

INSTITUTO POLITÉCNICO DE LISBOA  
INSTITUTO SUPERIOR DE CONTABILIDADE  
E ADMINISTRAÇÃO DE LISBOA



MODELOS DEA PARA DADOS  
NEGATIVOS  
APLICAÇÃO AO SETOR BANCÁRIO

---

Melissa Natalie Semedo Borges Moreira

VERSÃO DEFINITIVA

Lisboa, fevereiro de 2023



INSTITUTO POLITÉCNICO DE LISBOA  
INSTITUTO SUPERIOR DE CONTABILIDADE E  
ADMINISTRAÇÃO DE LISBOA

MODELOS DE A PARA DADOS  
NEGATIVOS  
APLICAÇÃO AO SETOR BANCÁRIO

---

Melissa Natalie Semedo Borges Moreira

Dissertação submetida ao Instituto Superior de Contabilidade e Administração de Lisboa para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do índice de Mestre em Contabilidade e Gestão das Instituições Financeiras, realizado sob a orientação científica do Professor Doutor José Manuel de Oliveira Pires, Professor Coordenador da área científica de Matemática.

Constituição do Júri:

Presidente: Prof. Doutora Ana Maria Sotomayor

Arguente: Prof. Doutora Ana Maria Paias

Vogal: Prof. Doutor José Manuel de Oliveira Pires

Lisboa, fevereiro de 2023

Declaro ser a autora desta dissertação, que constitui um trabalho original e inédito, que nunca foi submetido (no seu todo ou qualquer das suas partes) a outra instituição de ensino superior para a obtenção de um índice académico ou outra habilitação. Atesto ainda que todas as citações estão devidamente identificadas. Mais acrescento que tenho consciência de que o plágio – a utilização de elementos alheios sem referência do autor – constitui uma grave falta de ética, que poderá resultar na anulação da presente dissertação.

*“An investment in knowledge pays the best interest.”*

- Benjamin Franklin

## **Agradecimentos**

Esta dissertação é o culminar de um longo e desafiante percurso de muito trabalho, esforço e dedicação. Concluir mais esta etapa académica, enche-me de orgulho e satisfação e, por isso, agradeço a Deus.

Agradeço aos meus pais que sempre me encorajaram a seguir com este projeto, fazendo-se presentes com palavras de amor e carinho mesmo estando tão longe.

Ao meu orientador, Doutor José Manuel de Oliveira Pires, palavras não chegam para agradecer. Obrigada pelo interesse demonstrado, pela disponibilidade, pelo rigor e profissionalismo, pelo conhecimento transmitido e incentivo para que este trabalho fosse concluído.

Aos meus amigos, obrigada pela vossa amizade, por todas as palavras de conforto e de incentivo, por todas as vezes que estiveram presentes e me ajudaram a ultrapassar as adversidades que foram surgindo. O vosso apoio e todos os momentos de alegria e descontração foram importantes durante este percurso.

Agradeço, ainda, ao Instituto Superior de Contabilidade e Administração de Lisboa (ISCAL) e a todos os Professores e colegas com quem me cruzei durante este período. Todo o conhecimento transmitido contribuiu para a concretização deste objetivo.

A todos, os meus sinceros agradecimentos.

## Resumo

A metodologia DEA consiste numa técnica não paramétrica utilizada para avaliar a eficiência relativa de entidades homogêneas, designadas por DMUs (*Decision Making Units*), essencialmente através de modelos radiais e não radiais. Esses modelos, que podem ser aplicados em diversas áreas, permitem obter um índice de eficiência e classificar as DMUs como eficientes e não eficientes. A maior parte das discussões e aplicações da DEA (*Data Envelopment Analysis*) assume que os valores dos *inputs* e *outputs* são positivos ou, quando muito, não negativos. Porém, existem aplicações onde é necessário tratar com dados negativos, como é o caso de lucros ou dados que descrevem alterações ocorridas de um período para outro, por exemplo.

De forma a contornar esta limitação, alguns modelos têm sido propostos, bem como adaptações de modelos já existentes. Esta dissertação tem por objetivo apresentar um estudo sobre os principais modelos propostos na literatura DEA que permitem tratar dados negativos e visa, também, aplicar esses modelos à avaliação de dezanove Instituições Bancárias que operavam em Portugal durante o ano de 2020.

Palavras-chave: DEA; DMUs; Eficiência; Dados negativos; *Benchmark*.

## Abstract

*The DEA methodology is a non-parametric technique used to evaluate the relative efficiency of homogeneous entities, called Decision Making Units (DMUs), through radial and non-radial models. These models, which can be applied in various areas, allow an efficiency index to be obtained and DMUs to be classified as efficient or non-efficient. Most discussions and applications of DEA (Data Envelopment Analysis) assume that the values of inputs and outputs are positive or non-negative, at most. Yet, there are applications where it is necessary to deal with negative data, such as profits or data describing changes occurring from one period to another, for example.*

*To overcome this limitation, some models have been proposed, as well as adaptations of already existing models. This dissertation aims to present a study on the main models proposed in the DEA literature that allow to manage negative data and aims to apply these models to the evaluation nineteen Banking Institutions operating in Portugal during the year of 2020.*

*Keywords: DEA; DMUs; Efficiency; Super-efficiency; Negative data; Benchmark.*

# Índice

Agradecimentos.....	v
Resumo.....	vi
Abstract.....	vii
Índice.....	viii
Índice de Tabelas .....	x
Índice de Figuras.....	xi
Lista de Abreviaturas.....	xii
<b>1. Introdução .....</b>	<b>1</b>
<b>2. Metodologia DEA .....</b>	<b>3</b>
2.1. Introdução.....	3
2.2. Metodologia DEA.....	4
2.3. Tipos de eficiência na DEA.....	6
2.4. Modelos na DEA .....	9
2.4.1. Modelos Radiais .....	10
2.4.2. Modelos não radiais .....	11
2.5. Propriedades da medida de eficiência DEA.....	12
<b>3. Modelos DEA para dados negativos.....</b>	<b>14</b>
3.1. Introdução.....	14
3.2. Modelo BCC .....	15
3.3. Modelo aditivo.....	20
3.4. Modelo RAM.....	22
3.5. Modelo BAM.....	24
3.6. Modelo RDM (Portela, Thanassoulis e Simpson (2004)).....	26
3.7. Modelo MSBM (Sharp, Meng e Liu (2007)).....	28
3.8. Modelo BP-SBM (Tone, Chang e Wu (2020)).....	31
<b>4. Estudo de um caso prático: aplicação ao setor bancário.....</b>	<b>38</b>
4.1. Introdução.....	38
4.2. Seleção dos dados e dos modelos .....	39
4.3. Resultados e respectiva análise.....	41
<b>5. Conclusões.....</b>	<b>50</b>
<b>Referências bibliográficas .....</b>	<b>52</b>

<b>APÊNDICES.....</b>	<b>56</b>
APÊNDICE A – Dados modificados para o modelo BCC-I.....	56
APÊNDICE B – Dados modificados para a aplicação do modelo BP-SBM .....	57

## Índice de Tabelas

Tabela 4.1 – Dados relativos aos <i>inputs</i> e <i>outputs</i> .....	41
Tabela 4.2 – Resultados obtidos pelos modelos BCC-I, RAM, BAM, RDM, MSBM e BP-SBM .....	42
Tabela 4.3 – Instituições bancárias ineficientes e os respetivos <i>Benchmarks</i> obtidos pelos modelos BCC-I, RAM e BAM.....	43
Tabela 4.4 – Instituições bancárias ineficientes e os respetivos <i>Benchmarks</i> obtidos pelos modelos RDM, MSBM e BP-SBM .....	44
Tabela 4.5 – Número de vezes que uma instituição bancária eficiente é referência pelos modelos BCC-I, RAM, BAM, RDM, MSBM e BP-SBM .....	45
Tabela 4.6 – Resultado obtido pelo modelo de super-eficiência BP-SBM para retornos variáveis de escala .....	47
Tabela 4.7 – Resultado obtido pelo modelo de super-eficiência BP-SBM para retornos constantes de escala .....	48

## Índice de Figuras

Figura 3.1 – Representação dos sistemas de coordenadas cartesianas com o ponto base original e com o ponto base modificado como origem .....	33
Figura 4.1 – Gráfico dos <i>Rankings</i> obtidos pelos modelos de super-eficiência BP-SBM para retornos variáveis e constantes de escala.....	49

## Lista de Abreviaturas

APB – Associação Portuguesa de Bancos

BAM – Bounded Adjusted Measure

BCC – Banker, Charnes e Cooper

BP-SBM – Base Point Slacks-Based Measure

CCR – Charnes, Cooper e Rhodes

CRS – Constant Returns to Scale

DEA – Data Envelopment Analysis

DMU – Decisions Making Units

MSBM – Modified Slack Based Measure

NIRS – Non-Increasing Returns to Scale

NORS – Non-Decreasing Returns to Scale

RAM – Rang Adjusted Measure

RDM – Range Directional Model

SBM – Slack Based Measure

VRS – Variable Returns to Scale

## 1. Introdução

As significativas mudanças no ambiente empresarial fazem com que as empresas procurem cada vez mais modelos de gestão eficientes e eficazes, capazes de oferecer aos seus gestores ferramentas que permitam identificar, avaliar e gerir os seus riscos, buscando oportunidades de melhoria, de forma a acumular valor à organização e obter vantagens competitivas.

A avaliação de desempenho organizacional surge como mecanismo para enfrentar tais mudanças, através do alinhamento entre os objetivos da organização e a estratégia a adotar. No entanto, a simples comparação entre os objetivos definidos e os que efetivamente foram conseguidos pode fornecer informações enviesadas no sentido em que as atividades das organizações podem ser afetadas por diversos fatores externos, resultando em objetivos definidos com base em hipóteses simplificadoras que podem não corresponder a realidade.

Desta forma, a avaliação de desempenho pode ser feita com base em indicadores de desempenho que são aplicados de acordo com a necessidade e singularidade de cada organização, com o objetivo de mensurar não só os lucros da organização, como também perceber se há qualidade na gestão ou se é preciso redirecionar as estratégias de forma a otimizar os processos e resultados.

A avaliação de desempenho tradicional baseia-se apenas em indicadores de carácter financeiro. Contudo, estes apresentam algumas limitações no que toca às estratégias adotadas pelas organizações. No sentido de melhorar essas limitações, várias metodologias têm sido propostas, entre as quais a metodologia DEA (*Data Envelopment Analysis*), que constitui uma técnica não paramétrica, baseada na programação linear, revelando-se assim uma importante aplicação desta.

A metodologia DEA foi formalmente introduzida por Charnes, Cooper e Rhodes (1978), na sequência do trabalho desenvolvido por Farrell (1957), e permite obter a eficiência relativa de entidades homogéneas que usam o mesmo tipo de recursos (*inputs*) na produção do mesmo tipo de produtos (*outputs*). Essas entidades podem ser da mais diversa natureza e são por isso usualmente designadas de DMUs (*Decisions Make Units*).

De acordo com Tone, Chang e Wu (2020), uma das grandes limitações apontadas aos modelos clássicos da DEA é a impossibilidade de trabalhar com valores de *inputs* e/ou *outputs* negativos. Contudo, existem aplicações onde os *inputs* e/ou *outputs* assumem valores negativos, como é o

caso de dados relativos ao lucro que pode ser positivo ou negativo. No sentido de contemplar dados desta natureza, alguns modelos têm sido desenvolvidos no âmbito da DEA.

A presente dissertação tem como objetivo apresentar um estudo sobre modelos da DEA que permitem obter a eficiência relativa de conjunto de DMUs com *inputs* e/ou *outputs* negativos, com aplicação ao setor bancário.

Assim, para além do presente capítulo, esta dissertação engloba mais 4 capítulos. O capítulo 2, onde será feita uma breve revisão da literatura existente sobre o tema em questão, dando ênfase à avaliação de desempenho como uma medida de eficiência e a sua importância no contexto da avaliação de organizações. Também nesse capítulo serão apresentados o conceito, propriedades e os principais tipos de eficiência, bem como os modelos radiais e não radiais no âmbito da DEA.

O capítulo 3, onde se apresentam os principais modelos DEA capazes de tratar com dados negativos, abordando o contexto do seu surgimento, as suas características e a respetiva medida de eficiência que cada modelo fornece.

O capítulo 4, onde se apresenta o estudo de um caso prático, que visa avaliar a *performance* de dezanove instituições bancárias que operavam em Portugal no ano de 2020, utilizando os modelos apresentados no capítulo anterior.

Por fim, o capítulo 5, onde são apresentadas as principais conclusões obtidas com a realização deste trabalho.

## 2. Metodologia DEA

### 2.1. Introdução

A avaliação de desempenho constitui um tema muito atual e cada vez mais pertinente no seio das organizações, incluindo as de natureza empresarial. Face à competitividade dos mercados e à evolução da sociedade, as empresas têm sofrido uma constante reestruturação que passa a estar incorporada no quotidiano da grande maioria delas, proporcionando fortemente a busca por metodologias e posturas de gestão que melhor se adequem às exigências do mercado. Neste sentido, surgiram novos desafios que fizeram com que se desenvolvessem novos instrumentos de gestão, controlo e de avaliação de desempenho. Estes instrumentos permitem acompanhar os resultados por comparação com os objetivos, intervindo em ações de correção de possíveis desvios para que os objetivos possam, efetivamente, ser alcançados. Em casos de alteração de conjuntura, por exemplo, esses instrumentos podem levar a gestão a alterar a estratégia e/ou os objetivos da organização.

Segundo Brealey e Myers (1998), os sistemas de avaliação de desempenho permitem obter informações que contribuem para melhorar a qualidade da gestão e tomada de decisões. Assim, o desempenho de uma organização está diretamente relacionado com a capacidade da organização em conseguir medir e analisar os dados, o que sugere a existência de sistemas de informação que contemplem o processo de gestão e proporcionem informação fidedigna quanto ao grau de sucesso da estratégia.

Ghalayini e Noble (1996) defendem que a evolução da avaliação de desempenho organizacional deu-se em duas fases. Na primeira fase, entre 1880 e 1980, a avaliação de desempenho enfatizava medidas de desempenho voltadas, sobretudo, para o apuramento de resultados financeiros e contabilidade de custos. No entanto, este modelo revelou-se insuficiente para uma boa avaliação de desempenho uma vez que diz respeito a acontecimentos passados e não inclui medidas de desempenho não financeiras.

Kaplan e Norton (1996) afirmam que os indicadores financeiros não conseguem captar todos os fatores internos e externos que podem influenciar os resultados das organizações. A maximização desses resultados poderia ser alcançada com o reconhecimento das necessidades das organizações, em oposição à utilização apenas de rácios financeiros na avaliação de desempenho (Chiavenato, 2004; Watling 2000).

A segunda fase, com início em 1980, caracteriza-se pela forte utilização de indicadores não financeiros mais direcionados para a qualidade, inovação, flexibilidade e rapidez dos processos organizacionais que, combinados com indicadores financeiros, são capazes de fornecer uma visão global e alcançar uma avaliação mais completa do desempenho organizacional.

A combinação da utilização de indicadores financeiros e não financeiros permitiu que surgissem novos modelos capazes de melhorar a avaliação de desempenho organizacional, inclusive modelos baseados em técnicas matemáticas. Esses modelos podem ser classificados como modelos paramétricos, baseados em métodos estatísticos, ou modelos não paramétricos, baseados em modelos de investigação operacional.

Dentro dos modelos não paramétricos, encontra-se a DEA (*Data Envelopment Analysis*), uma metodologia baseada na programação linear. Esta metodologia surgiu na sequência da incapacidade revelada pelos métodos paramétricos, nomeadamente os modelos de regressão, em dar resposta à avaliação de organizações que utilizassem vários recursos (*inputs*) para produzir vários produtos (*outputs*) (Cooper, 2005).

O resto deste capítulo está estruturado como se segue. Na seção 2.2, é feita uma breve referência à história e ao contexto do surgimento da metodologia DEA. Na seção 2.3, apresentam-se os tipos de eficiência na DEA. Na seção 2.4, faz-se referência aos tipos de modelos na DEA. Por último, na seção 2.5, apresentam-se as propriedades e principais características de uma medida de eficiência DEA.

## **2.2. Metodologia DEA**

A metodologia DEA consiste numa técnica não paramétrica baseada em modelos de programação matemática, mais especificamente modelos de programação linear, e tem por objetivo a avaliação de desempenho organizacional.

O conceito de fronteira não paramétrica foi inicialmente abordado por Farrell (1957), na sua obra *The Measurement of Productive Efficiency in The Journal of the Royal Statistical Society*. Segundo este autor, a eficiência técnica é avaliada através da curva do envelope e as combinações de *inputs* e *outputs* só seriam eficientes se estivessem na fronteira de produção.

Mais tarde, após 20 anos de quase total esquecimento, o trabalho de Farrell foi recuperado por Edward Rhodes no âmbito da sua tese de doutoramento, supervisionada por W. W. Cooper,

destinada a avaliar os resultados do programa de acompanhamento de estudantes carenciados em escolas públicas dos Estados Unidos da América (EUA).

