O DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO COM TAREFAS DE REGULARIDADES E SEQUÊNCIAS

Sónia Cristina Oliveira Neto Lima

Dissertação apresentada à Escola Superior de Educação de Lisboa para obtenção do grau de Mestre em Educação Matemática na Educação Pré-escolar e nos 1º e 2º Ciclos do Ensino Básico

2016

O DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO COM TAREFAS DE REGULARIDADES E SEQUÊNCIAS

Sónia Cristina Oliveira Neto Lima

Dissertação apresentada à Escola Superior de Educação de Lisboa para obtenção do grau de Mestre em Educação Matemática na Educação Pré-escolar e nos 1º e 2º Ciclos do Ensino Básico

Orientadora:
Professora Doutora Maria de Lurdes Marquês Serrazina

2016

RESUMO

Este estudo tem como objetivo compreender como tarefas de resolução de problemas com sequências contribuem para o desenvolvimento do raciocínio dos alunos. A investigação baseia-se numa metodologia qualitativa de caráter interpretativo com a realização de uma experiência de ensino, a partir da qual se elaboram quatro casos. Esta foi realizada numa turma do 2.º ano de escolaridade de uma escola pública, no ano letivo 2015/2016, onde a investigadora assume, simultaneamente, o papel de professora. O estudo incidiu em quatro pares de alunos da turma. Os métodos de recolha de dados foram a observação participante com gravação áudio e vídeo e a recolha documental.

Foram apresentadas oito tarefas à turma. Cada par do estudo realizou-as com empenho e dedicação. Naturalmente, uns manifestaram mais confiança na realização das atividades propostas do que outros. Foi percetível a utilização de diferentes estratégias, tendo-se verificado que a representação numérica é mais frequentemente adotada pelos alunos que revelam menor dificuldade. Os outros alunos recorrem preferencialmente à representação pictórica.

As tarefas que se baseiam na exploração de padrões permitem aos alunos um maior envolvimento nas atividades de matemática e fomentam um raciocínio organizado, assente na generalização e na argumentação, facilitando a melhoraria da sua capacidade para resolver situações problemáticas, o desenvolvimento do seu pensamento algébrico e contribuem para a progressão de competências noutras áreas. A partilha que se verifica na realização deste tipo de tarefas é crucial para o desenvolvimento do raciocínio flexível, promovendo a explicitação e consequente compreensão do seu pensamento.

Palavras-chave: Pensamento algébrico, padrões, regularidades, sequências, raciocínio.

ABSTRACT

The objective of this study is to understand how problem solving tasks with sequences contribute to students' reasoning development. The research is based on a qualitative methodology of interpretative nature. A teaching experiment was carried in a 2nd grade classroom, on a public school, in the school year of 2015/2016, and the researcher assumed, simultaneously, the role of the teacher. The study focused on four pairs of students of the class. The data collection methods were the participant observation with audio and video recording and the writing documents with students' work.

Eight tasks were presented to the class. Eachpair made these tasks with commitment and dedication. Naturally, when made proposed activities, some students were more confidents than others. The use of different strategies was observed and it was verified that the numerical representation was the most frequent strategy adopted by students that present more performance difficulties, while, the other students used preferably the pictorial representation.

The tasks that are based on the pattern exploration allow students to experiment a greater involvement in the mathematical activities and promote the organized reasoning, grounded on the generalization and on the argumentation, facilitating the improvement in their problem solving skills, the development of the algebraic thinking and contribute to the progression of skills in other areas. The sharing observed in carrying out this type of tasks is crucial to the development of flexible reasoning, endorsing the explicitation and consequent understanding of their thinking.

Keywords: Algebraic thinking, patterns, regularities, sequences, reasoning.

AGRADECIMENTOS

À Câmara Municipal da Amadora:

Por apostar, sempre, num Município melhor, em munícipes mais felizes, ajudando a realizar sonhos e a tornar a nossa cidade num lugar melhor para viver e trabalhar.

Ao Centro de Formação Associação de Escolas de Concelho da Amadora:

Pela disponibilidade e interesse demonstrados.

À Escola Superior de Educação de Lisboa:

Pela oportunidade de acesso a este curso.

A vós, Professores(as) da ESE:

Pelos ensinamentos, pela sabedoria transmitida, pela motivação, pela simpatia… E a si, **Professora Lurdes Serrazina:** Pela paciência, motivação, disponibilidade, delicadeza. Foi uma honra tê-la como orientadora!

A vós, colegas da ESE:

Pelo tempo que passámos juntos, pela partilha de experiências, conhecimentos, alegrias, angústias…E a ti, em particular, **Sónia Santos**, pela tua disponibilidade permanente.

Aos meus alunos:

Pelo empenho, compreensão, carinho, amizade, cumplicidade. Por todas as horas que passamos juntos, todos os dias da semana, pelos sorrisos, pela nossa ligação para sempre. **E a vocês, Pais e Encarregados de Educação:** Pela disponibilidade, confiança e carinho e pelos filhos que têm e que transformam cada dia num dia melhor.

A ti, Mãe:

Porque sem ti, nada seria possível! O teu amor por mim, por nós, o teu exemplo de guerreira na tua vida pessoal e profissional, a tua ajuda 24 horas por dia, a tua motivação, a tua dedicação a todas as causas, a tua presença, disponibilidade, força, energia…Tornas os meus dias, a minha vida, muito melhor e permitiste que mais este sonho se tornasse realidade.

A ti, Pai:

Pelo exemplo de dedicação ao trabalho que demonstras em cada dia da tua vida, pela preserverança que te fez chegar tão longe, pelos sacrifícios, pelas batalhas travadas, pelo aconchego das tuas palavras…

A vocês, Manos:

Por saber que estão e estarão sempre presentes na minha vida, nos momentos fantásticos e nos outros, menos bons.

A ti, Tiago:

Pela compreensão, pelo incentivo, pela paciência...

A vocês, meus Filhos, minha vida:

Por estarem sempre do meu lado! Por serem a minha razão de viver, a minha inspiração…Pelos passeios que não demos, pelo sol que deixamos escapar, pelos dias menos bons, por todos os sacrifícios que fizemos… **Matilde:** Por todas as vezes que cozinhaste para nós, para me sobrar mais tempo, por toda a ajuda que me deste, por estares sempre disponível para mim, por seres quem és…**Simão:** Por me "lembrares" que tinha que largar tudo e ir para o computador acabar o mestrado, pelo teu carinho nos dias mais difíceis…

A vocês, Família:

Aos que estão mais perto, aos que estão mais longe, aos que já partiram… Que mesmo sem saberem, estiveram sempre lá para mim. O vosso exemplo de preserverança, tolerância, luta, resiliência, foi fundamental para chegar a bom porto e ser quem sou…**Tia Fátima Neto:** Pela sua motivação, preocupação, inspiração. **Cláudia:** Pelo exemplo de coragem, dedicação e bondade que demonstras cada dia da tua vida e que inspira outras (vidas) ao teu redor. **Sara**: Pela tua pronta resposta às minhas solicitações.

A vocês, colegas:

Sandra e Luísa: Por me acompanharem neste sonho. **Celeste:** Obrigada pela tua amizade, energia e bondade. És uma luz, uma força da natureza! **Ágata:** Sei que estiveste comigo, mesmo à distância.

A vocês, Amigos:

Porque são a família que eu escolhi e me fazem sentir feliz apenas por saber que estão onde vos procuro.

A ti, Daisy:

Sei que torces por mim, ontem, hoje e sempre.

A todos os que acreditaram em mim:

OBRIGADA!

ÍNDICE GERAL

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABELAS

1 – INTRODUÇÃO

Neste capítulo faço alusão à pertinência e problemática do estudo, ao objetivo e questões orientadoras desta investigação e descrevo a forma como o mesmo está organizado.

1.1. Pertinência do estudo

As sequências e regularidades apresentam-se no Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico como um subdomínio inserido no domínio dos Números e Operações, cujo objetivo geral é a resolução de problemas. Neste âmbito, são enumerados dois descritores: 1) Resolver problemas envolvendo a determinação de termos de uma sequência, dada a lei de formação e 2) Resolver problemas envolvendo a determinação de uma lei de formação compatível com uma sequência parcialmente conhecida.

Deste modo, com este estudo pretendi ir ao encontro daquilo que é consignado no programa tendo por base entender em que medida os alunos compreendem esta temática e de que modo a exploração de tarefas suportadas por este conteúdo desenvolve a capacidade dos alunos neste subdomínio que é transversal a todo o programa do 1.º ciclo.

> "O estudo de padrões e regularidades é central em matemática e, naturalmente, atividades envolvendo padrões e regularidades atravessam o currículo dos três ciclos de educação básica. O campo dos números é propício a este tipo de atividades, as quais contribuem para desenvolver o raciocínio e estabelecer conexões entre as diversas áreas da matemática." (Abrantes, Serrazina & Oliveira, p.49, 1999)

Contudo, e dado que este conteúdo apenas aparece de forma explícita no 2.º ano, penso que foi bastante pertinente trabalhá-lo com maior atenção, uma vez que lecionei, precisamente, uma turma do 2.º ano de escolaridade.

1.2. Problema e objetivo do estudo

A fim de promover a explicitação das estratégias usadas e do raciocínio implícito na realização de tarefas, é fundamental orientar os alunos a partilharem o seu pensamento para que desenvolvam o raciocínio flexível e compreendam as suas ações. Ser capaz de comunicar matematicamente, tanto por escrito como oralmente, constitui um aspeto essencial da competência matemática que todos devem desenvolver. Sempre que possível, os alunos devem envolver-se em atividades de natureza exploratória e investigativa, com a possibilidade de explicar e justificar os seus processos de pensamento ou as suas soluções. Deste modo, as tarefas que têm como foco a resolução de problemas contribuem para o desenvolvimento do raciocínio dos alunos e são um meio propício para fomentar nos alunos um crescente envolvimento nas atividades matemáticas assente na generalização e argumentação, desenvolvendo assim o pensamento algébrico.

O objetivo deste estudo é compreender como tarefas de resolução de problemas com sequências contribuem para o desenvolvimento do raciocínio dos alunos.

No sentido de ir ao encontro do problema em estudo e atingir o objetivo a que me proponho, elaborei as seguintes questões:

Que estratégias utilizam os alunos para descobrir os termos de uma sequência?

Que tipo de raciocínio está envolvido nas estratégias utilizadas pelos alunos?

De que forma os alunos generalizam perante uma sequência?

1.3. Organização do estudo

De modo a facilitar a apresentação deste estudo, considerei pertinente fazer uma apresentação sucinta da sua estrutura. Assim, dividi o mesmo em cinco capítulos.

O primeiro capítulo faz referência à pertinência e problemática do estudo, define o objetivo e as questões orientadoras desta investigação.

No segundo capítulo faço uma abordagem aos aspetos fundamentais que caracterizam o pensamento algébrico, nomeadamente sequências, padrões e o desenvolvimento do raciocínio.

A metodologia seguida, os participantes e os critérios de seleção, a recolha e análise dos dados são apresentados no terceiro capítulo.

O quarto capítulo apresenta os pares selecionados para a concretização das tarefas e os procedimentos adotados por cada um deles. Em simultâneo faço em cada uma das tarefas uma análise sucinta dos aspetos mais relevantes evidenciados pelos alunos.
Na parte final do trabalho encontram-se as conclusões, as referências bibliográficas e os anexos.

2 – ENQUADRAMENTO TEÓRICO

Este capítulo aborda aspetos fundamentais que caracterizam o pensamento algébrico, nomeadamente sequências, padrões e o desenvolvimento do raciocínio.

2.1. Sequências

O tópico Sequências e Regularidades percorre todo o ensino básico, tendo como principal objectivo contribuir para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos (Ponte, Branco & Matos, 2009). Para estes autores, os conceitos fundamentais e aspetos da aprendizagem das sequências e regularidades dividem-se em:

Sequências pictóricas e numéricas. Na análise de uma sequência pictórica identificam regularidades e descrevem características locais e globais das figuras que a compõem e também da sequência numérica que lhe está diretamente associada. O trabalho com sequências pictóricas e com sequências numéricas finitas ou infinitas (estas últimas chamadas sucessões) envolve a procura de regularidades e o estabelecimento de generalizações.

Sequências repetitivas e sequências crescentes. Numa *sequência repetitiva* há uma unidade (composta por diversos elementos ou termos) que se repete ciclicamente.

---

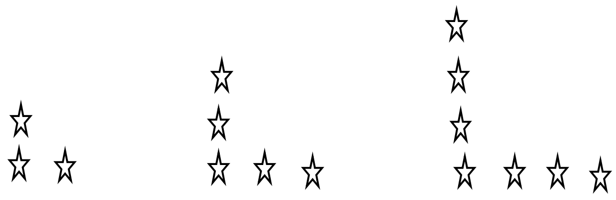
ccvvccvvccvv…

233233233…

azul, amarelo, rosa, azul, amarelo, rosa…

Figura 1 - Exemplo de sequência repetitiva

Por seu lado, as *sequências crescentes* são constituídas por elementos ou termos diferentes. Cada termo na sequência depende do termo anterior e da sua posição na sequência, que designamos por ordem do termo. As sequências crescentes podem ser constituídas por números ou por objetos que assumem uma configuração pictórica.



2, 4, 6, 8, 10,…

3, 6, 9, 12, 15,…

10, 20, 30, 40, 50,…

Figura 2 - Exemplo de uma sequência crescente

Diferentes possibilidades de continuação de uma sequência. Dados alguns termos de uma sequência, os alunos podem ser questionados quanto à continuação da sequência, identificando alguns dos termos seguintes. Perante a possibilidade dos alunos apresentarem sequências diferentes mas com alguns termos em comum, torna-se fundamental solicitar-lhes que apresentem o seu raciocínio e justifiquem as suas opções. Além disso, em algumas tarefas podem ser dados um ou mais termos da sequência, que não sejam termos iniciais, pedindo para indicar termos anteriores.

Segundo Ponte, Serrazina, Guimarães, Breda, Guimarães, Sousa, Menezes, Martins e Oliveira (2007), os alunos do 1.º ciclo desenvolvem o pensamento algébrico quando, por exemplo, investigam sequências numéricas e padrões geométricos.

A álgebra surge, assim, como uma forma de pensamento matemático tendo em vista o desenvolvimento da capacidade de abstração, a partir do trabalho com regularidades generalizáveis em sequências de formas, desenhos e/ou conjuntos de números, que é essencial neste nível de ensino, contribuindo desta forma para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Neste sentido, Carraher e Schliemann (2007) referem que os alunos do ensino básico, nos anos iniciais, podem aprender sucessivamente regras, princípios e representações.

Molina (2011) defende também uma abordagem inicial da Álgebra, na medida em que esta enriquece o ensino da Matemática, mesmo nos primeiros anos de escolaridade, facilitando o desenvolvimento mais profundo e integrado da Aritmética e da Álgebra.

Pimentel (2010) partilha desta ideia afirmando que o desenvolvimento do pensamento algébrico nos primeiros níveis de escolaridade é importante não só como preparação e resolução do insucesso da Álgebra nos níveis mais avançados, mas também como forma de aprofundar a Aritmética, "que muitas vezes não se apoia na compreensão de conceitos mas apenas na mecanização de procedimentos" (p. 129). Pelo seu lado, Alvarenga e Vale (2007) defendem que "os alunos, desde os primeiros anos de escolaridade, podem e devem ser encorajados a observar padrões e a representar tanto geométrica como numericamente, iniciando o estudo da Álgebra de um modo fortemente intuitivo e informal" (p. 2). Pimentel (2010) a partir do seu estudo conclui que as crianças envolvem-se em atividades muito próximas da prática dos matemáticos, formulando, testando, conjeturando e provando afirmações de generalidade, e como tal, vê possibilidade e vantagem numa abordagem precoce de ideias algébricas.

De acordo com Zazkis e Liljedahl (2002), o termo "Álgebra" engloba dois conceitos distintos: pensamento algébrico e simbolismo algébrico. Esta distinção é fundamentada por estes autores como um real reconhecimento na possibilidade de não dar tanta atenção à manipulação de símbolos, por um lado, e, por outro, a existência de um movimento para "early algebra", no ensino básico, que assenta na estrutura em vez do cálculo. Este termo - "early algebra" - é também usado por Carraher e Schliemann (2007) para abranger o pensamento algébrico e a Álgebra relacionados com o ensino de jovens alunos, entre os 6 e os 12 anos. Ponte (2006) refere que a expressão "desenvolvimento do pensamento algébrico" resume muito bem os objetivos da Álgebra, ao nível escolar. Vários investigadores têm refletido sobre a natureza deste pensamento, que consiste em algo mais profundo do que manipular expressões e resolver equações (Carraher & Schliemann, 2007; Kaput, 1999, 2008; Matos, Silvestre, Branco & Ponte, 2008; Molina, 2011; Papic, Mulligan & Mitchelmore, 2011; Ponte, 2006) e defendem o seu desenvolvimento desde cedo, nos anos iniciais do ensino.

A Álgebra é apresentada por Papic, Mulligan e Mitchelmore (2011) como uma linguagem simbólica, que permite expressar relações e generalizações, normalmente envolvendo números, e usá-los para resolver problemas sem necessitar de realizar cálculos numéricos muito extensos. Encontrar e usar generalizações pode ser considerado pensamento algébrico.

Também o NCTM (2000) considera a álgebra como um fio condutor curricular desde os primeiros anos de escolaridade e refere que esta pode ser usada para unificar o currículo da matemática.

Assim, o pensamento algébrico pode ser definido como algo que se manifesta quando os alunos fazem generalizações sobre dados e relações matemáticas, através de conjeturas e argumentos, expressos através de uma linguagem cada vez mais formal e adequados à idade (Kaput, 1999).

Uma profunda compreensão aritmética, por exemplo, requer generalizações matemáticas que são de natureza algébrica (Carraher & Schliemann, 2007).

Assim, a Aritmética pode ser o contexto privilegiado para integrar as características do pensamento algébrico, tendo em conta as suas inerentes regularidades, equivalências, múltiplas formas de conceptualizar as relações numéricas, analisar e representar relações entre quantidades e também com o seu lado funcional, que inclui estudar padrões, analisar como variam as quantidades e identificar correlações entre variáveis (Molina, 2011).

2.2. Padrões

2.2.1. Conceito de padrão

A definição de "padrão" suscita, como Ponte (2009) indica, algumas dificuldades, quer ao nível da tradução, quer ao nível do próprio conceito, uma vez que é transversal a diversas áreas da matemática (Geometria, Teoria dos números, Álgebra…), assumindo para cada uma configurações e propriedades próprias, dificultando a identificação do que é comum a todas elas. Contudo, em traços gerais, o termo "padrão", na língua portuguesa, está associado a "regularidade", remetendo o primeiro para a unidade de base que eventualmente se repita, de forma constante, ou obedecendo a uma lei de transformação, ao passo que "regularidade" refere-se à relação que se estabelece entre os diversos objetos, o que é comum entre eles ou o que os liga.

De modo genérico, *padrão* é utilizado quando se faz referência a uma disposição ou arranjo de números, formas, cores ou sons onde são detetadas regularidades (Vale, Palhares, Cabrita & Borralho, 2005). Contudo, o conceito de padrão tem definições muito díspares, de acordo com a utilização pretendida.

Os padrões são aquilo que experienciamos quando reconhecemos uma relação entre dois ou mais objetos que temos pela frente, como refere Mason (2011). Para Sawyer (1955, citado por Pimentel & Vale, 2012), «Padrão é qualquer tipo de regularidade que possa ser reconhecida pela mente». Esta concetualização é muito próxima da de Orton (2009), que associa a padrão numérico as noções de ordem, regularidade, repetição e simetria em e entre objetos matemáticos tais como símbolos.

Vale e Pimentel (2009), defendem a existência de dois tipos de padrões:

Padrão de repetição – é aquele que contém um motivo identificável que se repete de forma cíclica indefinidamente.

Padrão de crescimento – no qual cada termo muda de forma previsível em relação ao anterior.

Orton (2009) na sua reflexão sobre padrões no currículo da matemática tentou definir a terminologia usada para padrões numéricos (tabela 1) e padrões geométricos (tabela 2) que fosse útil a alunos e professores de modo a fazê-los entender o que se pretende quando se fala de "padrão".

Tabela 1 - *Definição relativa aos padrões numéricos (Orton, 2009)*

Termo	Explicação
Padrão	Ordem, regularidade, repetição e simetria entre "objetos" matemáticos tais como símbolos.
Sequência	Um conjunto de "objetos" matemáticos organizados e ordenados de acordo com alguma regra.
Padrão numérico	Uma sequência em que os "objetos" são números. Padrões numéricos podem levar a padrões espaciais.
Padrão de repetição	Uma sequência que se repete a cada determinado número de termos; o número dado é chamado de "período do padrão".

Tabela 2 - *Definição relativa aos padrões geométricos (Orton, 2009)*

Termo	Explicação
Padrão espacial	Um arranjo regular de partes espaciais, tais como linhas ou formas; na disposição espacial atraente e previsível. Padrões espaciais podem, por vezes, ser usados para introduzir padrões numéricos.
Simetria	Um objeto ou configuração que possua simetria. Consiste em partes correspondentes que podem ser trocadas entre si, sem a aparência geral.
Padrão de repetição	Um padrão envovendo repetição de componentes; um design decorativo repetido.
Pavimentação	Um padrão de repetição de formas que pode ser estendido indefinidamente através de uma superfície.

2.2.2. A importância dos padrões na Matemática

Alguns investigadores (e.g. Herbert & Brown, 1997; Orton & Orton, 1999, citados por Vale, Palhares, Cabrita & Borralho, 2005) defendem que explorar padrões é fundamental para o desenvolvimento das capacidades de raciocínio algébrico.

Vale e Fonseca (2011) consideram os padrões fundamentais para o desenvolvimento de conhecimentos matemáticos por oferecerem a possibilidade de relacionar conceitos e conteúdos em contextos distintos. Os padrões constituem, assim, um tema imperioso na aquisição de capacidades e processos matemáticos, nomeadamente, resolução de problemas, comunicação matemática e raciocínio matemático, destacados no Programa de Matemática (ME, 2007) e no documento Princípios e Normas para a Matemática Escolar (NCTM, 2007).

Também Garrick, Threlfall e Orton (2005, citados por Silva & Mamede, 2015), defendem que explorar tarefas com regularidades, em grupo ou individualmente, constituem oportunidades para as crianças desenvolverem a comunicação matemática, através da verbalização das suas perceções e da exposição dos seus conhecimentos. Neste sentido, Vale e Pimentel (2009), consideram ser essencial incentivar os alunos a descrever, por palavras suas, um padrão e a justificar de que forma o continuam ou constroem, a fim de desenvolver a comunicação matemática.

Ponte (2009) defende que o estudo dos padrões e regularidades, devidamente perspetivado, pode ser um enriquecimento muito importante no currículo da Matemática. Neste sentido, Vale, Palhares, Cabrita e Borralho (2005) veem os padrões no ensino da matemática como um recurso para a tornar mais significativa, facultando aos alunos um contexto mais próximo da sua realidade e experiências e permitido-lhes descobrirem relações, encontrarem conexões, fazerem generalizações e também previsões.

O uso de padrões no ensino da matemática promove uma aprendizagem significativa e o envolvimento dos alunos, proporcionando-lhes um ambiente de acordo com a sua realidade e experiências, através da transformação de problemas com respostas numéricas simples em novas situações que permitem aos alunos conjeturar, construir padrões, generalizar e justificar factos e relações matemáticas (Borralho & Barbosa, 2009).

Resolver problemas, significativos para os alunos onde o uso da álgebra seja evidente, é um aspeto relevante associado aos padrões, uma vez que descobrir um padrão é uma poderosa estratégia de exploração da álgebra, em particular quando recorre ao trabalho investigativo (Vale et al 2005). Para Herbert e Brown (1997, citados por Vale et al., 2005), o processo investigativo abrange três fases:

(1) Procura de padrões – extração da informação relevante;
(2) Reconhecimento do padrão – descrição do mesmo através de métodos diferentes - a análise dos aspetos matemáticos;
(3) Generalização do padrão – interpretação e aplicação do que se aprendeu.

Num estudo feito com alunos do 6.º ano, estes investigadores observaram que os alunos recorreram sempre ao processo investigativo para procurar padrões e generalizar, em qualquer estratégia utilizada na resolução dos problemas (dramatização, utilização de objetos, tabelas, diagramas, desenhos e trabalho em grupo). Verificaram ainda que esta abordagem teve um papel positivo nas capacidades dos alunos na medida em que generalizaram uma regra a partir de situações concretas, o que é sinónimo de pensar algebricamente. Deste modo, o tema dos padrões, a nível do ensino, deverá ser encarado como atividade de resolução de problemas e mesmo como tarefa de investigação (Vale et al, 2005), sendo igualmente um domínio privilegiado na ligação à álgebra por favorecer a descoberta como fator fundamental na sua aprendizagem, assim como uma maior motivação dos alunos. Associado ao tema padrões está o lado emocional pelo entusiamo que provoca a descoberta de uma ordem, de uma previsão, de uma relação funcional.

2.2.3. Pensar visualmente

O raciocínio visual é visto como o raciocínio que envolve a compreensão de um problema ou de um conceito com base num diagrama ou numa imagem (e.g. Dreyfus, 1991; Jones, 2001, citados em Vale & Pimentel, 2013). Arcavi (2003) defende que a visualização implica o produto, o processo de criação, interpretação e reflexão sobre imagens. Para Eisenberg e Dreyfus (1989, citados em Vale & Pimentel, 2013), a visualização está ligada a representações visuais, ou seja, à construção de modelos visuais que refletem a estrutura matemática subjacente, tendo em conta que todos os conceitos matemáticos podem ser traduzidos por um gráfico ou diagrama. Neste sentido, a visualização torna mais clara a generalização feita, uma vez que o modo de ver um arranjo pode ajudar a estabelecer relações e consequentemente a produzir generalizações (Vale & Pimentel, 2010, citados em Vale & Pimentel, 2013). Ver um padrão é obviamente um primeiro passo para explorar padrões (Freiman & Lee, 2006, citados em Vale & Pimentel, 2013). Deste modo, os padrões figurativos possibilitam a ligação de várias formas de representação, facilitando a compreensão da estrutura matemática subjacente, levando mais eficazmente à conjetura e generalização, à explicação e argumentação.

Segundo Vale e Pimentel (2012), todos os tipos de padrões têm um papel fundamental em matemática, vista como a ciência dos padrões. Os padrões figurativos permitem a ligação de diversos modos de representação, evidenciam a necessidade de consistência entre essas relações e levam à compreensão da estrutura matemática subjacente e consequentemente à conjetura, generalização, explicação, argumentação e prova.

No cerne da noção de padrão ou regularidade encontra-se uma regra de consistência que tem de estender-se a todas as representações relevantes que transmitem explicitamente o padrão. Esta regra de consistência é muito útil no aprofundamento da compreensão das relações entre os objetos do arranjo que manifesta uma estrutura. Com este apoio, quando se explora o padrão será mais fácil produzir uma lei de formação que traduza matematicamente a estrutura subjacente ao padrão. A visualização explica dum modo muito mais claro — e muitas vezes justifica — a generalização feita, que de outra forma, não poderia ser efetuada por falta de ferramentas matemáticas, ou, efetuada apenas numericamente, converter-se-ia num mero exercício de tentativa e erro e de manipulação simbólica com pouco significado. (Vale & Pimentel, 2012)

Arcavi (2003), considera a visualização uma componente-chave do raciocínio, da resolução de problemas e mesmo da prova. Do mesmo modo, Tripathi (2008, citado por Vale & Pimentel, 2012) defende que a capacidade para usar várias formas de raciocínio pode ser desenvolvida através de experiências envolvendo a visualização. Argumentando a favor da importância do raciocínio visual, esta autora preconiza que os alunos devem ser encorajados a relacionar a visualização com outras formas de representação. Assim, o ensino deve propor tarefas desafiantes que desenvolvam a compreensão da generalização através, não só dos seus aspetos numéricos, mas também figurativos, capitalizando a capacidade inata dos alunos de pensar visualmente (Becker & Rivera, 2005, citados por Pimentel & Vale, 2012).

De acordo com Vale e Pimentel (2012), o padrão numérico inicial pode ser enriquecido com um contexto visual que lhe dá significado, permitindo uma compreensão mais profunda das relações em jogo através da regra de consistência entre dois tipos diferentes de representação, o numérico e o figurativo. Esta compreensão ajuda a explicar e a justificar de modo informal a generalização feita, apoiada num contexto que dá sentido aos números.

Vale et al. (2009) valorizam igualmente a importância da visualização e da análise da estrutura subjacente ao padrão como contributos para o enriquecimento do raciocínio matemático.

Assim, a visualização tem um papel primordial na abordagem inicial da tarefa que conduzirá ao processo de generalização, permitindo estabelecer relações que possibilitam a abdução encarada como a formulação de conjeturas plausíveis, o que é consistente com as ideias expressas por Rivera (2008, citado por Vale & Pimentel, 2012). A consideração da estrutura matemática subjacente à apreensão de um padrão poderá contribuir fortemente para a explicação e a prova das conjeturas feitas, na fase posterior ao processo de generalização.

O ensino deve apresentar propostas de tarefas desafiantes que enfatizem a compreensão e generalização, com recurso a aspetos numéricos e figurativos, por forma a desenvolver a capacidade inata dos alunos de pensar visualmente (Vale, 2012).

Se a álgebra é considerada uma ferramenta para generalizar, explorar padrões de crescimento nos primeiros anos é a base para o raciocínio algébrico. Os professores tendem a explorar padrões numéricos em detrimento dos padrões visuais, o que pode dificultar a generalização e consequentemente a formulação de uma expressão algébrica. As tarefas que envolvem padrões fornecem o contexto para o desenvolvimento do significado das representações formais e podem reduzir as dificuldades associadas às instruções que se concentram em manipulação de símbolos sem fazerem conexões com o significado por trás desses símbolos (Lannin, 2005). Por outro lado, um trabalho prévio com contextos visuais pode ajudar os alunos a conseguir generalizar com maior facilidade. Em particular, as tarefas de contagem podem ser uma forma de desenvolver capacidades básicas para traduzir padrões visuais em expressões numéricas e, posteriormente, alcançar a generalização, uma característica importante na construção matemática (Vale & Pimentel, 2009).

A relação entre o uso de capacidades visuais e o desempenho dos alunos em Matemática constitui uma interessante área de pesquisa. Muitos investigadores sublinham a importância do papel da visualização na resolução de problemas (Presmeg, 2006; Shama & Dreyfus, 1994, citados em Barbosa, Vale & Palhares, 2009), enquanto outros afirmam que a visualização só deve ser usada como um complemento do raciocínio analítico (Goldenberg, 1996; Tall, 1991, citados em Barbosa, Vale & Palhares, 2009). Apesar de alguma controvérsia, estas visões refletem a importância do uso e do desenvolvimento de capacidades visuais na matemática, mas os professores tendem a apresentar o raciocínio visual apenas como uma estratégia de resolução de problemas numa fase inicial ou, quando necessário, como complemento do método analítico (Presmeg, 1986, citado em Barbosa, Vale & Palhares, 2009). Muitos estudos (Barbosa, Vale & Palhares, 2009) indicam o potencial da abordagem visual na resolução de problemas e na aprendizagem matemática em geral. A realidade das nossas salas demonstra, no entanto, que os alunos se inibem de explorar sistemas de apoio visual (Dreyfus, 1991, citado em Barbosa, Vale & Palhares, 2009) e tendem a não fazer ligações entre o pensamento visual e analítico (Presmeg, 1986, citado em Barbosa, Vale & Palhares, 2009).

2.2.4. Constrangimentos do uso de padrões

Ponte (2009) sublinha as potencialidades dos padrões e regularidades para o ensino e para a aprendizagem, mas alerta para os problemas que podem advir da sua valorização nos programas de Matemática, dado que podem levar à falsa ideia de que há apenas uma forma correta de continuar um determinado padrão sequencial ou a de os alunos (e professores) assumirem o trabalho com padrões de forma mecanizada, sem recurso ao raciocínio, quando as questões têm como objetivo apenas determinar o “termo seguinte” ou o “termo geral”.

Outro fator a ter em atenção é levar os alunos a demonstrar as descobertas e não ficar pela generalização, recorrendo a argumentos apropriados com base nas propriedades das figuras geométricas, dos números e das operações e das relações e estruturas algébricas.

A atenção dada aos aspetos numéricos do padrão, mesmo nas situações em que é apresentado em contexto visual, torna-se, muitas vezes, um obstáculo à generalização (Noss, Healy & Hoyles, 1997, citados por Barbosa, 2013). Mason (1996, citado por Barbosa, 2013) refere que há uma predisposição para deduzir uma fórmula geral, nem sempre correta, baseada na análise de um ou dois casos particulares. Neste sentido, o autor sublinha a importância de serem disponibilizados aos alunos diversos tipos de padrões, permitindo a exploração quer da visualização quer da manipulação a fim de facilitar a dedução da generalização.

Sasman et al. (1999, citados por Barbosa, 2013) distinguem figuras transparentes de figuras não transparentes. Nas primeiras, a regra que caracteriza o padrão está presente, de forma clara, na estrutura das figuras, pelo contrário nas figuras não transparentes, a regra não é percetível através da simples observação das figuras da sequência, por esse motivo, é importante encontrar estratégias que auxiliem os alunos a identificar o padrão visualmente e consequentemente a generalizar. É fundamental que o professor promova o desenvolvimento do raciocínio funcional dos alunos através da reflexão sobre a estruturação e implementação das tarefas.

