ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO DE LISBOA

INSTITUTO POLITÉCNICO DE LISBOA

Histórias com matemática: sentido espacial e ideias geométricas

Maria Paula Pereira Rodrigues

Dissertação apresentada para obtenção do grau de Mestre em Educação Matemática na Educação Pré-Escolar e nos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico

Professora orientadora:

Professora Doutora Maria de Lurdes Marquês Serrazina

Lisboa, 2011

RESUMO

Com este estudo pretendo perceber qual o contributo das histórias com matemática no envolvimento dos alunos em tarefas de geometria e o papel das representações no desenvolvimento dos seus raciocínios, bem como perceber que aspectos relativos ao sentido espacial e ideias geométricas surgem.

Para aprofundar e contextualizar o problema defini as seguintes questões de investigação:

1. Que relação estabelecem e que tipo de representações utilizam os alunos em tarefas matemáticas criadas a partir de contextos de histórias com matemática?
2. Como evoluem as representações matemáticas dos alunos, ao longo da resolução das diferentes sequências de tarefas apresentadas?
3. Que aspectos relativos ao sentido espacial e outras ideias geométricas surgem, ao longo da resolução das diferentes tarefas?

O trabalho apresentado foi desenvolvido numa turma de 3ºano de escolaridade que tem vindo a desenvolver o sentido espacial e a construir ideias geométricas, com base na experimentação e interacção. Para um acompanhamento mais consistente, focou-se a atenção num grupo de quatro alunos com quem se interagiu de forma mais persistente e do qual foram analisados os registos escritos. Contudo, também foram elementos de análise as respostas surgidas após a discussão em grande grupo, dado que a interacção nesta turma gerou, de forma muito consistente, a compreensão e articulação dos conceitos abordados.

Para o desenvolvimento deste estudo optou-se por uma metodologia de investigação de natureza qualitativa, tendo em conta que a principal agente de recolha de dados foi a investigadora e que a mesma foi feita no ambiente natural dos alunos. Para além disso, é ainda importante salientar que os documentos de análise são constituídos por produções dos alunos, onde interessou mais o processo que os resultados.

A recolha de dados ocorreu ao longo de dezassete sessões em sala de aula, tendo as mesmas sido dinamizadas, inicialmente, com maior incidência, por mim e depois, em estreita colaboração com o professor da turma.

As três sequências de tarefas apresentadas aos alunos foram construídas por mim e procuraram incidir, fundamentalmente no desenvolvimento do sentido espacial dos alunos, designadamente em ideias geométricas que se relacionam com a Reflexão, os Eixos de simetria de figuras e a Projecção de sombras, vista como uma reflexão provocada pela incidência de luz contra um corpo. Estas serviram para desenvolver ou aprofundar os conceitos referidos e, também, perceber como a sombra se forma e transforma, de acordo com a posição ou incidência de maior ou menor quantidade de luz.

Para a construção das três sequências de tarefas realizadas pelos alunos utilizaram-se três histórias com matemática: Grejniec (2002), Magalhães (2008) e Torrado (2005).

As sequências de tarefas apresentadas bem como os conceitos nelas abordados surgiram a partir de modelos matemáticos apresentados nos livros escolhidos para desenvolver este trabalho. Em *A que Sabe a Lua? e o O Rapaz do Espelho*, os modelos matemáticos estão presentes tanto na narrativa como na ilustração, o mesmo não acontece em *O Homem sem Sombra*, onde o modelo matemático é apenas desenvolvido no texto.

Os resultados deste trabalho levantam novas questões susceptíveis de outras pesquisas. Interessa saber, num estudo mais alargado, de que modo é que o método de ensino utilizado e o papel do professor, enquanto mediador no processo de ensino-aprendizagem, influenciam a construção e articulação de conceitos ligados ao desenvolvimento do sentido espacial e construção de ideias geométricas e, também, a aspectos ligados com as expectativas dos alunos, relativamente à aprendizagem dos tópicos da área da Matemática, no 1º Ciclo do Ensino Básico.

Palavras-chave: Histórias com matemática, representações, interacção, sentido espacial e ideias geométricas.

ABSTRACT

This study aims to understand the contribution of children´s stories with math-related contents on the engagement of pupils in geometric tasks, as well as explore the role of representations in the development of their reasoning, and comprehend what kind of thoughts related to spatial sense and geometric ideas arise.

To investigate and contextualize the problem I have defined the following research questions:

1. What kind of relationship do students establish and which representations do they use to solve mathematical tasks created from the context of children´s stories?

2. How do students´ mathematical representations develop during the resolution of different tasks?

3. What kind of spatial sense and other geometric ideas arise while solving these tasks?

The work presented here was developed in a 3rd grade class, whose students have been developing spatial sense and constructing geometric ideas based on experimentation and classroom interaction. For a more thorough research work, I focused my attention on a group of four students with whom I interacted more persistently and of whom written answers were analyzed. However, I have also considered as elements of analysis responses that arose after a large group discussion, because this provided a consistent understanding and articulation of learned concepts.

To develop this study I chose a qualitative methodology research and I collected the data from the students' natural environment. In addition, it is important to note that the data consists on the work produced by students, and that the process is considered more important than the end results.