No âmbito dessa tese surgiu, então, o primeiro modelo de programação linear, proposto por Charnes, Cooper e Rhodes (1978), para medir a eficiência relativa de um conjunto de entidades homogêneas e independentes, designadas por DMUs (*Decision Making Units*), que usam os mesmos recursos na produção dos mesmos produtos, mas em quantidades diferentes. Uma DMU pode ser qualquer tipo de organização como por exemplo, bancos, hospitais, equipas de manutenção, escolas, ou qualquer unidade cuja eficiência se pretende determinar. No modelo original de Charnes *et al.* (1978), a eficiência é obtida usando a soma ponderada dos *inputs* e a soma ponderada dos *outputs*.

De acordo com Shen, Zhang, Liu & Yang (2016), a ideia base da DEA é identificar a fronteira de produção sobre a qual as DMUs são consideradas eficientes e compará-las com as DMUs que não estão nessa fronteira, de forma a estimar o índice de eficiência para estas últimas, bem como determinar as DMUs eficientes que são referência (*benchmark*) para que as ineficientes se tornem eficientes.

Na perspectiva dos autores Cooper, Seiford, Tone e Zhu (2007), a medida de eficiência da DEA resulta da comparação do desempenho de cada DMU com o melhor desempenho das restantes DMUs em análise, tendo em conta que essas entidades usam os mesmos recursos para produzir os mesmos resultados e, por isso, é considerada uma medida de eficiência relativa.

O modelo proposto por Charnes, Cooper e Rhodes (1978) pode contemplar duas abordagens quanto à orientação. Pode ser orientado para *inputs* ou, por outro lado, orientado para os *outputs*. Na abordagem orientada para *inputs*, uma unidade ineficiente torna-se eficiente com a redução proporcional e comum dos *inputs* enquanto os *outputs* são mantidos constantes. Já na abordagem orientada para *outputs*, acontece o oposto, isto é, o nível de *inputs* é fixado e a eficiência é atingida através da expansão proporcional e comum dos *outputs*.

A metodologia DEA tem sido aplicada em diversas áreas como se pode verificar nos trabalhos desenvolvidos por Emrouznejad *et al.* (2008), por Liu *et al.* (2013) e por Emrouznejad e Yang (2018). Os primeiros referem a banca, a educação, a saúde e a eficiência hospitalar como as áreas de maior aplicação. Os segundos referem que as várias áreas de maior aplicação têm sido a banca, a assistência médica, a agricultura, o transporte e a educação. Os últimos referem que

as áreas da agricultura, banca, cadeias de abastecimento, transportes e de políticas públicas constituem o top 5 das áreas de aplicação da DEA nos anos de 2015 e 2016.

### **2.3. Tipos de eficiência na DEA**

Como já foi referido, objetivo principal da metodologia DEA consiste em determinar, entre um conjunto de DMUs, as que estão na fronteira de eficiência e, deste modo diferenciar as eficientes das não eficientes. Neste sentido, revela-se importante a compreensão do conceito de eficiência, bem como os diferentes tipos de eficiência mais usados no âmbito da DEA.

A eficiência refere-se à capacidade de utilizar o mínimo de recursos disponíveis durante um processo de produção para alcançar um objetivo previamente estabelecido, otimizando desta forma o uso dos recursos disponíveis. De acordo com Drucker (1999), a eficiência corresponde ao ato de realizar corretamente qualquer tipo de processo. Assim, é possível diminuir os custos, o tempo, as perdas e os desperdícios associados ao processo de produção.

Muitas vezes, o conceito de eficiência confunde-se com o conceito de eficácia. No entanto, será importante referir que uma organização pode ser eficiente e não ser eficaz e vice-versa. A eficácia está relacionada com os resultados obtidos em contrapartida com os resultados propostos. Isto é, um sistema eficaz é aquele que consegue atingir ou superar uma meta pré-definida. Segundo Kassai (2002), a eficácia está relacionada com o cumprimento dos objetivos propostos e, quanto mais perto um sistema estiver de uma meta traçada, mais eficaz ele é. Por outro lado, o sistema é eficiente caso tenha o melhor desempenho possível com os recursos disponíveis.

O conceito de eficiência pode ser aplicado a vários tipos de sistemas sendo um dos mais importantes os sistemas produtivos, que se caracterizam por produzirem um conjunto de produtos (*outputs*) a partir de um conjunto de recursos (*inputs*), dando origem ao conceito de eficiência produtiva. Assim, a eficiência produtiva está diretamente relacionada com o conceito de produtividade, que é um indicador da eficiência de um sistema produtivo e representa a razão entre a quantidade produzida (*output*) e a quantidade disponível para obter essa produção (*input*) (Coelli, *et al.* 2005). Por sua vez, a eficiência representa uma medida relativa, uma vez que faz a comparação entre a produção atual, dado os recursos disponíveis, com a produção que poderia ser alcançada, tendo em conta os mesmos recursos. Esta medida é expressa por valores entre 0 e 1 enquanto a produtividade é um índice que pode assumir qualquer valor real.

A produtividade é um instrumento de gestão importante que permite comparar organizações que desenvolvam atividades semelhantes, analisando os resultados de forma a perceber as razões que levam umas a serem mais produtivas do que outras e a ponderar decisões futuras com base nesta medida.

A metodologia DEA, como já se viu, constitui uma técnica não paramétrica baseada numa fronteira de eficiência estimada a partir dos dados. A fronteira de eficiência é definida como sendo uma curva de máxima produtividade onde se encontram todas as DMUs consideradas eficientes, enquanto as ineficientes se encontram abaixo dessa fronteira (Kassai, 2002). Neste sentido, revela-se necessário perceber o conceito de curvas de produção e a sua importância na relação entre *inputs* e *outputs*.

As curvas de produção representam a formulação matemática que descreve a fronteira de eficiência, uma vez que indica a quantidade máxima de produtos que podem ser produzidos, dada uma determinada quantidade de recursos. Uma curva de produção pode, ou não, ser afetada pela escala de produção, contemplando:

- Retornos constantes de escala, quando um acréscimo nos *inputs* provoca um acréscimo proporcional nos *outputs*;
- Retornos crescentes de escala, quando um acréscimo nos *inputs* provoca um acréscimo nos *outputs* maior que o proporcional;
- Retornos decrescentes de escala, quando um acréscimo nos *inputs* provoca um acréscimo nos *outputs* menor que o proporcional.

A eficiência tem sido objeto de muito estudo e o primeiro trabalho neste campo deve-se ao italiano Vilfredo Pareto (1906). O conceito de eficiência segundo Pareto deu um grande contributo para a Economia Neoclássica e incentivou novas linhas de pesquisa. O trabalho desenvolvido por Pareto (1906) contesta a possibilidade de comparações interpessoais de utilidade e estabelece um novo critério de bem-estar. Segundo esse critério, as comparações de bem-estar só poderiam ser realizadas entre situações cuja mudança de uma situação para a outra não envolvesse transferências de utilidade entre os indivíduos. Assim, o seu critério de avaliação de bem-estar pressupõe:

- Superioridade de Pareto – um estado é superior a outro se for possível melhorar o bem-estar de pelo menos um indivíduo sem prejudicar os restantes.

- Ótimo de Pareto – não é possível melhorar o bem-estar de um indivíduo, sem que os demais sejam prejudicados.

Ainda no contexto do bem-estar segundo Pareto (1906), todo o equilíbrio geral de economias em concorrência perfeita maximiza o bem-estar da sociedade.

O critério de Pareto foi adaptado ao contexto produtivo por Koopmans (1951), dando origem ao conceito de eficiência técnica. Este conceito é frequentemente designado por eficiência Pareto-Koopmans e estabelece que uma organização é eficiente se, e só se:

- Nenhum dos *outputs* pode ser aumentado sem que exista a necessidade de reduzir algum outro *output* ou aumentar algum outro *input*;
- Nenhum dos *inputs* pode ser reduzido sem que exista a necessidade de aumentar algum outro *input* ou reduzir outro *output*.

Tendo em conta o exposto, a definição de Koopmans sugere a comparação dos níveis de recursos e produtos utilizados com os níveis ótimos, sendo que por vários anos o maior problema em mensurar a eficiência técnica era a determinação dos níveis ótimos.

O conceito de eficiência técnica também foi abordado por Debreu (1951) e, segundo Cooper, Seiford, Tone e Zhu (2007), trata-se de uma medida radial, isto é, a procura da melhor combinação de *inputs* e *outputs* possível está restringida por uma regra de proporcionalidade. Isto significa que, utilizando a medida de Debreu (1951), a localização de uma combinação de *inputs* e *outputs* na fronteira de produção é condição suficiente para que seja considerada tecnicamente eficiente, o que não acontece com a medida de Pareto-Koopmans, pois pode existir uma combinação localizada na fronteira de produção, para a qual ainda possa ser possível melhorar a quantidade de *inputs* ou *outputs*.

Para eliminar essa deficiência, foram apresentadas várias medidas alternativas para obtenção da eficiência, podendo seguir diversas abordagens, dentre as quais a minimização de *inputs* ou maximização de *outputs*. Em ambos os casos, calcula-se a eficiência técnica que, na ótica de Farrell (1957), mede a intensidade dos desperdícios verificados no processo produtivo. Na abordagem orientada aos recursos (*inputs*), diz-se que uma entidade é eficiente quando não é possível reduzir os recursos sem uma consequente redução da produção. No caso da abordagem orientada para a produção (*outputs*) não é possível aumentar a produção sem que exista um aumento dos recursos.

Os conceitos, princípios e fundamentos mais importantes da DEA foram definidos por Farrell (1957), tais como eficiência técnica, medida radial, fronteira de eficiência baseada nos dados observados, a ideia do *benchmarking* e a utilização de múltiplos recursos e múltiplos produtos.

Adicionalmente ao conceito de eficiência técnica e medida radial, Farrell (1957) propôs a utilização de dados reais de entidades que operam no mercado em contraposição à construção de uma função de produção teórica para avaliar a eficiência. Para tal, criam-se entidades fictícias com base em dados empíricos, dando origem a funções de produção empíricas. Mais do que isso, Farrell (1957) sugeriu que a eficiência técnica de uma entidade deve ser comparada à eficiência da melhor entidade observada no mercado, dando origem ao conceito de *benchmark*, embora não denominado desta forma na altura.

Baseado nos trabalhos de Pareto (1906), Koopmans (1951) e Debreu (1951), Farrell (1957) também introduziu o conceito de eficiência alocativa, que reflete a capacidade de um sistema produtivo para selecionar a combinação de *inputs* tecnicamente eficientes e com a melhor combinação de custos totais. Desta forma, podem existir sistemas que sejam eficientes em termos técnicos, mas não o são do ponto de vista alocativo. Com base nisto, o autor introduziu o conceito de medida de eficiência global (ou produtiva), que resulta da combinação da eficiência técnica com a eficiência alocativa.

## **2.4. Modelos na DEA**

No contexto da metodologia DEA (*Data Envelopment Analysis*), são calculados dois tipos de medida de eficiência conforme os modelos utilizados. Basicamente, existem dois tipos de modelos na DEA, radiais e não radiais, que dão origem às respetivas medidas de eficiência radial e não radial.

São designados desta forma devido a abordagem que cada modelo aplica no cálculo da eficiência. Enquanto os modelos radiais consideram alterações comuns e na mesma proporção em todos os *inputs* ou *outputs*, os modelos não radiais tratam diretamente com as folgas ou desvios, que representam o excesso de *inputs* ou o défice de *outputs* (Tone, 2015). Nas duas subseções seguintes faz-se uma breve referência aos modelos radiais e não radiais mais conhecidos e utilizados na metodologia DEA.

### 2.4.1. Modelos Radiais

Os modelos radiais mais destacados na metodologia DEA são os modelos CCR e BCC, cujas designações derivam dos próprios autores que os propuseram, Charnes, Cooper e Rhodes (1978) e Banker, Cooper e Charnes (1984), respetivamente.

O modelo CCR considera que as entidades avaliadas operam sob retornos constantes de escala, ou seja, uma variação nos *inputs* (recursos) provoca uma variação proporcional e comum nos *outputs* (produtos), daí também ser conhecido como modelo CRS (*Constant Returns to Scale*).

O modelo BCC constitui uma generalização do modelo CCR por forma a considerar retornos variáveis de escala, ou seja, uma alteração nos *inputs* provoca uma alteração maior ou menor do que o proporcional nos *outputs*, por isso, é também conhecido como modelo VRS (*Variable Returns to Scale*).

Como se referiu, os modelos radiais baseiam-se nas alterações de *inputs* ou *outputs* para que DMUs ineficientes possam atingir a eficiência. Assim, cada um dos modelos acima referidos, contempla duas versões: uma, orientada para os *inputs*, em que a eficiência é atingida minimizando os *inputs* e fixando um certo nível de *outputs* e outra, orientada para os *outputs*, em que a eficiência é atingida maximizando os *outputs* sem aumentar o nível de *inputs*. A decisão quanto à orientação dos modelos depende, em geral, do controlo que o decisor tem sobre os *inputs* e *outputs* e do contexto económico.

Tal como se refere em Cooper, Seiford e Tone (2007), uma medida é fortemente eficiente ou eficiente segundo Pareto-Koopmans se, e só se, satisfaz as seguintes condições:

- O valor da solução ótima do modelo é igual a 1, e
- As variáveis de desvio são iguais a zero.

A primeira condição é também referida como eficiência radial ou eficiência técnica, uma vez que um valor ótimo inferior a 1 indica que todos os *inputs* podem ser simultaneamente reduzidos sem alterar a proporção em que são utilizados (Cooper, Seiford e Tone, 2007).

Uma desvantagem dos modelos radiais é a de fornecerem um índice de eficiência que não incorpora as ineficiências devidas a desvios ou folgas correspondentes aos excessos de *inputs* ou aos défices de *output*. Tal facto pode fazer com que DMUs sejam classificadas de eficientes quando na realidade não são. Por forma a ultrapassar essa desvantagem, vários modelos,

designados de modelos não radiais, têm sido desenvolvidos e propostos na literatura da DEA. Tais modelos são referidos na subseção seguinte.

#### **2.4.2. Modelos não radiais**

Os modelos não radiais abandonam a hipótese de alterações proporcionais e comuns nos *inputs* ou *outputs*, considerada nos modelos radiais, e tratam diretamente com os desvios relativos aos excessos de *input* e aos défices de *output* na obtenção do índice de eficiência. Nestes modelos, a fronteira de eficiência pode ser atingida através da alteração simultânea de *inputs* e *outputs* e, nesse caso, são designados de não orientados. Os modelos não radiais podem também ser orientados para *inputs* ou para *outputs* removendo as variáveis de desvio relativas aos défices de *output* e ao excesso de *input*, respetivamente. Dentro dos modelos não radiais mais conhecidos estão os modelos Aditivo, SBM (*Slack Based Measure*) e o modelo relativo à medida de Russel, por exemplo.

O modelo aditivo foi proposto por Charnes, Cooper, Golany e Stutz (1985) e permite identificar entidades que são fortemente eficientes, isto é, satisfazem o critério de Pareto-Koopmans. No entanto, este modelo não permite calcular um índice de eficiência e pode não ser adequado na identificação de DMUs de referência, uma vez que pode identificar DMUs de referência que estejam muito afastadas da DMU em avaliação. Não obstante, tem sido um modelo muito importante e servido de base para o desenvolvimento de outros modelos não radiais.

Contrariamente ao que acontece nos modelos radiais, o modelo aditivo não é invariante às unidades de medida, isto é, uma alteração nas unidades de medida de um *input* ou *output* provoca uma alteração do valor da função objetivo.

O modelo SBM apresentado por Tone (2001) difere do modelo aditivo apenas na função objetivo que é alterada por forma a fornecer uma medida de eficiência, que o modelo aditivo não fornece como já se referiu. Como os autores mostram, a medida de eficiência fornecida por este modelo pode ser interpretada como um produto de ineficiências associadas aos *inputs* e *outputs*. Além de identificar DMUs eficientes e ineficientes, a medida SBM oferece às ineficientes ferramentas para identificar planos de produção eficientes com a eliminação das folgas existentes. Destaca-se, ainda, a invariância às unidades de medida do modelo SBM.

A medida de Russell, na sua versão não orientada melhorada, proposta por Pastor, Ruiz e Sirvent (1999) é equivalente à versão não orientada do modelo SBM, como se mostra em Cooper, Seiford, Tone e Zhu (2007).

## 2.5. Propriedades da medida de eficiência DEA

A metodologia DEA, tal como já se referiu anteriormente, constitui uma técnica não paramétrica utilizada para a obtenção de índices de eficiência e, por conseguinte, avaliação e monitorização da eficiência de entidades homogêneas. Deste modo, a DEA constitui uma importante ferramenta no auxílio aos gestores na tomada de decisão, tendo como referência o comportamento dos seus concorrentes, e permite identificar possíveis concorrentes que possam ser considerados tendo em conta os diversos cenários analisados.

Nesta metodologia define-se uma fronteira de eficiência para um determinado conjunto de entidades, considerando a relação ótima entre recursos e produtos. Esta propriedade deu origem ao próprio nome DEA porque, em linguagem matemática, diz-se que tal fronteira “envolve” os pontos à sua volta, sendo esses pontos a combinação de *inputs* e *outputs* para cada entidade (Cooper, Seiford e Tone, 2007).

