

Agradecimentos

Aos meus pais e avós por terem dado a possibilidade de tirar o curso que sempre ambicionei.

Aos Eng.º Jorge Gomes e Eng.º António Tavares de Castro pela orientação e conselhos dados ao longo da realização desta dissertação.

Aos meus colegas de dissertação, Diogo Padilha, Nuno Carvalho e Gonçalo Lélé pela entreaajuda e companheirismo.

A todos os meus colegas de curso agradeço a disponibilidade e as frutuosas trocas de impressões sobre a dissertação.

Manifesto o meu agradecimento a todos os que contribuíram de forma directa ou indirectamente para o desenvolvimento deste trabalho.

Resumo

O principal objectivo deste trabalho foi o desenvolvimento de um programa de cálculo automático de lajes baseado no método dos elementos finitos.

Como introdução ao tema é efectuada uma análise da evolução das estruturas ao longo dos tempos, diferenciando os vários tipos de estruturas que existem. São explicitados os conceitos fundamentais da mecânica dos sólidos, bem como os vários tipos de análises estruturais, os tipos de elementos finitos mais utilizados, bem como a classificação dos diversos tipos de estruturas.

Devido à importância que o método dos elementos finitos tem na engenharia actual, é apresentada uma breve descrição da sua evolução ao longo dos tempos. Como abordagem mais abrangente são apresentados os conceitos gerais do método, evoluindo depois para uma descrição mais pormenorizada, aplicado aos elementos de laje adoptados no programa de cálculo desenvolvido. As lajes podem ser modeladas através da teoria das lajes finas ou espessas, sendo apresentados os fundamentos teóricos e simplificações que sustentam estas duas abordagens.

A validação do programa de cálculo elaborado nesta dissertação, é efectuada através de dois exemplos, um modelo simples e outro mais complexo onde se demonstram todas as potencialidades do programa. A validação é efectuada através da comparação dos resultados, obtidos pelo programa e por um programa de referência no cálculo estrutural, o SAP2000.

O desenvolvimento deste trabalho tem um objectivo mais abrangente de no futuro, este módulo, poder ser incluído num pacote de cálculo estrutural alargado a outro tipo de estruturas. Com este pressuposto, foi efectuada uma descrição pormenorizada da organização do programa e das suas capacidades e desenvolvido um manual de utilização.

Abstract

The final purpose of this work it was the development of a structural calculation program of slabs based in the finite element method.

As an introduction to the subject is made an analysis of structural development over time, differentiating the various types of structures. It was also explained the fundamental concepts of solid mechanics, as well as the various types of structural analysis, the types of finite element most commonly used and the classification of different types of structures.

Due to the importance that the finite element method has in engineering is present a brief description of its evolution over time. As more comprehensive approach are present the general concepts of the method, then evolving to a more detailed description, applied to the slab elements adopted in the calculation program developed. The slabs can be modeled by the theory of thin or thick slabs. The theory and the simplifications of these two approaches are present.

The validation of the calculation program developed in this work is carried out through two examples, a simple model and other more complex where they show all the potential benefits. The validation is performed by comparing the results obtained by the program and a referral program in structural calculation, the SAP2000.

The development of this work has a broader objective in the future, this module can be included in a package of structural calculations extended to other structures. With this assumption, there was made a detailed description of the program and their capabilities and developed a user's guide.

Palavras chave:

Cálculo automático de estruturas;

Cálculo matricial de estruturas;

Análise estrutural;

Elemento finito de laje;

Modelação numérica;

Método dos elementos finitos;

Keywords:

Automatic calculation of structures;

Matrix calculus of structures;

Structural analysis;

Finite element slab;

Numerical modeling;

Finite element method;

Índice

Capítulo 1	1
1. Introdução	1
1.1. Enquadramento do tema	1
1.2. Motivação para a escolha do tema	3
1.3. Objectivos.....	5
1.4. Organização da dissertação.....	6
Capítulo 2	7
2. Análise estrutural	7
2.1. Introdução	7
2.2. Análise estrutural	11
2.3. Tipo de estruturas	13
2.4. Teoria da Elasticidade	16
2.5. Conclusões.....	22
Capítulo 3	23
3. Método dos Elementos Finitos	23
3.1. Introdução	23
3.2. Metodologia de cálculo do MEF.....	29
3.2.1. Discretização da estrutura	31
3.2.2. Tipos de elementos finitos	32
3.2.3. Funções de forma ou de interpolação N_i	32
3.2.4. Deformações e relações de compatibilidade	36
3.2.5. Tensões e relações constitutivas.....	39
3.2.6. Matriz de rigidez elementar, principio dos trabalhos virtuais	39
3.3. Integração numérica	42
3.4. Aspectos de aplicação	45
3.4.1. Formulação do MEF em deslocamentos, compatibilidade e equilíbrio.....	45
3.4.2. Selecção do tipo de elemento.....	45
3.4.3. Compatibilidade entre elementos	47
3.4.4. Cálculo de tensões.....	47
3.5. Conclusões.....	49

Capítulo 4	51
4. Teoria das Lajes	51
4.1. Introdução	51
4.2. Modelo estrutural de lajes	54
4.3. Elementos finitos de Laje	55
4.4. Teoria das Lajes espessas	58
4.4.1. Referencial.....	58
4.4.2. Deslocamentos.....	58
4.4.3. Deformações generalizadas da laje.....	59
4.4.4. Modos de deformação com curvatura uniforme.....	60
4.4.5. Deformações	62
4.4.6. Tensões.....	62
4.4.7. Esforços na laje.....	64
4.4.8. Relações esforços-deformações.....	66
4.4.9. Relações entre as tensões e os esforços.....	68
4.4.10. Momentos principais	69
4.5. Elementos finitos de laje espessa	69
4.5.1. Vector dos deslocamentos nodais	70
4.5.2. Elementos isoparamétricos e funções de interpolação.....	71
4.5.3. Matriz de deformação.....	73
4.5.4. Matriz de rigidez.....	74
4.5.5. Condições de apoio	75
4.6. Conclusões.....	77
 Capítulo 5	 79
5. Exemplos de aplicação	79
5.1. Introdução	79
5.2. Exemplo da estrutura de validação do programa	80
5.2.1. Modelação da estrutura.....	80
5.2.2. Resultados dos deslocamentos	82
5.2.3. Resultados dos esforços.....	87
5.2.4. Resultados das tensões	92
5.3. Exemplo de uma laje maciça e aligeirada	93
5.3.1. Modelação da estrutura.....	93

5.3.2. Resultados dos deslocamentos	96
5.3.3. Resultados dos Momentos.....	99
5.3.4. Resultados das tensões	101
5.4. Conclusões.....	102
Capitulo 6	103
6. Conclusões finais	103
6.1. Síntese do trabalho	103
6.2. Perspectivas futuras.....	104
Anexo 1.....	105
A1. Estrutura do programa.....	105
Anexo 2.....	111
A2. Manual do utilizador	111
A2.1. Introdução.....	111
A2.2. Introdução de dados através do ficheiro de dados .DAT.....	113
A2.3. Ficheiro de resultados .out	125
A2.4. Ficheiro de resultados .des	128
A2.5. Ficheiro de resultados .esf	128
A2.6. Ficheiro de resultados .rec.....	130
6.3. Ficheiro de resultados .ten.....	130
6.4. Ficheiros para utilizar no programa GID	132
Referências.....	137
Bibliográficas	137
Internet	138

Índice de figuras

Capítulo 1

Figura 1.1 – Análise estrutural de uma escada [cypecad.multiplus.com, 2009].	2
Figura 1.2 – Discretização da estrutura de um edifício [arktec.com, 2009].	2
Figura 1.3 – Adaptação do MEF ao modelo de um osso [dec.fct.unl.pt, 2009].	3
Figura 1.4 – Programação em Fortran.	3
Figura 1.5 – Programa de cálculo estrutural [arktec.com, 2009].	4
Figura 1.6 – Representação dos deslocamentos de uma laje, no módulo gráfico GID.	5
Figura 1.7 – Representação dos deslocamentos de uma laje fungiforme através do SAP2000 v11.	5

Capítulo 2

Figura 2.1 - Panteon de Roma [Appleton, 2009].	8
Figura 2.2 - Aqueduto da Pont du Gard em Nimes [Appleton, 2009].	8
Figura 2.3 – Primeira construção em betão armado [Appleton, 2009].	9
Figura 2.4 – Ponte da Arrábida [Appleton, 2009].	10
Figura 2.5 – Análise dinâmica de um edifício [itcsoftware.com, 2009].	12
Figura 2.6 – Estrutura em barra.	13
Figura 2.7 – Estrutura treliçada [dec.fct.unl.pt, 2009].	13
Figura 2.8 – Estrutura composta por pórticos [dem.ist.utl.pt, 2009].	13
Figura 2.9 – Estrutura de placa com um carregamento uniformemente distribuído P.	14
Figura 2.10 – Estrutura de uma laje com um carregamento uniformemente distribuído P.	14
Figura 2.11 – Estrutura em cúpula.	15
Figura 2.12 – Maciço de encabeçamento de estacas.	15

Capítulo 3

Figura 3.1 – Teste de carregamento numa barra executado por Leonardo Da Vinci [Oliveira, 2008].	24
Figura 3.2 – Teste de tensões executado por Galileo [Oliveira, 2008].	24
Figura 3.3 – Aproximação de uma função por séries de Fourier [problemasteoremas.wordpress.com, 2009].	25
Figura 3.4 – Discretização de uma estrutura [cwbookstore.com.br, 2009].	27
Figura 3.5 – Discretização de uma ponte através de um programa de cálculo actual [finesoftware.eu, 2009].	28
Figura 3.6 – Exemplo da discretização de uma barragem e dos seus terrenos de fundação [pwp.net.ipl.pt, 2009].	31
Figura 3.7 - Exemplo da discretização de uma barragem e albufeira de fundação [pwp.net.ipl.pt, 2009].	31
Figura 3.8- Exemplo da discretização de uma barragem e dos seus terrenos de fundação [Oliveira, 2009].	31
Figura 3.9 – Exemplos de elementos finitos [Oliveira, 1996].	32
Figura 3.10 – Exemplos de funções de interpolação para o caso unidimensional [Júnior e outros, 2009].	33
Figura 3.11 – Representação gráfica das funções de interpolação [Júnior e outros, 2009].	34

Figura 3.12 – Exemplos de elementos com os seus eixos locais.....	35
Figura 3.13 – Representação gráfica do método de gauss [Oliveira e outros, 2005]......	42
Figura 3.14 – Representação dos pontos de gauss num elemento quadrangular.....	44
Figura 3.15 – Exemplos de elementos triangulares e quadriláteros de vários graus.	46
Figura 3.16 - Exemplos de elementos do 1º e do 2º grau.....	46
Figura 3.17 – Compatibilidade entre elementos [Lemos, 2005]......	47

Capítulo 4

Figura 4.1 – Construção do prolongamento da laje do Aeroporto da Madeira [weblog.com.pt, 2009].	52
Figura 4.2 – Sistema construtivo das lajes em madeira [Branco, 2002].	52
Figura 4.3 – Representação esquemática das condições de apoio de uma laje.....	54
Figura 4.4 – Representação de uma fibra A-B normal ao plano médio de uma laje de espessura t	56
Figura 4.5 – Comportamento da fibra A-B segundo a teoria das lajes finas e espessas.....	56
Figura 4.6 – Referencial cartesiano considerado na formulação da laje.	58
Figura 4.7 – Deformação de uma fibra quando lhe é aplicada uma rotação θ_1 e θ_2	59
Figura 4.8 – Representação da curvatura de flexão K_{11} de uma laje.	61
Figura 4.9 – Representação da curvatura de flexão K_{22} de uma laje.	61
Figura 4.10 – Representação da curvatura de torção K_{12} de uma laje.....	61
Figura 4.11 – Representação das tensões normais nas facetas com normal X_1 e X_2	63
Figura 4.12 – Representação das tensões de corte actuando na direcção horizontal.	63
Figura 4.13 – Representação das tensões de corte actuando na vertical.	64
Figura 4.14 – Representação dos momentos flectores M_{22} e M_{11}	65
Figura 4.15 – Representação dos momentos torsores M_{12} e M_{21}	65
Figura 4.16 – Representação dos esforços transversos V_{31} e V_{32}	66
Figura 4.17 – Referencial dos deslocamentos nodais.	70
Figura 4.18 – Transformação de coordenadas locais em coordenadas globais.....	71
Figura 4.19 – Referenciais locais para a colocação das condições de apoio.....	75
Figura 4.20 – Tabela com as várias condições de apoio.	76

Capítulo 5

Figura 5.1 – Representação da Laje utilizada na validação do programa (dimensões em metros). a) laje encastrada, b) laje apoiada.	80
Figura 5.2 – Modelação da Laje utilizada na validação do programa (dimensões em metros)..	81
Figura 5.3 – Comparação dos deslocamentos a meio vão da laje apoiada para uma carga concentrada a meio vão.....	82
Figura 5.4 – Comparações dos deslocamentos a meio vão da laje apoiada para uma carga uniformemente distribuída.....	83
Figura 5.5 – Comparações dos deslocamentos a meio vão da laje encastrada para uma carga concentrada.	84
Figura 5.6 – Comparações dos deslocamentos a meio vão da laje encastrada para uma carga uniformemente distribuída.....	85
Figura 5.7 – Deformação da laje encastrada representada no programa GID.	86
Figura 5.8 – Deformação da laje encastrada representada no programa SAP2000.....	86

Figura 5.9 - Comparações dos momentos no encastramento de uma laje encastrada para uma carga concentrada a meio vão.	87
Figura 5.10 - Comparações dos momentos no encastramento da laje encastrada para uma carga uniformemente distribuída.	88
Figura 5.11 - Comparações dos momentos a meio vão da laje encastrada com uma carga uniformemente distribuída.	89
Figura 5.12 – Comparações dos momentos a meio vão da laje simplesmente apoiada para uma carga uniformemente distribuída.	90
Figura 5.13 – Representação dos momentos M_{11} para a laje encastrada e para o carregamento uniforme através do GID.	91
Figura 5.14 – Representação dos momentos M_{11} para a laje encastrada e para o carregamento uniforme através do SAP2000.	91
Figura 5.15 – Campo de tensões na face superior da laje totalmente encastrada para a carga uniformemente distribuída (GID).	92
Figura 5.16 – Campo de tensões na face superior da laje totalmente encastrada para a carga uniformemente distribuída (SAP2000).	92
Figura 5.17 – Bloco da parte aligeirada do tipo “Ferca” (dimensões em metros).	93
Figura 5.18 – Estrutura da laje (dimensões em metros).	93
Figura 5.19 – Uniformização da secção da laje aligeirada	95
Figura 5.20 – Modelação da estrutura.	95
Figura 5.21 – Zonas dos cortes da laje.	96
Figura 5.22 – Comparação dos deslocamentos obtidos pelo programa e pelo SAP2000, ao longo do corte A (a) e B (b) para o carregamento do peso próprio.	97
Figura 5.23 – Campo de deslocamentos obtidos pelo programa de cálculo, através do GID (a) e pelo SAP2000 (b), para o carregamento do peso próprio (m).	98
Figura 5.24 – Comparação dos momentos obtidos pelo programa e pelo SAP2000, ao longo do corte A (a) e B (b) para o carregamento do peso próprio.	100
Figura 5.25 – Campo de tensões na face superior obtidos pelo programa de cálculo, (a) e pelo SAP2000 (b), para o carregamento do peso próprio.	101

Anexo 2

Figura A.2.1- Exemplo da estrutura utilizada neste manual. a) Estrutura da laje, b) Modelação da laje	112
Figura A.2.2– Duas primeiras linhas do ficheiro de dados.	113
Figura A.2.3– Bloco das coordenadas.	114
Figura A.2.4– Bloco de dados com a tabela de incidências.	114
Figura A.2.5– Bloco com os dados dos materiais.	115
Figura A.2.6– Bloco com os nós apoiados.	116
Figura A.2.7– Bloco com as características das secções.	116
Figura A.2.8– Bloco com os dados dos pontos de gauss.	116
Figura A.2.9 – Bloco com os dados das combinações de acções	117
Figura A.2.10 – Bloco com os dados referentes às acções.	117
Figura A.2.11 – Indicação dos parâmetros das forças concentradas e sua representação gráfica.	118
Figura A.2.12– Bloco com o parâmetros das forças de vão	119

Figura A.2.13 – Referencial com as direcções locais.....	119
Figura A.2.14 – Referencial das direcções globais.	119
Figura A.2.15 – Referencial com o número de cada lado do elemento.....	120
Figura A.2.16 – Indicação dos parâmetros da força de vão concentrada no elemento 12 e sua representação gráfica.	120
Figura A.2.17– Indicação dos parâmetros da força de vão uniformemente distribuída no elemento 13 e sua representação gráfica.....	121
Figura A.2.18 – Indicação dos parâmetros da força de vão uniformemente distribuída no elemento 14 e sua representação gráfica.....	121
Figura A.2.19 – Indicação dos parâmetros da força de vão trapezoidal no elemento 15 e sua representação gráfica.	122
Figura A.2.20- Indicação dos parâmetros da força de vão triangular no elemento 16 e sua representação gráfica.	122
Figura A.2.21 – Indicação dos parâmetros da força de vão trapezoidal parcial no elemento 17 e sua representação gráfica.....	123
Figura A.2.22 – Indicação dos parâmetros da força de vão triangular parcial no elemento 18 e sua representação gráfica.....	123
Figura A.2.23 – Indicação dos parâmetros da força de área no elemento 19 e sua representação gráfica.	124
Figura A.2.24 – Bloco com os parâmetros dos assentamentos de apoio.	124
Figura A.2.25 – Resumo dos dados introduzidos no programa, presente no ficheiro .out.	125
Figura A.2.26– Apresentação das coordenadas dos nós no ficheiro .out.....	125
Figura A.2.27 – Apresentação dos parâmetros dos elementos no ficheiro .out.	126
Figura A.2.28 – Apresentação dos parâmetros dos materiais no ficheiro .out.	126
Figura A.2.29 – Apresentação dos parâmetros das secções no ficheiro .out.	126
Figura A.2.30 – Apresentação dos nós apoiados no ficheiro .out.....	126
Figura A.2.31 – Apresentação dos parâmetros das acções no ficheiro .out.....	127
Figura A.2.32 – Apresentação dos parâmetros dos pontos de gauss no ficheiro .out.	127
Figura A.2.33 – Apresentação dos parâmetros das combinações de cações no ficheiro .out..	127
Figura A.2.34 – Apresentação dos deslocamentos no ficheiro de dados .des.....	128
Figura A.2.35– Apresentação dos esforços no ficheiro .esf.	129
Figura A.2.36– Apresentação das reacções no ficheiro .rec.	130
Figura A.2.37 – Apresentação das tensões ficheiro .ten.....	131
Figura A.2.38– Abrir um ficheiro .msh no programa GID.....	132
Figura A.2.39– Malha da estrutura exemplo, representada pelo programa GID.	133
Figura A.2.40– Botão para mudar o modo de visualização do GID.....	133
Figura A.2.41– Modo de abrir um ficheiro de resultados no GID.	134
Figura A.2.42– Modo de abrir um ficheiro de resultados no GID.	134
Figura A.2.43– Escolha da representação da deformada da estrutura.	134
Figura A.2.44– Visualização do campo de deslocamentos no GID.	135
Figura A.2.45– Visualização do campo de tensões σ_{xx} no GID.	135

Índice de tabelas

Capítulo 3

Tabela 3.1 Coordenadas e os pesos de gauss	44
--	----

Capítulo 4

Tabela 4.1 – Coordenadas locais de um elemento quadrilátero.	72
---	----

Capítulo 5

Tabela 5.1 – Comparações dos deslocamentos a meio vão da laje apoiada para uma carga concentrada a meio vão.....	82
Tabela 5.2 – Comparações dos deslocamentos a meio vão da laje apoiada para uma carga uniformemente distribuída.	83
Tabela 5.3 – Comparações dos deslocamentos a meio vão da laje encastrada com uma carga concentrada.	84
Tabela 5.4 – Comparações dos deslocamentos a meio vão da laje encastrada para uma carga concentrada a meio vão.....	85
Tabela 5.5 – Comparações dos momentos no encastramento de uma laje encastrada para uma carga concentrada a meio vão.	87
Tabela 5.6 – Comparações dos momentos no encastramento da laje encastrada para uma carga uniformemente distribuída.	88
Tabela 5.7 – Tabela com as comparações dos momentos a meio vão da laje encastrada com uma carga uniformemente distribuída.	89
Tabela 5.8 – Comparações dos momentos a meio vão da laje simplesmente apoiada para uma carga uniformemente distribuída.	90
Tabela 5.9 – Comparações dos deslocamentos máximos para o corte A.....	96
Tabela 5.10 – Comparações dos deslocamentos máximos para o corte B.....	96
Tabela 5.11 – Comparações dos momentos máximos negativo para o corte A.....	99
Tabela 5.12 – Comparações dos momentos máximos positivos para o corte A.	99
Tabela 5.13 – Comparações dos momentos máximos negativos para o corte B.	99
Tabela 5.14 – Comparações dos momentos máximos positivos para o corte B.....	99

Capítulo 1

1. Introdução

1.1. Enquadramento do tema

A concepção estrutural é uma das etapas fundamentais na realização de qualquer obra. Esta etapa consiste na escolha de um sistema estrutural adequado aos objectivos pretendidos e que consiga tirar o maior proveito dos materiais utilizados na sua execução.

Os elementos estruturais são dimensionados com base numa análise estrutural, de acordo com o comportamento dos materiais constituintes desses elementos.

Todas as teorias físicas e matemáticas resultantes dos métodos da engenharia estrutural como ciência são utilizados nesta análise tendo como objectivo a criação de um modelo analítico que traduza o comportamento do edifício.

Assim, um modelo analítico é utilizado para representar matematicamente a estrutura em análise. Este modelo inclui todas as teorias e hipóteses feitas para descrever o comportamento da estrutura para as diversas solicitações ao longo da sua vida útil.

Introdução

Estas hipóteses são baseadas em leis físicas de equilíbrio entre deslocamentos e deformações e as leis constitutivas dos materiais que compõem a estrutura.

O desenvolvimento de um modelo estrutural que simule o comportamento real das obras é das etapas mais importantes nas diversas fases do projecto (Figura 1.1). Esta tarefa pode ser bastante complexa, dependendo do tipo de estrutura e da sua importância. Em geral, a concepção de um modelo estrutural é feita através da representação do comportamento real da estrutura e com a adopção de uma série de hipóteses simplificativas do comportamento físico e de resultados experimentais e estatísticos. A estas hipóteses, estão inerentes a geometria dos elementos estruturais, as condições de suporte com o meio externo, comportamento dos materiais e as solicitações que actuam sobre a estrutura.

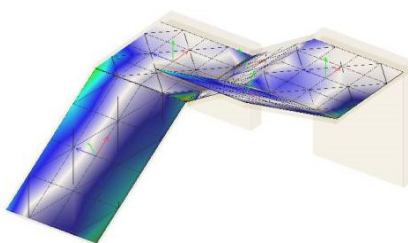


Figura 1.1 – Análise estrutural de uma escada [cypecad.multipius.com, 2009].

Ao longo dos últimos tempos, os projectistas têm procurado análises estruturais mais refinadas e possuem hoje o cálculo automático como uma potente ferramenta de dimensionamento. Através da evolução deste tipo de cálculo, foi sendo possível a introdução de um grande conjunto de opções estruturais e construtivas.

O desenvolvimento do cálculo automático permitiu a implementação do Método dos Elementos Finitos (MEF) já existente, possibilitando a análise estrutural de obras complexas recorrendo a metodologias mais adequadas ao comportamento real (Figura 1.2). Actualmente o MEF é a ferramenta de cálculo mais utilizada em todos os problemas de engenharia, tendo o seu campo de aplicação vindo a ser adaptado à generalidade das áreas científicas (Figura 1.3).

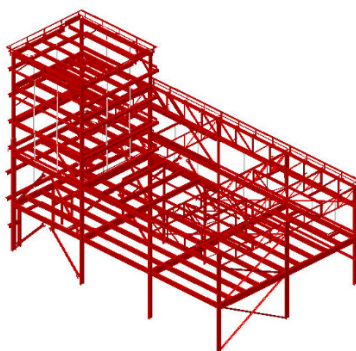


Figura 1.2 – Discretização da estrutura de um edifício [arktec.com, 2009].

Introdução

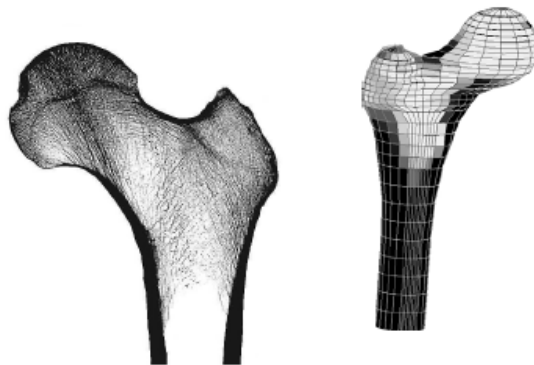


Figura 1.3 – Adaptação do MEF ao modelo de um osso [dec.fct.unl.pt, 2009].

1.2. Motivação para a escolha do tema

No início do desenvolvimento dos computadores, os programas de cálculo automático eram desenvolvidos pelos próprios utilizadores, sendo por isso bastante pessoais e de difícil utilização por outras pessoas (Figura 1.4). Devido ao grande desenvolvimento informático houve a necessidade de generalizar a utilização deste tipo de metodologias à maioria dos projectistas. Este facto originou a necessidade deste tipo de software ser desenvolvido por pessoas especializadas na criação de interfaces intuitivas e de fácil utilização. Assim os projectistas passaram cada vez mais a ser simples utilizadores de softwares de cálculo estrutural, fazendo a posterior análise dos resultados obtidos.

```
Arquivo  Editar  Procurar  Exibir  Executar  Opções  Ferramentas  Janela  Ajuda
x
1  program MEF_LAJE
2  include 'param.f'
3  character*45 cabecalho,nomeac
4  character*20 fich
5  character*24 fl
6  real*8 cd,
7  e
8  mat,psec,
9  econc,vfvao,vfarea,vass,
10 e
11 pg,
12 e
13 ke,kg,
14 e
15 Eg,Epp,
16 e
17 a,u,ue,detr,
18 e
19 e(5),t(5),tn(5),s(5),sn(5),rm(knapoio,kg1),
20 e
21 vcomb
22
23 integer
24 mmos,inos,
25 e
26 nelelem,ielen,moselem,icd,ngl,
27 e
28 nmat,imat,
29 e
30 napoio,iapoio,apoio,
31 e
32 nsec,isec,
33 e
34 ngele,nggfor,
35 e
36 nac,ipp,nfconc,ifconc,nfvao,
37 e
38 ifvao,itfvao,
39 e
40 nfareas,ifareas,
41 e
42 nass,iass,
43 e
44 l,gll,
45 e
46 se,nel,
47 e
48 ncomb,icomb,
49 e
50 cont(knos)
51
```

Figura 1.4 – Programação em Fortran.

Introdução

Este facto veio trazer um inconveniente, pois perante um problema de análise de estruturas e dispoendo de um software intuitivo, passou a ser perfeitamente acessível a um projectista a obtenção de resultados para todos os seus problemas. A falta de sensibilidade na análise crítica dos resultados ou desconhecimento das hipóteses do modelo matemático que está a ser utilizado pode ser extremamente perigoso, por isso, é necessário que a sua utilização seja prudente e baseada na experiência dos utilizadores (Figura 1.5).

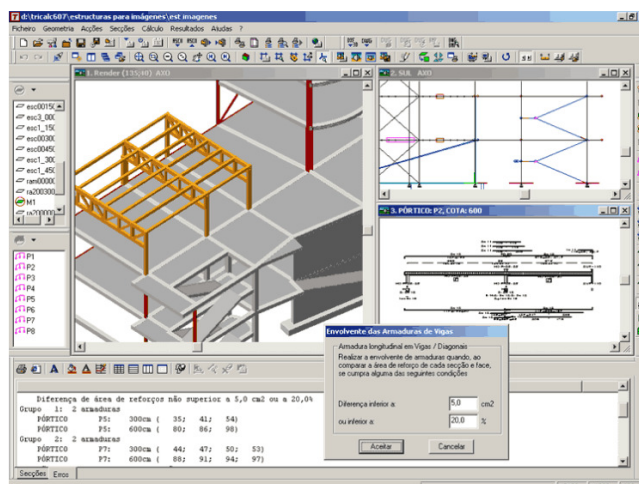


Figura 1.5 – Programa de cálculo estrutural [arktec.com, 2009].

O utilizador irá usar o software de acordo com os conhecimentos que recebeu ou então baseando-se em improvisações. A tentação para aceitar os resultados provenientes dos programas é grande, quaisquer que sejam esses resultados, uma vez que o utilizador considera que o software escolhido é de elevada qualidade. Os potenciais perigos de uma utilização nestas condições são a não percepção de eventuais erros na introdução dos dados, a ausência de correspondência entre o modelo seleccionado e a estrutura que está a ser analisada bem como o facto de serem desprezadas condicionantes importantes.

A principal motivação para a realização desta tese está relacionada com este assunto, neste trabalho conseguiu-se conciliar o gosto pela informática, com o aprofundamento dos conhecimentos sobre a teoria dos elementos finitos. Com este trabalho pretende-se adquirir experiência e solidificar conteúdos, a nível do método de cálculo de estruturas, baseado no método dos elementos finitos. Por outro lado, através da utilização de vários programas de cálculo estrutural, ganhar uma maior sensibilidade na análise dos resultados, aumentando, por isso a capacidade de detectar possíveis erros, quer de concepção quer da introdução de dados.

Introdução

1.3. Objectivos

Este trabalho tem como objectivo principal a elaboração de uma ferramenta de cálculo numérico, procedendo à análise estática de uma laje considerando um comportamento elástico e linear dos materiais. Esta ferramenta será baseada no método dos elementos finitos, e a modelação da estrutura será efectuada com o recurso à implementação de um elemento finito que represente as características do elemento estrutural a modelar. O elemento finito escolhido para esta análise foi um elemento quadrangular plano de quatro nós. Para modelar o comportamento estrutural das lajes, foram considerados três graus de liberdade em cada nó, (uma translação e duas rotações).

Os procedimentos de cálculo foram desenvolvidos na linguagem de programação Fortran e a representação gráfica do modelo estrutural e dos resultados através do módulo gráfico GID (figura 1.6).

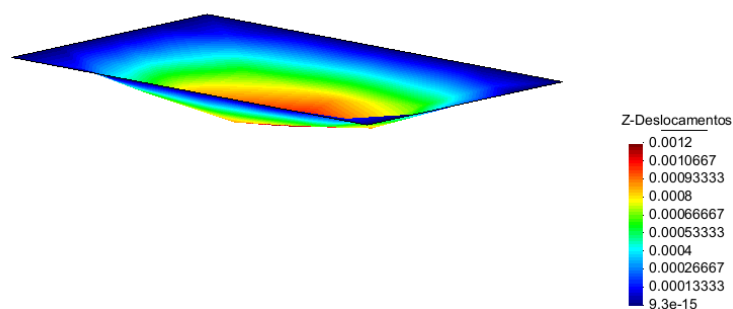


Figura 1.6 – Representação dos deslocamentos de uma laje, no módulo gráfico GID.

Os resultados do programa desenvolvido foram validados com base nos valores obtidos pelo programa de cálculo estrutural SAP2000 (Figura 1.7).

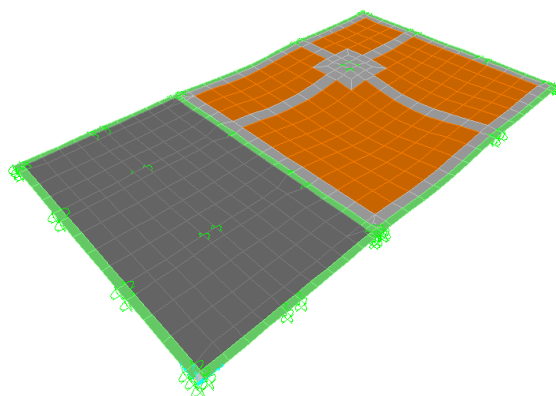


Figura 1.7 – Representação dos deslocamentos de uma laje fungiforme através do SAP2000 v11.

Este programa poderá auxiliar alunos e professores, principalmente dentro do ISEL, no estudo do método dos elementos finitos.

1.4. Organização da dissertação

A dissertação apresenta-se dividida em 6 capítulos e mais dois capítulos anexos.

No primeiro capítulo é feito o enquadramento da tese, explicada a motivação para a sua escrita, os seus objectivos bem como a síntese dos restantes capítulos.

No capítulo 2 é descrita a análise estrutural, onde se descrevem os vários tipos de análises, de estruturas e de elementos. É também abordada a teoria da elasticidade, onde se explicam os principais conceitos físicos, sobre tensões, deslocamentos etc, que vão ser utilizados ao longo da tese.

O capítulo 3 é dedicado à caracterização genérica do método dos elementos finitos, através da discretização da sua metodologia de cálculo, fazendo também uma breve referência histórica sobre a sua origem.

O capítulo 4 é uma pormenorização do capítulo anterior, onde se explica mais concretamente a teoria das lajes baseada no MEF.

No capítulo seguinte, o capítulo 5 contém a análise estrutural feita a duas lajes, uma laje de betão armado simplesmente apoiada e uma laje aligeirada composta por uma parte fungiforme e outra maciça. A análise estrutural foi feita através do programa de cálculo desenvolvido, contendo também as conclusões sobre estas duas análises.

Por último, no último capítulo, são apresentadas as conclusões do trabalho.

Capítulo 2

2. Análise estrutural

2.1. Introdução

As estruturas de betão sofreram uma grande evolução ao longo da história da humanidade, tendo a sua origem nas antigas civilizações onde o betão e as argamassas eram obtidos através da mistura de argila ou argila margosa, areia, cascalho e água, sendo utilizados principalmente em pavimentos, paredes e suas fundações.

A civilização Romana é a primeira a executar casas, templos, pontes e aquedutos, são disso exemplos, o Panteon de Roma (Figura 2.1) (com uma cúpula de 50m de diâmetro, de betão de inertes leves, realizado no ano 127 DC), o Aqueduto da Pont du Gard em Nimes (Figura 2.2) (realizado em 150 DC no qual se utilizou o betão no canal de água e no interior do forro das cantarias) e diversas pontes de alvenaria e betão ainda existentes em diversos países das quais se salientam em Portugal a Ponte de Vila Formosa na N369 e a Ponte de Trajano sobre o Rio Tâmega em Chaves [Appleton, 2009].

Análise estrutural



Figura 2.1 - Panteon de Roma [Appleton, 2009].



Figura 2.2 - Aqueduto da Pont du Gard em Nîmes [Appleton, 2009].

Existem também registos de que os Romanos fizeram tentativas para armarem o betão com cabos de bronze, experiências não bem sucedidas devido aos diferentes coeficientes de dilatação térmica do bronze e do betão.

Posteriormente e até ao século XVIII o betão tem uma utilização reduzida, quase exclusivamente limitada às fundações e ao interior de paredes de alvenaria.

É com o desenvolvimento da produção e estudo das propriedades do cimento (Smeaton em 1758, James Parker em 1796, Louis Vicat em 1818) que culminou com a aprovação da patente do cimento Portland (nome dado por a cor do cimento ser parecida com a da rocha Portland) apresentada por Joseph Aspdin em Leeds em 1824 que se vai dar um grande desenvolvimento na aplicação do betão nas construções. Em 1885 concebem-se os fornos rotativos (Frederick Ransome) que permitiriam baixar substancialmente o preço do cimento [Appleton, 2009].

Em relação ao betão armado, as primeiras referências que existem são de 1830, no entanto, o barco em fibrocimento realizado pelo francês Jean-Louis Lambot em 1848 é reconhecido como a obra mais antiga de betão armado ainda existente (Figura 2.3). O betão armado sofre depois uma evolução com Joseph Monier, através das suas patentes de 1849 para caixas (floreiras), casas e tubagens em 1867 e pontes em arco em 1873, Francois Coignet em 1852 e com William Wilkensen em 1954.

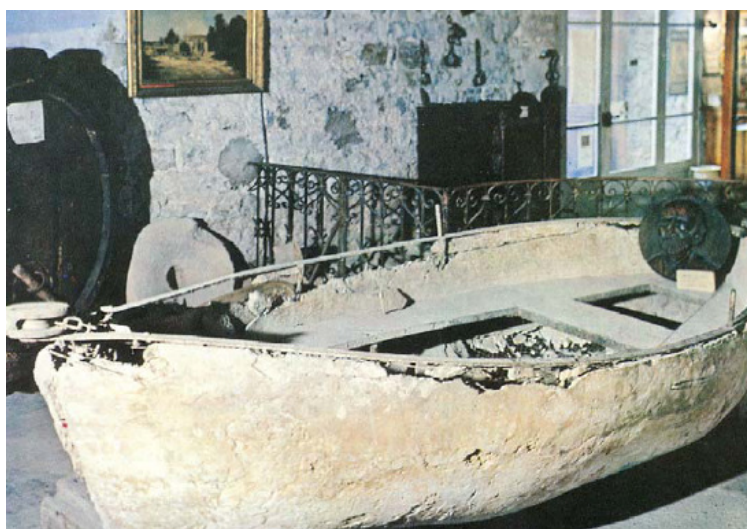


Figura 2.3 – Primeira construção em betão armado [Appleton, 2009].

No princípio do século XX, assiste-se a um desenvolvimento da utilização e compreensão do funcionamento e possibilidades do betão armado. Este desenvolvimento está associado à realização de numerosas patentes onde se indicam as bases de cálculo e as disposições de armaduras adoptadas para diversos elementos estruturais [Appleton, 2009].

