram informados do tempo de duração estipulado para a realização do teste (30 minutos) e aconselhados a lerem com atenção os enunciados das questões.

A cada participante foi entregue um exemplar do teste contendo uma folha de identificação, as questões integrantes e uma folha de registo da apreciação do teste realizado.

Após a devolução dos testes resolvidos, foi atribuído a cada exemplar um número de identificação. Este número foi dado a conhecer aos próprios participantes, no sentido de poder vir a realizar-se uma entrevista posterior, caso se revelasse necessário.

No fim do período de recolha de dados, toda a informação foi introduzida numa base de dados criada através do software *Statistical Package for the Social Sciences* [SPSS] e tratada estatisticamente. Após o tratamento estatístico correspondente à análise quantitativa dos dados, procedeu-se a uma análise qualitativa através da interpretação dos resultados obtidos à luz dos conhecimentos dos alunos do ensino básico, e com base nas expectativas do seu percurso ao longo do ensino superior.

Capítulo 4

ANÁLISE DOS DADOS E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Este capítulo pretende apresentar os resultados obtidos na aplicação do teste através de uma análise quantitativa e qualitativa dos resultados.

Os dados são apresentados com base na análise quantitativa realizada com o recurso ao software SPSS, procurando responder a questões que considere relevantes, no âmbito do problema definido. A discussão dos resultados é feita com base nesta análise quantitativa, à luz da revisão da literatura que compõe o segundo capítulo desta tese. Foi tomada a opção de interligar a análise dos dados e a discussão dos resultados no corpo do texto, no sentido de facilitar a leitura do capítulo e promover uma reflexão imediata dos resultados observados em cada categoria de questões.

A estrutura deste capítulo segue, deste modo, uma orientação temática, encontrando-se subdividida pelas categorias de questões que compõem o teste. Apesar da recolha de dados não ter sido estratificada, a análise e discussão de resultados constitui-se como tal, sendo permitido observar e reflectir isoladamente sobre as respostas dos estudantes de cada ano do curso.

4.1 – Análise e discussão geral dos dados

A análise geral dos dados recolhidos fornece alguns indicadores significativos no que diz respeito ao nível de sucesso do teste.

Analisando de um modo geral as respostas ao teste, verifica-se que os participantes respondem acertadamente a uma média de 9,45 questões, com um desvio padrão de 3,244. O número de respostas correctas varia entre 1 e 19, sendo que nenhum dos participantes responde correctamente a todas as 21 questões. Através da análise do quadro 5, observa-se que 25% dos participantes acertam até 7 questões, 25% dos participantes acertam entre 7 e 9 questões e 25% dos participantes acertam entre 9 e 12 questões. Ou seja,

das 21 questões que compreendem o teste, 75% dos estudantes apenas acertam entre 1 e 12 questões.

Percentil	Número de respostas correctas
25	7
50	9
75	12

Quadro 5 – Tabela de quantis das respostas correctas ao teste.

Em termos de percentagem de respostas correctas a amostra é bimodal, na medida em que a maior percentagem de participantes responde correctamente a 8 e a 9 questões. Mais concretamente, 12,4% de estudantes respondem correctamente a 8 questões e 12,4% de estudantes respondem correctamente a 9 questões.

O facto de nenhum participante ter respondido correctamente a todas as questões constitui-se como um elemento importante na discussão dos resultados. Apesar de 45,3% possuir o 12.º ano de Matemática e o teste estar construído com base em questões de conhecimento elementar, o nível de sucesso máximo obtido na resolução do teste foi de apenas 3 participantes a responder acertadamente a 19 questões (das 21 questões que constituía o teste). Poderá supor-se que (i) os futuros profissionais em educação básica não terão adquirido muitos dos conhecimentos elementares ao nível da geometria ao longo da sua escolaridade (Blanco & Barrantes, 2003) e (ii) a unidade curricular de geometria no ensino superior não terá produzido um efeito geral significativo em termos de conhecimentos elementares em geometria, apesar destes conceitos fazerem parte do seu programa. Procurarei detalhar e especificar estes aspectos mais aprofundadamente no decorrer da análise de dados.

Ao efectuar uma correlação entre o ano do curso e o número de respostas certas ao teste, constata-se que esta é significativa ($p < 0,01$) e positiva com valores de $r = 0,361$ no coeficiente de correlação de Spearman¹⁶.

¹⁶ Foi escolhida a correlação de Spearman, dado que as variáveis “ano do curso” e “número de respostas certas” são variáveis de ordem e sendo a variável “ano do curso” uma variável quantitativa discreta (Tuckman, 2002).

Apesar de se constituir uma correlação considerada “moderada” (Moreira, 2006), esta é significativa, isto é, à medida que se avança nos anos do curso, o número de respostas correctas aumenta, embora com uma percentagem de certeza de apenas 16%. Por outras palavras, em 16% dos casos, tem-se a certeza de que os estudantes dos anos do curso mais altos apresentam mais respostas correctas do que os estudantes dos anos do curso mais baixos.

A correlação entre o nível de escolaridade em Matemática dos participantes e o número de respostas certas ao teste, é também significativa ($p < 0,01$) e positiva com valores de $r = 0,188$ no coeficiente de correlação de Spearman¹⁷. Apesar de significativa, é uma correlação considerada “fraca” (Moreira, 2006), traduzindo que só se terá a certeza de que um nível elevado de escolaridade em Matemática é indicador de sucesso às respostas do teste em apenas 4% dos casos.

Poderia ser interessante analisar a correlação entre a frequência de uma disciplina ou unidade curricular de geometria em outro curso do ensino superior e o número de respostas certas ao teste. Porém, como o número de sujeitos é inferior a 30 (só existem 3 participantes nessas condições), não faz sentido realizar uma correlação desta natureza, pois não iria conduzir a resultados viáveis (Cohen *et al.*, 2001).

Verifica-se que as correlações entre o ano do curso e o número de respostas certas ao teste ou entre o nível de escolaridade em Matemática e o número de respostas certas ao teste são consideradas moderadas ou fracas. De facto, os estudantes dos anos do curso mais avançados ou com um nível de escolaridade em Matemática mais elevado poderão apresentar mais respostas correctas do que os estudantes dos anos do curso ou nível de escolaridade em Matemática mais baixos. Contudo, seria de esperar que a correlação fosse elevada, na medida em que (i) os estudantes do 3.º ano já frequentaram uma unidade curricular de geometria no curso, na qual os conteúdos do teste foram abordados e (ii) os estudantes com um nível de escolaridade em Matemática mais elevado tiveram mais tempo de ensino de geometria do que os estudantes com níveis mais baixos de escolaridade em

¹⁷ Foi escolhida a correlação de Spearman, dado que as variáveis “nível de escolaridade em Matemática” e “número de respostas certas” são variáveis de ordem e sendo a variável “nível de escolaridade em Matemática” uma variável quantitativa discreta (Tuckman, 2002).

Matemática. Considerando que cerca de 70% destes estudantes têm um nível de escolaridade em Matemática acima dos onze anos, seria de esperar que os resultados neste teste fossem superiores. Reforçando estes aspectos, a escolaridade básica da maior parte destes estudantes foi regida pelos Programas de Matemática de 1990 e de 1991 como base da sua aprendizagem matemática, os quais contemplavam vários conteúdos sobre as questões que integram o teste.

No que diz respeito aos ritmos de resolução do teste, a diferença de tempo de conclusão do teste tem uma amplitude de 20 minutos, sendo que o participante mais rápido respondeu ao teste em 7 minutos e o participante mais demorado respondeu em 27 minutos. Nenhum dos participantes ultrapassou os 30 minutos previstos para a realização do teste.

Relativamente às categorias de questões que os estudantes respondem mais correctamente, estas encontram-se ordenadas do seguinte modo: “Equivalência / Área”, “Raciocínio espacial”, “Congruência”, “Semelhança”, “Classificação”, “Simetria” e “Propriedades de Figuras 2D”. Verifica-se que os estudantes respondem mais acertadamente às categorias de questões que se encontram no início do teste, com a excepção da segunda categoria – “Classificação”.

Verifica-se, assim, que a “Classificação” é das categorias com menos respostas correctas. Sendo um conteúdo elementar e essencial no campo de conhecimentos de um educador ou professor (Abrantes *et al.*, 1999; Albuquerque *et al.*, 2008; Jones & Mooney, 2003; Loureiro, 2008), será necessário tomar em consideração que os resultados são relativamente baixos, contrariamente ao que seria esperado.

4.2 – Análise e discussão categórica dos dados

No âmbito das categorias definidas no teste, os estudantes obtiveram diferentes tipos de resultados, como se poderá observar ao longo deste sub-capítulo.

4.2.1 – Raciocínio Espacial

A categoria de questões relacionadas com raciocínio espacial centra-se na capacidade de *Percepção de Relações Espaciais* (Del Grande, 1990) e compreende três questões que relacionam o plano com o espaço (questão 1) e o espaço com o plano (questões 2 e 3).

De um modo geral, os estudantes respondem mais acertadamente à questão 2 do que à questão 1 e mais a esta do que à questão 3, como se pode observar no quadro 6.

			Raciocínio Espacial		
			Questão 1	Questão 2	Questão 3
Ano do curso	1º ano	Frequência	127	140	4
		Percentagem	83,6%	92,1%	2,6%
	2º ano	Frequência	121	126	2
		Percentagem	91,7%	95,5%	1,5%
	3º ano	Frequência	106	109	11
		Percentagem	88,3%	90,8%	9,2%
Total		Frequência	354	375	17
		Percentagem	87,6%	92,8%	4,2%

Quadro 6 – Distribuição das respostas correctas à categoria de questões “Raciocínio Espacial”.

Enquanto que nas duas primeiras questões a percentagem de respostas correctas é muito próxima, na questão 3 a percentagem de respostas correctas diminui significativamente, sendo que apenas 17 estudantes de todos os anos do curso acertam a questão.

No seu conjunto, verifica-se que os estudantes do 2.º ano são os que respondem mais acertadamente às duas primeiras questões, talvez por este assunto ter sido objecto de estudo na unidade curricular “Conceitos e Procedimentos Matemáticos Básicos” decorrente no fim do 1.º ano do curso. Contudo, os estudantes do 3.º ano também já frequentaram a mesma unidade curricular no 1.º ano do curso. Seria de esperar que estes respondessem com uma percentagem semelhante ou superior aos estudantes do 2.º ano, o que não se verifica. Inclusivamente, o nível de sucesso da questão 2 dos estudantes do 1.º ano, que nunca frequentaram esta unidade curricular, é

superior. Esta observação leva-me a questionar se as aprendizagens dos estudantes terão sido realmente aprofundadas e significativas (Battista, 2007) já que, decorridos alguns semestres após a abordagem dos conceitos, parece que as aprendizagens não foram adquiridas.

Embora não exista grande diferença relativamente à percentagem de respostas correctas às duas primeiras questões, a diferença acentua-se na terceira questão. Pode-se considerar o facto de as primeiras questões admitirem apenas uma opção correcta e a terceira questão admitir quatro opções correctas como factor revelador das diferenças observadas e de um elevado grau de insucesso na última questão. Ou seja, é necessário tomar em consideração que o tipo de questões é diferente dentro da mesma categoria, o que poderá explicar a diferença de resultados entre as duas primeiras questões e a terceira.

Apesar deste aspecto, a questão 3 relaciona-se com as representações de planificações de um cubo, conteúdo familiar e recorrente durante a escolaridade obrigatória, pelo que o elevado número de respostas incompletas e erradas poderá ser revelador das aprendizagens não realizadas por estes estudantes. São os estudantes do 3.º ano que respondem mais correctamente a esta questão, embora com um nível de sucesso muito baixo. Ainda que se considere que as crianças e professores apresentam dificuldades na passagem de um objecto 3D para a sua representação em 2D (Hershkowitz, 1990), estes conteúdos foram abordados não só na escolaridade obrigatória destes estudantes, como também durante o curso, pelo que seria de esperar que o número de respostas correctas e completas fosse significativamente superior em todos os anos do curso.

Relativamente à percentagem de estudantes que selecciona apenas uma representação de planificação do cubo, verifica-se que 65,6% da amostra o faz. Os estudantes que mais respondem deste modo são os do 2.º ano (72%), seguido dos estudantes do 1.º ano (68,4%), sendo a menor percentagem a dos estudantes do 3.º ano (55%).

Ao analisar este tipo de resposta à luz do nível de escolaridade em Matemática dos participantes, verifica-se que respondem deste modo 61,2% dos estudantes com 12 anos de Matemática, 68,3% de estudantes com 11

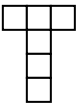
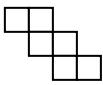
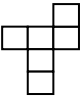
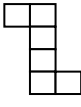
anos de Matemática, 72,7% de estudantes com 10 anos de Matemática e 65,8% de estudantes com 9 anos de Matemática.

Verifica-se que grande parte dos participantes selecciona apenas uma representação do cubo, não colocando a hipótese de existirem outras representações igualmente possíveis. Poderá ser revelador do desconhecimento das condições necessárias para se obter uma planificação do cubo, com a ideia generalizada de que o cubo apenas se poderá construir com base em uma única planificação. Este facto demonstra que os estudantes poderão não conseguir conceptualizar e interpretar correctamente as representações 2D de objectos 3D (Pittalis *et al.*, 2009). Apesar da elevada incidência neste tipo de resposta, esta é mais reduzida nos estudantes com 12 anos de Matemática.

No que diz respeito à escolha de representações de planificação do cubo, a representação mais seleccionada (quadro 7) é a figura 7-1¹⁸ por 82,4% dos estudantes. Inclusivamente 49,8%, quase metade da amostra, admitem-na como representação única do cubo. A maioria dos estudantes que responde deste modo é do 2.º ano (61,4%) ou do 1.º ano (51,3%). Apesar de inferior, a percentagem de estudantes do 3.º ano que também respondem deste modo é de 35%.

A figura 7-2 é a menos escolhida (apenas 6,7% de estudantes a identificam). Apesar de não se verificarem grandes diferenças, os estudantes do 3.º ano são os que mais identificam esta figura como representação de planificação do cubo (7,5%), comparativamente com 5,9% dos estudantes do 1.º ano e 5,3% dos estudantes do 2.º ano. Ao considerar o nível de escolaridade em Matemática dos participantes, verifica-se que os estudantes com 12 anos de Matemática são os que mais identificam esta representação (10,4%), comparativamente com os estudantes com 11 anos de Matemática (4%), 10 anos de Matemática (3%) e 9 anos de Matemática (3,8%).



¹⁸ A partir deste ponto, as referências às figuras das questões surgem conforme o exemplo: figura 7-1, significando que o leitor deverá consultar o quadro 7, figura 1.