Segundo Färe e Lovell (1978), uma medida que seja considerada tecnicamente eficiente deverá operar na sua função de produção, embora esta não seja uma condição suficiente. Da mesma forma, a medida será considerada tecnicamente ineficiente se operar abaixo da sua função de produção, não sendo, também, condição necessária. Portanto, o conceito de eficiência técnica que evidencie dados empíricos deve ser baseada numa medida adequada e satisfazer um conjunto de propriedades.

Assim, esses autores propuseram as seguintes propriedades que uma medida eficiente deve satisfazer:

- Se o valor da eficiência de uma DMU é igual a 1, então essa DMU é fortemente eficiente ou eficiente segundo Pareto-Koopmans;
- A eficiência de uma unidade ineficiente deve ser calculada comparando-a com as unidades eficientes segundo Pareto-Koopmans;
- Uma medida de eficiência deve satisfazer a homogeneidade de grau  $-1$ , isto é, qualquer alteração nos *inputs* (ou *outputs*) implica uma variação de escala inversa na eficiência técnica.

- A quarta propriedade está relacionada com a monotonicidade de um conjunto de eficiência e indica que a eficiência decresce monotonicamente para qualquer acréscimo de *inputs*, ou seja, um aumento proporcional nos *inputs* provoca uma redução proporcional e equitativa na eficiência.

De acordo com os autores, a medida de eficiência de Farrell satisfaz apenas a propriedade de homogeneidade de grau  $-1$  e, para Bol (1986), não existe nenhuma medida de eficiência técnica que satisfaça simultaneamente as propriedades de eficiência igual a 1, homogeneidade de grau 1 e monotonicidade.

Adicionalmente às propriedades enunciadas acima, destacam-se mais duas importantes propriedades que uma medida de eficiência deve satisfazer, apresentadas por Tone (2001):

- As medidas de eficiência devem ser invariantes às unidades de medidas, isto é, os valores de eficiência não se alteram em função das unidades de medida dos *inputs* e dos *outputs*;
- As medidas de eficiência devem ser invariantes à translação, isto é, a translação dos valores originais dos dados (*inputs* e/ou *outputs*) produz a mesma medida de eficiência que os dados originais.

A invariância à translação revela-se uma propriedade muito importante tendo em conta que em algumas aplicações poderá ser necessário tratar com dados negativos para alguns *inputs* e/ou *outputs*, como se verá neste trabalho. Assim, os modelos concebidos para tratar com dados positivos e que gozam desta propriedade podem também ser utilizados para tratarem dados que tenham valores negativos. Modelos deste tipo serão abordados no próximo capítulo.

### 3. Modelos DEA para dados negativos

#### 3.1. Introdução

A maior parte do trabalho desenvolvido na literatura da DEA, nomeadamente no que respeita a modelos, assume que os valores dos *inputs* e *outputs* são positivos ou, quando muito, não negativos com pelo menos um *input* e um *output* positivo. Tal acontece devido a facto de que em muitas aplicações os valores relativos àqueles dois parâmetros serem positivos. Contudo, existem aplicações onde os *inputs* e/ou *outputs* assumem valores negativos, como é o caso de certo tipo de dados como o lucro que pode ser positivo ou negativo, ou quando os dados descrevem alterações ocorridas de um período para outro, que obviamente podem ser positivas ou negativas. *Inputs* ou *outputs* negativos podem também surgir artificialmente como uma forma de tratar *inputs* ou *outputs* indesejáveis (ver, por exemplo, Portela, Thanassoulis e Simpson, 2004 e Sharp, Meng e Liu, 2007).

Neste capítulo apresentam-se os principais modelos propostos na literatura da DEA que permitem tratar dados (*inputs* e/ou *outputs*) negativos. Mais precisamente, apresentam-se dois tipos de modelos para tratar este tipo de dados: os modelos concebidos para dados não negativos, mas que são invariantes à translação e os modelos que permitem usar diretamente dados negativos. Os modelos invariantes à translação são aqueles em que a solução ótima não se altera quando são adicionadas constantes aos dados, permitindo que dados com valores negativos sejam transformados em dados com valores positivos.

Assim, na seção 3.2, apresenta-se o modelo clássico BCC, proposto por Banker, Charnes e Cooper (1985) que, como se verá, é parcialmente invariante à translação e pode ser usado quando existem valores negativos apenas nos *inputs* ou apenas nos *outputs*. Na seção 3.3, apresenta-se o modelo aditivo que é invariante à translação. Os modelos RAM (A Rang Adjusted Measure), proposto por Cooper, Parker e Pastor (1999), e BAM (Bounded Adjusted Measure), proposto por Cooper, Pastor, Borrás, Aparício e Pastor (2011), que, também são invariantes à translação, são apresentados nas seções 3.4 e 3.5, respetivamente. Nas seções 3.6, 3.7 e 3.8 apresentam-se os modelos que permitem tratar diretamente com dados negativos. Assim, na seção 3.6, apresenta-se um modelo inspirado no modelo de função direcional, denotado por modelo RDM (Range Directional Model), proposto Portela, Thanassoulis e Simpson (2004). Na seção 3.7, apresenta-se o modelo SBM modificado, denotado por MSBM (Modified Slack Based Measure), proposto por Sharp, Meng e Liu (2007) e que tem por base a ideia desenvolvida por Portela, Thanassoulis e Simpson (2004) e o

modelo SBM. Finalmente, na seção 3.8, apresentam-se os modelos SBM e de super-eficiência SBM que tratam dados negativos, propostos por Tone, Chang e Wu. (2020). Estes modelos transformam os originais valores negativos dos *inputs* e/ou *outputs* em valores positivos baseados num novo ponto base, sendo por isso designados de modelos BP-SBM (Base Point Slacks-Basead Measure) e SE\_BP-SBM.

### 3.2. Modelo BCC

O modelo BCC, proposto por Banker, Cooper e Charnes (1984), constitui uma extensão para retornos variáveis de escala do modelo CCR, proposto por Charnes, Cooper e Rhodes (1978), para retornos constantes de escala, com o qual se deu o início formal da DEA. Os modelos BCC e CCR são também conhecidos por modelos VRS (Variable Returns to Scale) e CRS (Constant Returns to Scale), respetivamente. Estes dois modelos são usualmente referidos como modelos clássicos ou modelos básicos da DEA e podem ser orientados para *inputs* ou para *outputs* consoante a fronteira de eficiência é atingida através da redução dos *inputs* fixando os *outputs*, ou, através da expansão dos *outputs*, fixando os *inputs*. Estes modelos são também designados de modelos radiais devido ao facto de tal redução (expansão) ser proporcional e comum a todos os *inputs* (*outputs*).

Para descrever matematicamente o modelo BCC e outros que se seguem, considere-se que existem  $n$  DMUs homogêneas e independentes para avaliação e que cada DMU utiliza  $m$  *inputs* para produzir  $s$  *outputs*. Mais especificamente, cada  $DMU_j$  ( $j=1, \dots, n$ ) utiliza a quantidade  $x_{ij}$  do *input*  $i$  ( $i=1, \dots, m$ ) para produzir a quantidade  $y_{rj}$  do *output*  $r$  ( $r=1, \dots, s$ ). Considere-se, ainda, que  $x_{ij} \geq 0$ ,  $y_{rj} \geq 0$ , ( $i=1, \dots, m$ ;  $r=1, \dots, s$ ;  $j=1, \dots, n$ ), e que cada DMU possui, pelo menos, um *input* e um *output* com valores positivos.

Como já se referiu anteriormente, os modelos orientados para *inputs* têm por objetivo minimizar o valor dos *inputs* mantendo os valores dos *outputs*. Assim, a versão orientada para *inputs* do modelo BCC que permite obter o índice de eficiência da  $DMU_k$  ( $k \in \{1, \dots, n\}$ ) é dada pelo seguinte modelo de programação linear:

$$\theta_k^* = \min \theta_k \tag{3.1a}$$

$$s. a. \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j \leq x_{ik} \theta_k \quad i = 1, \dots, m \tag{3.1b}$$

$$\sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j \geq y_{rk} \quad r=1, \dots, s \quad (3.1c)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \quad (3.1d)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j=1, \dots, n \quad (3.1e)$$

$$\theta_k \in \mathbb{R} \quad (3.1f)$$

O modelo (3.1), cujas variáveis de decisão são  $\theta_k$  e  $\lambda_j$  ( $j=1, \dots, n$ ), é conhecido por forma do envelope do modelo BCC orientado para *inputs*. O valor ótimo deste modelo,  $\theta_k^*$ , fornece o índice de eficiência da DMU<sub>k</sub> que, como se mostra em Cooper, Seiford e Tone (2007), é um valor tal que  $0 < \theta_k^* \leq 1$ . Se, na solução ótima,  $\theta_k^* = 1$  e as variáveis de desvio nas restrições (3.1b) e (3.1c) são iguais a zero, a DMU<sub>k</sub> é considerada fortemente eficiente ou eficiente segundo Pareto- Koopmans. Se, por outro lado,  $\theta_k^* < 1$  e existem variáveis de desvios nessas restrições diferentes de zero, então a DMU<sub>k</sub> diz-se fracamente eficiente ou eficiente segundo Farrell. Se  $\theta_k^* < 1$ , diz-se que a DMU<sub>k</sub> é ineficiente e será tanto mais ineficiente quanto menor for o valor de  $\theta_k^*$ . Neste último caso,  $\theta_k^*$  indica o valor pelo qual os *inputs* devem ser multiplicados de modo que a DMU<sub>k</sub> se torne eficiente, originando uma redução proporcional e comum nos valores dos *inputs*. As restrições (3.1b) garantem que essa redução não ultrapassa a fronteira definida pelas DMUs eficientes, enquanto as restrições (3.1c) garantem que tal redução não implica uma redução nos valores dos *outputs* da DMU<sub>k</sub>, isto é, da DMU em avaliação. A restrição (3.1d) é conhecida por restrição de convexidade e conjuntamente com as restrições (3.1e) definem a convexidade do conjunto das soluções admissíveis. Tal como (3.1e), as restrições (3.1f) indicam a natureza das variáveis.

Os valores de  $\lambda_j$  na solução ótima do modelo (3.1),  $\lambda_j^*$ , permitem obter o conjunto de referência da DMU<sub>k</sub>, isto é, o conjunto das DMUs que são referência (*benchmarks*) para que uma determinada DMU<sub>k</sub> que seja ineficiente se torne eficiente. Esse conjunto, usualmente denotado por  $R_k$ , é constituído pelos índices correspondentes aos valores positivos de  $\lambda_j^*$  ( $j \in \{1, \dots, n\}$ ), isto é,

$$R_k = \{j : \lambda_j^* > 0, j \in \{1, \dots, n\}\} \quad (3.2)$$

O conjunto definido em (3.2) pode ser constituído por um ou mais elementos. No caso de ser constituído por mais de um elemento, os valores de  $\lambda_j^*$  permitem ainda determinar a importância relativa das correspondentes DMUs enquanto referências para a DMU<sub>k</sub>. Quanto maior for o valor de  $\lambda_j^*$ , maior será a importância da correspondente DMU<sub>j</sub> para que uma DMU<sub>k</sub> se torne eficiente. Note-se que se uma DMU<sub>k</sub> é eficiente, então é referência de si própria, isto é,  $R_k = \{k\}$ .

Para além da forma do envelope (3.1), o modelo BCC contempla mais duas formas. Uma, obtida através do dual do modelo (3.1), designada de forma dos multiplicadores, que também resulta da linearização, através da transformação de Charnes e Cooper (1962), de uma outra designada de forma fracionária. Esta última permite definir a eficiência como um quociente envolvendo a soma ponderada dos *outputs* e a soma ponderada dos *inputs*. A solução ótima da forma dos multiplicadores permite obter os pesos associados aos *inputs* e *outputs* e, deste modo, obter o contributo de cada *input* e de cada *output* para o cálculo do índice de eficiência. Esta solução ótima permite ainda obter o tipo de retorno de escala (crescente, decrescente ou contante) em que a DMU<sub>k</sub> está a operar.

O conjunto das soluções admissíveis do modelo (3.1) define um conjunto de possibilidades de produção, isto é, um conjunto  $P = \{(x, y) : y \text{ é produzido por } x\}$ . Tal conjunto, denotado por  $P_{BCC}$ , é definido como

$$P_{BCC} = \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathbf{x} \geq \sum_{j=1}^n \mathbf{x}_j \lambda_j, \mathbf{y} \leq \sum_{j=1}^n \mathbf{y}_j \lambda_j, \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0 \ (j = 1, \dots, n) \right\} \quad (3.3)$$

onde  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  representa uma atividade, isto é, um par de vetores de *inputs*  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$  e *outputs*  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^s$  admissíveis, e onde  $\mathbf{x}_j = (x_{1j} \ x_{2j} \ \dots \ x_{mj})^T$  e  $\mathbf{y}_j = (y_{1j} \ x_{2j} \ \dots \ x_{sj})^T$  representam os vetores de *inputs* e de *outputs*, respetivamente, da DMU<sub>j</sub> (ver, por exemplo, Tone, 2015).

Removendo da forma do envelope do modelo BCC orientado para *inputs* a restrição de convexidade (3.1d), obtém-se a forma do envelope do modelo CCR orientado para *inputs*. Claramente que o conjunto de possibilidades de produção associado ao modelo CCR,  $P_{CCR}$ , pode também ser obtido de  $P_{BCC}$  removendo a referida restrição de convexidade. Consequentemente, a forma dos multiplicadores e a forma fracionária do modelo CCR

obtém-se das correspondentes formas do modelo BCC removendo a variável que indica o tipo de retorno de escala.

Banker, Charnes e Cooper (1984) propuseram também a versão do modelo BCC orientada para *outputs* que, como já se referiu, tem por objetivo maximizar os *outputs* sem incrementar qualquer dos *inputs*. Na forma do envelope, essa versão é dada pelo seguinte modelo de programação linear:

$$\rho_k^* = \max \rho_k \quad (3.4a)$$

$$s. a. \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j \leq x_{ik} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.4b)$$

$$\sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j \geq y_{rk} \rho_k \quad r = 1, \dots, s \quad (3.4c)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \quad (3.4d)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.4e)$$

$$\rho_k \in \mathbb{R} \quad (3.4f)$$

Neste modelo, tem-se  $\rho_k^* \geq 1$ , pelo que o índice de eficiência é dado por  $1/\rho_k^*$  por forma a garantir uma medida de eficiência na escala de 0 a 1. Se, na solução ótima,  $\rho_k^* = 1$  e as variáveis de desvio nas restrições (3.4b) e (3.4c) são iguais a zero, a DMU<sub>k</sub> é considerada fortemente eficiente ou eficiente segundo Pareto- Koopmans. Se, por outro lado,  $\rho_k^* = 1$  e existem variáveis de desvios nessas restrições diferentes de zero, então a DMU<sub>k</sub> diz-se fracamente eficiente ou eficiente segundo Farrell. Se  $\rho_k^* < 1$ , diz-se que a DMU<sub>k</sub> é ineficiente e será tanto mais ineficiente quanto maior for o valor de  $\rho_k^*$ . Neste último caso,  $\rho_k^*$  indica o valor pelo qual os *outputs* devem ser multiplicados de modo que a DMU<sub>k</sub> se torne eficiente, originando um aumento proporcional e comum nos valores dos *outputs*. As restrições (3.4b) garantem que tal aumento não produz qualquer aumento no valor dos *inputs*, enquanto as restrições (3.4c) garantem que esse aumento não ultrapassa a fronteira de eficiência. As restrições (3.4d), (3.4e) e (3.4f) têm o mesmo significado que as correspondentes restrições na versão orientada para *inputs* apresentada anteriormente.

Quanto à solução ótima, tem-se ainda que os valores de  $\lambda_j^*$  fornecem o mesmo tipo de informação que na versão orientação para *inputs*, ou seja, permitem identificar o conjunto das DMUs que são referência para que uma DMU ineficiente se torne eficiente assim como a sua importância relativa no caso de existirem duas ou mais DMUs de referência.

Similarmente à versão orientada para *inputs*, esta versão também contempla mais duas formas, a forma dos multiplicadores e a forma fracionária. De modo idêntico ao que foi feito na versão orientada para *inputs*, também a partir desta versão podem obter-se as correspondentes formas do modelo CCR orientado para *outputs*.

O modelo BCC é parcialmente invariante à translação. Mais especificamente, a versão orientada para *inputs* (*outputs*) é invariante à translação em relação aos *outputs* (*inputs*) mas não o é em relação aos *inputs* (*outputs*). De acordo com Cooper, Seiford e Tone (2007), um modelo DEA diz-se invariante à translação se a solução ótima do modelo não se altera mediante uma translação dos valores dos *inputs* e/ou *outputs*, isto é, uma alteração da origem do sistema de coordenadas. Esta propriedade revela-se útil quando existem dados negativos relativamente aos *inputs* e/ou *outputs*, uma vez que a adição de constantes adequadas permite transformar esses dados em dados positivos, sem alterar a solução ótima. O primeiro trabalho sobre a invariância à translação é devido a Ali e Seiford (1990), para tratar dados com valores iguais a zero.