Em 1911 são criadas em Portugal as Universidades de Lisboa e do Porto e em 1918 é aprovado o 1º Regulamento Português no domínio do betão armado intitulado de “Instruções Regulamentares para o Emprego do Beton Armado”, baseado nas normas francesas de 1906.

Análise estrutural

Nas posteriores décadas, deve-se salientar as construções do Suíço Maillart como a Ponte de Salginatobel (1930) e os seus estudos e obras sobre lajes fungiformes e do Francês Eugène Freyssinet como a Ponte Villeneuve-Sur-Lot com 96m de vão (1919), os Hangares de Orly com um vão de 90m (1921) e a Ponte de Plougastel com três arcos de 186m de vão (1930).

Em relação a Portugal, as principais obras em betão armado são executadas durante a primeira metade do século XX. Destacam-se o Canal do Tejo (1940), que envolveu a realização de túneis, pontes canal e tubagens de 2,5m de diâmetro, tendo sido utilizada a vibração mecânica pela primeira vez no nosso país, o viaduto Duarte Pacheco em Lisboa, com um desenvolvimento total de 505 m tendo o arco central um vão de 91,97 m, bem como a construção de edifícios onde se salientam os edifícios do IST. Deve no entanto referir-se que neste período era ainda usual realizar a estrutura dos edifícios com paredes de alvenaria e o betão armado era aplicado na estrutura dos pisos em alternativa a soluções de estruturas de madeira.

Em relação às pontes em betão armado, é de salientar as grandes pontes em arco de onde se destacam a Ponte Sando na Suécia com 264 m de corda (1943) e a Ponte da Arrábida com 270 m de corda (1964) (Figura 2.4).



Figura 2.4 – Ponte da Arrábida [Appleton, 2009].

No domínio das barragens inicia-se em Portugal um período de execução de grandes barragens em abóbada, como por exemplo a Barragem do Cabril no Rio Zêzere.

Durante a segunda metade do século XX, em 1958 é publicado o Regulamento de Segurança das Construções contra os Sismos que estabelece a diferenciação do risco sísmico no país quantificando de forma simplificada as respectivas solicitações. Este regulamento é praticamente revogado com a publicação em 1961 do Regulamento de Solicitação de Edifícios e Pontes [Appleton, 2009].

Análise estrutural

Posteriormente em 1967 é publicado o novo regulamento no domínio do betão armado, REBA o qual integra já a moderna filosofia de verificação da segurança em relação aos estados limites, que posteriormente foi melhorado com a introdução da regulamentação do pré-esforço, passando a chamar-se REBAP.

Actualmente os regulamentos que vão estar em vigor são os Eurocodigos, que pretendem fazer uma uniformização na regulamentação da construção de obras por toda a Europa.

2.2. Análise estrutural

Um dos aspectos fundamentais na análise de uma estrutura é a sua classificação quanto à geometria, modelo do material constituinte e acções aplicadas. O modo como o MEF é formulado e aplicado depende, em parte, das simplificações inerentes a cada tipo de problema. De seguida são referidos alguns dos aspectos que são necessários ter em consideração na fase que antecede a análise de uma estrutura.

Análise estática ou estática

Em relação às acções estáticas, elas podem ser classificadas em acções permanentes, variáveis ou acidentais. As acções permanentes são aquelas que assumem valores constantes, ou com pequena variação em torno do seu valor médio, durante toda a vida da estrutura, um exemplo deste tipo de acções são o peso próprio da estrutura. As acções variáveis são aquelas que assumem valores com variação significativa em torno do seu valor médio durante a vida da estrutura, como são o caso das sobrecargas. Por fim as acções acidentais são aquelas que só com muita fraca probabilidade assumem valores significativos durante a vida da estrutura e cuja quantificação apenas pode em geral ser feita por meio de valores nominais estrategicamente escolhidos, como são o caso de explosões e choques de veículos.

Para as acções dinâmicas sobre as estruturas, devem ser consideradas as forças de inércia associadas às acelerações a que cada um dos seus componentes fica sujeito (Figura 2.5).

Assim, é fundamental, que a análise de uma estrutura seja feita tendo em conta os efeitos dinâmicos. Contudo, em muitas situações é razoável considerar uma análise estática equivalente que permita determinar os efeitos de uma acção dinâmica a partir da aplicação de forças estáticas.

Análise estrutural

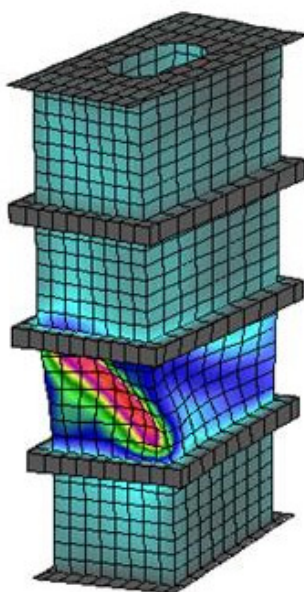


Figura 2.5 – Análise dinâmica de um edifício [itcsoftware.com, 2009].

Análise não linear ou linear

Quando se analisa o comportamento de uma estrutura sólida, é usual considerar que os deslocamentos provocados pelas acções exteriores são muito pequenos, quando comparados com as dimensões dos componentes da estrutura.

Assim, admite-se que não existe influência da modificação da geometria da estrutura e conseqüentemente na distribuição dos esforços e das tensões, porque todo o estudo é feito considerando que a geometria inicial da estrutura permanece indeformada. Se esta hipótese não for considerada, a análise é designada por não linear geométrica. É também habitual considerar uma relação linear entre as tensões e as deformações, tendo em conta o tipo de material constituinte da estrutura. Por outro lado, nos casos em que não é possível utilizar esta última simplificação é necessário recorrer a algoritmos específicos de análise não linear material [Azevedo, 2003].

2.3. Tipo de estruturas

As estruturas podem ser classificadas quanto à sua geometria como de reticuladas, laminares ou sólidas. Seguidamente, descreve-se de uma forma breve cada tipo de estrutura indicando o número e o tipo de incógnitas associadas ao modelo matemático mais utilizado, que são necessárias conhecer para resolver cada tipo de estruturas aplicando o MEF.

As estruturas reticuladas são constituídas por barras prismáticas, cujas dimensões transversais são muito menores do que o comprimento do respectivo eixo. Este tipo de estruturas ainda se subdivide em pórticos e treliças, conforme seja ou não considerada a compatibilidade de rotações nas extremidades de barras adjacentes.

- Barras 2D/3D

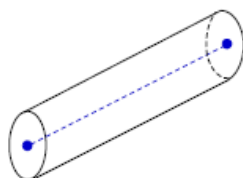


Figura 2.6 – Estrutura em barra.

- Treliças 2D/3D

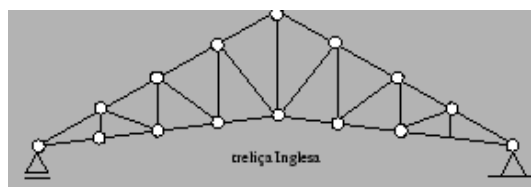


Figura 2.7 – Estrutura treliçada [dec.fct.unl.pt, 2009].

- Pórticos 2D/3D

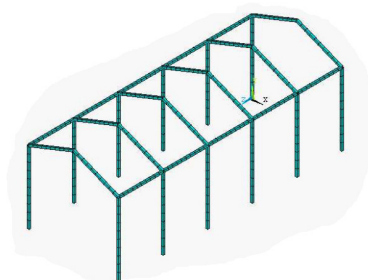


Figura 2.8 – Estrutura composta por pórticos [dem.ist.utl.pt, 2009].

Análise estrutural

Estas estruturas podem ser modeladas através de elementos barra 2D/3D com 3/6 graus de liberdade, duas translações e uma rotação para o caso plano e três translações e três rotações para o caso tridimensional

Em relação às estruturas laminares, são as que se desenvolvem para ambos os lados de uma superfície média, é por exemplo o caso de uma lâmina cuja espessura é muito inferior às restantes dimensões. No caso específico de a superfície média ser plana, a estrutura laminar pode ser classificada como parede ou laje, para o caso de a superfície da estrutura não ser plana a estrutura é classificada como casca ou membrana. Para explicar estes conceitos é necessário conhecer o significado dos termos folheto médio e plano médio. Folheto médio é a superfície média de uma peça laminar e plano médio é o folheto médio de uma peça laminar plana.

Um elemento placa é uma peça laminar plana sujeita a acções apenas no seu plano médio (Figura 2.9). Este elemento tem apenas dois graus de liberdade, duas translações.

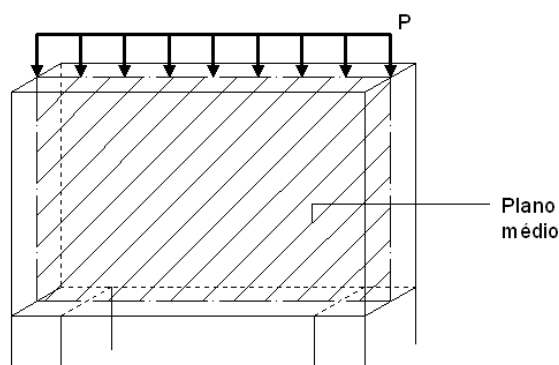


Figura 2.9 – Estrutura de placa com um carregamento uniformemente distribuído P.

Em relação às lajes, são peças laminares sujeitas a acções perpendiculares ao seu plano médio, tendo três graus de liberdade, duas rotações e uma translação (Figura 2.10).

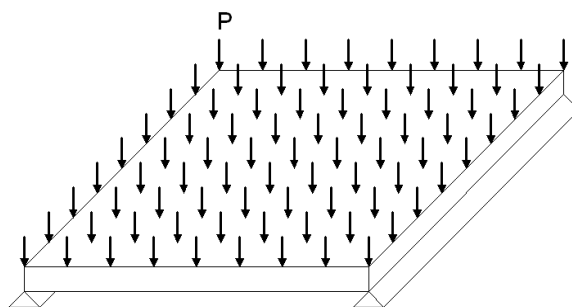


Figura 2.10 – Estrutura de uma laje com um carregamento uniformemente distribuído P.

Análise estrutural

O elemento casca é uma peça laminar não plana sujeita a acções em qualquer direcção (Figura 2.11).

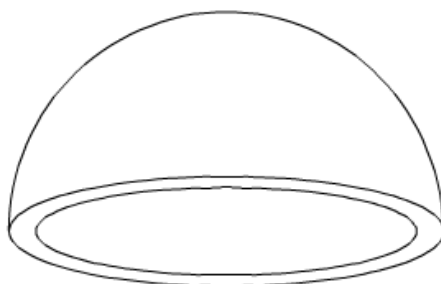


Figura 2.11 – Estrutura em cúpula.

Por último um elemento membrana é caracterizado por ser uma peça laminar não plana sujeita a acções segundo o seu folheto médio.

Estes elementos têm seis graus de liberdade, três translações e três rotações.

Finalmente as estruturas sólidas são peças com três graus de liberdade, três deslocamentos (Figura 2.12).

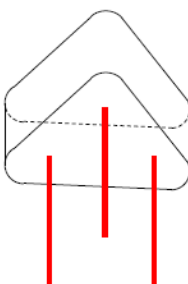


Figura 2.12 – Maciço de encabeçamento de estacas.

Este trabalho vai ser direccionado para o estudo de lajes, estruturas laminares planas sujeitas a acções perpendiculares ao seu plano médio.

2.4. Teoria da Elasticidade

Neste ponto apresentam-se as equações fundamentais da Teoria da Elasticidade Plana que serão utilizadas no decorrer deste trabalho. Devido ao facto do trabalho ser desenvolvido para um elemento de elasticidade plana optou-se por apresentar as equações relativas ao plano bidimensional. Apresentam-se simultaneamente, as expressões em notação indicial e em notação corrente (ou de Timoshenko).

Coordenadas

Considerando um referencial cartesiano, um ponto genérico P será definido:

$$\text{Em notação indicial, pelas coordenadas } \tilde{x}_i \text{ (i=1,2): } \mathbf{P} = \begin{Bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{Bmatrix} \quad (2.4.1)$$

$$\text{Em notação corrente, pelas coordenadas x e y: } \mathbf{P} = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \quad (2.4.2)$$

Vector dos deslocamentos

Em cada ponto da estrutura, o vector dos deslocamentos será expresso por:

$$\text{Componentes } u_i \text{ (i=1,2): } \underline{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (2.4.3)$$

$$\text{Componentes } u_x \text{ e } u_y: \underline{u} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} \quad (2.4.4)$$

Tensor das deformações

O tensor das deformações é um tensor de 2ª ordem simétrico.

Em notação indicial, de componentes ε_{ij} (i=1,2):

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{Bmatrix} \quad (2.4.5)$$

Sendo $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$, devido à simetria.

ε_{11} - extensão normal de uma fibra com a direcção x_1

ε_{22} - extensão normal de uma fibra com a direcção x_2

ε_{12} - extensão distorcional de uma fibra com a direcção x_1 $\left(\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \gamma_{12} \right)$

Análise estrutural

Em notação corrente, as componentes do tensor das deformações são:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{Bmatrix} \quad (2.4.6)$$

Sendo $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx}$, devido à simetria.

Tensor das deformações em forma vectorial

No desenvolvimento das formulações do MEF, é conveniente utilizar a notação vectorial para indicar o tensor das deformações, o que permite escrever expressões mais compactas. Dada a simetria do tensor, apenas se incluem três componentes, que se colocam sob a forma de um vector coluna:

$$\underline{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.4.7)$$

Sendo $\gamma_{12} = 2\varepsilon_{12}$

Tensor das tensões

O tensor das tensões é um tensor de 2ª ordem simétrico.

Em notação indicial, de componentes σ_{ij} ($i=1,2$):

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{Bmatrix} \quad (2.4.8)$$

Sendo $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, devido à simetria.

σ_{11} - tensão normal numa faceta perpendicular ao eixo x_1

σ_{22} - tensão normal numa faceta perpendicular ao eixo x_2

σ_{12} - tensão tangencial (segundo x_2) numa faceta perpendicular ao eixo x_1

σ_{21} - tensão tangencial (segundo x_1) numa faceta perpendicular ao eixo x_2

Análise estrutural

Em notação corrente, as componentes do tensor das tensões são:

$$\underline{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{Bmatrix} \quad (2.4.9)$$

Sendo $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$, devido à simetria.

Tensor das tensões em forma vectorial

No desenvolvimento das formulações do MEF, é conveniente utilizar a notação vectorial para indicar o tensor das tensões, o que permite escrever expressões mais compactas. Dada a simetria do tensor, apenas se incluem três componentes, que se colocam sob a forma de um vector coluna:

$$\underline{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.4.10)$$

Tensões numa faceta genérica

Dado o tensor das tensões σ_{ij} num ponto, as tensões numa faceta com uma orientação dada pelo vector normal unitário n_i , são expressas por um vector

$$\sigma_i^n = \sigma_{ij} n_j \quad (i, j = 1, 2) \quad (2.4.11)$$

Onde

$$\underline{\sigma}^n = \begin{Bmatrix} \sigma_1^n \\ \sigma_2^n \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{n} = \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{Bmatrix} \quad (2.4.12)$$

Devido à simetria do tensor das tensões, também se verifica:

$$\sigma_i^n = \sigma_{ij} n_j \quad (i, j = 1, 2) \quad (2.4.13)$$

Análise estrutural

A convenção de Einstein (somatório nos índices repetidos), que será utilizada em todas as expressões indiciais, implica:

$$\sigma_i = \sigma_{ij} n_j = \sigma_{i1} n_1 + \sigma_{i2} n_2 \quad (i, j = 1 \text{ a } 2) \quad (2.4.14)$$

Utilizando a notação corrente, o vector de tensão

$$\vec{\sigma} = \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \end{Bmatrix} \quad (2.4.15)$$

Numa faceta normal

$$\vec{n} = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} \quad (2.4.16)$$

É dado pelas expressões

$$\begin{cases} t_x = \sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y \\ t_y = \sigma_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y \end{cases} \quad (2.4.17)$$

Onde se tirou partido da igualdade $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$

Componentes normais e tangenciais da tensão numa faceta genérica

O vector de tensão numa faceta pode decompor-se em parcelas segundo as direcções normal e tangencial.

A componente normal (grandeza escalar) é dada pela projecção do vector de tensão, $\vec{\sigma}$, na direcção da normal:

$$\sigma_n = \sigma_i n_i = \sigma_{ij} n_j n_i = \sigma_{ij} n_i n_j \quad (i, j = 1, 2) \quad (2.4.18)$$

O vector de tensão tangencial, $\vec{\sigma}_t$, pode obter-se pelo teorema de Pitágoras:

Análise estrutural

$$\underline{\sigma}_t^n = \sqrt{\|\underline{\sigma}^n\|^2 - \sigma_n^2} \quad (2.4.19)$$

Transformação do tensor das tensões devido a uma rotação do sistema de eixos

Seja σ_{ij} o tensor das tensões num referencial Ox_1x_2 . Considerando um referencial $Ox'_1x'_2$, obtido por uma rotação de eixos de um ângulo α , o tensor das tensões $\sigma'_{\alpha\beta}$ no novo referencial, é dado por:

$$\sigma'_{\alpha\beta} = l_{\alpha i} \sigma_{ij} l_{j\beta} \quad (\alpha, \beta, i, j = 1, 2) \quad (2.4.20)$$

Sendo

$l_{\alpha i}$ - co-seno do ângulo entre os eixos X'_α e X_i

Relações deformações-deslocamentos, ou equações de compatibilidade

As deformações obtêm-se a partir dos deslocamentos pelas expressões:

$$\begin{aligned} -\varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (i, j = 1, 2) \\ -\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \text{e} \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (2.4.21)$$

Mais simplificadaamente:

$$\underline{\varepsilon} = \underline{L} \underline{u} \quad (2.4.22)$$

Onde L é a matriz que relaciona as deformações com os deslocamentos.

Equações de equilíbrio

Em cada ponto interior do domínio, as condições de equilíbrio permitem relacionar o tensor das tensões com as forças mássicas (por exemplo, devidas ao peso próprio) que actuam sobre o corpo.

Em notação indicial, as equações diferenciais de equilíbrio em cada ponto do interior do domínio são dadas por:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i = 0 \quad (i, j = 1, 2) \quad (2.4.23)$$

Onde X_i - vector de forças volúmicas.

- Por sua vez, em notação corrente:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + X_x = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + X_y = 0 \end{cases} \quad (2.4.24)$$

Equação de Hooke ou relação constitutiva

Esta equação relaciona o tensor das tensões com o tensor das deformações

Em notação tensorial, a lei de Hooke assume a forma geral:

$$\sigma_{ij} = E_{ijmn} \epsilon_{mn} \quad (i, j, m, n = 1, 2) \quad (2.4.25)$$

Sendo:

E_{ijmn} - tensor das constantes elasticas

Na forma vectorial:

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{\epsilon} \quad (2.4.26)$$

A matriz D vai variar conforme as propriedades do material da estrutura que se está a analisar.

2.5. Conclusões

As estruturas apresentaram uma grande evolução ao longo do tempo, evoluindo desde as pontes e edifícios da Civilização Romana, até às mais modernas construções da actualidade.

Em relação às construções Romanas elas eram projectadas com base na experiencia adquirida em construções semelhantes, por outro lado as construções actuais são projectadas recorrendo aos mais avançados programas de cálculo baseados nas mais diversas teorias de análise de estruturas.

Este capítulo pretende mostrar a evolução do dimensionamento das estruturas, classificando genericamente as estruturas construídas actualmente, bem como as diversas formas de análises estruturais, focando mais especificamente a análise plana, que é o tema principal desta dissertação.

Este capítulo é de extrema importância para assimilar os conceitos base da Teoria da Elasticidade Plana, que irão ser úteis para explicar a Teoria dos Elementos Finitos que irá ser explorada mais à frente.

Capítulo 3

3. Método dos Elementos Finitos

3.1. Introdução

As primeiras grandes obras de engenharia como as pirâmides do antigo Egito, as estradas, templos, pontes e fortificações da Grécia e Roma antigas, foram executadas de forma empírica, ou seja, recorrendo à experiência que cada civilização possuía na altura, sem recorrer a quaisquer critérios de análise estrutural.

De acordo com Timoshenko (1953), o primeiro a documentar modelos estruturais com a finalidade de avaliar o comportamento de estruturas, foi Leonardo da Vinci, no século XV [Oliveira, 2008].

Numa das suas notas, “Testando a resistência de barras de ferro de vários comprimentos”, Da Vinci descreve um modelo estrutural, onde faz a seguinte observação: “O objectivo deste teste é encontrar a carga que uma barra de ferro pode suportar”. O teste consistia em ir variando o comprimento da barra de ferro e o peso dos cestos de areia que estavam ligados a ela, até que as barras se partissem, sendo

Método dos Elementos Finitos

anotados os comprimentos da barra e o peso que os cestos continham [Oliveira, 2008] (Figura 3.1).

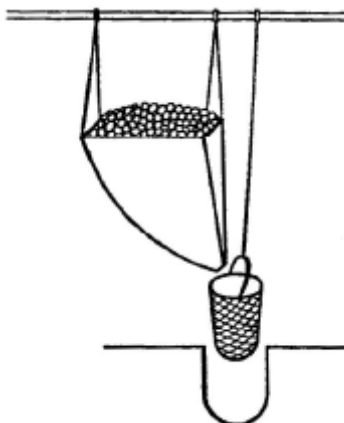


Figura 3.1 – Teste de carregamento numa barra executado por Leonardo Da Vinci [Oliveira, 2008].

Posteriormente quem também se dedicou a estes temas, foi Galileo Galilei (1564-1642). Galileo, além de ter introduzido o método empírico nas ciências, também idealizou, modelos estruturais e realizou alguns testes nesses modelos, submetendo esses modelos a vários carregamentos com o objectivo de estudar as tensões actuantes na estrutura [Oliveira, 2008].

Galileu, ao observar vários tipos de estruturas de diferentes materiais, concluiu por exemplo, que a resistência de uma barra é proporcional à sua área de secção transversal (Figura 3.2). Outras das observações que Galileu documentou foi que estruturas geometricamente similares vão ficando cada vez menos resistentes quanto maior forem os seus comprimentos. [Oliveira, 2008].



Figura 3.2 – Teste de tensões executado por Galileu [Oliveira, 2008].

Antes do desenvolvimento dos computadores, a análise estrutural em meios contínuos (paredes, lajes, cascas e sólidos) era efectuada pela resolução directa dos sistemas de equações de derivadas parciais que traduzissem o fenómeno em estudo,

Método dos Elementos Finitos

tendo em consideração as necessárias condições de fronteira. Para facilitar a aplicação desta técnica a problemas não elementares, era comum recorrer a séries de Fourier (Figura 3.3).

Devido à sua complexidade, estes procedimentos só eram aplicáveis a meios contínuos homogêneos e de geometria simples. Para tentar ultrapassar algumas destas limitações, era frequente a substituição de derivadas exactas por derivadas aproximadas, calculadas com base em grelhas de pontos. Posteriormente, esta técnica deu origem ao método das diferenças finitas, que apresentava como grande inconveniente o facto de requerer a resolução de grandes sistemas de equações lineares.

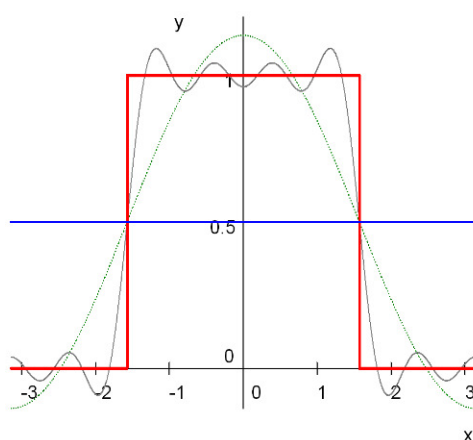


Figura 3.3 – Aproximação de uma função por séries de Fourier [problemasteoremas.wordpress.com, 2009].

Para evitar este problema, foram apresentados vários métodos de relaxação baseados na sucessiva diminuição de um conjunto de resíduos. Devido à grande demora no dimensionamento de estruturas baseadas nestas teorias, recorria-se muitas vezes à substituição do problema real por outro semelhante, de modo ser possível poder recorrer a resultados publicados em tabelas ou ábacos.

Com o passar dos tempos, e com a evolução dos meios informáticos e a banalização do recurso ao computador, o dimensionamento de estruturas, passou a ser efectuado através de computadores, tendo por base alguns métodos numéricos como o Método dos Elementos Finitos. Com este desenvolvimento passou a ser prática corrente a análise de estruturas de geometria arbitrária, constituídas por múltiplos materiais e sujeitas a qualquer tipo de carregamento. Com este desenvolvimento os outros métodos atrás referidos deixaram praticamente de ser utilizados.

O método dos elementos finitos (FEM- Finite Element Method) foi criado inicialmente por Walter Ritz (1878-1909) em 1909, para determinar a solução

Método dos Elementos Finitos

aproximada de problemas de mecânica dos sólidos deformáveis, através de funções conhecidas.

Esta formulação permitiu resolver os problemas da teoria da elasticidade, superando as dificuldades e problemas inerentes aos métodos numéricos [Campos, 2006].

Em 1943, Richard Courant (1888-1972) melhorou o método de Ritz, com a introdução de funções lineares especiais definidas sobre regiões triangulares, e também com a possibilidade de resolver problemas envolvendo esforços de torção [Campos, 2006].

Por volta da década de 60, Ray William Clough Jr, propôs um novo FEM, com muitas semelhanças ao método elaborado por Ritz e posteriormente melhorado por Courant. Foi também Clough, que introduziu pela primeira vez o termo, elemento finito, no artigo “The finite element method in plane stress analysis”. Nesta altura os elementos mais utilizados eram os triangulares e os tetraédricos, passando depois, a ser mais comum a utilização de elementos quadriláteros e hexaedros [Campos, 2006].

A ideia básica deste método consiste numa técnica de obter soluções aproximadas de valores de fronteira, reduzindo o problema a um número finito de regiões, ou elementos finitos, conectados entre si através de pontos nodais, que normalmente correspondem aos vértices dos elementos, aos pontos médios do elemento ou aos pontos médios de cada lado do elemento. A escolha do número de elementos e do número de pontos nodais depende do grau de precisão pretendido. Um maior número de elementos de pequenas dimensões, isto é uma discretização mais fina, conduz a uma solução numérica mais próxima da solução exacta (Figura 3.4). No interior de cada região admite-se uma aproximação das variáveis do problema por funções relativamente simples, como por exemplo funções polinomiais de tal forma que as incógnitas do problema em qualquer ponto do elemento, possam ser definidas em função das mesmas incógnitas mas nos pontos nodais do elemento. Assim, o problema teórico, envolvendo um meio contínuo, é transformado através do método numérico num problema discreto, em que a solução aproximada para todo o domínio é definida por um número finito de parâmetros, que correspondem aos valores das variáveis nos pontos nodais. Por fim, com a soma de todas as contribuições dos diversos elementos, chega-se a um sistema de equações, cuja solução permite conhecer os valores das incógnitas nos pontos nodais, ou seja a “soma” das respostas de todos os elementos finitos do elemento representam a resposta total do problema em análise [Lemos, 2005].

Método dos Elementos Finitos

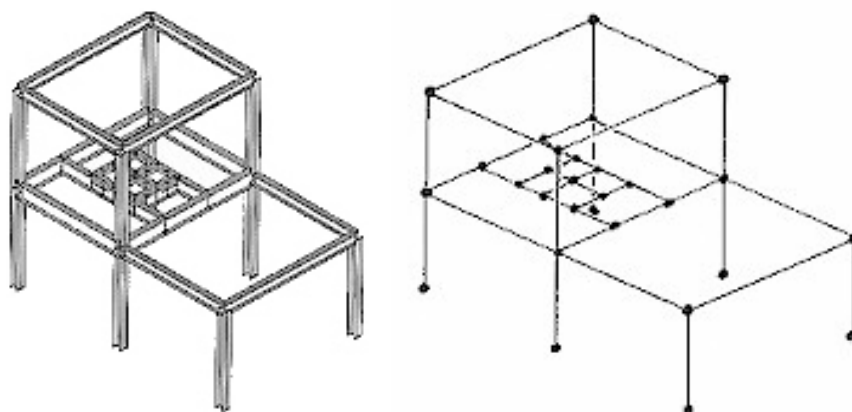


Figura 3.4 – Discretização de uma estrutura [cwbookstore.com.br, 2009].

O FEM de Clough, foi desenvolvido como um método de simulação baseado em computação para análise de estruturas aeroespaciais, mas rapidamente, passou a ser utilizado para a simulação de problemas não estruturais em fluidos, termodinâmica e electromagnetismo.

Actualmente o FEM tem uma larga aplicação em vários tipos de problemas de engenharia estrutural, como são os casos de:

- Problemas de Teoria da Elasticidade, onde as variáveis são os campos de deslocamentos, deformações e tensões, relacionadas pelas equações de equilíbrio, deformações-deslocamentos e elasticidade. As equações de equilíbrio do sistema discreto podem ser obtidas, por exemplo, por aplicação do princípio dos trabalhos virtuais.

- Problemas de condução de calor, em que a variável fundamental é a temperatura. Estes modelos permitem obter uma distribuição de temperaturas no interior de uma estrutura, por exemplo, tendo em vista a acção térmica a considerar numa análise do estado de tensão.

- Problemas de escoamentos em meios porosos, tais como solos ou maciços rochosos onde a variável fundamental das soluções numéricas é, em regra, o potencial hidráulico. Em relação às condições de fronteira, elas correspondem à imposição de pressões hidráulicas ou de caudais.

Todos estes problemas podem ser analisados tanto em separado como em conjunto, como são os casos de modelos hidro-mecânicos, que estudam a interacção entre o escoamento de um fluido num meio poroso e os estados de tensão e deformação [Lemos, 2005].

Método dos Elementos Finitos

Os modelos numéricos de aplicação mais corrente através do FEM baseiam-se na hipótese de linearidade ou do comportamento linear. No caso de problemas mecânicos, esta hipótese implica:

- Linearidade do material, traduzida pela lei de Hooke, que relaciona as tensões e deformações.
- Linearidade geométrica, que corresponde à hipótese de pequenos deslocamentos e deformações.

Esta hipótese do comportamento linear permite a obtenção directa das soluções numéricas pelo FEM através da solução de um sistema de equações lineares. Por outro lado, no caso do comportamento não-linear, para materiais elasto-plásticos ou estruturas com grandes deformações, as soluções numéricas são obtidas de modo iterativo.

A grande quantidade de cálculos que este método requer, implica a utilização de um computador. Este facto ajuda a explicar que o grande desenvolvimento do FEM, tenha ocorrido com o desenvolvimento e generalização do uso dos computadores nos centros de investigação.

Com a massificação dos microprocessadores ocorrido no final da década de 80 e na década de 90, o FEM chega finalmente às mãos da generalidade dos projectistas de estruturas (Figura 3.5).

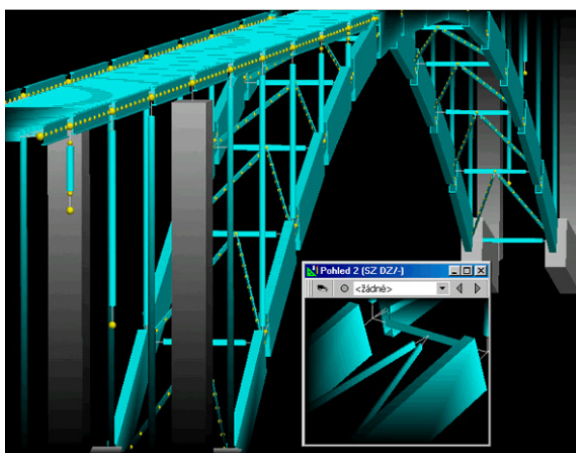


Figura 3.5 – Discretização de uma ponte através de um programa de cálculo actual [finesoftware.eu, 2009].

3.2. Metodologia de cálculo do MEF

Neste ponto é apresentada a metodologia de cálculo usada para a resolução de problemas utilizando o método dos elementos finitos.

Nesta metodologia são introduzidas várias aproximações, como a aproximação do campo de deslocamentos no interior de cada elemento finito por intermédio da escolha de funções de forma ou funções de interpolação. Verifica-se, por exemplo, que nem sempre é fácil de comprovar que as funções de forma escolhidas satisfazem o requisito da continuidade de deslocamentos entre elementos vizinhos. Além disso, as condições de compatibilidade podem ser violadas ao longo das fronteiras (no interior dos elementos são satisfeitas devido à representação unívoca dos deslocamentos por uma função contínua).

A modelação das acções exteriores é materializada através de forças concentradas nos pontos nodais, esta aproximação apenas vai garantir o equilíbrio de forças na globalidade da estrutura.

A escolha da forma do elemento e das funções de interpolação para casos específicos deixa muito espaço para a experiência, intuição e talento dos engenheiros, pelo que o grau de aproximação que pode ser atingido depende também destes factores.

A metodologia que é apresentada neste trabalho é baseada no método dos deslocamentos conhecida também como a formulação em deslocamentos do Método dos Elementos Finitos.

1. O problema em análise é separado por linhas ou superfícies imaginárias num número discreto de elementos finitos (discretização);
2. Admite-se que os elementos se encontram ligados num número discreto de pontos nodais (nós) situados na sua fronteira. Os deslocamentos destes pontos nodais (graus de liberdade de cada ponto nodal) serão as principais incógnitas a determinar, tal como nos problemas discretos de análise estrutural. Em casos particulares em que se adoptem simplificações como as de viga, de laje ou de casca delgada, os pontos nodais não representam verdadeiros pontos mas sim secções pelo que podem ter graus de liberdade de rotação (deslocamentos generalizados);

Método dos Elementos Finitos

3. Escolhe-se um conjunto de funções de interpolação ou funções de forma N_i , que definem univocamente, de forma aproximada, o campo de deslocamentos em cada elemento a partir do valor dos deslocamentos dos pontos nodais u_m^{ei} , dando assim origem à equação que traduz a aproximação fundamental do Método dos Elementos Finitos.

$$u_m = N_i u_m^{ei} \quad (3.2.1)$$

4. Partindo das relações deformações-deslocamentos pode-se verificar que estas funções N_i permitem também determinar univocamente e de forma aproximada o estado de deformação em qualquer ponto de um elemento finito a partir do valor dos deslocamentos dos pontos nodais.

5. Conhecidas as leis constitutivas (2.4.26) do material e as extensões, fica também determinado o estado de tensão em todos os pontos do elemento, incluindo na sua fronteira.

6. Da equação de equilíbrio (2.4.23) obtida do princípio dos trabalhos virtuais aplicado a um elemento finito determina-se uma equação do tipo:

$$K^e u^e = F^e \quad (3.2.2)$$

Em que K^e é a matriz de rigidez elementar, u^e corresponde aos deslocamentos nodais e F^e corresponde às forças nodais equivalentes às solicitações aplicadas no elemento.

7. Extrapolando para toda a estrutura verifica-se que é possível obter a equação de equilíbrio global na forma:

$$K^g u^g = F^g \quad (3.2.3)$$

Em que K^g é a matriz de rigidez global e F^g o vector global das forças nodais equivalentes. A matriz K^g e o vector F^g obtém-se por sobreposição (assemblagem) das matrizes e vectores elementares, respectivamente.

3.2.1. Discretização da estrutura

A discretização do domínio é uma etapa muito importante na utilização deste método, pois pode determinar a qualidade final dos resultados, uma má discretização compromete o resultado final, gerando erros significativos. De seguida são apresentados alguns exemplos de discretizações de estruturas.

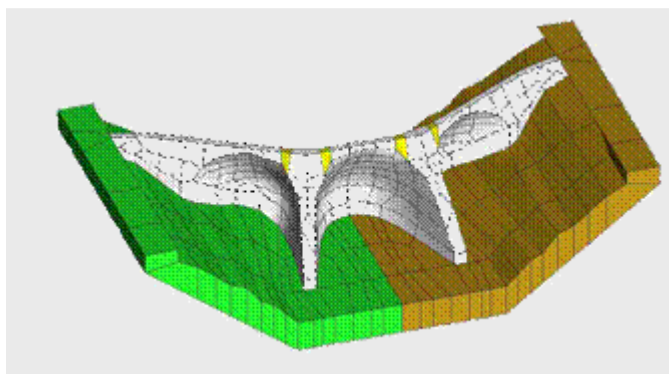


Figura 3.6 – Exemplo da discretização de uma barragem e dos seus terrenos de fundação [pwp.net.ipl.pt, 2009].

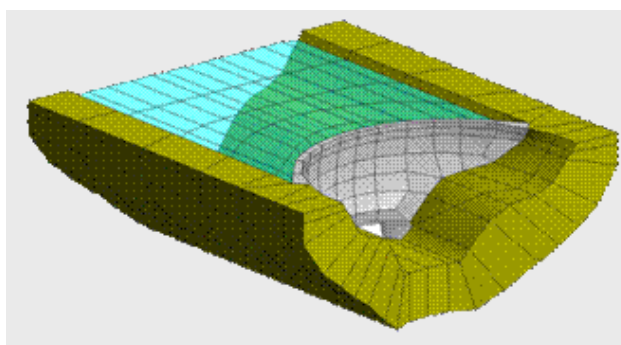


Figura 3.7 - Exemplo da discretização de uma barragem e albufeira de fundação [pwp.net.ipl.pt, 2009].

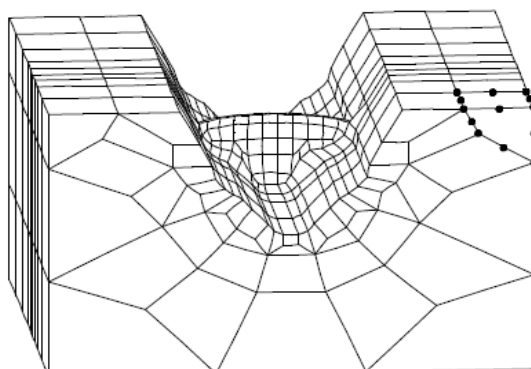


Figura 3.8- Exemplo da discretização de uma barragem e dos seus terrenos de fundação [Oliveira, 2009].