2.3. Pensamento algébrico

2.3.1. O pensamento algébrico

“A generalização está no coração do pensamento algébrico”.

(Schliemann, Carraher & Brizuela, 2007, citados por Canavarro, 2007, pp.82)

Da discussão de muitos investigadores, a propósito do conceito de pensamento algébrico em especial no contexto do ensino da Matemática nos níveis elementares, correspondente aos 1.º e 2.º ciclos do ensino básico português, sobressai a associação de pensamento algébrico ao reconhecimento daquilo que é geral numa determinada situação matemática e à expressão dessa generalização (Verschaffel, Greer & De Corte, 2007, citados em Canavarro, 2007).

Blanton e Kaput (2005, citados por Canavarro, 2007), definem o pensamento algébrico como o processo através do qual os alunos generalizam ideias matemáticas partindo de um conjunto de casos particulares, argumentam essas generalizações e expressam-nas de formas progressivamente mais formal de acordo com a sua idade.

Kieran (2007, citada por Canavarro, 2007) defende a álgebra não apenas como uma técnica mas também como uma forma de pensamento e raciocínio acerca de situações matemáticas. A álgebra pode ser vista como um sistema matemático usado para generalizar algumas operações matemáticas, permitindo que letras ou outros símbolos substituam os números. Neste sentido, Tall (1992, citado por Vale, Palhares, Cabrita & Borralho, 2005) refere que a álgebra é, por vezes, definida como a “generalização da aritmética” a partir da procura de padrões numéricos.

Para Rivera (2006, citado em Mestre, 2014) os sistemas numéricos devem ser ensinados de forma a que os alunos compreendam as propriedades ou relações numéricas que existem nos objetos individuais, com o intuito de, progressivamente, constatarem de que se trata de invariantes independentemente dos objetos que lhes deram origem. As regularidades encontradas pelos alunos nas operações aritméticas podem ser a base para explorar a generalização sobre os números e operações e igualmente práticas como a formulação, o teste e a prova dessa generalização. Bastable (2007, citado em Mestre, 2014) menciona estas práticas como o cerne do desenvolvimento do pensamento algébrico.

Sendo assim, o foco do pensamento algébrico está na atividade de generalizar.

Generalizar, segundo Kaput (1999) envolve a comunicação do raciocínio para além dos casos considerados, reconhecendo e explicitando o que é comum entre eles e pressupõe a valorização da construção de significados e a compreensão.

Neste sentido, a álgebra constitui um importante contributo para o aprofundamento da compreensão da matemática e do poder desta área do saber, e como tal, deve ser incluída no currículo desde os primeiros anos, começando, simplesmente, pelo estudo de padrões desde o Jardim de Infância e o 1.º Ciclo do Ensino Básico.

A generalização é um elemento fundamental e um objetivo na aula de matemática. Muitos investigadores vão mais longe, afirmando que só deve ser considerado matemática aquilo que pode ser totalmente generalizado e que essa generalização é o coração da matemática (e.g.,Gattegno, 1987; Kaput, 1999, citados por Warren, 2009), e a aprendizagem envolve o processo de generalização a partir de várias experiências (Lakoff & Nunez, 2000, citados por Warren, 2009).

O processo de generalização matemática foi delineado para ver o geral no particular (Kruteskii, 1976; Mason 1996, citados por Warren, 2009). que envolve estudantes que procuram através de um número de casos identificar a estrutura comum que está subjacente a cada um deles, perceber semelhanças, tais como padrões e estruturas, e explorar essas relações (Kaput, 1999).

Em situações de padronização, Radford (2006, citado Warren, 2009) refere-se a isso como sendo capaz de compreender um traço comum observado em alguns dos elementos da sequência e usar isso para fornecer uma expressão "algébrica" para todos os elementos na seqüência.

Harel´s (2001, citado por Warren, 2009) defende duas formas de generalizar através do (i) resultado da generalização, desenvolvendo a generalização a partir de alguns exemplos, e do (ii) processo de generalização, desenvolvendo a generalidade a partir de alguns exemplos e justificar de modo a demonstrar a sua aplicabilidade para todos os exemplos e para qualquer número. Esta é a justificação da expressão de generalização que parece ser a componente-chave para ser uma verdadeira generalização. A capacidade de generalizar representa o elemento crítico do pensamento algébrico.

Assim sendo, o pensamento algébrico desenvolve-se através do estudo das relações que existem entre os objetos, de forma geral e abstrata. Ponte, Branco e Matos (2009) incluem no pensamento algébrico a representação, o raciocínio e a resolução de problemas. A representação refere-se à capacidade que o aluno demonstra na utilização de sistemas de representação, o raciocínio conjuga o relacionamento dos objetos com a generalização das relações e a resolução de problemas diz respeito à modelação matemática a par de outros problemas matemáticos e de outros domínios do conhecimento. Estas vertentes do pensamento algébrico podem organizar-se segundo três eixos: a generalização da aritmética, o estudo de funções e a modelação matemática. A generalização das operações e relações numéricas incuem-se na generalização da aritmética, a variação e generalização de padrões fazem parte do estudo de funções e a modelação matemática compreende o estudo da regularidade de situações ou fenómenos (Canavarro, 2007; Kaput, 2008, citado em Guerreiro, 2011).

2.3.2. O desenvolvimento do pensamento algébrico nos primeiros anos

Introduzir o pensamento algébrico nos primeiros anos de escolaridade é para Canavarro (2007) um importante passo na abordagem à matemática, na medida em que possibilita a construção do conhecimento assente na compreensão, quer através dos processos quer dos produtos matemáticos e permite-lhes reconhecer a sua unidade, o seu valor e o seu poder.

Neste sentido, é importante dar às crianças a possibilidade de contactarem com experiências algébricas desde os primeiros anos de escolaridade, a fim de facilitar a formulação de generalizações, recorrendo à exploração de padrões estimulantes por forma a promover a análise e descrição destes pelas crianças.

As Orientações Curriculares para a Educação Pré-escolar sublinham a importância dos padrões como meio de desenvolver o raciocínio lógico (ME-DEB, 1997). Do mesmo modo, Barros e Palhares (2001, citados por Vale et al, 2005) salientam a sua contribuição para o desenvolvimento do raciocínio lógico, ressalvando que podem ser um veículo para que as crianças generalizem localmente, já que é prematuro fazerem-no globalmente, evidenciando a sua importância para a resolução de problemas.

Deste modo, a introdução dos padrões no pré-escolar conduz ao desenvolvimento do raciocínio lógico. Threlfall (1999, citado por Vale et al., 2005) afirma que a introdução de padrões de repetição deve ser feita no fim do pré-escolar pois funcionam como uma base familiar e concreta para a exploração de outros conteúdos e são o suporte para a aprendizagem da álgebra ou para a introdução de símbolos.

Assim, a exploração de padrões é uma estratégia fundamental de resolução de problemas não rotineiros que promove a verbalização de relações entre os vários elementos do padrão e leva os alunos a conjeturar e a generalizar.

De acordo com Vale et al. (2005), a abordagem à álgebra através dos padrões permite uma maior motivação, retirando o negativismo associado ao estudo da álgebra e, sobretudo nos primeiros níveis, serve como suporte ao pensamento algébrico. Quando o objetivo é desenvolver o pensamento algébrico, as tarefas têm um papel preponderante, pois constituem o ponto de partida para a atividade matemática.

Os alunos do 1.º ciclo desenvolvem o pensamento algébrico quando, por exemplo, investigam sequências numéricas e padrões geométricos (Ponte et al., 2007).

O ensino básico é, portanto, a fase mais apropriada para iniciar os alunos nas diferentes formas de representação visual das ideias matemáticas e as atividades de descoberta de padrões são extremamente ricas para atingir esse objetivo.

Assim, e de acordo com Vale et al. (2005), sendo os padrões a base do pensamento algébrico, a generalização decorre do reconhecimento de padrões e relações e da análise dessas relações. Deste modo, torna-se fundamental propor atividades exploratórias que recorram a diferentes materiais manipuláveis por forma a identificar, criar e continuar padrões, tendo em conta as propriedades das relações, sobretudo as que envolvam conceitos de proporcionalidade, essenciais para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

A matemática era vista como a ciência dos padrões, no Currículo Nacional do ensino básico - Competências Essenciais (ME-DEB, 2001), quando se referia que a "educação matemática tem o objetivo de ajudar a desocultar a matemática presente nas mais variadas situações, promovendo a formação de cidadãos participativos, críticos e confiantes no modo como lidam com a matemática. Para isso é preciso destacar a especificidade da matemática nomeadamente como ciência das regularidades e da linguagem dos números, das formas e das relações" (p.58). A competência matemática que todos os alunos devem desenvolver ao longo da educação básica inclui, entre outros aspetos, "a predisposição para raciocinar matematicamente, isto é, para explorar situações problemáticas, procurar regularidades, fazer e testar conjeturas, formular generalizações, pensar de maneira lógica" (p.57).

Lins e Kaput (2004, citados em Mestre, 2014) afirmam que caracterizar os tipos de raciocínio algébrico auxilia à compreensão das formas de pensamento algébrico adequadas para os alunos mais novos e indica as condições que devem ser criadas na promoção do mesmo. Também Kieran (2004, citada em Mestre, 2014) defende que o pensamento algébrico nos primeiros anos está ligado ao desenvolvimento de formas de pensamento com atividades de análise de relações entre quantidades, identificação de estruturas, estudo da mudança, generalização, resolução de problemas, modelação, justificação, prova e previsão. Esta autora afirma ainda que as letras e os símbolos da álgebra podem ou não ser usados como uma ferramenta. Neste sentido, Ponte, Branco e Matos (2009) defendem que aprender álgebra pressupõe ser capaz de pensar algebricamente numa variedade de situações que envolvam relações, regularidades, variação e modelação.

Desta forma, a introdução da álgebra no ensino elementar deve ser visto como um tema integrador e uma forma de pensamento que envolve significado, profundidade e coerência à aprendizagem dos restantes temas, e, principalmente, à aprendizagem da matemática e não numa perspetiva de mais um tema que se soma ao currículo, separado das restantes áreas (NCTM, 2007). Assim, os conteúdos de carácter algébrico a serem trabalhados não serão os mesmos que nos anos sequenciais, ainda que tendo uma complexidade inferior (Blanton et al., 2007; Carraher & Schliemann, 2007, citados em Mestre, 2014). Apesar dos alunos dos primeiros anos poderem aprender a usar algum simbolismo característico da álgebra, o importante é que estes alunos aprendam a raciocinar algebricamente e que comecem a usar essa simbologia para expressar e justificar as suas ideias, de forma a desenvolver esse mesmo raciocínio (Mestre, 2014).

2.3.3. O papel do professor na promoção do pensamento algébrico

O papel do professor vai além da seleção de tarefas ou da permissão do uso de representações diversas por parte dos alunos. O professor deve, antes, auxiliar os alunos na construção de um reportório de ferramentas intelectuais que sirva de suporte ao desenvolvimento do pensamento algébrico, dando a conhecer:

- Objetos – tabelas diversas, retas numéricas, diagramas, gráficos de vários tipos, artefactos visuais, materiais concretos. (Kaput, 2005, citado por Canavarro, 2007).
- Processos matemáticos – registar, recolher, representar, organizar dados.
- Ambiente de trabalho que fomente a comunicação suportada pelo discurso argumentativo e que leve à construção de conhecimento matemático (Blanton & Kaput, 2008; Kieran, 2007a; Cusi & Malara, 2007, citados por Canavarro, 2007).

Com o intuito de criar um ambiente propício ao desenvolvimento do pensamento algébrico, o professor deve:

- Valorizar o raciocínio dos alunos como ponto de partida para a construção do conhecimento matemático (Blanton & Kaput, 2008, citados por Canavarro, 2007).
- Valorizar a comunicação dos raciocínios de cada aluno à turma apoiada em materiais que a facilitem (Boavida, Paiva, Cebola, Vale & Pimentel, 2008).
- Colocar questões pertinentes aquando da apresentação e discussão sobre os trabalhos dos alunos (Boavida et al., 2008), quer para clarificar os seus

raciocínios, quer para orientar para o estabelecimento de relações (Kieran, 2007a, citado por Canavarro, 2007).

- Auxiliar os alunos a identificar a expressão da generalização (Kaput, 1999).

Contudo, mais do que motivar os alunos para a álgebra simbólica formal, deve-se fomentar o pensamento algébrico por forma a levar os alunos a verbalizar os seus pensamentos recorrendo às suas próprias palavras ou à sua própria simbologia (Herbert & Brown, 1997, citados por Vale et al 2005). Neste sentido, a aprendizagem da álgebra deve ter início de forma intuitiva e motivadora com o estudo dos padrões à nossa volta e o empenho em analisar e descrever esses padrões.

2.4. Raciocínio

2.4.1. A atividade matemática, o raciocínio e a generalização

O ensino da matemática tem como principal objetivo desenvolver a capacidade dos alunos pensarem matematicamente. Aprender conceitos, algoritmos e procedimentos rotineiros revela-se insuficiente para levar os alunos a entender a matemática como uma disciplina lógica e coerente (ME, 2007, citado em Meste, 2014). Para haver uma compreensão efetiva dos procedimentos por parte do aluno é imperioso que se desenvolva o raciocínio. “Ser capaz de raciocinar é essencial para a compreensão da matemática” (NCTM, 2007), e neste sentido, é fundamental conhecer os processos de raciocínio dos alunos. Segundo Russel (1999, citado em Pereira & Ponte, 2013) o raciocínio, na aprendizagem da matemática, é “o que usamos para pensar sobre as propriedades de um determinado objeto matemático e desenvolver generalizações que se apliquem a toda a classe de objetos” e é “a ferramenta para compreender a abstração”.

Só através da comunicação das suas representações é possível perceber o raciocínio dos alunos, “ao observar as suas representações, os professores poderão conseguir compreender os modos de interpretação e de raciocínio dos alunos” (NCTM, 2007 p. 76). Deste modo, as representações assumem em papel fundamental no ensino-aprendizagem da matemática, bem como no desenvolvimento e compreensão dos processos de raciocinio matemático dos alunos.

Uma comunicação na sala de aula baseada na partilha de ideias matemáticas, permite a interação de cada aluno com as ideias expostas para se poder apropriar delas e aprofundar as suas. Nesta perspectiva, a comunicação permite aprender, mas também contribui para uma melhor compreensão do próprio pensamento. (Boavida et al., 2008, p.62)

Lampert (2001, citado por Boavida et al., 2008) reitera a ideia de que é através da comunicação de uma ideia ou raciocínio, que se clarifica e organiza o próprio pensamento, logo proporciona uma oportunidade para a compreensão mais significativa da matemática, uma vez que partilhar ideias proporciona a discussão de estratégias e pensamentos.

Pimentel e Vale (2012) defendem que é fundamental ajudar os alunos, desde os primeiros anos de escolaridade, a desenvolver o seu raciocínio matemático, tendo em conta que este é a essência de toda a atividade matemática, pois está intimamamente ligado ao uso da generalização, ou seja, conjeturar, generalizar e provar permitem o desenvolvimento do raciocínio e, como tal, as tarefas que envolvam estes processos devem ser parte integrante das aulas de matemática em todos os níveis de escolaridade. Também, de acordo com Lannin et al. (2011, citados por Pimentel & Vale, 2012), «Raciocinar em matemática é um processo evolutivo que envolve conjeturar, generalizar, investigar porquê e desenvolver e avaliar argumentos». Estes autores estabelecem um modelo do processo de raciocínio matemático que relaciona de forma interativa a conjetura e generalização, a compreensão do «porquê» e a justificação ou refutação, de acordo com o esquema da figura 3.

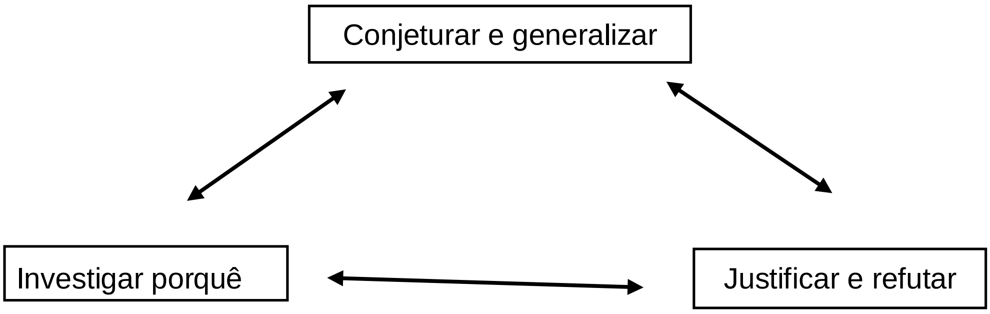


Figura 3 - Modelo interativo do processo de raciocínio matemático

(Lannin et al., 2011, citado por Pimentel & Vale, 2012, p. 42)

Estes aspetos são divididos pelos autores em compreensões essenciais que os alunos devem possuir de modo a poderem exercer o raciocínio nas diferentes etapas.

O primeiro aspeto abrange a conjetura e a generalização: (a) conjeturar inclui o raciocínio sobre relações com o intuito de estabelecer afirmações que se procura que sejam verdadeiras embora não se saiba; (b) generalizar envolve a procura de aspetos comuns entre casos ou a extensão do raciocínio para lá do domínio inicial; (c) generalizar envolve reconhecer o domínio relevante; e (d) conjeturar e generalizar incluem usar e clarificar o significado de termos, símbolos e representações. No segundo aspeto o raciocínio leva à pesquisa de vários fatores que podem explicar porque é que a generalização é verdadeira ou falsa. No terceiro, envolvendo a justificação ou refutação: (a) a justificação é um argumento lógico baseado em ideias previamente compreendidas; (b) uma refutação envolve demonstrar a falsidade de um caso particular; (c) a justificação e a refutação incluem a avaliação da validade dos argumentos; e (d) uma justificação válida de uma afirmação geral não pode basear-se em argumentos de autoridade, perceção, senso comum ou exemplos.

Este processo de aprender matemática é fortemente condicionado pela ação dos professores, pelo poder que têm de potenciar ou limitar as aprendizagens dos seus alunos, de acordo com a sua motivação e o seu conhecimento matemático e didático. Daí a importância da formação de professores, quer inicial quer contínua, pela necessidade de eles próprios fazerem matemática com significado, bem como em refletirem, comunicarem e discutirem as suas ideias matemáticas (Ponte & Chapman, 2008, citados por Pimentel & Vale, 2012).

Numa perpetiva mais abrangente, Pimentel e Vale citam Thompson (1996) e Lithner (2008) que definem raciocínio como um modo de pensar, que permite produzir afirmações e tirar conclusões, isto é, uma linha de pensamento que os alunos seguem na resolução das suas tarefas matemáticas comuns, não necessariamente baseado num processo lógico-dedutivo. Argumentar é fundamentar o seu raciocínio.

Para Stylianides (2007, citado por Vale & Pimentel, 2013), a prova é um argumento matemático que envolve afirmações, raciocínio e formas de expressão, ao alcance dos alunos nas aulas de matemática. Na verdade, a maioria das vezes é o raciocínio indutivo que está por trás da construção dos seus argumentos dedutivos, ou seja, da prova. Também para Harel e Sowder (1998, citados por Vale & Pimentel, 2013), a maior parte do trabalho matemático é usado a explorar e a conjeturar e não a procurar provas. Conjeturar, para estes autores, significa “observar”, antes de se tornar um facto, a partir do momento em que seja provada a sua veracidade, isto é, a conjetura resulta da observação constante a partir da qual se deteta uma regularidade ou padrão. Pólya (1954, citado por Pimentel & Vale, 2013) demonstrou que uma conjetura matemática pode resultar da observação de um ou mais exemplos para os quais a conjetura é verdadeira.

Além dos tipos de raciocínio dedutivo e indutivo, alguns autores (e.g. Radford, 2008; Rivera, 2008, citados por Pimentel & Vale, 2013), consideram ainda o raciocínio abdutivo. A abdução é uma inferência, uma hipótese explicativa prévia. Sendo este modo de inferência pouco seguro, uma vez que depende da intuição e do conhecimento prévio, é um tipo de raciocínio com enorme referência à descoberta de padrões, pois é o ponto de partida para o raciocínio indutivo, dado que corresponde à fase de procura da hipótese prévia acerca do que há em comum nos dados analisados, assumindo deste modo um papel fundamental no progresso da exploração matemática. Na verdade, as hipóteses formuladas são apenas plausíveis dado que não é usado o raciocínio dedutivo, mas é na fase abdutiva que a criatividade na elaboração de novas ideias assume uma forte importância (Rivera, 2008, citado em Vale & Pimentel, 2013). A abdução determina a escolha da hipótese, o processo que introduz uma nova ideia, a formulação de uma conjetura, enquanto que a indução pressupõe a sua testagem. Este pode ser um processo cíclico até resultar numa generalização, que segundo Rivera e Becker (2007, citados por Vale & Pimentel, 2013) é o processo que decorre da aceitação de uma forma geral obtida pelo referido processo cíclico de abdução e indução. Em consonância com estes autores, Yu (2006, citado em Vale & Pimentel, 2013) identifica as ideias principais dos três tipos de raciocínio: a abdução cria, a indução verifica e a dedução explica.

Oliveira (2002), no seu estudo sobre o raciocínio do ponto de vista epistemológico, identifica quatro grandes tipos de raciocínio: (i) indução; (ii) dedução, (iii) abdução; e (iv) transformação. Sendo o foco na incidência e na dedução, apresentado no programa, o conhecimento de semelhanças e diferenças entre os raciocínios indutivo e dedutivo constitui um ponto de partida para a compreensão do que caracteriza o raciocínio matemático e dos seus processos.

De acordo com Pólya (1954), os processos de indução têm inicio geralmente a partir da observação, desenvolvendo através dela conjeturas que podem ser testadas. O mesmo autor ressalva ainda que a generalização, a especialização e a analogia, que ocorrem frequentemente na resolução de problemas inserem-se no raciocínio indutivo. Oliveira (2002) destaca também a estreita relação entre analogia e indução, uma vez que “quem induz fá-lo por analogia”.

Uma vez que as tarefas com padrões possibilitam o desenvolvimento do pensamento algébrico nos estudantes, através da generalização de diferentes ideias matemáticas pela observação de um conjunto de evidências, o NCTM (2007) aconselha que os alunos devem usar o raciocínio indutivo na busca de relações matemáticas, por meio do estudo de padrões. Vários investigadores consideram o estudo de padrões figurativos de crescimento (e.g. Barbosa, 2011; Orton, Orton & Roper, 1999; Vale & Pimentel, 2010; Pimentel, 2011, citados em Vale & Pimentel, 2013) como uma das abordagens possíveis para ajudar os estudantes a generalizar e a representar relações. Na verdade, e segundo Lannin et al. (2011, citado por Vale & Pimentel, 2013) generalizar pressupõe reconhecer aspetos comuns entre os casos ou estender o raciocínio para além do domínio no qual teve origem, estabelecendo uma ponte entre o mundo de objetos particulares e o raciocínio abdutivo.

Vale e Pimentel (2013) consideram que as tarefas com padrões de crescimento em contextos figurativos nem sempre são exploradas, nas aulas de matemática, de forma a desenvolverem o raciocínio funcional. Contudo, é crucial que a generalização seja feita a partir da análise das figuras, implicando um raciocínio visual que tem em conta as características espaciais do padrão por forma a desenvolver um conjunto de relações que permitem construir uma generalização assente no raciocínio funcional. Este processo de generalização, aplicável a qualquer produção de conhecimento matemático, é intrínseco às tarefas de exploração de padrões usadas como promotor do pensamento algébrico. Para Radford (2010, citado em Vale & Pimentel, 2013) generalização algébrica de um padrão consiste na capacidade de entender que os aspetos comuns encontrados nos elementos de uma determinada sequência são aplicáveis a todos os termos dessa sequência, podendo ser explicados através de uma expressão.

O raciocínio, embora não se tratando de um tema novo em educação matemática, necessita ainda de reflexão sobre o modo como é tratado. A identificação de tarefas adequadas ao nível dos alunos para o desenvolvimento dos diferentes tipos de raciocínio poderá ser uma forma de abordagem deste tema.

Ao proporcionar tarefas desafiantes e adequadas ao conhecimento dos alunos, o professor está a permitir que se estabeleçam conexões entre vários tópicos dentro e fora da matemática e a estimular a argumentação e a comunicação com recurso a diferentes representações, essenciais ao desenvolvimento do pensamento independente e crítico (Boavida et al., 2008).

3 - METODOLOGIA DE INVESTIGAÇÃO

Neste capítulo descrevo as opções metodológicas do estudo, os participantes e critérios de seleção e a recolha e análise dos dados.

3.1. Opções metodológicas

Este estudo assentou numa abordagem qualitativa integrada num paradigma interpretativo, baseado numa experiência de ensino realizada numa turma do 2.º ano do 1.º ciclo do Ensino Básico. Este *design* teve como foco a compreensão e análise de dados de acordo com as questões apresentadas, e não a generalização de resultados. Como referem Rivera e Becker (2008, citados por Morais, 2012), uma experiência de ensino que envolve sequências e regularidades permite aos alunos uma possibilidade de se envolverem em situações de resolução de problemas, que visam a aquisição dos requisitos matemáticos formais da generalização algébrica, através do desenvolvimento do raciocínio organizado assente na formação, generalização e argumentação, através da compreensão e explicitação do seu pensamento.

3.2. Participantes e critérios de seleção

Os participantes deste estudo foram a professora, que desempenhou o papel de professora investigadora, investigando a própria prática, e os seus alunos do 2.º ano de escolaridade. De acordo com Ponte (2002), "A investigação dos profissionais sobre a sua prática pode ser importante por várias razões. Antes de mais, ela contribui para o esclarecimento e resolução dos problemas. Além disso, proporciona o desenvolvimento profissional dos respetivos atores (…)" (p.1).
Condições fundamentais colocadas por Beillerot (2001) para que uma atividade constitua uma investigação: "(a) produz conhecimentos novos ou, pelo menos, novos para quem investiga, (b) segue uma metodologia rigorosa, e (c) é pública" (p. 3).
As três condições que Beillerot indica aplicam-se à investigação que os profissionais realizam sobre a sua prática. Contudo, são condições muito gerais que será preciso operacionalizar a partir do desenvolvimento de uma cultura de investigação e de discussão da investigação sobre a prática profissional. Só através da análise de casos concretos se poderá com clareza, em cada campo, o que é realmente novo ou conhecido, o que é ou não metódico e o que constitui uma divulgação pública adequada para que um trabalho possa ser escrutinado e discutido pelos pares (Ponte, 2002).

“Este campo de investigação, essencialmente profissional, tem como grande finalidade contribuir para clarificar os problemas da prática e procurar soluções. Note-se, no entanto, que tal trabalho pode ser conduzido numa lógica sobretudo de intervir e transformar, sabendo à partida onde se quer chegar, ou numa lógica de compreender primeiro os problemas que se colocam para delinear, num segundo momento, estratégias de ação mais adequadas.” (Ponte, 2002, p.1)

A turma do 2.º ano onde foi desenvolvido este estudo pertence a uma escola pública do distrito de Lisboa e é constituída por vinte alunos, sendo treze do sexo masculino e sete do sexo feminino. Nesta turma estavam incluídas três crianças ao abrigo do Decreto-Lei n.º 3/2008 que por esse motivo usufruíram de apoio especializado.
Todos os alunos, com exceção de dois, frequentaram o jardim de infância juntos assim como o 1.º ano de escolaridade, pelo que demonstravam um enorme à vontade e confiança uns nos outros.

3.3. Recolha e análise de dados

Para a realização deste estudo e com o objetivo sempre presente de dar resposta às questões enunciadas anteriormente, foi apresentada à turma em análise uma sequência de aprendizagemconstituída por um conjunto de oito tarefas de sequências repetitivas e crescentes com uma progressão de dificuldade.

Tabela 3 – *Objetivos das tarefas propostas*

Tarefa	Nome	Objetivo
1	Colar de contas	Criar um padrão e descrevê-lo.
2	Colar de contas	Compreender a relação entre o número de contas brancas e pretas.
3	Canetas	Identificar os termos seguintes numa sequência.
4	Letras	Completar uma sequência.
5	Figuras crescentes	Prever os termos seguintes de uma sequência.
6	Abelhas	Relacionar a forma como está organizada uma figura com o respetivo número.
7	Somas	Explicar de que forma se obtêm os termos de uma sequência.
8	Números a crescer	Descobrir os termos seguintes da sequência.

As tarefas têm uma importância significativa em qualquer aula de Matemática e, em particular, naquelas em que se pretende desenvolver o pensamento algébrico. São elas que constituem o ponto de partida para a atividade matemática que os alunos desenvolvem.

Blanton e Kaput (2008, citados em Canavarro, 2007) identificam a transformação das tarefas típicas da aula de Matemática como um dos passos que os professores terão de percorrer quando interessados em promover o pensamento algébrico nos seus alunos. Recomendam a "algebrização" dos problemas aritméticos — a sua conversão de problemas aritméticos de resposta única em oportunidades de construção de regularidades, conjeturas, generalizações e sua justificação e explicitação.

A recolha de dados foi realizada através de observação participante na sala de aula, ao longo de dois meses com a periodicidade de uma sessão semanal, totalizando oito sessões apresentadas a toda a turma.

A realização das tarefas foi feita em díades no decorrer do ano letivo 2015/2016.

Posteriormente e no sentido de aprofundar a investigação sobre a prática foram elaborados quatro estudos de caso com diferentes níveis de desempenho na área da matemática, dado que se trata de uma turma bastante heterogénea, no que diz respeito à aprendizagem.

No processo de recolha de dados recorri a várias técnicas próprias da investigação qualitativa, nomeadamente a observação, o diário de bordo, e o registo em áudio e vídeo. A utilização destes diferentes instrumentos constitui uma forma de obtenção de dados de diferentes tipos, os quais proporcionam a possibilidade de cruzamento ou triangulação da informação (Coutinho, 2005).

Segundo Yin (1994), a utilização de múltiplas fontes de dados na construção de um estudo de caso, permite considerar um conjunto mais diversificado de tópicos de análise e em simultâneo permite corroborar o mesmo fenómeno. Sendo assim, o *diário de bordo* é considerado um dos principais instrumentos do estudo de caso e consiste num relato escrito das notas retiradas das suas observações no campo.

Como já mencionado, a recolha de dados foi também apoiada por gravações áudio e vídeo. A utilização de gravações áudio e vídeo é considerada por Herbst e Chazan (2009, citados em Mestre, 2014) como uma ferramenta importante para captar a ação que acontece em sala de aula. Também Confrey e Lachance (2000) consideram que a gravação vídeo é um dos métodos mais poderosos de recolha de dados por conseguir capturar as interações diárias de sala de aula. Neste sentido, Clement (2000) refere que a gravação vídeo pode ser um instrumento importante pela sua flexibilidade em recolher e guardar informação que captura a riqueza do comportamento e a complexidade de interações e permite aos investigadores reexaminar os dados as vezes que forem necessárias.

A análise de dados decorreu do cruzamento das fontes recorrendo à análise de conteúdo, a partir da técnica temática ou categorial e uma análise de discurso, de modo a dar resposta às questões do estudo.

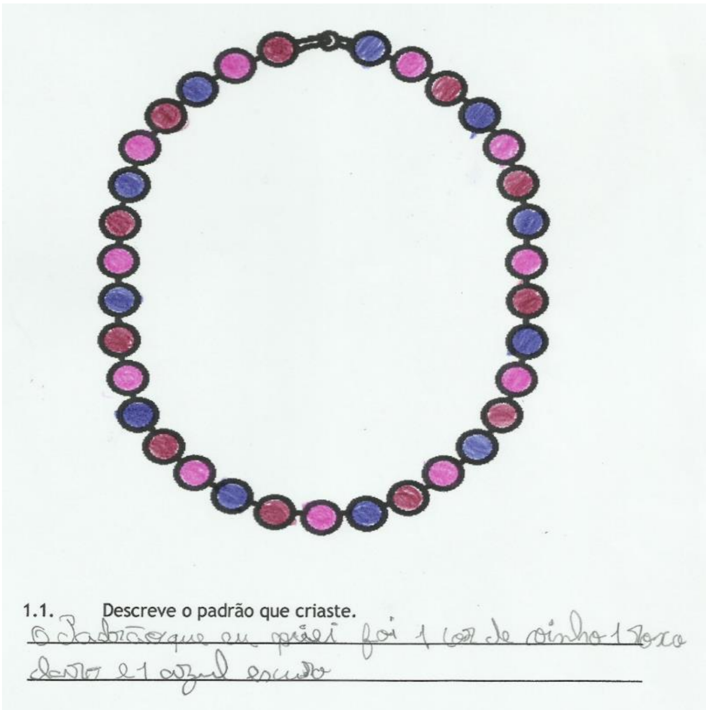
4 – OS ALUNOS E AS TAREFAS

Neste capítulo apresento os resultados do estudo que realizei. Como já referi, embora as tarefas tenham sido propostas e resolvidas pela turma organizada em pares, o estudo vai focar-se em quatro pares que constituem quatro estudos de caso. Para cada par vai ser analisado o desempenho deste, tarefa a tarefa, terminando a análise com uma pequena síntese.