Para provar que o modelo BCC orientado para *inputs* é invariante apenas em relação aos *outputs*, considerem-se as constantes arbitrárias  $c_i$  ( $i=1, \dots, m$ ) e  $d_r$  ( $r=1, \dots, s$ ) que adicionadas aos *inputs* e *outputs*, respetivamente, permitem, por translação, obter os novos dados. Na presença da restrição de convexidade, as restrições relativas aos *outputs*

$$\sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j \geq y_{rk} \quad r=1, \dots, s \quad (3.1c)$$

e as restrições obtidas por translação desses *outputs*

$$\sum_{j=1}^n (y_{rj} + d_r) \lambda_j \geq y_{rk} + d_r \quad r=1, \dots, s \quad (3.1ci)$$

são equivalentes.

Note-se que a presença da variável que fornece o índice de eficiência nas restrições relativas aos *inputs*

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j \leq x_{ik} \theta_k \quad i = 1, \dots, m \quad (3.1b)$$

impede a equivalência entre estas restrições e as obtidas por translação dos *inputs*.

$$\sum_{j=1}^n (x_{ij} + c_i) \lambda_j \leq (x_{ik} + c_i) \theta_k \quad i = 1, \dots, m \quad (3.1bi)$$

No entanto, quando  $\theta_k = 1$ , essas restrições são equivalentes.

De modo similar se mostra que a versão orientada para *outputs* do modelo BCC é invariante à translação em relação aos *inputs*, mas não o é em relação aos *outputs*. (Cooper, Seiford e Tone, 2007). Existem modelos que são (totalmente) invariantes à translação como se verá nas próximas seções.

Do exposto resulta que o modelo BCC orientado para *inputs* (*outputs*) pode ser usado quando existem *outputs* (*inputs*) com valores negativos.

### 3.3. Modelo aditivo

Charnes, Cooper, Golany, Seiford e Stutz (1985) propuseram um modelo não radial que combina simultaneamente as orientações para *inputs* e para *outputs*, contrariamente ao que se verifica nos modelos radiais que consideram essas orientações isoladamente. Tal modelo é designado por modelo aditivo e, sob a hipótese de retornos variáveis de escala, é dado por:

$$\max \left( \sum_{i=1}^m s_{ik}^- + \sum_{r=1}^s s_{rk}^+ \right) \quad (3.5a)$$

$$s. a. \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j + s_{ik}^- = x_{ik} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.5b)$$

$$\sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j - s_{rk}^+ = y_{rk} \quad r = 1, \dots, s \quad (3.5c)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \quad (3.5d)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.5e)$$

$$s_i^- \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.5f)$$

$$s_r^+ \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.5g)$$

Usando o modelo (3.5), a DMU<sub>k</sub> diz-se eficiente se, e só se, as variáveis de desvio são todas iguais a zero na solução ótima, isto é, se, e só se,  $s_{ik}^- = 0$  ( $i = 1, \dots, m$ ) e  $s_{rk}^+ = 0$  ( $r = 1, \dots, s$ ); caso contrário, a DMU<sub>k</sub> diz-se ineficiente. Uma DMU que é eficiente pelo modelo aditivo é fortemente eficiente ou eficiente segundo Pareto-Koopmans.

Conforme se refere em Cooper, Seiford, Tone e Zhu (2007), a medida fornecida pelo modelo aditivo é uma medida completa uma vez que contabiliza todas as ineficiências que o modelo pode identificar.

Uma outra propriedade atrativa do modelo (3.5), isto é, do modelo aditivo sob retornos variáveis de escala, é ser invariante à translação uma vez que a solução não é afetada quando constantes arbitrárias são adicionadas aos valores dos *inputs* e *outputs*. Para provar esta propriedade, considerem-se novamente as constantes arbitrárias  $c_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) e  $d_r$  ( $r = 1, \dots, s$ ). Na presença da restrição de convexidade, as variáveis que satisfazem as restrições

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j + s_{ik}^- = x_{ik} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.5b)$$

$$\sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j - s_{rk}^+ = y_{rk} \quad r = 1, \dots, s \quad (3.5c)$$

também satisfazem as restrições

$$\sum_{j=1}^n (x_{ij} + c_i) \lambda_j + s_{ik}^- = x_{ik} + c_i \quad i = 1, \dots, m \quad (3.5bi)$$

$$\sum_{j=1}^n (y_{rj} + d_r) \lambda_j - s_{rk}^+ = y_{rk} + d_r \quad r = 1, \dots, s \quad (3.5ci)$$

Similarmente, na presença da restrição de convexidade, tem-se

$$\sum_{i=1}^m s_{ik}^- = \sum_{i=1}^m \left( x_{ik} - \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j \right) = \sum_{i=1}^m \left( (x_{ik} + c_i) - \sum_{j=1}^n (x_{ij} + c_i) \lambda_j \right)$$

$$\sum_{r=1}^s s_{rk}^+ = \sum_{r=1}^s \left( \sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j - y_{rk} \right) = \sum_{r=1}^s \left( \sum_{j=1}^n (y_{rj} + d_r) \lambda_j - (y_{rk} + d_r) \right)$$

pelo que a função objetivo permanece inalterável. Note-se que, como se refere, por exemplo, em Ali e Seiford (1990), a chave para a invariância à translação, mesmo que parcial como acontece no modelo BCC, está no facto de o modelo incluir a restrição de convexidade.

A invariância do modelo aditivo assim como a invariância parcial do modelo BCC foram inicialmente provadas por Ali e Seiford (1990), num primeiro trabalho sobre a invariância, apresentado pelos autores, para tratar dados com valores iguais a zero.

Como qualquer outro modelo, o modelo aditivo tem também algumas lacunas como sejam o não possibilitar uma medida de eficiência, como acontece com os modelos clássicos CCR e BCC, a falta de invariância às unidades e o permitir a identificação de DMUs de referência muito afastadas da DMU que está a ser avaliada, podendo assim não ser adequado na identificação de DMUs de referência. Para contornar estas lacunas, várias tentativas têm sido realizadas e vários modelos têm sido propostos. Como se verá mais à frente, vários desses modelos resultam da alteração apenas na função objetivo do modelo aditivo, o que demonstra o importante papel desempenhado por este modelo no desenvolvimento de outros modelos não radiais.

Existem várias versões do modelo aditivo. Uma dessas versões é a do modelo aditivo ponderado, que afeta ponderadores não negativos às variáveis de desvio na função objetivo, referido em Lovell e Pastor (1995) e inicialmente proposto por Pastor (1994) para tratar com dados negativos. Esta versão foi considerada no desenvolvimento dos modelos para obtenção das medidas RAM e BAM e que são apresentados nas duas seções que se seguem.

### 3.4. Modelo RAM

Numa tentativa de introduzir uma medida de eficiência generalizada em ligação com o modelo aditivo, Parker e Pastor (1999) introduziram uma medida invariante à translação e também invariante às unidades que designaram por RAM (*Range Adjusted Measure*). Para obter essa medida, os autores consideram uma versão ponderada do modelo aditivo, onde os ponderadores associados a cada folga no *input* e a cada folga no *output* são determinados pelos dados. Os autores propuseram assim o seguinte modelo de ineficiência RAM para determinar a ineficiência da DMU<sub>k</sub>:

$$\max \frac{1}{m+s} \left( \sum_{i=1}^m \frac{s_{ik}^-}{R_i^-} + \sum_{r=1}^s \frac{s_{rk}^+}{R_r^+} \right) \quad (3.6a)$$

$$s. a. \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j + s_{ik}^- = x_{ik} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.6b)$$

$$\sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j - s_{rk}^+ = y_{rk} \quad r = 1, \dots, s \quad (3.6c)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \quad (3.6d)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.6e)$$

$$s_{ik}^- \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.6f)$$

$$s_{rk}^+ \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.6g)$$

Na função objetivo do modelo anterior,  $R_i^-$  e  $R_r^+$  são os parâmetros de escala, que indicam a amplitude do intervalo de variação de cada *input* e de cada *output*, obtidos através das seguintes relações:

$$R_i^- = \bar{x}_i - \underline{x}_i \quad i = 1, \dots, m \quad (3.7a)$$

$$R_r^+ = \bar{y}_r - \underline{y}_r \quad r = 1, \dots, s \quad (3.7b)$$

onde

$$\bar{x}_i = \max_j \{x_{ij}\} \quad , \quad \underline{x}_i = \min_j \{x_{ij}\} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.8a)$$

$$\bar{y}_r = \max_j \{y_{rj}\} \quad , \quad \underline{y}_r = \min_j \{y_{rj}\} \quad r = 1, \dots, s \quad (3.8b)$$

No modelo (3.6), cada folga no *input* e cada folga no *output* é ponderada por  $1/(m+s)R_i^-$  e  $1/(m+s)R_r^+$ , respetivamente, isto é, cada folga no *input* e cada folga no *output* é ponderada pelo inverso do produto da soma do número de *inputs* com o número de *outputs* pelo correspondente parâmetro de escala. O fator  $(m+s)$  é introduzido a fim de calcular a média da soma das ineficiências.

A medida de ineficiência RAM para a DMU<sub>k</sub> obtida pelo modelo (3.6) é igual a zero se, e só se, todas as variáveis de desvio associadas aos *inputs* e aos *outputs* dessa DMU<sub>k</sub> forem iguais a zero, e é igual a um se, e só se,  $s_{ik}^{*-} = R_i^-$  ( $i = 1, \dots, m$ ) e  $s_{rk}^{*+} = R_r^+$  ( $r = 1, \dots, s$ ). A correspondente medida de eficiência RAM, denotada por  $\Gamma_{RAM}$ , é obtida fazendo

$$\Gamma_{RAM} = 1 - \frac{1}{m+s} \left( \sum_{i=1}^m \frac{s_{ik}^-}{R_i^-} + \sum_{r=1}^s \frac{s_{rk}^+}{R_r^+} \right) \quad (3.9)$$

Note-se que a medida de eficiência RAM pode ser obtida diretamente usando o segundo termo de (3.9) como função objetivo e alterando o sentido de otimização no modelo (3.6), isto é, substituindo neste modelo, (3.6a) por

$$\min \left( 1 - \frac{1}{m+s} \left( \sum_{i=1}^m \frac{s_{ik}^-}{R_i^-} + \sum_{r=1}^s \frac{s_{rk}^+}{R_r^+} \right) \right) \quad (3.6a')$$

Como se refere em Cooper, Park e Pastor (1999), a medida de eficiência RAM fica bem definida depois de se remover os termos para os quais  $R_i^-$  ou  $R_r^+$  são iguais a zero.

Para provar que o modelo RAM é invariante à translação, basta, em complemento ao que já foi provado para o modelo aditivo relativamente a esta propriedade, provar que os parâmetros de escala não são afetados pela adição de constantes arbitrárias. De facto, tem-se

$$R_i^- = \bar{x}_i - \underline{x}_i = (\bar{x}_i + c_i) - (\underline{x}_i + c_i) \quad i = 1, \dots, m \quad (3.10a)$$

$$R_r^+ = \bar{y}_r - \underline{y}_r = (\bar{y}_r + d_r) - (\underline{y}_r + d_r) \quad r = 1, \dots, s \quad (3.10b)$$

Para além das interessantes propriedades da medida RAM, nomeadamente as de invariância em relação às unidades e à translação, esta medida apresenta duas desvantagens. Uma, é que não pode ser usada em modelos que não consideram retornos variáveis de escala, uma vez que em tais modelos não é possível garantir que varia entre 0 e 1. Por exemplo, num modelo para retornos constantes de escala,  $s_r^+$  pode ter um valor muito maior do que o valor da correspondente escala do *output*  $r$ . A outra, é que evidencia um fraco poder de discriminação como é referido em Aida, Cooper, Pastor e Sueyoshi (1998) em consequência de resultados obtidos na avaliação de 108 empresas fornecedoras de água no Japão, onde os valores das eficiências variam entre 0,978 e 1 ou, por outras palavras, os valores das ineficiências associadas são muito baixos, variando ente 0 e 0,022 (Cooper, Pastor, Borrás, Aparício e Pastor, 2011).

### 3.5. Modelo BAM

Cooper, Pastor, Borrás, Aparício e Pastor (2011) propuseram uma medida, designada por BAM (*Bounded Adjusted Measure*), com características similares à da medida RAM, mas com mais

poder de discriminação. Para conseguir uma medida com maior poder de discriminação torna-se necessário aumentar as possíveis magnitudes e variações detetadas das ineficiências. Tal é conseguido através da redução dos valores dos denominadores da medida RAM, como inicialmente proposto por Pastor (1994) num trabalho não publicado. Em vez de considerar escalas de *inputs* e de *outputs*, consideram-se escalas inferiores para variação dos *inputs* e escalas superiores para variação dos *outputs*.

Assim, os autores definem o parâmetro de escala inferior para o *input*  $i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) da DMU<sub>k</sub> como

$$L_{ik}^- = x_{ik} - \underline{x}_i, \quad (3.11a)$$

onde  $\underline{x}_i$  é definido como em (3.8a).

Similarmente, definem o parâmetro de escala superior para o *output*  $r$  ( $r = 1, \dots, s$ ) da DMU<sub>k</sub> como

$$U_{rk}^+ = \bar{y}_r - y_{rk}, \quad (3.11b)$$

como  $\bar{y}_r$  é definido como em (3.8b).

Das relações anteriores tem-se que o parâmetro de escala inferior de cada *input* da DMU em avaliação depende apenas do seu valor e do limite inferior do referido *input*, enquanto o parâmetro de escala superior de cada *output* depende do valor do *output* da DMU em avaliação e do limite superior desse *output*. É claro que o parâmetro de escala inferior ou superior é sempre menor ou igual que o correspondente parâmetro de escala para qualquer *input* ou *output*, definido anteriormente.

Então, a medida de ineficiência BAM para a DMU<sub>k</sub> é obtida através do seguinte modelo:

$$\max \frac{1}{m+s} \left( \sum_{i=1}^m \frac{s_{ik}^-}{L_{ik}^-} + \sum_{r=1}^s \frac{s_{rk}^+}{U_{rk}^+} \right) \quad (3.12a)$$

$$s. a. \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j + s_{ik}^- = x_{ik} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.12b)$$

$$\sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j + s_{rk}^+ = y_{rk} \quad r = 1, \dots, s \quad (3.12c)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \quad (3.12d)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.12e)$$

$$s_{ik}^- \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.12f)$$

$$s_{rk}^+ \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.12g)$$

A correspondente medida de eficiência,  $\Gamma_{RAM}$ , é dada por

$$\Gamma_{BAM} = 1 - \frac{1}{m+s} \left( \sum_{i=1}^m \frac{s_{ik}^-}{L_{ik}^-} + \sum_{r=1}^s \frac{s_{rk}^+}{U_{rk}^+} \right) \quad (3.13)$$

Como se refere em Cooper, Pastor, Borras, Aparício e Pastor (2011), a medida de eficiência BAM, obtida através de (3.13), fica bem definida adotando as convenções que se seguem.

Se para uma DMU<sub>k</sub> o *input*  $i$  satisfaz  $x_{ik} = \underline{x}_i$  então não há espaço para melhorar, isto é,  $s_{ik}^- = 0$  e, neste caso, toma-se, por convenção

$$\frac{s_{ik}^-}{L_{ik}^-} = 0.$$

Similarmente, se o *output*  $r$  satisfaz  $y_{rk} = \bar{y}_r$ , isto é,  $s_{rk}^+ = 0$ , e, neste caso, toma-se, por convenção

$$\frac{s_{rk}^+}{U_{rk}^+} = 0.$$

Como aqueles autores referem, esta medida foi inicialmente proposta por Pastor (1994) para tratar com dados negativos e surge mais tarde em Pastor e Ruiz (2007) também no contexto de dados negativos.

### 3.6. Modelo RDM (Portela, Thanassoulis e Simpson (2004))

Portela, Thanassoulis e Simpson (2004) propuseram um modelo que pode ser usado diretamente para calcular a eficiência quando os dados envolvem *inputs* e/ou *outputs* com valores negativos. Esse modelo é inspirado no seguinte modelo de distância direcional

proposto por Chambers, Chung e Färe (1996, 1998), assumindo a hipótese de retornos variáveis de escala:

$$\beta_k^* = \max \beta_k \quad (3.14a)$$

$$s. a. \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j \leq x_{ik} - \beta_k g_{x_i} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.14b)$$

$$\sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j \geq y_{rk} + \beta_k g_{y_r} \quad r = 1, \dots, s \quad (3.14c)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \quad (3.14d)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.14e)$$

No modelo anterior,  $g_x$  e  $g_y$  denotam a direção dos vetores não negativos associados aos *inputs* e aos *outputs*, isto é, são os vetores direcionais para os *inputs* e *outputs*, respetivamente. O modelo anterior é não orientado uma vez que considera simultaneamente uma redução de *inputs* e uma expansão de *outputs*. Versões orientadas deste modelo, para *inputs* ou para *outputs*, podem ser obtidas fazendo  $g_{y_r} = 0$  ou  $g_{x_i} = 0$ , respetivamente.

Quando os dados são positivos, uma escolha usual para os vetores direcionais  $(g_{x_i}, g_{y_r})$  são os níveis de *inputs* e *outputs* observados, isto é,  $g_{y_r} = y_{rk}$  e  $g_{x_i} = x_{ik}$ . Na presença de dados negativos, o uso destes valores não garante as condições de não negatividade dos vetores, as quais visam garantir que os *inputs* e *outputs* não piorem do seu nível observado na solução que o modelo permite (Portela, Thanassoulis e Simpson, 2004).