Questão 3	Figura 1	Figura 2	Figura 3	Figura 5
				
Frequência	333	27	130	127
Percentagem	82,4%	6,7%	32,2%	31,4%

Quadro 7 – Distribuição das escolhas das representações de planificações do cubo.

A figura 7-1, talvez por ser a mais familiar e recorrente nos manuais escolares, foi a representação mais seleccionada. A figura 7-2 é a menos escolhida talvez por se verificar a situação contrária. Porém, são os estudantes com 12 anos de Matemática e os estudantes do 3.º ano da licenciatura que mais identificam esta figura como representação de planificação do cubo. Poderá supor-se que estes grupos estejam mais despertos para representações menos comuns da planificação do cubo.

Existem também alguns estudantes a seleccionar representações que não correspondem à planificação do cubo (quadro 8): 4 estudantes seleccionam a figura 8-4 e 8 estudantes seleccionam a figura 8-6. A totalidade dos estudantes que escolhe a figura 8-4 encontra-se no 1.º ano do curso. O mesmo não se passa com a outra hipótese de resposta. A maioria (2,6%) corresponde a estudantes do 1.º ano, embora ainda existam estudantes do 2.º ano (1,5%) e do 3.º ano (1,7%) a considerar aquela representação como planificação do cubo. Os estudantes que seleccionam a figura 8-4 possuem um nível de escolaridade em Matemática acima dos 11 anos, enquanto que nenhum estudante com uma escolaridade em Matemática de 10 anos ou inferior o faz.

Questão 3	Figura 4	Figura 6
		
Frequência	4	8
Percentagem	1,0%	2,0%

Quadro 8 – Distribuição das escolhas das representações que não correspondem a planificações do cubo.

Apesar de ser um número reduzido, é preocupante verificar que ainda existem estudantes que admitem a construção do cubo com base nas duas representações seleccionadas. No que diz respeito a uma das figuras (figura 8-4) é surpreendente verificar que os estudantes que a seleccionaram possuem um nível de escolaridade em Matemática acima dos 11 anos, o que reforça a ideia de que continuam a existir conhecimentos errados nos estudantes que tiveram geometria no ensino secundário (Mayberry, 1983).

Considerando o número reduzido de selecção de planificações incorrectas, constata-se que a maior percentagem de respostas consideradas erradas são, de facto, incompletas devido à não consideração de todas as hipóteses de representação possível de planificação do cubo. Isto significa que, apesar de uma percentagem elevada de insucesso nesta questão, esta não se deve globalmente à escolha de opções incorrectas, mas à não selecção de todas as opções correctas.

4.2.2 – Classificação

A categoria de questões relacionadas com a classificação centra-se na capacidade de identificação de figuras no plano, compreendendo três questões: uma de triângulos (questão 4), outra de rectângulos (questão 5) e ainda outra de outros polígonos (questão 6).

O nível de sucesso a estas questões é diversificado, como se pode constatar no quadro 9.

			Classificação		
			Questão 4	Questão 5	Questão 6
Ano do curso	1º ano	Frequência	107	7	10
		Percentagem	70,4%	4,6%	6,6%
	2º ano	Frequência	94	2	10
		Percentagem	71,2%	1,5%	7,6%
	3º ano	Frequência	98	43	30
		Percentagem	81,7%	35,8%	25,0%
Total		Frequência	299	52	50
		Percentagem	74,0%	12,9%	12,4%

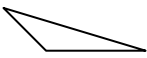


Quadro 9 – Distribuição das respostas correctas à categoria de questões “Classificação”.

A questão 4 – identificação de triângulos – é a que possui maior percentagem de respostas correctas. As questões 5 e 6 – identificação de rectângulos e de polígonos – revelam uma diferença significativa de respostas correctas entre os estudantes do 3.º ano e os estudantes dos 2.º e 1.º anos.

A análise dos dados parece indicar que os estudantes têm mais facilidade em identificar triângulos do que rectângulos, tal como sugerem Clements *et al.* (1999) num estudo realizado com crianças. A percentagem de respostas correctas diminui consideravelmente quando se passa da identificação de triângulos para a identificação de rectângulos e polígonos. Aparentemente, os estudantes dos 1.º e 2.º anos têm mais facilidade em identificar triângulos do que polígonos e estes do que rectângulos. Porém, poderá levantar-se a hipótese de que a inclusão do quadrado na questão de classificação de rectângulos poderá estar na origem da diferença percentual de respostas correctas às duas questões, como poderemos verificar no decorrer desta análise. Os estudantes do 3.º ano são o grupo com maior percentagem de respostas correctas, apesar de ser considerada uma percentagem baixa, tendo em conta o ano da licenciatura em que se encontram.

Uma análise mais detalhada da questão relacionada com a identificação de triângulos (quadro 10) revela que todos os estudantes seleccionam a figura 10-2 (triângulo acutângulo isósceles), 97% dos estudantes identificam a figura 10-1 (triângulo obtusângulo escaleno) e 89,4% dos estudantes escolhem a figura 10-8 (triângulo rectângulo escaleno).

Verifica-se também que todos os estudantes do 3.º ano reconhecem o triângulo obtusângulo escaleno representado, mas nem todos o fazem para o triângulo rectângulo escaleno (89,2%). Apesar de não existir uma diferença significativa, são os estudantes do 2.º ano que mais seleccionam esta opção (90,9%).

Questão 4	Figura 1	Figura 2	Figura 8
			
Frequência	392	404	361
Percentagem	97,0%	100,0%	89,4%



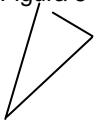

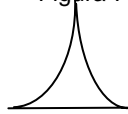
Quadro 10 – Distribuição das escolhas das representações de triângulos.

Apesar da diferença de percentagens na selecção dos triângulos correctos não ser considerada significativa, a posição e a dimensão dos triângulos apresentados poderão estar na origem destas diferenças.

O triângulo acutângulo isósceles (figura 10-2) é seleccionado por todos os participantes, talvez por ser um dos protótipos de triângulo que os estudantes possuem, tal como verificado num estudo de Clements (2004) junto de crianças do pré-escolar. O facto de se encontrar numa posição pouco comum, não parece ter influenciado o número de respostas correctas.

Os triângulos escalenos (figuras 10-1 e 10-8) são os menos seleccionados. Tal como em estudos realizados junto de crianças do pré-escolar e do 1.º ciclo, parece que o facto de um dos triângulos ser “extremamente obtuso” (Wu & Ma, 2005) e o outro ser “muito longo” (Clements & Sarama, 2000) e “pouco largo” (Clements, 2004) influenciou o número de identificações correctas destas duas representações.

Relativamente às representações que não correspondem a triângulos mais seleccionadas (quadro 11), observa-se que a figura 11-7, constituída por um segmento de recta e linhas curvas, foi seleccionada por 12,1% dos estudantes e a figura 11-3 (papagaio não convexo) foi seleccionada por 3,2% dos estudantes. Nenhum estudante seleccionou a figura 11-4 (pentágono) e apenas 1% seleccionou a figura 11-5 (não fechada).


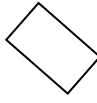

Questão 4	Figura 3	Figura 4	Figura 5	Figura 6	Figura 7
					
Frequência	13	0	4	1	49
Porcentagem	3,2%	0,0%	1,0%	0,2%	12,1%

Quadro 11 – Distribuição das escolhas das representações que não correspondem a triângulos.

Apesar de se constituir em número inferior, verifica-se que algumas das figuras que não representam triângulos também foram escolhidas. Os estudantes parecem aceitar a figura composta por segmentos de recta e linhas curvas (figura 11-7) como um triângulo (Clements & Sarama, 2000), bem como o papagaio não convexo da figura 11-3 (Clements & Battista, 1992). Os atributos visuais das figuras parecem sobrepor-se aos atributos críticos, levando à classificação destas figuras como triângulos.

Poucos estudantes seleccionaram a figura 11-5, não fechada, o que me conduz à hipótese de que os estudantes terão a noção de que o triângulo terá de ser necessariamente uma figura fechada. Mesmo assim, é preocupante que os estudantes considerem como triângulos figuras que não o são.

Relativamente à questão de classificação de rectângulos, a maioria dos estudantes selecciona a figura 12-5, rectângulo cujos lados se encontram em posição oblíqua, e a figura 12-3, rectângulo de dimensão estreita cujos lados se encontram em posição oblíqua (quadro 12). A figura 12-7 (quadrado) é seleccionada por apenas 19,3% dos participantes. Os estudantes do 3.º ano são os que seleccionam esta figura numa maior percentagem (47,5%), enquanto que apenas 9,2% e 5,3% dos estudantes dos 1.º e 2.º anos do curso, respectivamente, o fazem.

Questão 5	Figura 3	Figura 5	Figura 7
			
Frequência	378	396	78
Porcentagem	93,6%	98,0%	19,3%

Quadro 12 – Distribuição das escolhas das representações de rectângulos.

Uma grande parte dos participantes identifica os rectângulos cujos lados se encontram em posição oblíqua (figuras 12-3 e 12-5). O facto dos lados destas figuras não se encontrarem numa posição horizontal ou vertical (Clements & Sarama, 2000) parece ter influenciado o número de respostas correctas já que, apesar de se ter verificado uma percentagem elevada, seria de esperar que todos os estudantes fizessem uma classificação correcta destas figuras. A dimensão estreita do rectângulo 12-3 também parece ter sido um factor limitador de classificação desta figura como um rectângulo (Clements & Sarama, 2000), comparativamente à figura 12-5.

O facto de existir uma percentagem tão elevada de estudantes a excluir o quadrado (figura 12-7), leva-me a questionar se a inclusão deste rectângulo especial estará na origem do baixo sucesso revelado nesta questão.


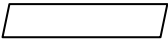



Caso o quadrado não existisse como opção de resposta a esta questão, haveria uma subida significativa da percentagem de respostas correctas dos estudantes do 1.º ano (de 4,6% para 35,5%) e dos estudantes do 2.º ano (de 1,5% para 42,2%). No caso dos estudantes do 3.º ano, haveria um ligeiro decréscimo de número de repostas certas (de 35,8% para 33,3%).

Verifica-se, assim, que o quadrado é uma figura pouco seleccionada comparativamente com os outros rectângulos. Inclusivamente é menos seleccionada do que as figuras 13-2 e 13-6 – paralelogramos obliquângulos – que não são rectângulos (ver quadro 13). A limitação dos protótipos de rectângulos (Hannibal, 1999) e o carácter exclusivo da definição de rectângulo (Matsuo, 1993) que os participantes possam possuir poderão estar na origem da reduzida percentagem de estudantes que identificam o quadrado como rectângulo. Neste sentido, existiria uma subida significativa de respostas correctas dos estudantes dos 1.º e 2.º anos, caso se considerasse uma definição exclusiva de rectângulos. Dada a percentagem elevada de estudantes nestas condições, pode supor-se que o nível de sucesso nesta questão se deve, efectivamente, à inclusão do quadrado como hipótese de resposta. Parece que os estudantes desconhecem que um quadrado é um rectângulo, o que é uma preocupação a ser tomada em consideração. Relativamente aos estudantes do 3.º ano, existiria um decréscimo de respostas correctas talvez devido ao facto destes estudantes terem frequentado a

unidade curricular de “Geometria” no semestre anterior à data de aplicação do teste e este conceito ter sido abordado especificamente e aprofundadamente.

Quanto às representações que não correspondem a rectângulos seleccionadas (quadro 13), verifica-se que existe uma percentagem elevada de estudantes que classificam outras figuras como rectângulos, nomeadamente as figuras 13-2 e 13-6 (paralelogramos obliquângulos) com 41,1% e 37,1% de respostas, respectivamente. A maioria dos estudantes que selecciona estas figuras é do 1.º ano.

Poucos estudantes seleccionam a figura 13-4 (composta por segmentos de recta e linhas curvas), ainda que exista 3,2% a fazê-lo.

Questão 5	Figura 1 	Figura 2 	Figura 4 	Figura 6 	Figura 8 
Frequência	30	166	13	150	31
Percentagem	7,4%	41,1%	3,2%	37,1%	7,7%







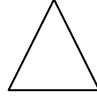
Quadro 13 – Distribuição das escolhas das representações que não correspondem a rectângulos.

Como referido anteriormente, uma grande percentagem de estudantes selecciona os paralelogramos obliquângulos 13-2 e 13-6, verificando a tendência, já encontrada em outros estudos, em aceitar este tipo de quadriláteros como rectângulos (Clements, 2004; Clements & Battista, 1992; Clements & Sarama, 2000; Sarama & Clements, 2009). Estes erros também poderão ter sido originados pelas definições individuais de rectângulo e pela influência dos atributos visuais em detrimento dos atributos críticos, relevando para segundo plano as características dos ângulos dos rectângulos.

Na questão relacionada com a classificação de polígonos (quadro 14), a figura mais seleccionada é a figura 14-10 (hexágono regular) com 87,4% de estudantes a classificá-la como polígono. As figuras 14-12 (triângulo equilátero), 14-5 (quadrilátero não trapézio), 14-9 (pentágono irregular) e 14-2 (quadrado) obtiveram uma percentagem de respostas muito semelhantes (num intervalo entre 62,4% e 66,3%).

Os polígonos menos seleccionados são as figuras não convexas: a figura 14-7 (octógono não convexo) com 30,9% de respostas e a figura 14-4

(hexágono não convexo) com 52,7% de respostas. Os estudantes do 3.º ano são o grupo que mais classifica as figuras não convexas como polígonos (54,2% identificam o octógono e 71,7% identificam o hexágono).

Questão 6	Fig. 2	Fig. 4	Fig. 5	Fig. 7	Fig. 9	Fig. 10	Fig. 12
							
Frequência	268	213	256	125	267	353	252
Porcentagem	66,3%	52,7%	63,4%	30,9%	66,1%	87,4%	62,4%


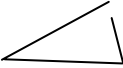



Quadro 14 – Distribuição das escolhas das representações de polígonos.

Poderá supor-se que as figuras não convexas foram as menos seleccionadas pelos participantes por se constituírem como exemplos mais afastados dos protótipos de polígonos conhecidos. Deste modo, o seu aspecto poderá não ter permitido a associação ao tipo de figura envolvido (Edwards & Harper, 2010). Reforçando esta ideia, talvez por terem tido mais contacto com este tipo de polígonos na unidade curricular de “Geometria”, os estudantes do 3.º ano são o grupo que mais classifica as figuras não convexas como polígonos.

Ao relacionar os estudantes que seleccionam estes polígonos, verifica-se que apenas 27,2% dos estudantes identificam tanto o hexágono como o octógono não convexas como polígonos. Este valor não me parece revelador de uma coerência de raciocínio quanto ao factor da convexidade dos polígonos, pois seria esperado que os estudantes que seleccionassem uma figura não convexa também o fizessem para a outra. Por outro lado, a figura 14-4 poderá ser um dos protótipos de polígono não convexo que os estudantes possuem (pois contém apenas um ângulo não convexo, enquanto que a figura 14-7 possui quatro), o que poderá justificar a maior selecção de uma das figuras em relação à outra.