4.1. Caso 1: Bárbara e Tatiana

A Bárbara e a Tatiana são duas meninas muito meigas. Ambas são boas alunas a matemática, embora a Tatiana se destaque. É mais participativa e menos tímida que a Bárbara.

4.1.1. Tarefa 1 (colar de contas)



O padrão que eu criei foi 1 cor de vinho 1 roxo claro e 1 azul

Figura 4 – Padrão criado pela Bárbara e Tatiana (tarefa 1)

Esta tarefa suscitou, à partida, alguma dificuldade por parte da Bárbara, na compreensão do que seria um padrão. Relativamente à descrição do padrão criado, apenas este par fez referência ao número de cada cor.

Tatiana: Três cores. Que cores é que vais escolher? Eu escolho uma e depois tu escolhes outra.
Bárbara: Verde.
Tatiana: Verde? Outra vez? Tens que ecolher uma cor diferente. Queres começar por qual?
Bárbara: Escolhe tu.
Tatiana: Não é só para pintar uma, é para criar um padrão.
Bárbara: Então o verde já não precisamos…
Tatiana: Não?!
Bárbara: Três cores diferentes…
Tatiana: O padrão… Padrão é com letra maiúscula.
Bárbara: Porquê?
Tatiana: Porque sim!

Parece-me que a preocupação da Tatiana em escrever a palavra "padrão" com letra maiúscula se prendeu com o destaque que queria dar ao padrão na sequência.
Com o objetivo de obter mais dados quanto à construção do padrão, resolvi intervir, colocando algumas questões.

Professora: Então qual foi o padrão?
Tatiana: Cor de vinho, roxo claro e azul escuro.
Professora: E não podia ser, por exemplo, dois de cada? Tinha que ser só um de cada? Vocês escolheram dessa forma, está correta, mas podia ser de outra forma ou só podia ser assim?
Tatiana: Podia ser de outra forma.
Professora: Como, por exemplo? Dá outro exemplo.
Tatiana: Podia ser três cor de vinho, um roxo claro e três azuis.
Professora: Tiveram dificuldade em fazer esta atividade?
Tatiana e Bárbara: Não.

4.1.2. Tarefa 2 (colar de contas)

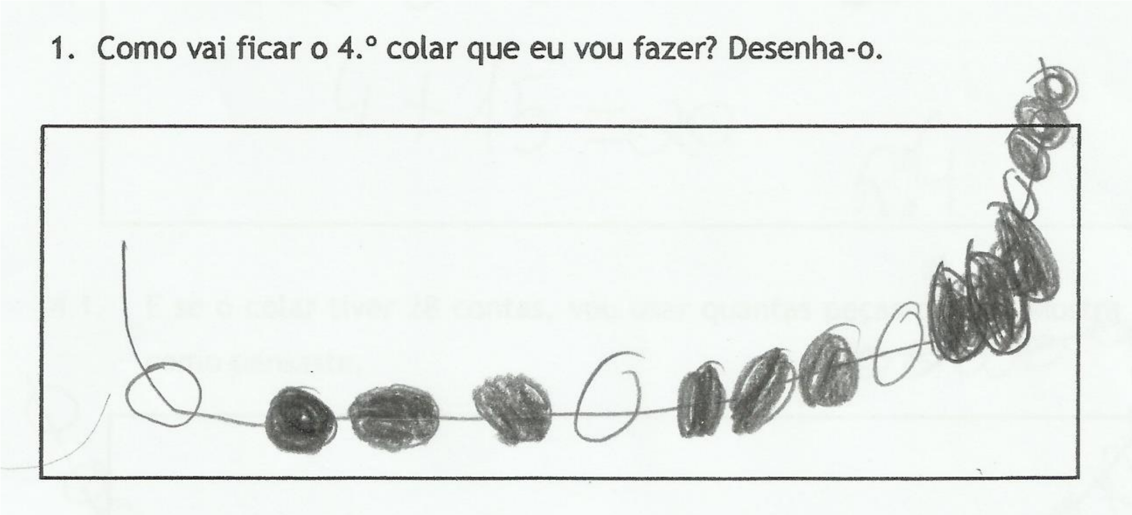
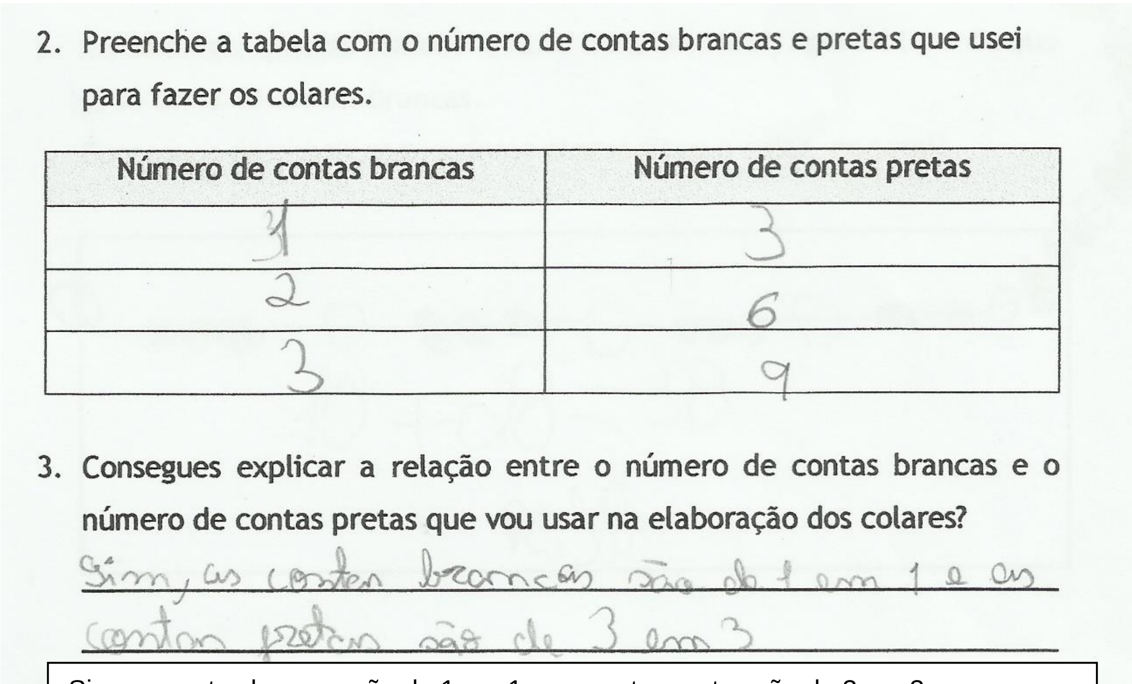


Figura 5 – Resolução da Bárbara e da Tatiana (tarefa 2.1)

Este par correspondeu ao solicitado, tendo, sem dificuldades, desenhado corretamente o colar seguinte, respeitando a sequência.


2. Preenche a tabela com o número de contas brancas e pretas que usei para fazer os colares.

Número de contas brancas	Número de contas pretas
1	3
2	6
3	9

3. Consegues explicar a relação entre o número de contas brancas e o número de contas pretas que vou usar na elaboração dos colares?

Sim, as conten brancas são de 1 em 1 e as conten pretas são de 3 em 3

Sim, as contas brancas são de 1 em 1 e as contas pretas são de 3 em 3.

Figura 6 - Resolução da Bárbara e da Tatiana (tarefas 2.2 e 2.3)

Este par explicou a sequência das contas brancas e a sequência das contas pretas separadamente, não tornando explícita a descoberta da relação existente entre o número de contas brancas e o número de contas pretas.

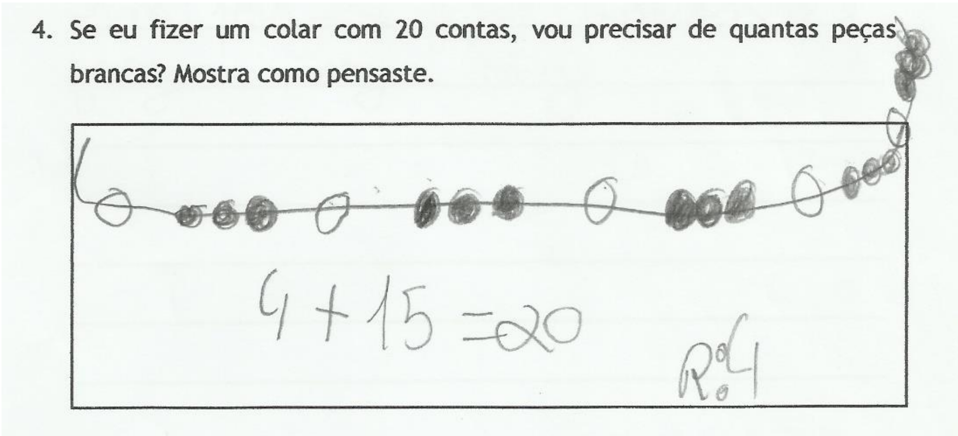


Figura 7 - Resolução da Bárbara e da Tatiana (tarefa 2.4)

Tatiana: É fácil. 10! Fazemos um colar com 20 contas.

Bárbara: Já está!

Tatiana: Agora contas as brancas.

Bárbara: Vou pintar as pretas.

Tatiana: Vou contar as brancas. 1, 2, 3, 4. 4 mais 15 pretas.

Barbara: 4 mais 15 dá 20.

Esta atividade foi realizada pelas duas alunas com recurso ao desenho. Contudo, apesar deste ter sido bem construído e de o número de peças estar correto, este par deu uma resposta incorreta, apenas porque contou mal o número de peças brancas e nem depois de terem calculado a soma entre o número de contas brancas e pretas se aperceberam do erro cometido.

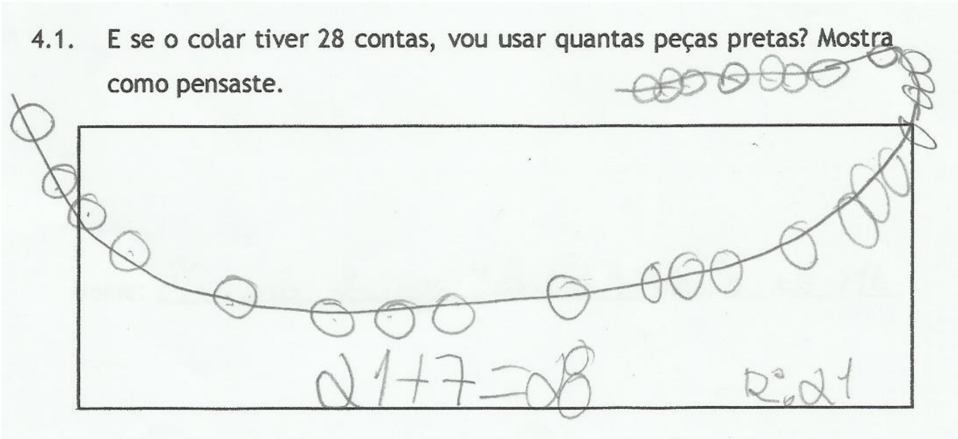
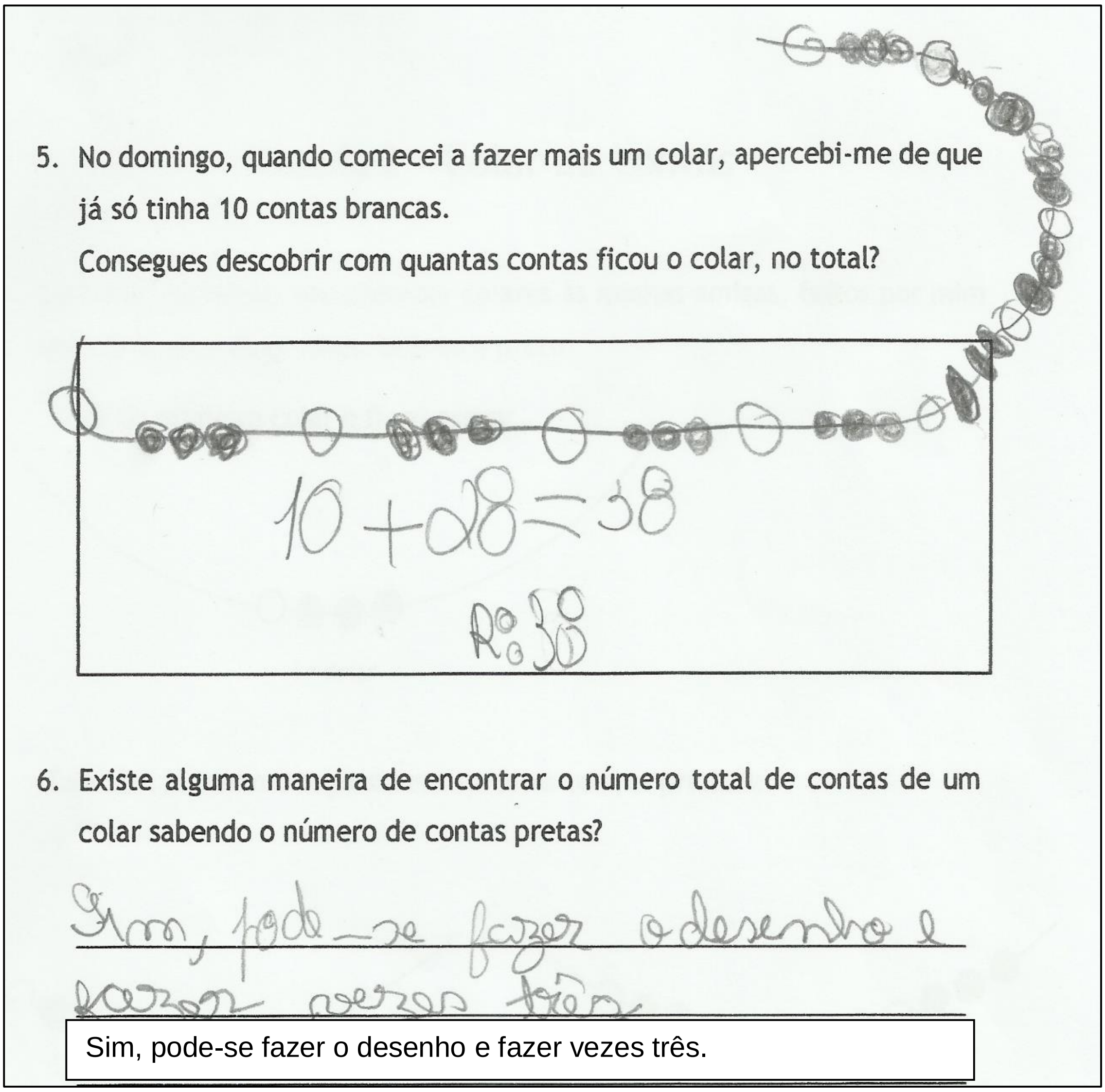


Figura 8 - Resolução da Bárbara e da Tatiana (tarefa 2.4.1)

Nesta atividade, as alunas desenharam uma vez mais um colar com as peças pretendidas (28), não recorrendo à pintura das contas pretas, mas antes deixando intervalos maiores ou menores entre elas, consoante se tratasse de peças brancas ou pretas. Sendo assim, depois de contarem as peças correspondentes à cor preta, constataram que eram 21. Deste modo, confirmaram que 21 mais 7 dá 28 contas, logo o número de contas pretas num colar com 28 contas no total é 21.


5. No domingo, quando comecei a fazer mais um colar, apercebi-me de que já só tinha 10 contas brancas.
Consegues descobrir com quantas contas ficou o colar, no total?

10 + 28 = 38

R: 38

6. Existe alguma maneira de encontrar o número total de contas de um colar sabendo o número de contas pretas?

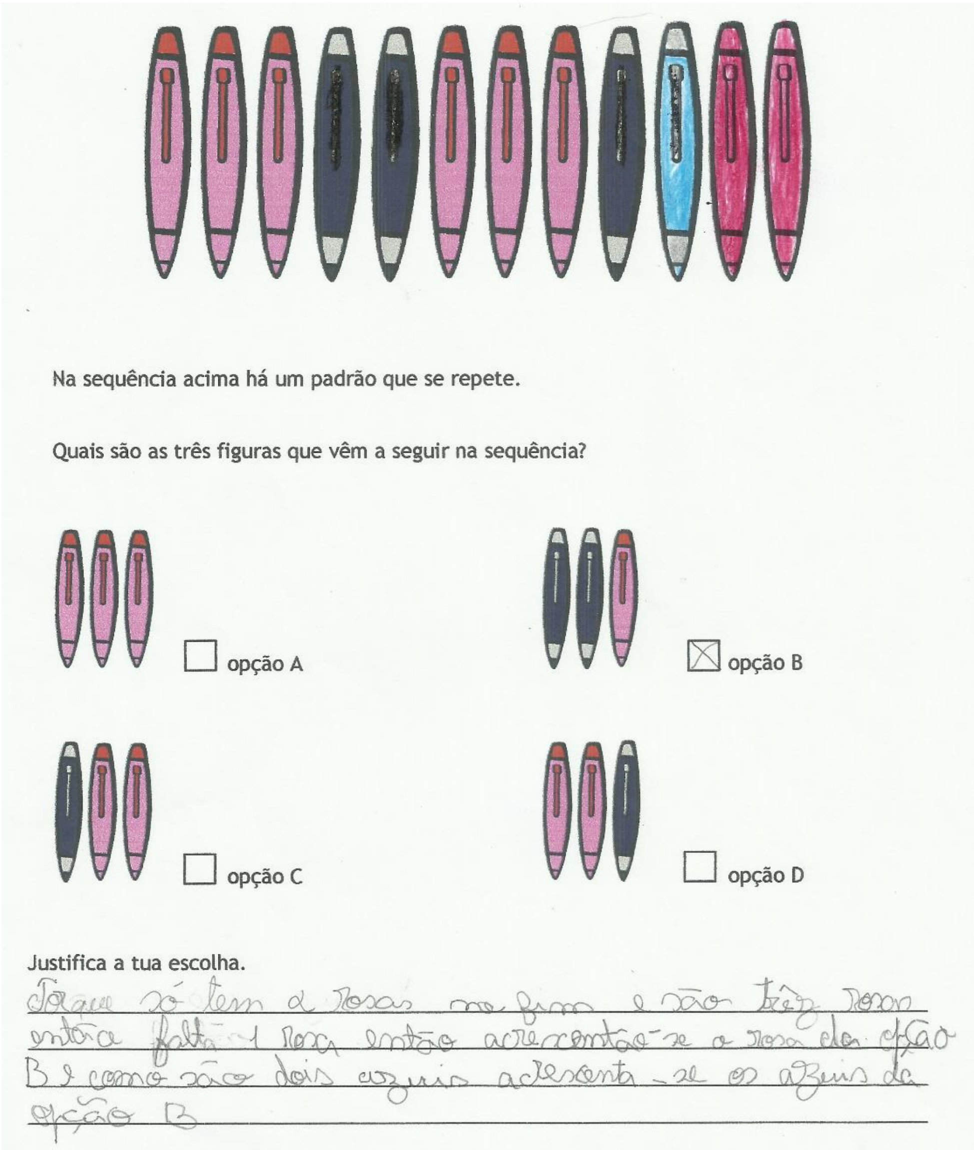
Sim, pode-se fazer o desenho e fazer vezes três.

Sim, pode-se fazer o desenho e fazer vezes três.

Figura 9 **-** Resolução da Bárbara e da Tatiana (tarefas 2.5 e 2.6)

É percetível na resolução deste par que esta atividade foi bem compreendida. Contudo, na primeira proposta, que realizaram com recurso ao desenho do colar, cometeram dois erros. O primeiro, na contagem das peças pretas, pois desenharam 27 e contaram 28. O segundo, no total de contas pretas, uma vez que, apesar de terem compreendido a relação entre o número de peças pretas e brancas, conforme se constata na resposta à segunda proposta, o desenho do colar teria que ter terminado em contas pretas, dado que para cada conta branca existem três pretas. Sendo assim, o resultado de contas pretas teria que ser 30. No entanto, para chegarem à resposta do número de contas do colar, usaram uma estratégia correta, somando o número de contas brancas e pretas.

4.1.3. Tarefa 3 – Canetas



Porque só tem 2 rosas no fim e são três rosas, então falta 1 rosa então acrescenta-se a rosa da opção B e como são dois azuis acrescenta-se os azuis da opção B.

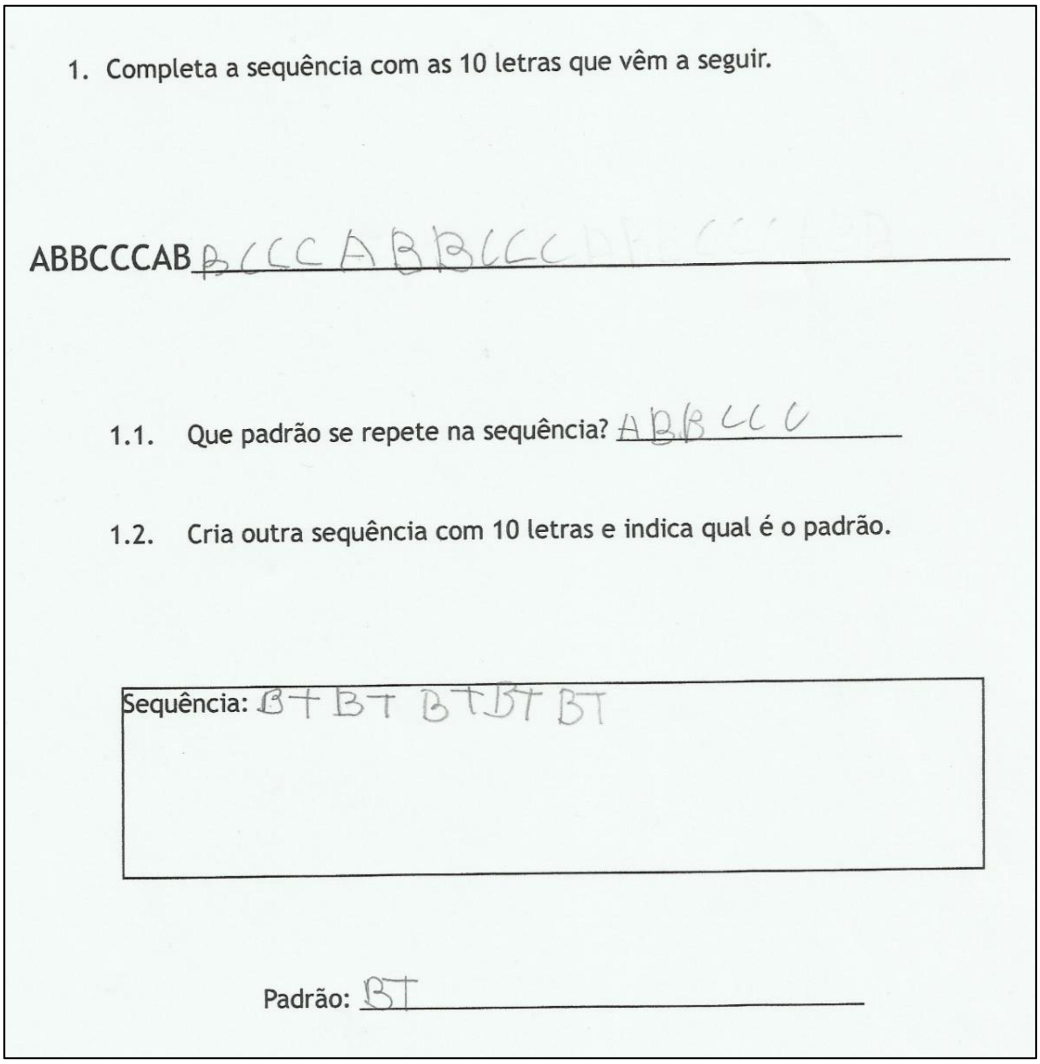
Figura 10 - Resolução da Bárbara e da Tatiana (tarefa 3)

Nesta tarefa, este par de alunas demonstrou alguma dificuldade em interpretar a sequência, uma vez que apesar de ter compreendido que o padrão era três canetas rosas e duas azuis, o facto de ter pintado as útimas três levou uma das alunas deste grupo a interpretar que a opção a assinalar seria a que viria a seguir, isto é, se o padrão é três canetas rosas e ela pintou apenas duas (porque terminou aí a sequência) faltavalhes uma rosa e a seguir às canetas rosa são duas azuis, logo no entender deste grupo a única opção possível seria a que apresenta precisamente uma rosa e duas azuis, embora com outra ordem (duas azuis e uma rosa).

Professora: Escolheram a opção B porquê?

Tatiana: Porque no fim só tem 2 rosas e acrescenta-se mais uma e duas azuis.

4.1.4. Tarefa 4 - Letras


1. Completa a sequência com as 10 letras que vêm a seguir.

ABBCCCAB B C C C A B B C C C

1.1. Que padrão se repete na sequência? A B B C C C

1.2. Cria outra sequência com 10 letras e indica qual é o padrão.

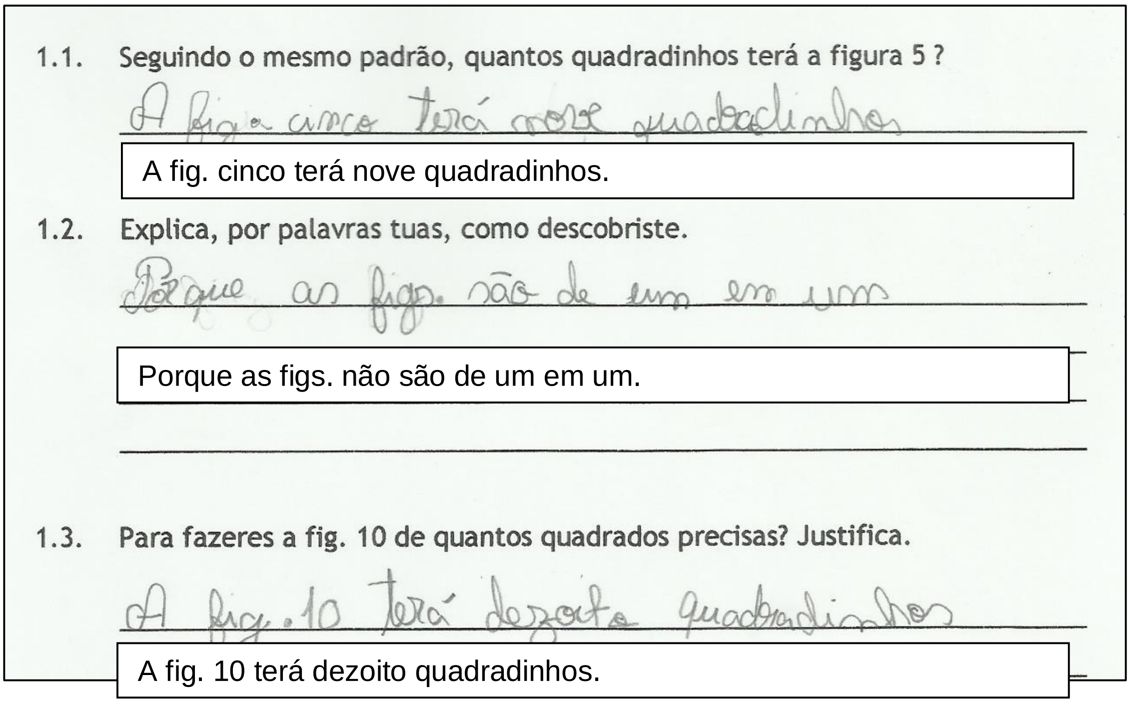
Sequência: B T B T B T B T B T

Padrão: BT

Figura 11 - Resolução da Beatriz e da Tirciana (tarefa 4)

Esta atividade foi concluída com sucesso por este par, tendo facilmente identificado o padrão presente na sequência. Igualmente sem dificuldade criaram uma sequência de dez letras recorrendo a um padrão constituído por duas letras que foram repetindo até terminarem a sequência.

4.1.5. Tarefa 5 – Figuras crescentes


1.1. Seguindo o mesmo padrão, quantos quadradinhos terá a figura 5 ?

A fig. cinco terá nove quadradinhos.

1.2. Explica, por palavras tuas, como descobriste.

Porque as figs. não são de um em um.

1.3. Para fazeres a fig. 10 de quantos quadrados precisas? Justifica.

A fig. 10 terá dezoito quadradinhos.

Figura 12 – Resolução da Bárbara e da Tatiana (tarefa 5)

Relativamente à quinta figura, estas alunas facilmente concluiram que terá nove quadradinhos, pois perceberam que o número de quadradinhos vai aumentando:

> **Bárbara:** Tirciana, aqui tem 5, aqui tem 6, aqui tem 7, é seguido.
> **Tatiana:** Espera. Então a figura 5 tem…
> **Bárbara:** 9.
> **Tatiana:** Porque as figuras são de um em um.

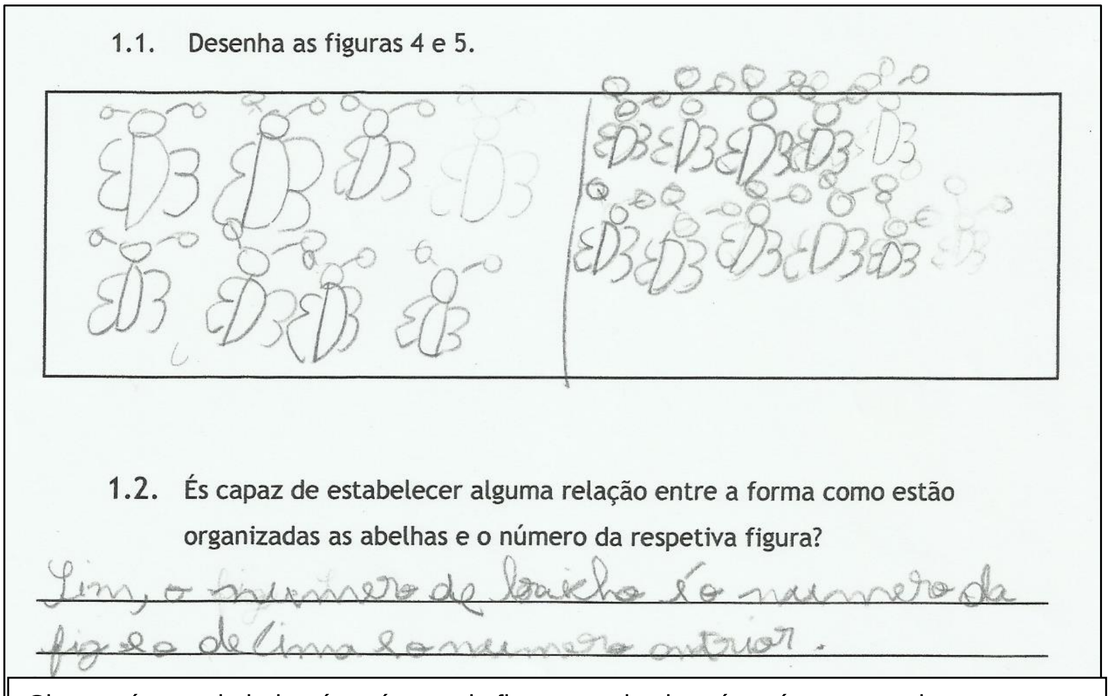
Quanto à figura 10, este par apresentou muita dificuldade, não tendo conseguido chegar ao resultado correto:

> **Tatiana:** 18. 5 mais 5 é 10, não é? A figura 5 tem 9, e 9 mais 9 é 18.
> **Professora:** E se for a figura 14?

Tatiana: A figura 7 tem…Tem 22! Descobri quantos tem a figura 7 e depois fiz esse número mais esse número.

Para as duas alunas, o facto de 10 ser o dobro de 5, ambas partiram do pressuposto que se a figura 5 é constituída por 9 quadradinhos, a figura 10 terá o dobro destes, ou seja, 18. Contudo, apesar de terem tentado estabelecer uma relação entre as figuras 5 e 10, revelaram não ter compreendido a relação implícita nesta questão. A resposta correta deveria ser 14, pois ao número da figura adicionam-se 4 unidades para se descobrir o número de quadrados dessa figura.

4.1.6. Tarefa 6 – Abelhas



Sim, o número de baixo é o número da figura e o de cima é o número anterior.

Figura 13 – Resolução da Bárbara e da Tatiana (tarefa 6)

Esta tarefa suscitou algumas dúvidas, desde logo referentes à disposição das abelhas, pois alguns alunos não se aperceberam imediatamente da relação existente entre o número de abelhas da linha de baixo e o da linha de cima.

Tatiana: É sempre aumentando. A figura 4 vai ter 8. Agora a figura 5 vai ter mais três, vai ter 11 abelhas.

Bárbara: Quantas em cima e quantas em baixo?

Tatiana: As que cabem. Têm que caber 11.

Bárbara: Quantas em cima?

Tatiana: 6 e em baixo 5.