Para garantir que o modelo permite soluções melhoradas quando alguns dos dados são negativos, os autores introduzem um ponto ideal  $I$  para um dado conjunto de dados, definido como  $I = (\max_j \{y_{rj}; r = 1, \dots, s\}, \min_j \{x_{ij}; i = 1, \dots, m\})$ , e, com base neste ponto ideal, definem os vetores  $P_{ik}^-$  e  $P_{rk}^+$ , referidos como a escala de possível melhoria da DMU $_k$ , como se segue:

$$P_{ik}^- = x_{ik} - \min_j \{x_{ij}\} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.15d)$$

$$P_{rk}^+ = \max_j \{y_{rj}\} - y_{rk} \quad r = 1, \dots, s \quad (3.15d)$$

Note-se que os vetores escala definidos anteriormente são não negativos, pelo que satisfazem as condições de não negatividade sobre os vetores direcionais usados no modelo (3.14).

Com base na escala de possível melhoria definida anteriormente, Portela, Thanassoulis e Simpson (2004) propuseram o seguinte modelo de escala direcional que denotaram de RDM (Range Directional Model):

$$\beta_k^* = \max \beta_k \quad (2.10a)$$

$$s. a. \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j \leq x_{ik} - \beta_k P_{ik}^- \quad i = 1, \dots, m \quad (3.16b)$$

$$\sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j \geq y_{rk} + \beta_k P_{rk}^+ \quad r = 1, \dots, s \quad (3.16c)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \quad (3.16d)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.16f)$$

Os autores mostram que o modelo anterior é invariante às unidades e à translação e que  $\beta_k^*$  é uma medida de ineficiência, pelo que a medida de eficiência fornecida pelo modelo RDM é obtida calculando  $1 - \beta_k^*$ .

De referir que o modelo RDM pode ser usado diretamente com dados negativos sem a necessidade de transformar esses dados como acontece com os modelos apresentados anteriormente. Este modelo permite ainda obter um valor de eficiência para cada DMU permitindo assim uma comparação entre as várias DMUs em avaliação.

Os autores referem que existem semelhanças entre a medida de eficiência fornecida pelo modelo RDM e a fornecida pelos modelos radiais tradicionais e que a diferença entre elas está apenas no ponto de referência que utilizam. Enquanto no modelo RDM esse ponto é dado pelo ponto ideal, nos modelos radiais é dado pela origem das coordenadas.

### 3.7. Modelo MSBM (Sharp, Meng e Liu (2007))

A fim de poder usar dados positivos e/ou negativos, Sharp, Meng e Liu (2007) propuseram uma modificação do modelo SBM proposto por Tone (2001) usando a escala de *inputs* e *outputs* introduzida por Portela, Thanassoulis e Simpson (2004) e apresentada na seção anterior.

O modelo SBM usa as mesmas restrições do modelo aditivo, mas com uma função objetivo diferente que permite obter uma medida de eficiência na escala de 0 a 1. Para o caso de retornos variáveis de escala, esse modelo é dado por:

$$\rho_k^* = \min \frac{1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{s_{ik}^-}{x_{ik}}}{1 + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{s_{rk}^+}{y_{rk}}} \quad (3.17a)$$

$$s. a. \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j + s_{ik}^- = x_{ik} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.17b)$$

$$\sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j - s_{rk}^+ = y_{rk} \quad r = 1, \dots, s \quad (3.17c)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \quad (3.17d)$$

$$s_{ik}^- \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.17e)$$

$$s_{rk}^+ \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.17f)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.17g)$$

O modelo SBM foi concebido considerando valores positivos dos *inputs* e *outputs* e pode, com alguns pequenos ajustamentos, tratar valores iguais a zero (Tone, 2001). Contudo, este modelo não é invariante à translação e o valor da eficiência pode ser negativo quando os dados assumem valores negativos, uma vez que a condição  $s_{ik}^- \leq x_{ik}$ , que ocorre quando os dados são positivos, pode não ocorrer quando são negativos (Sharp, Meng e Liu, 2007).

Usando os parâmetros de escala propostos por Portela, Thanassoulis e Simpson (2004), que constituem um limite superior para as folgas nos *inputs* e *outputs*, Sharp, Meng e Liu (2007) propuseram uma modificação do modelo SBM por forma a poder tratar dados positivos e/ou negativos. Tal modelo, no qual os autores incorporam também pesos associados aos *inputs* e aos *outputs*, é denotado por MSBM (Modified Slacks Based Measure) e é dado por:

$$\rho_k^* = \min \frac{1 - \sum_{i=1}^m \frac{w_i s_{ik}^-}{P_{ik}^-}}{1 + \sum_{r=1}^s \frac{v_r s_{rk}^+}{P_{rk}^+}} \quad (3.18a)$$

$$s. a. \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j + s_{ik}^- = x_{ik} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.18b)$$

$$\sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j - s_{rk}^+ = y_{rk} \quad r = 1, \dots, s \quad (3.18c)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \quad (3.18d)$$

$$\sum_{i=1}^m w_i = 1 \quad (3.18e)$$

$$\sum_{r=1}^s v_r = 1 \quad (3.18f)$$

$$s_{ik}^- \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.18g)$$

$$s_{rk}^+ \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.18h)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.18i)$$

No modelo anterior,  $w_i$  e  $v_r$  são os pesos não negativos associados aos *inputs* e aos *outputs*, respetivamente, especificados pelo decisor para impor o seu grau de importância sobre a melhoria dos *inputs* e *outputs*. Nesse modelo, os autores assumem que quando  $P_{ik}^-$  ou  $P_{rk}^+$  são iguais a zero, o correspondente termo é removido do numerador ou denominador da função objetivo. Os autores mostram que o modelo MSBM fornece um valor de eficiência na escala de 0 a 1 e é invariante à translação. Tal como o modelo SBM, este modelo é invariante às unidades.

O modelo MSBM é um modelo de programação linear fracionária que pode ser linearizado através da transformação de Charnes e Cooper (1962). Assim, usando as igualdades:

$$t = \left( 1 + \sum_{r=1}^s \frac{v_r s_{rk}^+}{P_{rk}^+} \right)^{-1} \quad (3.19a)$$

$$\hat{s}_{ik}^- = t s_{ik}^- \quad i = 1, \dots, m \quad (3.19b)$$

$$\hat{s}_{rk}^+ = t s_{rk}^+ \quad r = 1, \dots, s \quad (3.19c)$$

$$\hat{\lambda}_j = t \lambda_j \quad j = 1, \dots, n \quad (3.19d)$$

o modelo (3.18) pode ser convertido no seguinte problema de programação linear:

$$\tau_k^* = \min t - \sum_{i=1}^m \frac{w_i \hat{s}_{ik}^-}{P_{ik}^-} \quad (3.20a)$$

$$s. a. \quad t + \sum_{r=1}^s \frac{v_r \hat{s}_{rk}^+}{P_{rk}^+} = 1 \quad (3.20b)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \hat{\lambda}_j + \hat{s}_{ik}^- = tx_{ik} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.20c)$$

$$\sum_{j=1}^n y_{rj} \hat{\lambda}_j - \hat{s}_{rk}^+ = ty_{rk} \quad r = 1, \dots, s \quad (3.20d)$$

$$\sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j = t \quad (3.20d)$$

$$\sum_{i=1}^m w_i = 1 \quad (3.20d)$$

$$\sum_{r=1}^s v_r = 1 \quad (3.20d)$$

$$\hat{s}_{ik}^- \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.20e)$$

$$\hat{s}_{rk}^+ \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.20e)$$

$$\hat{\lambda}_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.20e)$$

$$t \geq 0 \quad (3.20f)$$

Como se refere em Sharp, Weng e Liu (2001), se  $(\tau_k^*, \beta^*, \hat{s}_{ik}^-, \hat{s}_{rk}^+, \hat{\lambda}_j^*)$  é uma solução ótima do modelo anterior então uma solução ótima do modelo MSBM é obtida através das relações:

$$\rho_k^* = \tau_k^*, \lambda_j^* = \frac{\hat{\lambda}_j^*}{t^*}, s_{ik}^- = \frac{\hat{s}_{ik}^-}{t^*}, s_{rk}^+ = \frac{\hat{s}_{rk}^+}{t^*} \quad (3.21)$$

Os autores também mostram que o valor ótimo fornecido pelo modelo MSBM é não superior ao valor de eficiência fornecido pelo modelo RDM, isto é,  $\rho_k^* \leq 1 - \beta_k^*$ .

### 3.8. Modelo BP-SBM (Tone, Chang e Wu (2020))

Tone, Chang e Wu (2020) propuseram modelos SBM (Slack Based Measure) que tratam dados negativos. Esses modelos transformam os originais valores negativos dos *inputs* e *outputs* em

valores positivos baseados num novo ponto base, sendo por isso designados de modelos BP-SBM. Para definir esse ponto base, os autores definem os valores mínimos de cada *input*  $i$ , e de cada *output*.

Assim, sendo  $\delta_i = \min\{x_{i1}, \dots, x_{in}\}$  ( $i = 1, \dots, m$ ), o valor mínimo de cada *input*  $i$ ,  $x_i^{min}$  ( $i = 1, \dots, m$ ), é definido como se segue:

$$\text{se } \delta_i > 0, \text{ então } x_i^{min} = 0; \quad (3.22a)$$

$$\text{se } \delta_i = 0, \text{ então } x_i^{min} = -\sigma_i, \text{ com } \sigma_i > 0; \quad (3.22b)$$

$$\text{se } \delta_i < 0, \text{ então } x_i^{min} = \delta_i(1 + \tau_i), \text{ com } \tau_i > 0. \quad (3.22c)$$

Então se  $\delta_i > 0$ , isto é, se o mínimo do *input*  $i$  é positivo não é necessário efetuar qualquer transformação neste *input* porque ele é positivo para todas as DMUs. No entanto, se  $\delta_i = 0$ , isto é, se uma ou várias DMUs não usam o *input*  $i$  então ele deve ser perturbado por uma quantidade positiva de modo a evitar a divisão por zero no cálculo da medida SBM. Por outro lado, se  $\delta_i < 0$ , isto é, se para uma ou várias DMUs o valor do *input*  $i$  é negativo então ele deve ser translacionado por uma quantidade suficientemente grande de modo que o seu valor se torne positivo para todas as DMUs. Uma tal quantidade que pode ser escolhida é  $\delta_i$ , que torna o *input*  $i$  não negativo, mais um termo de perturbação  $\delta_i \tau_i$  que garante que o *input*  $i$  assume valor positivo em todas as DMUs (Tone, Chang e Wu, 2020).

Identicamente, sendo  $\omega_r = \min\{y_{r1}, \dots, y_{rm}\}$  ( $r = 1, \dots, s$ ), o valor mínimo de cada *output*  $r$ ,  $y_r^{min}$  ( $r = 1, \dots, s$ ), é definido como se segue:

$$\text{Se } \omega_r > 0, \text{ então } y_r^{min} = 0; \quad (3.23a)$$

$$\text{Se } \omega_r = 0, \text{ então } y_r^{min} = -\rho_r, \text{ com } \rho_r > 0; \quad (3.23b)$$

$$\text{Se } \omega_r = 0, \text{ então } y_r^{min} = \omega_r(1 + \gamma_r), \text{ com } \gamma_r > 0. \quad (3.23c)$$

A justificação para a transformação acabada de referir relativamente aos *outputs* é similar à que foi feita anteriormente para o caso dos *inputs*.

Na sequência do exposto anteriormente, o vetor  $(0, \dots, 0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{m+s}$  é referido como ponto base original. Por outro lado, o vetor  $(x_1^{min}, \dots, x_m^{min}, y_1^{min}, \dots, y_s^{min}) \in \mathbb{R}^{m+s}$  é referido como ponto base modificado.

Para uma melhor compreensão do exposto, considere-se o exemplo apresentado em Tone, Chang e Wu (2020) que considera quatro DMUs,  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  e  $S$ , em que cada uma usa um único *input*  $x$  e um único *output*  $y$ . Cada DMU $_j$  ( $j=1,\dots,4$ ) é representada pelos valores de *input* e *output* associados, isto é,  $(x_j, y_j)$ . Assim,  $(3,9)$ ,  $(-2,7)$ ,  $(-5,-2)$  e  $(6,-4)$  representam as DMUs  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  e  $S$ , respectivamente. De acordo com (3.22) e (3.23), tem-se  $\delta = \min\{x_P, x_Q, x_R, x_S\} = -5$  e  $\omega = \min\{y_P, y_Q, y_R, y_S\} = -4$ . Fazendo  $\tau = \gamma = 0,01$ , tem-se  $x^{min} = \delta(1 + \tau) = -5(1 + 0,01) = -5,05$  e  $y^{min} = \omega(1 + \gamma) = -4(1 + 0,01) = -4,04$ , pelo que o ponto base modificado é dado por  $(x^{min}, y^{min}) = (-5,05; -4,04)$ . Na figura 3.1 estão representadas as quatro DMUs e os dois sistemas de coordenadas com origem nos pontos base original e modificado. No sistema com origem no ponto base original, a DMU  $P$  tem *input* e *output* positivos, a DMU  $Q$  tem *input* negativo e *output* positivo, a DMU  $R$  tem *input* e *output* negativos e a DMU  $S$  tem *input* positivo e *output* negativo. No sistema com origem no ponto base modificado, todas as DMUs têm *input* e *output* positivos.

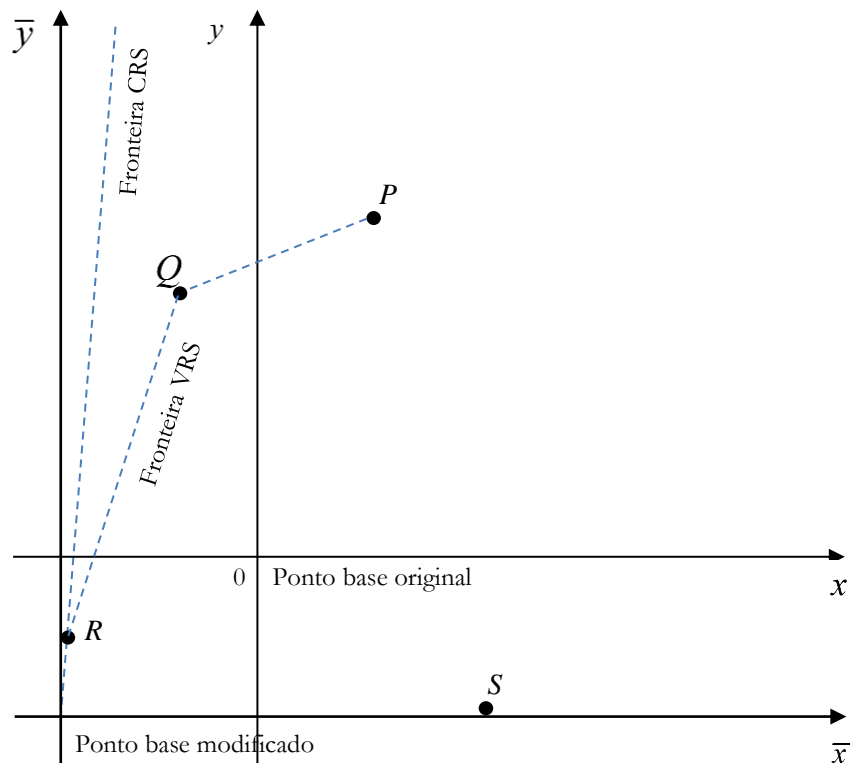


Figura 3.1 - Representação dos sistemas de coordenadas cartesianas com o ponto base original e com o ponto base modificado como origem.

Fonte: Tone, Chang e Wu (2020)

A figura mostra também que o conceito de ponto base modificado para tratar com dados negativos facilita o desenvolvimento de um modelo que aceita diferentes tipos de retorno de escala. Para apresentar tal modelo, seja  $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  o conjunto de dados originais onde  $\mathbf{X} = (x_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$  é matriz dos *inputs* e  $\mathbf{Y} = (y_{rj}) \in \mathbb{R}^{s \times n}$  é a matriz dos *outputs*. Usando o ponto base modificado, obtém-se o novo conjunto de dados  $(\bar{\mathbf{X}}, \bar{\mathbf{Y}})$ , com  $\bar{\mathbf{X}} = (\bar{x}_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e  $\bar{\mathbf{Y}} = (\bar{y}_{rj}) \in \mathbb{R}^{s \times n}$  em que

$$\bar{x}_{ij} = x_{ij} - x_i^{\min} > 0 \quad \forall(i, j) \quad (3.24a)$$

$$\bar{y}_{rj} = y_{rj} - y_r^{\min} > 0 \quad \forall(r, j) \quad (3.24b).$$

Então os elementos destas novas matrizes são todos positivos, pelo que o modelo SBM proposto por Tone (2001) para dados positivos pode ser aplicado a este novo conjunto de dados  $(\bar{\mathbf{X}}, \bar{\mathbf{Y}})$ . Devido ao uso de um ponto base para a translação dos dados, os autores designam este modelo por BP-SBM e é dado por:

$$\rho_k^* = \min \frac{1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{s_{ik}^-}{\bar{x}_{ik}}}{1 + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{s_{rk}^+}{\bar{y}_{rk}}} \quad (3.25a)$$

$$s. a. \quad \sum_{j=1}^n \bar{x}_{ij} \lambda_j + s_{ik}^- = \bar{x}_{ik} \quad i=1, \dots, m \quad (3.25b)$$

$$\sum_{j=1}^n \bar{y}_{rj} \lambda_j - s_{rk}^+ = \bar{y}_{rk} \quad r=1, \dots, s \quad (3.25c)$$

$$L \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j \leq U \quad (3.25d)$$

$$s_{ik}^- \geq 0 \quad i=1, \dots, m \quad (3.25e)$$

$$s_{rk}^+ \geq 0 \quad r=1, \dots, s \quad (3.25f)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j=1, \dots, n \quad (3.25g)$$

No modelo anterior,  $L=U=1$  corresponde a retornos variáveis de escala (VRS),  $L=0$  e  $U=\infty$  corresponde a retornos constantes de escala (CRS),  $L=0$  e  $U=1$  corresponde a retornos não crescentes de escala (NIRS) e  $L=1$  e  $U=\infty$  corresponde a retornos não

decrecentes de escala (NDRS). À semelhança do que acontece com o modelo SBM, uma DMU $k$  é considerada eficiente se  $\rho_k^* = 1$  ou, equivalentemente,  $s_{ik}^- = 0$  ( $i = 1, \dots, m$ ) e  $s_{rk}^+ = 0$  ( $r = 1, \dots, s$ ).