Data collection took place over seventeen sessions in the classroom where at the beginning I was mostly in charge of the dynamics of the lesson, and then worked in close collaboration with the class teacher.

The three sequences of tasks presented to students were created by me and tried to focus mainly on the development of the students' spatial sense, namely on geometric ideas related to reflection, axis of symmetry of shapes and projection of shadows (seen as a reflection caused by the incidence of light against a body). These tasks were used to develop and expand all of the previously mentioned concepts, and also to understand how the shadow is formed and transformed, according to the position or incidence of a greater or lesser amount of light.

For the construction of three sequences of tasks I used three children stories with math-related contents: Grejniec (2002), Magalhães (2008) and Torrado (2005).

The sequences of tasks, as well as the concepts discussed in them, were based on mathematical models presented by the selected books for this research work. In *A que Sabe a Lua?* and *O Rapaz do Espelho*, the mathematical models are present both in the narrative and in the illustrations. The same does not happen in *O Homem sem Sombra*, where the mathematical model is only developed in the text.

The results of this study raise new questions for future research. In a larger study, it will maybe be possible to understand how the method used and the role of the teacher as a facilitator of the teaching-learning process influence the construction and articulation of concepts linked to the development of spatial sense and the construction of geometric ideas. It will also help to elucidate aspects linked to the expectations of students over mathematics topics to be learned throughout the 1st cycle of basic education.

Keywords: Children´s stories with math-related contents, representations, classroom interaction, spatial sense and geometric ideas.

Agradecimentos

Para a concretização deste trabalho foi essencial a colaboração de várias pessoas.

A todas elas quero agradecer.

À minha orientadora, Professora Doutora Lurdes Serrazina, pela amizade, pelo modo como me orientou, pela exigência, pelos conselhos, pela disponibilidade e pelo incentivo.

À amiga Cristina Loureiro, por me ter levado à descoberta do maravilhoso mundo das histórias com matemática e por todos os conselhos dados.

À Cristina Morais e à Raquel Marques pela amizade e pela partilha do trabalho feito em torno das Histórias com Matemática.

À maravilhosa equipa do *Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores do 1º e 2º Ciclos*, da Escola Superior de Educação de Lisboa, pela amizade e carinho e por tudo aquilo que me proporcionou aprender no seu seio.

Aos meus pais, à minha irmã, ao meu sobrinho e ao meu cunhado, pelo apoio, pela compreensão, pelas palavras de incentivo e pelo carinho manifestado durante este longo percurso.

Ao PL e a todos os seus alunos, sem os quais não teria sido possível a realização deste trabalho.

A todos os meus verdadeiros amigos que me incentivaram e encorajaram a não desistir.

Índice

Índice de Quadros

Índice de Tabelas e Figuras

Listagem de siglas

PFCM - Programa de Formação Contínua em Matemática

GT1 - Grupo de Trabalho – 1º Ciclo

APM - Associação de Professores de Matemática

ESE - Escola Superior de Educação

PMEB - Programa de Matemática do Ensino Básico

NCTM - National Council of Teachers of Mathematics

Capítulo I

Introdução

1.1. Pertinência do estudo

A pertinência deste estudo verifica-se por dois factores essenciais, o primeiro pela sua temática integrar o currículo português para o ensino da matemática e o segundo pela importância que a articulação da literatura e da matemática têm assumido nos últimos anos, no trabalho de autores nacionais e estrangeiros. Vários autores e investigadores na área da Educação Matemática têm assumido que a aprendizagem matemática em contexto se torna mais apelativa e produz melhores resultados, ao longo dos primeiros anos de escolaridade, quando o adulto " … lhes proporcionam acesso a livros de histórias com números e com padrões…" (Serrazina, 2008, p. 7).

Para além destes, pode ainda ser considerado um terceiro factor que tem a ver com o trabalho desenvolvido nas escolas, cujos professores têm participado no *Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores do 1º e 2º Ciclos do Ensino Básico*, desde o ano lectivo 2005/ 2006.

Iniciando a justificação pela presença da sua temática no currículo nacional, será de referir que o *Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências Essenciais* (2001), apresenta como uma das competências essenciais a desenvolver no tema da Geometria "A sensibilidade para apreciar a geometria no mundo real e o reconhecimento e a utilização de ideias geométricas em diversas situações, nomeadamente na comunicação" (p.62); as Metas de Aprendizagem (2010) anunciam como metas intermédias até ao 2º ano: "Identifica no meio natural e físico o transformado de uma figura numa reflexão de eixo vertical ou de eixo horizontal" e "Identifica polígonos com simetria de reflexão" (p.6) e como metas intermédias até ao 4º ano: "Resolve problemas envolvendo a compreensão de relações espaciais. Exemplo: Faz previsões acerca dos resultados produzidos pela alteração da posição de uma figura, mantendo a forma e as dimensões" (p.7) e, por último, o PMEB (2007), nos quadros de tópicos e objectivos específicos, identifica como tópicos a trabalhar, ao longo do 1º ciclo os que a seguir são transcritos (pp. 22 e 23).