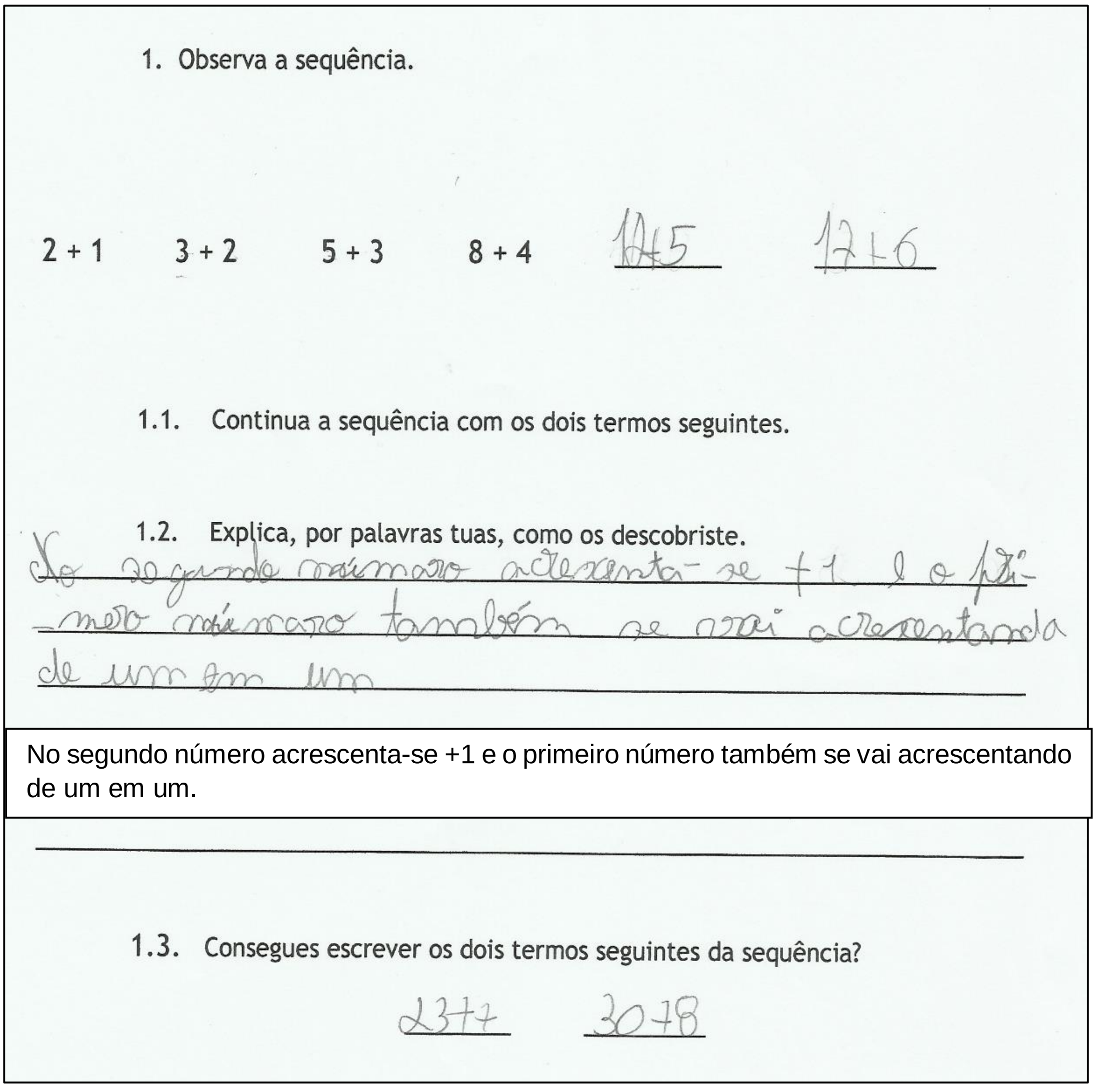
Bárbara: Apaga isso e faz em baixo.

Tatiana: Vai ser a mesma coisa.

Bárbara: Sim, mas fica mais bonito em baixo.

Aparentemente, a Tatiana não deu atenção à disposição das abelhas, contudo a Bárbara sentiu que esteticamente o número maior de abelhas deveria ser em baixo, deixando transparecer a compreensão da sua disposição, sem contudo conseguir explicá-la.

4.1.7. Tarefa 7 – Somas



1. Observa a sequência.

2 + 1 3 + 2 5 + 3 8 + 4 12+5 17+6

1.1. Continua a sequência com os dois termos seguintes.

1.2. Explica, por palavras tuas, como os descobriste.

No segundo número acrescenta-se +1 e o pri-
-mero número também se vai acrescentando
de um em um

No segundo número acrescenta-se +1 e o primeiro número também se vai acrescentando de um em um.

1.3. Consegues escrever os dois termos seguintes da sequência?

23+7 30+8

Figura 14 – Resolução da Bárbara e da Tatiana (tarefa 7)

Este par, apesar de mais tarde, ter conseguido chegar aos termos seguintes da sequência, na primeira proposta, teve, no início, algumas dificuldades em entendê-la, conforme é visível no diálogo:

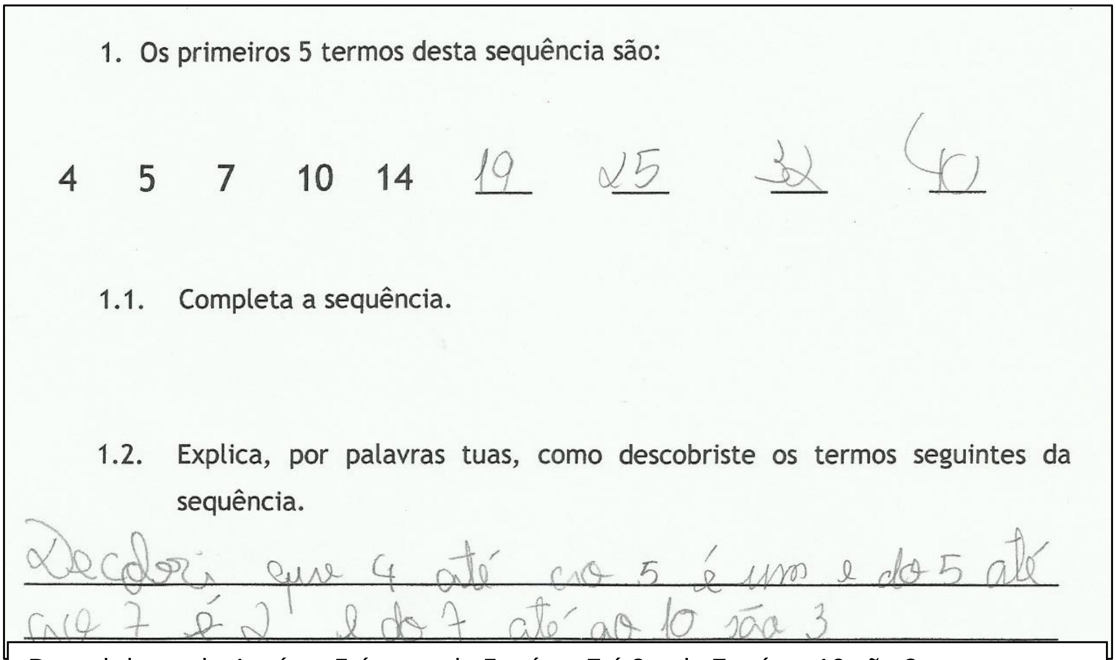
Tatiana: 2 + 1, 3 + 2, 5 + 3, 8 + 4, … Então… 6 + 8.

Bárbara: Mas aqui não é a seguir?

Tatiana: Não. 6 + 8, 10 + 6.

Como a descoberta dos termos seguintes foi feita de forma pouco segura, a explicação da mesma suscitou dificuldades, não tendo ficado clara a forma como a descobriram, sobretudo o primeiro número dos dois termos.

4.1.8. Tarefa 8 – Números a crescer



1. Os primeiros 5 termos desta sequência são:

4 5 7 10 14 19 25 32 40

1.1. Completa a sequência.

1.2. Explica, por palavras tuas, como descobriste os termos seguintes da sequência.

Decobri que 4 até ao 5 é um e do 5 até ao 7 é 2 e do 7 até ao 10 são 3

Descobri que do 4 até ao 5 é um e do 5 até ao 7 é 2 e do 7 até ao 10 são 3.

Figura 15 - Resolução da Bárbara e da Tatiana (tarefa 8)

Esta atividade foi realizada por este par sem constrangimentos, pois parece terem descoberto de forma imediata o padrão subjacente:

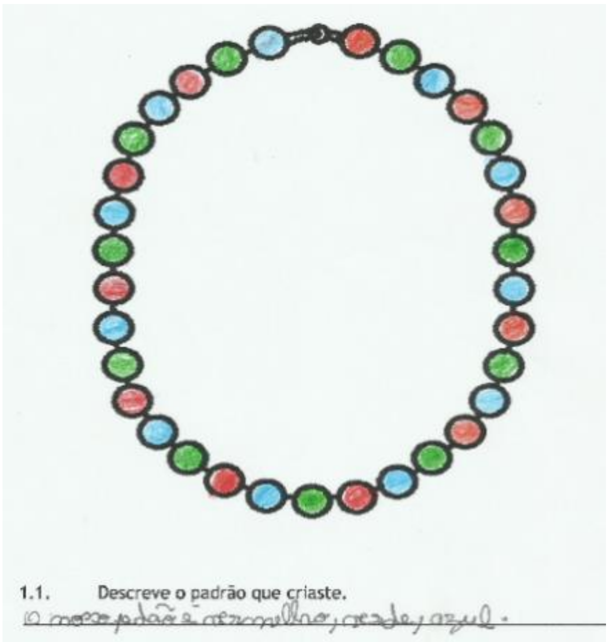
> **Tatiana:** Do 4 até ao 5 é 1, do 5 até ao 7 é 2… Aqui é mais 4 e aqui é mais 5. 19. Agora, 19 + 6.
>
> **Bárbara:** 25.
>
> **Tatiana:** Agora 25 mais… (*conta 7 dedos*) 32, agora 32 + 8, 40.

Verificou-se, através da análise dos procedimentos adotados pelas alunas acima mencionadas, que estas recorreram maioritariamente ao desenho nas duas primeiras tarefas. Contudo, na segunda questão da tarefa 2, no preenchimento da tabela que apelava a uma relação entre as contas brancas e pretas, estas não o fizeram de forma explícita, ou seja, não fizeram uma generalização para qualquer número de contas brancas ou pretas, limitando-se a fazer uma relação entre o número de contas brancas e pretas separadamente. No entanto, no decorrer das tarefas seguintes notou-se uma evolução ao nível do raciocínio e da explicação das estratégias usadas, mais evidente na tarefa 6.

4.2. Caso 2 – Carolina e Tomé

O segundo par, constituído pela Carolina e pelo Tomé, com 7 anos de idade, foi escolhido por apresentarem algumas fragilidades na matemática. A Carolina é mais insegura que o Tomé, mas ambos se empenham na execução das atividades propostas.

4.2.1. Tarefa 1 (colar de contas)



O nosso padrão é vermelho, verde, azul.

Figura 16 – Padrão criado pela Carolina e Tomé (tarefa 1)

Esta atividade foi desenvolvida sem suscitar qualquer dúvida entre os elementos do par, tendo ambos escolhido as cores de comum acordo

4.2.2. Tarefa 2 (colar de contas)

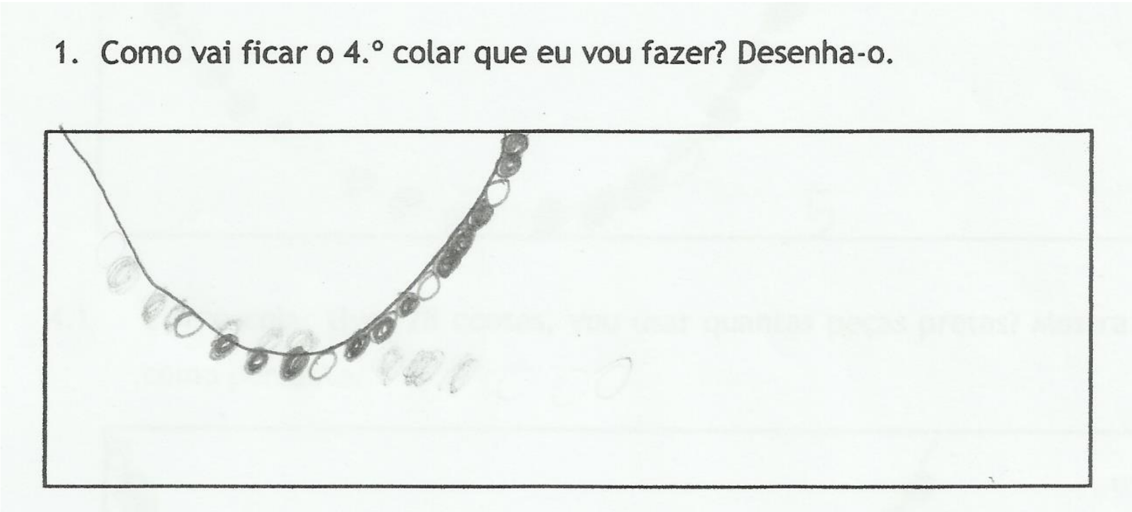
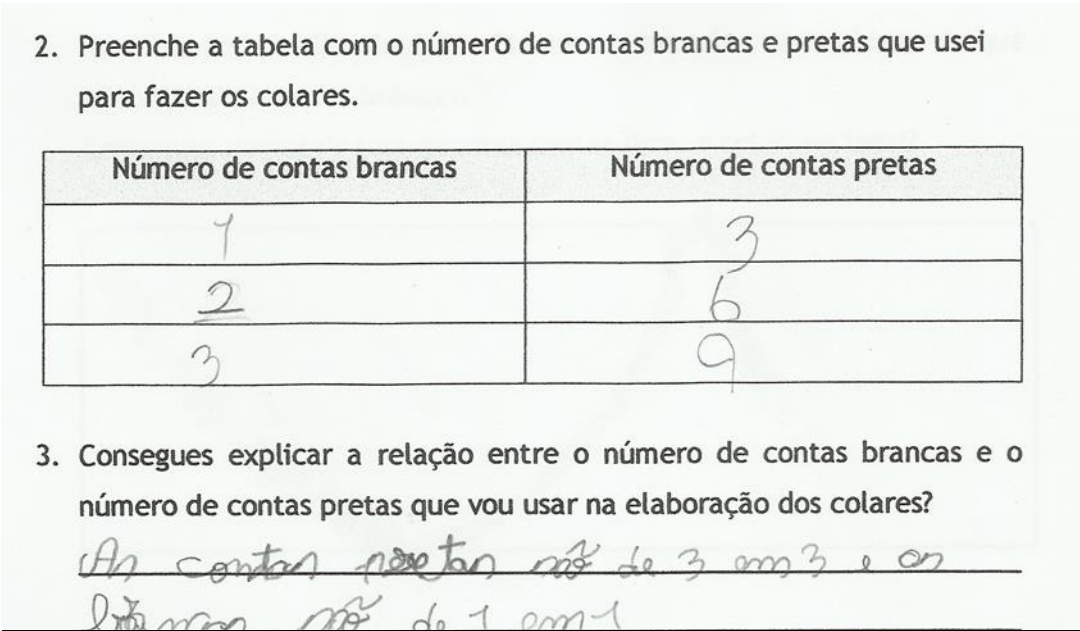

1. Como vai ficar o 4.º colar que eu vou fazer? Desenha-o.

Figura 17 - Resolução da Carolina e do Tomé (tarefa 2.1)

Apesar de, aparentemente, este par ter compreendido a sequência de contas bancas e pretas do colar, faltou-lhes desenhar e colorir a última conta preta, talvez por falta de espaço, pois atingiu o limite do retângulo para o efeito.


2. Preenche a tabela com o número de contas brancas e pretas que usei para fazer os colares.

Número de contas brancas	Número de contas pretas
1	3
2	6
3	9

3. Consegues explicar a relação entre o número de contas brancas e o número de contas pretas que vou usar na elaboração dos colares?

As contas pretas são de 3 em 3 e as brancas são de 1 em 1

As contas pretas são de 3 em 3 e as brancas são de 1 em 1.

Figura 18 - Resolução da Carolina e do Tomé (tarefa 2.2 e 2.3)

Este par, à semelhança do anterior, não demonstrou, de forma explícita, ter compreendido que o número de contas pretas é o triplo do número de contas brancas, tendo recorrido antes à sequência isolada do número de contas de cada cor, ou seja, as brancas são de 1 em 1 e as pretas são de 3 em 3.

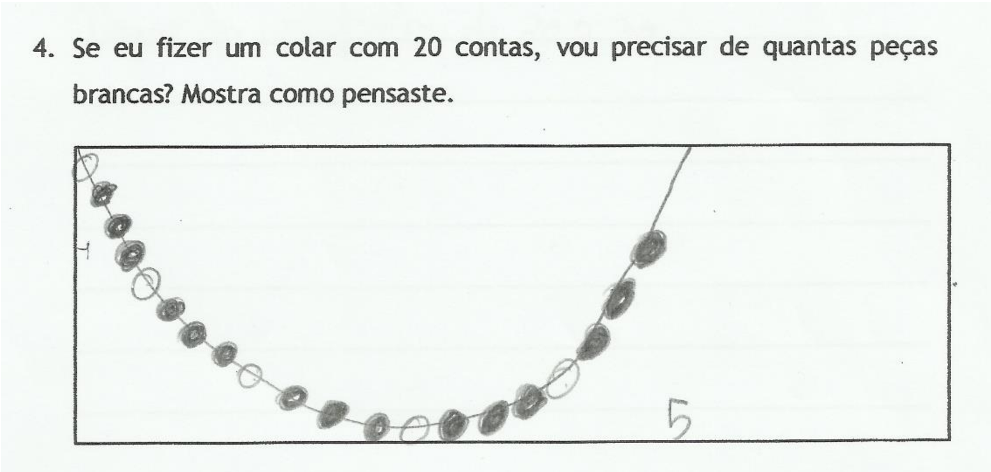


Figura 19 – *Resolução da Carolina e do Tomé (par 2.4)*

Esta proposta foi desenvolvida por esta díade sem oferecer dificuldades na sua execução, chegando de forma eficaz ao resultado correto, através do desenho.

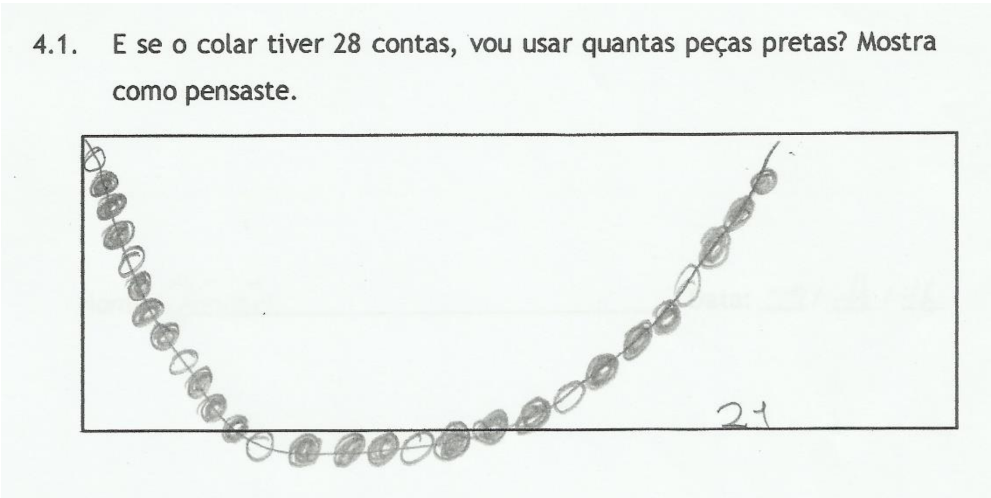
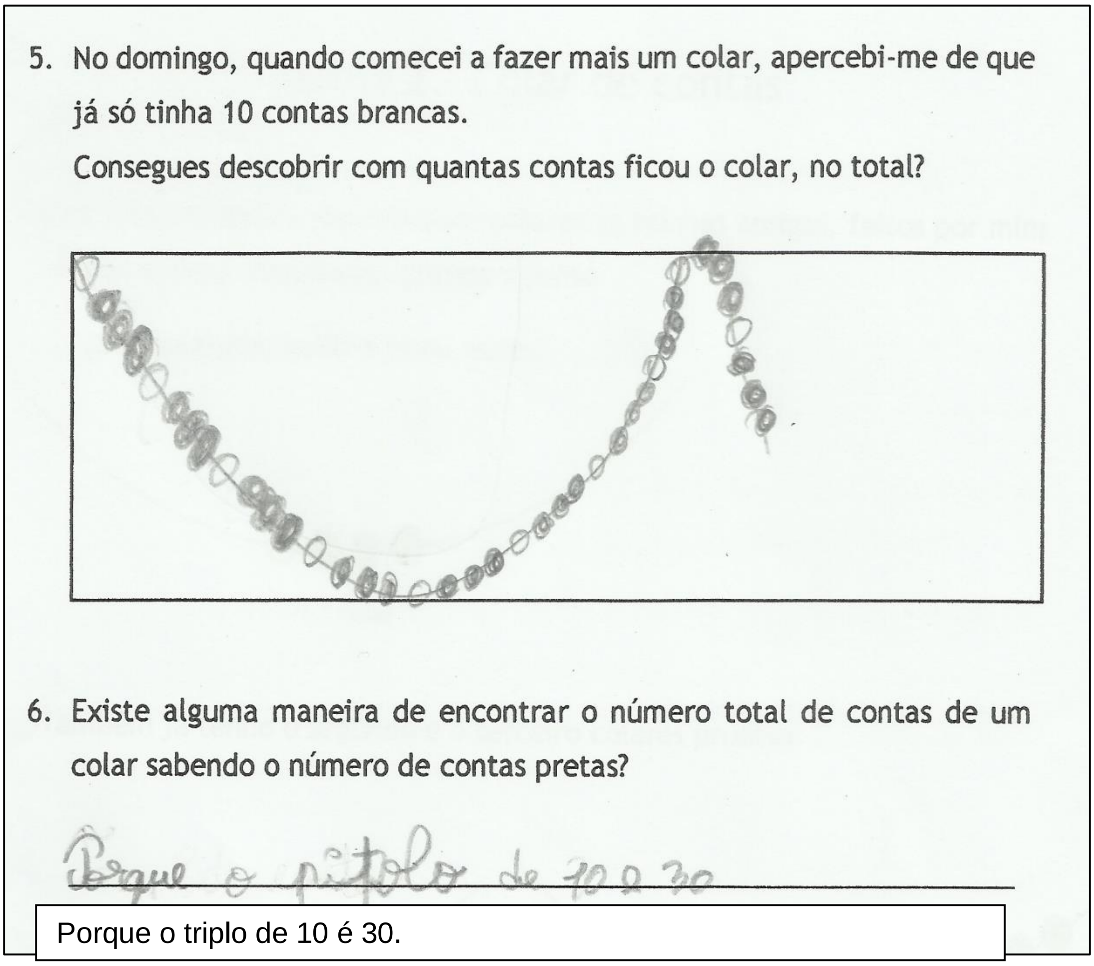


Figura 20 – Resolução da Carolina e do Tomé (tarefa 2.4.1)

Mais uma vez, através do desenho de um colar com 28 contas, os alunos deste grupo facilmente obtiveram o número correto de contas pretas.


5. No domingo, quando comecei a fazer mais um colar, apercebi-me de que já só tinha 10 contas brancas.
Consegues descobrir com quantas contas ficou o colar, no total?

6. Existe alguma maneira de encontrar o número total de contas de um colar sabendo o número de contas pretas?

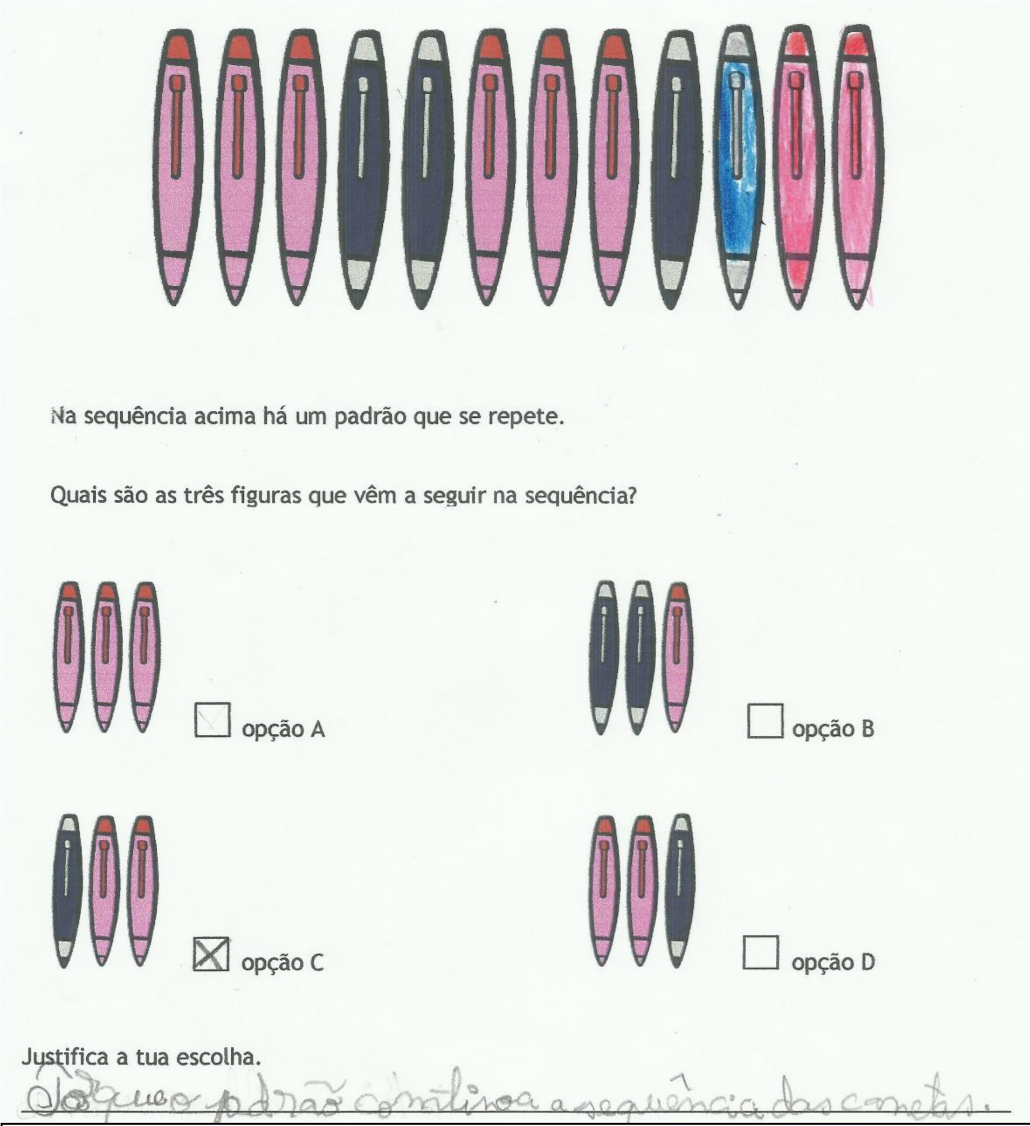
Porque o triplo de 10 é 30.

Figura 21 - Resolução da Carolina e do Tomé (tarefas 2.5 e 2.6)

Este par, à semelhança do anterior, realizou as duas propostas estabelecendo uma relação entre o número de contas brancas e pretas. No entanto, não apresentaram o resultado do total de contas.

Este par recorreu ao desenho do colar na primeira proposta mas conseguiu, na proposta seguinte, explicar que o número de contas pretas é o triplo do número das brancas. Deste modo, parece-me que o desenho terá auxiliado, de alguma maneira, a compreensão da relação existente entre as duas cores de contas do colar.

4.2.3. Tarefa 3 – Canetas

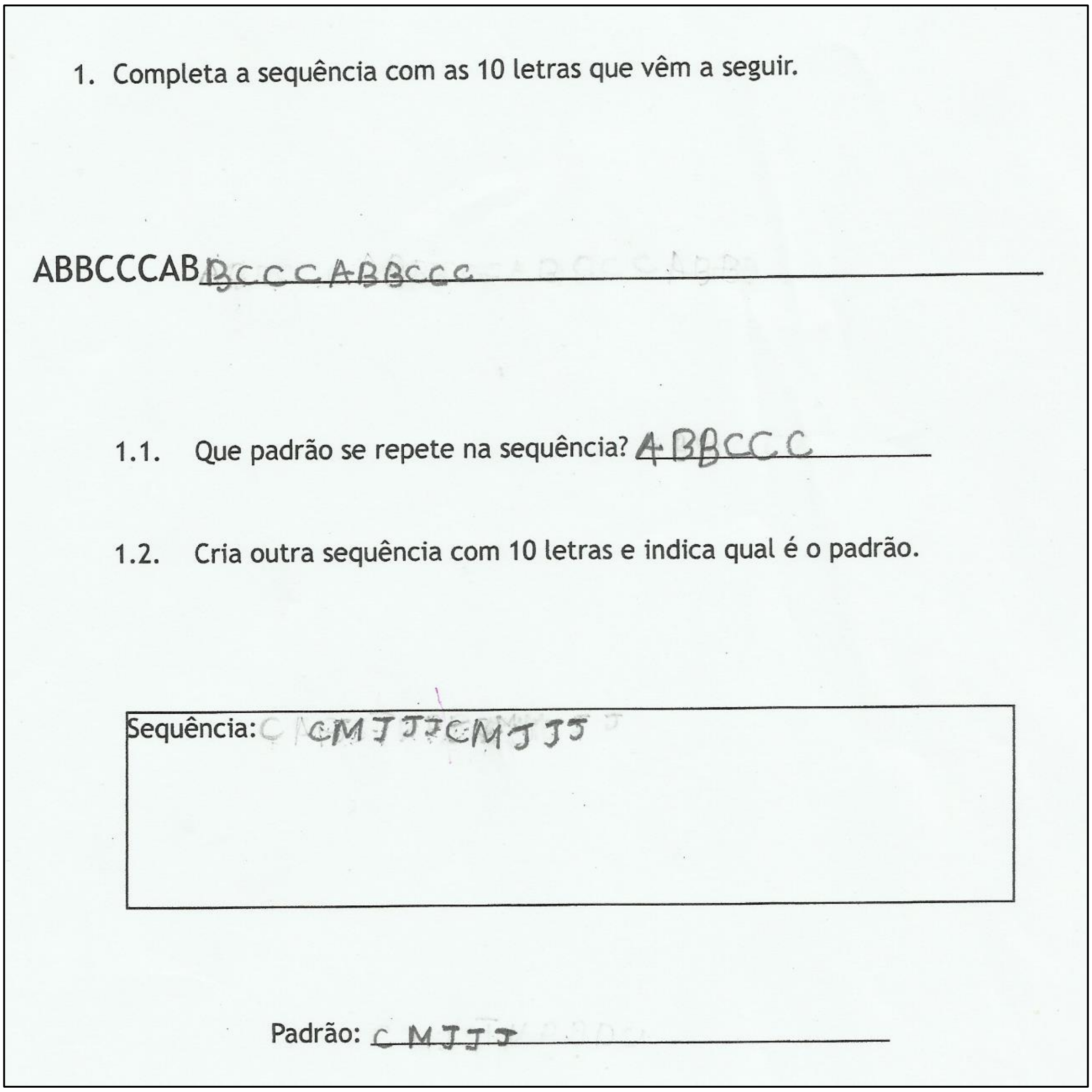


Porque o padrão continua a sequências das canetas.

Figura 22 – Resolução da Carolina e do Tomé (tarefa 3)

Na resolução desta atividade, os alunos recorreram às canetas que coloriram nas sequências, chegando assim a uma resposta imediata e correta.

4.2.4.Tarefa 4 - Letras



1. Completa a sequência com as 10 letras que vêm a seguir.

ABBCCCABBCCCABBCCC

1.1. Que padrão se repete na sequência? ABBCCC

1.2. Cria outra sequência com 10 letras e indica qual é o padrão.

Sequência: CMJJJCMJJJ

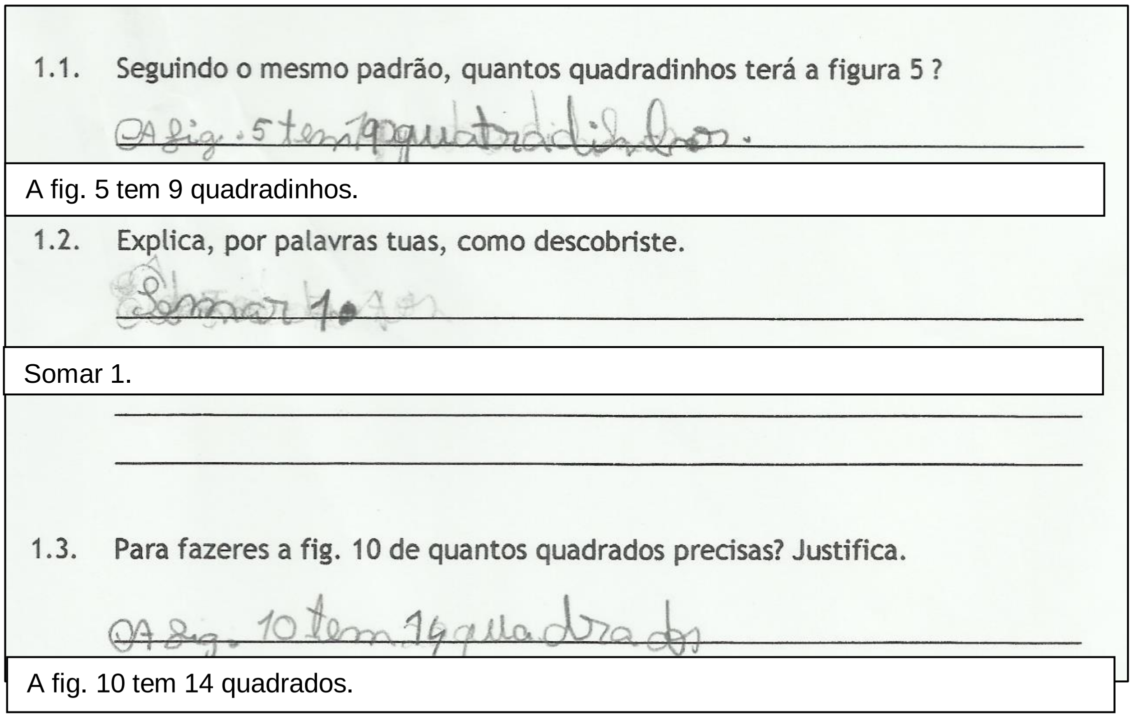
Padrão: CMJJJ

Figura 23 - Resolução da Carolina e do Tomé (tarefa 4)

Esta atividade foi, igualmente, realizada, sem apresentar dificuldades para esta díade, uma vez que continuaram a sequência e identificaram facilmente o padrão presente nela.