3.2.2. Tipos de elementos finitos

Como já foi referido anteriormente, os elementos finitos actualmente mais utilizados são os quadriláteros e os hexaedros. De seguida são apresentados vários tipos de elementos finitos.

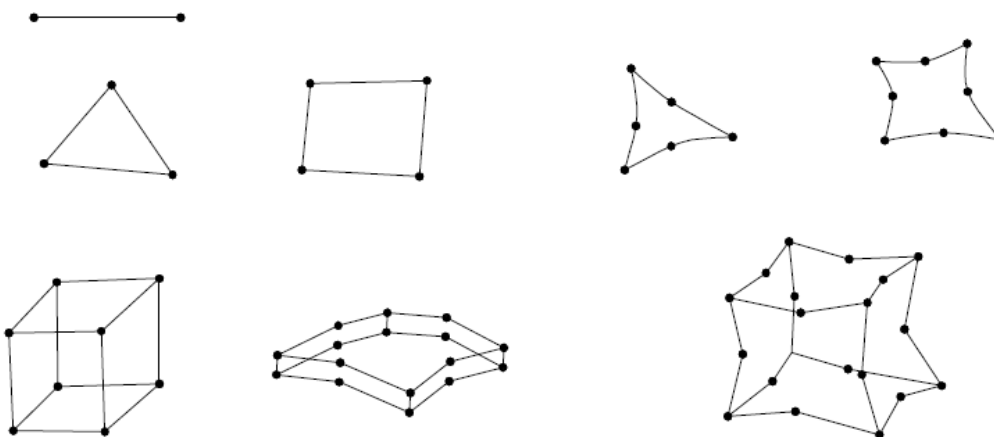


Figura 3.9 – Exemplos de elementos finitos [Oliveira, 1996].

3.2.3. Funções de forma ou de interpolação N_i

O método dos elementos finitos baseia-se na solução de problemas de valores de fronteira através da aproximação da solução teórica, de andamento geralmente muito complexo no domínio de estudo, por uma solução numérica formada a partir de funções simples nos diversos elementos. No interior de cada elemento, a solução numérica adopta para as variáveis (por exemplo, os deslocamentos) um andamento dado por funções elementares (por exemplo do tipo polinomial). Esta hipótese é admissível desde que a dimensão do elemento seja relativamente pequena.

Para que as funções de interpolação N_i , tenham sempre a mesma forma, qualquer que seja o elemento elas vão ser escritas em função das coordenadas locais y_n que variam entre -1 e 1. Estas funções são definidas de maneira a que seja possível obter através da equação $u_m = N_i u_m^{ei}$ os deslocamentos em cada ponto do elemento a partir do valor das coordenadas locais y_n do ponto. Estas coordenadas locais medem-se num sistema de eixos local não ortonormado.

As coordenadas locais relacionam-se com as coordenadas ou globais através da matriz jacobiana, que será explicada mais adiante.

As funções de interpolação podem ser determinadas através de funções de interpolação de Lagrange.

Método dos Elementos Finitos

Para o caso unidimensional, as funções de forma são dadas pelo polinómio de Lagrange e são em função do número de graus de liberdade a serem interpolados. Cada grau de liberdade de um nó tem associado a ele uma função de interpolação que pode ser calculada através de:

$$N_i = \frac{(x_1 - x)(x_2 - x) \dots (x_{i-1} - x)(x_{i+1} - x) \dots (x_n - x)}{(x_1 - x_i)(x_2 - x_i) \dots (x_{i-1} - x_i)(x_{i+1} - x_i) \dots (x_n - x_i)} \quad (3.2.4)$$

Este tipo de funções possui características especiais, tais como:

- Todas as funções N_i são polinómios do mesmo grau;
- Para qualquer função de interpolação N_i , $N_i=1$ quando $x=x_i$ e $N_i=0$ quando $x=x_j$ onde $i \neq j$;
- O somatório de todas as funções de interpolação é igual à unidade.

$$\sum_{i=1}^n N_i = 1 \quad (3.2.5)$$

Exemplos de funções de interpolação para o caso unidimensional:

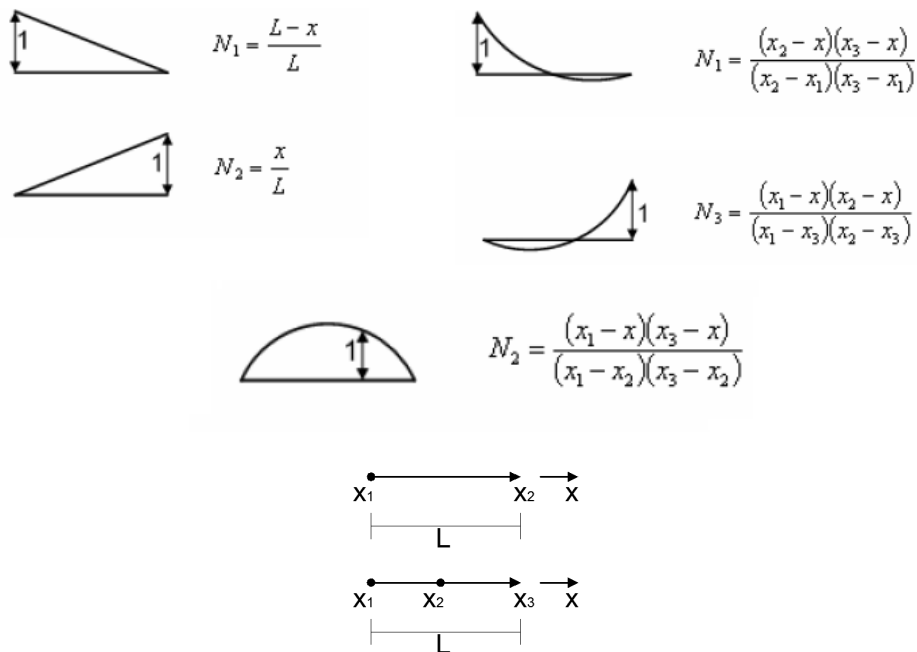


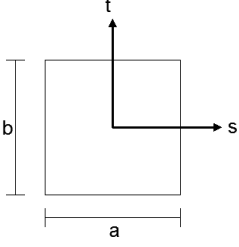
Figura 3.10 – Exemplos de funções de interpolação para o caso unidimensional [Júnior e outros, 2009].

Método dos Elementos Finitos

Para o caso bidimensional as funções devem ser interpoladas dentro de uma região rectangular. Estas funções podem ser obtidas considerando-se o produto das funções de Lagrange. Para o caso em que a função é bilinear.

$$\phi = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy \quad (3.2.6)$$

Assim, as funções de interpolação são dadas por:



$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{(a-x)(b-y)}{4ab} & N_2 &= \frac{(a+x)(b-y)}{4ab} \\ N_3 &= \frac{(a+x)(b+y)}{4ab} & N_4 &= \frac{(a-x)(b+y)}{4ab} \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

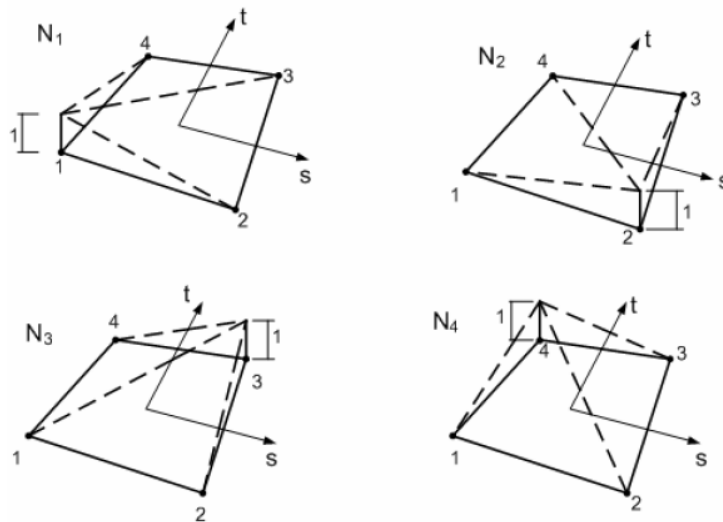


Figura 3.11 – Representação gráfica das funções de interpolação [Júnior e outros, 2009].

Estes elementos são chamados de bilinear, mas também existem os biquadráticos, bicúbicos, etc. Por exemplo os biquadrados possuem nove nós, distribuídos nos vértices, no meio das arestas e no centro do elemento.

Método dos Elementos Finitos

Matriz Jacobiana

Em cada ponto P dum elemento finito pode-se definir uma matriz J denominada matriz jacobiana que relaciona os sistemas de coordenadas globais e locais (dx_m com dy_n):

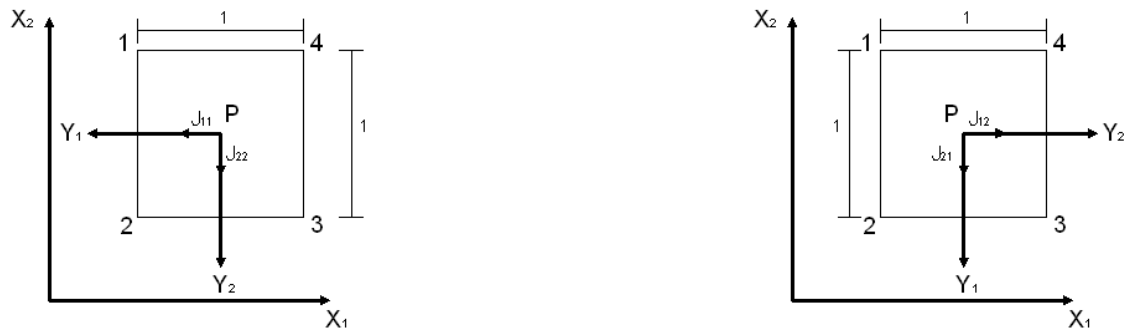


Figura 3.12 – Exemplos de elementos com os seus eixos locais.

$$\begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{bmatrix}}_J \begin{bmatrix} dy_1 \\ dy_2 \end{bmatrix} \quad (3.2.8)$$

direcção do eixo local y_1 (em P)
direcção do eixo local y_2 (em P)

Exemplos de matrizes jacobianas no ponto P nos elementos finitos representados acima.

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} \underbrace{-0,5}_{\text{dir } y_1} & \underbrace{0}_{\text{dir } y_2} \\ \underbrace{0}_{\text{dir } y_1} & \underbrace{-0,5}_{\text{dir } y_2} \end{bmatrix} \quad \underline{J} = \begin{bmatrix} \underbrace{0}_{\text{dir } y_1} & \underbrace{0,5}_{\text{dir } y_2} \\ \underbrace{-0,5}_{\text{dir } y_1} & \underbrace{0}_{\text{dir } y_2} \end{bmatrix} \quad (3.2.9)$$

3.2.4. Deformações e relações de compatibilidade

As relações deformações-deslocamentos, num ponto são dadas pela seguinte expressão:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (i, j = 1, 2) \quad (3.2.10)$$

Em estados planos, (dois deslocamentos por ponto), a anterior equação pode ser escrita na forma matricial como:

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix}}_{\underline{L}} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (3.2.11)$$

Sendo \underline{L} um operador diferencial

Assim podemos escrever:

$$\underline{\varepsilon} = \underline{L}\underline{u} \quad (3.2.12)$$

Sendo os deslocamentos dados pela expressão:

$$\underline{u} = \underline{N}\underline{u}^e \quad (3.2.13)$$

Vem que:

$$\underline{\varepsilon} = \underbrace{\underline{L}\underline{N}}_{\underline{B}}\underline{u}^e \quad (3.2.14)$$

Método dos Elementos Finitos

Em que B é uma matriz cujos termos correspondem às derivadas das funções de interpolação N_i em ordem às coordenadas gerais X_m , para o caso específico de um elemento de placa, a equação anterior toma a seguinte forma:

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial X_1} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial X_1} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial X_1} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial X_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial X_2} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial X_2} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial X_2} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial X_2} \\ \frac{\partial N_1}{\partial X_2} & \frac{\partial N_1}{\partial X_1} & \frac{\partial N_2}{\partial X_2} & \frac{\partial N_2}{\partial X_1} & \frac{\partial N_3}{\partial X_2} & \frac{\partial N_3}{\partial X_1} & \frac{\partial N_4}{\partial X_2} & \frac{\partial N_4}{\partial X_1} \end{bmatrix}}_B \begin{Bmatrix} u_1^{e1} \\ u_2^{e1} \\ u_1^{e2} \\ u_2^{e2} \\ u_1^{e3} \\ u_2^{e3} \\ u_1^{e4} \\ u_2^{e4} \end{Bmatrix} \quad (3.2.15)$$

Com se pode constatar a partir da equação anterior, para determinar a matriz B num dado ponto de um elemento finito é necessário avaliar as derivadas das funções de interpolação em ordem às coordenadas gerais x_i . Como as funções de interpolação N_i são geralmente definidas em coordenadas locais y_i , a avaliação das derivadas de N_i em ordem a x_i , $\partial N_i / \partial X_m$, deve ser efectuada tendo em conta que, para o caso bidimensional por exemplo, $N_i = N_i(y_1, y_2)$ e, portanto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_i}{\partial x_1} &= \frac{\partial N_i}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial N_i}{\partial y_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x_2} &= \frac{\partial N_i}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_2} + \frac{\partial N_i}{\partial y_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

Ou de forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x_1} & \frac{\partial N_i}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial y_1} & \frac{\partial N_i}{\partial y_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad (3.2.17)$$

Similarmente podemos concluir que:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial y_1} & \frac{\partial N_i}{\partial y_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x_1} & \frac{\partial N_i}{\partial x_2} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{bmatrix}}_{J = \frac{\partial x_i}{\partial y_i}} \quad (3.2.18)$$

Método dos Elementos Finitos

Em que \underline{J} é a matriz Jacobiana. Pode-se concluir que a matriz de 2x2 que interessa obter corresponde à inversa da matriz Jacobiana ou seja:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x_1} & \frac{\partial N_i}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial y_1} & \frac{\partial N_i}{\partial y_2} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}}_{\underline{J}^{-1}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial y_1} & \frac{\partial N_i}{\partial y_2} \end{bmatrix} \underline{J}^{-1} \quad (3.2.19)$$

Assim para obter, como pretendido, as derivadas $\partial N_i / \partial X_m$, basta calcular as derivadas $\partial N_i / \partial y_n$, a matriz Jacobiana e a respectiva inversa e efectuando seguidamente o produto matricial indicado na equação anterior.

Para obter a matriz Jacobiana em cada ponto de um elemento finito basta conhecer as coordenadas gerais dos pontos nodais X_m^{ei} e as derivadas das funções de interpolação da geometria (que nos elementos isoparamétricos são iguais às funções de interpolação dos deslocamentos N_i) em ordem às coordenadas locais Y_n , ou seja, $\partial N_i / \partial y_n$. Dando origem à seguinte matriz jacobiana, para o caso bidimensional de um elemento de placa com 4 pontos nodais:

$$\underline{J}_{mn} = \frac{\partial(N_i X_m^{ei})}{\partial y_n} = \begin{bmatrix} x_1^{e1} & x_1^{e2} & x_1^{e3} & x_1^{e4} \\ x_2^{e1} & x_2^{e1} & x_2^{e3} & x_2^{e4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial y_1} & \frac{\partial N_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial N_2}{\partial y_1} & \frac{\partial N_2}{\partial y_2} \\ \frac{\partial N_3}{\partial y_1} & \frac{\partial N_3}{\partial y_2} \\ \frac{\partial N_4}{\partial y_1} & \frac{\partial N_4}{\partial y_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial y_1} x_1^{ei} & \frac{\partial N_i}{\partial y_2} x_2^{ei} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y_1} x_2^{ei} & \frac{\partial N_i}{\partial y_2} x_2^{ei} \end{bmatrix} \quad (3.2.20)$$

3.2.5. Tensões e relações constitutivas

Admitindo que não existem deformações impostas ($\varepsilon^0=0$) nem tensões iniciais ($\sigma^0=0$) a equação constitutiva da elasticidade linear ou lei de Hook, tem a seguinte forma:

$$\underline{\sigma} = \underline{D}\underline{\varepsilon} \quad (3.2.21)$$

Com a introdução de (3.2.14) na expressão anterior, obtém-se uma expressão que nos permite obter o estado de tensão num ponto qualquer de um elemento finito a partir da matriz elasticidade D e dos deslocamentos nodais u^e , sendo conhecida a matriz B no ponto em análise.

$$\underline{\sigma} = \underline{D}\underline{B}u^e \quad (3.2.22)$$

A matriz resultante do produto DB é habitualmente referida como a matriz de tensão do elemento.

No caso geral em que existam deformações impostas (variações de temperatura por exemplo) e tensões iniciais, ou seja, $\underline{\sigma} = \underline{D}(\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^0) + \underline{\sigma}^0$, a aproximação dos elementos finitos conduz à seguinte relação:

$$\underline{\sigma} = \underline{D}\underline{B}u^e - \underline{D}\underline{\varepsilon}^0 - \underline{\sigma}^0 \quad (3.2.23)$$

3.2.6. Matriz de rigidez elementar, principio dos trabalhos virtuais

A matriz de rigidez de um elemento finito tem um significado físico semelhante ao atribuído às matrizes de rigidez de uma peça linear no método dos deslocamentos. Esta matriz relaciona as forças com os deslocamentos nodais:

$$\underline{K}^e u^e = \underline{F}^e \quad (3.2.24)$$

Esta equação constitui a equação de equilíbrio dos pontos nodais do elemento. No modelo numérico apresentado neste trabalho, baseado na formulação em deslocamentos do MEF, o equilíbrio é verificado nos pontos nodais, onde se exercem as forças de interacção entre os diversos elementos de uma estrutura.

Método dos Elementos Finitos

Deste modo, em cada nó, as forças totais aplicadas devem estar em equilíbrio, incluindo-se as forças nodais que decorrem da deformação dos elementos que estão adjacentes ao nó e das forças nodais equivalentes às cargas exteriores.

A expressão da matriz de rigidez de cada elemento pode ser deduzida através do Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV). Considere-se um corpo, com um campo de tensões σ , em geral variáveis de ponto para ponto, sob a acção de forças nodais agrupadas no vector F^e . Supõe-se, portanto, nesta dedução que todas as forças exteriores ao elemento são incluídas neste vector, nomeadamente as forças mássicas e de superfície.

Considerando uma deformação virtual no corpo, caracterizada por um campo de deformações $\delta\epsilon$ e um vector de deslocamentos nodais δu^e , o PTV, exprime a igualdade dos trabalhos exteriores e interiores realizados pelas forças e tensões reais durante a deformação virtual.

O P.T.V. diz que o trabalho das forças interiores é igual ao trabalho das forças exteriores.

$$W^{int} = W^{ext} \quad (3.2.25)$$

$$\underbrace{\int_V \delta \tilde{\epsilon}^t \tilde{\sigma} dV}_{W^{int}} = \underbrace{\int_V \delta \tilde{u}^t \tilde{X}_m dV + \int_S \delta \tilde{u}^t \tilde{S}_m dS}_{W^{ext}} \quad (3.2.26)$$

Com X_m a representar as forças mássicas e S_m as forças de superfície num elemento finito de volume V delimitado por um conjunto de faces de superfície total S , sujeito a um campo de deformações $\delta\epsilon_p$ (compatível com o campo de deslocamentos virtuais δu) e a um campo de tensões σ_p (campos definidos em todos os pontos do interior e da fronteira do elemento finito).

Introduzindo na equação anterior, as expressões (3.2.14), (3.2.22) e (3.2.1) obtém-se a seguinte equação:

$$\int_V \underline{B}^t \delta u^{et} \underline{DB} \underline{u}^e dV = \int_V \underline{N}^t \delta u^{et} \underline{X} dV + \int_S \underline{N}^t \delta u^{et} \underline{S} dS \quad (3.2.27)$$

Dividindo toda a equação por δu^e e passando para fora do integral o u^e uma vez que é constante no domínio, a equação toma a seguinte forma:

$$\int_V \underline{B}^t \underline{DB} dV \underline{u}^e = \int_V \underline{N}^t \underline{X} dV + \int_S \underline{N}^t \underline{S} dS \quad (3.2.28)$$

Método dos Elementos Finitos

Esta expressão é equivalente à seguinte equação:

$$\underline{K}^e \underline{u}^e = \underline{F}^e \quad (3.2.29)$$

Em que \underline{u}^e corresponde aos deslocamentos nodais do elemento e com \underline{K}^e e \underline{F}^e iguais a:

$$\underline{F}^e = \int_V \underline{N}^t \underline{X} dV + \int_S \underline{N}^t \underline{S} dS \quad (3.2.30)$$

$$\underline{K}^e = \int_V \underline{B}^t \underline{D} \underline{B} dV \quad (3.2.31)$$

A equação (3.2.28) é uma relação que permite obter o equilíbrio de um elemento finito. Esta expressão é independente do tipo de comportamento do material.

De salientar o facto de a matriz de rigidez de cada elemento \underline{K}^e ser uma matriz quadrada, simétrica e com um número de linhas e colunas igual ao número total de graus de liberdade do elemento.

No caso de elementos planos, o integral em volume (dV) pode ser reduzido a um integral de área (dA) multiplicado pela espessura (t)

$$dV = t dA \quad (3.2.32)$$

Deste modo, a expressão (3.2.31) passa a ter a seguinte forma:

$$\underline{K}^e = t \int_A \underline{B}^t \underline{D} \underline{B} dA \quad (3.2.33)$$

3.3. Integração numérica

A integração das expressões da matriz de rigidez ou das forças nodais equivalentes relativas às acções não pode, em geral, ser efectuada analiticamente, somente em casos particulares de geometria simplificada (por exemplo, elementos de forma rectangular) é possível essa integração.

Assim, recorre-se a métodos numéricos para a determinação dos integrais. Existem diversos métodos de integração numérica que podem ser adoptados no cálculo das matrizes do método dos elementos finitos. O mais corrente é o método de Gauss, o qual permite, se desejável, uma integração exacta com um reduzido esforço de cálculo.

Este método permite calcular o valor do integral tomando valores do integrando em apenas alguns pontos do domínio denominados pontos de Gauss, aos quais se associam determinados pesos chamados de pesos de Gauss. De seguida é apresentado de forma gráfica, o método de Gauss (Figura 3.13).

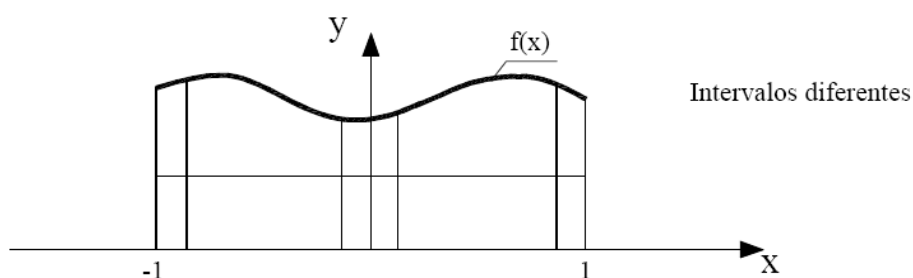


Figura 3.13 – Representação gráfica do método de gauss [Oliveira e outros, 2005].

Assim, o método de Gauss permite transformar uma expressão integral numa expressão discreta correspondente a um somatório estendido a um reduzido número de pontos do domínio.

Concluindo, para o caso unidimensional, teremos:

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \sum_{i=1}^{NPG} f(x_i)W_i \quad (3.3.1)$$

Sendo NPG o número de pontos de integração (ou pontos de Gauss) e W_i o peso associado ao ponto i , localizado no ponto x_i .

Método dos Elementos Finitos

A expressão do termo geral da matriz de rigidez elementar K^e pode ser facilmente escrita em coordenadas locais tendo em conta que, por exemplo, para o caso plano:

$$\begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{bmatrix}}_J \begin{bmatrix} dy_1 \\ dy_2 \end{bmatrix} \Rightarrow dx_1 dx_2 = |J| dy_1 dy_2 \quad (3.3.2)$$

Assim tem-se:

$$\underline{K}^e = t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \underline{B}^t \underline{D} \underline{B} |J| dy_1 dy_2 \quad (3.3.3)$$

Sendo, no caso geral tridimensional

$$\underline{K}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \underline{B}^t \underline{D} \underline{B} |J| dy_1 dy_2 dy_3 \quad (3.3.4)$$

A utilização deste método, permite na prática transformar os integrais em somatórios estendidos aos pontos de Gauss, ponderados pelos respectivos pesos (Tabela 3.1). A anterior expressão pode ser escrita na forma de um somatório triplo estendido aos pontos de Gauss (NPG pontos de Gauss por direcção de integração).

$$\underline{K}^e = \sum_{i=1}^{NPG} \sum_{j=1}^{NPG} \sum_{k=1}^{NPG} \underbrace{H_i H_j H_k}_{\text{pesos gauss}} \underline{B}^t \underline{D} \underline{B} \underbrace{|J|}_{\text{jacobiano}} \quad (3.3.5)$$

A selecção do número de pontos de integração NPG depende do grau da função a integrar e portanto do grau das derivadas das funções de forma agrupadas nas matrizes B. Na pratica, as mais utilizadas são as regras com NPG=1,2 ou 3, embora elementos com funções de interpolação de ordem mais elevadas possam exigir regras com maior número de pontos.

Método dos Elementos Finitos

NPG	i	y_i^g	W_i
1	1	0	2
2	1	$-\frac{1}{\sqrt{3}} = -0.57735$	1
	2	$\frac{1}{\sqrt{3}} = 0.57735$	1
3	1	$-\sqrt{\frac{3}{5}} = -0.77460$	$\frac{5}{9}$
	2	0	$\frac{8}{9}$
	3	$\sqrt{\frac{3}{5}} = 0.77460$	$\frac{5}{9}$

Tabela 3.1 Coordenadas e os pesos de gauss

Na figura 3.14 apresenta-se um exemplo de integração pelo método de gauss para o caso bidimensional de um elemento quadrático, utilizando 2 pontos de gauss.

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(y_1, y_2) dy_1 dy_2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n H_i H_j f(y_1^{(i)}, y_2^{(j)}) \quad (3.3.6)$$

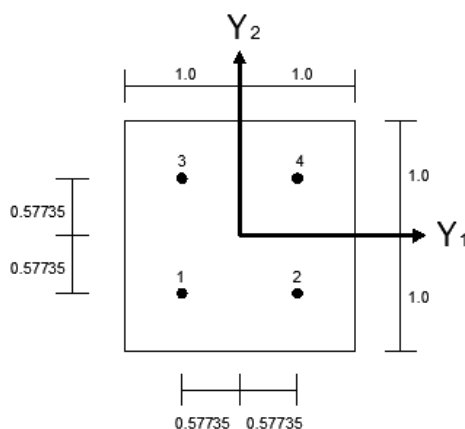


Figura 3.14 – Representação dos pontos de gauss num elemento quadrangular

Convém salientar que a matriz B e o jacobiano J são calculados nos vários pontos de gauss. Neste caso para as seguintes coordenadas locais:

$$Y_1 = -0.57735 \quad Y_2 = -0.57735, \text{ para } i=1 \text{ e } j=1$$

$$Y_1 = -0.57735 \quad Y_2 = 0.57735, \text{ para } i=1 \text{ e } j=2$$

$$Y_1 = 0.57735 \quad Y_2 = -0.57735, \text{ para } i=2 \text{ e } j=1$$

$$Y_1 = 0.57735 \quad Y_2 = 0.57735, \text{ para } i=2 \text{ e } j=2$$

3.4. Aspectos de aplicação

3.4.1. Formulação do MEF em deslocamentos, Compatibilidade e equilíbrio

A formulação em deslocamentos do MEF, parte de um campo de deslocamentos contínuo no interior de cada elemento. Este campo tem como incógnita os deslocamentos nodais. O deslocamento ao longo de cada lado do elemento é função dos valores dos deslocamentos dos pontos nodais do lado em causa.

Deste modo, desde que os deslocamentos dos nós comuns de elementos contíguos sejam iguais e as funções de interpolação sejam similares, verifica-se continuidade do campo de deslocamentos em todos os pontos do lado comum.

Assim, constata-se que esta formulação assume um campo de deslocamentos contínuo no interior da estrutura.

Neste tipo de formulação, o campo de tensões não apresenta continuidade entre elementos adjacentes. As pequenas descontinuidades de tensão entre elementos reduzem-se progressivamente ao refinar a discretização, processo que conduz à convergência dos resultados numéricos para a solução teórica.

3.4.2. Seleccção do tipo de elemento

Elementos triangulares e quadriláteros

O elemento finito mais simples é o elemento triangular de tensão constante, para o qual é possível a dedução analítica da matriz de rigidez. Devido ao facto de se tratar de um elemento de tensão uniforme, é necessário um maior refinamento da malha para representar bem um campo complexo de tensões.

Os elementos quadriláteros do 1º grau apresentam geralmente um desempenho superior ao dos triângulos de tensão uniforme.

Os elementos triangulares apresentam uma maior versatilidade em discretização de domínios de forma irregular, apesar que os elementos quadriláteros, são mais utilizados em domínios regulares.

Usualmente, são aplicados estes dois tipos de elementos em conjunto, os elementos quadrangulares são utilizados na maior parte do domínio e os triangulares são aplicados na proximidade de fronteiras irregulares, ou na transição de zonas de malha apertada para zonas de malha mais larga.

Método dos Elementos Finitos

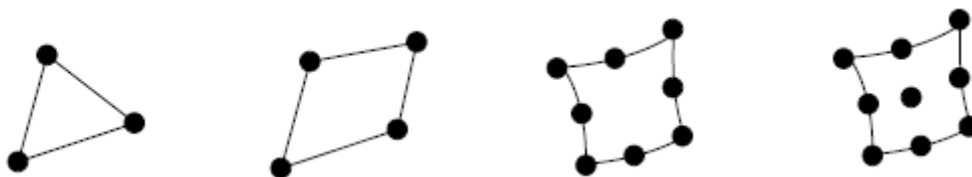


Figura 3.15 – Exemplos de elementos triangulares e quadriláteros de vários graus.

Elementos com funções de interpolação do 1º e do 2º grau

A utilização de elementos isoparamétricos com funções de interpolação do 2º grau permite representar de uma forma mais exacta, campos de tensões com uma variação linear dentro do elemento. Em consequência, é possível obter bons resultados de deformações e tensões com um número muito menor de elementos de ordem superior. Os elementos quadriláteros de 8 nós são normalmente uma boa opção para uma análise eficiente, que também pode ser conjugada com elementos triangulares de 6 nós.

Nos elementos isoparamétricos do 2º grau a geometria de cada um dos lados é definida por três pontos, o que tem também a vantagem de aproximar bem domínios de forma curva. Uma desvantagem deste tipo de elementos, pode ser a maior dificuldade de geração da malha, nomeadamente, quando os nós possam ser dados de forma manual pelo utilizador.

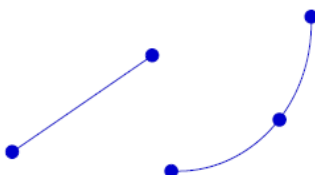


Figura 3.16 - Exemplos de elementos do 1º e do 2º grau.

Elementos de ordem superior e elementos especiais de transição

Além dos elementos com funções de interpolação do 1º e 2º grau, existem também elementos mais complexos, por exemplo, elementos com funções de interpolação do 3º grau, que são aplicados em problemas especiais, não sendo utilizados na maioria dos programas de cálculo.

Método dos Elementos Finitos

Geralmente, quando se elabora um modelo numérico, utilizam-se apenas elementos do 1º e 2º grau. No entanto, alguns programas apresentam elementos quadriláteros com um número variável de pontos nodais, entre 4 e 8 (ou 9).

Neste caso, cada um dos lados do elemento pode ter funções de interpolação do 1º grau, nos lados definidos apenas por 2 pontos nodais, ou funções do 2º grau, se existe um nó intermédio a meio do lado. Este tipo de elementos permite ao utilizador, ao efectuar a discretização a transição entre regiões de elementos de 4 nós e regiões de elementos de 8 (ou 9).

3.4.3. Compatibilidade entre elementos

A malha dos elementos finitos deve garantir a compatibilidade do campo de deslocamentos entre elementos contíguos. Por exemplo, não se devem ligar elementos com funções lineares a elementos com funções do 2º grau.

Nestes casos, devem ser incluídos elementos de transição. Vários programas de cálculo incluem elementos com um número variável de nós, que combinam elementos com funções de interpolação do 1º grau com elementos com funções do 2º grau.

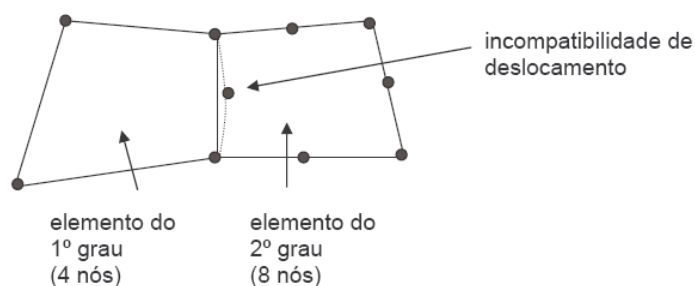


Figura 3.17 – Compatibilidade entre elementos [Lemos, 2005].

3.4.4. Cálculo de tensões

Como já foi referido, nesta formulação em deslocamentos do MEF, o equilíbrio é verificado apenas em termos de forças nodais, não existindo assim, continuidade do campo de tensões entre elementos adjacentes. Deste modo verifica-se que as tensões calculadas em lados comuns de dois elementos, não são iguais. Esta diferença vai se reduzindo à medida que se vai refinando a malha. Para eliminar esta diferença, o usual, é fazer a média das tensões nos diversos elementos que contêm esse nó ou lado.

Método dos Elementos Finitos

Para elementos triangulares de 3 nós, a tensão é uniforme, mas considera-se que o valor mais representativo da tensão é no centróide do elemento.

Em relação aos elementos quadriláteros de 4 nós, habitualmente verifica-se que o valor da tensão com mais precisão é calculado no centro do elemento. Por outro lado, nos elementos de 8 nós, as tensões mais correctas são as que se obtêm nos pontos de integração de Gauss.

Em muitos programas de cálculo, como por exemplo o SAP, as tensões são calculadas nos pontos de Gauss, e em seguida extrapoladas para os pontos nodais. São depois estes valores nodais que são apresentados ao utilizador.

3.5. Conclusões

O método dos elementos finitos pode ser usado nas mais variadas análises estruturais, desde a termodinâmica, Teoria da Elasticidade e problemas relacionados com o calor.

De todas estas análises, a apresentada neste capítulo foi a relacionada com a Teoria da Elasticidade, que permite obter esforços e deslocamentos a partir das formulações do MEF.

Neste capítulo é exposto este método de maneira genérica, explicando os principais passos para o cálculo de estruturas.

Um dos aspectos mais importantes da análise estrutural baseada nesta teoria consiste na correcta modelação e discretização da estrutura em estudo, escolhendo de forma adequada os elementos que melhor a modelam. Este aspecto também é referido nesta secção, focando aspectos como o grau dos elementos e a compatibilização entre eles.

Com a explicação geral do MEF presente neste capítulo, seguir-se-á uma descrição deste método para a solução de elementos estruturais de laje.

Método dos Elementos Finitos

Capítulo 4

4. Teoria das Lajes

4.1. Introdução

As lajes são elementos laminares, normalmente planos, com grandes dimensões em planta e de pequena espessura, sujeitas a acções normais ao seu plano. A sua principal função é receber os carregamentos actuantes no plano, provenientes do uso da construção (pessoas, móveis e equipamentos), e transferi-los para os apoios.

Estes elementos podem ser, paredes planas de um reservatório, pavimentos de um edifício sujeitos a cargas verticais, um paramento vertical de um muro de suporte ou os tabuleiros das pontes e viadutos (Figura. 4.1)

Teoria das Lajes



Figura 4.1 – Construção do prolongamento da laje do Aeroporto da Madeira [weblog.com.pt, 2009].

Até ao aparecimento do betão, as lajes dos edifícios habitacionais eram predominantemente executadas em madeira. Do ponto de vista estrutural, o sistema construtivo utilizado era baseado numa estrutura reticulada horizontal composta por dois ou três níveis. A organização estrutural dos diversos elementos nos vários níveis, dependia da geometria da laje. No caso de pequenos vãos, 3 a 4 metros, as vigas eram directamente apoiadas nas paredes e sobre estas eram pregadas as tábuas do soalho, para vãos maiores, 5 a 7 metros, era necessária a colocação de vigas secundárias. As vigas principais, perpendiculares às paredes de apoio, suportavam as vigas secundárias, paralelas às paredes e estas, as tábuas de soalho (Figura 4.2) [Branco e outros, 2003].

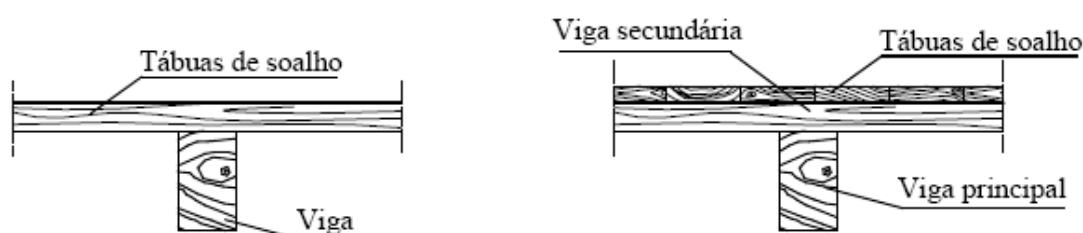


Figura 4.2 – Sistema construtivo das lajes em madeira [Branco, 2002].