Tópicos	Objectivos específicos	Notas
	1º e 2º anos	
Figuras no plano e sólidos geométricos . Reflexão	. Identificar no plano figuras simétricas em relação a um eixo. . Desenhar no plano figuras simétricas em relação a um eixo horizontal ou vertical.	. Utilizar espelhos e miras na exploração de reflexões. . Propor a construção, no plano, de figuras simétricas através de dobragens e recortes e utilizando papel quadriculado. . Dar e pedir exemplos que evidenciem reflexões como simetrias axiais no meio natural e físico.
	3º e 4º anos	
Figuras no plano e sólidos geométricos . Reflexão	. Identificar no plano eixos de simetria de figuras. . Construir frisos e identificar simetrias.	. Propor a exploração de frisos identificando simetrias, de translação, reflexão, reflexão deslizante e rotação (meia-volta).

Em termos curriculares, a importância deste estudo traduz-se também no facto de este tratar de tópicos, como a reflexão e eixos de simetria de figuras, contemplados no programa de matemática do 1º ciclo. Assim sendo, poderá ser importante perceber se através desta investigação conseguimos ver que tipo de abordagens poderão ser feitas a estes tópicos e que respostas um grupo de alunos do 3º ano de escolaridade poderá oferecer, perante tarefas que abordam estes conceitos curriculares.

Relativamente ao trabalho desenvolvido na articulação da literatura com a matemática, é importante referir que, apesar de me debruçar de forma mais incisiva sobre esta questão no capítulo II deste trabalho, a ideia e o interesse de trabalhar este tema surgiram do facto de a minha formação inicial ser uma licenciatura em Educação na variante de Português – Inglês e possuir um mestrado em Literatura Portuguesa, na área da Literatura

Infantil, e de nos últimos anos da minha carreira ter trabalhado como professora do 1º Ciclo do Ensino Básico e como formadora no *Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores do 1º e 2º Ciclos do Ensino Básico*. Este percurso, como professora e depois como formadora, fez-me perceber como é possível articular as duas áreas e como se pode gerar motivação, em professores e alunos, para trabalhar a matemática a partir de tarefas produzidas com base nos modelos matemáticos existentes em histórias para crianças.

A possibilidade de trabalhar como professora no 1º ciclo gerou a necessidade de também ser professora de matemática e de procurar ajuda, para poder ser uma melhor professora numa área que há muito tinha deixado para trás. No Grupo de Trabalho do 1º Ciclo (GT1), da Associação de Professores de Matemática, encontrei a ajuda que necessitava e renovei o prazer pela matemática que havia trabalhado no ensino primário e preparatório. Apaixonei-me pela matemática e pelos caminhos de descoberta que ela nos pode proporcionar e descobri, em contacto com colegas da Escola Superior de Educação de Lisboa que já se dedicavam à articulação da literatura com a matemática, que podia, como professora de matemática aliar as minhas duas grandes paixões, literatura e matemática!

Desde essa altura, tenho investigado e desenvolvido algum trabalho nessa área, nomeadamente na análise e construção de tarefas matemáticas, geradas a partir dos modelos matemáticos existentes em histórias, tenho partilhado o meu trabalho em comunicações, *posters* e sessões práticas com educadores de infância e professores do 1º e 2º Ciclos, em diversos encontros de professores promovidos pela APM, pela ESE de Lisboa, por Câmaras Municipais, pela Universidade do Minho e, ultimamente, no PFCM.

Dado este meu percurso e o facto de estarmos em fase de implementação do PMEB, com as suas novas vertentes matemáticas e didácticas, julgo poder justificar coerentemente a pertinência deste estudo, tanto a nível pessoal como curricular.

1.2. Definição do problema

Face ao desenvolvido no ponto anterior senti a necessidade de aprofundar um pouco mais esta temática com o objectivo de estudar o contributo das histórias com matemática no envolvimento dos alunos em tarefas de geometria e o papel das representações no desenvolvimento dos seus raciocínios, ao longo da resolução das sequências de tarefas apresentadas. Pretendi, ainda, identificar a forma como esse envolvimento, através das interacções entre alunos, o professor da turma e eu própria, contribuiu para desenvolver aspectos relativos ao sentido espacial e outras ideias geométricas. Para ir ao encontro dos objectivos, atrás, identificados, defini as seguintes questões de investigação:

1. Que relação estabelecem e que tipo de representações utilizam os alunos em tarefas matemáticas criadas a partir de contextos de histórias com matemática?
2. Como evoluem as representações matemáticas dos alunos, ao longo da resolução das diferentes sequências de tarefas apresentadas?
3. Que aspectos relativos ao sentido espacial e outras ideias geométricas surgem, ao longo da resolução das diferentes tarefas?

Ao procurar encontrar resposta para estas questões, pretendo conhecer melhor o contributo das histórias no processo de ensino-aprendizagem da matemática, em alunos do 1º ciclo do ensino básico.