Na criação de uma nova sequência, os alunos desta díade fizeram-na de acordo com o solicitado e identificaram novamente o padrão escolhido por eles.

4.2.5. Tarefa 5 – Figuras crescentes


1.1. Seguindo o mesmo padrão, quantos quadradinhos terá a figura 5 ?

A fig. 5 tem 9 quadradinhos.

1.2. Explica, por palavras tuas, como descobriste.

Somar 1.

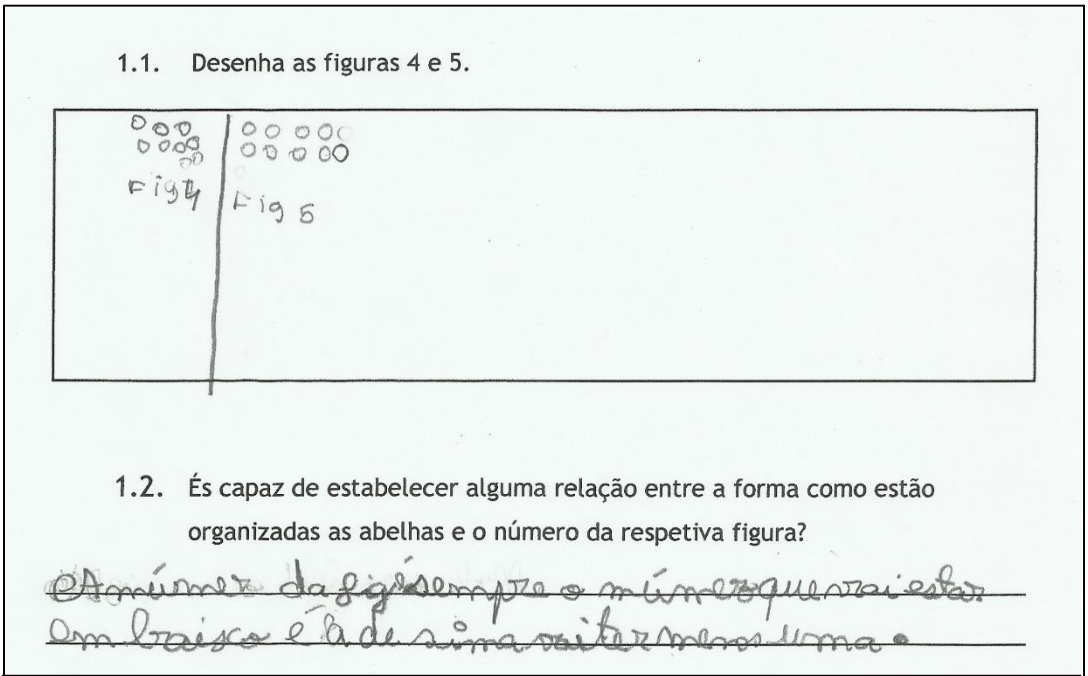
1.3. Para fazeres a fig. 10 de quantos quadrados precisas? Justifica.

A fig. 10 tem 14 quadrados.

Figura 24 - Resolução da Carolina e do Tomé (tarefa 5)

Os resultados desta tarefa mostraram-se corretos. Contudo, ficou patente, a dificuldade deste par em explicar os procedimentos adotados. Embora na questão 1.2, os alunos, muito sucintamente, revelaram que descobriram o número de quadradinhos somando mais um, relativamente à questão seguinte não foi percetível a forma como os alunos chegaram aos 14 quadradinhos da figura 10.

4.2.6. Tarefa 6 – Abelhas



O número da fig. é sempre o número que vai estar em baixo e a de cima vai ter menos uma.

Figura 25 – Resolução da Carolina e do Tomé (tarefa 6)

A Carolina e o Tomé também demonstraram alguma insegurança na compreensão da relação das abelhas na primeira e na segunda linha, conforme se pode observar através do diálogo.

Tomé: É de quanto em quanto? 2 em 2… Então, a figura 4 tem 7 abelhas.

Carolina: Então podemos fazer agora com 9.

Tomé: Espera lá, nós podemos fazer de outra maneira porque também há mais formas de fazer.

Carolina: Já fiz com 7. Mas com 7 é assim: 3 aqui, 2 aqui… eu fiz 4 aqui e 3 assim. Agora é a figura 5.

Tomé: Agora a figura 5 vai levar 9. Eu não tenho uma ideia para isto, tens alguma?

Carolina: Nós organizamos a figura 4 com 7 e a 5 com 9.

Tomé: Só isso não. Nós fizemos as figuras 4 e 5.

Professora: Esperem lá. A figura 4 é esta? (*apontando para a figura*)

Carolina: Sim, porque nós metemos os números e é de 2 em 2. Aqui está 1, aqui estão 3 porque passou do 1.
Professora: Mas aqui não está com essa disposição, não aparecem todas numa linha como vocês fizeram…

Denotou-se, sobretudo da parte do Tomé, que não houve uma atenção em relação à disposição das figuras.

Tomé: Ah…
Carolina: Mas eu fiz assim, o Tomé é que pôs tudo numa linha.
Professora: Como é que achas que podias fazer de outra maneira? Como é que podia ser a figura 4 com outra disposição? Quantas abelhas podias pôr em baixo? Por exemplo… na figura 1 estão quantas abelhas em baixo?
Tomé: Uma.
Professora: E na figura 2?
Tomé: Duas.
Professora: E em cima?
Tomé: Uma.
Professora: E na figura 3 estão quantas em baixo?
Tomé: Três.
Professora: E quantas em cima?
Tomé: Duas.
Professora: A figura 4 terá quantas em baixo?
Tomé: A 4 terá 4 em baixo.
Professora: E quantas em cima?
Tomé: Duas e depois uma.

É notória mais uma evidência da dificuldade do Tomé em relação à disposição das abelhas. O facto de cada figura ser constituída apenas por duas linhas de abelhas não foi relevante para ele.

Professora: Depois uma como? Então faz lá 4 em baixo.
Tomé: Assim.
Professora: Três filas? Mas as outras não têm…

Tomé: Ou então de outra maneira…

Professora: Se fizeres só duas filas como estão em cima, como é que podes fazer?

Tomé: Só duas linhas?

Professora: Em baixo são quantas abelhas?

Carolina: 4 em baixo e são 3 em cima.

Professora: E a figura 5, se fizeres assim, são quantas em baixo?

Carolina: Tem 9. Cinco em baixo.

Professora: E em cima?

Carolina: Em cima vão estar 3.

Professora: Concordas, Tomé?

Tomé: Sim.

Professora: Quantas abelhas tem que ter a figura 5 ao todo?

Tomé: 9.

Professora: E 5 em baixo e 3 em cima dá 9?

Tomé: Não, tem que ser 4 em cima.

(…)

Professora: Se eu vos pedir para fazerem a figura 10, vocês conseguem dizer quantas abelhas vai ter em baixo?

Carolina: 10.

Professora: E em cima?

Tomé: 18.

Professora: Em cima? Em cima tem mais do que em baixo, é isso? Então vamos ver com mais atenção. A figura 2 tem quantas em baixo?

Tomé: Duas.

Professora: E em cima?

Carolina: Uma.

Professora: Em cima o que é que acontece em relação à parte de baixo? É o mesmo número de abelhas?

Tomé: Em baixo têm que estar duas porque é a figura 2 e em cima tem que estar uma.

Professora: E o que é que é o 1 em relação ao 2?

Carolina: É mais pequenino.

(…)

Professora: Quero que vocês me digam uma maneira de eu saber fazer todas as figuras que eu queira. Uma regra! Qual é a regra para eu saber quantas abelhas são em cima e em baixo.

Carolina: É o número da figura.

Professora: E em cima, qual é a regra?

Tomé: Tirar um, sempre.

Professora: Tirar um às de baixo, é isso? Então a figura 10 vai ter quantas em cima?

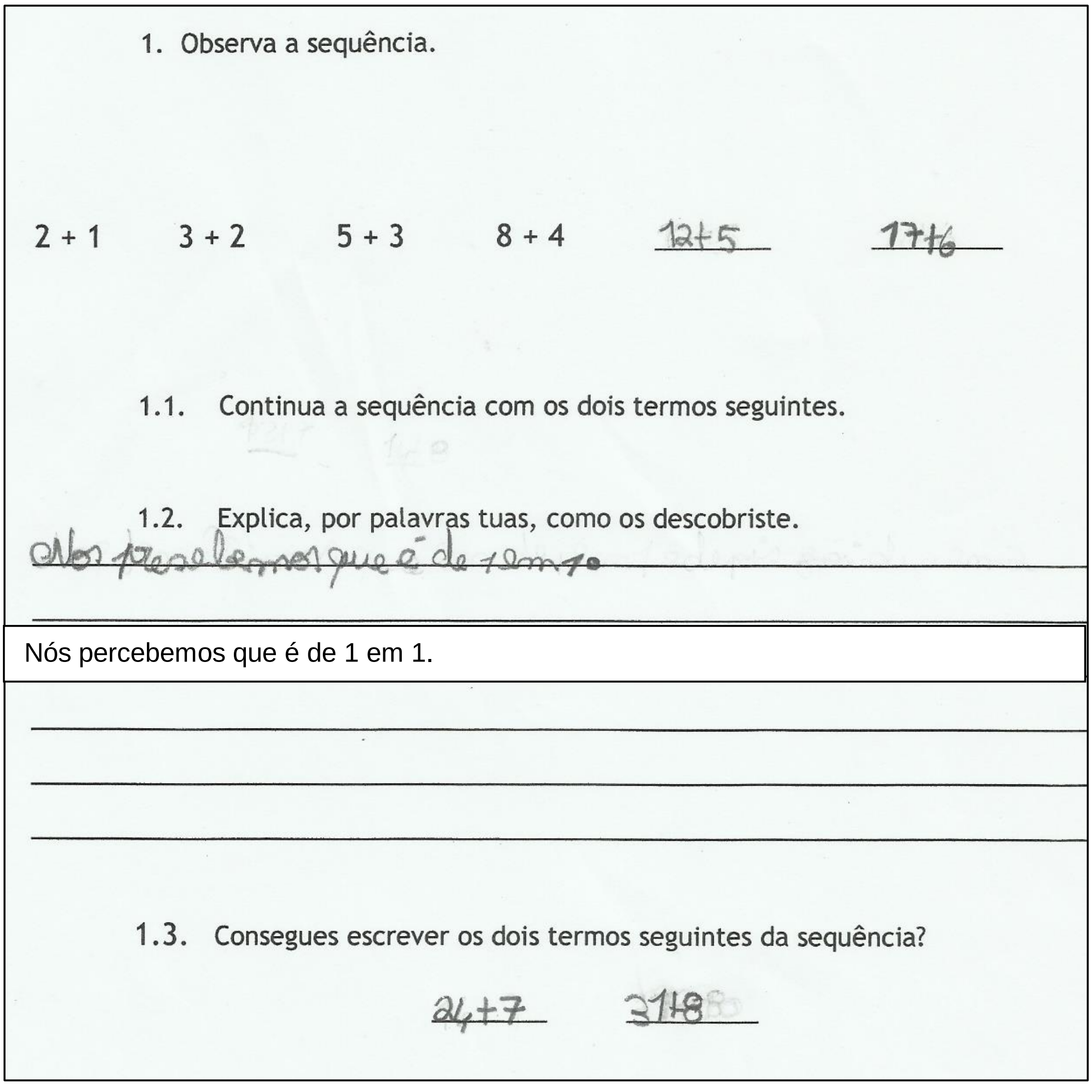
Tomé: A figura 10 vai ter… 9!

Professora: Isso!

Carolina: Estava a pensar no 9.

Apesar desta tarefa ter constituído um desafio, bastante complexo, sobretudo para o Tomé, parece-me que no final da tarefa o aluno compreendeu a forma de cada figura. Relativamente à sequência em si, permanece a dúvida se a terá compreendido.

4.2.7. Tarefa 7 – Somas



1. Observa a sequência.

2 + 1   3 + 2   5 + 3   8 + 4   12+5   17+6

1.1. Continua a sequência com os dois termos seguintes.

1.2. Explica, por palavras tuas, como os descobriste.

Nós percebemos que é de 1 em 1.

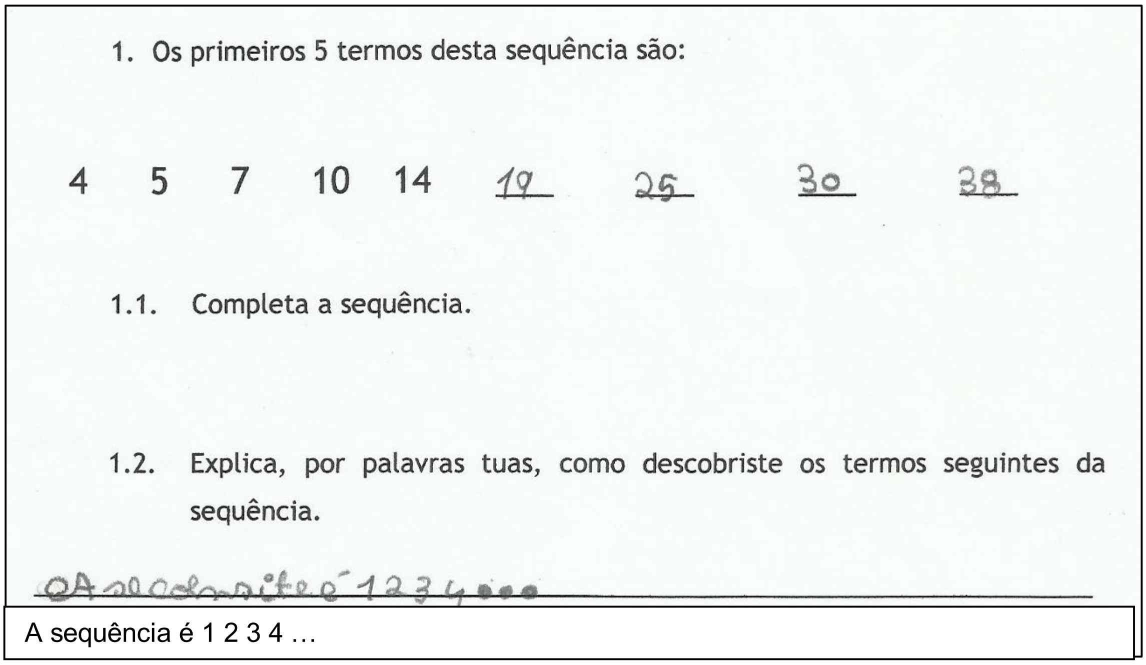
1.3. Consegues escrever os dois termos seguintes da sequência?

24+7   31+8

Figura 26 – Resolução da Carolina e do Tomé (tarefa 7)

Apesar da primeira proposta ter sido executada corretamente, a explicação da mesma ficou aquém do que fizeram. Na verdade é de um em um o segundo número de cada termo, mas a descoberta do primeiro número não é descrita pelos alunos, o que terá influenciado negativamente a atividade seguinte, em que houve, provavelmente, um erro de cálculo na identificação do primeiro número, traduzindo-se em dois termos incorretos. Fica a dúvida se se tratou apenas de um erro de cálculo, mas aparentemente, parece que sim.

4.2.8. Tarefa 8 – Números a crescer



1. Os primeiros 5 termos desta sequência são:

4 5 7 10 14 19 25 30 38

1.1. Completa a sequência.

1.2. Explica, por palavras tuas, como descobriste os termos seguintes da sequência.

A sequência é 1 2 3 4 …

Figura 27 – Resolução da Carolina e do Tomé (tarefa 8)

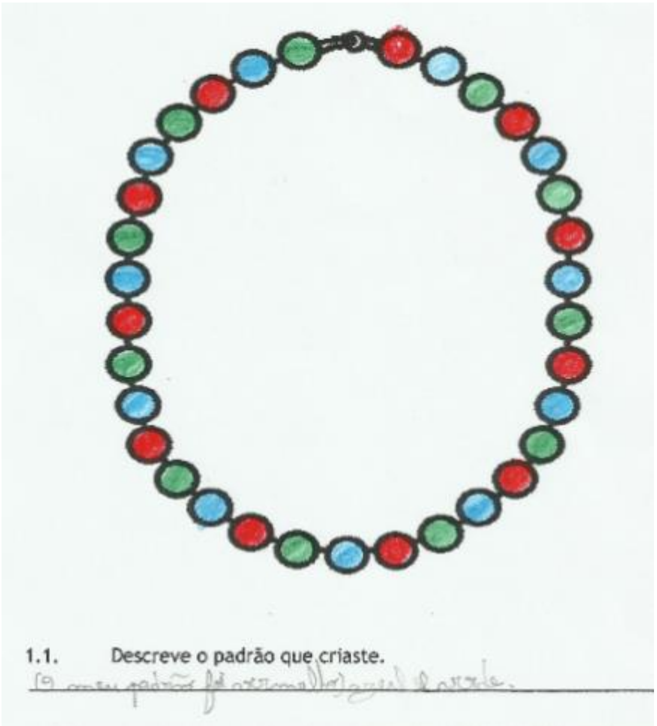
Foi visível que à medida que o grau de dificuldade das tarefas aumentou, este par demonstrou uma maior insegurança na execução das mesmas, quer ao nível da compreensão quer da generalização, como se constatou na tarefa 6, em que a disposição da figura em causa não foi relevante para o Tomé, assim como a relação entre o número de elementos da linha de cima e da linha de baixo.

A explicação da descoberta dos termos seguintes nas sequências foi um obstáculo para estes alunos, conforme se verificou nas tarefas 7 e 8.

4.3. Caso 3 – Filipe e Miguel

O Filipe e o Miguel são excelentes alunos a matemática, quer ao nível da execução quer ao nível do raciocínio. São muito participativos e demonstram muita autonomia nas aprendizagens.

4.3.1. Tarefa 1 (colar de contas)



O meu padrão foi vermelho, azul e verde.

Figura 28 – Padrão criado pelo Filipe e Miguel (tarefa 1)

Este par não demonstrou dificuldade alguma em criar o padrão solicitado, descrevendo as cores usadas no mesmo.

4.3.2. Tarefa 2 (colar de contas)

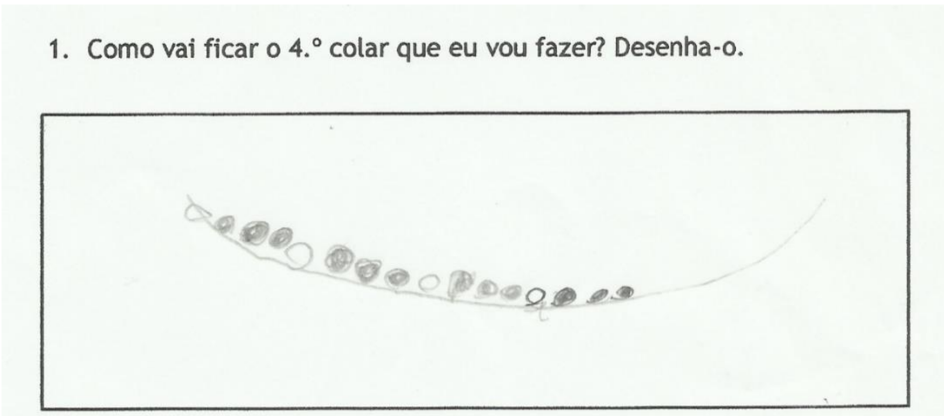


Figura 29 - Resolução do Filipe e do Miguel (tarefa 2.1)

Este par, uma vez mais, seguiu as instruções que lhe foram dadas relativamente à atividade proposta e fez o desenho do colar pretendido.

Relativamente às segunda e terceira questões, conforme figura abaixo, também é evidente a facilidade de raciocínio desta díade, pois percecionaram de imediato a relação entre o número de contas brancas e pretas.

2. Preenche a tabela com o número de contas brancas e pretas que usei para fazer os colares.

Número de contas brancas	Número de contas pretas
1	3
2	6
3	9

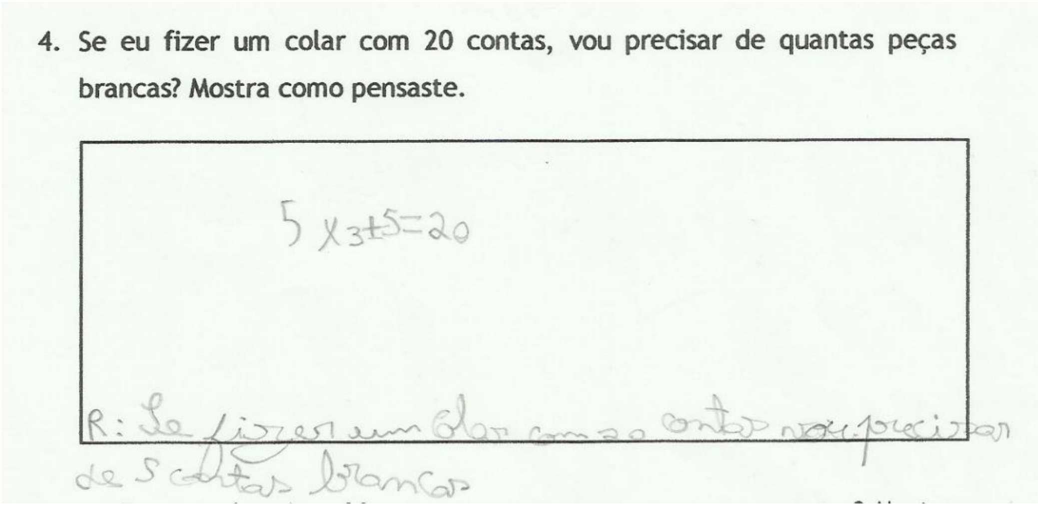
3. Consegues explicar a relação entre o número de contas brancas e o número de contas pretas que vou usar na elaboração dos colares?

O número de contas preta é o triplo das contas brancas.

O número de contas pretas é o triplo das contas brancas.

Figura 30 - Resolução do Filipe e do Miguel (tarefas 2.2 e 2.3)

Este par foi o único que estabeleceu uma relação explícita entre o número de contas brancas e pretas do colar, conseguindo fazer uma generalização, ou seja, compreendeu que o número de contas pretas será sempre o triplo do número de contas brancas, seja este qual for. Parece evidente, neste par, a evolução do seu pensamento.


4. Se eu fizer um colar com 20 contas, vou precisar de quantas peças brancas? Mostra como pensaste.

$5 \times 3 + 5 = 20$

R: Se fizer um colar com 20 contas vou precisar de 5 contas brancas

Se eu fizer um colar com 20 contas vou precisar de 5 contas brancas.

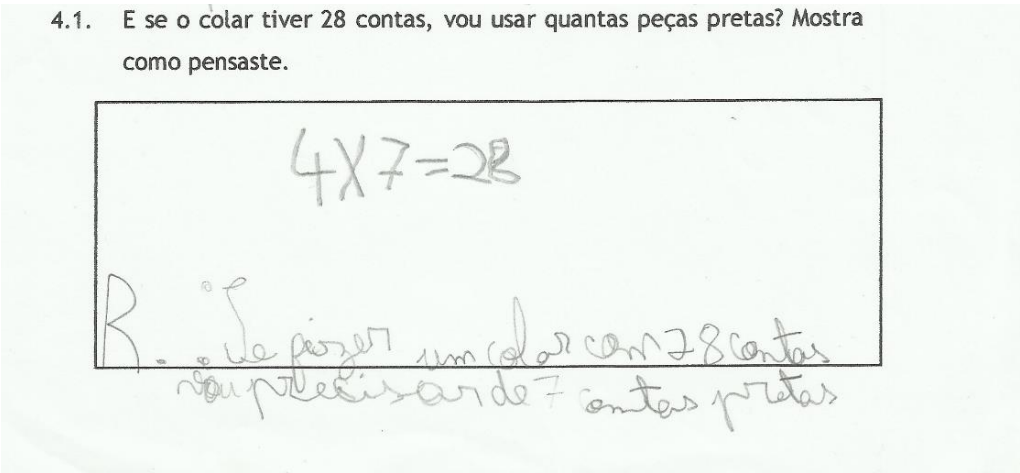
Figura 31- Resolução do Filipe e do Miguel (tarefa 2.4)

Filipe: 5 brancas e 15 pretas.

Professora: E 5 brancas e 15 pretas dá as 20 no total?

Miguel: Sim. 5 x 3 + 5 = 20

Estes alunos conseguiram escrever uma expressão para obter o total. Fizeram uma generalização.


4.1. E se o colar tiver 28 contas, vou usar quantas peças pretas? Mostra como pensaste.

$4 \times 7 = 28$

R. Se fizer um colar com 28 contas vou precisar de 7 contas pretas

Se eu fizer um colar com 28 contas vou precisar de 7 contas pretas.

Figura 32 - Resolução do Filipe e do Miguel (tarefa 2.4.1)

Este par procurou descobrir qual a tabuada que dá 28 (total de contas) e assim chegou à multiplicação de 4 por 7, percetível no diálogo abaixo transcrito, contudo 7 seria o número de contas brancas e não pretas…

Filipe: 7.

Miguel: 7?

Filipe: Sim, é 7.

Miguel: E pretas?

Filipe: (*Hesita*) 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27… Não, não vai dar… Ah, já sei!

Miguel: de 8 ou de 6?

Filipe: 8.

Miguel: 8 mais 8, 16 mais 8 igual a 24.

Filipe: Não.

Miguel: Então é de 6.

Filipe: Pois. 6 mais 6, 12 mais 6, 18 mais 6, 24 mais 6, 30.

Miguel: Não…

Filipe: 7, 7 mais 7, 14 mais 7, 21 mais 7, 28.

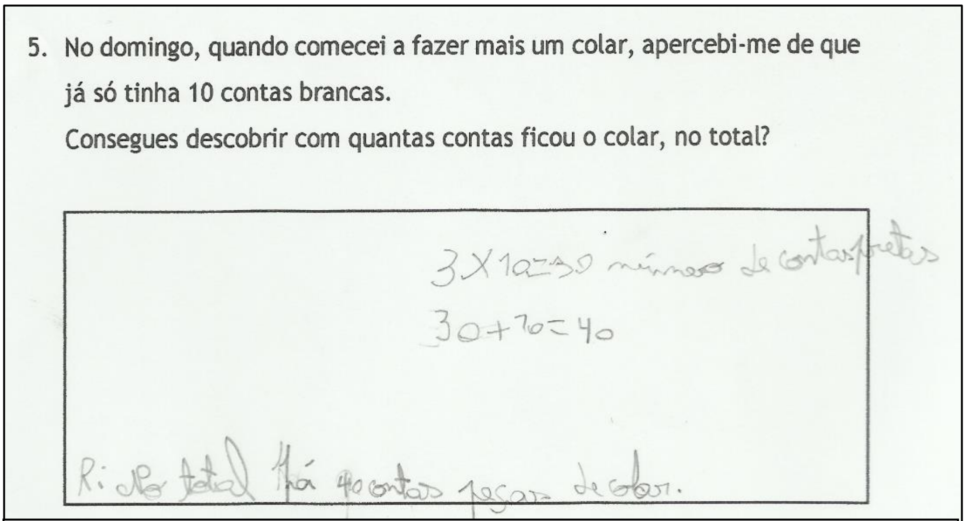
Miguel: Quantas vezes o 7?

Filipe: 4.

Miguel: 4 x 7 igual…

Filipe: a 28. Como é que fazemos agora?

Miguel: Já mostrámos o que pensamos. Se fizer um colar com 28 contas vou precisar de 7 contas pretas.

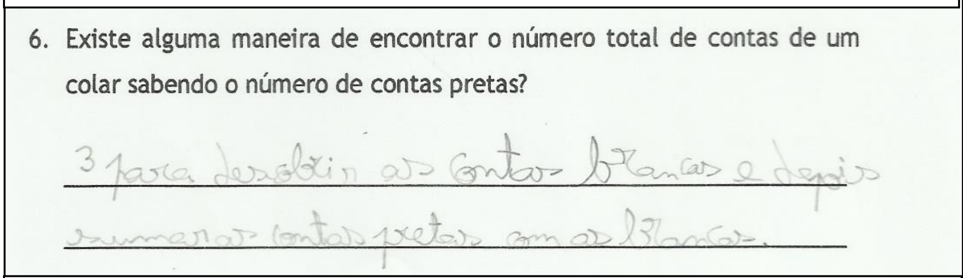


5. No domingo, quando comecei a fazer mais um colar, apercebi-me de que já só tinha 10 contas brancas.
Consegues descobrir com quantas contas ficou o colar, no total?

3X10=30 número de contas pretas
30+10=40

R: No total há 40 contas peças de colar.

No total há 40 contas.



6. Existe alguma maneira de encontrar o número total de contas de um colar sabendo o número de contas pretas?

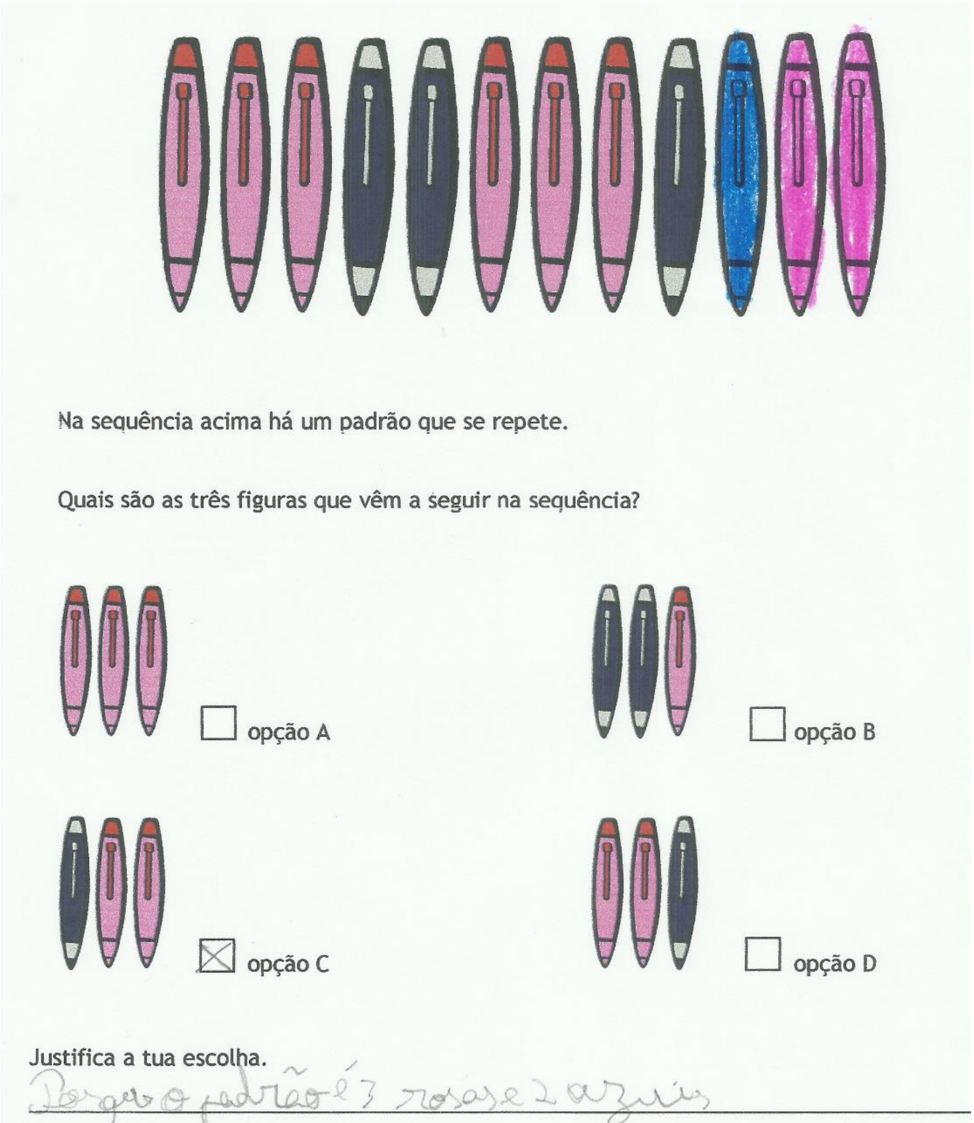
3 para descobrir as contas brancas e depois sumarar as contas pretas com as brancas.