Similarmente ao que foi feito no modelo MSBM, o modelo BP-SBM pode, através da transformação de Charnes e Cooper (1962), ser convertido num modelo de programação linear, cuja solução ótima permite obter a solução ótima do modelo BP-SBM.

Tone, Chang e Wu (2020) mostram que o modelo BP-SBM possui três importantes propriedades. É invariante às unidades, isto é, o índice de eficiência permanece inalterável mediante a alteração das unidades de medida dos dados. É monótona, isto é, o índice de eficiência é monótono decrescente (respetivamente, crescente) relativamente ao crescimento (decrecimento) dos valores dos *inputs*, enquanto é monótono crescente (decrecente) relativamente ao crescimento (decrecimento) dos valores dos *outputs*. É consistente com o modelo SBM no sentido em que se todos os dados são positivos, os índices de eficiência obtidos pelos dois modelos são os mesmos.

Como os autores referem, o modelo BP-SBM e o modelo MSBM apresentam algumas diferenças, apesar de ambos serem invariantes às unidades. O modelo MSBM é invariante à translação o que não acontece com o modelo BP-SBM. O valor da eficiência na escala de 0 a 1 é obtido pelo modelo MSBM apenas quando considera retornos variáveis de escala, enquanto que usando o modelo BP-SBM esse valor é obtido sob qualquer tipo de retorno de escala (variável, contante, não crescente e não decrescente). Os valores de eficiência obtidos pelo modelo MSBM, e também pelo modelo RAM, são muito sensíveis aos valores máximos dos *outputs* e aos valores mínimos de *inputs*. Contudo, estes valores extremos têm pouca influência nos valores de eficiência obtidos pelo modelo BP-SBM porque, neste caso, apenas os *inputs* e *outputs* com valores negativos são translacionados para valores positivos. O modelo BP-SBM previne a irracionalidade da divisão por zero que o modelo MSBM não pode evitar. A irracionalidade da divisão por zero é a designação dada pelos autores aos resultados irracionais que são obtidos quando os termos com valores iguais a zero são removidos, por exemplo, DMUs ineficientes poderem ser consideradas eficientes como os autores mostram empiricamente.

Tone, Chang e Wu (2020) apresentam extensões do modelo BP-SBM a outros tipos de modelos DEA baseados no modelo SBM. Entre essas extensões destaca-se o modelo de

super-eficiência BP-SBM para discriminar as DMUs consideradas eficientes pelo modelo BP-SBM. O método de super-eficiência foi proposto por Andersen e Petersen (1993) para diferenciar as DMUs classificadas como eficientes pelos modelos clássicos e, consequentemente, estabelecer um *ranking* sobre todas as DMUs.

Este método consiste em excluir a DMU em avaliação do conjunto de referência, o que, no caso de ser eficiente, significa excluí-la da fronteira de eficiência, pelo que a sua eficiência é obtida em relação à fronteira de eficiência definida pelas restantes DMUs eficientes. Se a DMU em avaliação é extremo-eficiente, a sua exclusão tem como efeito uma redução do conjunto de possibilidades de produção, permitindo que as DMUs desse tipo se tornem supereficientes e obtenham diferentes índices de super-eficiência superiores a 1. Deste modo, o método possibilita diferenciar a *performance* das DMUs eficientes e, consequentemente, estabelecer um *ranking* para essas DMUs. Quando o método tem por base os modelos clássicos, os índices de eficiência para as DMUs ineficientes permanecem inalteráveis.

O modelo de super-eficiência BP-SBM é baseado no modelo de super-eficiência SBM proposto por Tone (2002). Assim, a sua aplicação requer que em primeiro lugar seja utilizado o modelo BP-SBM para classificar as DMUs em eficientes e não eficientes e, de seguida, seja utilizado o modelo de super-eficiência BP-SBM para diferenciar as DMUs eficientes. Então, o modelo de super-eficiência BP-SBM, proposto por Tone, Chang e Wu (2020), para calcular a super-eficiência da DMU<sub>k</sub> eficiente pelo modelo BP-SBM, é dado por:

$$\rho_k^* = \min \frac{1 + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{s_{ik}^-}{\bar{x}_{ik}}}{1 - \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{s_{rk}^+}{\bar{y}_{rk}}} \quad (3.26a)$$

$$s. a. \quad \sum_{j=1; j \neq k}^n \bar{x}_{ij} \lambda_j + s_{ik}^- \leq \bar{x}_{ik} \quad i = 1, \dots, m \quad (3.26b)$$

$$\sum_{j=1; j \neq k}^n \bar{y}_{rj} \lambda_j - s_{rk}^+ \geq \bar{y}_{rk} \quad r = 1, \dots, s \quad (3.26c)$$

$$L \leq \sum_{j=1; j \neq k}^n \lambda_j \leq U \quad (3.26d)$$

$$s_{ik}^- \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.26e)$$

$$s_{rk}^+ \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.26f)$$

$$\lambda_j \geq 0 \qquad j = 1, \dots, n \qquad (3.26g)$$

Como já se referiu, o modelo anterior é apenas aplicado às DMUs que são consideradas eficientes pelo modelo BP-SBM. Quando aplicado às DMUs ineficientes, o índice de super-eficiência é igual a 1, não conseguindo diferenciar as DMUs ineficientes. Estas são diferenciadas pelo modelo BP-SBM.

Mais uma vez, à semelhança do que foi feito no modelo MSBM, o modelo de super-eficiência BP-SBM pode, através da transformação de Charnes e Cooper (1962), ser convertido num modelo de programação linear, cuja solução ótima permite obter a solução ótima do modelo de super-eficiência BP-SBM.

O modelo anterior permite assim estabelecer um *ranking* sobre todas as DMUs, o que se revela importante no processo de tomada de decisão. Hadi-Venchh e Esmaeilzadeh (2013) propuseram um modelo de super-eficiência com base no modelo RDM, contudo esse modelo sofre do problema de impossibilidade e não pode produzir os resultados numéricos que os autores referem, como é confirmado em Pourmahmoud, Hatami-Marbini e Babazadeh (2016).

## 4. Estudo de um caso prático: aplicação ao setor bancário

### 4.1. Introdução

A área das instituições financeiras, nomeadamente o setor da banca, tem sido objeto de grande aplicação da metodologia DEA, como se referiu no final da secção 2.2. Uma instituição financeira é uma entidade inserida dentro do segmento financeiro de uma economia e tem como função económica otimizar a alocação de capitais financeiros próprios e/ou de terceiros, através da captação de fundos de agentes económicos excedentários para o financiamento de agentes económicos deficitários. As instituições financeiras podem ser divididas em subsectores de acordo com a atividade realizada, o risco assumido, a tipologia e liquidez dos seus passivos. Para este estudo, considerou-se o setor das instituições bancárias, na medida em que a atividade por elas desempenhada produz um grande retorno para a economia geral, e, por isso, é importante que o modelo de gestão aplicado seja eficiente e alinhado com as perspetivas globais do mercado.

O sistema bancário constitui um elemento indispensável na produção de recursos, nomeadamente recursos de natureza financeira, que sustentam o desenvolvimento de qualquer atividade económica. Assim, a utilização de metodologias de avaliação de desempenho, como a DEA, pode auxiliar nas tomadas de decisões que exijam analisar o comportamento de múltiplos fatores em simultâneo.

Com o presente capítulo pretende-se apresentar um estudo prático através da aplicação de alguns dos modelos DEA mencionados no capítulo anterior ao setor bancário português. Para tal, escolheu-se avaliar dezanove instituições bancárias que operavam em Portugal durante o ano de 2020, algumas das quais apresentaram resultados negativos. Assim, este estudo visa determinar o índice de eficiência dessas instituições bem como estabelecer um *ranking* completo das mesmas.

O resto deste capítulo é estruturado da forma que se segue. Na secção 4.2, são apresentados os dados relativos aos *inputs* e *outputs* das dezanove instituições bancárias que operavam em Portugal em 2020, descrevendo-se a forma como os mesmos foram recolhidos, assim como a seleção dos modelos a aplicar neste estudo. De seguida, na secção 4.3, faz-se a apresentação dos resultados obtidos e é efetuada a respetiva análise.

## 4.2. Seleção dos dados e dos modelos

Para a realização deste estudo prático, foram utilizados dados contabilísticos de dezanove instituições bancárias, incluindo bancos comerciais e bancos de investimento, que operavam em Portugal no ano de 2020. Esses dados foram extraídos do boletim estatístico anual nº 57 da Associação Portuguesa de Bancos (APB), principal entidade que representa o setor bancário em Portugal. Esse boletim estatístico contém informação financeira, individual e consolidada, das instituições bancárias associadas, com referência a 31 de dezembro de 2020, através de uma ficha técnica com as respetivas Demonstrações Financeiras (Balanço, Demonstração dos Resultados, Demonstração do Rendimento Integral, Demonstração das Alterações nos Capitais Próprios e Demonstração dos Fluxos de Caixa sempre que disponíveis).

A escolha de *inputs* e *outputs* constitui uma fase crucial na aplicação dos modelos DEA, na medida em que estes parâmetros devem refletir a atividade desempenhada pelas instituições em avaliação e as estratégias de gestão aplicadas. Assim, tendo em conta os indicadores disponibilizados no boletim da APB, foram selecionados para *outputs* os indicadores que melhor refletiam o resultado das decisões tomadas e a seleção dos *inputs* foi baseada em indicadores relevantes para a obtenção desses *outputs*. Foram então selecionados três *inputs* e três *outputs*.

Os *inputs* selecionados foram os seguintes:

- *Input* 1 – Número de funcionários;
- *Input* 2 – Depósitos (em milhares de euros);
- *Input* 3 – Capital Próprio (em milhares de euros).

O número de funcionários representa o número efetivo de profissionais ao serviço da instituição, ou seja, são os principais intervenientes nas mais diversas operações bancárias. O seu valor no volume de negócio traduz-se no capital humano, que constitui um dos maiores ativos de cada instituição. Logo, torna-se um fator importante a considerar aquando da avaliação do desempenho de qualquer organização. Relativamente aos depósitos, são uma das principais operações bancárias e fonte de financiamento dos bancos, pelo que constituem um recurso fundamental para o normal funcionamento das instituições. Por último, o capital próprio é o valor líquido do património de uma empresa, isto é, representa a diferença entre o património que a instituição possui (ativos) e o valor das suas dívidas para com terceiros

(passivos), expressando o valor contabilístico da instituição, que é um indicador muito importante para a análise e avaliação da mesma.

Para os *outputs*, foram selecionados os seguintes:

- *Output 1* – Empréstimos (em milhares de euros);
- *Output 2* – Resultado Líquido (em milhares de euros);
- *Output 3* – Margem Financeira (em milhares de euros).

Tal como os depósitos, os empréstimos fazem parte das operações bancárias e representam o crédito concedido aos clientes, um dos principais produtos no processo de produção de uma instituição bancária. Já o resultado líquido traduz a *performance* económico-financeira da instituição num determinado período, ou seja, corresponde aos custos e proveitos, de natureza operacional, financeira e extraordinária, imputáveis à instituição no período em causa. É um indicador importante para a análise financeira bem como para a determinação de rácios de rentabilidade. Por sua vez, a margem financeira é um indicador bastante utilizado na análise financeira de qualquer organização que tenha produtos financeiros ou recursos de terceiros. No caso específico dos bancos, este indicador resulta da diferença entre os juros cobrados pelos créditos concedidos (taxa de juro ativa) e os juros pagos aos aforradores pelos montantes que estes confiam aos bancos (taxa de juro passiva), representando, assim, o ganho das instituições bancárias nas referidas operações.

A informação relativa aos *inputs* e *outputs* para cada instituição bancária é apresentada na tabela 4.1, onde, da esquerda para a direita, nas duas primeiras colunas são identificadas as instituições bancárias (DMUs) em análise, nas três colunas seguintes constam os valores dos *inputs* e nas três últimas colunas encontram-se os valores dos *outputs*.

Para a realização deste estudo foram utilizados os dois tipos de modelos DEA para valores negativos, abordados no capítulo 3. Assim, relativamente ao primeiro tipo, que engloba os modelos que são invariantes à translação, foram utilizados os modelos RAM e BAM. Atendendo a que os dados selecionados apenas apresentam valores negativos nos *outputs*, foi também usado o modelo BCC orientado para *inputs* que, como se viu, é invariante à translação dos *outputs*. Quanto ao segundo tipo, que engloba modelos concebidos para tratar diretamente com dados negativos, foram utilizados os modelos RDM, MSBM e BP\_SBM. Por fim, foi também usado o modelo de super-eficiência BP\_SBM para a obtenção de um *ranking* completo das instituições bancárias em estudo.

Tabela 4.1 - Dados relativos aos *inputs* e *outputs*

Instituições Bancárias	<i>Input</i> 1	<i>Input</i> 2	<i>Input</i> 3	<i>Output</i> 1	<i>Output</i> 2	<i>Output</i> 3
01 Banco BIC Português	1.461	6.400.552	557.507	4.847.734	-5.045	117.386
02 Banco Comercial Português	6.756	52.599.163	5.981.786	35.379.967	50.633	794.419
03 Banco Ativo Bank	187	2.062.694	153.541	1.272.279	11.961	22.878
04 Banco de Investimento Global	264	1.652.777	415.986	34.188	24.173	14.651
05 Banco Finantia	155	456.910	344.400	293.484	26.565	7.983
06 Caixa Central de Crédito Agrícola Mútuo	3.665	12.601.514	380.331	2.409.426	27.762	48.639
07 Caixa Económica Montepio Geral	3.313	14.928.798	1.373.398	11.188.472	-116.621	194.604
08 Caixa Geral de Depósitos	6.244	68.509.727	7.806.696	42.104.453	406.539	704.259
09 Caixa – Banco de Investimento	95	60.863	370.341	7.083	10.678	4.034
10 Banco BPI	4.776	31.512.869	3.110.629	24.224.617	87.822	449.897
11 Banco Santander Totta	5.969	45.013.542	3.990.609	38.614.687	275.210	768.076
12 Banco Bilbao Vizcaya Argentina (Portugal)	367	3.395.380	332.858	2.704.270	10.580	41.012
13 Bankinter	772	7.093.633	18.386	6.460.882	19.306	66.343
14 BNP Paribas	3.364	1.120.286	115.408	307.996	7.785	6.426
15 Caixa Económica da Misericórdia de Angre do Heroísmo	135	418.981	26.826	238.293	-204	6.743
16 Novo Banco	4.239	36.556.975	2.753.089	21.930.730	-1.374.246	567.999
17 Haitong	184	1.121.992	588.942	319.822	-12.034	2.744
18 Montepio Investimento	21	271.591	178.459	120.067	-3.181	4.060
19 BNP Paribas Securities	2.041	9.775	3.959	-	3.720	-129

Fonte: Elaboração própria.

### 4.3. Resultados e respetiva análise

Nesta seção apresentam-se os resultados relativos aos índices de eficiência obtidos pelos modelos selecionados, bem como uma análise dos mesmos. Para a obtenção dos índices de eficiência fornecidos pelos modelos BCC e BP\_SBM, foi utilizada a versão gratuita do *software* MaxDEA, que pode ser obtida em <http://maxdea.com/>. Para a obtenção dos índices

fornecidos pelos restantes modelos, RAM, BAM, RDM e MSBM, utilizou-se o módulo de programação linear, bem como o módulo OPL (*Optimization Programming Language*), do pacote CPLEX *Optimization Studio Academic Research 20.1*.

Os resultados obtidos constam da tabela 4.2 onde nas duas primeiras colunas da tabela, da esquerda para a direita, identificam-se as instituições bancárias (DMUs) e nas colunas seguintes apresentam-se os índices de eficiência obtidos por cada modelo selecionado. Na última linha da tabela apresenta-se a eficiência média para cada um dos modelos.