As histórias, segundo a opinião de diferentes autores, têm contribuído para aumentar o interesse pelo ensino da matemática "Gosto de lhes mostrar como uma história interessante pode ser utilizada para trabalhar tópicos matemáticos fundamentais"(Zambo, 2005, p. 394); criam um ambiente propiciador à aquisição de conhecimentos e ao envolvimento dos alunos com as tarefas matemáticas (Jensen, 1998); reduzem a ansiedade provocada pelas fobias matemáticas (Siegel, 1999); podem ajudar a criar um contexto para melhor aprender matemática, "A literatura empresta um mundo real que ajuda a sentir a matemática como algo real, existente na vida quotidiana" (Woolfolk, 1990, p.395); as histórias criam contextos para problemas interessantes que ajudarão os alunos a mergulhar de forma mais profunda nos conceitos matemáticos (NCTM, 2000) e fazem parte de uma predisposição natural que o ser humano tem para ouvir e contar histórias que "permanecem na memória dos seres humanos, criando imagens mentais, metáforas e estruturas narrativas" (Rubin, 1995, p.395).

Para além de todas as ideias apresentadas pelos autores citados, a escolha do tema para este trabalho decorre, também, das preocupações com a minha prática profissional, ligadas à aprendizagem da Matemática no 1º Ciclo do Ensino Básico. Como professora deste nível de ensino, tenho sempre presente a preocupação de que os alunos deverão poder construir e utilizar o seu conhecimento e as suas representações em interacção social, para desenvolverem a sua compreensão matemática. A interacção parece permitir uma construção de conceitos mais poderosa e estruturada que leva os alunos a obter maior sucesso na área da Matemática. Contudo, estas práticas ainda não são regra, apesar do trabalho que tem sido feito com os professores dos dezoito distritos do nosso país, nos últimos seis anos, através da implementação do *Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1º e 2º Ciclos* e das alterações curriculares impostas pelo novo *Programa de Matemática do Ensino Básico*. O insucesso dos nossos alunos em matemática ainda é uma realidade que, na opinião de Matos (1994), pode estar relacionado com o facto de se continuar a dar uma maior ênfase à mecanização com base em regras e procedimentos, desvalorizando-se os processos construídos e utilizados pelos alunos.

A minha experiência profissional tem-me dado evidências de que os alunos, desde muito cedo, constroem e desenvolvem representações e interacções e, ainda, constroem ideias matemáticas muito válidas, desde que o ambiente de ensino-aprendizagem o permita. Perante um ambiente aberto e cooperativo, as crianças têm a possibilidade de vivenciar experiências diversas, construir conhecimento e processos, comunicar e debater ideias e, também, reflectir sobre as suas actuações.

1.3. Estrutura da dissertação

Este primeiro capítulo serve para apresentar a dissertação, no capítulo seguinte farei o enquadramento teórico da problemática levantada, abordando os temas: A Literatura para Crianças: criatividade e aprendizagem; Literatura e matemática; Histórias com matemática e aprendizagem de conceitos matemáticos; A importância do desenvolvimento do sentido espacial, com ênfase na visualização e na compreensão de propriedades das figuras geométricas, nos primeiros anos de escolaridade; Representações e Interacções.

No terceiro capítulo descreverei a metodologia utilizada, dando conhecimento das opções metodológicas, dos procedimentos de carácter metodológico, dos participantes, dos instrumentos de recolha de dados e, por fim, da análise dos dados.

O quarto capítulo será dedicado à descrição da experiência de ensino, o quinto aos alunos e às tarefas e o último conterá as conclusões, recomendações e limitações do estudo.

Capítulo II

Enquadramento teórico

2.1. A Literatura para Crianças: criatividade e aprendizagem

A estrutura e os conteúdos da literatura que as crianças têm vindo a consumir ao longo dos tempos, tem variado de acordo com o papel que a criança assume socialmente, nas diferentes épocas.

Até ao século XVII, a criança participava na vida adulta como se de um adulto se tratasse e não havia a preocupação de identificar um tipo de literatura específica para ela. As crianças liam ou ouviam ler o mesmo que os adultos e fizeram a eleição de um conjunto de obras que, sem terem destinatário definido, acabaram por ser "anexadas" à literatura infantil.

Esta literatura «anexada» é uma literatura centrada no maravilhoso e inesperado dos contos fantásticos de origem tradicional e tem uma dupla função: a de divertir socialmente mas também a de educar para os valores. São exemplos alguns autos de teatro de Gil Vicente (sec. XVI); os relatos de viagens; os romances de cavalaria; os catecismos; os exemplários e as fábulas de Chaucer (sec. XIV), Jean de La Fontaine (sec. XVII) e Lessing, já no século XVIII.

Ao longo dos séculos XVIII e XIX nasceu e cresceu uma nova concepção do conceito de criança, que deu origem a uma literatura centrada na criança e nas suas necessidades, e a literatura para crianças passou a ser facilmente identificada. Durante este período, houve uma grande preocupação com a educação das crianças e a literatura infantil passou a ter um carácter predominantemente pedagógico e educativo. Desta fase, fundamentalmente, instrutiva da literatura para crianças, destacamos duas das obras que foram consideradas modelos educativos, as fábulas de Esopo e *O Romance da Raposa*.

Contudo e, como que um alimento para o espírito infantil, está também presente na literatura para crianças do século XVIII, a literatura do maravilhoso onde se destacam os contos de fadas, cuja acção decorre em mundos imaginários, povoados por personagens totalmente imaginárias, onde os animais falam. Destes, salientamos os *Contes de Ma Mère l'Oie*, de Perrault, que contém histórias como «Gata Borralheira», «A Bela Adormecida», «O Chapelinho Vermelho», «O Gato das Botas», «Barba Azul» e «Polegarzinho», histórias, até hoje, lidas e ouvidas com prazer por crianças em idade escolar.