A título de curiosidade, nos anos oitenta, na Europa Central, construíram-se diversas lajes em madeira, constituídas por tábuas orientadas na vertical, pregadas entre si. Para vãos elevados, 12m, e para cargas correntes (5 kN/m^2) a largura exigida para as tábuas atingia os 280 mm.

Com a evolução do cimento, para além dos pilares, as lajes passaram a ser também feitas de betão armado.

Teoria das Lajes

Actualmente as lajes de betão armado podem ser de vários tipos e terem diversas classificações.

Quanto ao tipo de apoio as lajes podem ser:

Vigadas – lajes apoiadas em vigas.

Fungiformes – lajes apoiadas directamente em pilares.

Lajes apoiadas em Meio Elástico – lajes apoiadas directamente no solo.

Quanto à sua constituição as lajes podem ser:

Em Betão armado

- Maciças – de espessura constante ou variável.

- Aligeiradas ou nervuradas desde que o seu peso próprio seja inferior ao da laje maciça de igual espessura.

De vigotas pré-esforçadas - constituídas por vigotas pré-esforçadas, nas quais se apoiam blocos de cofragem (abobadilhas) cerâmicos ou de betão, solidarizados por uma lajeta de compressão em betão, a executar em obra.

Mistas aço-betão, das quais se salientam:

- Lajes mistas com chapa de aço colaborante.

- Lajes mistas com perfil em I.

Quanto ao modo de flexão dominante (só para lajes vigadas), as lajes podem ser:

Armadas numa só direcção.

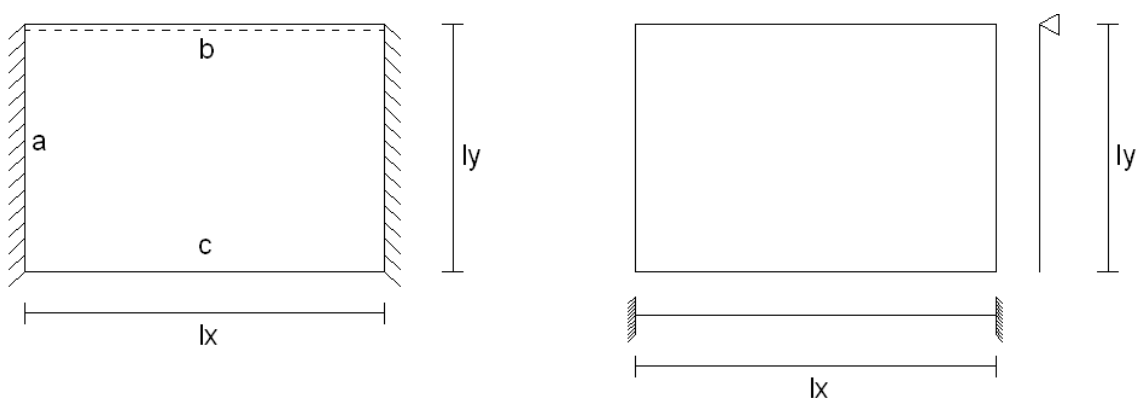
Armadas em duas direcções.

4.2. Modelo estrutural de lajes

A representação do modelo estrutural de uma laje passa pela simplificação da geometria e das condições de apoio.

Classificação das condições de apoio:

- Bordo livre (sem viga de apoio);
- Bordo apoiado (apoiado apenas numa viga à qual, por se assumir que não tem rigidez de torção, não impede eventuais rotações que a laje tenha. O momento flector na laje é, necessariamente, nulo uma vez que também o é o momento torsor na viga);
- Bordo encastrado
 - Poderá ser realmente encastrado, se se assumir que são nulas as rotações da laje em relação ao bordo;
 - Ou ser parcialmente encastrado, o que sucede quando:
 - Se atribui rigidez de torção à viga que, eventualmente, serve de apoio à laje;
 - O bordo que se está a considerar pertencer simultaneamente a dois painéis sucessivos de laje. Nesta situação apenas se impede a rotação relativa entre os painéis não existindo a rotação global da laje sobre o apoio. O momento flector num painel de laje tem que ser igual ao painel seguinte de modo a que se verifique o equilíbrio [IST, 1998].



- a – bordo encastrado
- b – bordo simplesmente apoiado
- c – bordo livre

Figura 4.3 – Representação esquemática das condições de apoio de uma laje.

4.3. Elementos finitos de Laje

A teoria de lajes, que se irá desenvolver ao longo do trabalho, é uma teoria bidimensional, ou seja, os valores das tensões, deformações e deslocamentos num ponto qualquer da peça, ficam perfeitamente determinados pelos campos de tensões generalizadas (esforços) e deslocamentos generalizados (deslocamentos, rotações) definidos sobre o plano médio da peça laminar.

As equações que determinam o comportamento mecânico destas peças laminares planas são equações com derivadas parciais num domínio plano (o plano médio da peça) com condições de fronteira apropriadas no seu contorno.

Como já se referiu, as lajes podem ser divididas em várias categorias, em relação a este trabalho a classificação mais importante é quanto ao seu comportamento estrutural e este pode ser influenciado pelos seguintes factores:

- Pelos tipos de apoios e de cargas, ou seja pelas condições de fronteira.
- Pela relação entre os vãos, a qual condiciona a direcção de flexão dominante.
- O comportamento mecânico do material de que a laje é constituída.
- A relação da espessura com o menor dos vãos.

Em relação a este ultimo critério, a relação da espessura com o menor vão (no caso de lajes vigadas ou com o maior dos vãos no caso de lajes fungiformes), ele é muito importante, pois condiciona o tipo de modelo estrutural de análise de lajes que se podem utilizar [IST, 1998].

Existem duas subcategorias, tendo em conta a espessura das lajes, a teoria das lajes finas e a das lajes espessas.

A teoria das lajes finas é baseada na teoria de Kirchhoff, na qual se despreza as deformações por esforço transversal.

Esta teoria apresenta as seguintes hipóteses fundamentais:

- O deslocamento transversal da laje é função apenas das coordenadas do plano médio, não variando através da espessura: $w=w(x_1, x_2)$
- A tensão normal ao plano médio é nula $\sigma_{33}=0$
- Uma fibra normal ao plano médio mantém-se recta após a deformação.
- Uma fibra normal ao plano médio mantém-se normal ao plano médio após a deformação.

Em relação à teoria das lajes espessas, ela é baseada na teoria de Mindlin (ou Reissner-Mindlin), que inclui as deformações por esforço transversal [Lemos, 2005].

Teoria das Lajes

As hipóteses fundamentais desta teoria são iguais à da teoria das lajes finas, menos no último ponto, ou seja, neste caso a fibra normal ao plano médio não se mantém normal ao plano médio após a deformação.

De seguida são apresentadas imagens que ilustram bem estas duas teorias:

Antes da deformação, considere-se uma fibra AB normal ao plano médio da laje de espessura t :

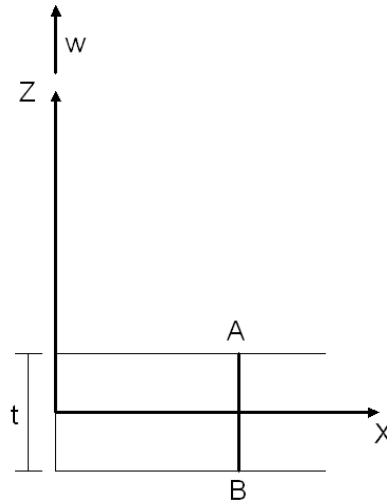


Figura 4.4 – Representação de uma fibra A-B normal ao plano médio de uma laje de espessura t

Após a deformação, segundo as hipóteses de cada teoria teremos:

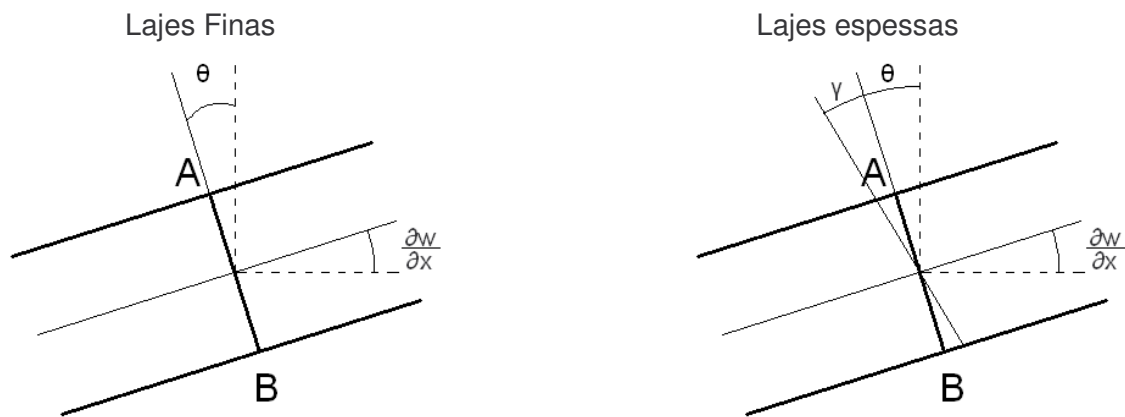


Figura 4.5 – Comportamento da fibra A-B segundo a teoria das lajes finas e espessas.

$$\theta = \frac{\partial w}{\partial x} \Rightarrow \gamma = \frac{\partial w}{\partial x} - \theta = 0 \quad (4.3.1)$$

$$\gamma = \frac{\partial w}{\partial x} - \theta \quad (4.3.2)$$

Teoria das Lajes

Resumindo a diferença entre as duas teorias é que a teoria das lajes finas implica que a rotação da fibra AB seja igual à rotação do eixo, pelo que aquela fibra se mantém normal à superfície média, sendo a deformação por corte, γ nula, enquanto na teoria das lajes espessas a rotação dessa fibra não é necessariamente igual à rotação do eixo, pelo que aquela fibra não se mantém normal à superfície média, sendo a deformação por corte, γ diferente de zero.

A teoria das lajes finas conduz a uma boa aproximação para lajes em que se verifica uma relação vão/espessura superior a 10. No entanto, actualmente os modelos de elementos finitos são baseados na teoria das lajes espessas, embora muitos programas de cálculo, como o SAP2000, permitam a escolha entre as duas teorias. A razão pela qual a teoria das lajes espessas tem ganho vantagem em relação à das lajes finas é de que a primeira permite uma formulação mais simples, aproximando-se mais da formulação dos elementos sólidos [Lemos,2005].

De seguida é explicada mais detalhadamente a teoria das lajes espessas, devido ao facto de o programa de elementos finitos desenvolvido nesta tese ter sido baseado nesta teoria.

4.4. Teoria das Lajes espessas

4.4.1. Referencial

Para a explicação da teoria será utilizado o seguinte referencial cartesiano, considerando que a laje se desenvolve no plano Ox_1x_2 de um referencial $Ox_1x_2x_3$ e que o eixo x_3 , normal ao plano médio, será designado por z :

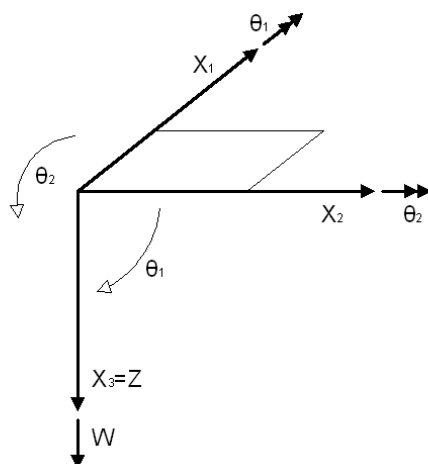


Figura 4.6 – Referencial cartesiano considerado na formulação da laje.

4.4.2. Deslocamentos

De acordo com esta teoria a deformação de uma laje fica perfeitamente definida através de três deslocamentos fundamentais (generalizados): um deslocamento e duas rotações.

Estes deslocamentos serão designados da seguinte forma:

W (deslocamento segundo z)

θ_1 (rotação em torno de x_1)

θ_2 (rotação em torno de x_2)

com a convenção de sinais indicada na Figura 4.6.

Teoria das Lajes

De acordo com a hipótese exposta anteriormente de que uma fibra normal ao plano médio se mantém recta após a deformação, podemos definir os deslocamentos no plano da laje (u_1 e u_2) em função das duas rotações que aquela fibra sofre:

$$u_1 = z\theta_2 \quad (4.4.1)$$

$$u_2 = -z\theta_1 \quad (4.4.2)$$

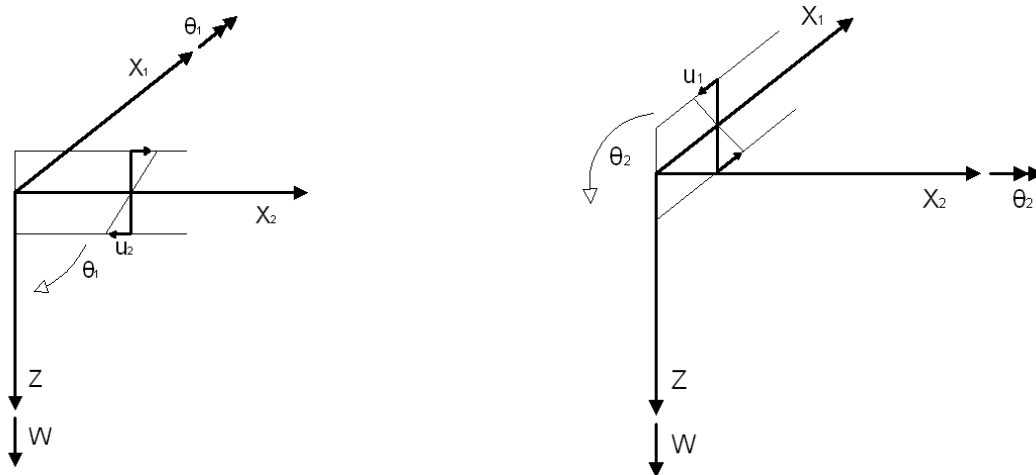


Figura 4.7 – Deformação de uma fibra quando lhe é aplicada uma rotação θ_1 e θ_2 .

4.4.3. Deformações generalizadas da laje

A deformação da laje pode ser caracterizada por parâmetros que representam a deformação numa dada secção, devido ao facto das hipóteses adoptadas anteriormente para a variação dos deslocamentos através da espessura da laje. Estes parâmetros podem ser chamados de deformações generalizadas e são representados da seguinte forma:

$$k_{11} = -\frac{\partial\theta_2}{\partial x_1} \quad (\text{curvatura de flexão segundo } x_1) \quad (4.4.3)$$

$$k_{22} = \frac{\partial\theta_1}{\partial x_2} \quad (\text{curvatura de flexão segundo } x_2) \quad (4.4.4)$$

$$k_{12} = \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial\theta_2}{\partial x_2} + \frac{\partial\theta_1}{\partial x_1} \right) \quad (\text{curvatura de torção}) \quad (4.4.5)$$

Teoria das Lajes

$$\gamma_{31} = \frac{\partial w}{\partial x_1} + \theta_2 \text{ (deformação por corte em facetas com normal na direcção } x_1 \text{)} \quad (4.4.6)$$

$$\gamma_{32} = \frac{\partial w}{\partial x_2} - \theta_1 \text{ (deformação por corte em facetas com normal na direcção } x_2 \text{)} \quad (4.4.7)$$

Estas cinco componentes da deformação definidas acima podem ser agrupadas no vector das deformações (generalizadas) da laje:

$$\underline{e} = \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{22} \\ 2k_{12} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{32} \end{bmatrix} \quad (4.4.8)$$

4.4.4. Modos de deformação com curvatura uniforme

No caso particular de modos de deformação em que as deformações por corte são nulas teremos:

$$\gamma_{31} = \frac{\partial w}{\partial x_1} + \theta_2 = 0 \quad \Rightarrow \theta_2 = -\frac{\partial w}{\partial x_1} \quad (4.4.9)$$

$$\gamma_{32} = \frac{\partial w}{\partial x_2} - \theta_1 = 0 \quad \Rightarrow \theta_1 = \frac{\partial w}{\partial x_2} \quad (4.4.10)$$

De seguida são apresentadas figuras que ilustram os vários tipos de curvatura.

Teoria das Lajes

Curvatura de flexão K_{11} :

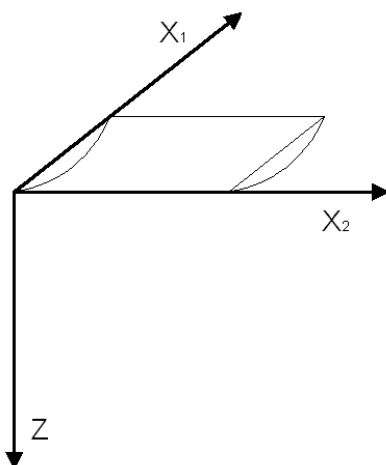


Figura 4.8 – Representação da curvatura de flexão K_{11} de uma laje.

Curvatura de flexão K_{22} :

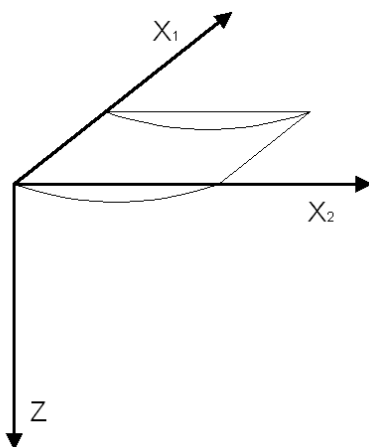


Figura 4.9 – Representação da curvatura de flexão K_{22} de uma laje.

Curvatura de torção K_{12} :

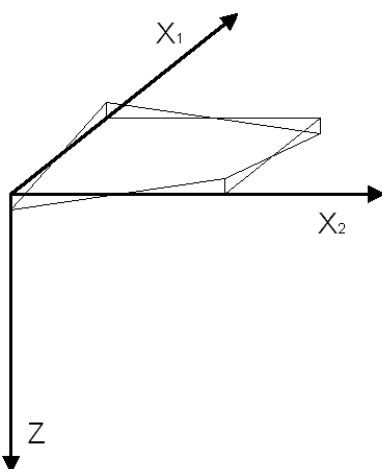


Figura 4.10 – Representação da curvatura de torção K_{12} de uma laje.

4.4.5. Deformações

Através da relação das equações da compatibilidade com as equações (4.4.1) e (4.4.2) é possível definir as componentes das deformações em qualquer ponto (x_1, x_2, z) em termos das curvaturas.

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}(z\theta_2) = -zk_{11} \\ \varepsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2}(z\theta_1) = -zk_{22} \\ \gamma_{12} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2}(z\theta_2) + \frac{\partial}{\partial x_1}(-z\theta_1) = -z\left(-\frac{\partial\theta_2}{\partial x_2} + \frac{\partial\theta_1}{\partial x_1}\right) = -z(2k_{12})\end{aligned}\quad (4.4.11)$$

As distorções γ_{31} e γ_{32} não são apresentadas aqui devido ao facto de serem independentes de z e entrarem directamente para o vector das deformações.

4.4.6. Tensões

As componentes do tensor das tensões podem ser dadas pela Lei de Hooke, σ_{33} é igual a zero admitiu-se a hipótese de um estado plano de tensão. Assim partindo da expressão da lei de Hooke para o caso de estado plano de tensão e introduzindo as distorções γ_{31} e γ_{32} tem-se:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & \nu E & 0 & 0 & 0 \\ \nu E & E & 0 & 0 & 0 \\ 1-\nu^2 & 1-\nu^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{32} \end{bmatrix}\quad (4.4.12)$$

Teoria das Lajes

Com a substituição do tensor das deformações pelo tensor das deformações generalizadas (4.4.11) obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2}(-z) & \frac{\nu E}{1-\nu^2}(-z) & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E}{1-\nu^2}(-z) & \frac{\nu E}{1-\nu^2}(-z) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G(-z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{22} \\ 2k_{12} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{32} \end{bmatrix} \quad (4.4.13)$$

Conclui-se que existe uma variação linear através da espessura das tensões σ_{11} , σ_{22} e σ_{12} .

De seguida são apresentadas figuras ilustrativas que representam as variações das tensões ao longo da espessura da laje:

Tensões normais em facetas com normal X_1 e X_2

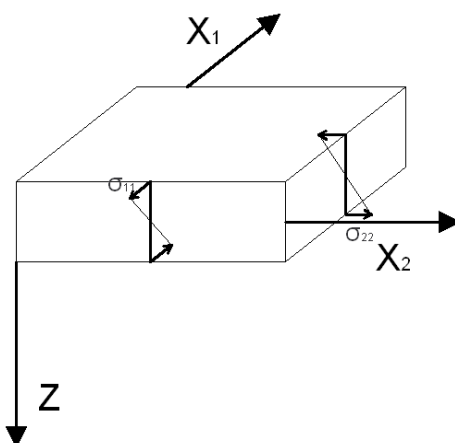


Figura 4.11 – Representação das tensões normais nas facetas com normal X_1 e X_2 .

Tensões de corte, actuando na direcção horizontal

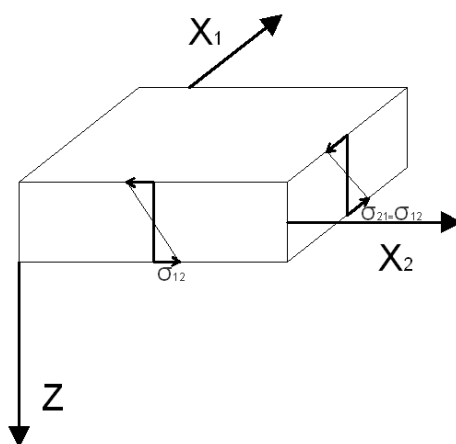


Figura 4.12 – Representação das tensões de corte actuando na direcção horizontal.

Teoria das Lajes

Tensões de corte, actuando na vertical

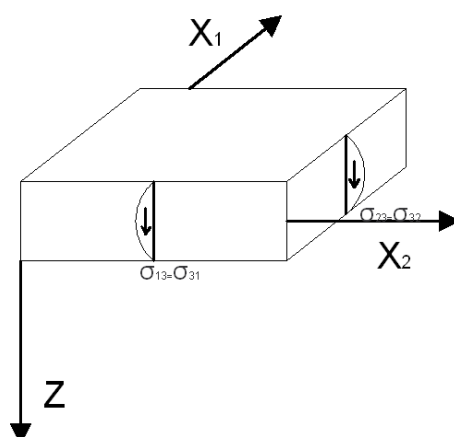


Figura 4.13 – Representação das tensões de corte actuando na vertical.

4.4.7. Esforços na laje

Os esforços na laje são obtidos através da integração das tensões ao longo da espessura, e podem ser agrupados num vector s :

$$s = \begin{bmatrix} M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \\ V_{31} \\ V_{32} \end{bmatrix} \quad (4.4.14)$$

Onde os momentos flectores M_{11} e M_{22} são obtidos através das seguintes expressões:

$$M_{11} = - \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{11} z dz \quad (4.4.15)$$

$$M_{22} = - \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{22} z dz \quad (4.4.16)$$

O momento torsor M_{12} será:

$$M_{12} = M_{21} = - \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{12} z dz \quad (4.4.17)$$

Teoria das Lajes

Os esforços transversos V_{31} e V_{32} serão:

$$V_{31} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{31} dz \quad (4.4.18)$$

$$V_{32} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{32} dz \quad (4.4.19)$$

Seguidamente são apresentadas as figuras com os sentidos de cada esforço.

Momentos flectores M_{22} e M_{11} :

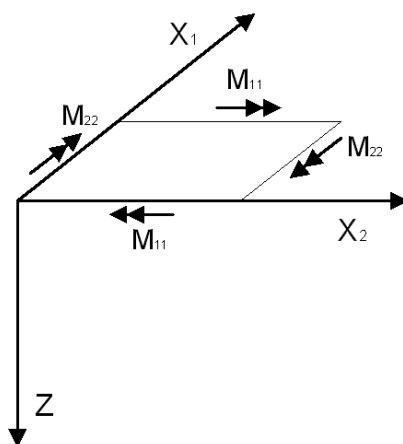


Figura 4.14 – Representação dos momentos flectores M_{22} e M_{11} .

Momentos torsores M_{12} e M_{21} :

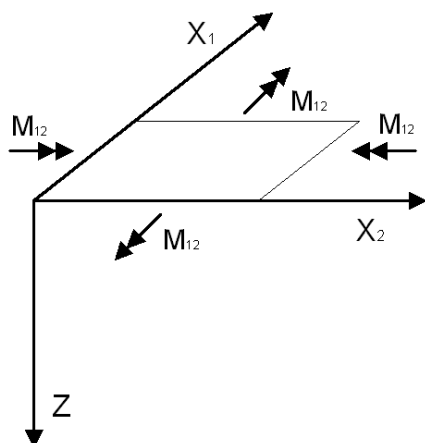
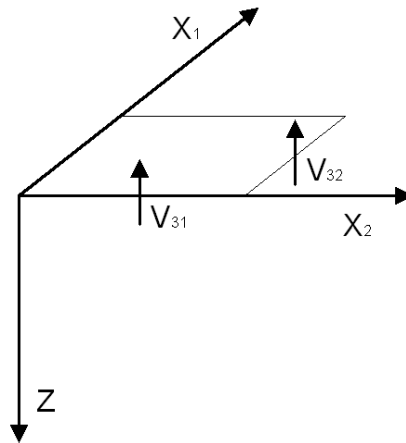


Figura 4.15 – Representação dos momentos torsores M_{12} e M_{21} .

Teoria das Lajes

Esforços transversos V_{31} e V_{32} :Figura 4.16 – Representação dos esforços transversos V_{31} e V_{32} .4.4.8. Relações esforços-deformações

Com a substituição das expressões das tensões (4.4.13) pelas fórmulas dos esforços (4.4.15 a 4.4.19) obtém-se a relação entre os esforços e as deformações da laje:

$$\underline{s} = \underline{D}^L \underline{e} \quad (4.4.20)$$

Onde D^L é chamada de matriz esforços-deformações da laje e decorre da integração através da espessura dos termos da matriz (4.4.13).

Seguidamente deduzem-se os elementos da matriz D^L

A relação entre o momento flector M_{11} e as curvaturas k_{11} e k_{22} será:

$$\begin{aligned} M_{11} &= - \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{11} z dz = - \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \left(\frac{E}{1-\nu^2} (-z) k_{11} + \frac{\nu E}{1-\nu^2} (-z) k_{22} \right) z dz = \\ &= \left(\frac{E}{1-\nu^2} \right) \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z^2 (k_{11} + \nu k_{22}) dz = \left(\frac{E}{1-\nu^2} \right) (k_{11} + \nu k_{22}) \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z^2 dz = \quad (4.4.21) \\ &= \left(\frac{E}{1-\nu^2} \right) \left(\frac{1}{3} \left(\frac{t^3}{8} + \frac{t^3}{8} \right) \right) (k_{11} + \nu k_{22}) = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} (k_{11} + \nu k_{22}) = \\ &= D_f (k_{11} + \nu k_{22}) = D_f k_{11} + \nu D_f k_{22} \end{aligned}$$

Teoria das Lajes

Onde D_f é a rigidez de flexão da laje que é igual a:

$$D_f = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (4.4.22)$$

De modo semelhante teremos o M_{22} igual a:

$$M_{22} = -\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{22} z dz = \nu D_f k_{11} + D_f k_{22} \quad (4.4.23)$$

E para o M_{12} vem que:

$$M_{12} = -\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{12} z dz = \frac{Gt^3}{12} (2k_{12}) = \frac{1}{2} D_t (2k_{12}) \quad (4.4.24)$$

Onde D_t é a rigidez de torção da laje e é igual a:

$$D_t = \frac{Gt^3}{6} \quad (4.4.25)$$

Assim, verifica-se a seguinte relação entre a rigidez de torção e a rigidez de flexão:

$$D_t = \frac{Gt^3}{6} = \frac{Et^3}{12(1+\nu)} = \frac{(1-\nu)Et^3}{12(1-\nu^2)} = (1-\nu)D_f \quad (4.4.26)$$

A distribuição das tensões de corte não são uniformes, como foi admitido anteriormente, pelo que é necessário considerar um factor correctivo usual que para secções rectangulares toma geralmente o valor $\alpha = \frac{5}{6}$.

Os esforços transversos podem ser determinados da seguinte forma:

$$V_{31} = \alpha Gt \gamma_{31} \quad (4.4.27)$$

$$V_{32} = \alpha Gt \gamma_{32} \quad (4.4.28)$$

Teoria das Lajes

Finalmente a relação esforços-deformações da laje (4.4.20) tem a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \\ V_{31} \\ V_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_f & \nu D_f & 0 & 0 & 0 \\ \nu D_f & D_f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} D_t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha Gt & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha Gt \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{22} \\ 2k_{12} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{32} \end{bmatrix} \quad (4.4.29)$$

4.4.9. Relações entre as tensões e os esforços

Através da substituição da equação (4.4.20) na equação (4.4.13) podem estabelecer-se as expressões das tensões a partir dos esforços:

$$\sigma_{11} = -\frac{12M_{11}}{t^3} z \quad (4.4.30)$$

$$\sigma_{22} = -\frac{12M_{22}}{t^3} z \quad (4.4.31)$$

$$\sigma_{12} = -\frac{12M_{12}}{t^3} z \quad (4.4.32)$$

Os valores máximos destas tensões verificam-se nas faces superior e inferior da laje, para $z = \pm \frac{t}{2}$:

$$(\sigma_{11})^{\max} = \pm \frac{6M_{11}}{t^2} \quad (4.4.33)$$

$$(\sigma_{22})^{\max} = \pm \frac{6M_{22}}{t^2} \quad (4.4.34)$$

$$(\sigma_{12})^{\max} = \pm \frac{6M_{12}}{t^2} \quad (4.4.35)$$

Teoria das Lajes

As tensões de corte (verticais) médias são dadas por:

$$\sigma_{31} = \frac{V_{31}}{t} \quad (4.4.36)$$

$$\sigma_{32} = \frac{V_{32}}{t} \quad (4.4.37)$$

4.4.10. Momentos principais

Os momentos flectores principais são aqueles onde numa determinada direcção não existe momento torsor e os momentos flectores assumem um valor máximo e mínimo.

A determinação dos momentos principais, M_I e M_{II} , pode ser feita de modo análogo ao cálculo das tensões principais em elasticidade plana, por exemplo, pela construção gráfica do círculo de Mohr. Em termos analíticos, os momentos principais podem ser calculados através da seguinte expressão:

$$M_{I,II} = \left(\frac{M_{11} + M_{22}}{2} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{M_{11} - M_{22}}{2} \right)^2 + (M_{12})^2} \quad (4.4.38)$$

4.5. Elementos finitos de laje espessa

Consideram-se que os elementos de lajes espessas têm um bom desempenho quando conseguem produzir resultados semelhantes aos fornecidos pela teoria de Kirchhoff, para lajes finas. Esta afirmação nem sempre é verdadeira, devido a haver casos em que para pequenas espessuras de laje existem problemas no que toca à utilização de elementos baseados na teoria de Reissner-Mindlin. Um dos problemas mais gravosos está ligado ao fenómeno locking. Este problema pode destruir por completo a solução, tornando muito pequenos (ou mesmo nulos) os valores calculados para o campo de deslocamentos.

Este fenómeno surge porque na definição dos elementos da matriz de rigidez onde há coeficientes que têm parcelas onde se multiplica pela espessura da laje ao cubo h^3 (parcela da flexão) e outras em que se multiplica apenas pela espessura (parcela do corte).

Quando a espessura da laje começa a diminuir a parcela de corte começa a predominar sobre a parcela de flexão, que resulta na diminuição da influência desta última.

Como este fenómeno está relacionado com a sub-avaliação dos elementos das matrizes de rigidez elementares, uma das formas de o reduzir, consiste em efectuar uma integração pelo método de Gauss do sistema $Ku=F$, mas em vez de se utilizarem os números de pontos de Gauss necessários para se efectuar a integração exacta, utiliza-se um número inferior, permitindo a redução do efeito de locking.

Existem dois tipos de integrações para além da exacta, a integração reduzida onde se considera um número de pontos de gauss inferior ao necessário para efectuar as integrações tanto nas parcelas de corte quanto nas parcelas de flexão e a integração selectiva onde se integra a parcela da flexão de forma exacta e se utiliza a sub-integração apenas para a parcela de corte que no fundo é a responsável pelo locking [Castro, 1998].

No desenvolvimento deste trabalho utiliza-se uma integração selectiva.

4.5.1. Vector dos deslocamentos nodais

Os deslocamentos em cada ponto da superfície média da laje são agrupados no seguinte vector:

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ w \end{bmatrix} \quad (4.5.1)$$

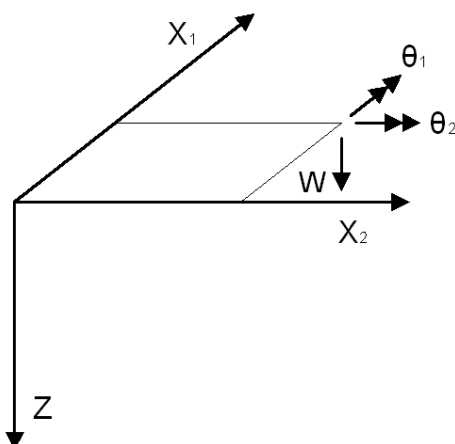


Figura 4.17 – Referencial dos deslocamentos nodais.

Teoria das Lajes

Em relação ao vector dos deslocamentos do elemento ele vai incluir as três componentes do deslocamento em cada um dos pontos nodais (NP).

$$\tilde{u}^e = \begin{bmatrix} (\theta_1)_{n_1} \\ (\theta_2)_{n_1} \\ (w)_{n_1} \\ \vdots \\ (\theta_1)_{NP} \\ (\theta_2)_{NP} \\ (w)_{NP} \end{bmatrix} \quad (4.5.2)$$

Em que NP é o número de nós do elemento.

4.5.2. Elementos isoparamétricos e funções de interpolação

Um elemento denomina-se de isoparamétrico quando as funções que definem a sua geometria são idênticas às funções de interpolação de deslocamentos.

Os elementos utilizados no programa, foram elementos isoparamétricos quadriláteros de quatro nós, com funções de interpolação do 1º grau. As funções de interpolação são definidas para um elemento quadrangular de lado dois e coordenadas locais y_1 e y_2 . As coordenadas dos quatro pontos nodais serão designadas de y_{JK}^e , onde J é referente ao nó ($J=1,4$) e o índice K à coordenada ($K=1,2$). Devido a este elemento ser definido em coordenadas locais é necessário transformar essas coordenadas em coordenadas globais.

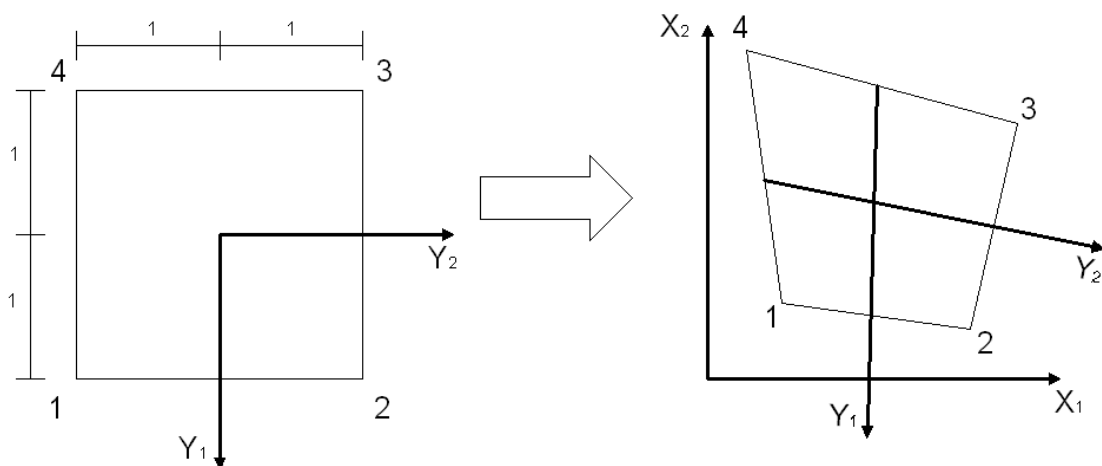


Figura 4.18 – Transformação de coordenadas locais em coordenadas globais.

Teoria das Lajes

As coordenadas do elemento serão:

J	Y_{J1}^e	Y_{J2}^e
1	1	-1
2	1	1
3	-1	1
4	-1	-1

Tabela 4.1 – Coordenadas locais de um elemento quadrilátero.

Cada ponto nodal J do elemento-tipo tem as coordenadas globais:

$$\underline{x}_J^e = \begin{bmatrix} x_{J1}^e \\ x_{J2}^e \end{bmatrix} \quad (J=1,4) \quad (4.5.3)$$

As coordenadas reais e locais são relacionadas através das funções de interpolação N_J pela seguinte expressão:

$$x_k = N_J(y_1, y_2) x_{Jk}^e \quad (J=1,4 ; k=1,2) \quad (4.5.4)$$

Por sua vez, a interpolação de deslocamentos também pode ser estimado através da seguinte expressão:

$$u_k = N_J(y_1, y_2) u_{Jk}^e \quad (J=1,4 ; k=1,2) \quad (4.5.5)$$

Devido ao facto de estarem a ser utilizados elementos isoparamétricos, as funções de interpolação são as mesmas tanto para os deslocamentos como para as coordenadas.