As representações que não correspondem a polígonos mais seleccionadas (quadro 15) são a figura 15-1 (círculo) com 21,5% de estudantes a classificá-la como polígono e as figuras 15-8 e 15-11 (compostas por segmentos de recta e linhas curvas) com 6,4% e 6,7% de respostas, respectivamente.

As figuras que não correspondem a polígonos menos escolhidas foram as figuras 15-3 e 15-6 (figuras abertas).

Questão 6	Figura 1	Figura 3	Figura 6	Figura 8	Figura 11
					
Frequência	87	2	7	26	27
Porcentagem	21,5%	0,5%	1,7%	6,4%	6,7%

Quadro 15 – Distribuição das escolhas das representações que não correspondem a polígonos.

Estes resultados reforçam a ideia de que a familiaridade com as figuras (no caso do círculo) e a parecença com figuras conhecidas (no caso das figuras parecidas com um triângulo e um quadrado) poderão estar na origem de classificações incorrectas. A selecção destas figuras poderá ter resultado, mais uma vez, de uma sobreposição dos atributos visuais em detrimento dos atributos críticos (Sophocleous *et al.*, 2009), resultando no tipo de resposta verificado. Porém, no caso da figura 15-8 (parecida com um triângulo) poderá levantar-se a questão da qualidade da impressão do teste. Poderá dar a sensação de que a figura é constituída por vários segmentos de recta de curta dimensão, em vez de uma linha curva. Neste caso, a opção de resposta de classificação desta figura como polígono, estaria correcta. Contudo, a percentagem de selecção desta figura é baixa, não influenciando o resultado geral da análise a esta questão.

As figuras que não correspondem a polígonos menos escolhidas foram as figuras não fechadas (figuras 15-3 e 15-6), reforçando a ideia anterior (sugerida na questão relacionada com a classificação de triângulos) de que os estudantes terão a noção de que um polígono será necessariamente uma figura fechada.

Outro aspecto relacionado com a existência de figuras compostas por segmentos de recta e linhas curvas ao longo desta categoria de questões, levou-me a verificar se os estudantes que identificam a figura 11-7 (questão 4, classificação de triângulos) como um triângulo, também classificam a figura 15-8 (questão 6, classificação de polígonos) como um polígono, dado que são duas figuras de aparência aproximada a um triângulo; verifica-se que apenas 8

estudantes (2%) que seleccionam uma figura, também o fazem para a outra. E se os estudantes que identificam a figura 13-4 (questão 5, classificação de rectângulos) como um rectângulo, também classificam a figura 15-11 (questão 6, classificação de polígonos) como um polígono, dado que são duas figuras que se parecem livremente com rectângulos; constata-se que apenas um participante (0,2%) que selecciona uma figura, também o faz para a outra.

Volta a verificar-se uma percentagem muito baixa de estudantes que seleccionam ambos os pares de figuras, não me parecendo revelador de uma coerência de raciocínio.

Por serem considerados protótipos de polígonos, pareceu-me também interessante analisar o número de participantes que selecciona apenas os polígonos regulares. Apenas 4,2% dos estudantes (17 estudantes) classificam apenas os polígonos regulares como polígonos, sendo na sua maioria estudantes do 3.º ano.

É uma percentagem muito baixa, o que poderá ser revelador de que os estudantes terão a ideia de que a congruência dos lados e dos ângulos não é condição necessária para classificar uma figura no plano como polígono. Contudo, a maior percentagem destas respostas reside nos estudantes do 3.º ano, o que poderá ter sido influenciado pela frequência na unidade curricular de “Geometria”. Dado que o conceito da regularidade de polígonos foi amplamente trabalhado, estes estudantes poderão ter associado a palavra “polígono” a “regular” dando origem a este tipo de respostas, o que se demonstra preocupante, pois revela que o conceito de “polígono” em si mesmo poderá não ter sido convenientemente trabalhado.

4.2.3 – Congruência

A categoria de questões relacionadas com a congruência centra-se na capacidade de identificação de figuras congruentes a uma figura apresentada, compreendendo três tipos de congruência: congruência por rotação no plano (questão 7), congruência por reflexão no plano (questão 8) e congruência no espaço (questão 9).

Analisando as três questões (quadro 16), pode observar-se que os estudantes respondem mais correctamente às questões 7 e 8 (congruência no plano), do que à questão 9 (congruência no espaço).

			Congruência		
			Questão 7	Questão 8	Questão 9
Ano do curso	1º ano	Frequência	115	93	41
		Percentagem	75,7%	61,2%	27,0%
	2º ano	Frequência	98	92	38
		Percentagem	74,2%	69,7%	28,8%
	3º ano	Frequência	95	82	38
		Percentagem	79,2%	68,3%	31,7%
Total		Frequência	308	267	117
		Percentagem	76,2%	66,1%	29,0%

Quadro 16 – Distribuição das respostas correctas à categoria de questões “Congruência”.

Nesta categoria de questões não se verifica uma diferença acentuada entre as respostas dos estudantes dos diferentes anos do curso, tal como acontecia em algumas questões nas categorias anteriores. Contudo, existe uma diferença de percentagem de respostas correctas entre as três questões.

Verifica-se que, tal como indica o estudo de Jacobson e Lehrer (2000) junto de alunos do 2.º ano do ensino básico, os estudantes tiveram mais sucesso na questão que envolve rotação no plano (questão 7) do que na questão que envolve reflexão (questão 8). A percentagem de estudantes que identificam correctamente a imagem da figura apresentada reflectida segundo um eixo ronda os 60%, percentagem semelhante ao estudo realizado pelo NAEP em 1986 (Clements & Battista, 1992), realizado com alunos do 7.º ano.

Também se pode colocar a hipótese do tipo de figura de referência utilizada nas duas questões ser de natureza diferente. Na questão da congruência por rotação no plano – questão 7 – é utilizada uma figura composta por quadrículas, enquanto que na questão da congruência por reflexão – questão 8 – é utilizada uma figura sem qualquer referencial de área, o que poderá ter influenciado a percentagem de respostas certas às duas questões.

A questão que tem uma percentagem mais baixa de respostas certas diz respeito às transformações geométricas no espaço – questão 9 –, talvez devido à pouca frequência de actividades desta natureza durante a sua escolaridade.

Tal como Ho e Eastman (2006) aconselham, a rotação dever-se-ia estender ao espaço tridimensional com actividades que envolvam a rotação de figuras 3D, embora esta não seja frequente no ensino básico.

Este factor parece evidenciado quando se relaciona a percentagem de estudantes que identificam a rotação no plano e no espaço. Dado que parece haver diferenças na capacidade de identificar figuras congruentes no plano e no espaço, pareceu-me pertinente verificar se os estudantes que respondem correctamente à questão 7 (congruência por rotação no plano) também o fazem para a questão 9 (congruência por rotação no espaço). Verifica-se que apenas 23,5% dos estudantes identificam correctamente as figuras congruentes por rotação no plano e no espaço. A percentagem é relativamente baixa, pelo que parece que a dimensão espacial em que se trabalha se sobrepõe ao tipo de transformação geométrica. Isto poderá significar que os estudantes terão mais facilidade em identificar a rotação do que a reflexão, desde que esta ocorra no plano, envolvendo figuras 2D.

Mas também se verifica que grande parte dos estudantes considera figuras 3D congruentes por rotação. Destes, 95,8% são do 3.º ano, assim como 94,1% do 2.º ano e 90,2% do 1.º ano. Porém, existe uma grande parte de estudantes que considera figuras 3D congruentes por reflexão, sendo que 69,7% dos estudantes do 2.º ano responde deste modo, assim como 65,1% dos estudantes do 1.º ano e 63,3% dos estudantes do 3.º ano. Reforçando o aspecto da dificuldade de identificar correctamente figuras tridimensionais congruentes, verifica-se assim que, no espaço, uma percentagem considerável de alunos admite congruência por reflexão, apesar de, na sua maioria, seleccionarem as figuras congruentes por rotação.

4.2.4 – Equivalência / Área

A categoria de questões relacionadas com equivalência e área centra-se na capacidade de identificação e construção de figuras equivalentes a uma figura apresentada numa malha quadriculada, compreendendo três questões: identificação de figuras equivalentes (questão 10), construção de figuras equivalentes em que a figura-base é composta por quadrados inteiros (questão 11) e construção de figuras equivalentes em que a figura-base é composta por quadrados inteiros e partes de quadrados (questão 12).

Analisando as respostas correctas a estas questões, observam-se algumas diferenças quanto à percentagem de respostas correctas (quadro 17).

			Equivalência / Área		
			Questão 10	Questão 11	Questão 12
Ano do curso	1º ano	Frequência	100	128	123
		Percentagem	65,8%	84,2%	80,9%
	2º ano	Frequência	103	115	104
		Percentagem	78,0%	87,1%	78,8%
	3º ano	Frequência	107	113	96
		Percentagem	89,2%	94,2%	80,0%
Total		Frequência	310	356	323
		Percentagem	76,7%	88,1%	80,0%

Quadro 17 – Distribuição das respostas correctas à categoria de questões “Equivalência / Área”.

Nesta categoria de questões constata-se que os estudantes respondem mais correctamente às duas últimas questões (questões 11 e 12), envolvendo construção de figuras equivalentes, do que à primeira questão (questão 10), envolvendo a identificação de figuras equivalentes. É necessário considerar que o tipo de questões é de natureza diferente (a primeira questão admite quatro opções de resposta correctas, enquanto que as restantes admitem apenas uma), pelo que poderá justificar a diferença de resultados entre as questões.


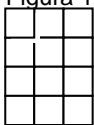
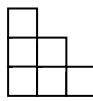

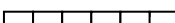
Desconhecendo o percurso escolar em Matemática dos participantes, não se poderá verificar se o tipo de tarefas relacionado com a determinação da área que é habitualmente proposto (baseado em fórmulas e cálculos numéricos), poderá estar na origem da percentagem de respostas correctas obtidas. Seria esperado que os estudantes tivessem obtido um número superior de respostas correctas à questão 10, já que esta apenas envolve contagem de quadrados. Poderemos supor que a origem destas dificuldades poderá ser a compreensão dos próprios conceitos de equivalência e de área. Battista (2007) afirma que a introdução prematura de fórmulas conduz a um raciocínio superficial acerca deste conceito, pelo que podemos levantar a hipótese de que poderá ser uma causa destes baixos resultados. A

percentagem mais elevada de respostas correctas diz respeito aos estudantes dos 3.º e 2.º anos, devido, talvez, ao trabalho realizado na unidade curricular “Conceitos e Procedimentos Matemáticos Básicos”, onde o conceito da área foi abordado através de tarefas que envolvem a utilização de tipos de raciocínio diferentes para a determinação da área de figuras: raciocínios do tipo *nonmeasurement* e *measurement*, descritos por Battista (2007), em substituição da utilização de fórmulas.

Os dados poderão também indicar que a diferença de resultados entre as questões que envolvem construção de figuras equivalentes (questões 11 e 12) se poderá relacionar com a utilização de unidades de medida diferentes. As unidades de medida destas duas questões apresentam tamanho e forma diferentes, o que poderá ter afectado a determinação correcta da área (Owens & Outhred, 2006).

Relativamente à questão 10, pareceu-me pertinente verificar qual a figura menos seleccionada como equivalente ao modelo. A figura menos seleccionada (quadro 18) é a figura 18-3, composta por quadrados inteiros e partes de quadrados. Contudo, 82,2% dos estudantes consideram-na equivalente ao modelo apresentado, em contraste com 90,6% (figura 18-2) e 93,3% (figura 18-4) dos estudantes que consideram as figuras compostas por quadrados inteiros.

Apenas 1,2% dos estudantes (5 estudantes) consideram a figura 18-1, com área superior ao modelo apresentado.

Modelo	Figura 1	Figura 2	Figura 3	Figura 4
				
Frequência	5	366	332	377
Percentagem	1,2%	90,6%	82,2%	93,3%

Quadro 18 – Distribuição das escolhas das figuras equivalentes ao modelo fornecido.

Perante estes resultados, o motivo que poderá estar na origem das dificuldades em identificar a figura 18-3 (questão 10) como equivalente ao modelo apresentado ou na construção do rectângulo a partir do triângulo rectângulo escaleno (questão 12) poderá ser a existência de quadrados

incompletos nas figuras de referência. Todas as figuras utilizadas nesta categoria de questões são compostas por quadrados inteiros, enquanto que as figuras indicadas são compostas por quadrados inteiros e quadrados incompletos, o que poderá ter condicionado as respostas a estas duas questões.

4.2.5 – Semelhança

A categoria de questões relacionadas com a semelhança centra-se na capacidade de identificação de figuras semelhantes a uma figura apresentada e na identificação de pares de polígonos semelhantes, compreendendo três questões: identificação de triângulos semelhantes (questão 13), identificação de rectângulos semelhantes (questão 14) e identificação de pares de polígonos semelhantes (questão 15).

De um modo geral, os estudantes respondem mais correctamente à questão 13 (identificação de triângulos semelhantes) do que à questão 14 (identificação de rectângulos semelhantes) e a esta do que à questão 15 (identificação de pares de polígonos semelhantes), como se pode comprovar no quadro 19.

			Semelhança		
			Questão 13	Questão 14	Questão 15
Ano do curso	1º ano	Frequência	73	57	19
		Percentagem	48,0%	37,5%	12,5%
	2º ano	Frequência	72	61	11
		Percentagem	54,5%	46,2%	8,3%
	3º ano	Frequência	89	64	35
		Percentagem	74,2%	53,3%	29,2%
Total		Frequência	234	182	65
		Percentagem	57,9%	45,0%	16,1%

Quadro 19 – Distribuição das respostas correctas à categoria de questões “Semelhança”.

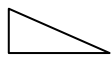


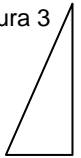

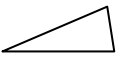
O nível de sucesso desta categoria de questões é bastante diversificado, talvez devido ao facto de as duas primeiras questões (questão 13 e 14) serem de natureza diferente da última questão (questão 15). Enquanto que nas duas

primeiras se pretende a identificação de figuras semelhantes a um modelo apresentado, a última questão requer que se identifiquem pares de figuras semelhantes. Esse facto poderá explicar o número reduzido de respostas certas à última questão, comparativamente às duas primeiras.

Outro aspecto que poderá estar na origem destes resultados poderá ser o facto de que o conceito de semelhança é considerado um dos tópicos mais difíceis de ensinar e aprender em geometria (Zaslavsky, 1991), podendo justificar a percentagem de respostas correctas dos estudantes do 3.º ano que abordaram este conceito específico na unidade curricular de “Geometria” através de tarefas investigativas.