O século XIX, para além dos aspectos didácticos já referidos, trouxe um reencontro com os contos tradicionais, dos Grimm, *Kinder-und Hausmärchen* (1812) e Andersen, *Eventyr,* *fortalte for Born* (1835), e numa outra perspectiva, surgiram as primeiras histórias de interesse pela justiça e por problemas políticos e raciais. Estas constituíram uma viragem na literatura para crianças e foram assinadas por escritores como Charles Dickens, Edmundo d' Amicis, com *Cuore*, e Harriet Beecher Stowe, com *Uncle Tom's Cabin*.

O século XX trouxe uma nova estrutura à literatura para crianças e o livro infantil desliga-se de forma definitiva da literatura para adultos. Nesta fase, ao contrário do já referido, são os adultos que procuram na literatura infantil o prazer e divertimento, em obras como *Alice no País das Maravilhas* ou nos álbuns de *Tintin* e *Astérix*.

Kátia C. S. Smole; Glauce H. R. Rocha; Patrícia T. Cândido e Renata Stancanelli (1995) consideram os contos de literatura tradicional de Perrault, «O Chapelinho Vermelho» e «Polergarzinho», com potencial para desenvolver trabalho matemático. Ainda dentro da literatura tradicional para crianças, também *Alice no País das Maravilhas*, de Lewis Carroll, é considerado uma boa história com matemática.

Aproveitando o realismo social de algumas obras surgidas no século XIX, este século apresenta uma literatura infantil que deixou de lado as preocupações didácticas e instrutivas, dos dois séculos anteriores, e trouxe uma nova perspectiva dentro do fantástico e maravilhoso.

Esta nova literatura interliga realidade e fantasia e apresenta mundos paralelos e fantásticos, sem recorrer a fadas e a duendes. As suas acções e personagens enquadram-se de forma perfeita na vida quotidiana dos mais novos, gerando identificação e cumplicidade, e, em paralelo, permitem a evasão para mundos onde estes podem realizar a verdadeira condição de ser criança, construindo mundos encantatórios e ilusórios.

Gostaria, ainda, de salientar que a literatura, com ou sem destinatário definido, que as crianças, ao longo dos séculos, têm vindo a consumir tem sempre uma vertente dupla: a formativa, ligada à aprendizagem e preservação de valores, e a do entretenimento, que diverte e preenche o lado criativo de cada ser humano. Uma literatura ao serviço do ser social/ individual que vive em cada criança.

Resumindo, de acordo com o papel ocupado pela criança na sociedade, ao longo dos séculos, a literatura infantil assumiu diferentes papéis e conceitos. Contudo, a literatura teve, e terá sempre, a componente formativa, ligada à aprendizagem e preservação de valores, e a do entretenimento, que pretende divertir e desenvolver a criatividade da criança, ao longo do seu crescimento.

2.2. Literatura e matemática

> Ao oferecerem desafios de natureza cognitiva e ao traduzirem sentidos que transcendem o significado de suas palavras, os textos literários valorizam a inteligência da criança, sua capacidade interpretativa e lhe possibilitam resolver problemas cuja natureza abstrata ela é incapaz de alcançar, a não ser pela adesão ao universo simbólico. Conseqüentemente, instalam a motivação interna da criança para a leitura, visto que ela deseja ler porque a linguagem de narrativas e de poemas a mobiliza para a compreensão do mundo e para a autonomia daí decorrentes. (Saraiva, 2001, p. 19).

As histórias desempenham um importante papel na formação da criança, ao funcionarem como elementos apaziguadores de situações de conflito interior, necessários à construção de modelos de acção, mas também podem integrar outras funções de aprendizagem multidisciplinar, desde que a mensagem e o papel principal da história não sejam distorcidas através da colocação de uma ênfase indevida num dado aspecto matemático. Apoiando esta ideia, Shapiro, Anderson & Anderson (2004)) referem que este emergente interesse na utilização de livros de histórias na matemática dos primeiros anos pode ser precipitado, dado estes constituírem, classicamente, na maioria das escolas, uma ferramenta utilizada única e exclusivamente para o desenvolvimento da linguagem e leitura.

Todavia, a leitura e utilização de histórias na aula de matemática tem merecido, nas últimas décadas, a atenção de muito educadores matemáticos. Por exemplo, *o National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) refere que " … a utilização de livros de histórias constitui um óptimo veículo para comunicar ideias matemáticas" (2004, p. 5).

Para Loureiro (2006), a ideia de ligar a literatura com a matemática não é original e não vai esgotar-se nunca, pois enquanto houver livros de histórias, existirão contextos favoráveis que permitem explorar e trabalhar ideias matemáticas de forma mais contextualizada e envolvente.

Sobre esta temática existem diversos trabalhos publicados em várias línguas e embora o alvo preferencial sejam os livros de literatura para crianças há muitos trabalhos sobre literatura para outras faixas etárias.