Tabela 4.2 - Resultados obtidos pelos modelos selecionados

Instituições Bancárias:	BCC-I	RAM	BAM	RDM	MSBM	BP-SBM
01 Banco BIC Português	1	1	1	1	1	1
02 Banco Comercial Português	1	1	1	1	1	1
03 Ativo Bank	1	1	1	1	1	1
04 Banco de Investimento Global	0,7389	0,9907	0,8377	0,9885	0,6769	0,0614
05 Banco Finantia	1	1	1	1	1	1
06 Caixa Central de Crédito Agrícola Mútuo	0,5220	0,8886	0,6865	0,9631	0,3851	0,2203
07 Caixa Económica Montepio Geral	0,8607	0,9233	0,7684	0,9591	0,5896	0,6167
08 Caixa Geral de Depósitos	1	1	1	1	1	1
09 Caixa – Banco de Investimento	1	1	1	1	1	1
10 Banco BPI	0,8899	0,9367	0,8375	0,9340	0,7291	0,7731
11 Banco Santander Totta	1	1	1	1	1	1
12 Banco Bilbao Vizcaya Argentina (Portugal)	1	1	1	1	1	1
13 Bankinter	1	1	1	1	1	1
14 BNP Paribas	0,4946	0,9177	0,7395	0,9891	0,4791	0,3019
15 Caixa Económica da Misericórdia de Angre do Heroísmo	1	1	1	1	1	1
16 Novo Banco	1	1	1	1	1	1
17 Haitong	0,4062	0,9829	0,6394	0,9852	0,2853	0,2116
18 Montepio Investimento	1	1	1	1	1	1
19 BNP Paribas Securities	1	1	1	1	1	1
Eficiências médias	0,8901	0,9810	0,9215	0,9905	0,8497	0,7992

Fonte: Elaboração própria.

Da observação da tabela 4.2, verifica-se que todos os modelos selecionados permitiram identificar 13 instituições bancárias, das 19 analisadas, com índice de eficiência igual a 1 e, por isso, consideradas eficientes. As restantes 6 instituições possuem índices de eficiência inferiores a 1 em todos os modelos, pelo que essas instituições são consideradas ineficientes, sendo elas o Banco de Investimento Global (04), Caixa Central de Crédito Agrícola Mútuo (06), Caixa Económica Montepio Geral (07), Banco BPI (10), BNP Paribas (14) e Haitong (17). Para estas, os índices de eficiência são todos diferentes, o que possibilita a diferenciação destas instituições em cada modelo e, conseqüentemente, estabelecer um *ranking* em termos de superioridade de *performance* para as mesmas.

Para uma melhor comparação dos modelos, calculou-se a eficiência média obtida em cada modelo. Assim, o modelo RDM é o que obteve maior média (0,9905) seguido de perto pelo modelo RAM (0,9810) e dos modelos BAM (0,9215), BCC-I (0,8901), MSBM (0,8497) e BP-SBM (0,7992). Note-se que os modelos que apresentam maior média são os que menos discriminam, pelo que, neste caso, os modelos RDM e RAM são os que menos discriminam enquanto os modelos BP-SBM e MSBM são os que mais discriminam.

Nas tabelas 4.3 e 4.4 apresentam-se as instituições bancárias de referência assim como os correspondentes valores de *lambda* (entre parêntesis) para as instituições bancárias ineficientes obtidas, respetivamente, através dos modelos invariantes à translação e dos modelos que permitem tratar dados negativos diretamente.

Tabela 4.3 – Instituições bancárias ineficientes e os respetivos *Benchmarks* pelos modelos BCC-I, RAM e BAM

Instituições Bancárias	BCC-I	RAM	BAM
04 Banco de Investimento Global	03(0,1949); 05(0,7729); 11(0,0027); 13(0,0295)	03(0,0844); 05(0,7559); 13(0,1598)	05(0,8175); 11(0,0091); 15(0,1735)
06 Caixa Central de Crédito Agrícola Mútuo	05(0,2293); 11(0,0265); 13(0,7442)	11(0,0330); 13(0,9670)	11(0,0330); 13(0,9670)
07 Caixa Económica Montepio Geral	11(0,2147); 13(0,4488); 19(0,3366)	11(0,1828); 13(0,8172)	11(0,1828); 13(0,8172)
10 Banco BPI	11(0,5525); 13(0,4475)	11(0,5525); 13(0,4475)	11(0,6440); 13(0,3560)
14 BNP Paribas	05(0,1228); 11(0,0024); 13(0,0512); 15(0,0472); 19(0,7764)	03(0,4242); 05(0,1057); 15(0,4701)	05(0,2477); 13(0,0187); 15(0,4806); 19(0,2529)
17 Haitong	09(0,3443); 13(0,0376); 18(0,6180)	03(0,1725); 13(0,0628); 15(0,7646)	13(0,0315); 18(0,9685)

Fonte: Elaboração própria.

Tabela 4.4 - Instituições bancárias ineficientes e os respectivos *Benchmark* pelos modelos RDM, MSBM e BP-SBM

Instituições Bancárias	RDM	MSBM	BP-SBM
04 Banco de Investimento Global	03(0,1600); 05(0,8227); 11(0,0174)	05(0,8136); 11(0,0090); 15(0,1727)	05(0,7806); 13(0,1808); 15(0,0233); 18(0,0154)
06 Caixa Central de Crédito Agrícola Mútuo	11(0,0876); 13(0,9124)	05(0,5163); 11(0,0180); 13(0,4539)	11(0,0330); 13(0,9670)
07 Caixa Económica Montepio Geral	11(0,2457); 13(0,4588); 19(0,2955)	11(0,1619); 13(0,7240)	11(0,1828); 13(0,8172)
10 Banco BPI	11(0,5892); 13(0,4109)	11(0,5115); 13(0,4143)	11(0,5525); 13(0,4475)
14 BNP Paribas	05(0,1800); 11(0,0120); 13(0,0672); 19(0,7408)	05(0,2477); 13(0,0187); 15(0,4806); 19(0,2529)	05(0,0742); 13(0,1521); 19(0,7737)
17 Haitong	09(0,6631); 11(0,0042); 13(0,1150); 18(0,2177)	13(0,0312); 18(0,9599)	11(0,0190); 18(0,9810)

Fonte: Elaboração própria.

Das duas tabelas observa-se que existe uma certa predominância de instituições bancárias eficientes consideradas como referência para as instituições ineficientes pelos modelos utilizados. O conjunto de referência para cada instituição ineficiente difere, em geral, em cada modelo, quer pela própria composição do conjunto, como também pela importância de cada instituição eficiente.

Para se ter uma ideia da importância das instituições de referência em cada modelo, note-se, por exemplo, os resultados obtidos para a instituição bancária Banco de Investimento Global (04). O modelo BCC-I aponta para um conjunto de referência constituído pelas instituições Ativo Bank (03), Banco Finantia (05), Banco Santander Totta (11) e Bankinter (13) e, de acordo com os respetivos valores de lambda, conclui-se que a instituição bancária mais importante é a 05 (0,7729) e a menos importante é a 11 (0,0027). O modelo BAM identifica, também, a instituição 05 como a mais importante e a 11 como a menos importante, no entanto, neste modelo a importância da instituição 05 (0,8175) é ainda maior. A mesma análise poderá ser feita aos restantes modelos.

Apesar de existirem algumas instituições bancárias identificadas várias vezes como referência para as demais, nalguns casos revelam-se pouco importantes, uma vez que possuem valores muito baixos. É o caso, por exemplo, da instituição Bankinter (13) que é identificada 6 vezes no modelo BCC-I, porém apresenta valores poucos significativos, próximos de 0, para as instituições Banco de Investimento Global (04), BNP Paribas (14) e Haitong (17).

Ainda da observação das tabelas 4.3 e 4.4, verifica-se que as instituições Caixa Central de Crédito Agrícola Mútuo (06), Caixa Económica Montepio Geral (07) e Banco BPI (10), possuem conjuntos de referência semelhantes nos diversos modelos aplicados e com valores de lambda bastante próximos. Tome-se como exemplo a instituição 10 em que, em todos os modelos, as instituições 11 e 13 são identificadas como referência, sendo a 11 considerada a mais importante e a 13 a menos importante, também em todos os modelos. Nos modelos BCC-I, RAM e BP-SBM, os valores de lambda são iguais e nos restantes modelos existe uma ligeira diferença.

De seguida, na tabela 4.5, apresenta-se um resumo do número de vezes em que uma instituição bancária eficiente é identificada como referência para uma instituição bancária ineficiente em cada modelo.

Tabela 4.5 - Número de vezes que uma instituição bancária eficiente é referência em cada modelo selecionado

Instituições Bancárias:	BCC-I	RAM	BAM	RDM	MSBM	BP-SBM
01 Banco BIC Português	0	0	0	0	0	0
02 Banco Comercial Português	0	0	0	0	0	0
03 Ativo Bank	1	3	0	1	0	0
05 Banco Finantia	3	2	2	2	3	2
08 Caixa Geral de Depósitos	0	0	0	0	0	0
09 Caixa – Banco de Investimento	1	0	0	1	0	0
11 Banco Santander Totta	5	3	4	6	4	4
12 Banco Bilbao Vizcaya Argentina (Portugal)	0	0	0	0	0	0
13 Bankinter	6	5	5	5	5	5
15 Caixa Económica da Misericórdia de Angre do Heroísmo	1	2	2	0	2	2
16 Novo Banco	0	0	0	0	0	0
18 Montepio Investimento	1	0	1	1	1	2
19 BNP Paribas Securities	2	0	1	2	1	1

Fonte: Elaboração própria.

Da leitura da tabela 4.5, verifica-se que existem cinco instituições eficientes que não são referência para qualquer instituição ineficiente e em todos os modelos, que são as instituições Banco BIC Português (01), Banco Comercial Português (02), Caixa Geral de Depósitos (08), Banco Bilbao Vizcaya Argentina (Portugal) (12) e Novo Banco (16). Este número é obtido apenas pelo modelo BCC-I, sendo maior no caso dos restantes modelos, mais concretamente, seis no modelo RDM, sete nos modelos BAM, MSBM e BP-SBM, e oito no modelo RAM. A instituição Caixa-Banco Investimento (09) é a que surge menos vezes como referência, apenas duas. A instituição Bankinter (13), que surge 31 vezes, seguida da instituição Banco Santander (11), que surge 26 vezes, são as instituições que mais vezes surgem como referência. Por sua vez, a instituição Banco Finantia (05) surge 14 vezes como referência, seguida pela instituição Caixa Económica da Misericórdia de Angra do Heroísmo (15) que surge 9 vezes. As instituições BNP Paribas Securities (19) e Montepio Investimento (18) surgem sete e seis vezes como referência, respetivamente. Por fim, temos a instituição Banco ActivoBank (03) que surge cinco vezes como referência.

Relativamente aos modelos, através desta análise intuitiva dos *benchmarks*, nota-se que os modelos BCC-I e MSBM são os que mais permitem distinguir as instituições eficientes entre si, tendo em conta o número de vezes que aparecem como referência. Distinguem, então, quatro instituições, e, desta forma, é possível estabelecer um *ranking* sobre as mesmas. De seguida tem-se o modelo BP-SBM, com 3 instituições passíveis de serem distinguidas. Já nos modelos BAM, RDM, só é possível diferenciar duas instituições e o modelo RAM é o que menos discrimina as instituições, sendo possível diferenciar apenas o Bankinter (13) das demais.

O número de vezes que uma DMU eficiente é referência para uma não eficiente poderia, em princípio, ser usado para discriminar as DMUs eficientes e, deste modo, estabelecer um *ranking* sobre as DMUs eficientes. Contudo, essa abordagem intuitiva não é possível no caso em estudo devido ao elevado número de DMUs eficientes (treze) face ao número de DMUs ineficientes (seis). Neste caso, o número máximo de DMUs que poderiam ser discriminadas seria seis, atingido se todas as DMUs ineficientes tiverem um número diferente de DMUs de referência. De outro modo, esta abordagem só fará sentido e poderá ter algum efeito desejado num caso, de certo modo inverso, em que o número de DMUs eficientes é consideravelmente menor do que o número das ineficientes.

A fim de discriminar as instituições consideradas eficientes pelos modelos selecionados e, deste modo, estabelecer um *ranking* sobre todas as instituições utilizou-se o método de super-

eficiência BP-SBM (SE\_BP-SBM), proposto por Tone, Chang e Wu (2020), cujos resultados constam da tabela 4.6. Da observação desses resultados verifica-se que o referido método permite discriminar todas as instituições e, conseqüentemente, estabelecer um *ranking* completo sobre as mesmas.

Tabela 4.6 – Resultados obtidos pelo modelo de super-eficiência BP-SBM para retornos variáveis de escala

Instituições Bancárias:	BP-SBM	SE_BP-SBM	<i>Ranking</i>
01 Banco BIC Português	1	1,0250	9
02 Banco Comercial Português	1	1,0112	11
03 Ativo Bank	1	1,0717	7
04 Banco de Investimento Global	0,0614	-	19
05 Banco Finantia	1	1,0035	12
06 Caixa Central de Crédito Agrícola Mútuo	0,2203	-	17
07 Caixa Económica Montepio Geral	0,6167	-	15
08 Caixa Geral de Depósitos	1	1,0547	8
09 Caixa – Banco de Investimento	1	2,1301	5
10 Banco BPI	0,7731	-	14
11 Banco Santander Totta	1	1,2688	6
12 Banco Bilbao Vizcaya Argentina (Portugal)	1	1,0016	13
13 Bankinter	1	2,8163	3
14 BNP Paribas	0,3019	-	16
15 Caixa Económica da Misericórdia de Angra do Heroísmo	1	2,8315	2
16 Novo Banco	1	1,0169	10
17 Haitong	0,2116	-	18
18 Montepio Investimento	1	2,5293	4
19 BNP Paribas Securities	1	16,8952	1

Fonte: Elaboração própria.

Relativamente ao *ranking* obtido, verifica-se que o top 3 é constituído pelas instituições BNP Paribas Securities (19) que ocupa a posição 1, seguida da Caixa Económica da Misericórdia de Angra do Heroísmo (15) na posição 2 e do Bankinter (13) na posição 3. Nos últimos três

lugares do *ranking* surgem as instituições Caixa Central de Crédito Agrícola Mútuo (06), na posição 17, o Haitong (17) na posição 18 e o Banco de Investimento Global (04) na posição 19.

Na tabela 4.7 apresentam-se os resultados obtidos pelo método de super-eficiência BP-SBM para retornos constantes de escala. De referir que os retornos constantes e os retornos variáveis são os dois tipos de retornos de escala mais usados no âmbito da DEA.

Tabela 4.7 – Resultados obtidos pelo modelo de super-eficiência BP-SBM para retornos constantes de escala

Instituições Bancárias:	BP-SBM	SE_BP-SBM	<i>Ranking</i>
01 Banco BIC Português	1	1,0249	8
02 Banco Comercial Português	0,1060	0,1060	17
03 Ativo Bank	1	1,0676	7
04 Banco de Investimento Global	0,0467	0,0467	19
05 Banco Finantia	0,7171	0,7171	11
06 Caixa Central de Crédito Agrícola Mútuo	0,1152	0,1152	15
07 Caixa Económica Montepio Geral	0,1101	0,1101	16
08 Caixa Geral de Depósitos	0,0689	0,0689	18
09 Caixa – Banco de Investimento	1	2,0157	2
10 Banco BPI	0,1229	0,1229	14
11 Banco Santander Totta	1	1,0897	6
12 Banco Bilbao Vizcaya Argentina (Portugal)	0,8047	0,8047	10
13 Bankinter	1	2,7967	1
14 BNP Paribas	0,2180	0,2180	12
15 Caixa Económica da Misericórdia de Angre do Heroísmo	1	1,4582	5
16 Novo Banco	1	1,0167	9
17 Haitong	0,2116	0,2116	13
18 Montepio Investimento	1	1,7094	3
19 BNP Paribas Securities	1	1,4770	4

Fonte: Elaboração própria.

Considerando retornos constantes de escala, verifica-se que neste caso existem nove instituições bancárias eficientes, menos quatro do que no caso de retornos variáveis de escala, a saber, o Banco Comercial Português (02), Banco Finantia (05), Caixa Geral de Depósitos (08) e Banco Bilbao Vizcaya Argentaria (Portugal) (12).

Para facilitar a comparação entre os *rankings* obtidos para retornos variáveis e retornos constantes de escala, pelos modelos BP-SBM e super-eficiência BP-SBM apresentados nas tabelas 4.6 e 4.7, considere-se o gráfico apresentado na figura 4.1.