Para o elemento referido anteriormente, as funções de interpolação serão:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1+y_1)(1-y_2) \\ N_2 &= \frac{1}{4}(1+y_1)(1+y_2) \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1-y_1)(1+y_2) \\ N_4 &= \frac{1}{4}(1-y_1)(1-y_2) \end{aligned} \quad (4.5.6)$$

Teoria das Lajes

Estas funções de interpolação são aplicadas aos três graus de liberdade, deslocamento transversal e rotações. Agrupando as funções de interpolação N_1 a N_{NP} , numa matriz, e sendo $NP=4$, teremos a seguinte matriz:

$$N = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \quad (4.5.7)$$

A partir desta matriz é possível interpolar os deslocamentos da estrutura através dos deslocamentos elementares:

$$\underline{u} = \underline{N} \underline{u}^e \quad (4.5.8)$$

4.5.3. Matriz de deformação

As deformações generalizadas da laje são relacionadas com os deslocamentos e com as rotações pelas equações (4.4.3 a 4.4.7). Substituindo nestas expressões a equação (4.5.8) obtém-se a seguinte relação:

$$\underline{\epsilon} = \underline{B}^L \underline{u}^e \quad (4.5.9)$$

Onde a matriz B^L se designa de matriz deformação, que é composta pelas submatrizes relativas a cada ponto nodal.

$$B^L = [B_1^L \quad B_2^L \quad \dots \quad B_{NP}^L] \quad (4.5.10)$$

Para $NP=4$ têm-se:

$$B^L = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial N_1}{\partial x_1} & 0 & 0 & -\frac{\partial N_2}{\partial x_1} & 0 & 0 & -\frac{\partial N_3}{\partial x_1} & 0 & 0 & -\frac{\partial N_4}{\partial x_1} & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial x_2} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x_2} & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x_2} & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & -\frac{\partial N_1}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & -\frac{\partial N_2}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x_1} & -\frac{\partial N_3}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x_1} & -\frac{\partial N_4}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & N_1 & \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & 0 & N_2 & \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & 0 & N_3 & \frac{\partial N_3}{\partial x_1} & 0 & N_4 & \frac{\partial N_4}{\partial x_1} \\ -N_1 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x_2} & -N_2 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} & -N_3 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x_2} & -N_4 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad (4.5.11)$$

Teoria das Lajes

Ao analisar esta matriz podemos observar que as três primeiras linhas são referentes à deformação por flexão e as duas últimas são referentes à deformação por corte.

4.5.4. Matriz de rigidez

A matriz de rigidez de um elemento relaciona as forças e os deslocamentos nodais do elemento.

$$\underline{K}^e \underline{u}^e = \underline{f}^e \quad (4.5.12)$$

O vector u^e já foi explicitado anteriormente (4.5.2). Em relação ao vector das forças \underline{f}^e é composto pelas forças segundo z, f_z^e , e pelos dois momentos nodais, m_1^e e m_2^e , para cada nó:

Para NP=4 têm-se

$$\underline{f}^e = \begin{Bmatrix} (m_1^e)_1 \\ (m_2^e)_1 \\ (f_z^e)_1 \\ (m_1^e)_2 \\ (m_2^e)_2 \\ (f_z^e)_2 \\ (m_1^e)_3 \\ (m_2^e)_3 \\ (f_z^e)_3 \\ (m_1^e)_4 \\ (m_2^e)_4 \\ (f_z^e)_4 \end{Bmatrix}$$

$$(4.5.13)$$

A matriz K^e é dada pela seguinte expressão:

$$K^e = \int_A (B^L)^T D^L B^L dA \quad (4.5.14)$$

Teoria das Lajes

Para a resolução deste integral utiliza-se a integração de Gauss, como já foi explicada no capítulo anterior, com a diferença que esta integração é uma integração selectiva para reduzir o fenómeno de loking, como já foi explicado anteriormente.

Esta integração consiste em fazer a integração da matriz B para a flexão, com todos os pontos de gauss e para o corte, com o número de pontos de gauss reduzidos.

4.5.5. Condições de apoio

Para reproduzir as condições de apoio de uma laje, aplicam-se restrições aos deslocamentos nodais correspondentes.

Considere-se um segmento AB do bordo da laje, designado por n a direcção da normal ao bordo, e por t a direcção tangente. No caso de lajes com lados paralelos aos eixos gerais x_1 e x_2 , as direcções n e s corresponderão directamente a um ou outro dos eixos gerais conforme a orientação de cada bordo da laje.

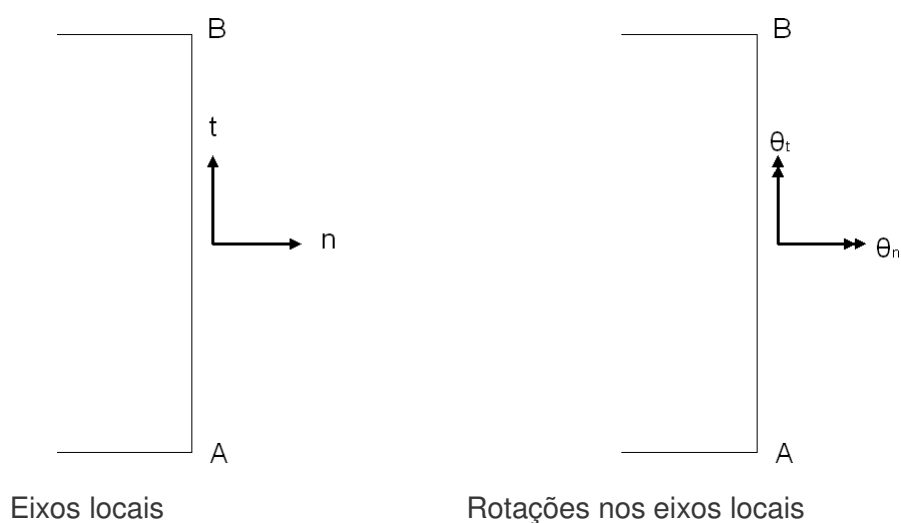


Figura 4.19 – Referenciais locais para a colocação das condições de apoio.

Teoria das Lajes

As hipóteses de condições de apoio ao longo de AB são as seguintes:

Deslocamentos
impedidos

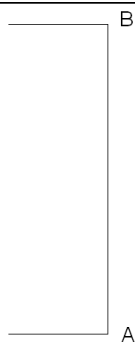
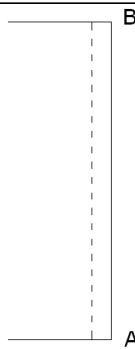
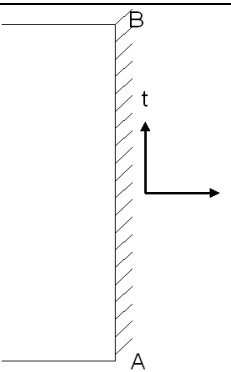
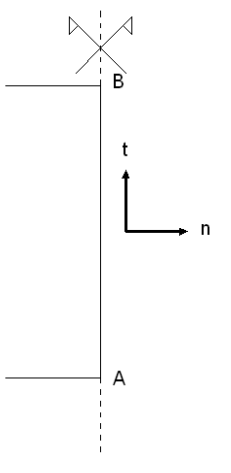
Bordo livre		Nenhum
Bordo simplesmente apoiado		W
Bordo encastrado		W, θ_n, θ_t
Condição de simetria		θ_t

Figura 4.20 – Tabela com as várias condições de apoio.

4.6. Conclusões

Neste capítulo foram apresentados os conceitos fundamentais nos quais se baseia o programa de cálculo desenvolvido nesta tese, é também explicado as duas teorias existentes sobre lajes, lajes finas e lajes espessas. A teoria implementada no presente trabalho refere-se às lajes espessas, devido ao facto de no programa só se poder utilizar este tipos de lajes.

Estava inicialmente previsto a inclusão também da teoria das lajes finas no programa de cálculo, devido a manifesta falta de tempo, não foi possível implementa-la, ficando assim para melhoramentos futuros.

Teoria das Lajes

Capítulo 5

5. Exemplos de aplicação

5.1. Introdução

Neste capítulo é apresentado um exemplo de aplicação com o primeiro objectivo de validar o programa desenvolvido no âmbito desta tese, nomeadamente com a comparação dos resultados obtidos com os resultados da mesma estrutura produzidos por um programa comercial credível (SAP2000).

O programa desenvolvido consiste num módulo de análise estrutural de lajes baseado no método dos elementos finitos. Em paralelo foram elaboradas outras dissertações onde foram desenvolvidos módulos de análise estrutural com o objectivo de criar um pacote de cálculo estrutural mais abrangente para ser utilizado preferencialmente no ISEL, e pelos seus alunos como ferramenta de aprendizagem do método dos elementos finitos. Futuramente podem ser acoplados novos complementos a este programa, através de futuras dissertações, como por exemplo análises com propriedades dos materiais lineares e não lineares, aplicação de outras acções estáticas e dinâmicas, linhas de influência e elementos finitos de outros tipos estruturais, dimensionamento estrutural, etc.

Exemplos de aplicação

Deste trabalho resultou um programa de cálculo automático que efectua uma análise estática de lajes, considerando um material isotrópico com comportamento elástico linear. O cálculo é baseado no método dos elementos finitos associado ao método dos deslocamentos, através da implementação de elementos finitos quadrangulares de quatro nós.

O programa foi elaborado em linguagem Fortran e a representação gráfica foi efectuada com o recurso ao pacote GID.

De seguida são apresentados dois exemplos, o primeiro, uma laje simples, que serve de validação do programa e o segundo, uma laje fungiforme e maciça onde se pretende mostrar todas as valências do programa desenvolvido.

5.2. Exemplo da estrutura de validação do programa

5.2.1. Modelação da estrutura

O exemplo que serve para a validação do programa consiste numa laje em betão armado, quadrada com 6,00m x 6,00m e com 0,15m de espessura. Serão analisadas dois tipos de lajes, quanto ao seu apoio, uma com os bordos encastrados e outra simplesmente apoiada.

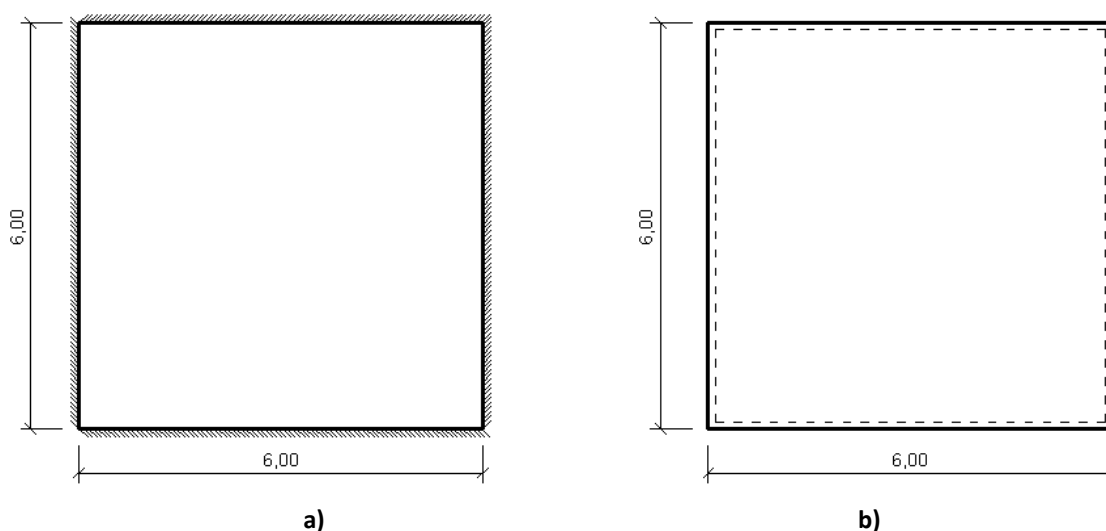


Figura 5.1 – Representação da Laje utilizada na validação do programa (dimensões em metros). a) laje encastrada, b) laje apoiada.

Considerou-se que esta laje faz parte de um edifício de habitação e assim de acordo com o RSA a sobrecarga tem o valor de 1,5 KN/m².

Exemplos de aplicação

Esta estrutura tem três acções aplicadas, uma onde só entra o peso próprio (PP), outra com uma carga a meio vão de 100 KN (CC), no nó 113, e uma outra com uma força de área, que simboliza a sobrecarga, de $1,5 \text{ KN/m}^2$ (SC).

A modelação desta estrutura, foi feita de modo a implementar elementos de laje com quatro nós, distribuídos de forma uniforme e com dimensões de 1,50m x 1,50m. Estes elementos terão a mesma espessura que a laje, 0,15m.

Os nós dos elementos que estão apoiados são os pertencentes aos bordos apoiados (Figura 5.2).

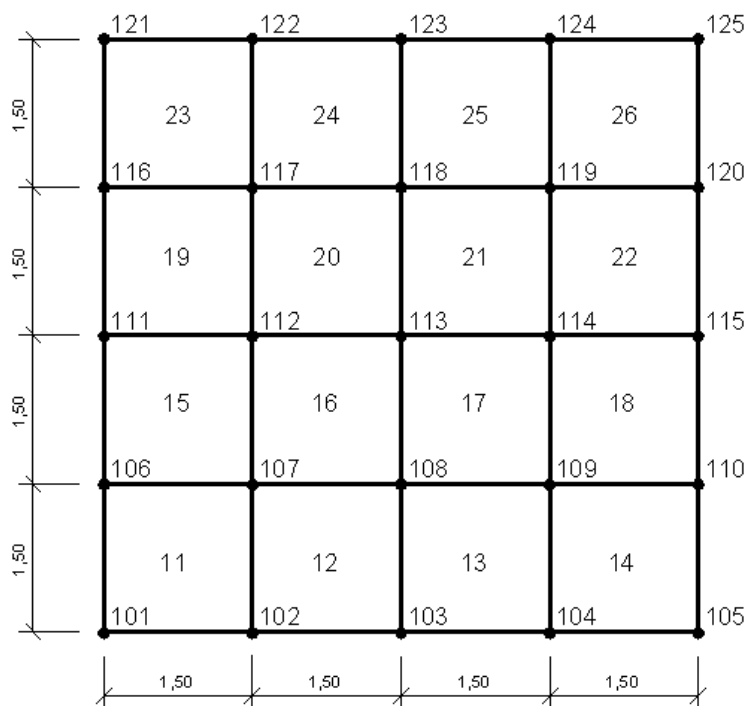


Figura 5.2 – Modelação da Laje utilizada na validação do programa (dimensões em metros).

Exemplos de aplicação

5.2.2. Resultados dos deslocamentos

Deslocamentos a meio vão da laje apoiada para a carga concentrada

Como termo de comparação do deslocamento a meio vão para a carga concentrada a meio vão, calculou-se esse deslocamento, através da solução analítica, pela seguinte fórmula:

$$z = \beta \frac{PL^2}{D} \quad (5.2.1)$$

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

Para o caso desta laje simplesmente apoiada, $\beta = 0,01160$, obtêm-se um deslocamento de:

$$Z = 4,751E-03 \text{ m} = 4,751 \text{ mm}$$

Para uma correcta validação dos resultados, foram elaborados mais duas, uma com 36 elementos e outra com 144 elementos.

Na tabela seguinte são apresentados os valores dos deslocamentos a meio vão, calculados pelo programa de cálculo e pelo SAP2000, fazendo a comparação com a solução analítica calculada anteriormente.

Nº de elementos	16	36	144
Deslocamento no programa (mm)	5,20	4,95	4,89
Deslocamento no SAP2000 (mm)	5,20	4,90	4,90
Solução analítica (mm)	4,75		
% de erro para o SAP	0,00%	1,00%	-0,16%
% de erro para a solução analítica	9,44%	4,16%	2,96%

Tabela 5.1 – Comparações dos deslocamentos a meio vão da laje apoiada para uma carga concentrada a meio vão.

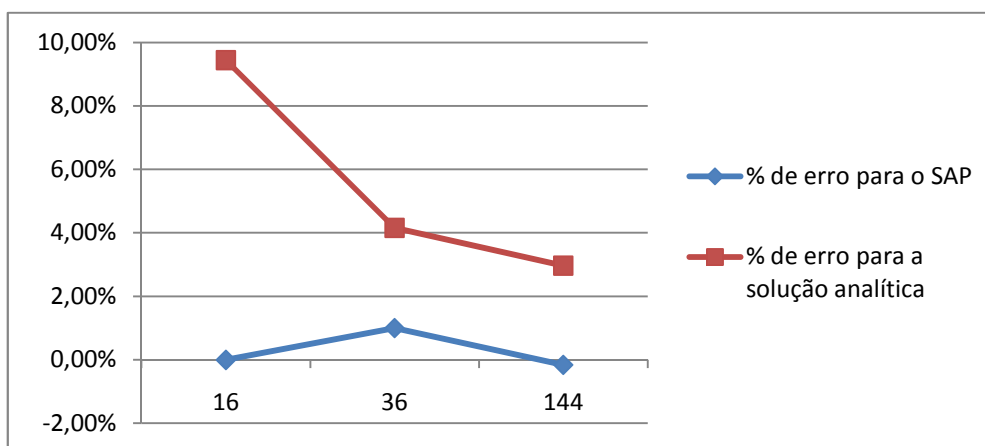


Figura 5.3 – Comparação dos deslocamentos a meio vão da laje apoiada para uma carga concentrada a meio vão.

Exemplos de aplicação

Deslocamentos a meio vão da laje apoiada para a sobrecarga

O deslocamento teórico a meio vão devido a uma carga uniformemente distribuída de uma laje apoiada é dado pela seguinte expressão:

$$z = \alpha \frac{qL^4}{D} \quad (5.2.2)$$

$$D = \frac{Et^3}{12(1 - \nu^2)}$$

Para o caso desta laje simplesmente apoiada, $\alpha=0,01160$, obtém-se um deslocamento de:

$$Z = 8,984E-04 \text{ m} = 0,898 \text{ mm}$$

Na tabela seguinte são apresentados os valores dos deslocamentos a meio vão, calculados através do programa de cálculo e do SAP2000, fazendo a comparação com a solução analítica calculada anteriormente.

Nº de elementos	16	36	144
Deslocamento no programa (mm)	0,97	0,94	0,92
Deslocamento no SAP2000 (mm)	0,90	0,90	0,90
Solução analítica (mm)	0,90		
% de erro para o SAP	8,06%	4,00%	2,42%
% de erro para a solução analítica	8,25%	4,18%	2,60%

Tabela 5.2 – Comparações dos deslocamentos a meio vão da laje apoiada para uma carga uniformemente distribuída.

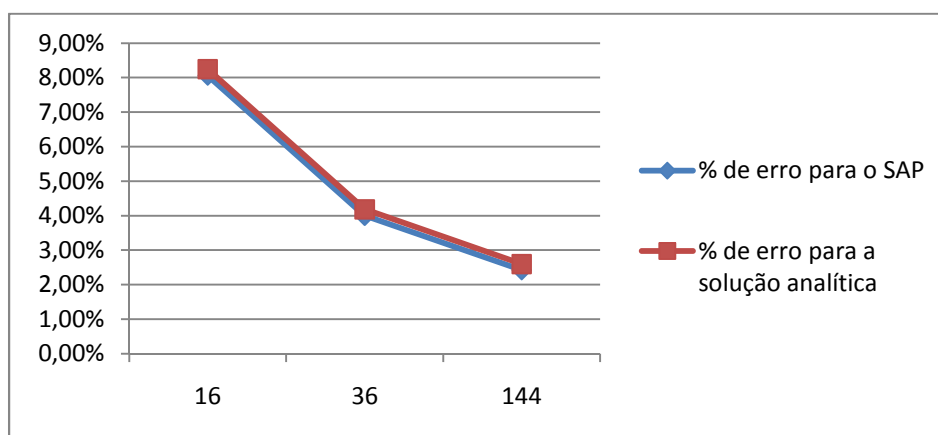


Figura 5.4 – Comparações dos deslocamentos a meio vão da laje apoiada para uma carga uniformemente distribuída.

Exemplos de aplicação

Deslocamentos a meio vão da laje encastrada para a carga concentrada

O deslocamento teórico a meio vão devido a uma carga concentrada a meio vão de uma laje encastrada é dado pela seguinte expressão:

$$z = \beta \frac{PL^2}{D} \quad (5.2.3)$$

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

Para o caso desta laje encastrada, $\alpha=0.00560$, obtém-se um deslocamento de:

$$Z = 2,294E-03 \text{ m} = 2,294 \text{ mm}$$

Na tabela seguinte são apresentados os valores dos deslocamentos a meio vão, calculados pelo programa de cálculo e pelo SAP2000, fazendo a comparação com a solução analítica calculada anteriormente.

Nº de elementos	16	36	144
Deslocamento no programa (mm)	2,02	2,20	2,32
Deslocamento no SAP2000 (mm)	2,60	2,40	2,40
Solução analítica (mm)	2,29		
% de erro para o SAP	-22,21%	-8,26%	-3,15%
% de erro para a solução analítica	-11,83%	-4,01%	1,33%

Tabela 5.3 – Comparações dos deslocamentos a meio vão da laje encastrada com uma carga concentrada.

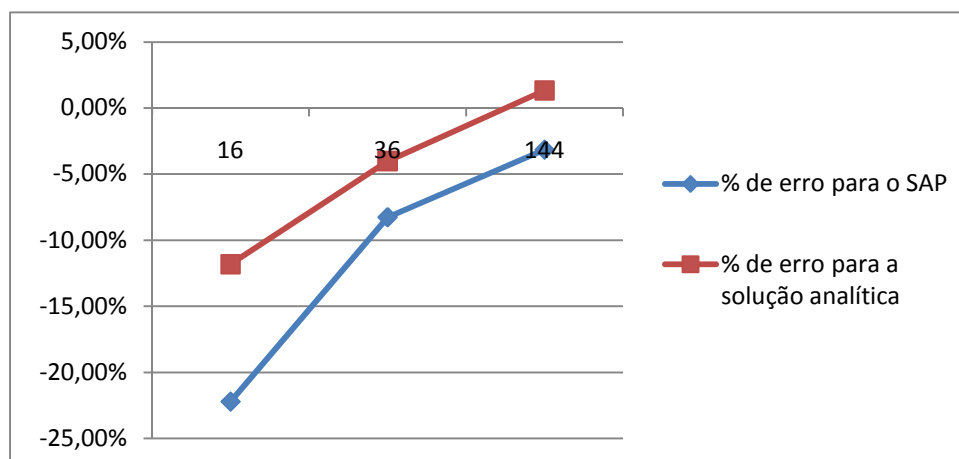


Figura 5.5 – Comparações dos deslocamentos a meio vão da laje encastrada para uma carga concentrada.

Exemplos de aplicação

Deslocamentos a meio vão da laje encastrada para a sobrecarga

O deslocamento teórico a meio vão devido a uma carga uniformemente distribuída de uma laje encastrada é dado pela seguinte expressão:

$$z = \alpha \frac{qL^4}{D} \quad (5.2.4)$$

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

Para o caso desta laje encastrada com $\alpha=0.00126$, obtém-se um deslocamento de:

$$Z = 2,787E-04 \text{ m} = 0,279 \text{ mm}$$

Na tabela seguinte são apresentados os valores dos deslocamentos a meio vão, calculados pelo programa de cálculo e pelo SAP2000, fazendo a comparação com a solução analítica calculada anteriormente.

Nº de elementos	16	36	144
Deslocamento no programa (mm)	0,27	0,28	0,28
Deslocamento no SAP2000 (mm)	0,30	0,30	0,30
Solução analítica (mm)	0,28		
% de erro para o SAP	-9,88%	-7,66%	-6,19%
% de erro para a solução analítica	-2,99%	-0,60%	0,99%

Tabela 5.4 – Comparações dos deslocamentos a meio vão da laje encastrada para uma carga concentrada a meio vão.

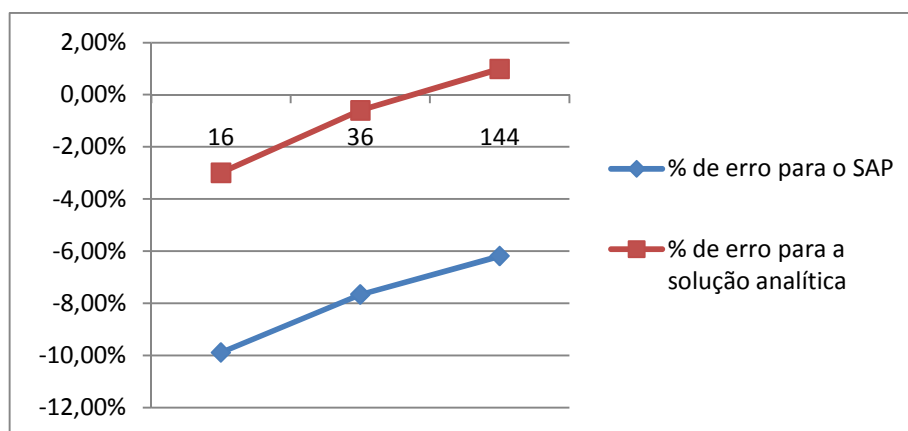


Figura 5.6 – Comparações dos deslocamentos a meio vão da laje encastrada para uma carga uniformemente distribuída.

Exemplos de aplicação

Nas figuras seguintes são apresentadas as deformadas da laje encastrada com a carga concentrada a meio vão que resultaram dos cálculos através do SAP2000 e do programa de cálculo, esta última é apresentada através do programa de modelação gráfica GID.

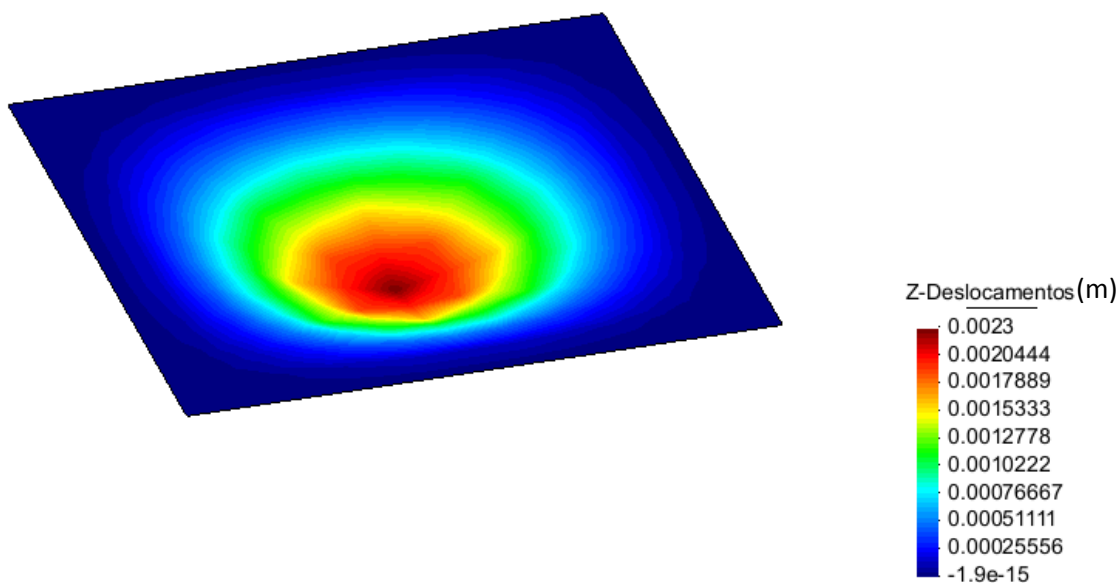


Figura 5.7 – Deformação da laje encastrada representada no programa GID.

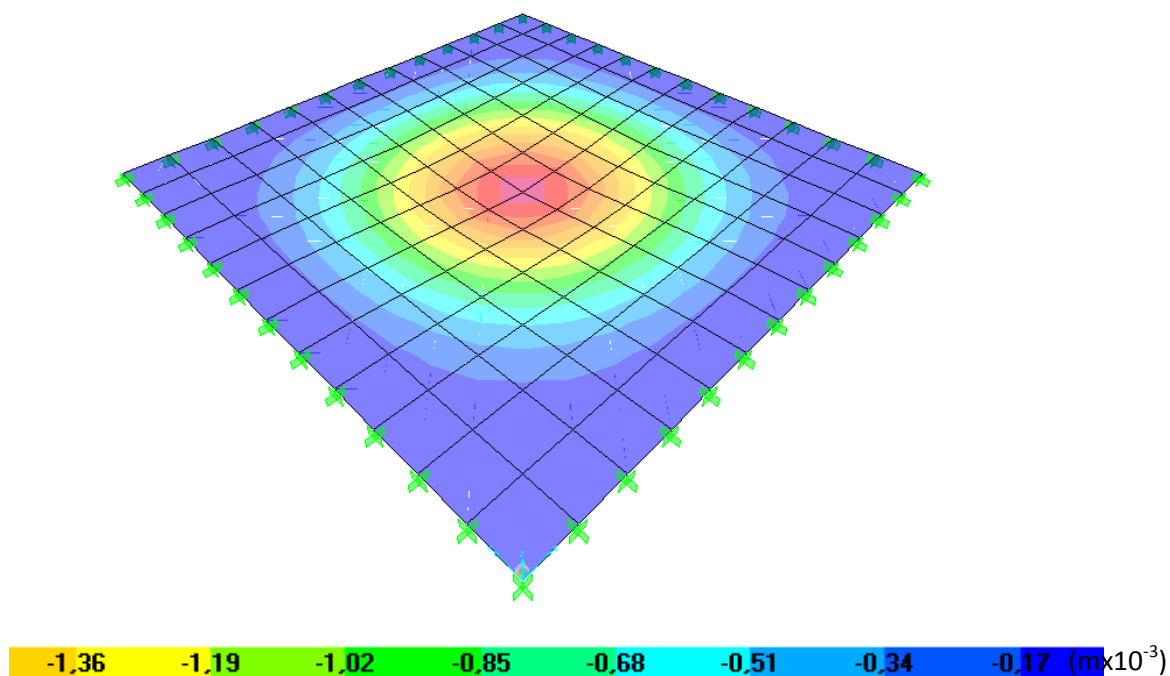


Figura 5.8 – Deformação da laje encastrada representada no programa SAP2000.

Exemplos de aplicação

5.2.3. Resultados dos esforços

Para a comparação dos esforços, utilizou-se a mesma metodologia utilizada na comparação dos deslocamentos. Comparou-se a solução obtida através do programa de cálculo com o resultado obtido através do SAP e da solução analítica, para quatro casos de carregamentos e apoios.

Momento no encastramento da laje encastrada para a carga concentrada

O momento M_{11} no encastramento devido a uma carga concentrada a meio vão é dado pela seguinte expressão:

$$M_{11} = -0,1257P \quad (5.2.5)$$

Para este caso, têm-se:

$$M_{11} = -12,570 \text{ KNm}$$

De seguida são apresentadas as diferenças entre a solução do programa de cálculo e as soluções do SAP e analítica.

Nº de elementos	16	36	144
Momento no programa (kN/m)	-7,71	-8,17	-9,29
Momento no SAP2000 (kN/m)	-9,23	-10,80	-11,78
Solução analítica (kN/m)	-12,57		
% de erro para o SAP	-16,47%	-24,35%	-21,14%
% de erro para a solução analítica	-38,66%	-35,00%	-26,09%

Tabela 5.5 – Comparações dos momentos no encastramento de uma laje encastrada para uma carga concentrada a meio vão.

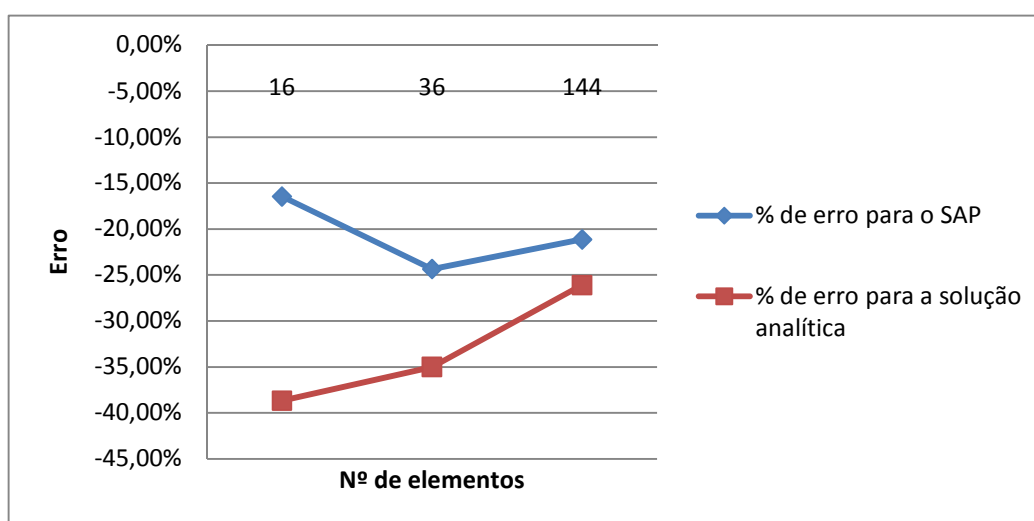


Figura 5.9 - Comparações dos momentos no encastramento de uma laje encastrada para uma carga concentrada a meio vão.

Exemplos de aplicação

Momento no encastramento da laje encastrada para a sobrecarga

O momento M_{11} no encastramento devido a uma carga uniformemente distribuída é dado pela seguinte expressão:

$$M_{11} = -0,0513qL^2 \quad (5.2.6)$$

Para este caso, têm-se:

$$M_{11} = -2,770 \text{ KNm}$$

De seguida são apresentadas as diferenças entre a solução do programa de cálculo e as soluções do SAP e analítica.

Nº de elementos	16	36	144
Momento no programa (kN/m)	-1,03	-1,43	-1,88
Momento no SAP2000 (kN/m)	-1,51	-2,23	-2,61
Solução analítica (kN/m)	-2,77		
% de erro para o SAP	-31,79%	-35,87%	-27,97%
% de erro para a solução analítica	-62,82%	-48,38%	-32,13%

Tabela 5.6 – Comparações dos momentos no encastramento da laje encastrada para uma carga uniformemente distribuída.

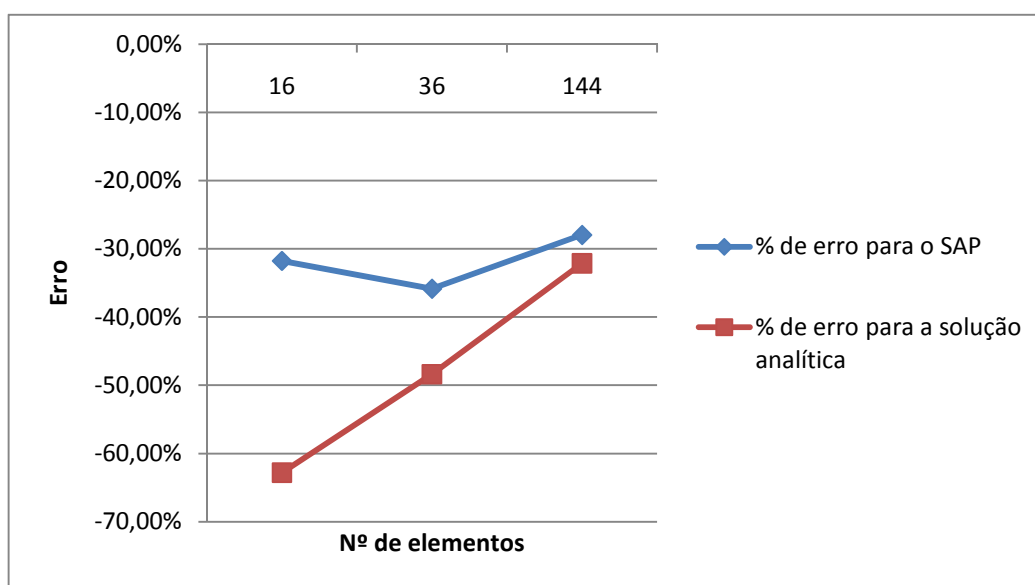


Figura 5.10 - Comparações dos momentos no encastramento da laje encastrada para uma carga uniformemente distribuída.

Exemplos de aplicação

Momento a meio vão da laje encastrada para a sobrecarga

O momento M_{11} a meio vão devido a uma carga uniformemente distribuída de uma laje encastrada é dado pela seguinte expressão:

$$M_{11} = 0,0211qL^2 \quad (5.2.7)$$

Para este caso, têm-se:

$$M_{11} = 1,14 \text{ KNm}$$

De seguida são apresentadas as diferenças entre a solução do programa de cálculo e as soluções do SAP e analítica.

Nº de elementos	16	36	144
Momento no programa (kN/m)	1,24	1,18	1,15
Momento no SAP2000 (kN/m)	1,36	1,30	1,19
Solução analítica (kN/m)	1,14		
% de erro para o SAP	-8,82%	-9,23%	-3,36%
% de erro para a solução analítica	8,83%	3,56%	0,93%

Tabela 5.7 – Tabela com as comparações dos momentos a meio vão da laje encastrada com uma carga uniformemente distribuída.

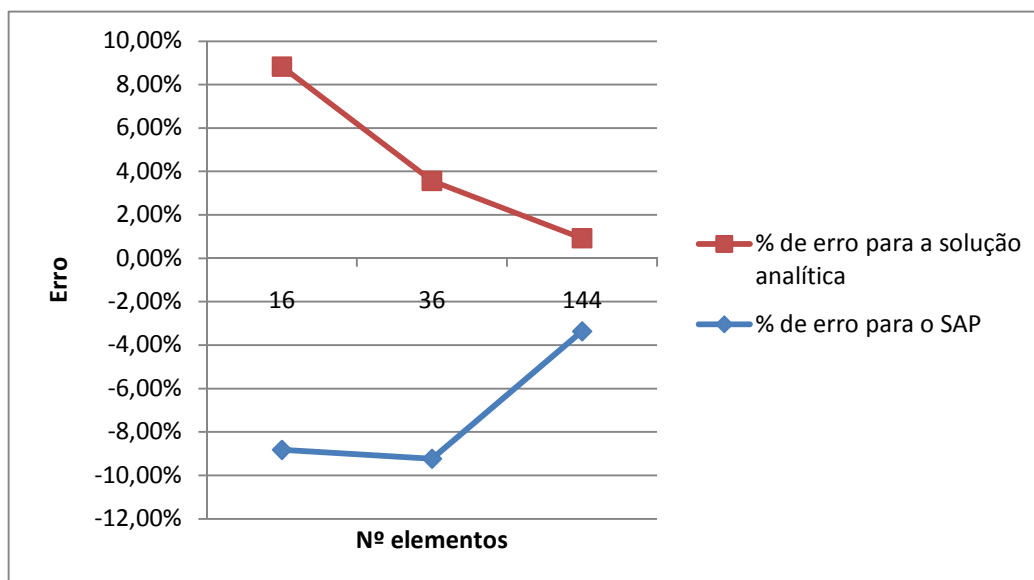


Figura 5.11 - Comparações dos momentos a meio vão da laje encastrada com uma carga uniformemente distribuída.