Há actualmente alguns artigos muito interessantes, de autores de vários países, sobre a relação da matemática com a literatura. São exemplos os artigos "Literatura e matemáticas" (2009), de José Muñoz Santonja; "Cuentos matemáticos" (2009), de Joaquín Collantes e Antonio Pérez; "Matemática y literaturas, un binómio perfecto" (2009), de Margarita Marín;

"Era uma vez na Matemática: uma conexão com a literatura infantil" (1995), de Kátia Smole *et al.* (1995); "You read me a story, I will read you a pattern" (2005), de Charyl Pace, entre outros.

Perante as histórias, as crianças aprendem matemática com motivação e dedicação, no entanto, um livro que fale de quadrados e triângulos não pode, apenas por esse motivo, ser considerado um bom recurso para trabalhar a geometria, tal como os livros que falam de números ou os apresentam nas suas ilustrações não podem, só por isso, constituir um bom material para propor tarefas de cálculo aos alunos. De acordo com Loureiro, Marques, Morais Oliveira e Rodrigues (2006), uma boa história para trabalhar matemática deve enquadrar na sua narrativa, ilustração, ou ambas um modelo matemático forte e apelativo. Este poderá aparecer sob a forma de questão, de uma situação que motive a investigação matemática ou através de uma imagem que tenha subjacente um tópico matemático definido. Perante esta ideia chave, Loureiro (2006), no artigo Os livros de histórias e a matemática – Era uma vez…, afirma que "O conhecimento que vou tendo dos livros e as experiências de utilização já realizadas levam-me a considerar que há livros privilegiados para levar as crianças a realizar boas actividades matemáticas sendo, por esse motivo, necessária uma selecção bastante criteriosa. Contudo, não basta um bom livro de histórias com matemática para garantir o sucesso no processo de ensino-aprendizagem dos nossos alunos. É também importante salientar aqui o papel do professor, como orientador do conhecimento matemático, pois uma boa tarefa matemática, produzida a partir de um modelo matemático presente num destes bons livros, só será uma boa tarefa se for bem explorada e bem conduzida" (p. 2).

Kátia Smole *et al.* (1995) consideram que a integração da literatura nas aulas de matemática representa uma substancial mudança no ensino tradicional da matemática porque estabelecer esta conexão implica: a) relacionar as ideias matemáticas com a realidade; b) relacionar as ideias matemáticas com outras disciplinas; c) relacionar tópicos, representações e conceitos matemáticos; d) explorar problemas e descrever resultados, relacionando diversos modelos matemáticos ou não (pp. 2 e 3).

Tendo em conta alguns trabalhos já realizados com alunos portugueses, é possível afirmar que, a partir da apresentação de tarefas baseadas em modelos matemáticos fortes, apresentados no texto ou na ilustração de histórias, se podem desenvolver actividades matemáticas muito ricas e atraentes para os alunos. A sua riqueza pode ser justificada pelos poderosos instrumentos de acção que proporcionaram ao professor e que fizeram os alunos avançar na estruturação do seu raciocínio matemático.

Segundo Charyl Pace (2005), a utilização da literatura na aula de matemática é uma forma simples e muito acessível de pôr em prática um currículo integrado e proporcionar aos alunos aprendizagens significativas e duradouras.

Uma das razões, apresentada por Bay-Williams (2005), é a riqueza dos contextos que a literatura oferece e que os alunos são capazes de usar para dar sentido à matemática. Além disso, podem tirar prazer da literatura, integrando assim a matemática com a literatura. Esta autora refere também o potencial de integração de ideias matemáticas de algumas tarefas matemáticas, baseadas na literatura. Na sua opinião, "a matemática é aplicada em situações apropriadas e são vistas relações entre conceitos matemáticos que permitem desenvolver uma compreensão significativa da matemática". (p.392).

Ron Zambo (2005) aponta várias razões para considerar a integração entre a matemática e as actividades linguísticas (language arts) como uma estratégia efectiva de ensino da matemática. Para além das razões de riqueza e acessibilidade contextual proporcionadas pela literatura, análogas às de Bay-Williams, há razões do foro emocional, evidenciadas pela investigação, que podem ajudar os alunos a reduzir a sua ansiedade relativamente à matemática. Além disso, há sempre o prazer que pode ser proporcionado numa actividade de leitura colectiva, onde "os professores podem cultivar o papel privilegiado de contadores de histórias porque os alunos adoram ouvir as histórias que os professores têm para contar". (Zambo, p. 395).

Segundo Yunes e Ponde (1989), enquanto o ensino alimenta uma proposta distante, desarticulada e fragmentada da realidade do aluno, a literatura pode oferecer elementos desta mesma realidade como auxílio para compreender a realidade. Perante estas ideias e a minha experiência como professora do 1º ciclo, parece possível afirmar que uma articulação entre matemática e literatura, nos primeiros anos de escolaridade, favorece a aprendizagem de noções matemáticas nas quais assentará um conhecimento matemático consciente e consistente.

Com a introdução de histórias nas aulas de matemática, o ambiente de aprendizagem transforma-se e os alunos não aprendem primeiro a matemática para depois a aplicar nas histórias, exploram matemática e narrativa ao mesmo tempo. Através das questões trazidas pela narrativa, os alunos voltam a ela muitas vezes e, de cada vez que o fazem, constroem novo conhecimento. Desta forma, as histórias contribuem para que os alunos aprendam e façam matemática, explorem lugares, características e acontecimentos nas mesmas, permitindo que habilidades matemáticas e linguísticas se desenvolvam em simultâneo. Enquanto os alunos lêem, escrevem e conversam sobre as ideias matemáticas que vão aparecendo ao longo da narrativa, interagem e criam conhecimento matemático.