No que diz respeito à questão da semelhança entre triângulos, os triângulos mais identificados como semelhantes ao modelo (quadro 20) apresentado são, efectivamente, os triângulos semelhantes. De todos os estudantes, 95,3% identificam o triângulo 20-3 e 94,3% identificam o triângulo 20-2.

Os triângulos 20-1 e 20-4 são os menos seleccionados (8,9% e 1%, respectivamente), enquanto que 31,7% dos estudantes seleccionam o triângulo 20-5 como semelhante ao modelo.




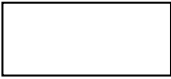


Modelo	Figura 1	Figura 2	Figura 3	Figura 4	Figura 5
					
Frequência	36	381	385	4	128
Percentagem	8,9%	94,3%	95,3%	1,0%	31,7%

Quadro 20 – Distribuição das escolhas dos triângulos identificados como semelhantes ao modelo apresentado.

Observa-se, assim, que a maior parte dos estudantes selecciona correctamente os triângulos rectângulos como semelhantes ao modelo. Porém, uma percentagem significativa de participantes também selecciona o triângulo escaleno, talvez por este se encontrar numa posição parecida à do modelo apresentado.

Na questão da semelhança entre rectângulos, os rectângulos semelhantes ao modelo apresentado (quadro 21) são as figuras mais seleccionadas com 94,6% para ambos os casos (rectângulos 21-2 e 21-3).

O rectângulo 21-1 (quadrado) é o menos seleccionado, com apenas 8 estudantes a fazê-lo, mas existe uma percentagem superior de estudantes a seleccionar o rectângulo 21-5 (47%) e o rectângulo 21-4 (27,2%).

Modelo	Figura 1	Figura 2	Figura 3	Figura 4	Figura 5
					
Frequência	8	382	382	110	190
Percentagem	2,0%	94,6%	94,6%	27,2%	47,0%

Quadro 21 – Distribuição das escolhas dos rectângulos identificados como semelhantes ao modelo apresentado.

Verifica-se que esta questão possui um número inferior de respostas certas em relação à anterior. Enquanto que a maior parte dos estudantes selecciona correctamente os dois rectângulos semelhantes ao modelo, existe uma percentagem elevada de estudantes a seleccionar rectângulos com o mesmo comprimento ou a mesma altura, parecendo que o atributo “ter o mesmo comprimento” se sobrepõe ao atributo “ter a mesma razão de comprimento entre os lados”, tal como verificado num estudo realizado por Vollrath (1977) com estudantes dos 8 aos 19 anos.

Relativamente aos pares de polígonos semelhantes identificados pelos estudantes, os mais seleccionados são “dois quadrados” (75%) e “dois triângulos equiláteros” (44,6%).

Contudo, existe uma percentagem significativa de estudantes a considerar “dois rectângulos” (26,2%) e “dois triângulos rectângulos” (23,8%) como semelhantes.

Verifica-se, assim, que o par de figuras semelhantes mais seleccionado é o par de quadrados. Tal resultado já se tinha observado por Mayberry (1983) num estudo realizado junto de professores, onde um elevado número de participantes afirmou que “dois quadrados são sempre semelhantes”. O

segundo par de figuras semelhantes mais seleccionado é “dois triângulos equiláteros”, verificando os resultados de outro estudo realizado junto de professores, conduzido por Zaslavsky (1991). Parece existir a ideia subjacente de que uma figura com lados iguais será sempre semelhante. Existe, também, uma percentagem considerável de respostas para “dois rectângulos” e “dois triângulos rectângulos” como pares de figuras semelhantes, confirmando os resultados obtidos em estudos de Vollrath (1977) e de Zaslavsky (1991), respectivamente.

Dado que parece existir diferenças na capacidade de identificar figuras semelhantes a um modelo e na identificação de pares de polígonos semelhantes, pareceu-me interessante verificar se existiria coerência na resposta dos participantes nas questões relacionadas com os triângulos e com os rectângulos. Ou seja, procurei perceber se os estudantes que responderam “dois triângulos rectângulos são sempre semelhantes” (questão 15) também seleccionaram todos os triângulos rectângulos como semelhantes ao modelo apresentado na questão 13; e se os estudantes que responderam “dois rectângulos são sempre semelhantes” (questão 15) também seleccionaram todos os rectângulos como semelhantes ao modelo da questão 14.

Relativamente aos triângulos, verifica-se que apenas 6 estudantes (1,5%) que consideram que um par de triângulos rectângulos é sempre semelhante, seleccionam todos os triângulos rectângulos como semelhantes ao triângulo rectângulo apresentado como modelo.

No caso dos rectângulos, nenhum estudante que considera que um par de rectângulos é sempre semelhante, selecciona todos os rectângulos como semelhantes ao rectângulo apresentado como modelo. Se excluirmos o quadrado, verifica-se que 5,4% dos participantes (22 estudantes) respondem deste modo.

Ambas as questões levantadas revelam que uma percentagem muito reduzida de estudantes responde de um modo coerente. Inclusivamente, quanto à questão levantada acerca dos rectângulos, não existe nenhum participante que, tendo afirmado que um par de rectângulos é sempre semelhante, selecciona todos os rectângulos da questão 14. Pode-se, mais uma vez, levantar a hipótese de que o quadrado possa ter influenciado estes resultados, por se encontrar como hipótese de resposta. Mas, ao excluir o

quadrado, verifica-se que a percentagem também não é significativa, o que poderá levantar a hipótese de que algumas respostas à questão 15 (pares de figuras semelhantes) poderão ter sido dadas sem que os participantes tenham reflectido muito.

4.2.6 – Propriedades de figuras 2D

A categoria de questões relacionadas com propriedades de figuras 2D centra-se na capacidade de identificação de propriedades de famílias de polígonos, compreendendo três questões acerca de triângulos (questão 16), de rectângulos (questão 17) e de paralelogramos (questão 18).

Analisando as questões desta categoria pode observar-se diferenças entre a percentagem de respostas correctas dos estudantes de todos os anos do curso (quadro 22).

			Propriedades de figuras 2D		
			Questão 16	Questão 17	Questão 18
Ano do curso	1º ano	Frequência	26	27	15
		Percentagem	17,1%	17,8%	9,9%
	2º ano	Frequência	15	19	10
		Percentagem	11,4%	14,4%	7,6%
	3º ano	Frequência	55	42	31
		Percentagem	45,8%	35,0%	25,8%
Total		Frequência	96	88	56
		Percentagem	23,8%	21,8%	13,9%

Quadro 22 – Distribuição das respostas correctas à categoria de questões “Propriedades de figuras 2D”.

Verifica-se que os estudantes dos três anos do curso respondem mais acertadamente às questões sobre triângulos do que às questões sobre rectângulos e a estas do que às questões sobre paralelogramos.

Relativamente às propriedades dos triângulos, verifica-se que a propriedade mais seleccionada pelos participantes (75%) é “a soma da amplitude dos ângulos é sempre igual”, enquanto que 36,6% dos estudantes consideram que “não possuem diagonais”.

Existem 15,8% de estudantes (64 estudantes) que afirmam que “todos os ângulos são agudos” e 4% (16 estudantes) que consideram que “todos os lados são iguais”.

Dado que a propriedade dos triângulos mais seleccionada pelos estudantes é “a soma da amplitude dos ângulos é sempre igual”, poderemos supor que o conceito da invariância da soma da amplitude dos ângulos internos dos triângulos terá sido convenientemente trabalhado no ensino básico e secundário, de acordo com as sugestões de Abrantes *et al.* (1999). Apesar de se constituir como uma percentagem considerada baixa, verifica-se que ainda existem estudantes a considerar que “todos os lados são iguais”, o que poderá estar associado às imagens mentais do protótipo de um triângulo, tal como constatado em considerações de estudantes do ensino básico (Clements & Battista, 1992).

No que diz respeito às propriedades dos rectângulos, a propriedade mais seleccionada é “todos os ângulos são rectos” (85,4%), seguida de “as diagonais são iguais” (37,4%).

No que respeita às afirmações incorrectas seleccionadas, há duas situações a destacar: 35,1% dos participantes consideram que “as diagonais são perpendiculares” e 12,4% consideram que “os lados opostos são diferentes”.

Nesta questão, a maioria dos estudantes selecciona “todos os ângulos são rectos”, demonstrando que a representação mental que os estudantes possam possuir acerca dos rectângulos, lhes permite identificar correctamente os ângulos rectos na maioria das figuras, tal como verificado por Mitchelmore (1992) num estudo realizado com alunos do 1.º ciclo. Uma percentagem significativa de participantes também selecciona como propriedade dos rectângulos “as diagonais são perpendiculares”. Esta resposta poderá advir da dificuldade perceptual do conceito de perpendicularidade, tal como demonstra o mesmo estudo realizado por Mitchelmore (1992). Mas também se poderá levantar a hipótese do desconhecimento do conceito de diagonal de uma figura, por não ser um elemento geométrico frequentemente trabalhado no ensino básico.

Quanto às propriedades dos paralelogramos, 70,3% dos estudantes consideram que “os lados opostos são paralelos” e 39,1% consideram que “os lados opostos são iguais”.

Existem 22,8% dos estudantes (92 estudantes) que afirmam que “as diagonais são iguais” e 12,6% (51 estudantes) que consideram que “todos os ângulos são rectos”.

Constata-se que a propriedade dos paralelogramos mais seleccionada é “os lados opostos são paralelos”. Segundo Mitchelmore (1992) a noção de paralelismo é visualmente óbvia (em confronto com a noção de perpendicularidade) o que poderá justificar a percentagem de selecção desta opção de resposta. Ainda existem participantes a considerar que “todos os ângulos são rectos”, o que poderá revelar dificuldades na compreensão do conceito de ângulo como uma propriedade saliente das figuras, tal como verificado num estudo com alunos do 3.º ano do ensino básico (Clements *et al.*, 1996) e demonstrado num estudo realizado por Gomes e Ralha (2005) junto de estudantes em formação inicial de professores.

4.1.7 – Simetria

A categoria de questões relacionadas com a simetria centra-se na capacidade de identificação de figuras com simetria, compreendendo três questões acerca de identificação de figuras com simetria (questão 19) e de identificação de figuras com um número específico de eixos de simetria (questões 20 e 21).

O nível de sucesso a estas questões é baixo, como se pode constatar no quadro 23.

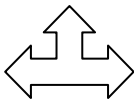


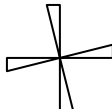
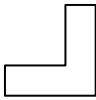
			Simetria		
			Questão 19	Questão 20	Questão 21
Ano do curso	1º ano	Frequência	8	44	15
		Percentagem	5,3%	28,9%	9,9%
	2º ano	Frequência	7	41	15
		Percentagem	5,3%	31,1%	11,4%
	3º ano	Frequência	15	78	35
		Percentagem	12,5%	65,0%	29,2%
Total		Frequência	30	163	65
		Percentagem	7,4%	40,3%	16,1%

Quadro 23 – Distribuição das respostas correctas à categoria de questões “Simetria”.

Nesta categoria de questões existe uma diferença acentuada de respostas certas entre os estudantes dos vários anos. Os estudantes acertam mais nas questões relacionadas com a identificação de figuras com um número específico de eixos de simetria (questões 20 e 21), do que à questão relacionada com a identificação de figuras com simetria (questão 19). A escolha das figuras em cada questão poderá estar na origem do número de respostas correctas nesta questão, já que a identificação dos eixos de simetria em letras (questão 20) e em figuras geométricas (questão 21) é uma actividade frequente no ensino básico. Poderá também ser explicada pela forma como a questão 19 está formulada pois seria necessário que os participantes conhecessem o conceito de simetria para seleccionarem correctamente as figuras propostas. Em todas as questões, os estudantes do 3.º ano são os que melhor respondem a este grupo de questões, o que poderá ter a ver com a abordagem deste conceito na unidade curricular “Matemática e Cultura”, a decorrer no momento da realização do teste.

Relativamente à primeira questão deste grupo, as figuras com simetria mais seleccionadas (quadro 24) são a figura 24-2 (88,1%), com quatro eixos de simetria, a figura 24-1 (81,4%), com um eixo de simetria vertical e a figura 24-5 (55,7%), com simetria de rotação.

As figuras menos seleccionadas são a figura 24-6 (41,1%), com eixo de simetria oblíquo e a figura 24-3 (30,7%), com eixo de simetria horizontal.

Questão 19	Figura 1	Figura 2	Figura 3	Figura 5	Figura 6
					
Frequência	329	356	124	225	166
Porcentagem	81,4%	88,1%	30,7%	55,7%	41,1%

Quadro 24 – Distribuição das escolhas das figuras com simetria.

A percentagem de respostas correctas confirma os resultados do NAEP de 1986 (Clements & Battista, 1992). Tal como os estudantes do 11.º ano testados, menos de 25% dos participantes identificaram correctamente todas as figuras com simetria. A figura mais seleccionada foi a “mais simétrica”, possuindo quatro eixos de simetria. A figura com eixo de simetria vertical foi mais seleccionada do que as figuras com eixo de simetria horizontal e oblíqua. Estes resultados confirmam a noção de que existem algumas variáveis que afectam a percepção da simetria de figuras, nomeadamente a orientação do eixo de simetria (Hershkowitz, 1990). Inclusivamente, Genkins (1975, como citado em Clements, 2003, p.162) considera que a simetria bilateral vertical é mais fácil de compreender do que a simetria horizontal, facto que se verificou na resposta a esta questão.

No que diz respeito à identificação de figuras com um número específico de eixos de simetria, pareceu-me pertinente verificar quantos estudantes identificam o rectângulo como tendo dois eixos de simetria (na questão 20) e quantos estudantes identificam o rectângulo como tendo, pelo menos, quatro eixos de simetria (na questão 21).

Existem 55,4% de estudantes a identificar o rectângulo (letra “i” maiúscula) como uma figura com dois eixos de simetria. No âmbito de cada ano do curso, 77,5% dos estudantes do 3.º ano respondem deste modo, assim como 49,2% dos estudantes do 2.º ano e 43,4% dos estudantes do 1.º ano.

Existem também 49,3% dos participantes a considerar o rectângulo como tendo, pelo menos, quatro eixos de simetria. Relativamente a cada ano do curso, 61,2% dos estudantes do 1.º ano respondem deste modo, bem como 60,6% dos estudantes do 2.º ano e 21,7% dos estudantes do 3.º ano.

Relacionando as respostas a estas duas questões, 24% (97 estudantes) consideram que o rectângulo tem dois e quatro eixos de simetria.

Verifica-se, deste modo, que uma grande parte dos estudantes considera que o rectângulo possui quatro ou mais eixos de simetria. A ideia de que a diagonal do rectângulo o divide em duas figuras congruentes poderá estar na origem deste erro. Ou seja, poderá existir a ideia de que um eixo de simetria divide a figura em duas figuras congruentes e que essa seja uma condição suficiente para a simetria de uma figura. Reforçando esta ideia, existe uma percentagem significativa (embora mais baixa) de participantes a considerar o paralelogramo obliquângulo como tendo também, quatro eixos de simetria.