3 para descobrir as contas brancas e depois somar as contas pretas com as brancas.

Figura 33 - Resolução do Filipe e do Miguel (tarefas 2.5 e 2.6)

Ficou patente, uma vez mais, na resolução desta atividade, que este par compreendeu, de forma clara, a relação existente entre o número de contas brancas e pretas, no entanto, esta compreensão foi mais visível na concretização da proposta do que propriamente na explicação da mesma.

4.3.3. Tarefa 3 – Canetas

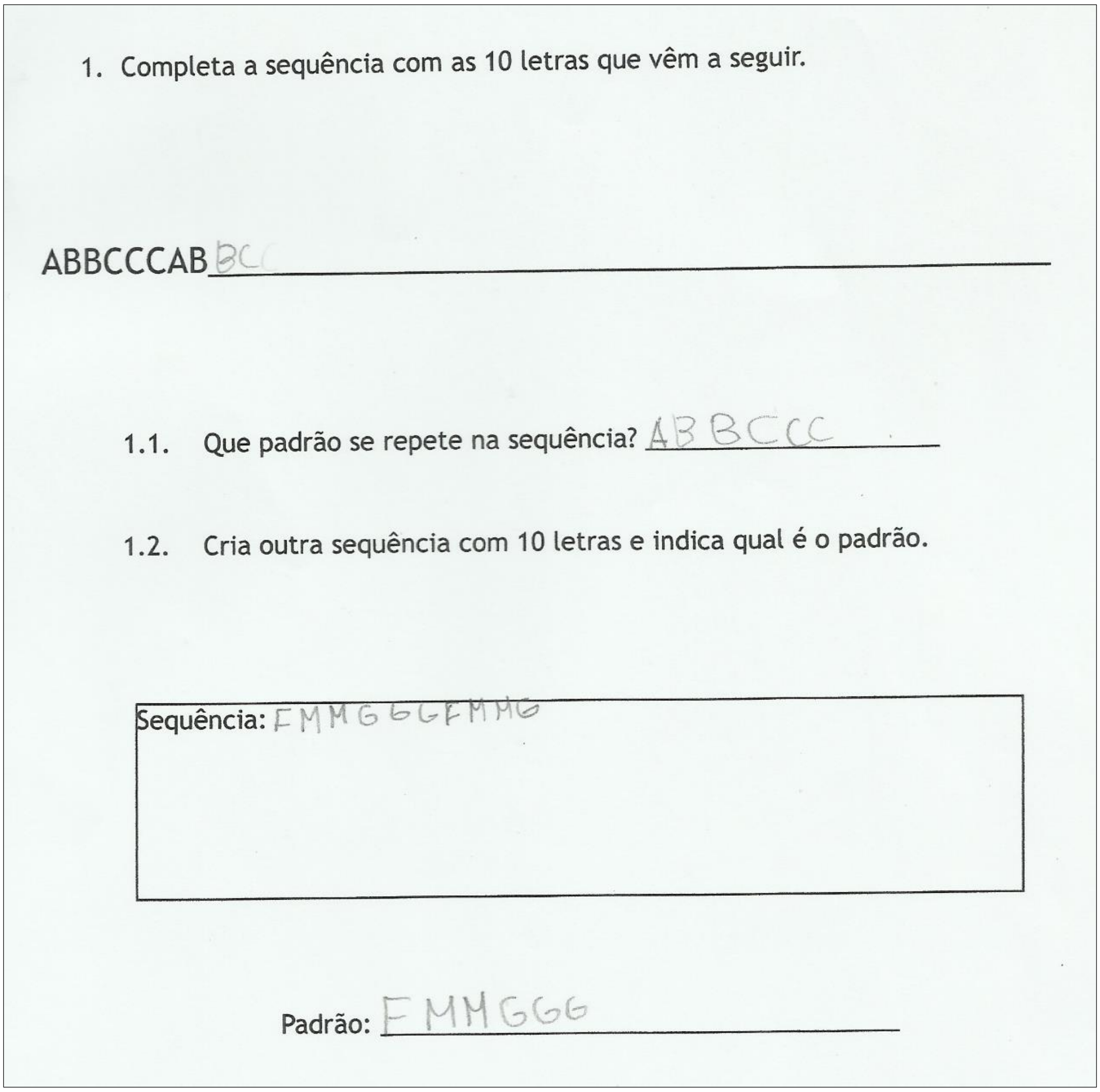


Porque o padrão é 3 rosas e 2 azuis.

Figura 34 - Resolução do Filipe e do Miguel (tarefa 3)

Este par descobriu, nitidamente, o padrão presente na sequência e facilmente chegou à resposta correta.

4.3.4. Tarefa 4 – Letras



1. Completa a sequência com as 10 letras que vêm a seguir.

ABBCCCAB BCC

1.1. Que padrão se repete na sequência? AB BCCC

1.2. Cria outra sequência com 10 letras e indica qual é o padrão.

Sequência: FMMGGGFMMG

Padrão: FMMGGG

Figura 35 - Resolução do Filipe e do Miguel (tarefa 4)

Nesta atividade, este par deixou a primeira proposta incompleta, certamente por distração, tendo terminado as restantes com sucesso.

A continuação da sequência não suscitou dúvidas significativas, no entanto no que diz respeito à criação de uma nova sequência, este grupo questionou-se acerca das letras a utilizar, no sentido de se teríam que ser seguidas ou não, à semelhança da sequência apresentada, em que as letras escolhidas foram A, B e C…

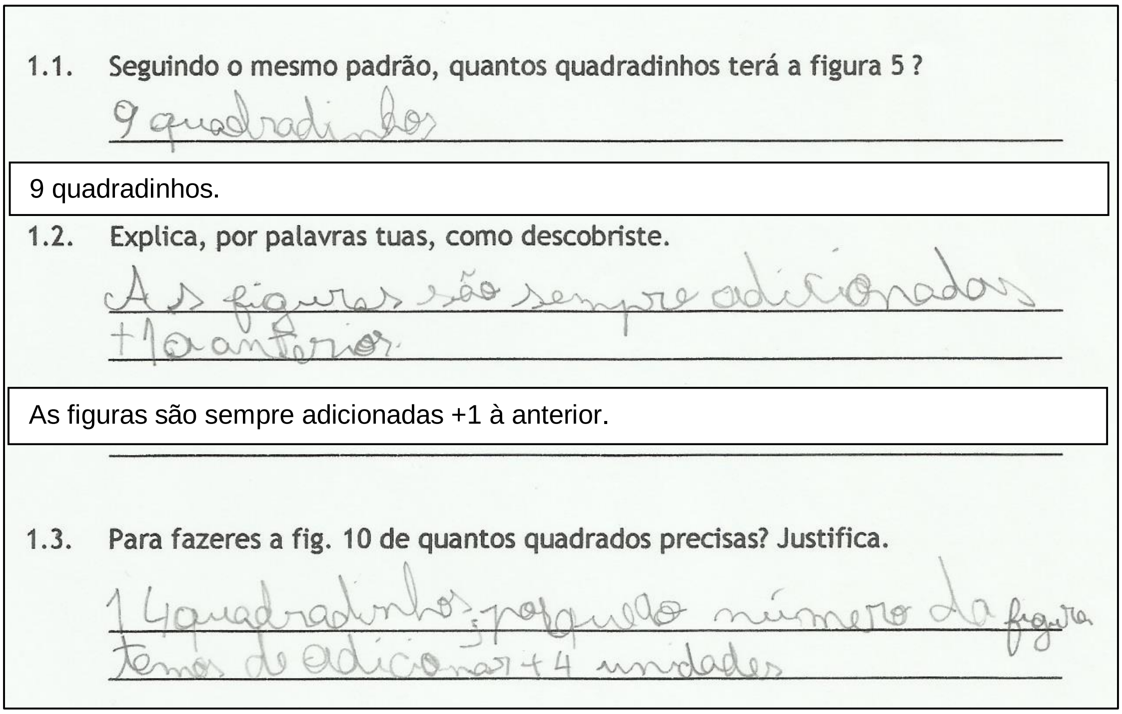
> **Miguel:** Têm que ser letras que vêm a seguir, não têm? Começamos numa letra e depois têm que ser as que vêm a seguir ou nós é que escolhemos as letras?

Professora: Vocês é que escolhem.

Miguel: Se pusermos, por exemplo, M depois não tem que ser N, pois não? FMMGGG. Pronto, já está.

Contudo, uma vez que a sequência é constituída por dez letras e o padrão escolhido pelos alunos é composto por 6 letras, não é possível observar a repetição do mesmo.

4.3.5. Tarefa 5 – Figuras crescentes



1.1. Seguindo o mesmo padrão, quantos quadradinhos terá a figura 5 ?

9 quadradinhos

9 quadradinhos.

1.2. Explica, por palavras tuas, como descobriste.

As figuras são sempre adicionados +1 a anterior.

As figuras são sempre adicionadas +1 à anterior.

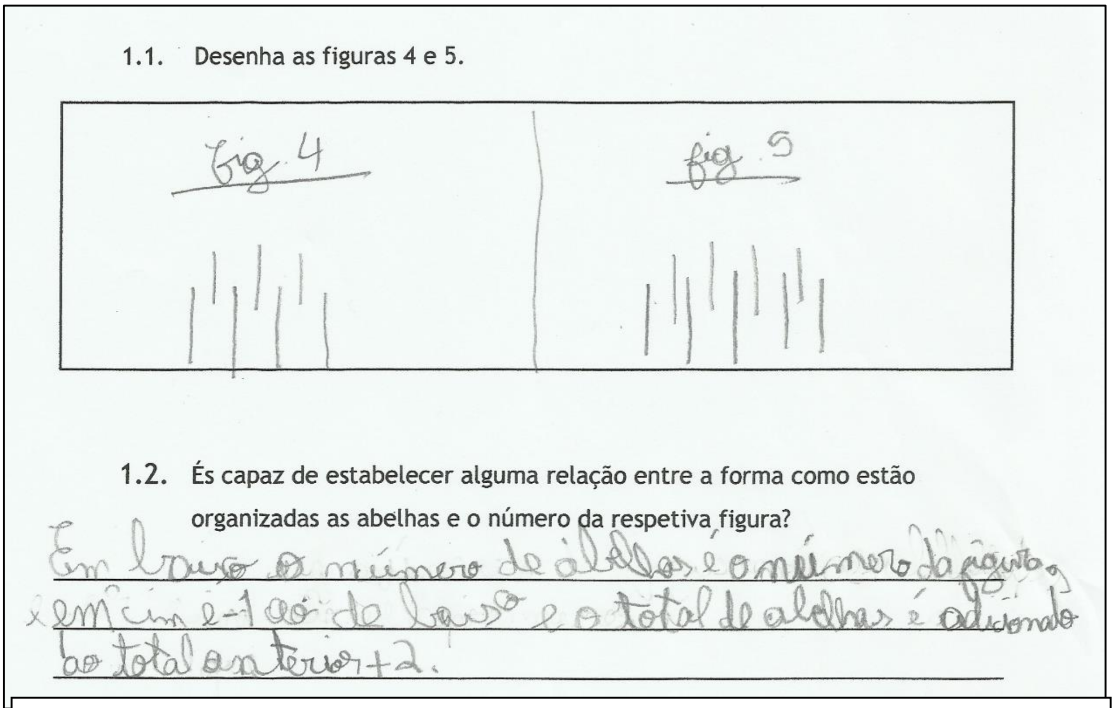
1.3. Para fazeres a fig. 10 de quantos quadrados precisas? Justifica.

14 quadradinhos; porque ao número da figura temos de adicionar +4 unidades

Figura 36 - Resolução do Filipe e do Miguel (tarefa 5)

Nesta tarefa é, mais uma vez, demonstrada a facilidade com que este par visualiza os padrões, evidenciada na terceira proposta em que é feita uma relação imediata entre o número de quadrados e o número da figura, sem necessidade de recorrerem à figura anterior. Nesta situação é claramente feita uma generalização do procedimento a adotar para descobrir qualquer termo desta sequência.

4.3.6. Tarefa 6 – Abelhas



1.1. Desenha as figuras 4 e 5.

fig. 4

fig. 5

1.2. És capaz de estabelecer alguma relação entre a forma como estão organizadas as abelhas e o número da respetiva figura?

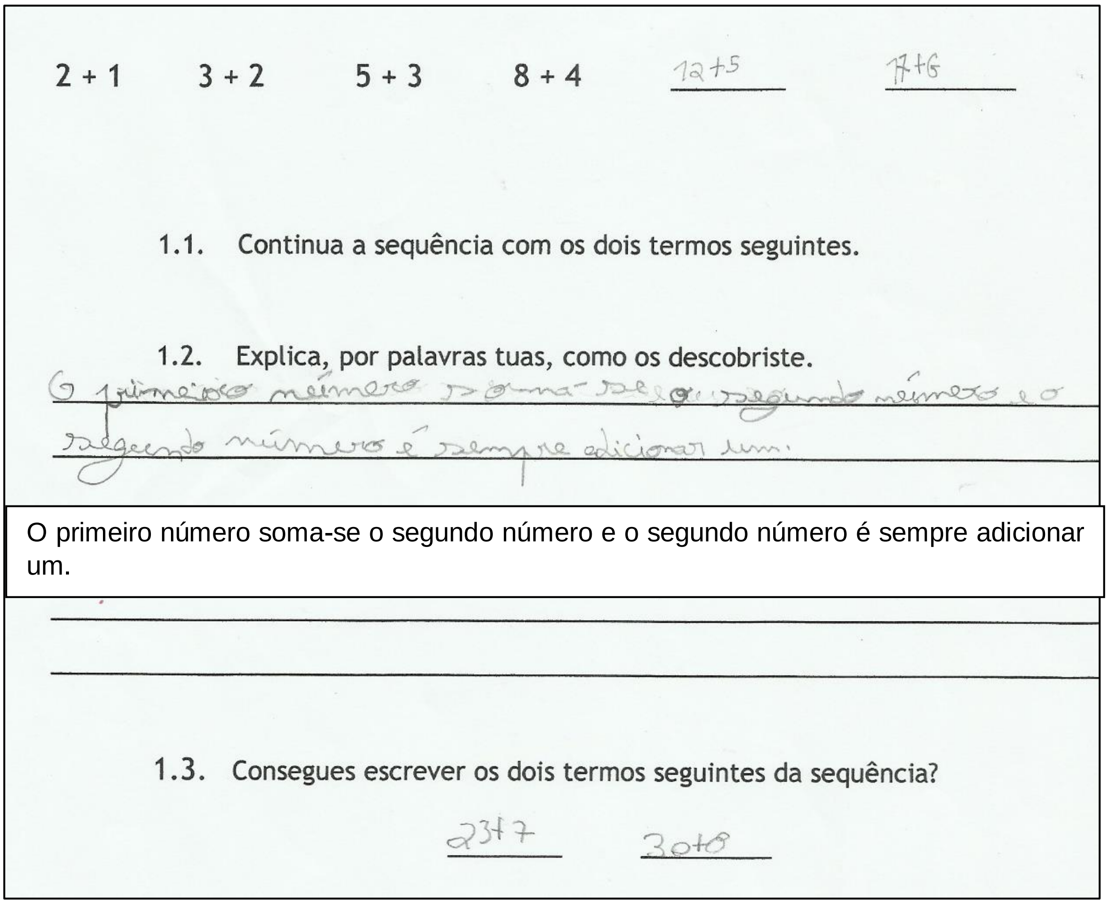
Em baixo o número de abelhas é o número da figura, em cima é -1 ao de baixo e o total de abelhas é adicionado ao total anterior +2.

Em baixo o número de abelhas é o número da figura, em cima é -1 ao de baixo e o total é adicionado ao total anterior +2.

Figura 37 - Resolução do Filipe e do Miguel (tarefa 6)

Nesta atividade, os alunos recorrem ao solicitado desenhando as figuras, substituindo as abelhas por símbolos que as representam. Nas respostas destes alunos, consegue-se compreender o desenvolvimento de raciocínio que estes alunos apresentam.

4.3.7. Tarefa 7 – Somas


2 + 1   3 + 2   5 + 3   8 + 4   12+5   17+6

1.1. Continua a sequência com os dois termos seguintes.

1.2. Explica, por palavras tuas, como os descobriste.

O primeiro número soma-se o segundo número e o segundo número é sempre adicionar um.

1.3. Consegues escrever os dois termos seguintes da sequência?

23+7   30+8

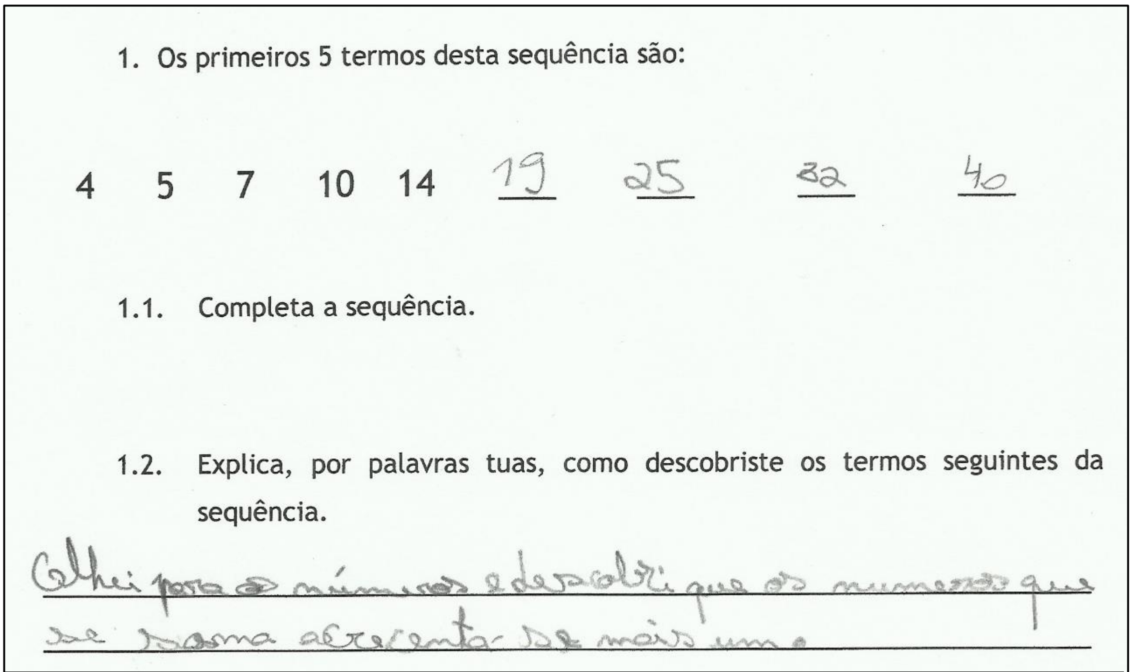
Figura 38 - Resolução do Filipe e do Miguel (tarefa 7)

Da análise desta atividade verificou-se que os dois primeiros termos foram descobertos com relativa facilidade.

> **Miguel:** 2 + 1 = 3, 3 + 2 = 5, 5 + 3 = 8, 8 + 4 = 12. Então, fazemos 12…
>
> **Filipe:** … + 5!
>
> **Miguel:** 12 + 5, sim.
>
> **Filipe:** 12 + 5, 17; 17 + 6, 23.
>
> **Miguel:** Ok.

Contudo, a explicação do raciocínio tornou-se mais difícil, denotando-se a compreensão do exercício, mas dificuldade em expressá-lo, dado que se trata de crianças que apenas frequentam o segundo ano.

4.3.8. Tarefa 8 – Números a crescer


1. Os primeiros 5 termos desta sequência são:

4 5 7 10 14 19 25 32 40

1.1. Completa a sequência.

1.2. Explica, por palavras tuas, como descobriste os termos seguintes da sequência.

Olhei para os números e descobri que os números que se soma acrescenta-se mais um

Olhei para os números e descobri que os números que se soma acrescenta-se mais um.

Figura 39 - Resolução do Filipe e do Miguel (tarefa 8)

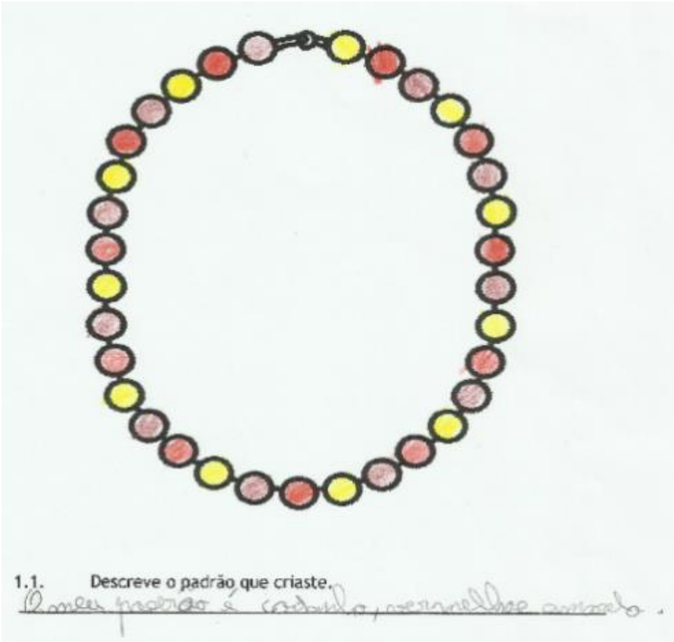
Nesta proposta, transparece novamente a dificuldade em explicar, por escrito, o procedimento que adotaram em termos de raciocínio.

Este par demonstrou facilidade na execução das tarefas, revelando um raciocínio muito desenvolvido, fez generalizações e conseguiu explicar as estratégias usadas, o que leva a crer que haja uma evolução no que diz respeito ao pensamento algébrico. Contudo, no exercício 4.1 da tarefa 2, os alunos não aplicaram corretamente a fórmula descoberta no exercício anterior, o que leva a pensar que foi um erro de leitura do enunciado.

4.4. Caso 4 – Gonçalo e Matilde

Tanto o Gonçalo como a Matilde são bons alunos a matemática. A Matilde é mais extrovertida e participativa. O Gonçalo é mais calado e ponderado.

4.4.1. Tarefa 1 (colar de contas)



O meu padrão é castanho, vermelho e amarelo.

Figura 40 – Resolução do Gonçalo e da Matilde (tarefa 1)

Esta tarefa foi realizada por este par sem dificuldades. Depois de escolherem três cores diferentes, criaram um padrão semelhantes ao dos outros pares.

> **Matilde:** Que cor?
>
> **Gonçalo:** Pode ser castanho.
>
> **Matilde:** O primeiro começamos por aqui (*apontando para a primeira conta do colar*), não é? E agora fazemos que cor? Amarelo? Não guardes o castanho…Enganei-me…
>
> **Gonçalo:** Não faz mal.
>
> **Matilde:** Já sei, no meio metemos outra cor, o que é que achas? Gonçalo, olha como é que eu estou a fazer. Está a ser básico para mim. Achas difícil isto? O meu padrão foi castanho, vermelho e amarelo.

A Matilde demonstrou ter mais iniciativa que o Gonçalo, contudo, ficou visível que busca permanentemente a anuência do seu colega.

4.4.2. Tarefa 2 (colar de contas)

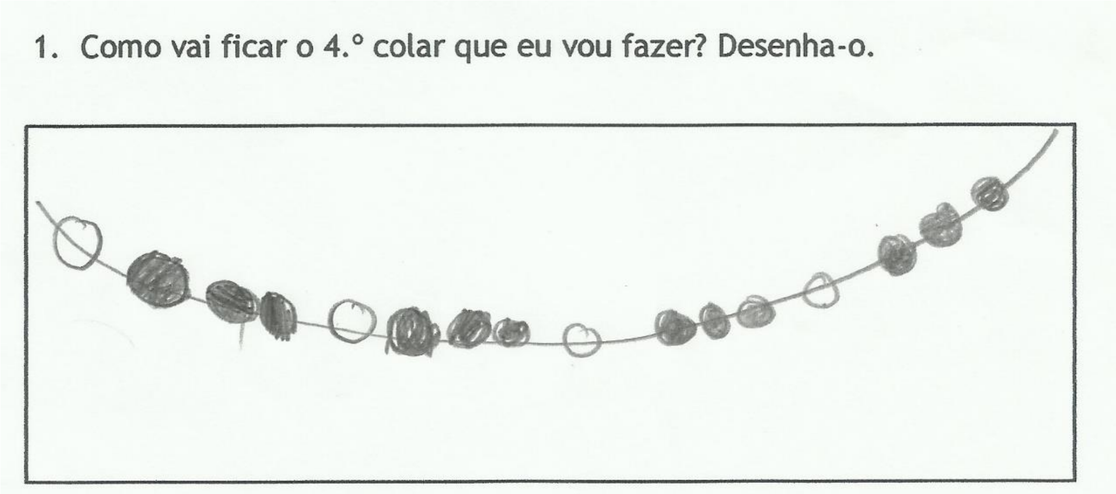
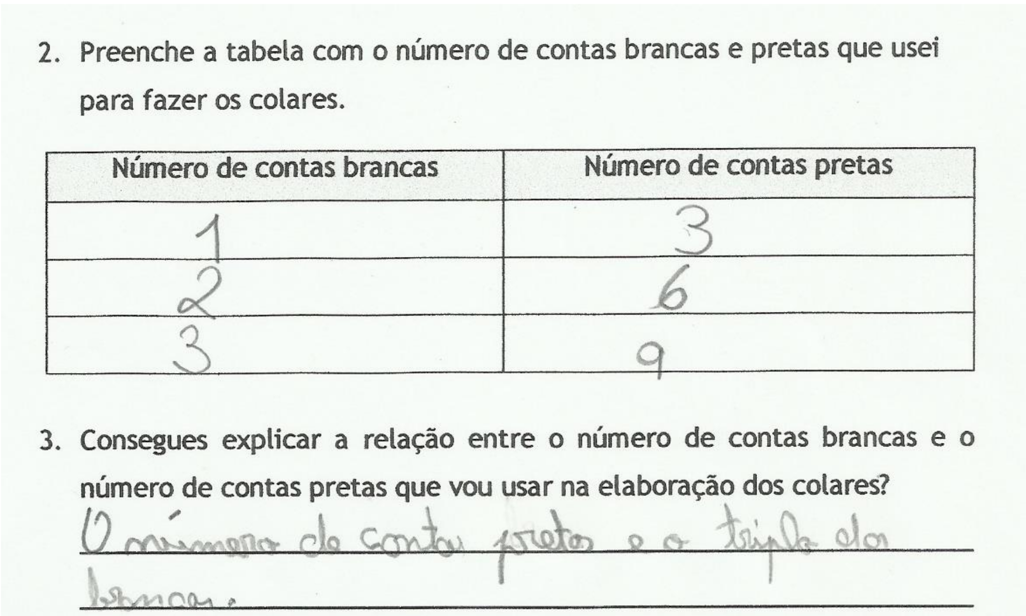


Figura 41 - Resolução do Gonçalo e da Matilde (tarefa 2.1)

Este par, através do desenho, não demonstrou dificuldades na compreensão da atividade.



2. Preenche a tabela com o número de contas brancas e pretas que usei para fazer os colares.

Número de contas brancas	Número de contas pretas
1	3
2	6
3	9

3. Consegues explicar a relação entre o número de contas brancas e o número de contas pretas que vou usar na elaboração dos colares?

O número de contas pretas é o triplo das brancas.

O número de contas pretas é o triplo das brancas.

Figura 42 - Resolução do Gonçalo e da Matilde (tarefas 2.2 e 2.3)

Na resolução das segunda e terceira questões, transpareceu igualmente a capacidade de raciocínio na execução da mesma, tendo chegado com facilidade à relação existente entre o número de contas das duas cores.

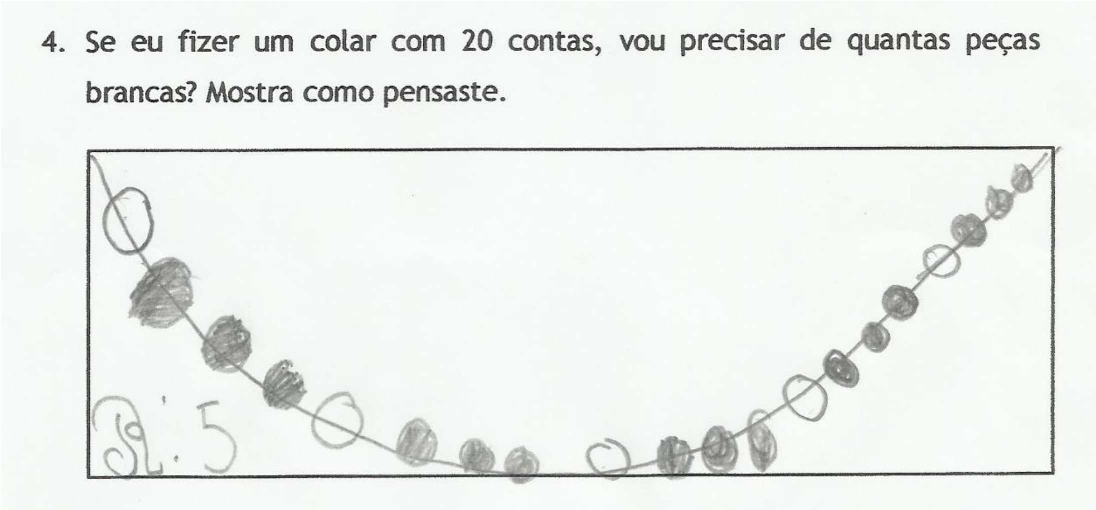


Figura 43 - Resolução do Gonçalo e da Matilde (tarefa 2.4)

Para chegar a uma resposta, esta díade, tal como a anterior, optou por desenhar o colar com vinte peças, para assim conseguir identificar o número de peças brancas e obter um resultado correto.

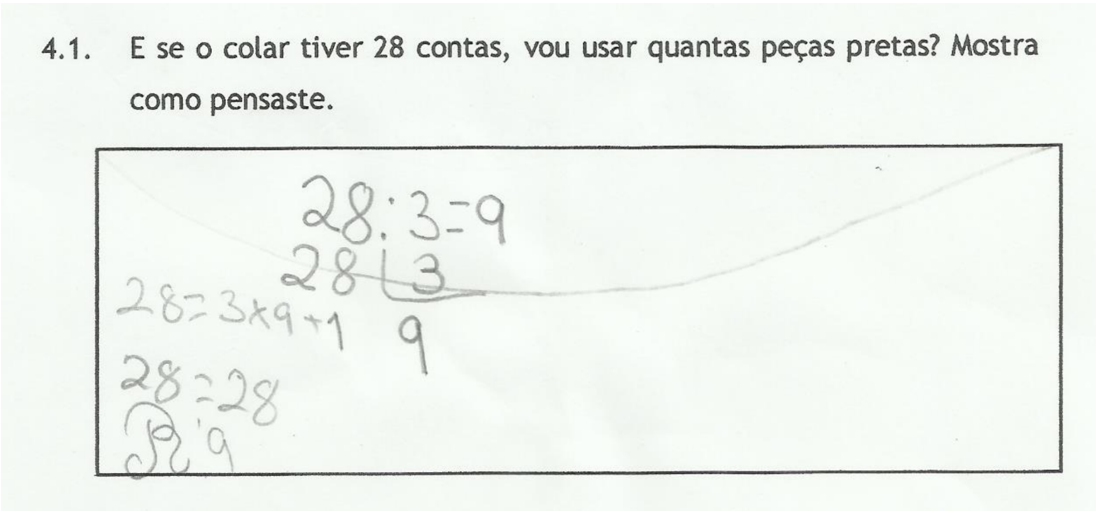
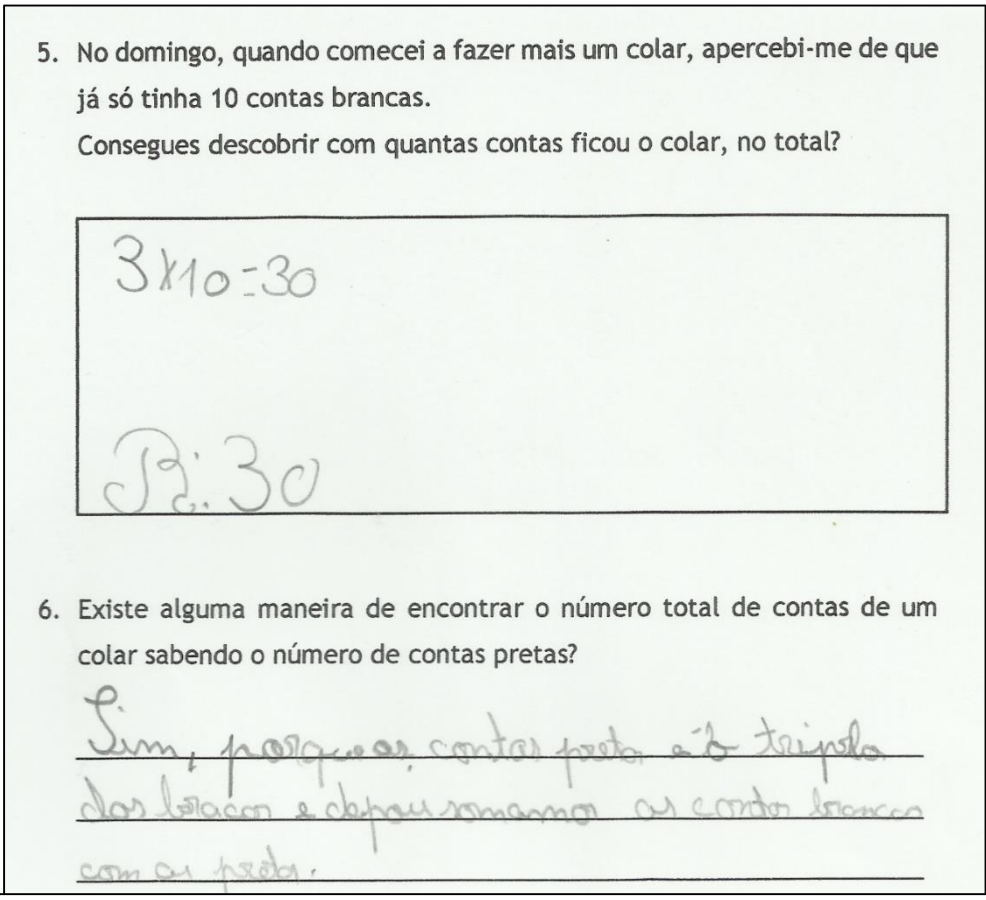


Figura 44 - Resolução do Gonçalo e da Matilde (tarefa 2.4.1)

Para encontrar uma solução para esta proposta, este par dividiu o número total de contas do presumível colar e dividiu-as pelo número de contas pretas que há em cada intervalo, pensando que assim descobriria o número de contas pretas existentes num colar de vinte e oito contas no total.