Assim, e de acordo com a Equipe Interdisciplinar da Prefeitura de Santos, no Brasil, (2004) as histórias na aula de matemática permitem:

a) relacionar as ideias matemáticas com a realidade, de forma a deixar clara e explícita a sua participação, presença e utilização nos vários campos da actuação humana, valorizando, assim, o uso social e cultural da matemática;

b) relacionar as ideias matemáticas com as demais disciplinas ou temas de outras disciplinas;

c) reconhecer a relação entre diferentes tópicos da matemática, relacionando várias representações de conceitos ou procedimentos umas com as outras;

d) explorar problemas e descrever resultados, usando modelos ou representações gráficas, numéricas, físicas e verbais.

Para além de tudo isto, e de acordo com os *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000), a utilização de livros de histórias na aula de matemática representa uma ferramenta muito útil para lidar com a diversidade, pois perante um contexto cativante que remeta para a realidade, os alunos são capazes de modelar mais facilmente e construir, partindo dessa modelação, diferentes tipos de conhecimento matemático. Estes podem ir do mais informal para o mais formal, dependendo das vivências e do grau de desenvolvimento cognitivo de cada criança. Perante um livro de histórias as crianças desenvolvem conceitos, resolvem problemas e fazem conexões (Griffiths & Clyne, 1991).

Para Charyl Pace (2005), imaginação, tempo e um natural gosto pela leitura são apenas os pré-requisitos necessários para utilizar a literatura nas aulas de matemática.

Concluindo, Saraiva (2001) refere que os textos literários aumentam a capacidade interpretativa da criança e ajudam-na a resolver problemas abstractos que, sem o contexto, esta seria incapaz de resolver. Nesta perspectiva, a utilização de histórias nas aulas de matemática tem merecido nos últimos tempos, a atenção de muitos autores.

Segundo o NCTM (2004), as histórias constituem um bom meio para comunicar ideias matemáticas; para Katia Smole *et al.* (1995), as histórias permitem relacionar ideias matemáticas com a realidade ou com outras disciplinas, possibilitam o relacionamento de tópicos, representações e conceitos matemáticos e ajudam a explorar problemas e a descrever resultados, relacionando diversos modelos matemáticos.

De acordo com Charyl Pace (2005), a utilização de literatura nas aulas de matemática ajuda a implementar um currículo integrado e a proporcionar aos alunos aprendizagens significativas e duradouras.

Ron Zambo (2005) refere a importância da utilização de histórias nas aulas de matemática, para criar contextos significativos e reduzir estados de ansiedade proporcionados por contextos matemáticos abstractos. Todavia, para Loureiro *et al*. (2006) a escolha de bons livros de histórias, para utilizar nas aulas de matemática, deverá recair apenas sobre livros que apresentem bons modelos matemáticos, na narrativa ou na ilustração.

2.3. Histórias com matemática e aprendizagem de conceitos matemáticos

No ano lectivo 2004/2005, foi iniciado na Escola Superior de Educação de Lisboa um projecto que pretendia articular a literatura com a matemática. Esta ideia surgiu no âmbito do acompanhamento dos estágios, a partir da colaboração entre professores de Matemática e Língua Portuguesa, pertencentes às equipas multidisciplinares de apoio à Prática Pedagógica, no curso de Licenciatura de Professores do 1º Ciclo do Ensino Básico.

O projecto formalizou-se e foi, ao longo de alguns anos, desenvolvido por um grupo de trabalho constituído por duas professoras de Matemática da ESE de Lisboa e por três professoras do 1º ciclo, sendo duas delas ex-alunas da ESE.

Assim, de acordo com este grupo de trabalho formado por Cristina Loureiro; Cristina Morais; Maria José Oliveira; Maria Paula Rodrigues e Raquel Marques (2006), quando elegemos um bom livro para criar tarefas matemáticas é preciso saber fazer uma escolha criteriosa e ter em conta os seguintes aspectos: (1) o estudo de modelos matemáticos explorados nos livros de histórias de literatura para crianças; (2) a construção de tarefas matemáticas contextualizadas em livros de histórias; (3) o estudo das actividades e as resoluções dos alunos, realizadas a partir das histórias.

Tendo em conta os aspectos previamente apresentados, este grupo de trabalho pensa poder construir e fundamentar uma perspectiva de utilização matemática dos livros de histórias, partindo de títulos que são familiares aos professores portugueses e que servem de suporte de investigação e reflexão, baseados na nossa realidade.

Citando Loureiro *et al*:

> … embora a ideia que está na raiz do nosso projecto não seja original pretendemos desenvolvê-la e dar-lhe novos contributos. Além de que, ao situá-la na realidade portuguesa, poderemos dar uma mais-valia a um recurso didáctico que já é muito familiar aos professores do 1º ciclo e que já existe em muitas salas de aula. Muitos livros de literatura para a infância que estudámos são quase universalmente conhecidos, são autênticos *best-sellers* das salas de aula portuguesas (p. 3).