Relativamente aos paralelogramos seleccionados como tendo, pelo menos, quatro eixos de simetria, o paralelogramo mais seleccionado é o quadrado (83,2%). Os estudantes do 3.º ano são os que mais respondem deste modo (91,7%), seguidos dos estudantes do 1.º ano (80,9%) e dos estudantes do 2.º ano (78%).

Os outros paralelogramos seleccionados foram o rectângulo (49,3%), o losango (33,9%) e o paralelogramo obliquângulo (20,5%). A maioria dos estudantes que selecciona estes paralelogramos como tendo quatro ou mais eixos de simetria é do 1.º ano, seguidos dos estudantes do 2º ano e dos estudantes do 3.º ano.

Verificando se quem selecciona o rectângulo como tendo, pelo menos, quatro eixos de simetria, também selecciona o quadrado, obtém-se que, de todos os participantes, 46,5% seleccionam ambas as figuras.

Indiscutivelmente, o quadrado é a figura mais identificada como tendo, pelo menos, quatro eixos de simetria e existe uma percentagem relativamente alta de participantes que identificam esta figura e o rectângulo. Estes resultados poderão advir da parecença visual entre estas duas figuras, o que poderá ter conduzido os participantes a considerar as mesmas propriedades para ambas.

Quanto ao círculo, 41,1% dos estudantes consideram que esta figura tem, pelo menos, quatro eixos de simetria. Os estudantes do 3.º ano são os que mais respondem deste modo (50%), seguidos dos estudantes do 2º ano (39,4%) e dos estudantes do 1.º ano (35,5%).

Seria de esperar que a percentagem de respostas fosse significativamente mais alta. Apenas metade dos estudantes do 3.º ano e menos de metade dos estudantes dos restantes anos consideram o círculo como tendo, pelo menos, quatro eixos de simetria. Poder-se-á levantar a hipótese de terem considerado apenas os eixos colocados em orientação vertical e horizontal, ignorando o facto de existirem outras orientações possíveis para os eixos de simetria do círculo.

Capítulo 5

CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

5.1 – Síntese do estudo

Este estudo procurou dar contributos para a caracterização dos conhecimentos em geometria dos estudantes em formação inicial de professores através da concepção, implementação e análise dos resultados de um teste de resposta múltipla, estruturado com base em conceitos considerados essenciais no ensino da geometria elementar. Pretendeu dar resposta à questão central: “*Quais os conhecimentos em geometria que os estudantes em formação inicial de professores possuem?*”, através da definição dos seguintes objectivos orientadores:

- Caracterizar o conhecimento em geometria dos estudantes no início do curso da licenciatura em Educação Básica, após um ano do curso e no último ano do curso;
- Compreender que conhecimentos em geometria os estudantes possuem à entrada do ensino superior;
- Compreender o que as unidades curriculares da licenciatura acrescentam ao conhecimento em geometria dos estudantes.

A abordagem metodológica mista adoptada, interligando as metodologias quantitativa e qualitativa, permitiu recolher um número elevado de dados e interpretar os resultados obtidos, enquadrando-os na realidade e contexto em que se inserem.

5.2 – Conclusões

Sobre os resultados do estudo

No sentido de **caracterizar o conhecimento em geometria dos estudantes no início do curso da licenciatura em Educação Básica, após um ano do curso e no último ano do curso**, verifica-se que não existe uma grande diferença de percentagens de respostas correctas entre os estudantes dos 1.º e 2.º anos, enquanto que, na maioria das questões, os estudantes do 3.º ano demonstram ter mais conhecimentos sobre os conceitos envolvidos. Também se verifica que, tal como referido por Mayberry (1983), os estudantes possuem diferentes tipos de conhecimento nas diversas áreas da geometria contempladas no estudo.

No que diz respeito à categoria “Raciocínio Espacial”, poder-se-á levantar a hipótese das dificuldades de conceptualização das convenções necessárias no desenho e interpretação de representações 2D de objectos 3D, sugeridas por Pittalis *et al.* (2009). Os baixos resultados na questão relacionada com a identificação de representações de planificações do cubo sugerem que os estudantes possam não saber as condições necessárias para terem a representação de uma planificação do cubo. Os resultados demonstram que muitos estudantes consideram a existência de uma planificação única do cubo, dado que mais de metade dos participantes selecciona apenas uma das representações apresentadas. E, apesar de em número reduzido, ainda existem estudantes a seleccionar figuras compostas por quadrados com dois lados adjacentes a outros quadrados como possíveis representações de planificação do cubo.

Através da análise das respostas à categoria “Classificação” parece que as classificações apresentadas se baseiam essencialmente em protótipos de figuras adquiridos durante a escolaridade anterior. A posição, o aspecto e a dimensão da figura parecem sobrepor-se ao conhecimento das propriedades de uma classe de figuras (Clements & Battista, 1992). Este facto poderá advir de um limitado número de modelos visuais e das definições conceptuais das próprias figuras. Será, portanto, necessário que os estudantes tenham contacto e analisem as características e propriedades de figuras apresentadas em posições e dimensões pouco comuns, em vez dos protótipos com simetria e de

base horizontal, a que estão habituados. Considerando que cerca de 70% destes estudantes têm um nível de frequência com aproveitamento da disciplina de Matemática acima dos onze anos, é preocupante verificar que figuras constituídas por segmentos de recta e linhas curvas sejam classificadas como triângulos e polígonos; ou que existam mais estudantes a classificar paralelogramos obliquângulos como rectângulos do que o quadrado como rectângulo. Alguns estudantes parecem enquadrar-se no *nível visual* de Van Hiele, o mais elementar, no qual as figuras são reconhecidas apenas pela sua aparência (Van Hiele, 1999). E embora a percentagem seja em número inferior, muitos estudantes finalistas da licenciatura ainda possuem conhecimentos errados acerca da classificação de triângulos, de rectângulos e de polígonos apesar desta temática ter sido abordada na unidade curricular frequentada no semestre anterior à data de resolução do teste.

Na categoria de questões “Congruência”, os estudantes revelam mais facilidade em identificar figuras planas congruentes que tenham sofrido uma transformação geométrica de rotação do que de reflexão, tal como sugerido por Jacobson e Lehrer (2000). Porém quando as figuras são tridimensionais, a percentagem de respostas correctas reduz, pelo que se poderá levantar a hipótese de que a dimensão espacial em que se trabalha se sobrepõe ao tipo de transformação geométrica sofrida pelas figuras. Segundo alguns autores, é mais complexo analisar transformações geométricas entre figuras tridimensionais do que entre figuras bidimensionais, tanto do ponto de vista da visualização como da interpretação da transformação geométrica. Exemplo disso é a diferença de resultados demonstrada na identificação de figuras congruentes no plano e no espaço.

Os níveis de respostas apresentados na categoria de questões “Equivalência / área” poderão revelar uma dificuldade de compreensão dos próprios conceitos de equivalência e de área devido à introdução prematura de fórmulas que conduzem a um raciocínio superficial acerca deste conceito, tal como referido por Battista (2007). Dado que as questões sugerem a adopção de tipos de raciocínio diversificados para a identificação ou construção de figuras equivalentes a uma figura dada, os estudantes poderão ter sentido dificuldades pela falta de familiaridade com este tipo de tarefas. Paralelamente, verifica-se que, quando as figuras são compostas por metades de quadrados

ou partes de quadrados, os estudantes têm mais dificuldade na identificação e construção de figuras equivalentes.

As respostas à categoria de questões “Semelhança” revelam a pouca familiaridade com este conceito, nomeadamente dos estudantes dos 1.º e 2.º anos do curso. E a percentagem de respostas correctas diminui significativamente quando se passa da identificação de figuras semelhantes para a generalização de pares de figuras semelhantes. Estes dados revelam uma necessidade de trabalhar este conceito no ensino básico, suportada pela ideia de que crianças de todas as idades conseguem aplicar transformações de semelhança às figuras (Sarama & Clements, 2009) e que o conceito de semelhança parece providenciar imagens mentais concretas de raciocínio proporcional (Hershkowitz, 1990).

Relativamente às “Propriedades de Figuras 2D”, os estudantes revelam poucos conhecimentos sobre esta área, nomeadamente quando a hipótese de resposta se refere aos ângulos de uma figura. Exceptuando o caso dos ângulos rectos do rectângulo, os estudantes revelam dificuldades na conceptualização dos ângulos de uma figura, tal como sugerem Clements *et al.* (1996). Na fase de formação inicial em que se encontram, os estudantes já deveriam ser capazes de reconhecer as figuras e as suas propriedades e classificá-las segundo as mesmas. Este tipo de capacidades, correspondentes ao *nível descritivo* e ao *nível de dedução informal* de Van Hiele, ter-lhes-ia permitido responder mais correctamente a este grupo de questões e, conseqüentemente, a outras categorias, nomeadamente a “Classificação”.

A categoria de questões acerca da “Simetria” é uma das categorias com a percentagem de respostas correctas mais baixa. Os resultados demonstram que os estudantes possuem conhecimentos errados em tarefas que envolvem este conceito, existindo dificuldades na identificação de figuras com simetria, tal como observado no estudo do NAEP de 1986 (Clements & Battista, 1992) e na identificação dos eixos de simetria de uma figura dependendo da sua orientação (Hershkowitz, 1990).

Tendo como objectivo ***compreender que conhecimentos em geometria os estudantes possuem à entrada do ensino superior***, verifica-se que os estudantes do 1.º ano da licenciatura possuem um conhecimento

superficial dos conceitos da geometria elementar. Tendo em conta que a frequência do ensino básico da maioria dos estudantes tenha tido como base os programas de Matemática de 1990 e de 1991, que dedicavam uma atenção significativa à geometria e continham orientações específicas para o seu ensino, seria de esperar que os resultados fossem superiores aos obtidos. A centralização do ensino da geometria simplesmente no reconhecimento e nomeação de formas geométricas e na utilização de fórmulas em medições geométricas (Clements & Battista, 1992; Porter, 1989), a importância excessiva conferida ao papel das definições *a priori* da experimentação, e a marginalização da geometria no currículo da Matemática (Veloso, 1999) poderão estar na origem dos poucos conhecimentos destes estudantes.

Procurando ***compreender o que as unidades curriculares da licenciatura acrescentam ao conhecimento em geometria dos estudantes***, os resultados do estudo parecem indicar, de um modo geral, que os estudantes do 3.º ano do curso obtiveram melhores resultados do que os estudantes dos 1.º e 2.º anos, principalmente no que diz respeito às questões consideradas de nível Difícil. Estes resultados poderão ser indicadores de que a frequência da unidade curricular de “Geometria” poderá estar na origem destas diferenças. Porém, não se poderá ter a certeza, dado que estes conhecimentos poderão ter sido adquiridos durante a sua frequência da disciplina de Matemática no ensino básico e secundário. É necessário ter em consideração que os estudantes envolvidos no estudo são diferentes e possuem diferentes percursos escolares, pelo que não se poderá retirar a conclusão de que, no 3.º ano, os estudantes possuem mais conhecimentos na área de geometria do que nos restantes anos.

Também será de referir que, na maioria das questões consideradas de nível Fácil e Médio, não existem diferenças significativas na percentagem de respostas correctas entre os estudantes dos três anos do curso. A diferença apenas é mais acentuada nas questões consideradas de nível Difícil. Porém, ao analisar as percentagens de respostas correctas dos estudantes do 3.º ano, verifica-se que os resultados, apesar de superiores aos estudantes dos outros anos do curso, são relativamente baixos considerando o ano do curso em que se encontram. Seria de esperar que os resultados fossem significativamente

superiores aos observados e que a diferença fosse bastante mais acentuada. Afigura-se uma percepção das falhas e limitações da formação inicial, na medida em que os estudantes têm sucesso nas unidades curriculares do domínio científico da matemática, mas não existem diferenças significativas entre os conhecimentos destes estudantes e dos que ainda não frequentaram essas unidades.

Sobre a metodologia do estudo

Em termos metodológicos, foi essencial uma abordagem metodológica mista correspondente a uma análise qualitativa dos resultados paralelamente à análise quantitativa dos mesmos. Para uma abordagem centrada numa única metodologia, o desenho da investigação e a construção do instrumento de recolha de dados teriam de ser diferentes. A centralização numa metodologia somente quantitativa não me permitiria assumir o carácter subjectivo do modo como as questões do teste estão formuladas e da escolha das alíneas e figuras das próprias questões. Tornava-se, assim, impossível discutir a subjectividade das questões e dos resultados observados. Por outro lado, se me centrasse apenas numa metodologia qualitativa, não me seria possível analisar os dados de uma amostra com estas dimensões, pelo que o objectivo de proporcionar contributos para a caracterização do conhecimento dos estudantes ficaria, certamente, comprometido. O facto de recorrer a uma abordagem metodológica mista e de me centrar num paradigma interpretativo, permitiu-me, para além da análise factual dos resultados, levantar hipóteses acerca do desempenho dos estudantes baseado no conhecimento que tenho da população onde foi retirada a amostra.

Relativamente ao modelo de construção do teste, de um modo geral, a selecção de questões e os resultados obtidos parecem ter contribuído para dar uma panorâmica geral dos conhecimentos em geometria dos estudantes da licenciatura em Educação Básica da Escola Superior de Educação onde foi realizado o estudo, fornecendo pistas para a redefinição de conteúdos e práticas educativas de algumas unidades curriculares deste curso.

Verifica-se que, no âmbito das categorias definidas no teste, os estudantes obtiveram diferentes resultados respondendo mais acertadamente às categorias de questões que se encontram no início do teste, com a

excepção da segunda categoria – “Classificação”. Deste modo, poder-se-á considerar que a sequência adoptada foi válida, correspondendo à lógica de motivação utilizada na construção do teste, na medida em que se procurou que as primeiras categorias de questões fossem mais acessíveis e motivadoras para a continuação da resolução do teste. Por outro lado, a opção de colocar as questões de cada categoria seguidas (não aleatórias) e sequenciadas, de modo a permitir que os participantes utilizassem a mesma linha de raciocínio e não se dispersassem pelos temas, não parece ter contribuído, em alguns casos, para esse objectivo concebido. Detecta-se, por vezes, uma falta de coerência de raciocínio por parte de alguns estudantes, o que compromete os resultados de algumas questões.

Considero, também, que o modo de aplicação do teste foi eficaz. Nenhum estudante ultrapassou o tempo limite estipulado para a resolução do teste, o que conduz à minha ideia inicial de criar um instrumento de recolha de dados de resposta rápida que motivasse os participantes durante a sua resolução. De um modo geral, na sua apreciação ao teste, os estudantes classificaram-no como interessante e estimulante, o que poderá ser um indicador de que os participantes responderam ao teste com interesse e motivação, de acordo com o pretendido na construção do instrumento, já que houve uma preocupação em criar um teste resolúvel num ambiente favorável.