Exemplos de aplicação

Momento a meio vão da laje simplesmente apoiada para a sobrecarga

O momento M_{11} a meio vão devido a uma carga uniformemente distribuída de uma laje simplesmente apoiada é dado pela seguinte expressão:

$$M_{11} = 0,0442qL^2 \quad (5.2.8)$$

Para este caso, têm-se:

$$M_{11} = 2,39 \text{ kNm}$$

De seguida são apresentadas as diferenças entre a solução do programa de cálculo e as soluções do SAP e analítica.

Nº de elementos	16	36	144
Momento no programa (kN/m)	3,06	2,25	2,46
Momento no SAP2000 (kN/m)	2,46	2,47	2,44
Solução analítica (kN/m)	2,39		
% de erro para o SAP	24,39%	-8,91%	0,82%
% de erro para a solução analítica	28,21%	-5,73%	3,07%

Tabela 5.8 – Comparações dos momentos a meio vão da laje simplesmente apoiada para uma carga uniformemente distribuída.

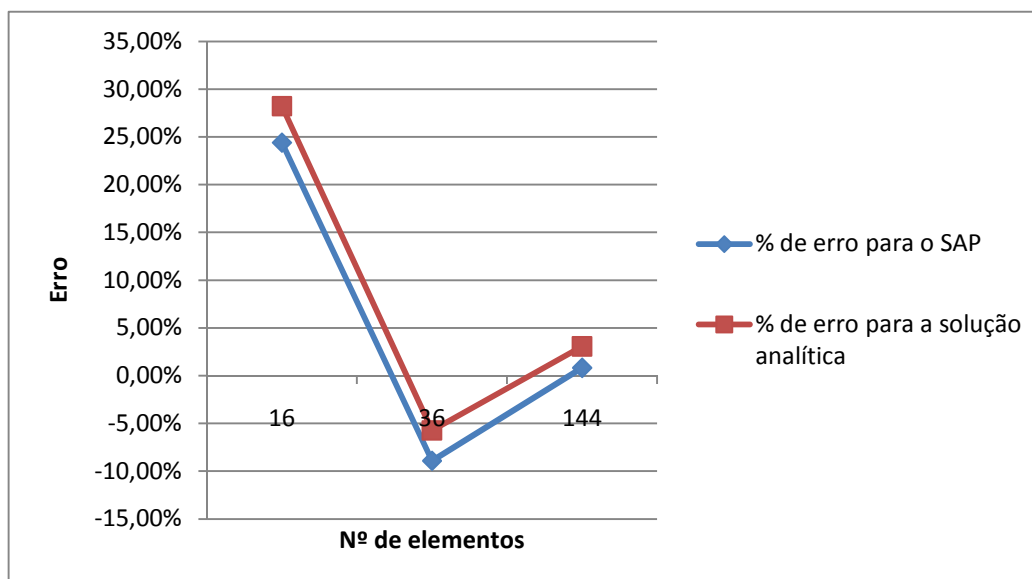


Figura 5.12 – Comparações dos momentos a meio vão da laje simplesmente apoiada para uma carga uniformemente distribuída.

Exemplos de aplicação

De seguida são apresentados os gráficos do momento M_{11} em toda a laje, representado através do SAP2000 e do GID.

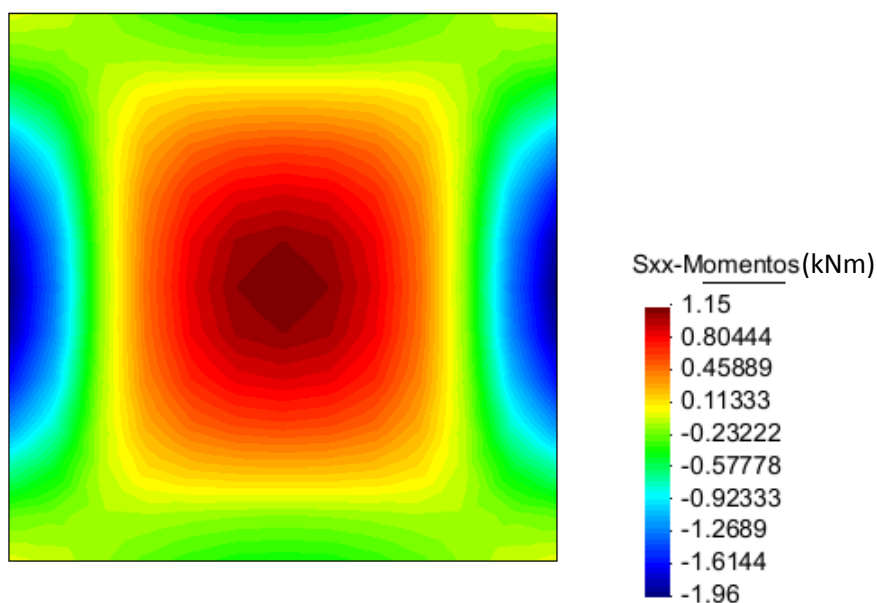


Figura 5.13 – Representação dos momentos M_{11} para a laje encastrada e para o carregamento uniforme através do GID.

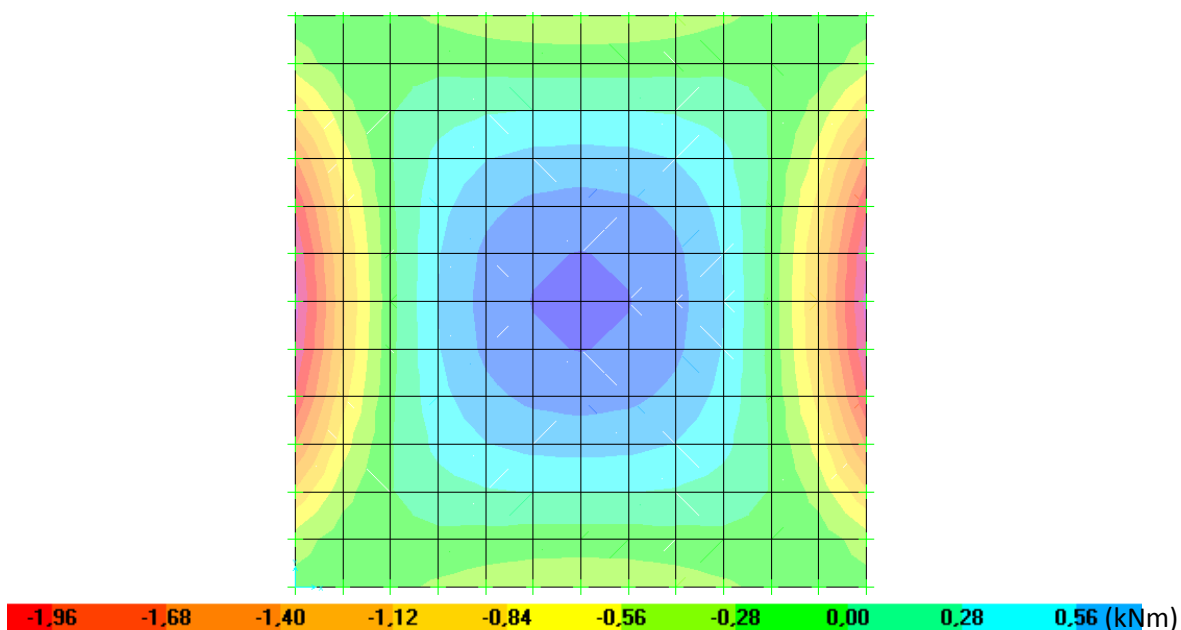


Figura 5.14 – Representação dos momentos M_{11} para a laje encastrada e para o carregamento uniforme através do SAP2000

Exemplos de aplicação

5.2.4. Resultados das tensões

Em relação aos resultados das tensões obtidos através do programa, verificou-se que a percentagem de erros em relação ao SAP e à solução teórica, é muito semelhante, à percentagem de erros obtida para os momentos. Este facto comprova que as tensões estão a ser bem calculadas através do programa, visto que elas variam linearmente com os momentos através da seguinte equação:

$$\sigma_{11} = \frac{6M_{11}}{h^2} \quad (5.2.9)$$

Contudo, para mostrar outra das funcionalidades do programa de cálculo, a representação das tensões através do programa GID, é apresentada na figura seguinte, o campo de tensões da laje encastrada, para o carregamento da sobrecarga. Apresenta-se também sobre a forma gráfica os resultados das tensões obtidos através do programa SAP2000.

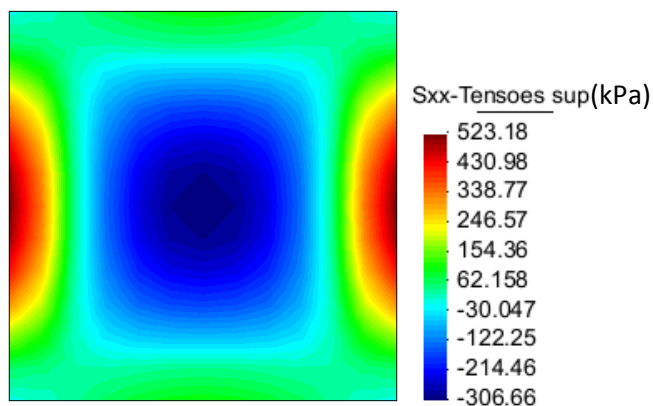


Figura 5.15 – Campo de tensões na face superior da laje totalmente encastrada para a carga uniformemente distribuída (GID).

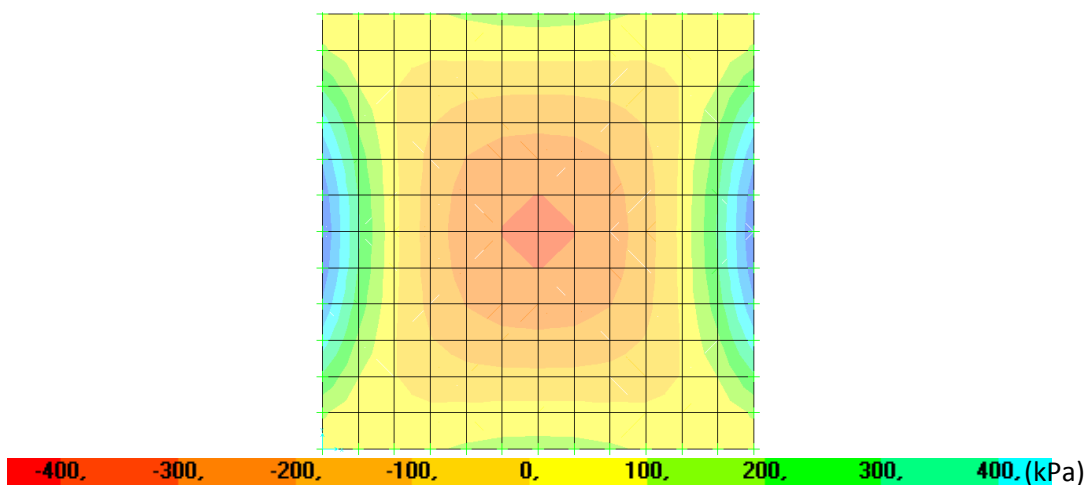


Figura 5.16 – Campo de tensões na face superior da laje totalmente encastrada para a carga uniformemente distribuída (SAP2000).

Exemplos de aplicação

5.3. Exemplo de uma laje maciça e aligeirada

5.3.1. Modelação da estrutura

Neste ponto vai-se analisar uma laje maciça e aligeirada como se apresenta na figura 5.18. Neste exemplo de aplicação pretende-se simular o comportamento de uma laje fungiforme maciça e aligeirada. Posteriormente serão feitas análises das tensões e dos esforços presentes na referida laje.

Os blocos da parte aligeirada serão do tipo “Ferca” e têm as seguintes dimensões:

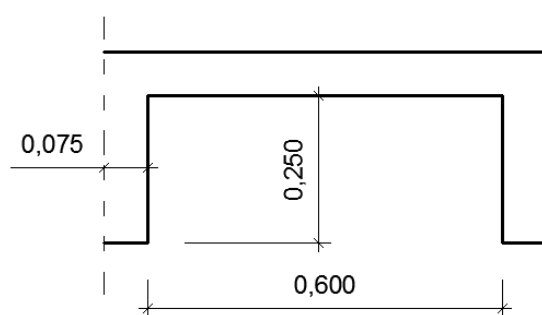


Figura 5.17 – Bloco da parte aligeirada do tipo “Ferca” (dimensões em metros).

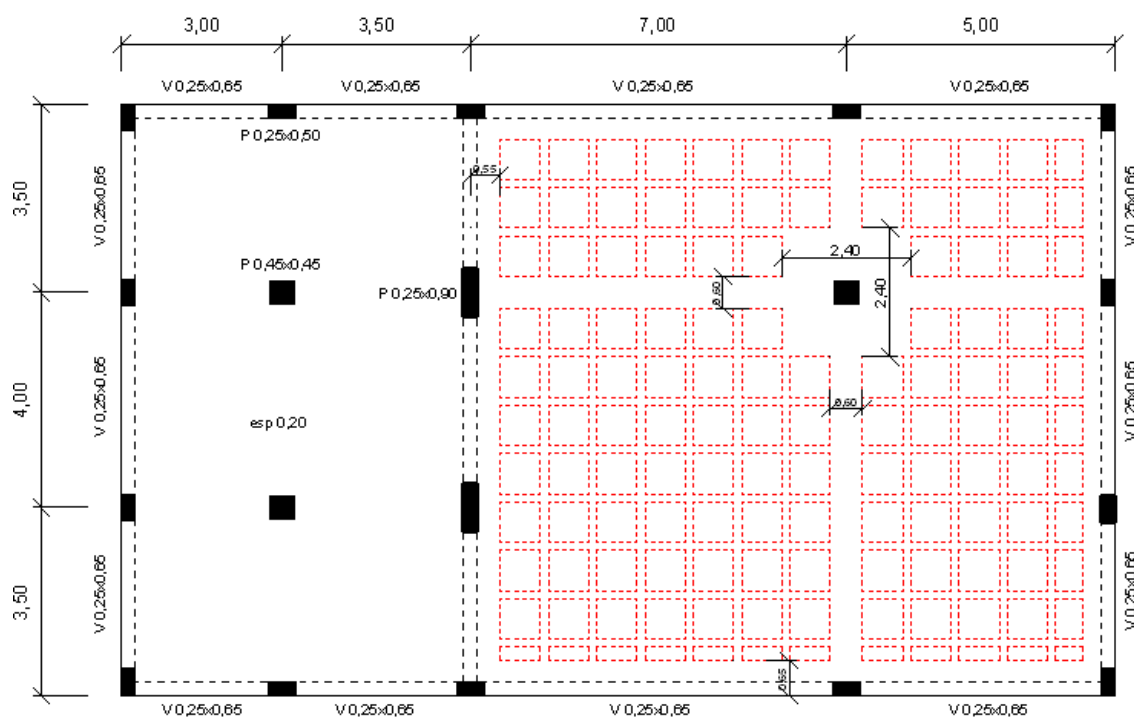


Figura 5.18 – Estrutura da laje (dimensões em metros).

Exemplos de aplicação

Entre cada bloco existem nervuras de 0,15m de largura. Na parte aligeirada existem também nervuras maciças, que dão uma maior resistência à laje.

A laje é constituída também por vigas de 0,25x0,65m que apoiam em pilares de 0,45x0,45m, 0,25x0,50m e 0,25x0,90.

A parte maciça tem uma espessura de 0,20m enquanto a parte aligeirada terá uma espessura de 0,325m e ambas serão feitas de betão armado, quanto às características mecânicas, considerou-se um módulo de elasticidade $E = 30\text{GPa}$ e coeficiente de poisson igual a 0,2.

As acções consideradas para este exemplo foram três.

- Peso próprio (PP) com $25,0\text{ KN/m}^3$.
- Restante carga permanente (RCP) de $3,30\text{ KN/m}^2$.
- Sobrecarga (SC) em habitação de $2,00\text{ KN/m}^2$.

Para a verificação da segurança foram consideradas duas combinações de acções, uma para o estado limite último, onde se multiplica o PP por 1,35 e as restantes cargas por 1,5 e a combinação para o estado limite de deformação onde se multiplica o peso próprio e a restante carga permanente por 3,5 e a sobrecarga por 1,05

COMB1 – $1,5\text{ PP} + 1,5\text{ RCP} + 1,5\text{ SC}$

COMB2 – $3,5\text{ PP} + 1,5\text{ RCP} + 1,05\text{ SC}$

Tendo em vista uma melhor modelação do comportamento da laje, a sua discretização foi dividida em quatro elementos tipo.

Os diferentes elementos são os que representam as vigas, a laje maciça, a zona aligeirada e as zonas maciças da laje fungiforme, com as respectivas espessuras.

Para a representação da parte aligeirada, foi necessário recorrer a uma altura uniforme, de modo a que os elementos tenham a mesma espessura em toda a sua área. Esta altura equivalente foi obtida através da igualdade entre a inércia da secção real e a da secção uniformizada. Foi necessário também determinar o novo valor equivalente para o peso volúmico destes elementos.

Exemplos de aplicação

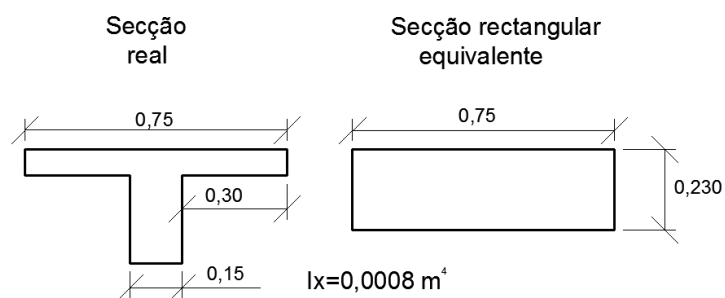


Figura 5.19 – Uniformização da secção da laje aligeirada

A discretização da estrutura foi efectuada de forma a obter uma malha mais homogénea possível, através de elementos com dimensões aproximadas de 0,50x0,50m. Na zona dos pilares optou-se por uma malha mais apertada, devido ao facto de existir uma grande variação de tensões e deste modo obter uma solução mais aproximada.

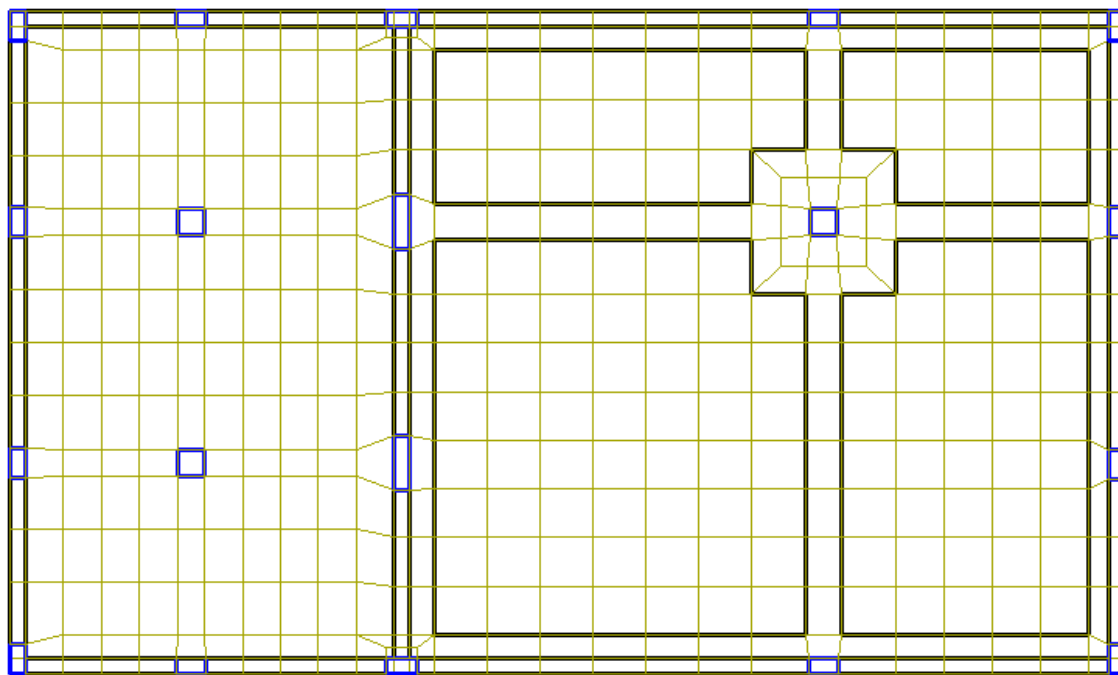


Figura 5.20 – Modelação da estrutura

Os traços mais carregados a preto, representam as variações de materiais ou de espessuras entre os elementos. Os elementos a traço azul representam as secções dos pilares e os elementos a verde representam os restantes elementos.

Exemplos de aplicação

Para representação dos resultados dos deslocamentos, esforços e tensões, foram efectuados dois cortes longitudinais na laje. O corte A, é a zona que contem o valor do deslocamento máximo e o corte B, apresenta uma zona com vários pilares. Estes dois cortes estão apresentados na Figura 5.21.

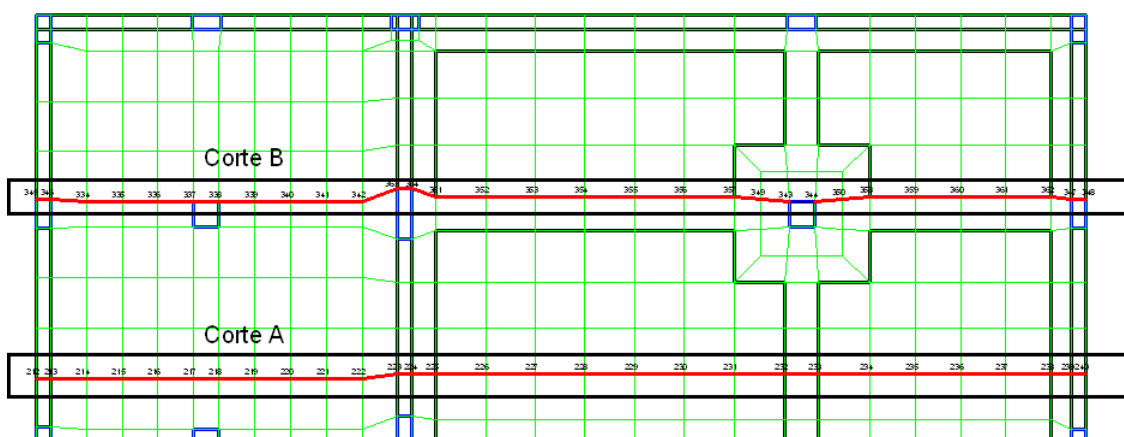


Figura 5.21 – Zonas dos cortes da laje.

5.3.2. Resultados dos deslocamentos

Nesta secção serão apresentados os valores dos deslocamentos máximos nos cortes A e B, para os vários carregamentos, fazendo a comparação entre os resultados obtidos através do programa de cálculo e do SAP200.

Deslocamento nó 229	Carregamentos		
	PP	RCP	SC
Programa (mm)	1,10	0,73	0,44
SAP (mm)	1,07	0,71	0,43
% erro	2,94%	3,50%	3,57%

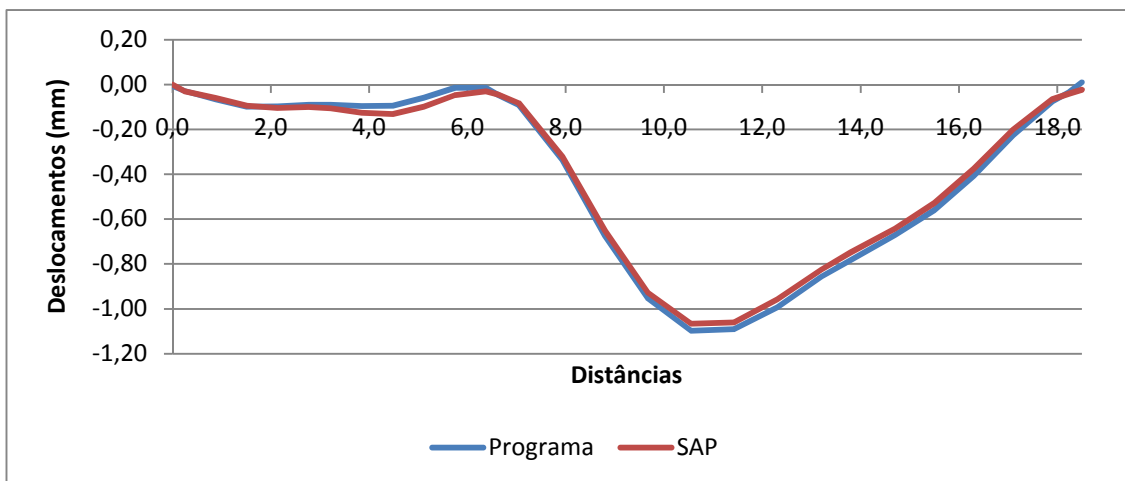
Tabela 5.9 – Comparações dos deslocamentos máximos para o corte A.

Deslocamento nó 354	Carregamentos		
	PP	RCP	SC
Programa (mm)	0,61	0,38	0,23
SAP (mm)	0,61	0,37	0,23
% erro	0,04%	0,97%	0,96%

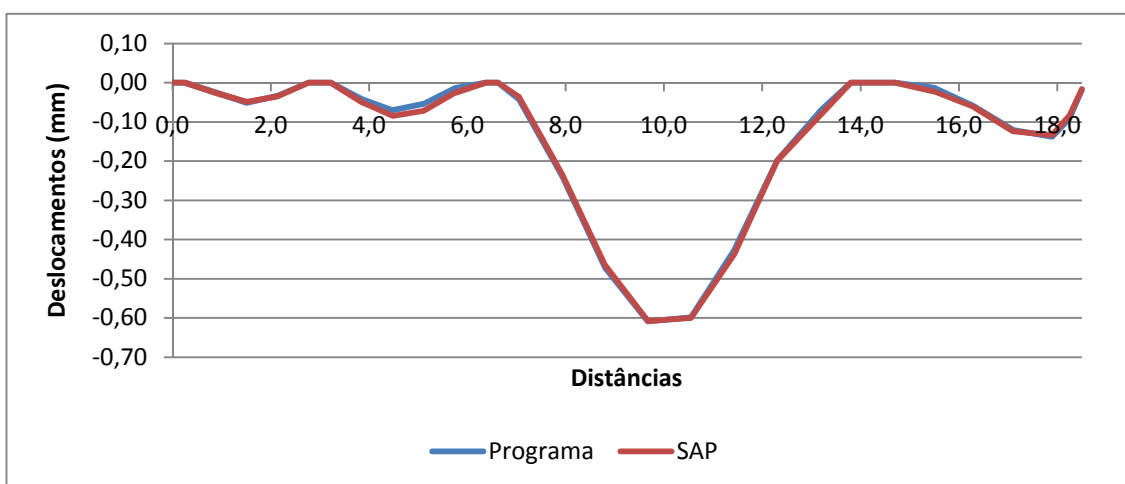
Tabela 5.10 – Comparações dos deslocamentos máximos para o corte B.

Na figura 5.22 apresenta-se a comparação dos deslocamentos ao longo dos cortes A e B para o carregamento do peso próprio.

Exemplos de aplicação



a) Corte A



b) Corte B

Figura 5.22 – Comparação dos deslocamentos obtidos pelo programa e pelo SAP2000, ao longo do corte A (a) e B (b) para o carregamento do peso próprio.

Para a combinação de ações referida anteriormente os resultados dos deslocamentos máximos obtidos através do programa foram:

Corte A nó 229

COMB1 $z = 3,4038E-03m = 3,40 \text{ mm}$

COMB2 $z = 5,3993E-03m = 5,40 \text{ mm}$

Corte B nó 354

COMB1 $z = 1,8233E-03m = 1,82 \text{ mm}$

COMB2 $z = 2,9368E-03m = 2,94 \text{ mm}$

Exemplos de aplicação

Na figura 5.23 apresenta-se a deformação da laje que resultaram dos cálculos através do SAP2000 e do programa de cálculo, esta última é apresentada através do programa de modelação gráfica GID.

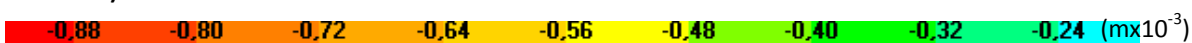
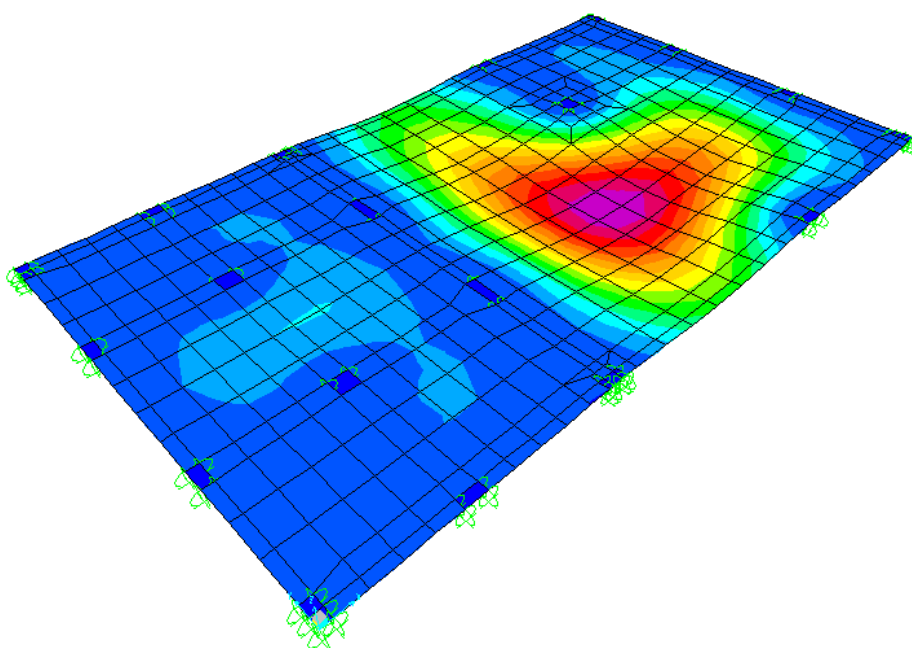
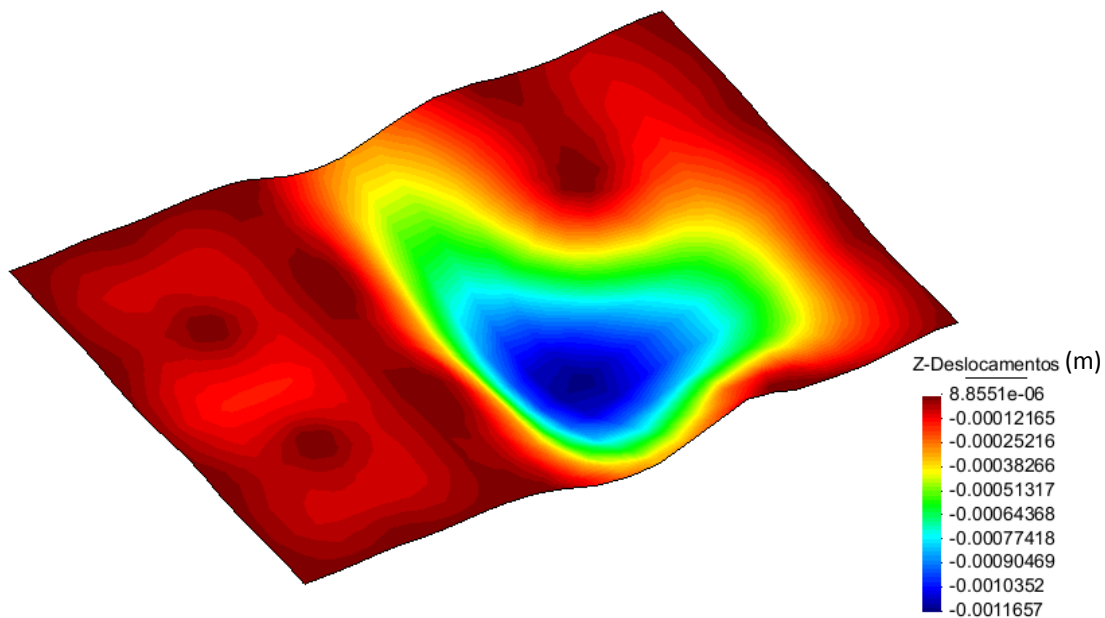


Figura 5.23 – Campo de deslocamentos obtidos pelo programa de cálculo, através do GID (a) e pelo SAP2000 (b), para o carregamento do peso próprio (m).

Exemplos de aplicação

5.3.3. Resultados dos Momentos

De seguida são apresentados os valores médios dos momentos máximos positivos e negativos em cada corte, para as diferentes cargas consideradas, comparando os resultados obtidos através do programa de cálculo e do SAP2000.

Para o cálculo dos valores dos momentos em cada nó do SAP2000, foi feita a média dos momentos no nó de cada elemento.

Momento nó 224	Carregamentos		
	PP	RCP	SC
Programa (kN/m)	-13,00	-8,77	-5,32
SAP (kN/m)	-17,15	-11,62	-7,04
% erro	-24,18%	-24,52%	-24,45%

Tabela 5.11 – Comparações dos momentos máximos negativo para o corte A.

Momento nó 229	Carregamentos		
	PP	RCP	SC
Programa (kN/m)	7,21	4,93	2,99
SAP (kN/m)	7,54	5,12	3,11
% erro	-4,43%	-3,80%	-3,73%

Tabela 5.12 – Comparações dos momentos máximos positivos para o corte A.

Momento nó 343	Carregamentos		
	PP	RCP	SC
Programa (kN/m)	-27,85	-17,04	-10,33
SAP (kN/m)	-35,94	-21,64	-13,12
% erro	-22,50%	-21,26%	-21,24%

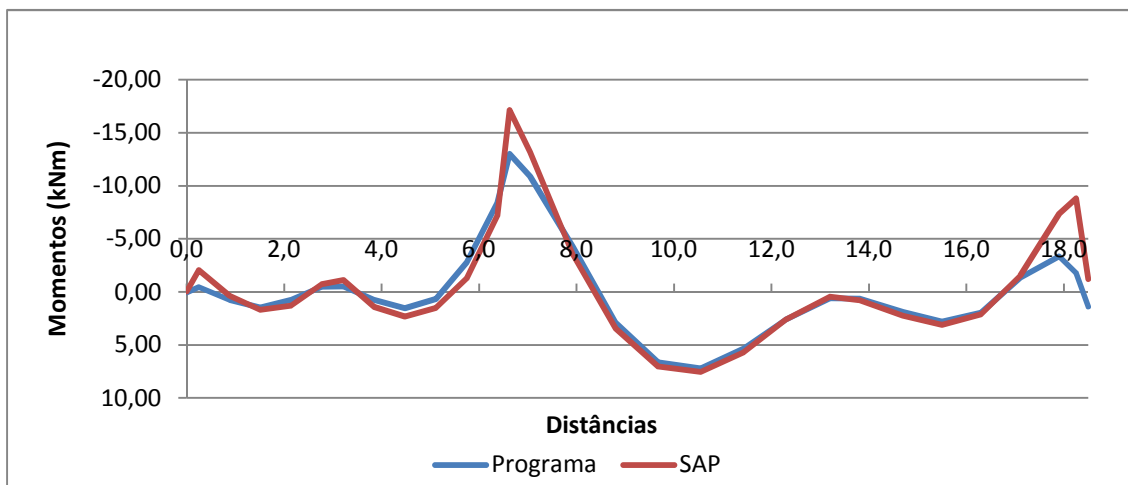
Tabela 5.13 – Comparações dos momentos máximos negativos para o corte B.

Momento nó 355	Carregamentos		
	PP	RCP	SC
Programa (kN/m)	11,75	7,36	4,86
SAP (kN/m)	12,67	7,83	4,74
% erro	-7,27%	-5,95%	2,47%

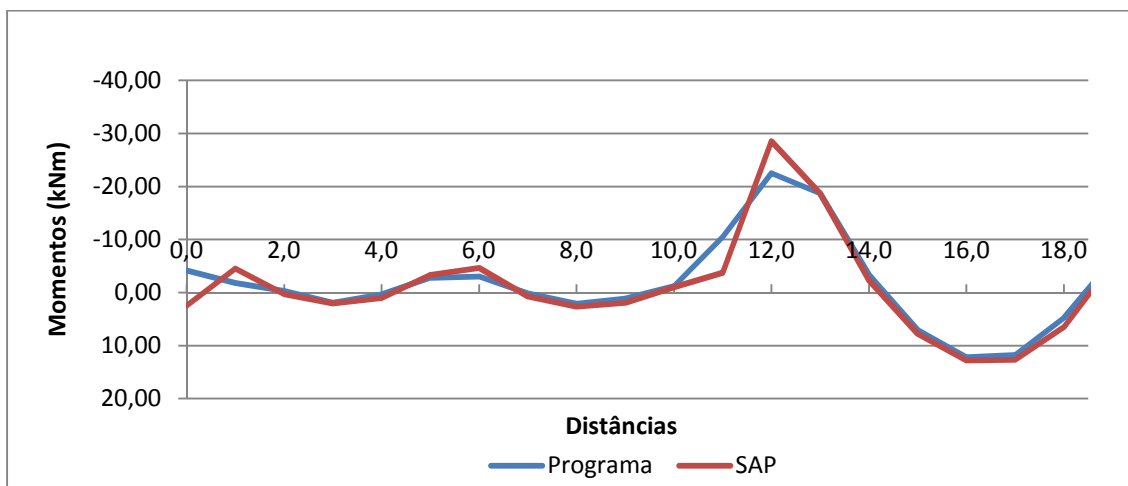
Tabela 5.14 – Comparações dos momentos máximos positivos para o corte B.