Se porventura tivesse recordado a relação existente entre o número de contas brancas e pretas teria verificado, em primeiro lugar que o número de contas pretas é superior ao número de contas brancas e que essa superioridade numérica se traduz no triplo, logo o colar com vinte e oito contas não poderia ter nove delas pretas, e também esse não poderia ser o número das contas brancas, pois nesse caso as contas pretas teriam que ser vinte e sete e o total não daria vinte e oito. Contudo, esta relação não foi esquecida na atividade seguinte, conforme comprova a resolução abaixo. No entanto, apesar de terem chegado ao número de contas pretas através do triplo das brancas e de até terem registado que teriam de somar as contas brancas e pretas, não fizeram essa soma.


5. No domingo, quando comecei a fazer mais um colar, apercebi-me de que já só tinha 10 contas brancas.
Consegues descobrir com quantas contas ficou o colar, no total?

3x10=30

R: 30

6. Existe alguma maneira de encontrar o número total de contas de um colar sabendo o número de contas pretas?

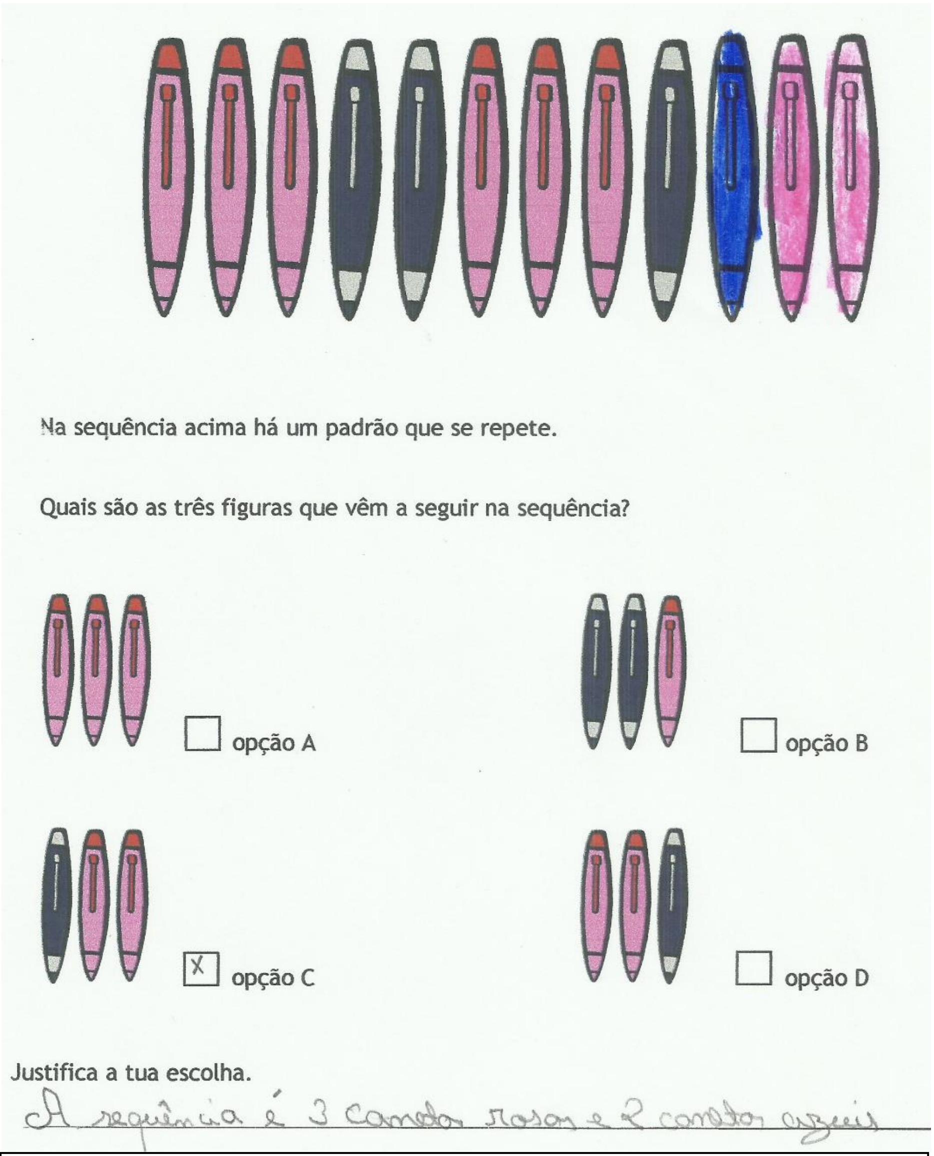
Sim, porque as contas preta é o triplo dos bracas e depois somamos as contas brancas com as preta.

Sim, porque as contas pretas é o triplo das brancas e depois somamos as contas brancas com as pretas.

Figura 45 - Resolução do Gonçalo e da Matilde (tarefas 2.5 e 2.6)

Este par chegou facilmente ao número de contas pretas que o colar necessitaria se tivesse 10 contas brancas, embora não tivesse calculado o resultado do total de contas, conforme solicitado na primeira atividade, todavia, na explicação, é visível a compreensão da atividade, tendo os alunos, embora não apresentando o resultado, descrito a forma como teriam de o fazer (… e depois somamos as contas brancas com as pretas).

4.4.3. Tarefa 3 – Canetas

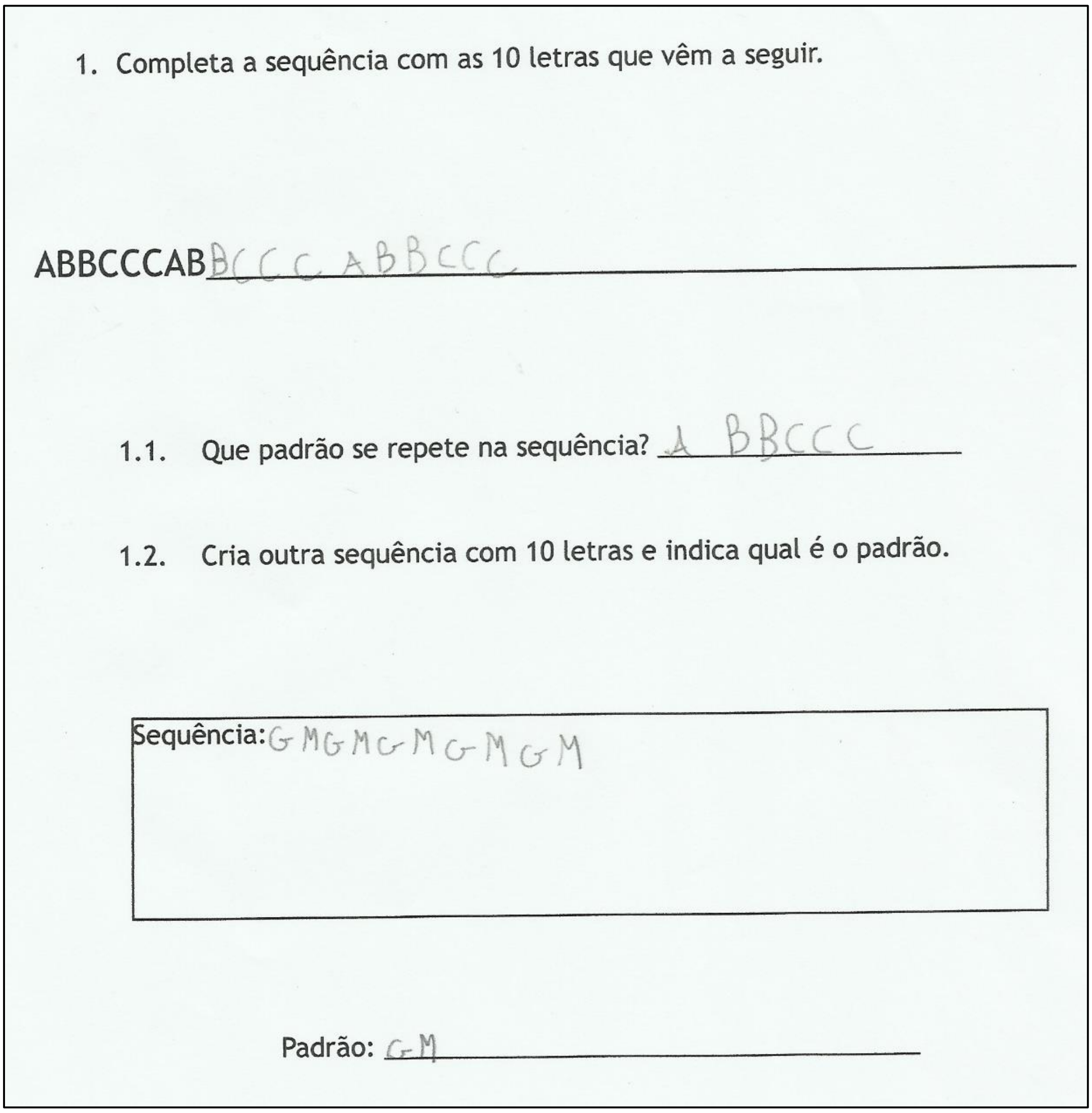


A sequência é 3 canetas rosas e 2 canetas azuis.

Figura 46 – Resolução do Gonçalo e da Matilde (tarefa 3)

Esta proposta foi concretizada com sucesso por este par, que descobriu com o auxílio da imagem o padrão correto e as figuras em falta na sequência.

4.4.4. Tarefa 4 - Letras



1. Completa a sequência com as 10 letras que vêm a seguir.

ABBCCCABBCCCABBCCC

1.1. Que padrão se repete na sequência? A BBCCC

1.2. Cria outra sequência com 10 letras e indica qual é o padrão.

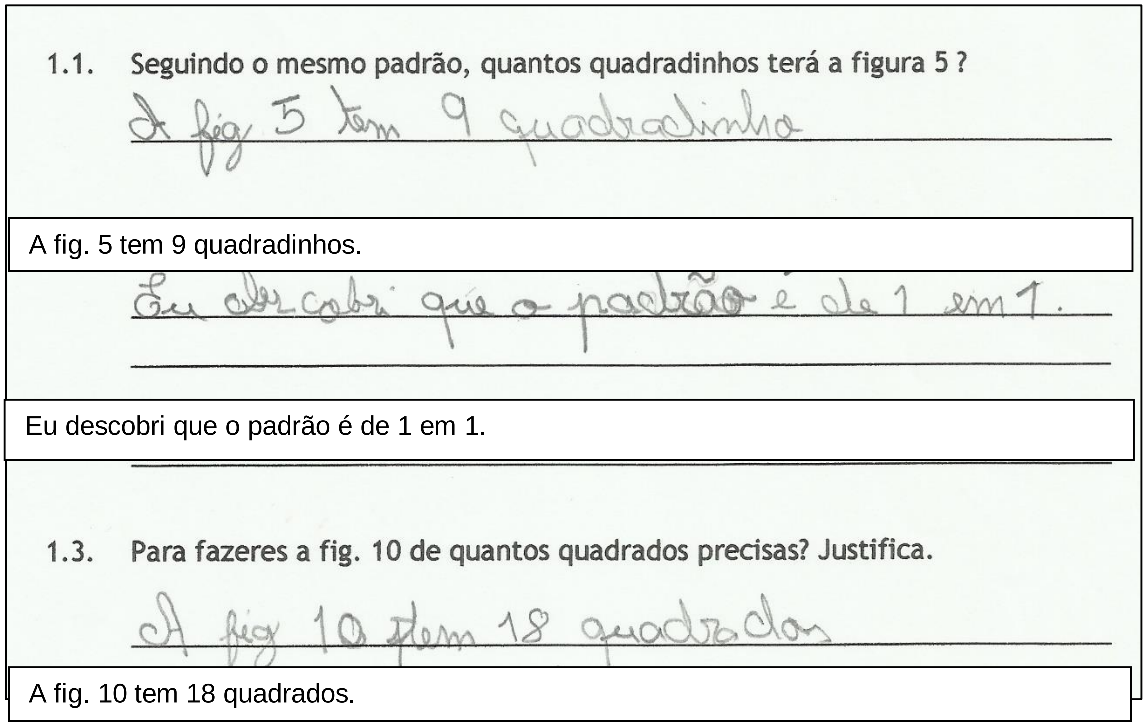
Sequência: GMGMGMGMGM

Padrão: GM

Figura 47 – Resolução do Gonçalo e da Matilde (tarefa 4)

Esta atividade foi resolvida por este par sem nenhum tipo de dificuldade, tendo identificado claramente o padrão em ambas as sequências.

4.4.5. Tarefa 5 – Figuras crescentes


1.1. Seguindo o mesmo padrão, quantos quadradinhos terá a figura 5 ?

A fig. 5 tem 9 quadradinhos.

Eu descobri que o padrão é de 1 em 1.

1.3. Para fazeres a fig. 10 de quantos quadrados precisas? Justifica.

A fig. 10 tem 18 quadrados.

Figura 48 – Resolução do Gonçalo e da Matilde (tarefa 5)

O raciocínio que este grupo utilizou foi semelhante ao usado pelo primeiro grupo, isto é, recorreram à relação existente entre o número das figuras (10 é o dobro de 5), logo, para eles a figura 10 teria 18 quadradinhos por ser o dobro dos 9 quadradinhos da figura 5.

> **Gonçalo:** A figura 5 tem 9 (*quadradinhos*) e o 5 é metade de 10, logo 9 mais 9…
> **Professora:** Se a figura 5 tem 9, a figura 10 tem 18 porque 10 é o dobro de 5 e 18 é o dobro de 9, é isso?
> **Gonçalo:** Sim.

4.4.6. Tarefa 6 – Abelhas

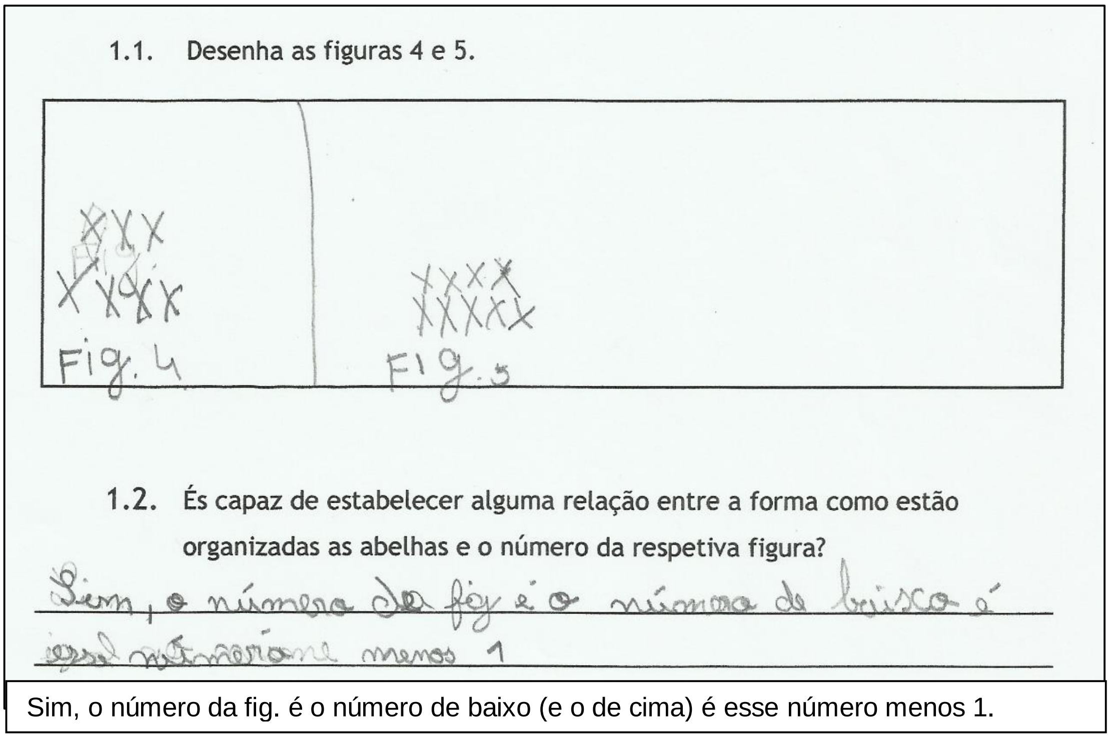

1.1. Desenha as figuras 4 e 5.

Fig. 4

Fig. 5

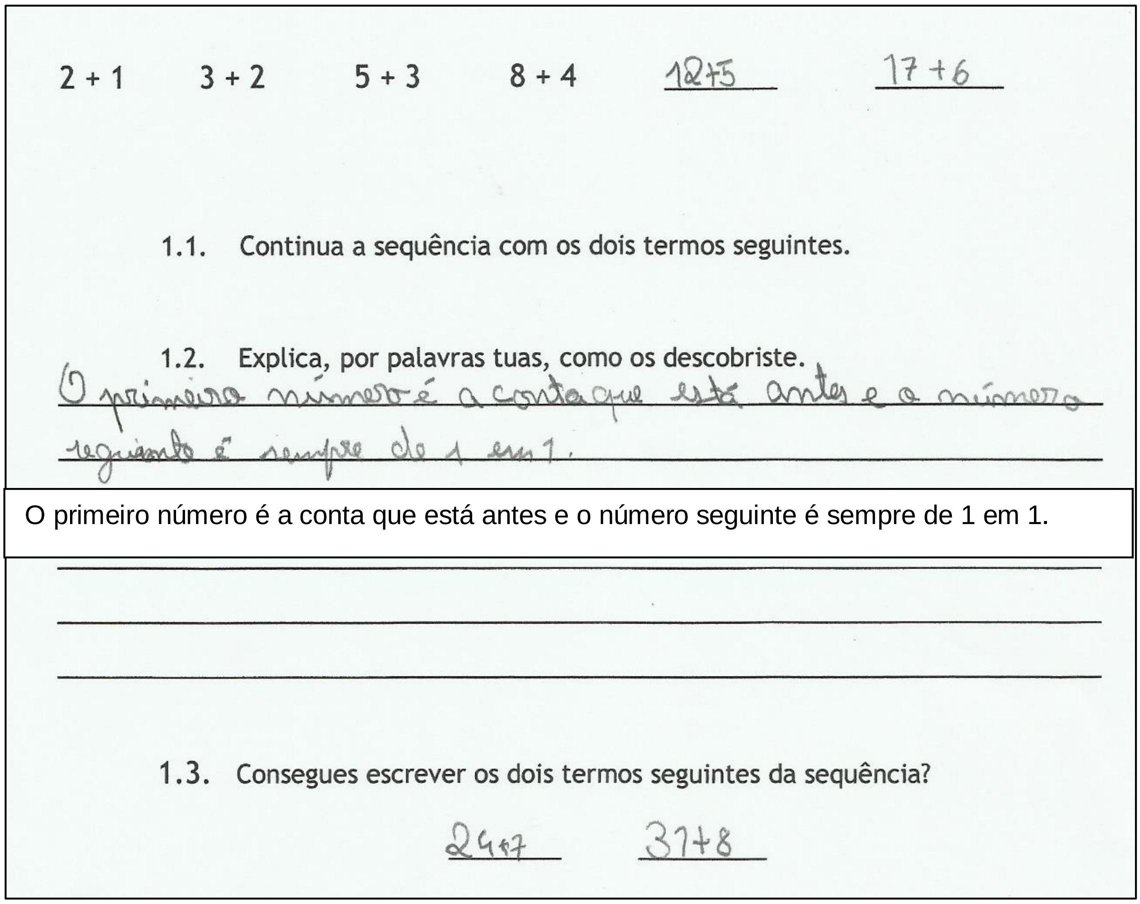
1.2. És capaz de estabelecer alguma relação entre a forma como estão organizadas as abelhas e o número da respetiva figura?

Sim, o número da fig. é o número de baixo (e o de cima) é esse número menos 1.

Figura 49 – Resolução do Gonçalo e da Matilde (tarefa 6)

Este par demonstrou à partida alguma insegurança, que foi superando à medida que foi discutindo a resolução da tarefa, tendo conseguido um resultado correto.

4.4.7. Tarefa 7 – Somas



2 + 1   3 + 2   5 + 3   8 + 4   12+5   17 +6

1.1. Continua a sequência com os dois termos seguintes.

1.2. Explica, por palavras tuas, como os descobriste.

O primeiro número é a conta que está antes e o número seguinte é sempre de 1 em 1.

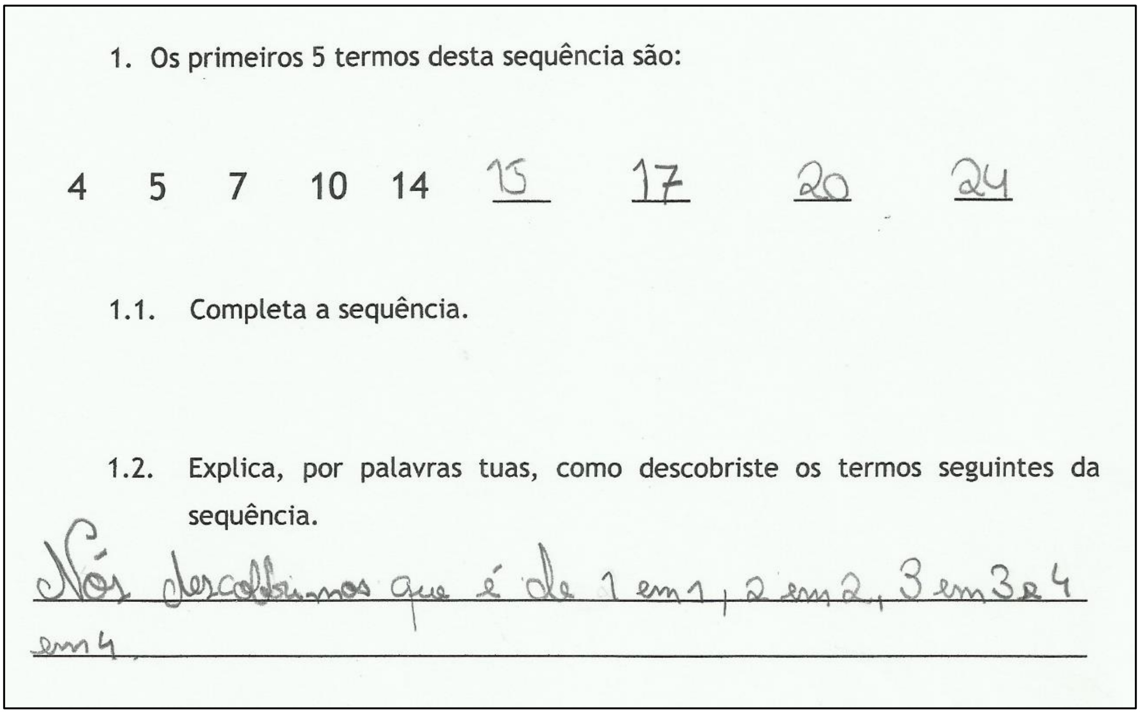
1.3. Consegues escrever os dois termos seguintes da sequência?

24+7   37+8

Figura 50 – Resolução do Gonçalo e da Matilde (tarefa 7)

Este par conseguiu descobrir os dois termos seguintes da sequência, embora tenha demonstrado dificuldade em explicar como o fez. Os outros dois termos revelaram erro de cálculo e portanto apresentam-se de forma incorreta. Dado que a primeira parcela do termo da sequência é obtida pelo resultado da soma anterior e a segunda parcela é obtida pela adição de uma unidade à segunda parcela do termo anterior, o resultado dos termos seguintes deveria ser 23 + 7 e 30 + 8.

4.4.8. Tarefa 8 – Números a crescer


1. Os primeiros 5 termos desta sequência são:

4 5 7 10 14 15 17 20 24

1.1. Completa a sequência.

1.2. Explica, por palavras tuas, como descobriste os termos seguintes da sequência.

Nós descobrimos que é de 1 em 1, 2 em 2, 3 em 3 e 4 em 4.

Figura 51 – Resolução do Gonçalo e da Matilde (tarefa 8)

Este par interpretou a sequência dada como tratando-se de uma sequência repetitiva, em que o padrão usado se repete a cada cinco termos: + 1; + 2; + 3; + 4.

Tratando-se de uma sequência crescente, a resolução deste par está incorreta, pois não seguem uma ordem crescente na descoberta do termo seguinte. Deste modo, os termos seguintes seriam obtidos acrescentando sempre uma unidade à soma anterior, isto é: +1; + 2; + 3; + 4; + 5; + 6; +7, …

Verificou-se na análise do desempenho destes alunos que as tarefas, de um modo geral, não suscitaram dúvidas, tendo o par executado as mesmas com sucesso. No entanto, na tarefa 2.4.1 os alunos foram induzidos em erro ao calcularem a terça parte do total de contas, quando esta relação existe entre o número de contas brancas e pretas. Foi notório que no decorrer das tarefas, estes alunos conseguiram explicar o seu pensamento, estabelecer relações e generalizar, embora nem sempre bem-sucedidos, tendo demonstrado uma evolução no pensamento algébrico.

5 – CONCLUSÃO

Neste capítulo faço uma sistematização das principais ideias decorrentes do estudo e uma breve síntese dos resultados obtidos, dando ênfase às representações e procedimentos utilizados pelos alunos, tendo em conta as dificuldades dos mesmos perante tarefas que envolvam a representação e a generalização. Desta forma, procuro dar resposta às questões orientadoras da investigação.

5.1. Síntese do estudo

Este estudo teve como objetivo compreender como tarefas de resolução de problemas com sequências contribuem para o desenvolvimento do raciocínio dos alunos no decorrer de uma experiência de ensino implementada numa turma do 2.º ano de escolaridade, no ano letivo 2015/2016.

De acordo com o objetivo definido, foram delineadas as seguintes questões de investigação:

- Que estratégias utilizam os alunos para descobrir os termos de uma sequência?
- Que tipo de raciocínio está envolvido nas estratégias utilizadas pelos alunos?
- De que forma os alunos generalizam perante uma sequência?

Deste modo, implementei uma sequência de oito tarefas numa turma do 2.º ano de escolaridade numa escola pública do concelho da Amadora, onde fui professora e investigadora. Da turma foram selecionados, para um olhar mais aprofundado, quatro pares de alunos, tendo em conta diferentes níveis de aproveitamento na área da matemática. As tarefas implicavam a procura de regularidades em sequências repetitivas e crescentes, a identificação de padrões, bem como a descoberta de regras de formação.

Num primeiro momento apresentei as tarefas à turma e seguiu-se um período de trabalho autónomo em que os alunos em pares resolveram as tarefas em questão. Posteriormente, à medida que os alunos expunham os resultados obtidos, iam sendo confrontados com questões sobre os mesmos incitando à explicação dos passos seguidos, no sentido de desenvolver a comunicação, o espírito crítico e a argumentação. Estas atividades foram realizadas no primeiro período do segundo ano de escolaridade, pelo que os alunos ainda revelavam uma relativa insegurança ao nível da leitura e da escrita, o que comprometeu, de algum modo, a sua interpretação e explicação do raciocínio por palavras, facto que sofreu uma evolução positiva ao longo das semanas.

A recolha de dados foi feita através da observação participante e com recurso a gravações áudio e vídeo. Foram também recolhidos os documentos aos registos escritos dos alunos. A análise deste material foi feita com base numa abordagem qualitativa.

O quadro teórico desta investigação tem em conta aspetos inerentes ao desenvolvimento do pensamento algébrico e do raciocínio a partir da exploração de regularidades e sequências pictóricas. Faz referência às representações matemáticas em sequências pictóricas e numéricas, à importância da identificação de padrões, às diferentes estratégias de generalização e às dificuldades dos alunos na representação e generalização destas mesmas sequências.

5.2. Conclusões do estudo

De acordo com o desempenho dos alunos na execução das tarefas, este estudo tem como finalidade contribuir para compreender o impacto que tarefas de regularidades e sequências têm no desenvolvimento do raciocínio dos alunos.

Nas abordagens iniciais com tarefas de sequências, denota-se, por parte dos alunos, que estes elegem como estratégia primordial o desenho. No entanto, à medida que os alunos vão tomando contacto com as outras tarefas, verifica-se uma maior segurança que os leva a libertarem-se de representações pictóricas e adotarem outras estratégias mais diversificadas.

5.2.1. Que estratégias utilizam os alunos para descobrir os termos de uma sequência?

No caso das sequências repetitivas e analisando, em particular, a tarefa 4.1.2, na qual os alunos criaram uma sequência com 10 letras e posteriormente identificaram o padrão nela contido, verificou-se que os grupos um e quatro usaram o padrão ABABAB, ou seja fizeram uma alternância única, ao passo que os outros dois pares (dois e três) usaram uma alternância por progressão aritmética (Palhares & Mamede, 2002).

Os padrões de repetição fomentam a generalização, na medida em que o reconhecimento da unidade de repetição e a compreensão da estrutura do padrão permitem ao aluno continuar o processo e possibilitam a abordagem à generalização distante através da descoberta de um termo, abrindo assim o caminho para a abstração (como é referido por Warren, 2008, citado por Barbosa, 2009).

Relativamente aos padrões de crescimento e analisando a tarefa 8, verificou-se que os pares 1 e 3 não apresentararam dificuldade na determinação dos cinco termos seguintes, embora revelando menos facilidade na explicação da forma como pensaram. O par 2 apresenta erros, aparentemente de cálculo, na determinação dos termos, uma vez que na explicação da sua descoberta parece visível a compreensão da sequência. Quanto ao quarto par, a interpretação que este fez foi diferente dos outros. Os dois alunos que constituem este par partiram do pressuposto que existe uma regularidade que se repete nesta sequência, ou seja, existe um padrão de crescimento que se repete ciclicamente a cada cinco termos.

Quando a tarefa de crescimento implica uma estrutura, o grau de dificuldade aumenta, se não vejamos a tarefa 6, em que as abelhas não estão dispostas ao acaso, mas antes obedecendo a uma estrutura subjacente. Somente o par constituído pelo Filipe e pelo Miguel deram sinais de terem compreendido esta proposta desde o início, pois os restantes pares necessitaram de mais tempo para o fazerem, tendo um dos elementos do par 2 expressado uma dificuldade acrescida em entender a estrutura implícita, não a relacionando com o número da figura em si. Contudo no final da resolução da proposta, todos os alunos foram capazes de generalizar, ou seja, todos eles mencionaram que o número da figura corresponde ao número de abelhas da fila de baixo e subtraindo uma unidade a esse número obteremos o número de abelhas da fila de cima. Quanto à componente visual presente na disposição, mais uma vez, o par três deu sinais de a ter compreendido na perfeição, desenhando a representação das abelhas da fila de cima intercaladas com as abelhas (ou sua representação) da fila de baixo.

5.2.2. Que tipo de raciocínio está envolvido nas estratégias utilizadas pelos alunos?

O raciocínio indutivo foi o que prevaleceu nas estratégias adotadas pelos alunos pois apesar destes terem realizado as atividades que lhes foram apresentadas, demonstraram algum constrangimento ao nível da explicação dos procedimentos usados. Por exemplo, o par número dois explicou as tarefas 7 e 8, respetivamente, do seguinte modo: "Nós percebemos que é de 1 em 1" e "A sequência é 1 2 3 4", o que leva a concluir que o raciocínio dedutivo não se encontra ainda totalmente desenvolvido. Contudo, o par número três consegue explicitar o seu raciocínio de forma bastante clara, o que leva a entender que estes alunos se encontram num patamar mais avançado que o par anterior, como se pode observar, por exemplo, nas tarefas 5.1.3 e 6, respetivamente: “14 quadradinhos, porque ao número da figura temos de adicionar +4 unidades” e “Em baixo o número de abelhas é o número da figura, em cima é -1 ao de baixo e o total de abelhas é adicionando ao total anterior +2”.

Nas tarefas efetuadas pelos alunos verificaram-se diferenças ao nível da resolução das sequências repetitivas e crescentes, constatando-se que nas tarefas constituídas por sequências repetitivas, os alunos demonstraram uma notória compreensão na identificação da parte que se repete ciclicamente, tal como aconteceu nas tarefas 1, 3 e 4. Ao passo que nas tarefas de sequências crescentes, alguns alunos demonstraram menos segurança na descoberta dos termos seguintes, sobretudo quando se trata de descoberta de termos distantes.