5.3 – Recomendações, extensão e limitações do estudo

Recomendações para a formação inicial

Considerando os conceitos essenciais no ensino da geometria propostos, será necessário desenvolver uma metodologia apropriada na abordagem destes conceitos com os estudantes de formação inicial. As normas e princípios para a matemática escolar propostos pelo NCTM (2008) reforçam a importância destes conceitos, pelo que será necessário reflectir sobre a preparação científica e didáctica que os futuros professores adquirem durante os cursos de formação inicial. É fundamental reflectir sobre modos de combater os resultados dos estudos que indicam que os professores apresentam as mesmas dificuldades conceptuais em geometria dos alunos que ensinam

(Owens & Outhred, 2006). E esse trabalho deverá ser desencadeado a partir da formação inicial de professores.

Na medida em que se torna urgente repensar a unidade curricular de “Geometria”, já que não produz os resultados esperados, será necessário centrar o trabalho (i) no desenvolvimento do raciocínio espacial e das capacidades de visualização espacial; (ii) no estudo das definições inclusivas com base em condições suficientes e necessárias para a classificação de figuras e a observação de exemplos e contra-exemplos de figuras geométricas para a construção de conceitos; (iii) no estudo das transformações geométricas de figuras bidimensionais e tridimensionais através de experiências variadas com objectos concretos e virtuais; (iv) no estudo das grandezas e medida, nomeadamente a área e o volume, com a utilização de unidades de medida convencionais e não convencionais; (v) no estudo da semelhança como transformação geométrica e da sua conexão com o raciocínio proporcional; (vi) no estudo de conjecturas e demonstrações sobre propriedades de figuras 2D; e (vii) na análise de situações que envolvam simetria de figuras.

Será importante ter atenção ao efeito dos protótipos das figuras geométricas na aprendizagem dos estudantes (Matos, 1999), pelo que, em concordância com diversos autores e investigadores, considero que se deverá introduzir a componente dinâmica da geometria, através da utilização de software geométrico adequado. As noções e concepções adquiridas durante o percurso escolar destes estudantes poderão ser reforçadas ou alteradas com o recurso à geometria dinâmica. Paralelamente, um trabalho centrado em classificações inclusivas, começando na identificação das características e das propriedades das figuras bi e tridimensionais poderá ajudar a colmatar algumas das suas conceptualizações. Será necessário combater a tipologia de *conceptualizações erradas que perduram*, tal como definida por Hershkowitz (1990).

Em termos metodológicos, será importante manter o carácter exploratório da resolução em grupo de tarefas investigativas e problemas a propor aos estudantes, embora reforçando o trabalho e apoio individualizados, tomando em consideração os seus conhecimentos prévios adquiridos. Neste aspecto, será desejável criar-se um espaço destinado ao trabalho individual e à

orientação tutorial individualizada, de modo que a exploração e discussão colectivas das tarefas se tornem significativas para todos os estudantes.

Recomendações e extensões para investigação

Dado que a investigação se cingiu à área da geometria, seria interessante verificar os conhecimentos dos estudantes noutros blocos temáticos da matemática, ou mesmo aprofundar o alcance deste estudo, integrando mais questões acerca das figuras 3D. Apesar de procurar abranger, de um modo geral, os conceitos essenciais no ensino da geometria elementar, alguns aspectos foram menos focados, como o caso das figuras tridimensionais. Considerando que é uma temática pouco investigada e pouco se conhece acerca do desempenho dos estudantes em tarefas desta natureza (Sarama & Clements, 2009), seria interessante aprofundar a investigação nesta área. O modelo do teste poderia constituir-se como uma base para futuras investigações nesta e noutras áreas da matemática, tais como o cálculo e a álgebra.

Sendo que este estudo é centrado nos estudantes da licenciatura em Educação Básica de uma Escola Superior de Educação do centro do país, seria também pertinente investigar a situação actual dos estudantes em outras escolas com a mesma licenciatura e que contemplassem uma unidade curricular de geometria no currículo e um tipo de formação idêntico. Esta extensão da investigação poderia contribuir para uma generalização do conhecimento acerca da formação inicial e das suas práticas.

Tendo em conta a compreensão e a melhoria das práticas educativas da formação inicial, consideraria interessante dar continuidade a este estudo para além da esfera permitida por uma dissertação de mestrado. Um processo de investigação mais aprofundado e alargado no tempo permitiria investigar a mudança dos conhecimentos dos estudantes e as influências das unidades curriculares do domínio da matemática nas práticas pedagógicas dos seus estágios profissionalizantes. O seu aprofundamento poderia promover uma mais rigorosa reflexão sobre as questões que levanta. Enquanto professor do ensino superior, um estudo de cariz longitudinal desta natureza poderia, certamente, constituir uma mais valia para as estratégias a delinear, recursos a construir e currículos a desenvolver na área da geometria.

Limitações do estudo

Durante a análise de dados foram detectadas algumas limitações do instrumento de recolha de dados, pelo que considero que algumas questões poderiam ser reformuladas, em aplicações futuras, no sentido de retirar mais informações das respostas dos participantes. O modo como o teste foi construído permitiu analisar mais umas categorias do que outras, dando uma visão geral, mas pouco aprofundada, dos conceitos essenciais no ensino da geometria elementar. Porém, creio que poderá constituir-se como uma base para futuros testes na área da geometria.

A impossibilidade de estabelecer generalizações também poderá ser considerada uma limitação do estudo. Apesar de se tratar de uma amostra representativa da população, o estudo não foi realizado com todos os estudantes da licenciatura, pelo que os que não realizaram o teste poderiam influenciar os resultados do estudo. E o facto de se tratar de uma amostra diferente de estudantes para cada ano do curso também não permite verificar se, no 3.º ano do curso, os estudantes possuem mais conhecimentos do que nos outros anos do curso. Seria interessante acompanhar o percurso e aquisição de conhecimentos dos estudantes envolvidos neste estudo, com a repetição de um teste da mesma natureza em várias fases do curso, abrangendo, como já foi referido, não só a área da geometria, como diversas áreas do domínio científico da matemática.

Como limitações do modelo de teste adoptado (teste escrito de respostas múltiplas e fechadas), verifica-se que este não permite compreender a fundamentação das próprias respostas dos estudantes. Este factor poderia ter sido aprofundado através da realização de entrevistas semi-estruturadas de forma a retirar informações relativas ao seu modo de raciocínio. Devido aos limites estruturais da dissertação não me foi possível realizá-las, mas considero que poderiam constituir-se como um aprofundamento válido e pertinente ao estudo apresentado.

5.4 – Reflexão final

Um dos grandes objectivos da formação inicial é a preparação para o ensino de ideias e conceitos matemáticos de um futuro professor e educador (Gomes, 2004). Neste sentido, é necessário tomar em consideração os conhecimentos e as ideias generalizadas que os estudantes apresentam de modo a promover uma mudança conceptual significativa. Através deste estudo foram levantadas algumas questões no que diz respeito às práticas de formação no ensino superior.

Antes da realização desta investigação, não existia a percepção fundamentada dos conhecimentos e das dificuldades dos estudantes em geometria, dado que o nível de sucesso na unidade curricular de “Geometria” pode ser considerado elevado. Assume-se que os estudantes que obtêm aproveitamento nesta unidade curricular possuem conhecimentos acerca dos conceitos leccionados. Porém, após a análise dos resultados obtidos, observa-se que os estudantes demonstram muitos conceitos errados, levando-me a questionar se o facto de frequentarem uma unidade curricular com aproveitamento significará mais conhecimento numa determinada área. Parece que a própria unidade curricular de “Geometria” acrescentou pouco aos conhecimentos elementares dos estudantes. Será necessário repensar a prática dessa unidade curricular de modo a que os resultados destes estudantes melhorem e não se repitam em futuras investigações.

Existe um factor interessante revelado por algumas questões ao teste relacionado com o imediatismo das aprendizagens em contraste com a aprendizagem significativa desejada. Alguns resultados demonstram que os estudantes que frequentaram uma unidade curricular num semestre próximo à data da aplicação do teste, obtiveram melhores resultados em questões que envolviam conceitos abordados nessas unidades curriculares, em comparação com os estudantes que abordaram esses mesmos conceitos com dois semestres de diferença. Este factor poderá ser revelador de uma dispersão da atenção dos estudantes pelas várias áreas científicas que integram o plano de estudos do curso, provocado por uma proliferação de unidades curriculares e influenciando a qualidade das suas aprendizagens, tal como referido por Monteiro *et al.* (2004b). Será necessário, porventura, reflectir transversalmente

sobre esta situação e pensar numa abordagem mais duradoura dos conceitos na formação inicial.

Enquanto professor dos estudantes envolvidos na investigação, este estudo contribuiu para a minha formação pessoal e profissional, no sentido em que permitiu uma melhor percepção dos conhecimentos e dificuldades destes estudantes, factor que irá contribuir para a melhoria das práticas nas unidades curriculares que lecciono. Um dos aspectos que me leva a reflectir sobre todo o processo de formação inicial prende-se com os resultados dos estudantes do 3.º ano que, apesar de superiores aos dos estudantes dos restantes anos do curso, são bastante baixos comparativamente ao que era esperado. Será necessário repensar algumas unidades curriculares do curso de modo a combater o imediatismo das aprendizagens e promover o conhecimento factual e relacional dos conceitos.

Enquanto investigador, a realização de um estudo exploratório desta natureza permitiu levantar questões pertinentes acerca da formação inicial e abrir possibilidades de extensões para futuras investigações. Considero que existem lacunas empíricas ao nível da geometria na formação inicial de professores, e este estudo veio reforçar o meu interesse por essa área da matemática e pela investigação junto dos futuros professores. Não esquecendo que a finalidade última deste estudo se prende com a melhoria das práticas educativas do ensino básico, reforço a importância de todo o processo e percurso de aprendizagem científico e didáctico dos estudantes da formação inicial, sendo necessária a investigação neste campo. A formação inicial é complexa e é necessário que os estudantes aprendam a saber fazer matemática. Em concordância com Cuoco (2001) é possível fazer listas de tópicos e de conceitos para o ensino da matemática, mas estas serão ineficazes se não se encontrar maneiras de comunicar o espírito de fazer matemática às pessoas que vão ser professores de matemática.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abrantes, P., Serrazina, L., & Oliveira, I. (1999). *A matemática na educação básica*. Lisboa: Ministério da Educação. Departamento da Educação Básica.
- Alatorre, S., & Sáiz, M. (2009). Triangles' prototypes and teachers' conceptions. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd PME International Conference* (Vol. 2, pp. 25-32). Thessaloniki, Grécia: PME.
- Albuquerque, C., Veloso, E., Rocha, I., Santos, L., Serrazina, L., & Nápoles, S. (2008). *A matemática na formação inicial de professores*. Lisboa: APM.
- Alsina, C. (1999). Painel "Geometria no currículo de Matemática". In E. Veloso, H. Fonseca, J. P. Ponte, & P. Abrantes (Orgs.), *Ensino da geometria no virar do milénio* (p. 65). Lisboa: Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Departamento de Educação.
- Associação de Professores de Matemática (2009). *Renovação do currículo de matemática: Seminário de Vila Nova de Milfontes – 1988* (Edição Comemorativa). Lisboa: APM (Obra original publicada em 1988).
- Ball, D., & Bass, H. (2000). Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: Knowing and using mathematics. In J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning* (pp. 83-104). London: Ablex Publishing.
- Battista, M. T. (1999). Fifth graders' enumeration of cubes in 3D arrays: Conceptual progress in an inquiry-based classroom. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(4), 417-448.
- Battista, M. T. (2001). Shape Makers: A computer environment that engenders students' construction of geometric ideas and reasoning. *Computers in the Schools*, 17(1), 105-120.
- Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. 2, Cap. 19, pp. 843-908). Charlotte, NC: Information Age & National Council of Teachers of Mathematics.
- Blanco, L., & Barrantes, M. (2003). Concepciones de los estudiantes para maestro en España sobre la geometría escolar y su enseñanza-aprendizaje. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 6(2), 107-132.
- Brown, C. A., & Borke, H. (1992). Becoming a mathematics teacher. In D.A. Grows (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 209-239) NY: Macmillan Publishing Company.
- Byrne, D. (2002). *Interpreting quantitative data*. London: Sage Publications.
- Cannizzaro, L., & Menghini, M. (2004). Geometric figures from middle to secondary school: Mediating theory and practice. In M. A. Mariotti (Ed.), *Proceedings of CERME 3* (2003). TG11. Pisa: Ed. Plus.
- Clements, D. H. (2003). Teaching and Learning Geometry. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 151-178). Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.
- Clements, D. H. (2004). Geometric and spatial thinking in early childhood education. In D. H. Clements, & J. Sarama (Eds.), *Engaging young children in mathematics* (pp.267-298). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

- Clements, D., & Battista, M. (1992). Geometry and Spatial Reasoning. In D.A. Grows (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 420-464). NY: Macmillan Publishing Company.
- Clements, D. H., Battista, M. T., Sarama, J., & Swaminathan, S. (1996). Development of turn and turn measurement concepts in a computer-based instructional unit. *Educational Studies in Mathematics*, 30, 313-337.
- Clements, D. H., Battista, M. T., Sarama, J., Swaminathan, S., & McMillen, S. (1997). Students' development of length measurement concepts in a Logo-based unit on geometric paths. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(1), 70-95.
- Clements, D. H., & Sarama, J. (2000). Young children's ideas about geometric shapes. *Teaching Children Mathematics*, 6(8), 482-487.
- Clements, D. H., Sarama, J., & Wilson, D. C. (2001). Composition of geometric figures. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th PME International Conference* (Vol. 2, pp. 273-280). Utrecht, Holanda: PME.
- Clements, D., Swaminathan, S., Hannibal, M., & Sarama, J. (1999). Young children's concept of shape. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(2), 192-212.
- Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2001). *Research methods in education* (5th ed.). London: RoutledgeFalmer (Obra original publicada em 2000).
- Cooper, M., & Krainer, K. (1990). Children's recognition of right angled triangles in unlearned positions. In G. Booker, P. Cobb, & T. N. Mendicuti (Eds.), *Proceedings of the 14th PME International Conference* (Vol. 2, pp. 227-234). México: PME.
- Costa, C. (2000). Visualização, veículo para a educação em geometria. Consultado em 28 de Julho de 2009, de <http://www.spce.org.pt/sem/cc.pdf>.
- Cuoco, A. (2001). Mathematics for Teaching, *American Mathematical Society*, 48 (2), pp.168-174.
- De Villiers, M. D. (1994). The role and function of hierarchical classification of quadrilaterals. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 11-18.
- Decreto-Lei n.º43, de 22 de Fevereiro de 2007 (2007). Define as condições necessárias à obtenção de habilitação profissional para a docência nos domínios da educação pré-escolar e nos 1.º e 2.º ciclos do ensino básico, nos ensinos público, particular e cooperativo e nas áreas curriculares ou disciplinas abrangidas por esses domínios. Lisboa. Diário da República, 1.ª série, n.º 38.
- Del Grande, J. (1987). Spatial perception and primary geometry. In M. M. Lindquist, & A. P. Shulte (Eds.), *Learning and teaching geometry, 1987 Yearbook* (pp.126-135). Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.
- Del Grande, J. (1990). Spatial sense. *Arithmetic Teacher*, 37(6), 14-20.
- Diezmann, C., & Lowrie, T. (2009). Primary students' spatial visualization and spatial orientation: An evidence base for instruction. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd PME International Conference* (Vol. 2, pp. 417-424). Thessaloniki, Grécia: PME.
- Edwards, M., & Harper, S. (2010). Paint bucket polygons. *Teaching Children Mathematics*, 16(7), 420-428.