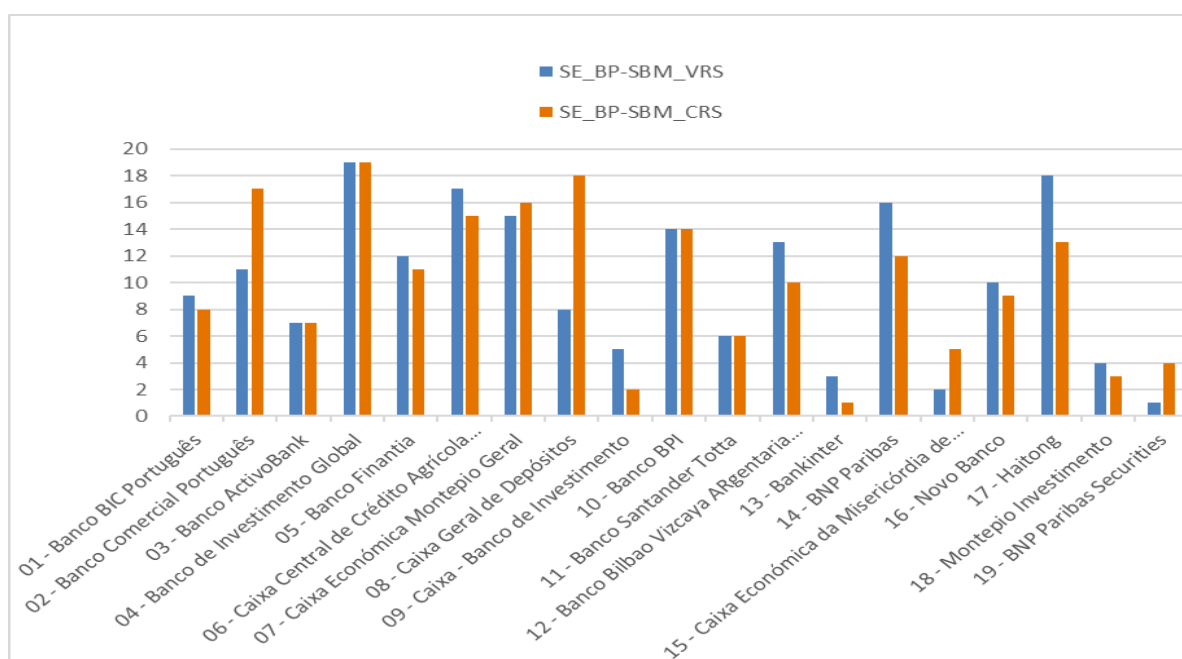


Figura 4.1 - Gráfico dos *rankings* obtidos pelos modelos de super-eficiência BP-SBM para retornos variáveis e constantes de escala.

Fonte: Elaboração própria

Da observação do gráfico da figura 4.1, verifica-se que quatro instituições ocupam a mesma posição nos *rankings* considerando quer retornos variáveis quer retornos constantes de escala, que são as instituições Banco Santander Totta (11), Banco ActivoBank (03), Banco BPI (10) e Banco de Investimento Global (04), ocupando as posições 6, 7, 14, e 19, respetivamente. As instituições Caixa Geral de Depósitos (08), Banco Comercial Português (02) e Haitong (17) são as que apresentam maiores diferenças nos *rankings*, com diferenças de 10, 6 e 5, respetivamente, sendo que as duas primeiras deixaram de ser eficientes, como já se viu. Nas restantes instituições, existem cinco com a diferença entre os *rankings* de 1, duas com a diferença de 2, quatro com a diferença de 3 e uma com a diferença de 4.

## 5. Conclusões

As organizações têm sido objeto de sucessivas alterações de mercado, derivadas de mudanças a nível tecnológico, económico e sociocultural. Neste sentido, a busca por novas formas de gestão que tenham em conta diversos fatores, internos e externos à organização, é cada vez mais recorrente. A avaliação de desempenho organizacional revela-se um importante instrumento de gestão, na medida em que pode ser usada como forma de reconhecer as lacunas existentes e redirecionar as estratégias com vista a otimizar os processos e os resultados das organizações. Contudo, a avaliação de desempenho organizacional baseada em métodos/modelos tradicionais, sobretudo, em indicadores financeiros, tem-se mostrado insuficiente.

De forma a contornar essas insuficiências, novos métodos/modelos têm sido desenvolvidos. Esses métodos usam indicadores não financeiros que, em combinação com os indicadores financeiros, são capazes de fornecer uma visão mais global e realista no âmbito da avaliação de desempenho organizacional. Nesse contexto de busca de inovações e métodos mais eficientes na avaliação de desempenho organizacional, surge a metodologia DEA, a qual permite obter a eficiência relativa de organizações que usam múltiplos recursos para produzir múltiplos produtos. Apesar do seu notável contributo, os modelos tradicionais da DEA têm revelado algumas limitações em algumas aplicações reais, levando ao surgimento de vários modelos para colmatar essas limitações.

Uma das limitações dos modelos tradicionais diz respeito a não negatividade assumida para os dados relativos a *inputs* e *outputs*. Não obstante, existem aplicações práticas em que essa condição não é verificada e, por isso, os modelos tradicionais tornam-se inadequados. Tendo em consideração o exposto, diversos estudos foram desenvolvidos de forma a obter modelos capazes de tratar com dados negativos.

No presente trabalho, foram apresentados os dois tipos de modelos DEA capazes de tratar com dados negativos. Os modelos que, apesar de serem concebidos para dados positivos ou não negativos, satisfazem a propriedade da invariância à translação e, por isso, permitem tratar com dados negativos. O segundo tipo engloba modelos capazes de tratar diretamente com dados negativos.

De forma a obter uma ideia mais precisa desses modelos, os mesmos foram aplicados a uma situação real, mais especificamente à avaliação de dezanove instituições bancárias que operavam em Portugal em 2020 e que incluíam alguns dados negativos.

Dessas dezanove instituições bancárias, os modelos permitiram identificar treze instituições como eficientes e, conseqüentemente, seis como ineficientes. Para as instituições ineficientes, foram identificadas as instituições bancárias eficientes que são referência para que as mesmas se tornassem eficientes. Estas instituições de referência poderiam ser usadas para estabelecer um *ranking* das instituições, tendo em conta o número de vezes que uma instituição eficiente é referência. No entanto, esta abordagem intuitiva não permitiu estabelecer um *ranking* completo devido ao elevado número de instituições eficientes (treze) face ao número de instituições ineficientes (seis).

De modo a contornar a situação supra e estabelecer um *ranking* completo sobre todas as instituições, utilizou-se o método de super-eficiência BP-SBM, proposto por Tone, Chang e Wu (2020), para retornos constantes e retornos variáveis de escala, que são os dois tipos de retornos de escala mais usados no âmbito da DEA. Este método permitiu, em ambos os casos, estabelecer um *ranking* completo para todas as instituições em avaliação.

## Referências bibliográficas

- Aida, K., Cooper, W., Pastor, J., & Sueyoshi, T. (1998). Evaluating Water Supply Services in Japan with RAM: A Range-Adjusted Measure of Inefficiency. *Omega*, 26(2), 207-232.
- Ali, A. & Seiford, L. (1990). Translation Invariance in Data Envelopment Analysis. *Operations Research Letters*, 9, 403-405.
- Andersen, P., & Petersen, N. (1993). A procedure for ranking efficient units in data envelopment analysis. *Management science*, 73, 1261-1264
- Associação Portuguesa de Bancos (2022). Boletim Estatístico N°57, 2020 Anual. Disponível em: [https://www.apb.pt/content/files/19.07.2021\\_-\\_Boletim\\_Estatistico\\_Anual\\_-\\_Dez\\_2020.pdf](https://www.apb.pt/content/files/19.07.2021_-_Boletim_Estatistico_Anual_-_Dez_2020.pdf), consultado a 25 de janeiro de 2022.
- Banker, R., Charnes, A., & Cooper, W. (1984). Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis. *Management science*, 30(9), 1078-1092.
- Bol, G. (1986). On technical efficiency measures: A remark. *Journal of Economic Theory*, 38(2), 380-385.
- Brealey, R.A., Myers, S.C. (1998). Princípios de Finanças Empresariais (3ª ed.), Alfragide: McGraw-Hill.
- Charnes, A., & Cooper, W. (1962). Programming with linear fractional functionals. *Naval Research Logistics (NRL)*, 9, 181-186.
- Charnes, A., Cooper, W., & Rhodes, E. (1978). Measuring the Efficiency of Decision Making Units. *European Journal of Operational Research*, 2(6), 429-444.
- Charnes, A., Cooper, W., Golany, B., Seiford, L., & Stutz, J. (1985). *Foundations of Data Envelopment Analysis for Pareto-Koopmans Efficient Empirical Production Functions*. Center for Cybernetic Studies: University of Texas.
- Chiavenato, I. (2004). *Gestão de Pessoas* (2ª ed.). Rio de Janeiro: Elsevier.
- Coelli, T. J., Rao, D. S. P., O'Donnell, C. J., & Battese, G. E. (2005). An introduction to efficiency and productivity analysis. *Springer Science & Business Média*.

- Cooper, C. L. (2005). The future of work: careers, stress and well-being. *Career Development International*, 10(5), 396-399.
- Cooper, W., Pastor, J., Borrás, F., Aparicio, J., & Pastor, D., (2011), BAM: A bounded adjusted measure of efficiency with bounded additive models, *Journal of Productivity Analysis*, 35(2), 85-94.
- Cooper, W., Park, K., & Pastor, J. (1999). RAM: A Range Adjusted Measure of Inefficiency for Use with Additive Models, and Relations to Other Models and Measures in DEA. *Journal of Productivity Analysis*, 11, 5–42.
- Cooper, W., Seiford, L., & Tone, K. (2007b). *Data envelopment analysis: A comprehensive text with models, applications, references and DEA – Solver software*. New York: Springer Science + Business Média.
- Cooper, W., Seiford, L., Tone, K., & Zhu, J. (2007). Some models and measures for evaluating performances with DEA: past accomplishments and future prospects. *Journal of Productivity Analysis*, 28(3), 151–163.
- Debreu, G. (1951). The coefficient of resource utilization. *Econometrica*, 19.
- Drucker, P. F. (1999). Knowledge-worker productivity: The biggest challenge. *California management review*, 41(2).
- Emrouznejad, A., Parker, B., & Tavares, G. (2008). Evaluation of research in efficiency and productivity: A survey and analysis of the first 30 years of scholarly literature in DEA. *Socio-Economic Planning Sciences*, 42(3), 151-157.
- Emrouznejad, A., & Yang, G. (2018). A survey and analysis of the first 40 years of scholarly literature in DEA: 1978-2016. *Socio-Economic Planning Sciences*, 61, 4-8.
- Färe, R., & Lovell, C. (1978). Measuring the technical efficiency of production. *Journal of Economic theory*, 19(1), 150-162.
- Farrell, M. (1957). The measurement of productive efficiency. *Journal of the Royal Statistical Society*, 120(3), 253-290.
- Ghalayini, A. M., & Noble, J. S. (1996). The changing basis of performance measurement. *International Journal of Operations & Production Management*, 16(8), 63-80.

- Kaplan, R. S., & Norton, D. P. (1996). *The balanced scorecard: translating strategy into action*. Harvard Business Press.
- Kassai, S. (2002). *Utilização da análise por envoltória de dados (DEA) na análise de demonstrações contábeis* (Doctoral dissertation, Universidade de São Paulo).
- Koopmans, T. (1951). Analysis of production as an efficient combination of activities: chapter 3. *New York: J. Wiley*, 33-97.
- Liu, J. S., Lu, W., Lu, Y. Y., & Lin, B. J. (2013b). A survey of DEA applications. *Omega*, 41, 893-902.
- Lovell, C. & Pastor, J. (1995). Units Invariant and Translation Invariant DEA Models. *Operations Research Letters*, 18(3), 147-151.
- MaxDEA for Data Envelopment Analysis, MaxDEA Basic 8.15, consultado em <http://maxdea.com/>, 18 de Março de 2022.
- Pareto, V. (190). 1971. *Manual of Political Economy*.
- Pastor, J., Ruiz, J., & Sirvent, I. (1999). Theory and Methodology: An enhanced DEA Russell graph efficiency measure. *European Journal of Operational Research*, 115, 596-607.
- Portela, S., Thanassoulis, E., & Simpson, G. (2004). Negative data in DEA: A directional distance approach applied to bank branches. *Journal of the Operational Research Society*, 55(10).
- Pourmahmoud, J., Hatami-Marbin, A., & Babazadeh, E. (2016). A comment on a new super-efficiency model in the presence of negative data. *Journal of the Operational Research Society*, 67(3), 530-534.
- Sharp, J., Meng, W., & Liu, W., (2007). A modified slacks-based measure model for data envelopment analysis with ‘natural’ negative outputs and inputs. *Journal of the Operational Research Society*, 58(12), 1672-1677.
- Shen, W., Zhang, D., Liu, W., & Yang, G. (2016). Increasing discrimination of DEA evaluation by utilizing distances to anti-efficient frontiers. *Computers & Operations Research*, 75, 163-173.
- Tone, K. (2001). A slacks-based measure of efficiency in data envelopment analysis. *European journal of operational research*, 130(3), 498-509.

Tone, K., Chang, T.-S., & Wu, C.-H., (2020). Handling negative data in slacks-based measure data envelopment analysis models. *European Journal of Operational Research*, 282(3), 926-935.

Watling, B. (2000). *Avaliação de recursos humanos ajude a sua equipa a obter os resultados que ambos ambicionam*. Lisboa: Prefácio.

## APÊNDICES

### APÊNDICE A – Dados modificados para o modelo BCC-I

Instituições Bancárias	<i>Input 1</i>	<i>Input 2</i>	<i>Input 3</i>	<i>Output 1</i>	<i>Output 2</i>	<i>Output 3</i>
01 Banco BIC Português	1.461	6.400.552	557.507	4.847.734	1.396.202	117.516
02 Banco Comercial Português	6.756	52.599.163	5.981.786	35.379.967	1.424.880	794.549
03 Banco Ativo Bank	187	2.062.694	153.541	1.272.279	1.386.208	23.008
04 Banco de Investimento Global	264	1.652.777	415.986	34.188	1.398.420	14.781
05 Banco Finantia	155	456.910	344.400	293.484	1.400.812	8.113
06 Caixa Central de Crédito Agrícola Mútuo	3.665	12.601.514	380.331	2.409.426	1.402.009	48.769
07 Caixa Económica Montepio Geral	3.313	14.928.798	1.373.398	11.188.472	1.257.626	194.734
08 Caixa Geral de Depósitos	6.244	68.509.727	7.806.696	42.104.453	1.780.786	704.389
09 Caixa – Banco de Investimento	95	60.863	370.341	7.083	1.384.925	4.164
10 Banco BPI	4.776	31.512.869	3.110.629	24.224.617	1.462.069	450.027
11 Banco Santander Totta	5.969	45.013.542	3.990.609	38.614.687	1.649.457	768.206
12 Banco Bilbao Vizcaya Argentina (Portugal)	367	3.395.380	332.858	2.704.270	1.384.827	41.142
13 Bankinter	772	7.093.633	18.386	6.460.882	1.393.553	66.473
14 BNP Paribas	3.364	1.120.286	115.408	307.996	1.382.032	6.556
15 Caixa Económica da Misericórdia de Angre do Heroísmo	135	418.981	26.826	238.293	1.374.043	6.873
16 Novo Banco	4.239	36.556.975	2.753.089	21.930.730	1	568.129
17 Haitong	184	1.121.992	588.942	319.822	1.362.213	2.874
18 Montepio Investimento	21	271.591	178.459	120.067	1.371.066	4.190
19 BNP Paribas Securities	2.041	9.775	3.959	0	1.377.967	1

**APÊNDICE B – Dados modificados para a aplicação do modelo  
BP-SBM**

Instituições Bancárias	<i>Input 1</i>	<i>Input 2</i>	<i>Input 3</i>	<i>Output 1</i>	<i>Output 2</i>	<i>Output 3</i>
01 Banco BIC Português	1.461	6.400.552	557.507	4.847.734,02	1.396.685,92	117.517,58
02 Banco Comercial Português	6.756	52.599.163	5.981.786	35.379.967,02	1.452.363,92	794.550,58
03 Banco Ativo Bank	187	2.062.694	153.541	1.272.279,02	1.413.691,92	23.009,58
04 Banco de Investimento Global	264	1.652.777	415.986	34.188,02	1.425.903,92	14.782,58
05 Banco Finantia	155	456.910	344.400	293.484,02	1.428.295,92	8.114,58
06 Caixa Central de Crédito Agrícola Mútuo	3.665	12.601.514	380.331	2.409.426,02	1.429.492,92	48.770,58
07 Caixa Económica Montepio Geral	3.313	14.928.798	1.373.398	11.188.472,02	1.285.109,92	194.735,58
08 Caixa Geral de Depósitos	6.244	68.509.727	7.806.696	42.104.453,02	1.808.269,92	704.390,58
09 Caixa – Banco de Investimento	95	60.863	370.341	7.083,02	1.412.408,92	4.165,58
10 Banco BPI	4.776	31.512.869	3.110.629	24.224.617,02	1.489.552,92	450.028,58
11 Banco Santander Totta	5.969	45.013.542	3.990.609	38.614.687,02	1.676.940,92	768.207,58
12 Banco Bilbao Vizcaya Argentina (Portugal)	367	3.395.380	332.858	2.704.270,02	1.412.310,92	41.143,58
13 Bankinter	772	7.093.633	18.386	6.460.882,02	1.421.036,92	66.474,58
14 BNP Paribas	3.364	1.120.286	115.408	307.996,02	1.409.515,92	6.557,58
15 Caixa Económica da Misericórdia de Angredo Heroísmo	135	418.981	26.826	238.293,02	1.401.526,92	6.874,58
16 Novo Banco	4.239	36.556.975	2.753.089	21.930.730,02	27.484,92	568.130,58
17 Haitong	184	1.121.992	588.942	319.822,02	1.389.696,92	2.875,58
18 Montepio Investimento	21	271.591	178.459	120.067,02	1.398.549,92	4.191,58
19 BNP Paribas Securities	2.041	9.775	3.959	0,02	1.405.450,92	2,58