Exemplos de aplicação

Nas figuras 5.24 são apresentados, os valores dos momentos ao longo dos cortes A e B para o carregamento do peso próprio.



a) Corte A



b) Corte B

Figura 5.24 – Comparação dos momentos obtidos pelo programa e pelo SAP2000, ao longo do corte A (a) e B (b) para o carregamento do peso próprio.

Para a combinação de ações referida anteriormente os resultados dos momentos máximos positivos e negativos obtidos através do programa foram:

Corte A nó 224

COMB1 $M_{11} = -40,63\text{KNm}$

COMB2 $M_{11} = -64,25\text{KNm}$

Corte A nó 229

COMB1 $M_{11} = 22,61\text{KNm}$

COMB2 $M_{11} = 35,79\text{KNm}$

Exemplos de aplicação

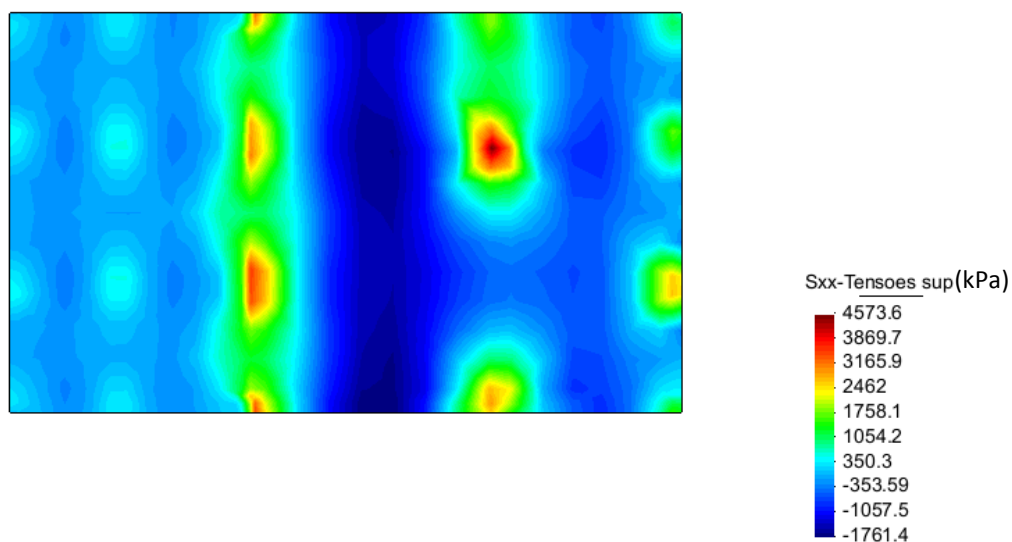
Corte B nó 343

COMB1 $M_{11} = -82,82\text{KNm}$ COMB2 $M_{11} = -133,88\text{KNm}$

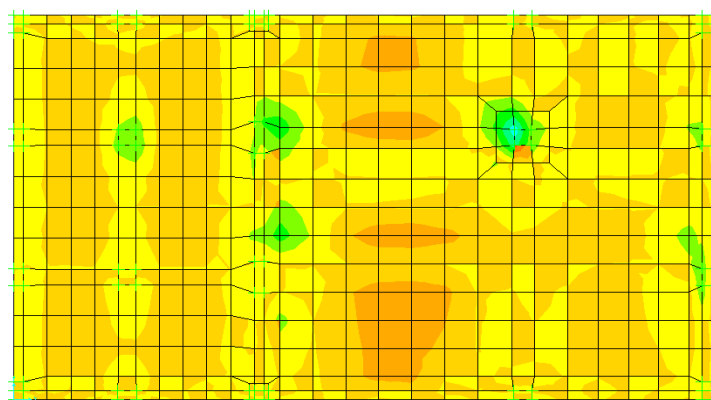
Corte B nó 355

COMB1 $M_{11} = 35,35\text{KNm}$ COMB2 $M_{11} = 56,83\text{KNm}$ 5.3.4. Resultados das tensões

As diferenças nos resultados das tensões obtidas através do programa de cálculo em relação aos resultados obtidos através do SAP2000 são semelhantes às dos momentos. Por este motivo, apresenta-se só o campo de tensões representado no GID e no SAP2000 para o carregamento do peso próprio.



a)



b)

Figura 5.25 – Campo de tensões na face superior obtidos pelo programa de cálculo, (a) e pelo SAP2000 (b), para o carregamento do peso próprio.

5.4. Conclusões

Em relação ao primeiro exemplo, para o caso dos deslocamentos, observa-se que quanto maior for o número de elementos que modela a estrutura, maior será a sua precisão. Verifica-se também que as soluções do programa de cálculo aproximam-se mais da solução analítica que dos resultados obtidos através do SAP2000.

Ainda em relação ao primeiro exemplo, constata-se que em relação aos momentos, os maiores erros existem nas zonas encastradas. Este facto deve-se às funções de interpolação utilizadas no programa de cálculo serem lineares. Revela-se mais gravoso nos momentos no encastramento, porque nestas secções os momentos têm uma variação maior que não é possível aproximar bem com funções de 1º ordem.

Com o exemplo da laje fungiforme, pretendeu-se mostrar todas as potencialidades do programa de cálculo, modelando uma estrutura mais complexa e com diferentes tipos de elementos.

Verificaram-se diferenças muito pequenas no deslocamento máximo, quando comparados com as soluções do SAP2000. Em relação aos momentos, as maiores diferenças verificaram-se nos momentos negativos (zonas de apoios), estes momentos estão na zona da viga que faz a transição entre a laje maciça e a fungiforme. Nesta zona as variações de momentos é mais acentuada pelo que as funções de interpolação do 1º grau não as conseguem modelar e daí as diferenças encontradas.

Com estes dois exemplos de aplicação, verifica-se a utilidade do programa de cálculo estrutural elaborado no âmbito desta tese. Comprova-se desta forma, que o programa produz resultados semelhantes a programas de cálculo comerciais, como o SAP2000, através da comparação dos resultados dos dois exemplos de estruturas referidos anteriormente.

Uma das vantagens deste programa em relação aos programas comerciais, é que este é mais simples de utilizar se considerarmos exemplos simples como o primeiro exemplo apresentado. Assim, este facto torna-o uma excelente ferramenta de trabalho e de aprendizagem do cálculo estrutural baseado no método dos elementos finitos.

Capítulo 6

6. Conclusões finais

6.1. Síntese do trabalho

Nesta dissertação, apresentaram-se os aspectos gerais do método dos elementos finitos aplicado ao cálculo de estruturas, descrevendo os passos fundamentais na análise de uma estrutura utilizando este método.

Depois de se apresentar o MEF genericamente para qualquer tipo de estruturas, apresentou-se uma análise mais detalhada aplicada a estruturas de lajes baseadas neste método, que está contida no capítulo 4. Nesta secção, foram descritos os elementos finitos, bem como todas as pormenorizações do método aplicado a este tipo de estruturas.

A análise das lajes baseia-se em dois tipos de teorias, lajes finas e lajes espessas. A teoria adoptada, diz respeito as lajes espessas, devido à sua maior versatilidade e actualmente os modelos de elementos finitos se basearem neste tipo de teorias devido a esta ser uma formulação mais simples e que se aproxima da formulação dos elementos sólidos. Os elementos obtidos através desta teoria, permitem tanto o estudo das lajes finas e das lajes espessas.

Conclusões finais

Este programa permite analisar uma estrutura determinando deslocamentos, tensões, reacções e esforços, considerando um comportamento elástico e linear do material. Os resultados podem ser posteriormente visualizados através do pacote gráfico GID, para os quais o programa passa automaticamente toda a informação necessária.

Os resultados obtidos no programa foram validados através de dois exemplos, uma laje quadrangular maciça com bordos apoiados e encastrados e uma outra laje, composta por uma parte maciça e outra fungiforme aligeirada. A validação destes dois modelos foi feita comparando os resultados obtidos através do programa com os obtidos através do SAP2000 e soluções analíticas no caso do primeiro exemplo. Esta validação é apresentada no capítulo 5.

6.2. Perspectivas futuras

Todos os programas informáticos no geral e em particular os de cálculos de estruturas começaram por ser pequenas aplicações com várias limitações, que executavam análises estruturais muito específicas e de onde se obtinham poucos resultados. Estes programas foram ao longo dos tempos sofrendo desenvolvimentos, onde se corrigiam erros das versões anteriores, aumentavam as possibilidades de análises e de opções bem como o aumento dos resultados gerados.

O programa elaborado nesta tese, também não foge à regra, este pretende ser a versão 1.0 de um programa de cálculo estrutural que deverá sofrer actualizações, onde serão efectuados melhoramentos e correcções de possíveis erros. Estas actualizações poderão ser feitas no âmbito de novas dissertações elaboradas por alunos do ISEL.

Com este primeiro passo pretende-se criar, posteriormente, um pacote de cálculo estrutural mais alargado, para uso dos alunos do ISEL ou de outros institutos, na aprendizagem ao longo do curso de engenharia civil, do estudo do cálculo de estruturas, baseado no método dos elementos finitos. De entre os possíveis melhoramentos ao programa de lajes salientam-se os seguintes:

- Utilizar outro tipo de elementos.
- Possibilitar a introdução de outras solicitações.
- Verificar a segurança da estrutura.
- Dimensionamento da estrutura.

Em relação ao pacote geral, pode se evoluir para a análise de outros elementos estruturais.

Anexo 1

A1. Estrutura do programa

Nesta secção, vão ser explicadas as principais rotinas do programa de cálculo realizado no âmbito desta tese, de forma a ser perceptível o funcionamento interno do programa.

Este programa executa uma análise estrutural de lajes com base no método dos elementos finitos associado ao método dos deslocamentos. O programa procede a uma análise estática e considera que o material é isotrópico e tem um comportamento elástico linear. Os elementos finitos implementados para a resolução destes problemas são elementos quadrangulares de quatro nós com três graus de liberdade por nó, duas rotações e um deslocamento.

O programa apresenta três etapas distintas, a primeira onde são apresentados os dados, a segunda onde é feito o cálculo estrutural e uma terceira que inclui a saída dos resultados e a sua posterior visualização no pacote gráfico GID.

Estrutura do programa

Leitura de dados

Nesta rotina são lidos todos os dados do ficheiro de dados.

Dados introduzidos:

- Nome da estrutura;
- Nome dos nós dos elementos e suas coordenadas;
- Nome dos elementos, número de nós por elemento, incidências, tipo de material e tipo de secção;
- Materiais e seus valores característicos;
- Propriedades das secções, espessuras;
- Indicação dos nós apoiados;
- Acções e seus valores;
- Número de pontos de gauss necessários para a integração;
- Combinações de acções;

Escrita dos dados

Aqui os dados são escritos para um ficheiro, de forma formatada, para uma fácil leitura e para o utilizador perceber que dados é que foram introduzidos no programa.

Cálculo da matriz de rigidez elementar

De seguida vão ser descritos os passos principais efectuados pelo programa para o cálculo da matriz de rigidez elementar. Entre parênteses estão os nomes dados no programa a cada variável.

Para cada elemento:

- Coordenadas dos nós de cada elemento (cd_elem)
- Matriz D (D)

Para cada ponto de Gauss:

Matriz de rigidez elementar:

- Funções de interpolação e suas derivadas (N, DNY)
- Matriz N e N^t
- Matriz jacobiana (JAC), obtida pela multiplicação de cd_elem*DNY
- Determinante da matriz jacobiana (detJac)
- Inversa da matriz jacobiana (iJac)
- Transformação de coordenadas locais em coordenadas reais (DNX), obtidas através da multiplicação de DNY*iJac

Estrutura do programa

- Matriz B e B^t para a parte da flexão
- Multiplicação de $H_1 * H_2 * \det Jac * esp * B^t DB$
- Assemblagem da matriz de rigidez elementar

De seguida é calculada a parcela do corte. Os passos para este cálculo são semelhantes ao processo de cálculo da parte da flexão, diferindo apenas no número de pontos de gauss e na matriz B.

Colocação das condições de apoio

Colocação das condições de apoio da estrutura na matriz de rigidez global.

Cálculo do vector das forças para as várias acções

De seguida vão ser descritos os passos principais efectuados pelo programa para o cálculo do vector das forças elementares para cada acção, e a simulação de assentamentos dos seus apoios.

O vector das forças elementares do peso próprio é obtido através da multiplicação das seguintes variáveis, para cada elemento e para cada ponto de gauss:

$$H_1 * H_2 * \det Jac * esp * N^t$$

Para as restantes acções o vector das forças elementares é obtido da seguinte forma:

- Forças concentradas. Para cada força concentrada é colocado no vector das forças globais o valor dessa força, na posição de acordo com o grau de liberdade onde está a actuar a força que é função do nó onde está a ser aplicada.
- Forças de vão. Para cada força de vão é analisada o lado onde é aplicada, a sua direcção e o seu tipo e de acordo com estes parâmetros são determinados quinze forças nodais equivalentes.
- Forças de área. Para cada força de área é multiplicado o seu valor pela área do elemento e posteriormente dividido esse valor pelo número de nós do elemento.
- Assentamentos de apoio. Para cada assentamento de apoio, é somado ao valor do vector das forças globais na posição respectiva, o resultado da multiplicação do valor do assentamento de apoio pelo valor da rigidez do apoio.

Estrutura do programa

Depois de calculado o vector das forças elementares para cada acção, é feita a sua assemblagem ao vector das forças globais.

Resolução do sistema $Ku=F$

Com a resolução deste sistema, é calculado o vector dos deslocamentos com base nestes valores calculam-se todas as outras grandezas (deformações, tensões e esforços).

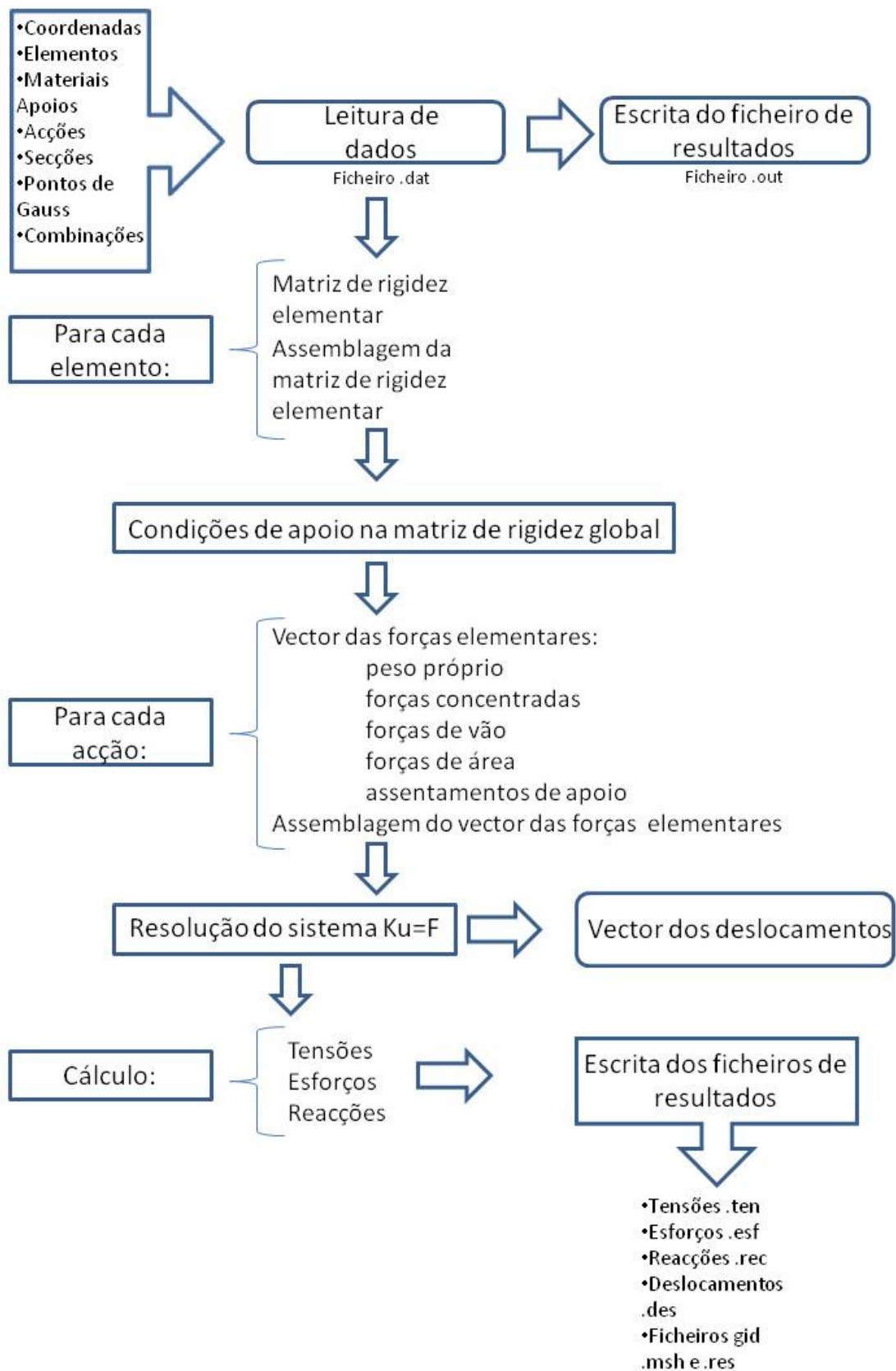
O sistema é resolvido da seguinte forma:

- Cálculo da inversa da matriz de rigidez global k_g
- Cálculo dos deslocamentos pela multiplicação da inversa da matriz de rigidez global com o vector das forças globais.
- Cálculo dos deslocamentos de acordo com as combinações de acções dadas.
- Escrita para um ficheiro de dados dos valores dos deslocamentos para cada acção e para cada combinação.

Após a resolução do sistema de equações são calculados os valores das tensões, esforços e reacções. Posteriormente, cada um destes valores é escrito para ficheiros de resultados diferentes.

Estrutura do programa

Esquema da organização de cálculo global do programa.



Estrutura do programa

Anexo 2

A2. Manual do utilizador

A2.1. Introdução

Como qualquer programa informático, o programa elaborado nesta dissertação, tem procedimentos de utilização específicos e é devido a este facto, que serão descritos no presente manual do utilizador.

Este manual tem o objectivo de explicar as funcionalidades e procedimentos de utilização com todos os pormenores que o utilizador deverá ter em conta para o correcto manuseamento deste programa, desde a introdução dos dados até à apresentação dos resultados no programa GID.

Para uma melhor compreensão na utilização deste programa, foi elaborado um exemplo simples de uma laje, que vai servir de base a todas as etapas do manual.

Manual do utilizador

Para explicar todas as etapas do programa vai ser utilizado um exemplo de uma laje com estrutura maciça de 4m x 3m com dois bordos apoiados e dois bordos encastrados (Figura A.2.1).

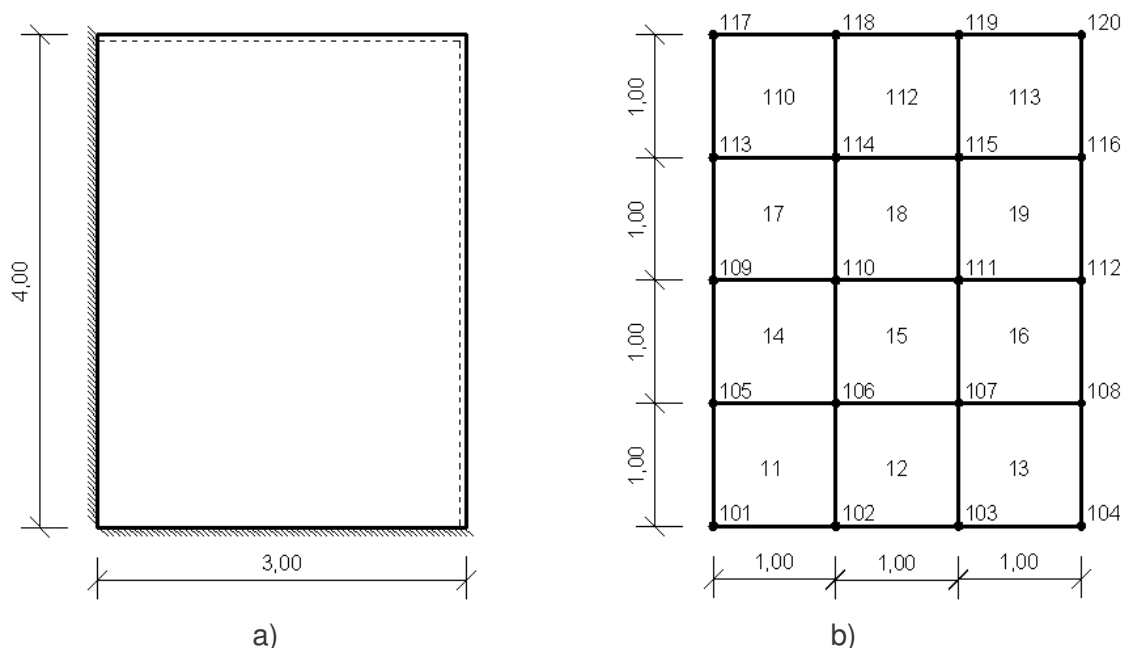


Figura A.2.1- Exemplo da estrutura utilizada neste manual. a) Estrutura da laje, b) Modelação da laje

Este programa funciona através da introdução de ficheiros de dados que podem ser manipulados num editor simples de texto, como o bloco de notas do Windows. Todos os ficheiros, quer sejam de entrada ou de saída do programa, têm sempre o mesmo nome escolhido pelo utilizador, só que com extensões diferentes.

Este nome é dado só ao ficheiro de dados .DAT, e depois introduzido no início da execução do programa, quando for solicitado o nome do ficheiro de dados.

Para além do ficheiro de dados .DAT existem também as seguintes extensões de ficheiros:

- .DAT - ficheiro de introdução de dados
- .OUT - ficheiro de resultados que contém os dados introduzidos no programa
- .DES - ficheiro de resultados dos deslocamentos
- .ESF - ficheiro de resultados dos esforços
- .REC - ficheiro de resultados das reacções
- .TEN - ficheiro de resultados das tensões
- .MSH - ficheiro de resultados da malha da estrutura para ser utilizado no programa GID
- .RES - ficheiro de resultados dos deslocamentos e das tensões para ser utilizado no programa GID

A2.2. Introdução de dados através do ficheiro de dados .DAT

As duas primeiras linhas do ficheiro são reservadas à descrição da estrutura que se vai calcular (Figura A.2.2).

```
Edificio A  
Laje A1
```

Figura A.2.2– Duas primeiras linhas do ficheiro de dados.

Cada bloco de dados é iniciado com o nome do tipo de dados com que serão introduzidos, este nome pode ser abreviado, sendo necessário que a primeira palavra esteja correcta. Cada bloco é finalizado com a palavra “**pausa**” e o ficheiro de dados será terminado com a palavra “**fim**”.

É de salientar que todas as palavras usadas no ficheiro de dados podem ser escritas tanto em letras maiúsculas como em letras minúsculas.

Cada conjunto de dados pode ser introduzido no ficheiro de forma aleatória.

Deverá ser introduzido o ponto (“.”) como separador decimal. A última linha do ficheiro deverá ficar em branco.

Coordenadas

O bloco das coordenadas terá de ser iniciado com a palavra “**nos**”, de seguida, em cada linha serão colocados o nome de cada nó bem como as suas coordenadas, x e y, respectivamente. A ordem pela qual se colocam os nós é indiferente (Figura A.2.3).

Exemplificação:

“Nos”

“Nome do nó” “coordenada x” “coordenada y”

“Pausa”

Manual do utilizador

```

Nos :
101 0 0
102 1 0
103 2 0
104 3 0
105 0 1
106 1 1
107 2 1
108 3 1
109 0 2
110 1 2
111 2 2
112 3 2
113 0 3
114 1 3
115 2 3
116 3 3
117 0 4
118 1 4
119 2 4
120 3 4
Pausa

```

Figura A.2.3– Bloco das coordenadas.

Incidências

Este conjunto de dados tem a função de identificar a composição, a secção e o material de cada elemento. Este bloco é iniciado pelo nome “lajes”, nele serão introduzidos os nomes de cada elemento, o número de nós total do elemento, seguido do nome de cada nó do elemento. São também introduzidos em cada linha o tipo de material do elemento bem como da sua secção (Figura A.2.4).

“Laje”

“Nome do elemento” “numero de nós” “nome dos nós” “numero do material”
“numero da secção”

“Pausa”

```

Laje:
11 4 105 101 102 106 1 1
12 4 106 102 103 107 1 1
13 4 107 103 104 108 1 1
14 4 109 105 106 110 1 1
15 4 110 106 107 111 1 1
16 4 111 107 108 112 1 1
17 4 113 109 110 114 1 1
18 4 114 110 111 115 1 1
19 4 115 111 112 116 1 1
110 4 117 113 114 118 1 1
112 4 118 114 115 119 1 1
113 4 119 115 116 120 1 1
Pausa

```

Figura A.2.4– Bloco de dados com a tabela de incidências.

Materiais

Neste bloco serão introduzidos as características dos diversos materiais presentes na estrutura. Este bloco será iniciado pela palavra “**materiais**”. Na primeira linha é referido o tipo de material, como neste programa o único material que é considerado é o isotrópico, deverá ser escrito a letra “I”. As linhas seguintes são iniciadas pelo nome do material que vai ser referido, e como se trata de um material isotrópico, irá ser seguido dos seguintes parâmetros, módulo de elasticidade, coeficiente de poisson, peso volúmico e massa volúmica (Figura A.2.5). Todos os materiais devem estar numerados por ordem crescente e não se pode saltar a numeração.

“Material”

“Tipo de material

“Numero identificativo do material” “módulo de elasticidade” “coeficiente de poisson” “peso volúmico” “massa volúmica”.

“Pausa”

```
 Materiais
 I
 1 2.5e7 0.2 25 2.55
 Pausa
```

Figura A.2.5– Bloco com os dados dos materiais.

Apoios

Este bloco irá conter os nós apoiados. Este conjunto de dados tem de ser iniciado com a palavra “**apoios**”. De seguida são introduzidos os nomes de cada nó que está apoiado bem como os graus de liberdade que estão impedidos, se um grau estiver impedido deve ser colocado o número “1” se estiver livre é colocado o número “0”. Os graus de liberdade devem ser colocados por esta sequência, as duas rotações seguida da translação (Figura A.2.6).

“Apoios”

“Numero do nó apoiado” “rotação em x” “rotação em y” “translação em z”

“Pausa”

Manual do utilizador

```

Apoios :
101 1 1 1
102 1 1 1
103 1 1 1
104 1 1 1
105 1 1 1
108 0 1 1
109 1 1 1
112 0 1 1
113 1 1 1
116 0 1 1
117 1 1 1
118 1 0 1
119 1 0 1
120 1 0 1
Pausa

```

Figura A.2.6– Bloco com os nós apoiados.

Secções

Neste bloco serão colocadas as espessuras dos elementos. O bloco é iniciado pela palavra “**secções**”. Na segunda linha é colocado o número que referência a secção, bem como a sua espessura (Figura A.2.7). Todas as secções deveram estar numeradas por ordem crescente e não se pode saltar a numeração, ex: 1,2,3,4....

“Secções”

“Numero identificativo do material” “espessura da secção”

“Pausa”

```

Secções
1 0.15
Pausa

```

Figura A.2.7– Bloco com as características das secções.

Pontos de Gauss

Aqui serão indicados o número de pontos de gauss pelo qual será efectuada a integração. O nome do bloco é “**pontos de gauss**” e serão colocados dois valores, o valor da integração da parcela de flexão e de corte da matriz de rigidez elementar. O número de pontos pode variar de 1 a 3 (Figura A.2.8).

“Pontos de gauss”

“Numero de pontos de gauss para as forças” “Numero de pontos de gauss para os deslocamentos”

“Pausa”

```

Pontos de Gauss
2 2
Pausa

```

Figura A.2.8– Bloco com os dados dos pontos de gauss.

Combinações

Nesta secção serão indicadas as combinações de acções utilizadas. A palavra inicial será “**combinações**”. Nas linhas seguintes são indicadas o nome das combinações e os respectivos coeficientes para cada acção (Figura A.2.9).

“Combinações”

“Numero da combinação”

“Pausa”

```
Combinações
1 1.5 1
2 1 2
Pausa
```

Figura A.2.9 – Bloco com os dados das combinações de acções

Acções

Neste bloco são inseridas as acções aplicadas na estrutura, com a indicação dos valores da direcção, sentido, tipo e valor das forças incluídas em cada acção. Este bloco será iniciado pela palavra “**acção**”. De seguida é apresentado um exemplo de acções aplicadas à estrutura considerada anteriormente (Figura A.2.10).

“Acções”

“Numero de acções”

“Nome da acção”

“Indicação da existência ou não de peso próprio”

“Indicação da palavra do tipo de forças”

“Pausa”

```
Accao
2
Peso proprio
1
Pausa
Sobrecarga
0
concentradas
101 0 -10 0
102 -20 20 0
vao
12 1 13 1 -100 0.5
13 2 12 1 200
14 2 13 3 -200
15 3 13 1 100 200
16 3 13 3 0 200
17 4 3 1 100 200 0.5 1
18 4 3 3 0 200 0.5 1
area
19 100
assentamentos
101 0.01
105 0.01
Pausa
```

Figura A.2.10 – Bloco com os dados referentes às acções.

Resumindo, a estrutura vai estar submetida a duas acções, uma chamada de peso próprio que só terá a acção do peso próprio e uma outra chamada de sobrecarga que não terá a acção do peso próprio mas terá forças concentradas, de vão e de área aplicadas à estrutura e ainda assentamentos de apoio.

A metodologia para a indicação dos valores neste conjunto de dados é o seguinte: na linha a seguir à palavra acção é indicado o número de acções consideradas. Depois de indicado o número de acções, são iniciados os blocos, que descrevem as forças que cada acção contém. Estes novos blocos são iniciados com o nome de cada acção e finalizado com a palavra “**pausa**”. A seguir ao nome da acção tem de ser indicado se nessa acção está presente o peso próprio. Esta indicação tem a seguinte simbologia, 1 para a indicação de que na acção está presente o peso próprio, 0 caso contrário. Depois são indicados os vários tipos de forças presentes em cada acção.

Forças concentradas

A indicação das forças concentradas é iniciada com a palavra “**concentradas**”. Estas forças concentradas só podem ser aplicadas nos nós dos elementos e segundo os graus de liberdade globais. A indicação destas forças será feita do seguinte modo, primeiro é indicado o nome do nó onde é aplicada a força depois são indicados três valores cada um correspondente a cada grau de liberdade, sendo colocado no grau de liberdade onde é aplicada a força, o valor dela bem como o seu sentido e nos outros graus o valor de 0 (Figura A.2.11).

“concentradas”

“Numero do nó” “grau de liberdade X1” “grau de liberdade X2” “grau de liberdade Z”

```
concentradas
101 0 -10 0
102 -20 20 0
```

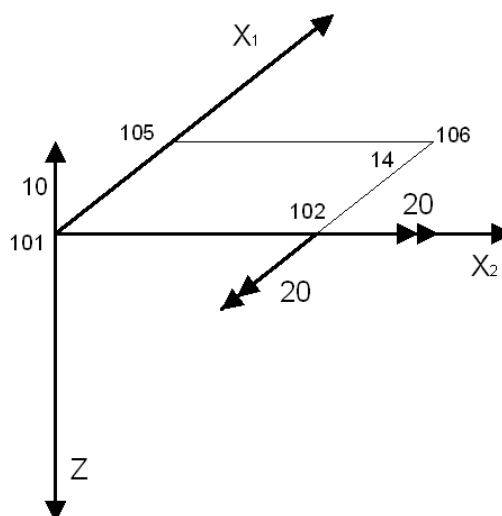


Figura A.2.11 – Indicação dos parâmetros das forças concentradas e sua representação gráfica.

Forças de vão

A indicação das forças de vão é iniciada com a palavra “vão”. Estas forças podem ser distribuídas ou concentradas e são aplicadas num lado do elemento finito. A definição destas forças passa sempre pela introdução de 4 parâmetros, direcção, tipo de carregamento, lado do elemento onde é aplicado e valores das forças (Figura A.2.12).

A designação deste tipo de forças no ficheiro de dados deverá seguir a seguinte sequência:

- Nome do elemento onde está aplicada a força
- Tipo de força
- Direcção onde é aplicada a força
- Lado do elemento onde está aplicada a força
- Parâmetros caracterizadores de cada tipo de força (distâncias aos nós e valores das forças)

```

vão
12 1 13 1 -100 0.5
13 2 12 1 200
14 2 13 3 -200
15 3 13 1 100 200
16 3 13 3 0 200
17 4 3 1 100 200 0.5 1
18 4 3 3 100 0 0.5 1

```

Figura A.2.12– Bloco com o parâmetros das forças de vão

Em relação às direcções, podem ser globais ou locais. De seguida são apresentados os referenciais para cada tipo bem como os códigos que representam cada direcção (Figura A.2.13 e A.2.14).

Direcções globais

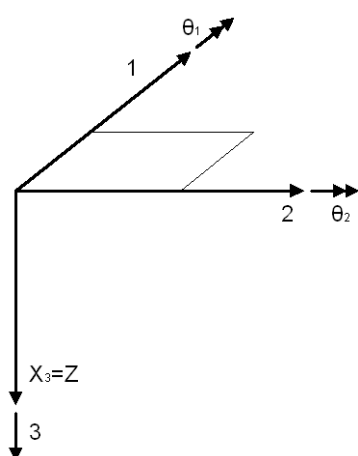


Figura A.2.14 – Referencial das direcções globais.

Direcções locais

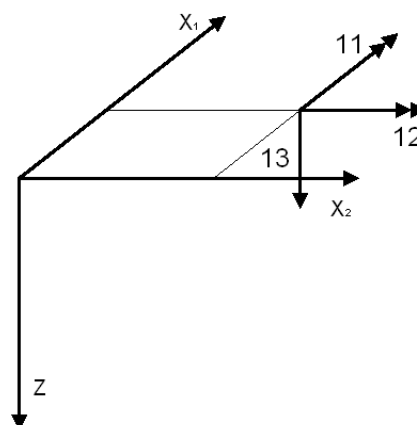


Figura A.2.13 – Referencial com as direcções locais.

Em termos de lados, como estamos a falar de elementos quadriláteros, estes podem ser quatro, com a seguinte numeração:

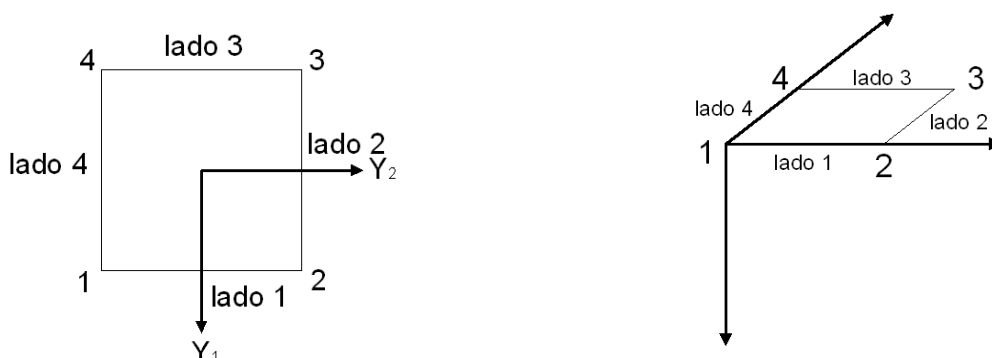


Figura A.2.15 – Referencial com o número de cada lado do elemento

As forças de vão podem ser de quatro tipos, forças concentradas, forças uniformemente distribuídas em todo o lado, forças trapezoidais em todo o lado e forças parciais.

Tipo 1 – forças concentradas

Estas forças representam uma força concentrada num dos lados do elemento, para a sua caracterização são necessários dois parâmetros, o valor da força e a distância a que fica do primeiro nó do lado do elemento onde é aplicada. Este tipo de forças não pode ser aplicado nas direcções das rotações, direcções 1,2,11 e 22 (Figura A.2.16).

“Elemento” “tipo de força” “direcção” “lado” “valor da força” “distância ao nó 1 do lado”

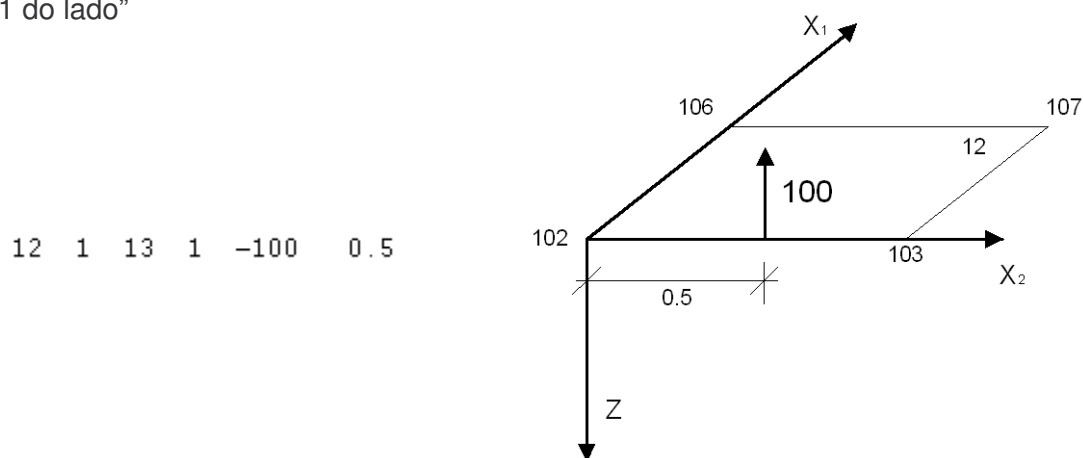


Figura A.2.16 – Indicação dos parâmetros da força de vão concentrada no elemento 12 e sua representação gráfica.