- Fennema, E., & Franke, M.L. (1992). Teachers' knowledge and its impact. In D.A. Grows (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 147-164). NY: Macmillan Publishing Company.
- Fuys, D., Geddes, D., & Tischler, R. (1988). The van Hiele model of thinking in geometry among adolescents. *Journal for Research in Mathematics Monograph Series*, 3. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Gomes, A., & Ralha, E. (2005). O conceito de ângulo: experiências e reflexões sobre o conhecimento matemático de (futuros) professores do 1.º ciclo. *Quadrante*, 14(1), 109-131.
- Gomes, J. T. (2004). *A geometria na formação matemática dos futuros professores do 1.º ciclo*. Tese de mestrado não publicada, Universidade de Lisboa, Portugal.
- Gordo, M. F. (1994). A visualização espacial e aprendizagem da Matemática: Um estudo no 1.º ciclo do Ensino Básico. *Quadrante*, 3(1) 157-184.
- Greene, J., & Caracelli, V. (2003). Making paradigmatic sense of mixed methods practice. In A. Tashakkori, & C. Teddlie (Eds.), *Handbook of mixed methods in social and behavioral research* (pp. 3-50). Thousand Oaks, USA: Sage Publications.
- Gutiérrez, A. (1996a). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. In L. Puig, & A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th PME International Conference* (Vol. 1, pp. 3-19). Valencia, Espanha: PME.
- Gutiérrez, A. (1996b). Children's ability for using different plane representations of space figures. In A. R. Baturo (Ed.), *New directions In geometry education* (pp. 33-41). Brisbane: Centre for Math and Science Education.
- Gutiérrez, A., & Jaime, A. (1993). An analysis of the students' use of mental images when making or imagining movements of polyhedra. In I. Hirabayashi, N. Nohda, K. Shigematsu, & F.-L. Lin (Eds.), *Proceedings of the 17th PME International Conference* (Vol. 2, pp.153-160). Tsukuba, Ibaraki, Japão: PME.
- Gutiérrez, A., Jaime, A., & Fortuny, J. M. (1991). An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the van Hiele levels. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22(3), 237-251.
- Hannibal, M. A. (1999). Young children's developing understanding of geometric shapes. *Teaching Children Mathematics*, 5(6), 353-357.
- Heinze, A. (2002). "... because a square is not a rectangle" – Student's knowledge of simple geometrical concepts when starting to learn proof. In A. D. Cockburn, & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th PME International Conference* (Vol. 3, pp.81-88). Norwich, UK: PME.
- Hershkowitz, R. (1990). Psychological aspects of learning geometry. In P. Nesher, & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 70-95). Cambridge: Cambridge University Press.
- Hershkowitz, R., Parzysz, B., & Dormolen, J. (1996). Space and shape. In A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 161 – 204). Londres: Kluwer Academic Publishers.
- Hershkowitz, R., & Vinner, S. (1984). Children's concepts in elementary geometry: A reflection of teacher's concept? In B. Southwell, R. Eyland, M. Cooper, J. Conroy, & K. Collis (Eds.), *Proceedings of the 8th PME International Conference* (pp. 63-69). Darlinghurst, Austrália: Mathematical Association of New South Wales.

- Ho, C. H., & Eastman, C. (2006). An investigation of 2D and 3D spatial and mathematical abilities. *Design Studies*, 27(4), 505-524.
- Jacobson, C., & Lehrer, R. (2000). Teacher appropriation and student learning of geometry through design. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(1), 71-88.
- Jones, K. (2000). Providing a foundation for deductive reasoning: Students' interpretations when using dynamic geometry software and their evolving mathematical explanations. *Educational Studies in Mathematics*, 44(1/2), 55-85.
- Jones, K., & Mooney, C. (2003). Making space for geometry in primary mathematics. In I. Thompson (Ed.), *Enhancing primary mathematics teaching and learning* (pp. 3-15). London: Open University Press.
- Kieren, T., & Pirie, S. (1992). The answer determines the question. Interventions and the growth of mathematical understanding. In W. Geeslin, & K. Graham (Eds.), *Proceedings of the 16th PME International Conference* (Vol. 2, pp. 1-8). Durham, NH: PME.
- Lehrer, R., Jacobson, C., Thoyre, G., Kemeny, V., Strom, D., Horvath, J., Gance, S., & Koehler, J. (1998). Developing understanding of Geometry and space in primary grades. In R. Lehrer, & D. Chazan, (Eds.), *Designing learning environments for developing of geometry and space* (Cap. 7, pp. 169-200). New York: Lawrence Erlbaum Associates.
- Lehrer, R., Jenkins, M., & Osana, H. (1998). Longitudinal study of children's reasoning about space and geometry. In R. Lehrer, & D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing of Geometry and space* (Cap. 6, pp. 137-167). New York: Lawrence Erlbaum Associates.
- Leung, I. (2008). Psychological aspects of inclusive and transitive properties among quadrilaterals by deductive reasoning with the aid of SmartBoard. *ZDM*, 40, 1007-1021.
- Lima, J. A. de (2006). Ética na investigação. In J. Ávila de Lima, & J. A. Pacheco (Org.), *Fazer investigação: Contributos para a elaboração de dissertações e teses* (pp. 127-159). Porto: Porto Editora.
- Lincevsky, L., Vinner, S., & Karsenty, R. (1992). To be or not to be minimal? Student teachers' views about definitions in geometry. In W. Geeslin, & K. Graham (Eds.), *Proceedings of the 16th PME International Conference* (Vol. 2, pp. 48-55). Durham, NH: PME.
- Loureiro, C. (2004). Que formação matemática para os professores do 1.º ciclo e para os educadores de infância. In A. Borralho, C. Monteiro, & R. Espadeiro (Org.), *A matemática na formação do professor* (pp. 273-275). Secção de Educação e Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.
- Loureiro, C. (2008). *Classificação matemática – três níveis de desenvolvimento*. Estudo não publicado, Escola Superior de Educação, Lisboa, Portugal.
- Loureiro, C. (2009). Geometria no novo programa de matemática no ensino básico. *Educação e Matemática*, 105, 61-66.
- Matos, J. M. (1999). *Cognitive models for the concept of angle*. Doctoral dissertation, University of Georgia, Athens, Georgia, USA.
- Matos, J. M., & Serrazina, L. (1996). *Didáctica da matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.
- Matsuo, N. (1993). Student's understanding of geometrical figures in transition from Van Hiele level 1 to 2. In I. Hirabayashi, N. Nohda, K. Shigematsu, & F.-L. Lin (Eds.), *Proceedings of the 17th PME International Conference* (Vol. 2, pp. 113-120). Tsukuba, Ibaraki, Japão: PME.

- Mayberry, J. (1983). The van Hiele levels of geometric thought in undergraduate preservice teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 14(1), 58-69.
- McDonald, J. L. (1989). Cognitive development and the structuring of geometric content. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(1), 76-94.
- Ministério da Educação (1998). *Organização curricular e programas – 1.º ciclo* (2ª edição, pp. 167-195). Lisboa: Ministério da Educação. Departamento da Educação Básica. (Obra original publicada em 1991).
- Ministério da Educação (2001). *Currículo nacional do ensino básico – Competências essenciais* (pp. 57-71). Lisboa: Editorial do Ministério da Educação. Departamento da Educação Básica.
- Ministério da Educação (2007). *Programa de matemática do ensino básico*. Lisboa: Ministério da Educação. Direcção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular.
- Mitchelmore, M. (1992). Children's concept of perpendiculars. In W. Geeslin, & K. Graham (Eds.), *Proceedings of the 16th PME International Conference* (Vol. 2, pp. 120-127). Durham, NH: PME.
- Monteiro, C., Costa, C., & Costa, C. (2004a). Competências matemáticas à saída da formação inicial. In A. Borralho, C. Monteiro, & R. Espadeiro (Org.), *A matemática na formação do professor* (pp. 169-197). Secção de Educação e Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.
- Monteiro, C., Costa, C., & Costa, C. (2004b). Competências matemáticas à saída da formação inicial: Conclusões. In A. Borralho, C. Monteiro, & R. Espadeiro (Org.), *A matemática na formação do professor* (pp. 273-275). Secção de Educação e Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.
- Moreira, J. M. (2006). Investigação quantitativa: Fundamentos e práticas. In J. Ávila de Lima, & J. A. Pacheco (Org.), *Fazer investigação: Contributos para a elaboração de dissertações e teses* (pp. 41-84). Porto: Porto Editora.
- National Council of Supervisors of Mathematics (1990). A Matemática para o século XXI (L. Fonseca, & P. Palhares, Trad.). *Educação e Matemática*, 14, 23-25.
- National Center for Education Statistics (n.d.). Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS). Consultado em 8 de Setembro de 2009, de <http://nces.ed.gov/timss>.
- National Council of Teachers of Mathematics (2008). *Princípios e normas para a matemática escolar* (2.ª edição) (APM, Trad.). Lisboa: APM (Obra original publicada em 2000).
- Nunes, T., Light, P., Mason, J., & Allerton, M. (1994). The role of symbols in structuring reasoning: Studies about the concept of area. In J. P. Ponte, & J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th PME International Conference* (Vol. 3, pp. 255-262). Lisboa, Portugal: PME.
- Okazaki, M. (2009). Process and means of reinterpreting tacit properties in understanding the inclusion relations between quadrilaterals. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd PME International Conference* (Vol. 4, pp. 249-256). Thessaloniki, Grécia: PME.
- Outhred, L., & Mitchelmore, M. (1996). Children's intuitive understanding of area measurement. In L. Puig, & A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th PME International Conference* (Vol. 4, pp. 91-98). Valencia, Espanha: PME.

- Owens, K., & Outhred, L. (2006). The complexity of learning geometry and measurement. In A. Gutiérrez, & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 83-115). Rotterdam: Sense Publishers.
- Panorkou, N., & Pratt, D. (2009). Mapping experience of dimension. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd PME International Conference* (Vol. 4, pp. 281-288). Thessaloniki, Grécia: PME.
- Parzysz, B. (1988). Knowing vs. Seeing: Problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics*, 19, 79-92.
- Piaget, J., & Inhelder, B. (2004). *The child's conception of space* (F. J. Langdon & J. L. Lunzer, Trad.) Cornwall: T. J. I. Digital. (Obra original publicada em 1948).
- Pittalis, M., Mousoulides, N., & Christou, C. (2009). Levels of sophistication in representing 3D shapes. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd PME International Conference* (Vol. 4, pp. 385-392). Thessaloniki, Grécia: PME.
- Porter, A. (1989). A curriculum out of balance: The case of elementary school mathematics. *Educational Researcher*, 18, 6-27.
- Robitaille, D. F., & Travers, K. J. (1992). International studies of achievement in mathematics. In D.A. Grows (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 687-709). NY: Macmillan Publishing Company.
- Rosser, R. A. (1994). Children's solution strategies and mental rotation problems: The differential salience of stimulus components. *Child Study Journal*, 24, 153-168.
- Sarama, J., & Clements, D. H. (2009). *Early childhood mathematics education research*. NY: Routledge.
- Schattschneider, D. (2009). Enumerating symmetry types of rectangle and frieze patterns: How Sherlock might have done it. In T. Craine (Ed.), *Understanding geometry for a changing world – Seventy-first yearbook* (pp. 17-32). Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.
- Schultz, K. A., & Austin, J. D. (1983). Directional effects in transformational tasks. *Journal for Research in Mathematics Education*, 14(2), 95-101.
- Smith, E. E. (1995). Concepts and categorization. In D. N. Osherson, & L. R. Gleitman (Eds.), *An invitation to cognitive science, Vol.3, Thinking*. Cambridge, MA: MIT Press.
- Sophocleous, P., Kalogirou, P., & Gagatsis, A. (2009). Creative ability and criteria in recognising geometric figures. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd PME International Conference* (Vol. 5, pp. 153-160). Thessaloniki, Grécia: PME.
- Sousa, M. V., & Fernandes, J. A. (2004). Dificuldades de professores estagiários de Matemática e sua relação com a formação inicial. *Quadrante*, 12(1), 91-113.
- Swafford, J. O., Jones, G. A., & Thornton, C. A. (1997). Increased knowledge in geometry and instructional practice. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(4), 467-483.
- Tashakkori, A., & Teddlie, C. (2003). The past and the future of mixed methods research: From data triangulation to mixed models design. In A. Tashakkori, & C. Teddlie (Eds.), *Handbook of mixed methods in social and behavioral research* (pp. 3-50). Thousand Oaks, USA: Sage Publications.
- Teddlie, C., & Tashakkori, A. (2003). Major issues and controversies in the use of mixed methods in the social and behavioral sciences. In A. Tashakkori, & C. Teddlie (Eds.),

- Handbook of mixed methods in social and behavioral research* (pp. 3-50). Thousand Oaks, USA: Sage Publications.
- Tierney, C., Boyd, C., & Davis, G. (1990). Prospective primary teachers conceptions of area. In G. Booker, P. Cobb, & T. N. Mendicuti (Eds.), *Proceedings of the 14th PME International Conference* (Vol. 2, pp. 307-314). México: PME.
- Tucker, A. (2001). Perspectives from a mathematician. In National Research Council (Eds.), *Knowing and learning mathematics for teaching* (pp. 66-68). Washington, D.C.: National Academy Press.
- Tuckman, B. (2002). *Manual de investigação em educação* (2ª edição) (A. R. Lopes, Trad.). Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian (Obra original publicada em 1994).
- Van Hiele, P. M. (1999). Developing geometric thinking through activities that begin with play. *Teaching Children Mathematics*, 5(6), 310-316.
- Veloso, E. (1999). Ensino da Geometria: Ideias para um Futuro Melhor. In E. Veloso, H. Fonseca, J. P. Ponte, & P. Abrantes (Orgs.), *Ensino da geometria no virar do milénio* (pp. 17-32). Lisboa: Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Departamento de Educação.
- Vollrath, H.-J. (1977). The understanding of similarity and shape in classifying tasks. *Educational Studies in Mathematics*, 8, 211-224.
- Wu, D.-B., & Ma, H.-L. (2005). A study of the geometric concepts of elementary school students at Van Hiele level one. In H. Chick, & J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th PME International Conference* (Vol. 4, pp. 329-336). Melbourne, Austrália: PME.
- Zaslavsky, O. (1991). In what ways are similar figures similar?. In F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the 15th PME International Conference* (Vol. 3, pp. 378-385). Assisi, Itália: PME.