Uma sequência crescente suscita mais dificuldades na sua exploração do que em sequências repetitivas. A sequência crescente mantém uma regularidade previsível em relação ao termo anterior (como referido por Moyer-Packenham, 2005). Assim, sequências crescentes são mais exigentes do que sequências repetitivas, em termos cognitivos. Um facto que está relacionado com as tarefas e que influencia as estratégias utilizadas pelos alunos é a ordem do termo pedido, podendo ser próxima ou distante. Segundo Orton e Orton (1999) essa mudança pode resultar numa generalização correta ou não, pois os alunos quando se deparam com questões relacionadas com termos mais distantes da sequência podem passar de um método correto para um método incorreto baseado, muitas vezes, no estabelecimento de uma relação de proporcionalidade direta inexistente. Foi o que aconteceu na tarefa 5.1.3. na qual dois pares (1 e 4) partiram do pressuposto que a figura 10 da sequência dada teria 18 quadradinhos (e não 14) por ser o dobro de quadrados da figura 5, quando na realidade não existia esta relação entre o número de quadrados de ambas as figuras.

5.2.3. De que forma os alunos generalizam perante uma sequência?

Constatou-se que os alunos nem sempre conseguiram fazer uma generalização. Facto que se conclui através da observação dos procedimentos usados nas tarefas que envolveram sequências crescentes (tarefas 5, 6, 7 e 8), os alunos demonstraram dificuldade na descoberta do termo geral, isto é, em generalizar, uma vez que nem todos os pares de alunos pareceram compreender a relação existente entre o número da figura e a ordem do termo.

Deste modo, os resultados mostraram um melhor desempenho nas sequências repetitivas, pois exigem um recurso à visualização. Um trabalho prévio em contextos visuais, segundo Vale e Pimentel (2011) pode ajudar os alunos a conseguir generalizar com maior facilidade e contribui para organizar o pensamento, constituindo assim um ponto de partida para a compreensão de tarefas de crescimento. Neste sentido, Tripathi (2008, citada por Pimentel & Vale, 2012) refere ainda que a capacidade para usar várias formas de raciocínio pode ser desenvolvida através de experiências que envolvam a visualização.

É visível na tarefa cinco, a descoberta do termo geral (n+4), sendo n o número da figura, por parte dos pares dois e três. Neste caso, a visualização tornou mais clara a generalização feita, uma vez que as figuras podem ter ajudado a estabelecer relações e consequentemente a produzir generalizações (Vale & Pimentel, 2010). Ou seja, os padrões figurativos possibilitam a ligação de várias formas de representação, facilitando a compreensão da estrutura matemática subjacente, levando mais eficazmente à conjetura e generalização, à explicação e argumentação.

Segundo Harel's (2001, citado por Warren, 2009) uma das formas de generalizar é através do processo de generalização. A partir de alguns exemplos, desenvolve-se a generalidade, justificando-a através da demonstração de aplicabilidade para todos os exemplos e para qualquer número. Esta é a justificação da expressão de generalização que parece ser a componente-chave para ser uma verdadeira generalização. No caso da tarefa 5 referida anteriormente, os alunos compreenderam que qualquer que seja o número da figura é possível calcularem o número de quadradinhos da mesma somando apenas quatro unidades ao número da figura.

Outro exemplo visível desta forma de generalização foi nas tarefas 2.2 e 2.3, nas quais os pares três e quatro chegaram à conclusão de que seja qual for o número de contas brancas do colar consegue-se sempre chegar ao número de contas pretas, pois estas são o triplo das brancas.

Mestre e Oliveira (2013) reconhecem que a generalização pode ser expressa de forma diversificada, como por exemplo em linguagem natural, mas, progressivamente, numa linguagem matemática mais formal, usando símbolos matemáticos.

Na perspetiva de Ponte, Branco e Matos (2009) um elemento crucial ao pensamento algébrico é generalizar a partir da descoberta e comprovação de propriedades que se verificam em toda uma classe de objetos. Isto é, o pensamento algébrico centra-se não só nos objetos, mas também nas relações existentes entre eles, "representando e raciocinando sobre essas relações tanto quanto possível de modo geral e abstrato", salientando ainda que o estudo de regularidades num dado conjunto de objetos é essencial para promover o raciocínio.

Segundo estes autores, representar, raciocinar e resolver problemas são elementos fundamentais na construção do pensamento algébrico. Representar refere-se à capacidade do aluno usar diferentes sistemas de representação de natureza simbólica. Raciocinar, tanto dedutiva como indutivamente, implicam relacionar e generalizar. Resolver problemas diz respeito ao uso de diferentes representações de objetos algébricos para interpretar e resolver problemas matemáticos e de outros domínios.

Esta perspetiva é claramente compreendida na análise das tarefas realizadas, uma vez que os alunos que conseguiram estabelecer relações, nomeadamente na tarefa 2.3, na qual os grupos 3 e 4 ao relacionarem o número de contas brancas e pretas foram capazes de generalizar, quando disseram que o número de contas pretas é o triplo das brancas, deste modo conseguem descobrir o número de contas brancas seja qual for o número de contas pretas e vice-versa.

5.3. Recomendações futuras

Com este estudo, evidenciou-se claramente a pertinência de dar continuidade à exploração de tarefas desta natureza, que possibilitem a utilização de diferentes estratégias e que encorajem os alunos a compreender o potencial das estratégias visuais e a estabelecer a relação entre contextos visuais e numéricos (Barbosa, 2011), dado o seu contributo para o desenvolvimento de um raciocínio mais flexível, crucial na resolução de problemas, e da capacidade de comunicação.

Estou certa que os alunos envolvidos neste estudo, em particular os quatro pares, beneficiaram, e muito, com esta oportunidade. Concerteza trabalhariam tarefas com regularidades e sequências, mas talvez não tão aprofundadamente, pelo que seria interessante interpelá-los novamente ao longo do seu percurso escolar no âmbito desta temática em confronto com alunos que não tenham participado num estudo desta natureza, ou, se possível em anos consecutivos ao longo de um determinado período de tempo, a fim de continuar a analisar a evolução do raciocínio destes alunos em particular.

5.4 – Reflexão sobre o duplo papel de professora e de investigadora

Este estudo foi um desafio para mim, pois apesar de já ter participado em várias formações, incluindo formações contínuas quer na área da matemática quer na de Ciências, nunca tinha feito um trabalho desta natureza, pelo que confrontei-me logo à partida com a logística das gravações/transcrições. Devo confessar que no início tive alguma dificuldade em gerir a aplicação das tarefas e o acompanhamento que queria fazer sem influenciar os alunos, mas ao mesmo tempo fazendo-os interpretar os enunciados e levá-los a explicar os seus procedimentos. Penso que o facto de ter simultaneamente desempenhado o papel de investigadora, tornou o processo mais natural, pois não havia dia e hora marcados para os alunos realizarem alguma atividade com alguém exterior, mas antes mais uma tarefa que a professora lhes propunha.

Este duplo papel também provocou um maior enfoque na forma como os alunos chegaram aos resultados, estando mais atenta aos procedimentos que estes utilizaram e à explicação dos mesmos, o que levou a um maior conhecimento dos alunos e da sua forma de pensar. No entanto, prevalecem algumas dúvidas, entre as quais: Foram as estratégias por mim construídas, ainda que apoiadas noutras que pesquisei, as mais adequadas para este estudo e para este grupo de alunos? Teriam os alunos obtido um maior desempenho e uma melhor compreensão se lhes tivesse dado a oportunidade de usarem material manipulativo? Terão sido os pares bem escolhidos?

Este estudo foi, sem dúvida, um legado de aprendizagens para os meus alunos, mas sobretudo para mim, que consciente de que todos os dias aprendo, este estudo ampliou em grande escala essa aprendizagem.

Contudo, fica a convicção de que poderia ter feito mais e melhor. Convicção essa que aumenta com a experiência que se vai ganhando e os conhecimentos que se vão adquirindo.

Estou certa que agora que “termino” este estudo, estaria em condições de iniciá-lo…

REFERÊNCIAS

Abrantes, P., L. Serrazina, e I. Oliveira (1999). A Matemática na educação básica. Lisboa: ME/DEB.

Alvarenga, D. & Vale, I. (2007) A exploração de problemas de padrão: Um contributo para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Quadrante, XVI (1), 25-55.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics (pp. 215-241). Israel: Weizmann Institute of Science

Barbosa, A. (2009). A resolução de problemas que envolvem a generalização de padrões em contextos visuais: um estudo longitudinal com alunos do 2º Ciclo do Ensino Básico. Instituto de Estudos da Criança – Universidade do Minho, tese de Doutoramento.

Barbosa, A., Vale, I. & Palhares, P. (2009). Exploring generalization with visual patterns: tasks developed with pre-algebra students. Em Vale, I. & Barbosa, A. (Org.). *Padrões: Múltiplas Perspetivas e Contextos em Educação Matemática* (pp. 137-150). Viana do Castelo: Escola Superior de Educação

Barbosa, A. (2013). O contributo da visualização no desenvolvimento do raciocínio funcional. *Atas de Encontro* de *Investigação em Educação Matemática: Raciocínio Matemático* (pp. 51-80). Penhas da Saúde: SPIEM

Becker, J. & Rivera, F. (2006). In Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M. & Stehlíková, N. (Eds.). Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 4, pp. 465-472. Prague: PME.

Beillerot, J. A "pesquisa": esboço de uma análise. In: André, M. (org.). O papel da pesquisa na formação e na prática dos professores. Campinas, SP: Papirus, 2001.

Boavida, A., Paiva, A., Cebola, G., Vale, I., Pimentel, T. (2008). *A Experiência Matemática no Ensino Básico.* Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico. Lisboa: ME/DGIDC

Borralho, A. & Barbosa, E. (2009). Exploração de Padrões e Pensamento Algébrico. Em Vale, I. & Barbosa, A. (Org.). *Padrões: Múltiplas Perspetivas e Contextos em*

Educação Matemática (pp. 59-68). Viana do Castelo: Escola Superior de Educação

Carraher, D. W., & Schliemann, A. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. K. Lester (Ed.), Second handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 669-705). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Canavarro, A. P. (2007). O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. *Quadrante*, XVI (2), 81-118.

Clement, J. (2000). Analysis of Clinical Interviews: Foundations and Model Viability. In A. E. Kelly & R. Lesh (Eds) *Handbook of Research Design in mathematics and Science Education* (pp. 547-589). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Confrey J., Lachance A. (2000). Transformative teaching experiments through conjecture driven research design. In Kelly A. E. & Lesh R. (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 231-265). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Coutinho, C. (2005). *Percursos da Investigação em Tecnologia Educativa em Portugal: uma abordagem temática e metodológica a publicações científicas* (1985-2000). Braga: CIED - Universidade do Minho.

Guerreiro, A. (2011). Padrões em contextos figurativos no 2.º ano da licenciatura em educação básica. *Atas de Encontro de Investigação em Educação Matemática: Ensino e Aprendizagem da Álgebra* (365-382). Póvoa de Varzim: SPIEM

Kaput, J. (1999). Teaching and Learning a New Algebra With Understanding. University of Massachusetts–Dartmouth

Lannin, J. K. (2005). Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through pattern activities. Mathematical Thinking and Learning, 7(3), 231-258.

Mason, J: (2011). Trabalhando com padrões. In P, Palhares, A. Gomes, & E. Amaral (Coord.), Complementos de matemática para professores do ensino básico, (215-235). Lisboa: Edições Técnicas.

ME-DEB (2001). Currículo nacional do ensino básico: Competências essenciais. Lisboa: ME-DEB.

Matos, A., Silvestre, A., Branco, N., & Ponte, J. P. (2008). Desenvolver o pensamento algébrico através de uma abordagem exploratória. Atas SEIEM , pp. 505-516.

Mestre, C. & Oliveira, H. (2011). Generalizar estratégias de cálculo: Um estudo sobre o pensamento relacional de alunos do 4.º ano de escolaridade. In Atas do XXII Seminário de Investigação em Educação Matemática. Lisboa: APM (Digital).

Mestre C. & Oliveira, H. (2013). Um percurso na generalização matemática: uma experiência de ensino no 4.º ano. In A. Domingos, I. Vale, M.J. Saraiva, M. Rodrigues, M.C. Costa, R.A. Ferreira (Eds.), Investigação em Educação Matemática 2013: Raciocínio Matemático (pp. 254-276). Covilhã: SPIEM

Mestre, C. (2014). *O desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 4.º ano de escolaridade: Uma experiência de ensino*. (Tese de Doutoramento). Lisboa: Universidade de Lisboa

Molina, M. (2011). Integración del Pensamiento Algebraico en la Educación Básica. Un Experimento de Enseñanza con Alumnos de 8-9 Anõs. In M. H. Martinho, R. A. Ferreira, I. Vale, & J. P. Ponte (Ed.), Ensino e Aprendizagem da Álgebra. Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática (pp. 27-51). Lisboa: SPIEM.

Morais, A. (2012). *A Exploração de Sequências e Regularidades como Suporte Para o Desenvolvimento do Pensamento Algébrico.* (Tese de Mestrado). Lisboa: Universidade de Lisboa

Moyer-Packenham, P. (2005). Using virtual manipulatives to investigate patterns and generate rules in algebra. Teaching Children Mathematics, 11(8), 437-444.

NCTM (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Reston: NCTM. [Tradução portuguesa: Princípios e Normas para a Matemática Escolar. Lisboa, APM, 2007].

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática (Edição original em inglês, 2000).

Oliveira, P. (2002) A investigação do professor, do matemático e do aluno: uma discussão epistemológica.Dissertação (Mestrado em Didáctica da Matemática). Universidade de Lisboa, Lisboa.

Orton, A. & Orton, J. (1999). Pattern and the approach to algebra. In A. Orton (Ed.), Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics (pp 104-120). London: Cassell.

Orton, J. (2009). Pupils' perception of shape, pattern and transformations. In I. Vale e A. Barbosa (Orgs.), *Padrões: Múltiplas Perspectivas e Contextos em Educação Matemática* (pp. 81-101). Viana do Castelo: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo.

Palhares, P., & Mamede, E. (2002). Os padrões na matemática do pré-escolar. Educare-Educere, 10(1), 107-123.

Papic, M., Mulligan, T., & Mitchelmore, M. (2011). Assessing the developing of preescholers' mathematical patterning. Journal for Research in Mathematics Education, 42(3), 237-268.

Pereira, J. & Ponte, J. (2011). Raciocínio Matemático em Contexto Algébrico: Uma análise com alunos de 9.º ano. *Atas de Encontro de Investigação em Educação Matemática: Ensino e Aprendizagem da Álgebra* (pp. 347-364). Póvoa de Varzim: SPIEM

Pimentel, T. (2010). O conhecimento matemático e didáctico, com Incidência no pensamento algébrico, de professores do primeiro ciclo do ensino básico: que rela- ções com um programa de formação contínua? (tese de Doutoramento). Minho: Instituto de Estudos da Criança - Universidade do Minho.

Ponte, J. (2002). Investigar a nossa própria prática: uma estratégia de formação e de construção do conhecimento profissional. Actas del VIII Simposio de la Seiem. Lisboa: Universidade de Lisboa.

Ponte, J. (2006). Estudos de Caso em Educação Matemática. *Bolema*, 25, 105-132. (Revista do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática do IGCE – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, UNESP – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, Brasil).

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H. M., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. E., & Oliveira, P. (2007). Programa de Matemática do Ensino Básico. Lisboa: Ministério da Educação/DGIDC.

Ponte, J. (2009). O Novo Programa de Matemática como oportunidade de Mudança para os Professores do Ensino Básico. No 12, pp. 96-114. Lisboa: Instituto de Educação.

Ponte, J., Branco, N. & Matos, A. (2009). Álgebra no Ensino Básico. Lisboa: DGIDC.

Silva, J. & Mamede, E. (2015). Padrões no 2.º ano do ensino Básico. *Revista de Estudios e Investigación en Psicología y Educación*, Extr. (6), 214-218

Vale, I. (2012). As tarefas de padrões na aula de matemática: Um desafio para professores e alunos. Interações, 20, 181-207.

Vale, I. & Fonseca, L. (2011). Patterns tasks with geometric transformation in elementary teacher's training: some examples, Journal of the European Teacher Education Network, vol. 6, 76-86.

Vale, I., Palhares, P., Cabrita, I. & Borralho, A. (2005). Os Padrões no Ensino e Aprendizagem da Álgebra. *Atas de Encontro de Investigação em Educação Matemática:* Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores. Secção III. Caminha: SPIEM

Vale, I. & Pimentel, T. (2009). Visual Pattern Tasks with Elementary Teachers and Students: a Didactical Experience. Em Vale, I. & Barbosa, A. (Org.). *Padrões: Múltiplas Perspetivas e Contextos em Educação Matemática* (pp. 151-162). Viana do Castelo: Escola Superior de Educação

Vale, I. & Pimentel, T. (2012). Os padrões e o raciocínio indutivo em matemática. *Quadrante,* XXI (2), 29-50

Vale, I. & Pimentel, T. (2013). Raciocinar com padrões figurativos. *Atas de Encontro de Investigação em Educação Matemática: Raciocínio Matemático* (pp. 205-222). Penhas da Saúde: SPIEM

Warren, E. (2009). Patterns and relationships in the elementary classroom. Em Vale, I. & Barbosa, A. (Org.). *Padrões: Múltiplas Perspetivas e Contextos em Educação Matemática* (pp. 29-48). Viana do Castelo: Escola Superior de Educação

Yin, R. K. (1994). Pesquisa *Estudo de Caso - Desenho e Método* (2ed.). Porto Alegre: Bookman.

Zazkis, R. & Liljedahl, P. (2002). Arithmetic sequence as a bridge among conceptual fields. Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 2(1). 91-118.

ANEXOS

Anexo 1 – Autorização Agrupamento de Escolas

Exmo. Sr. Diretor do Agrupamento de Escolas -----------------

Assunto: Pedido de autorização para a realização de um estudo de investigação em sala de aula

Eu, Sónia Cristina Oliveira Neto Lima, professora do 1.º Ciclo na EB1/JI …………………, pertencente ao quadro deste agrupamento; venho por este meio informar V. Exa. que me encontro a realizar uma investigação no âmbito do meu trabalho de Mestrado, na área de Educação Matemática, pela Escola Superior de Educação de Lisboa, sob orientação da Professora Doutora Lurdes Serrazina. Esta investigação tem como objeto o desenvolvimento do raciocínio com tarefas de regularidades e sequências em alunos do 2.º ano do 1.º Ciclo do Ensino Básico e a recolha de dados decorre no âmbito de uma experiência de ensino em sala de aula onde se implementam tarefas e se procuram analisar as aprendizagens e dificuldades dos alunos da turma, e, em particular, a evolução de um grupo de alunos como estudos de caso.

Neste sentido, venho solicitar a V. Exa. autorização para a realização deste estudo de investigação no 2.º ano da turma 2MH para a recolha dos dados com registos áudio e vídeo. Declaro que as imagens daí resultantes não serão divulgadas nem serão utilizadas para quaisquer outros fins. Declaro ainda que, solicitarei aos encarregados de educação dos alunos da turma a devida autorização para os registos vídeo e áudio das aulas referidas.

Encontrando-me ao dispor para quaisquer esclarecimentos adicionais, subscrevo-me com os melhores cumprimentos.

Amadora, 9 de novembro de 2015

Pede Deferimento,

A Professora

____

(Sónia Lima)

Anexo 2 – Autorização Coordenação da Escola

Exma. Sra. Coordenadora da EB1/JI -----------------

Assunto: Pedido de autorização para a realização de um estudo de investigação em sala de aula

Eu, Sónia Cristina Oliveira Neto Lima, professora do 1.º Ciclo na EB1/JI-----------, pertencente ao quadro deste agrupamento; venho por este meio informar V. Exa. que me encontro a realizar uma investigação no âmbito do meu trabalho de Mestrado, na área de Educação Matemática, pela Escola Superior de Educação de Lisboa, sob orientação da Professora Doutora Lurdes Serrazina. Esta investigação tem como objeto o desenvolvimento do raciocínio com tarefas de regularidades e sequências em alunos do 2.º ano do 1.º Ciclo do Ensino Básico e a recolha de dados decorre no âmbito de uma experiência de ensino em sala de aula onde se implementam tarefas e se procuram analisar as aprendizagens e dificuldades dos alunos da turma, e, em particular, a evolução de um grupo de alunos como estudos de caso.

Neste sentido, venho solicitar a V. Exa. autorização para a realização deste estudo de investigação no 2.º ano da turma 2MH para a recolha dos dados com registos áudio e vídeo. Declaro que as imagens daí resultantes não serão divulgadas nem serão utilizadas para quaisquer outros fins. Declaro ainda que, solicitarei aos encarregados de educação dos alunos da turma a devida autorização para os registos vídeo e áudio das aulas referidas.

Encontrando-me ao dispor para quaisquer esclarecimentos adicionais, subscrevo-me com os melhores cumprimentos.

Amadora, 9 de novembro de 2015

Pede deferimento,

A professora

____

(Sónia Lim

Anexo 3 – Autorização Encarregado de Educação

Exmo. Sr. Encarregado de Educação do(a) Aluno(a) ______________________________ do 2.º ano da turma 2MH.

Venho, por este meio, informar V. Exa. que me encontro a desenvolver uma investigação no âmbito do meu trabalho de Mestrado, na área de Educação Matemática, pela Escola Superior de Educação de Lisboa, sob orientação da Professora Doutora Lurdes Serrazina. Esta investigação tem como objeto o desenvolvimento do raciocínio com tarefas de regularidades e sequências em alunos do 2.º ano do 1.º Ciclo do Ensino Básico e a recolha de dados decorre no âmbito de uma experiência de ensino em sala de aula onde se implementam tarefas e se procuram analisar as aprendizagens e dificuldades dos alunos da turma. Neste sentido, propus-me realizar este trabalho na minha turma, de acordo com a programação anual desta área curricular. Nessas aulas procederei à recolha dos dados usando meios áudio e vídeo e, eventualmente, serão realizadas entrevistas a alguns alunos em momentos a agendar. Desta forma, solicito a V. Exa. autorização para a recolha dos dados nos formatos referidos, declarando que as imagens e som daí resultantes não serão divulgados nem serão utilizados para quaisquer outros fins e que preservarei o anonimato dos alunos envolvidos. Encontrando-me ao dispor para quaisquer esclarecimentos adicionais, subscrevo-me com os melhores cumprimentos.

9 de novembro de 2015

A professora

____

(Sónia Lima)

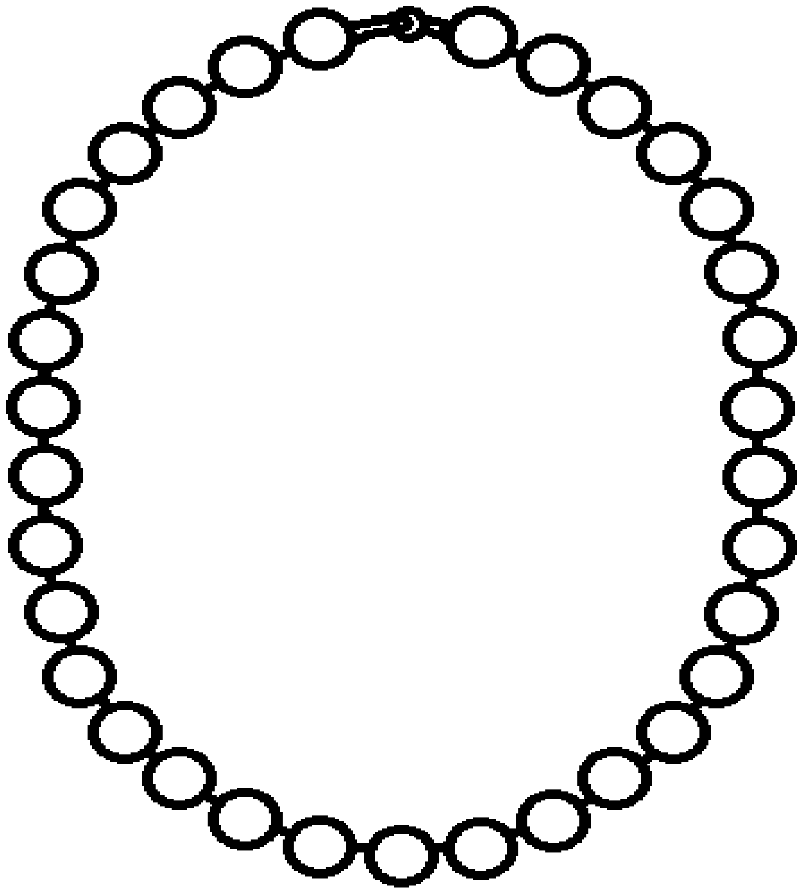
Eu, ____, encarregado de educação do(a) aluno(a) _____________________________________ da turma 2MH do 2.º ano da EB1/JI ------, declaro autorizar o meu educando a participar na investigação da professora Sónia Lima no âmbito da sua tese de Mestrado.

____/____/ 2015

_________________________ (Assinatura do encarregado de educação)

Anexo 4 - Tarefa 1 – Colar de contas

1. Com três cores diferentes pinta o colar criando um padrão à tua escolha.



1.1. Descreve o padrão que criaste.

____

____

____

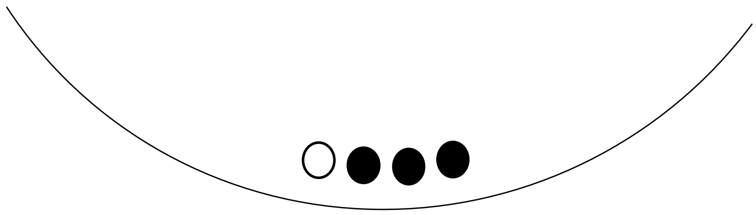
____

Nome: ____________________________________ Data: ___ / ___ / ___

Anexo 5 - Tarefa 2 – Colar de contas

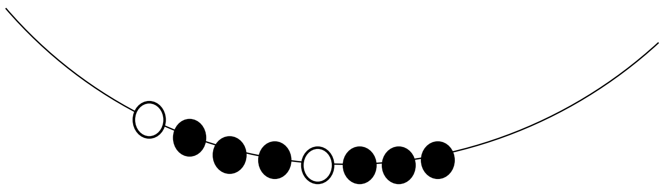
Este ano, no Natal, vou oferecer colares às minhas amigas, feitos por mim usando apenas duas cores: branco e preto.

Já fiz primeiro colar e ficou assim:

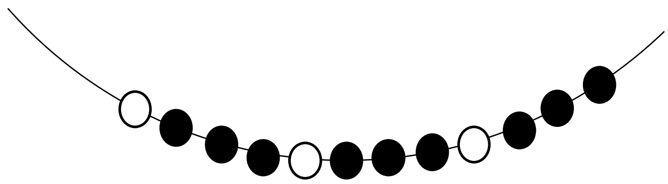


1.º colar

Também já tenho o segundo e o terceiro colares prontos:



2.º colar



3.º colar

1. Como vai ficar o 4.º colar que eu vou fazer? Desenha-o.

2. Preenche a tabela com o número de contas brancas e pretas que usei para fazer os colares.

Número de contas brancas	Número de contas pretas

3. Consegues explicar a relação entre o número de contas brancas e o número de contas pretas que vou usar na elaboração dos colares?

____

____

____

____

4. Se eu fizer um colar com 20 contas, vou precisar de quantas peças brancas? Mostra como pensaste.

4.1. E se o colar tiver 28 contas, vou usar quantas peças pretas? Mostra como pensaste.

5. No domingo, quando comecei a fazer mais um colar, apercebi-me de que já só tinha 10 contas brancas.
   Consegues descobrir com quantas contas ficou o colar, no total?

6. Existe alguma maneira de encontrar o número total de contas de um colar sabendo o número de contas pretas?

   ____

   ____

   ____

   ____

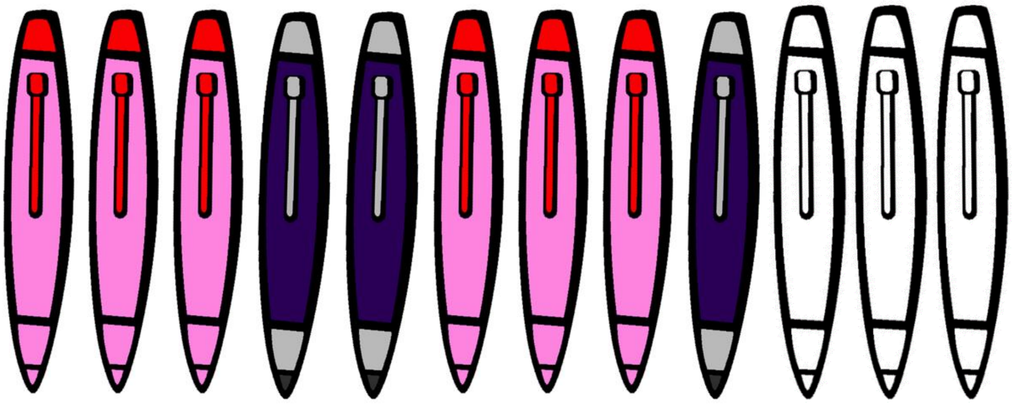
   ____

   ____

   ____

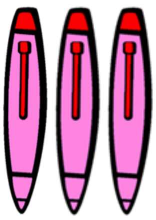
Nome: ____________________________________ Data: ___ / ___ / ____

Anexo 6 - Tarefa 3 – Canetas

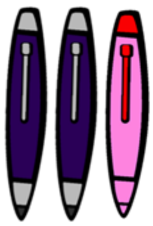


Na sequência acima há um padrão que se repete.

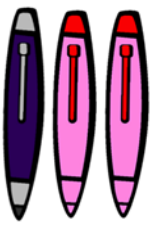
Quais são as três figuras que vêm a seguir na sequência?



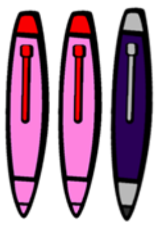
☐ opção A



☐ opção B



☐ opção C



☐ opção D

Justifica a tua escolha.

____

____

Nome: ____ Data: ___ / ___ / ___

Anexo 7 - Tarefa 4 - Letras

1. Completa a sequência com as 10 letras que vêm a seguir.

ABBCCCAB_______________________________________

1.1. Que padrão se repete na sequência? ______________________

1.2. Cria outra sequência com 10 letras e indica qual é o padrão.

Sequência:

PadrPadrão: _______________________________________

Nome: ____ Data: ___ / ___ / ___

Anexo 8 - Tarefa 5 – Figuras crescentes

1. Nesta sequência, cada figura tem mais quadradinhos do que a anterior.

Fig.1

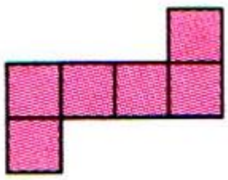


Fig. 2

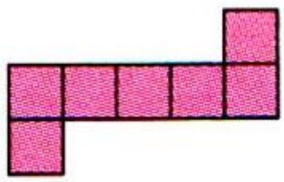


Fig. 3

1.1. Seguindo o mesmo padrão, quantos quadradinhos terá a figura 5 ?

____

1.2. Explica, por palavras tuas, como descobriste.

____

____

____

____

1.3. Para fazeres a fig. 10 de quantos quadrados precisas? Justifica.

____

____

____

Nome: ____________________________________ Data: ___ / ___ / ___

Anexo 9 - Tarefa 6 – Abelhas

1. Observa a sequência de abelhas.

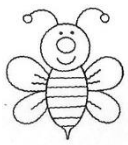


Fig. 1

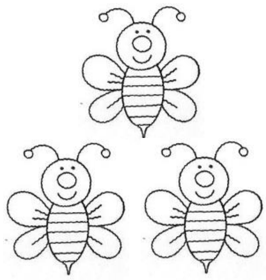


Fig. 2

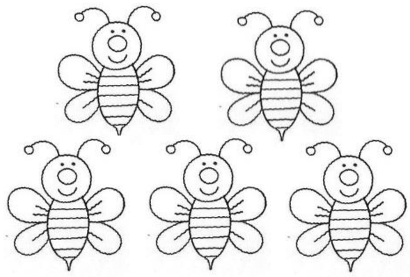


Fig. 3

1.1. Desenha as figuras 4 e 5.

1.2. És capaz de estabelecer alguma relação entre a forma como estão organizadas as abelhas e o número da respetiva figura?

Nome: ____ Data: ___ / ___ / ___

Anexo 10 - Tarefa 7 – Somas

1. Observa a sequência.

2 + 1   3 + 2   5 + 3   8 + 4   ________   _________

1.1. Continua a sequência com os dois termos seguintes.

1.2. Explica, por palavras tuas, como os descobriste.

____

____

____

____

____

____

____

1.3. Consegues escrever os dois termos seguintes da sequência?

________   _________

Nome: ____ Data: ___ / ___ / __

Anexo 11 - Tarefa 8 – Números a crescer

1. Os primeiros 5 termos desta sequência são:

4 5 7 10 14 ___ ___ ___ ___

1.1. Completa a sequência.

1.2. Explica, por palavras tuas, como descobriste os termos seguintes da sequência.

____

____

____

____

____

____

____

Nome: _______________________________________ Data: ___ / ___ / ___