Tipo 2 – forças uniformemente distribuídas ao longo do lado

Neste tipo, estão incluídas as forças ou momentos, distribuídos ao longo de todo o lado, sendo só necessário indicar o valor da força ou momento. Existem direcções que não são permitidas neste tipo de forças, como os momentos distribuídos nas direcções perpendiculares ao lado onde está aplicada a força (Figura A.2.17 e A.2.18).

“Elemento” “tipo de força” “direcção” “lado” “valor da força”

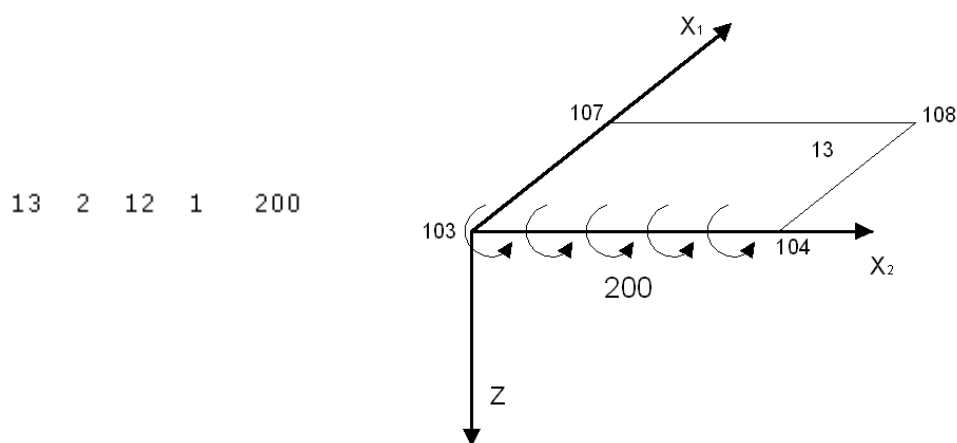


Figura A.2.17– Indicação dos parâmetros da força de vão uniformemente distribuída no elemento 13 e sua representação gráfica.

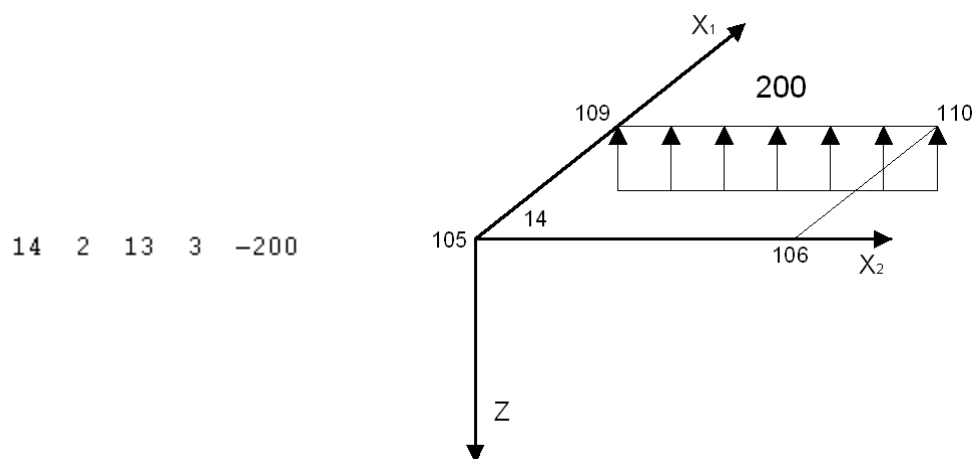


Figura A.2.18 – Indicação dos parâmetros da força de vão uniformemente distribuída no elemento 14 e sua representação gráfica.

Tipo 3 – forças trapezoidais/triangulares aplicadas em todo o lado

Este tipo de forças de vão podem representar tanto forças trapezoidais como forças triangulares aplicadas em todo o lado. Os parâmetros caracterizadores destas forças são os valores do carregamento no início do lado e no final, no caso específico dos carregamentos triangulares um destes valores será zero. Em relação às direcções, só são permitidos carregamentos nas direcções 3 e 13 (Figura A.2.19 e A.2.20).

“Elemento” “tipo de força” “direcção” “lado” “valor da força no início” “valor da força no final”

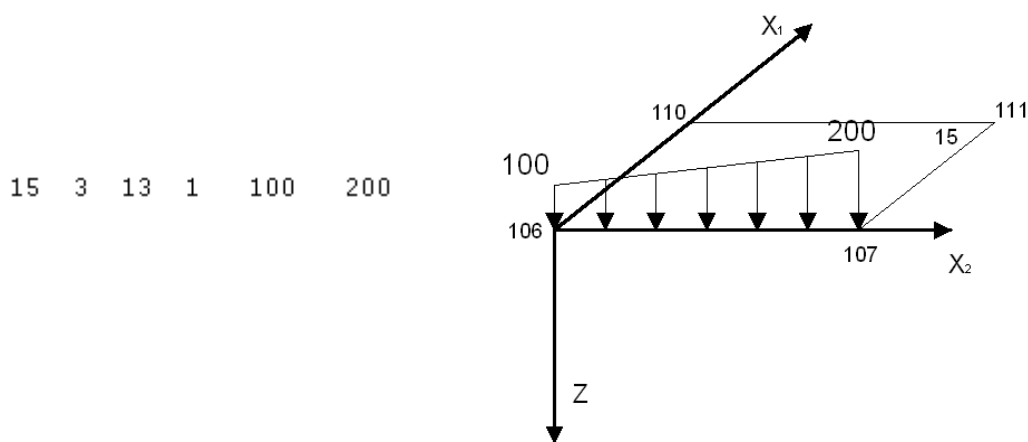


Figura A.2.19 – Indicação dos parâmetros da força de vão trapezoidal no elemento 15 e sua representação gráfica.

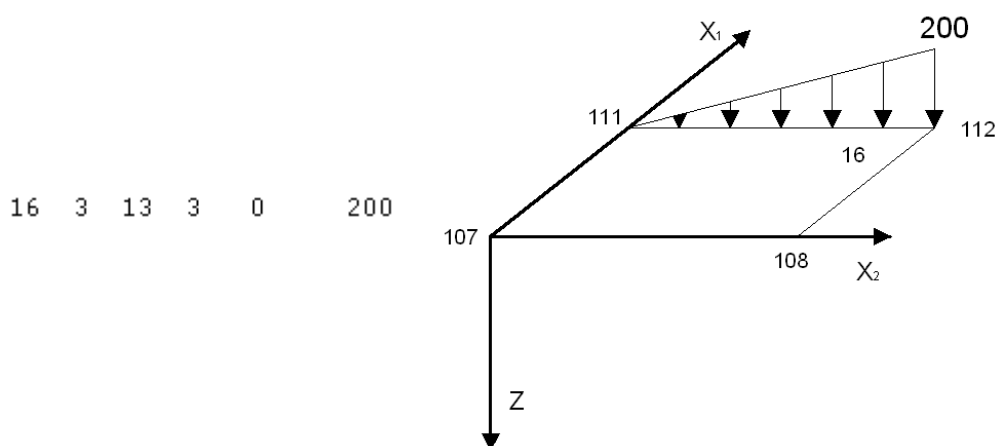


Figura A.2.20- Indicação dos parâmetros da força de vão triangular no elemento 16 e sua representação gráfica.

Tipo 4 – forças trapezoidais/triangulares parciais

Neste tipo de forças de vão estão representadas forças trapezoidais e triangulares que não estão aplicadas ao longo de todo o lado. Para caracterizar este tipo de forças é necessário introduzir quatro parâmetros, os valores das forças no início e fim, bem como a distância a que fica o carregamento do primeiro nó do lado e o comprimento do carregamento. Em relação às direcções, as únicas direcções permitidas são a 3 e a 13 (Figura A.2.21 e A.2.22).

“Elemento” “tipo de força” “direcção” “lado” “valor da força no início” “valor da força no final” “distância ao nó do lado esquerdo” “comprimento da carga”

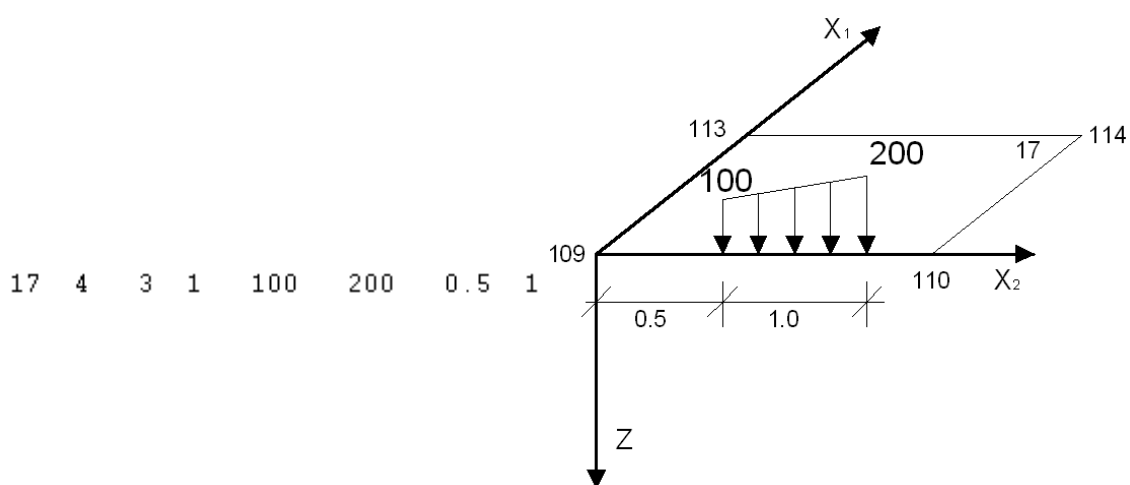


Figura A.2.21 – Indicação dos parâmetros da força de vão trapezoidal parcial no elemento 17 e sua representação gráfica.

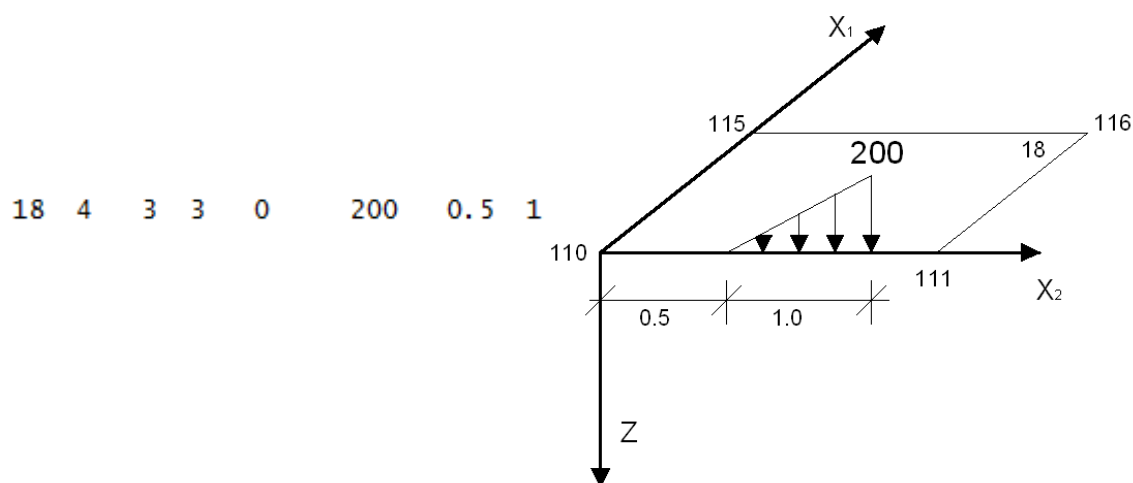


Figura A.2.22 – Indicação dos parâmetros da força de vão triangular parcial no elemento 18 e sua representação gráfica.

Forças de área

Estas forças são distribuídas ao longo de toda a superfície do elemento. Este tipo de carregamentos é iniciado com a palavra “**area**”. Na linha seguinte é indicado o número do elemento onde a “área” é aplicada bem como o seu valor (Figura A.2.23).

“Elemento” “valor da força”

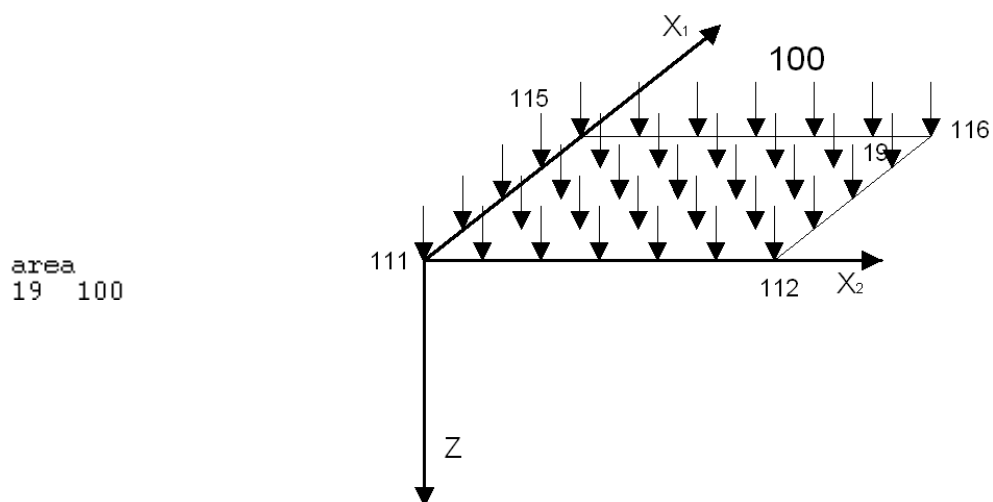


Figura A.2.23 – Indicação dos parâmetros da força de área no elemento 19 e sua representação gráfica.

Assentamentos de apoio

Neste bloco de dados podem ser dados os valores de assentamentos de apoios. Os assentamentos só poderão ser na direcção 3 ou 33. A palavra que inicia este bloco é a palavra “**assentamentos**”. De seguida é colocado o nome do nó apoiado onde existe o assentamento, seguido do seu valor (Figura A.2.24).

“Assentamentos”

“Nó” “valor do assentamento”

“pausa”

```
assentamentos
101 0.01
105 0.01
```

Figura A.2.24 – Bloco com os parâmetros dos assentamentos de apoio.

A2.3. Ficheiro de resultados .out

Este ficheiro contém toda a informação relativa aos dados inseridos, sendo apresentados todos de uma forma formatada. No início é feito um pequeno resumo com a quantidade de dados introduzidos, o número de nós, elementos, apoios, materiais, secções, acções e combinações. Todas as imagens aqui apresentadas são referentes ao ficheiro .out, associado à estrutura escolhida para exemplo deste manual.

```

Edifício A
Laje A1
-----
 20  Pontos nodais
 12  Elementos
 14  Apoios
  1  Materiais
  1  Seccoes
  2  Accoes
  2  Combinações
-----

```

Figura A.2.25 – Resumo dos dados introduzidos no programa, presente no ficheiro .out.

Os dados serão apresentados pela seguinte ordem: nós, elementos, materiais, secções, apoios, acções, pontos de gauss e combinações.

De seguida vão ser mostradas as imagens da apresentação neste ficheiro de cada tipo de dados.

```

Nos      X1      X2
101:    0.00    0.00
102:    1.00    0.00
103:    2.00    0.00
104:    3.00    0.00
105:    0.00    1.00
106:    1.00    1.00
107:    2.00    1.00
108:    3.00    1.00
109:    0.00    2.00
110:    1.00    2.00
111:    2.00    2.00
112:    3.00    2.00
113:    0.00    3.00
114:    1.00    3.00
115:    2.00    3.00
116:    3.00    3.00
117:    0.00    4.00
118:    1.00    4.00
119:    2.00    4.00
120:    3.00    4.00

```

Figura A.2.26– Apresentação das coordenadas dos nós no ficheiro .out.

Manual do utilizador

```

Elementos Laje
Elem N_Nos  No1    No2    No3    No4    Mat    Sec
11: 4      105    101    102    106     1     1
12: 4      106    102    103    107     1     1
13: 4      107    103    104    108     1     1
14: 4      109    105    106    110     1     1
15: 4      110    106    107    111     1     1
16: 4      111    107    108    112     1     1
17: 4      113    109    110    114     1     1
18: 4      114    110    111    115     1     1
19: 4      115    111    112    116     1     1
110: 4     117    113    114    118     1     1
112: 4     118    114    115    119     1     1
113: 4     119    115    116    120     1     1

```

Figura A.2.27 – Apresentação dos parâmetros dos elementos no ficheiro .out.

```

Materiais
Tipo      E          V      Gama    Ro
I
1: 0.25E+08  0.20  25.00  2.55

```

Figura A.2.28 – Apresentação dos parâmetros dos materiais no ficheiro .out.

```

Seccoes
Espessura
1: 0.15

```

Figura A.2.29 – Apresentação dos parâmetros das secções no ficheiro .out.

```

Apoios
Nos      Rx      Ry      Dz
101: 1      1      1
102: 1      1      1
103: 1      1      1
104: 1      1      1
105: 1      1      1
108: 0      1      1
109: 1      1      1
112: 0      1      1
113: 1      1      1
116: 0      1      1
117: 1      1      1
118: 1      0      1
119: 1      0      1
120: 1      0      1

```

Figura A.2.30 – Apresentação dos nós apoiados no ficheiro .out.

Manual do utilizador

Accoes

```
-----
Peso proprio
Peso Proprio  sim
```

```
-----
Sobrecarga
Peso Proprio  nao
```

```
Forcas Concentradas
Nos      Rx      Ry      Dz
101:     0.00   -10.00   0.00
102:    -20.00    20.00   0.00
```

```
Forcas de Vao
Elem  Tipo  Dir  Lado  P1      P2      a1      a2
12:   1    13   1    -100.00  0.00    0.50    0.00
13:   2    12   1     200.00  0.00    0.00    0.00
14:   2    13   3    -200.00  0.00    0.00    0.00
15:   3    13   1     100.00  200.00   0.00    0.00
16:   3    13   3      0.00  200.00   0.00    0.00
17:   4     3   1     100.00  200.00   0.50    1.00
18:   4     3   3      0.00  200.00   0.50    1.00
```

```
Forcas de Area
Elem  Forca
19:   100.00
```

```
Assentamentos de apoio
Nos      Dz
101:     0.0100
105:     0.0100
```

Figura A.2.31 – Apresentação dos parâmetros das acções no ficheiro .out.

```
Pontos de Gauss
2 2
```

Figura A.2.32 – Apresentação dos parâmetros dos pontos de gauss no ficheiro .out.

```
Combinações
Comb  Coef
1:   1.50  1.00
2:   1.00  1.00
```

Figura A.2.33 – Apresentação dos parâmetros das combinações de cações no ficheiro .out.

A2.4. Ficheiro de resultados .des

Neste ficheiro de resultados são apresentados os deslocamentos em cada nó da estrutura para cada acção e para cada combinação de acções.

Deslocamentos

Accao Peso proprio

No	R1	R2	U3
101	2.5697E-16	-3.1042E-16	1.5127E-15
102	9.9097E-16	-1.0057E-16	3.0580E-15
103	1.0179E-15	1.0851E-16	3.1888E-15
104	2.8764E-16	2.8898E-16	1.5457E-15
105	9.8922E-17	-1.4514E-15	3.6608E-15
106	5.0161E-05	-4.9499E-05	2.5798E-05
107	4.4822E-05	4.9519E-05	2.5723E-05
108	4.8153E-06	1.3878E-15	3.2655E-15
109	-1.5655E-17	-2.2735E-15	5.9346E-15
110	-2.5051E-07	-9.1009E-05	5.0182E-05
111	1.0832E-06	9.1164E-05	5.0029E-05
112	2.8591E-07	2.4007E-15	6.6135E-15
113	-9.6100E-17	-1.4463E-15	3.7236E-15
114	-4.9934E-05	-4.9088E-05	2.5565E-05
115	-4.5845E-05	4.8403E-05	2.6468E-05
116	-5.1153E-06	1.3325E-15	3.1420E-15
117	-2.3658E-16	-3.1006E-16	1.4750E-15
118	-9.9090E-16	6.5311E-08	2.8339E-15
119	-1.0574E-15	-2.6711E-06	3.9814E-15
120	-2.9405E-16	8.3997E-06	1.0645E-15

Figura A.2.34 – Apresentação dos deslocamentos no ficheiro de dados .des.

A2.5. Ficheiro de resultados .esf

São apresentados os valores dos esforços da estrutura referentes aos diversos tipos de acções e de combinações de acções. Estes esforços são apresentados em relação a cada elemento e nó. Os esforços expostos são os momentos M11, M22 e M12 e os esforços transversos V31 e V32.

Manual do utilizador

Esforços

Accao Peso proprio

Elemento	No	M11	M22	M12	V31	V32
11	105	-0.36	-0.07	-0.15	33.59	0.00
	101	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	102	-0.07	-0.37	-0.15	0.00	33.59
	106	-0.44	-0.44	-0.29	-30.86	-31.72
12	106	0.65	-0.22	-0.13	-64.55	-31.72
	102	-0.07	-0.37	-0.15	0.00	33.59
	103	-0.07	-0.33	0.15	0.00	33.49
	107	0.66	-0.18	0.16	64.38	-24.87
13	107	-0.43	-0.40	0.26	30.98	-24.87
	103	-0.07	-0.33	0.15	0.00	33.49
	104	-0.01	-0.04	0.00	0.00	0.00
	108	-0.37	-0.11	0.12	-33.49	-6.27
14	109	-0.67	-0.13	0.00	65.34	0.00
	105	-0.36	-0.07	-0.15	33.59	0.00
	106	-0.29	0.30	-0.27	-30.86	-33.56
	110	-0.59	0.24	-0.12	-53.16	32.08
15	110	1.41	0.64	-0.13	-118.70	32.08
	106	0.80	0.51	-0.11	-64.55	-33.56
	107	0.79	0.47	0.14	64.38	-26.71
	111	1.40	0.59	0.12	118.50	30.24
16	111	-0.60	0.19	0.12	53.56	30.24
	107	-0.30	0.25	0.24	30.98	-26.71
	108	-0.36	-0.04	0.12	-33.49	-6.27
	112	-0.66	-0.10	0.00	-65.14	-0.37
17	113	-0.36	-0.07	0.15	33.29	0.00
	109	-0.67	-0.13	0.00	65.34	0.00
	110	-0.59	0.23	0.12	-53.16	-31.73
	114	-0.29	0.29	0.27	-30.63	32.96

Figura A.2.35– Apresentação dos esforços no ficheiro .esf.

A2.6. Ficheiro de resultados .rec

Este tipo de ficheiro de dados apresenta as reacções, M1, M2 e F3 em cada nó apoiado, para os diferentes tipos de acções e combinações.

Reaccoes				
Accao	Peso proprio			
No	M1	M2	F3	
101	-0.26	0.31	-0.58	
102	-0.99	0.10	-1.18	
103	-1.02	-0.11	-1.31	
104	-0.29	-0.29	-0.61	
105	-0.10	1.45	-1.79	
108	0.00	-1.39	-1.39	
109	0.02	2.27	-4.06	
112	0.00	-2.40	-4.74	
113	0.10	1.45	-1.85	
116	0.00	-1.33	-1.27	
117	0.24	0.31	-0.54	
118	0.99	0.00	-0.96	
119	1.06	0.00	-2.11	
120	0.29	0.00	-0.13	

Figura A.2.36– Apresentação das reacções no ficheiro .rec.

6.3. Ficheiro de resultados .ten

Em relação a este conjunto de resultados, eles representam as tensões superiores e inferiores nos nós dos elementos, para cada acção e combinação de acções, este ficheiro mostra também as tensões médias inferiores e superiores nos nós para cada acção. As tensões apresentadas são σ_{11} , σ_{22} , σ_{12} , σ_{31} e σ_{32} .

Accao	Peso proprio					
Tensoes nos nos na face inferior						
Elemento	No	t11	t22	t12	t31	t32
11	105	-96.68	-19.34	-39.19	268.73	0.00
	101	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	102	-19.59	-97.97	-38.67	0.00	268.73
	106	-116.27	-117.31	-77.86	-246.88	-253.77
12	106	173.80	-59.29	-34.50	-516.40	-253.77
	102	-19.59	-97.97	-38.67	0.00	268.73
	103	-17.51	-87.54	38.69	0.00	267.95
	107	175.89	-48.86	42.86	515.04	-198.95
13	107	-114.23	-106.89	69.94	247.87	-198.95
	103	-17.51	-87.54	38.69	0.00	267.95
	104	-1.88	-9.40	0.00	0.00	0.00
	108	-98.60	-28.75	31.26	-267.95	-50.16
14	109	-177.75	-35.55	0.20	522.73	0.00
	105	-96.68	-19.34	-39.19	268.73	0.00
	106	-76.99	79.12	-71.62	-246.88	-268.51
	110	-158.06	62.91	-32.23	-425.28	256.61

Manual do utilizador

Accao Peso proprio

Tensoes medias nos nos na face inferior

No	t11	t22	t12	t31	t32
101	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
102	-19.59	-97.97	-38.67	0.00	268.73
103	-17.51	-87.54	38.69	0.00	267.95
104	-1.88	-9.40	0.00	0.00	0.00
105	-96.68	-19.34	-39.19	268.73	0.00
106	48.41	9.92	-53.06	-381.64	-261.14
107	48.13	8.61	53.32	381.46	-206.33
108	-96.77	-19.62	31.26	-267.95	-50.16
109	-177.75	-35.55	0.20	522.73	0.00
110	108.58	115.55	-0.26	-687.44	1.39
111	106.58	106.32	-0.65	688.26	-7.40
112	-176.12	-25.91	0.62	-521.13	-2.98
113	-95.88	-19.18	39.01	266.30	0.00
114	47.22	9.21	53.48	-373.48	258.78
115	48.15	10.65	-54.16	371.05	216.99
116	-94.48	-18.63	-28.54	-275.71	53.28
117	0.13	0.03	0.00	0.00	0.00
118	-22.11	-98.05	38.40	0.68	-266.30
119	-9.77	-87.91	-39.90	-27.82	-275.71
120	19.62	-5.67	6.56	87.50	0.00

Figura A.2.37 – Apresentação das tensões ficheiro .ten.

6.4. Ficheiros para utilizar no programa GID

O programa GID vai apresentar os resultados obtidos pelo programa de cálculo de uma forma gráfica.

Em primeiro lugar é necessário importar a grelha de elementos da estrutura para o programa, isso é conseguido através da importação do ficheiro .msh criado pelo programa de cálculo. A importação é feita através do menu files, import, GID mesh, como mostra a figura.

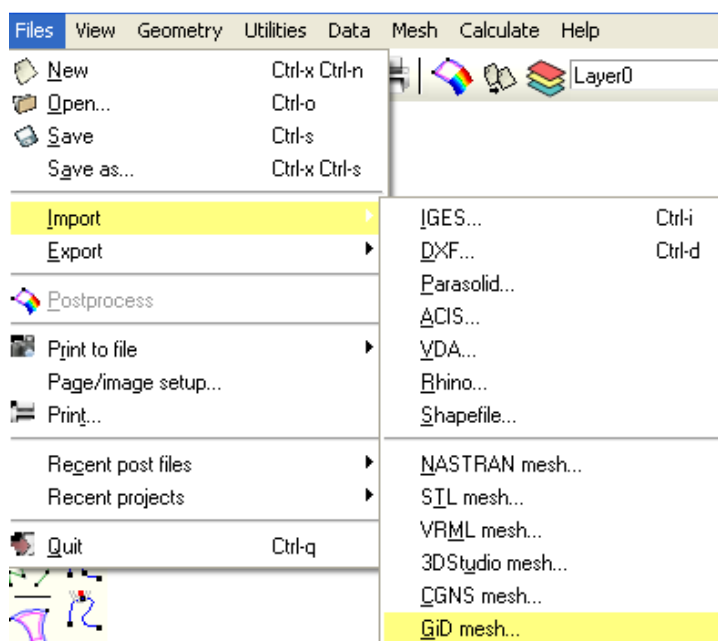


Figura A.2.38– Abrir um ficheiro .msh no programa GID.

Manual do utilizador

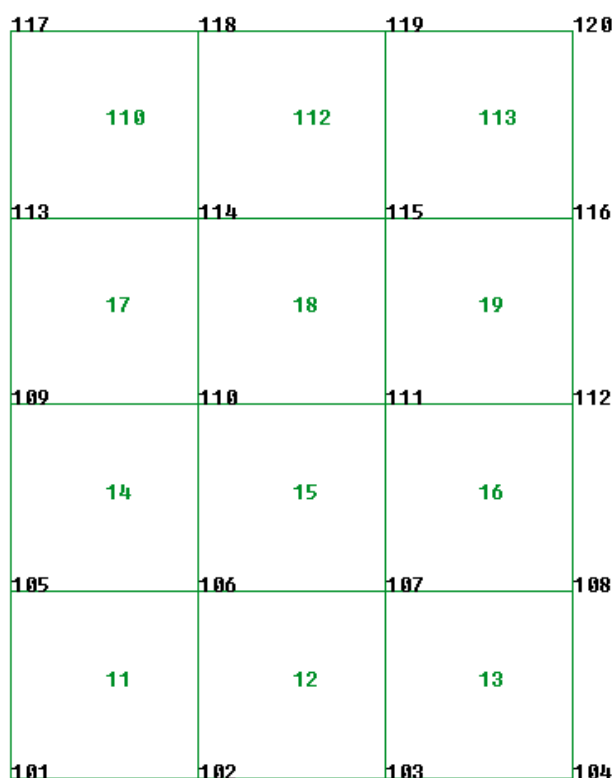


Figura A.2.39– Malha da estrutura exemplo, representada pelo programa GID.

Para a visualização dos resultados, dos deslocamentos, é necessário mudar para o modo de visualização de resultados, carregando no botão da Figura A2.40.

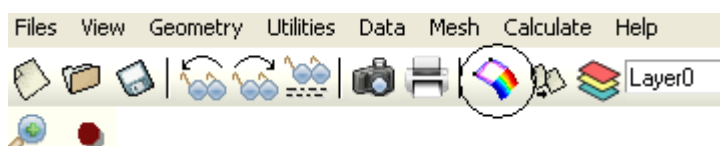


Figura A.2.40– Botão para mudar o modo de visualização do GID.

Manual do utilizador

De seguida, é necessário carregar o ficheiro de resultados .res, através do comando open.

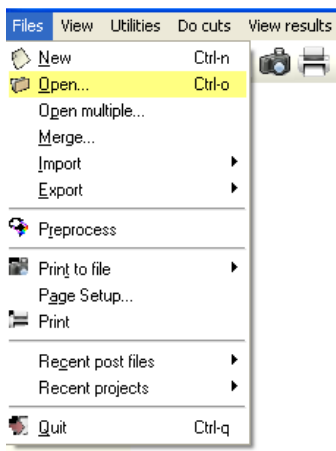


Figura A.2.41– Modo de abrir um ficheiro de resultados no GID.

Finalmente para a apresentação dos resultados, tem que se seleccionar View results, contour Fill, e depois seleccionar os resultados que se pretendem visualizar, deslocamentos ou tensões, como mostra a Figura A.2.42.

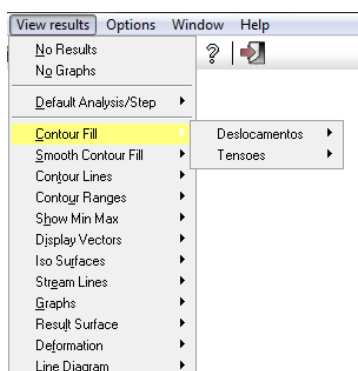


Figura A.2.42– Modo de abrir um ficheiro de resultados no GID.

Para a visualização da deformada da estrutura deve se seleccionar deformacion.

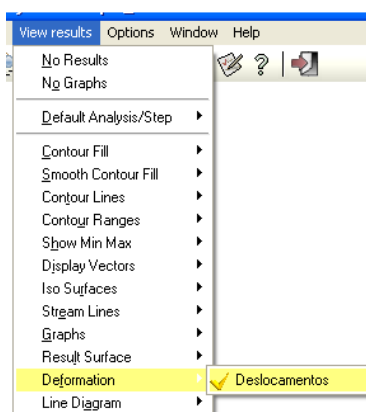


Figura A.2.43– Escolha da representação da deformada da estrutura.

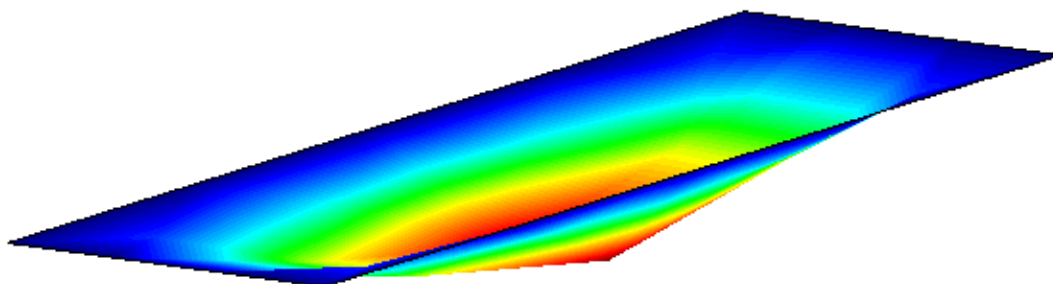


Figura A.2.44– Visualização do campo de deslocamentos no GID.

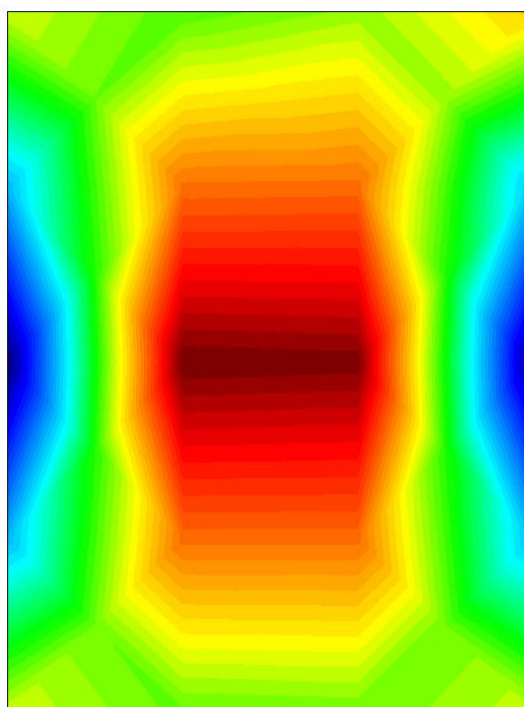


Figura A.2.45– Visualização do campo de tensões σ_{xx} no GID.

Referências

Bibliográficas

Appleton, Júlio. 2009 "*CONSTRUÇÕES EM BETÃO – Nota histórica sobre a sua evolução*".

Azevedo, Álvaro F.M. 2003 "*Método dos Elemento Finito*" FEUP

Campos, Marco Donisete de. 2006 "*O Método de Elementos Finitos aplicado à Simulação Numérica de escoamentos de Fluidos.*"

Castro, Luís Manuel Santos. 1998 "*Elementos Finitos para a Análise Elástica de Lajes*"

IST, Grupo de análise de estruturas do departamento de engenharia civil do. 1998 "*Apontamentos sobre análise elástica linear de lajes.*" IST, 1998.

Jorge M. Branco, Paulo J. Cruz. 2002 "*Lajes Mistas de Madeira-Betão.*"

Lemos, J. Vieira de. 2005 "*Elementos de apoio à cadeira de Estruturas III.*" ISEL

Manzano, José Augusto N.G. 2003 "*Estudo dirigido Fortran*" Érica

Oliveira, Clayton Reis de. 2008 "*Considerações sobre Modelos Estruturais.*"

Sérgio Oliveira, A. Tavares de Castro, J. Pereira Gomes. 2005 "*Folhas da cadeira de mecânica dos sólidos III do ISEL.*" ISEL

Referências

Internet

http://www.dec.fct.unl.pt/seccoes/S_Estruturas/docentes/ildi/EST04/Aulas/node89.html.

<http://www2.dem.ist.utl.pt/~maneves/CAE/CAE.html>.

<http://www.cwbookstore.com.br/cet/icae/evsef0.cfm>.

<http://www.grante.ufsc.br/ponte/recupera.html>.

<http://aartedafuga.blogspot.com/2004/10/aeroporto.html>.

http://www.arktec.com/portugal/t61p_02.gif.

<http://problemasteoremas.wordpress.com/2008/05/13/onda-quadrada/>.

http://www.itcsoftware.com/general_finite-eg-othermechanical.htm.

http://www.arktec.com/portugal/tricalc_ifc_pt.htm. [Online]

http://cypecad.multipius.com/Novidades_2008.htm.

http://www.dec.fct.unl.pt/UNIC_ENG/palestras/Palestras2005/Apresent_FCT_UNL.pdf

<http://ilhadamadeira.weblog.com.pt/arquivo/062215.html>

<http://pwp.net.ipl.pt/dec.isel/soliveira/>

Referências