Anexo 1 – Folha de identificação dos participantes

Número de Identificação _____

Género Masculino Feminino

Idade _____

Ano do Curso _____

Ciclo de estudos a prosseguir:

Educador de Infância Professor do 1.º Ciclo

Professor do 2.º Ciclo Professor do 1.º e 2.º Ciclo

Matemática escolar

9.º ano 10.º ano 11.º ano 12.º ano

Já frequentou alguma(s) disciplina(s) de Matemática de outro curso Superior? _____

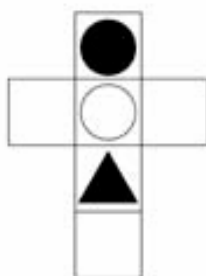
Quais? _____

NOTA:

Este teste é de resposta múltipla. As respostas deverão ser dadas assinalando a hipótese ou hipóteses correctas com um círculo à volta da opção.

Anexo 2 – Instrumento de recolha de dados (teste)

1



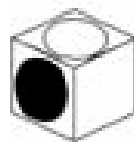
Qual dos seguintes cubos poderá ser construído a partir da figura acima apresentada?



1



2

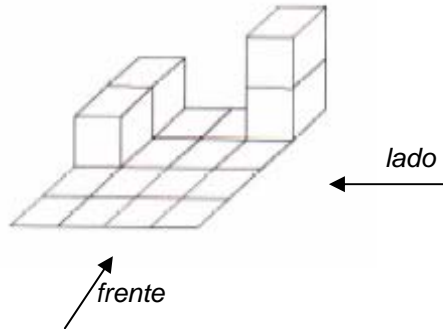


3

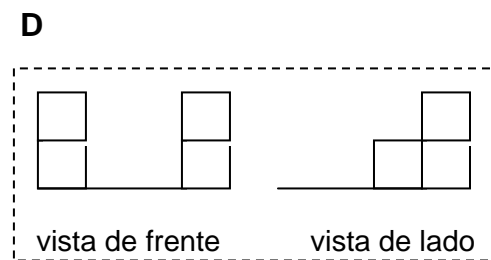
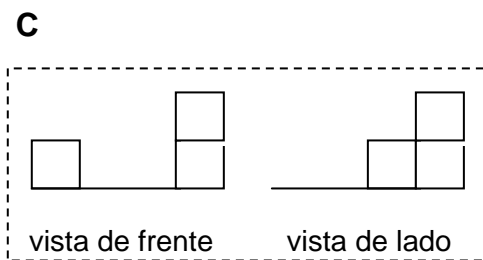
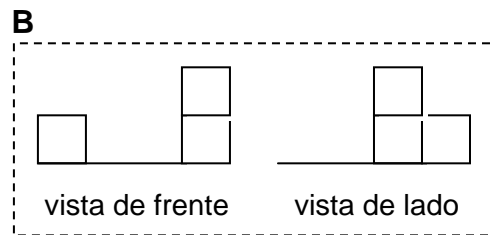
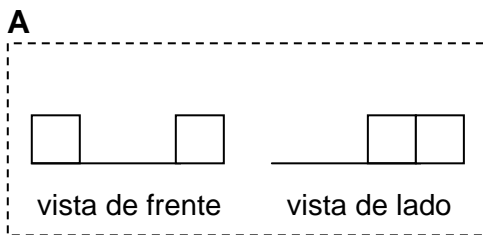


4

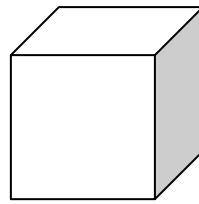
Considere a seguinte construção com cubos:



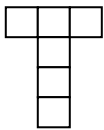
Qual a letra que corresponde às vistas da construção?



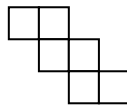
3



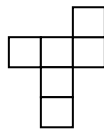
Quais das seguintes representações correspondem à planificação do cubo?



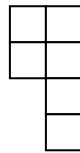
1



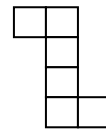
2



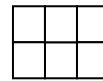
3



4

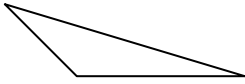
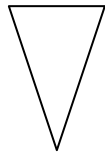
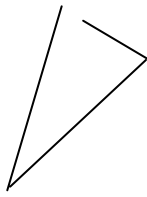
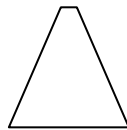
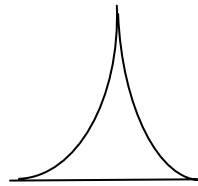


5



6

Das figuras apresentadas, identifique as que são triângulos.

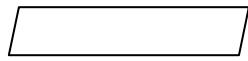
**1****2****3****4****5****6****7****8**

5

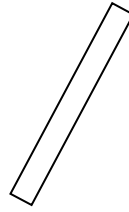
Das figuras apresentadas, identifique as que são rectângulos.



1



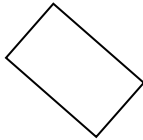
2



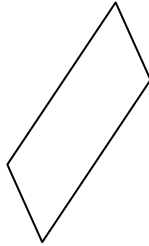
3



4



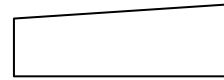
5



6

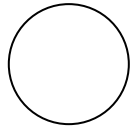
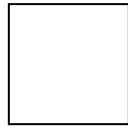
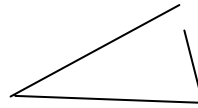
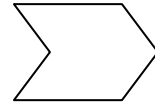
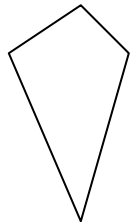
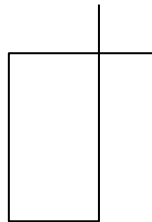
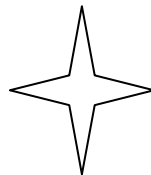
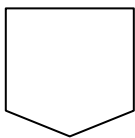
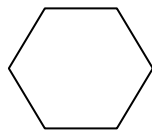
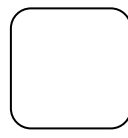
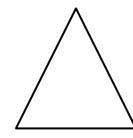


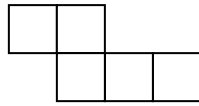
7



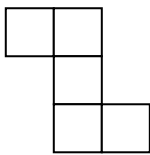
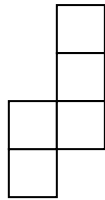
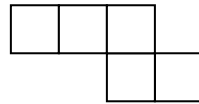
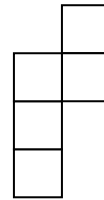
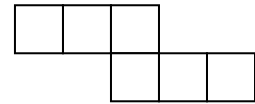
8

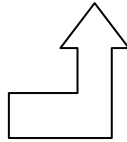
Das figuras apresentadas, identifique as que são polígonos.

**1****2****3****4****5****6****7****8****9****10****11****12**

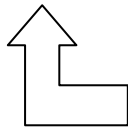
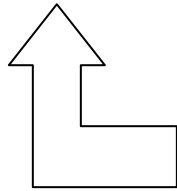
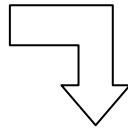
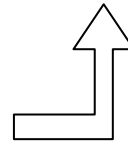
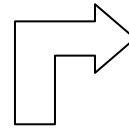


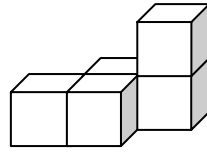
Das figuras seguintes, quais são congruentes (geometricamente iguais) com a apresentada?

**1****2****3****4****5**

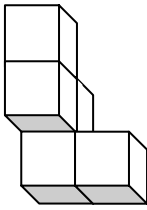


Das figuras seguintes, quais poderão ser geometricamente iguais à apresentada?

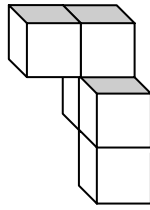
**1****2****3****4****5**



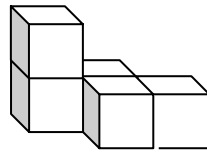
Das figuras seguintes, quais são congruentes com a apresentada?



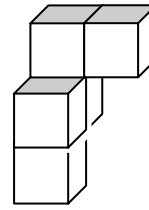
1



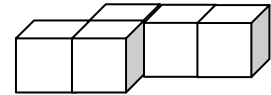
2



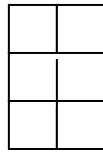
3



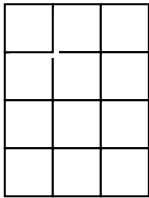
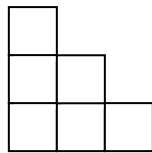
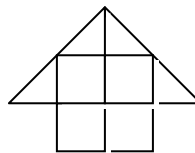
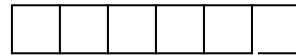
4

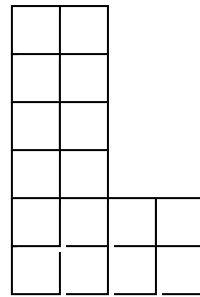
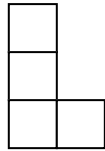


5



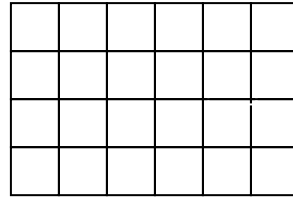
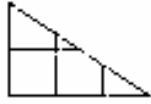
Das figuras seguintes, quais são equivalentes (ocupam a mesma porção de superfície) ao rectângulo em cima apresentado?

**1****2****3****4**



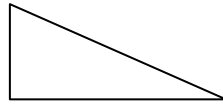
Quantos "L" pequenos são necessários para cobrir toda a superfície do "L" grande?

- a) 2
- b) 4
- c) 6
- d) 8

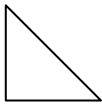
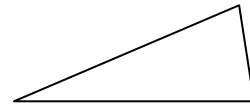


Quantos triângulos são necessários para construir uma figura equivalente ao rectângulo apresentado?

- a) 4
- b) 6
- c) 8
- d) 10



Que figuras podem ser semelhantes (ampliações ou reduções) ao modelo?

**1****2****3****4****5**



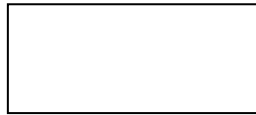
Que figuras podem ser ampliações ou reduções do modelo?



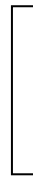
1



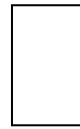
2



3



4



5

Quais dos pares de figuras geométricas são sempre semelhantes?

- a) Dois triângulos equiláteros
- b) Dois triângulos isósceles
- c) Dois triângulos rectângulos
- d) Dois rectângulos
- e) Dois quadrados
- f) Dois losangos

Assinala as afirmações verdadeiras para **TODOS** os triângulos:

- a) Todos os lados são iguais.
- b) Todos os ângulos são agudos.
- c) A soma da amplitude dos ângulos é sempre igual.
- d) Não possuem diagonais.

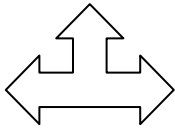
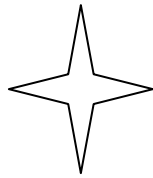
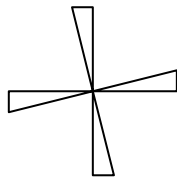
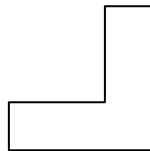
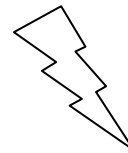
Assinala as afirmações verdadeiras para **TODOS** os rectângulos:

- a) Os lados opostos são diferentes.
- b) Todos os ângulos são rectos.
- c) As diagonais são iguais.
- d) As diagonais são perpendiculares.

Assinala as afirmações verdadeiras para **TODOS** os paralelogramos:

- a) Os lados opostos são paralelos.
- b) Os lados opostos são iguais.
- c) Todos os ângulos são rectos.
- d) As diagonais são iguais.

Que figuras têm simetria?

**1****2****3****4****5****6****7**

Que letras têm exactamente 2 eixos de simetria?



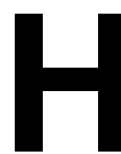
1



2



3



4



5

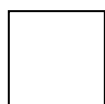
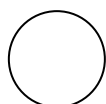
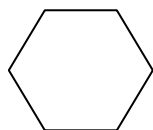
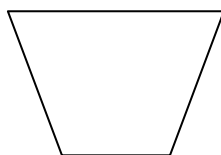


6



7

Que figuras têm pelo menos 4 eixos de simetria?

**1****2****3****4****5****6****7**

Anexo 3 – Folha de registo da apreciação do teste realizado

O que sentiu ao responder ao questionário?

Frustração

Sucesso

1	2	3	4	5
---	---	---	---	---

Desinteresse

Interesse

1	2	3	4	5
---	---	---	---	---

Dificuldade

Facilidade

1	2	3	4	5
---	---	---	---	---

Enfado

Estímulo

1	2	3	4	5
---	---	---	---	---

Obrigado pela sua colaboração.

Anexo 4 – Consentimento informado

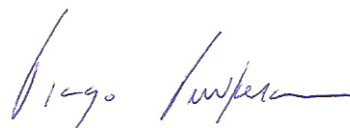
Exmos. Alunos

No âmbito do Mestrado em Educação Matemática, encontro-me a realizar uma investigação cujo objectivo é caracterizar o conhecimento em Geometria dos alunos em Formação Inicial em Educação Básica. Debruço-me, particularmente, sobre os conhecimentos adquiridos durante a vida escolar e académica dos alunos e preocupo-me em detectar as principais necessidades formativas que os futuros professores e educadores demonstram nesta fase de formação.

Solicito a vossa colaboração para serem efectivos participantes no estudo, respondendo ao presente teste. A vossa colaboração é muito importante, as respostas são confidenciais e só serão utilizadas para fins estatísticos relacionados com a investigação em curso. Ser-vos-á atribuído um número de identificação para efeitos de controlo. O número de identificação servirá para realizar uma eventual entrevista posterior, caso seja necessário esclarecer questões pertinentes relacionadas com a investigação e caso os participantes escolhidos pretendam colaborar.

A participação é voluntária e anónima.

Obrigado pela vossa colaboração,



Tiago Tempera

Novembro, 2009