Uma das principais tarefas deste grupo de trabalho consistiu na análise de livros de histórias e sua categorização a partir dos modelos matemáticos que apresentavam. Esta categorização ajudou a seleccionar os livros que foram utilizados para a criação de tarefas matemáticas. Apresento, em seguida, cada uma das categorias criadas e para cada uma, uma ilustração com exemplos da interpretação feita e a orientação seguida para a criação de tarefas.

Nesta classificação o grupo de trabalho assumiu uma concepção muito ampla de modelo matemático. Podendo este ser designado por uma estrutura, um raciocínio ou um conceito matemático. O pretendido era identificar a forma como os autores usam, ou não, esses modelos em que é reconhecida uma ideia matemática. Pois, segundo Sally Lipsey e Bernard S. Pasternack (2002), os autores utilizam a matemática nas histórias tendo em conta diferentes perspectivas:

- ✓ para tornar clara uma teoria;
- ✓ para a criação de um trabalho de arte, inspirado em tópicos matemáticos;
- ✓ para criar motivação em tarefas matemáticas rotineiras;
- ✓ para criar um trabalho matemático produtivo e criativo;
- ✓ para recontar intrigantes histórias de matemáticos famosos.

Perante esta diversidade de intenções ou mesmo, muitas vezes, sem haver uma real intenção do autor, interessa ao grupo compreender em que medida o facto de haver modelos associados a uma história, na ilustração ou no texto, estes podem ser explorados para realizar actividades matemáticas.

A organização das histórias, segundo o critério de identificação e utilização de modelos matemáticos, é apresentada no quadro seguinte.

Quadro 1 – Organização de histórias

A	Toda a história é construída pelo autor, de forma intencional, em torno de um determinado modelo matemático, ficando a exploração limitada a esse modelo.
B	Toda a história é construída sobre um modelo matemático claramente explicitado, que é explorado ao longo da história, no todo ou em parte. Na história, o autor sugere ainda ideias de continuidade para a criação de novos problemas.
C	A história, embora não havendo intencionalidade explícita por parte do autor, contém episódios em que os contextos, pelo seu valor matemático, são favoráveis à formulação de problemas ou investigações matemáticas significativos para as crianças.
D	A ilustração, de uma forma autónoma, contém um modelo matemático ou sugere modelos matemáticos a serem explorados, estando ou não na intenção do ilustrador.
E	A ilustração traduz ou complementa o texto da história, estando intimamente ligados. Em conjunto, sugerem actividades interessantes e significativas do ponto de vista matemático.

Para ilustrar organização deste grupo de trabalho, apresento alguns exemplos de histórias e de tarefas matemáticas construídas tendo em conta os critérios B e C.

Quadro 2 - Critério B

[*Ainda não estão contentes? em Conto Contigo*, António Torrado, Civilização]	
"Entretanto, o tratador continua a fazer contas. ele tem mais soluções de reserva. Até, segundo parece, já foi comprar uma faca de cortar bananas, prevendo novas possibilidades ..."	Descobre outras soluções de reserva para ajudar o tratador? (Nesta história o autor recorre ao modelo de decomposição do 10 em somas de números inteiros para criar situações aparentemente diferentes mas todas equivalentes)

Quadro 3 - Critério C

[O Nabo Gigante, Alexis Tolstoi e Niamh Sharkey, Livros Horizonte]	
Págs. 4 e 5 "Semearam ervilhas e cenouras e batatas e feijões. Por último semearam nabos."	Quantas sopas diferentes é possível fazer com os 4 legumes? Pode ser feita sopa só com 1 legume, só com 2, ... E agora juntando também os nabos?
Pág. 12 *" O velhinho puxou, içou e sacudiu...*	A velhinha, para pôr a roupa a secar, quantas molas de roupa usou? Desenha uma maneira de pôr a roupa a secar só com 5 molas. Qual é o número máximo de peças de roupa que se consegue pôr a secar com 5 molas? E com 6 molas? E com 10?
Pág 26 e 27 *" O velhinho, a velhinha, ... os seis canários amarelos ..."*	Nesta altura, quantos animais já estão a ajudar os velhinhos? Quantos tipos diferentes de animais são? Continua a lista de animais mantendo sempre o padrão, 7 ... Procura aumentar bastante esta lista. Quantos animais tens? Quantos tipos diferentes de animais? Quantos tipos de animais devemos acrescentar à lista para conseguir ter mais de 200 animais?

No trabalho realizado, o grupo pretendeu escolher histórias com potencial matemático, baseando-se no modelo matemático presente e na forma como a história o aproveita ou desenvolve, obtendo indicações úteis para os professores ou outros utilizadores destas histórias.

Numa apreciação do trabalho desenvolvido em sala de aula com algumas das histórias identificadas pelo grupo de trabalho da Escola Superior de Educação de Lisboa, parece que a presença de um modelo matemático forte[1], na narrativa ou na ilustração, permite o desenrolar de actividades matemáticas muito ricas para os alunos.

Para Phyllis e David Within (2004), tal como é sugerido pelo grupo de trabalho Histórias com Matemática, da Escola Superior de Educação de Lisboa, existem critérios para seleccionar os melhores livros para crianças, com o objectivo de desenvolver trabalho matemático.

Assim, os critérios identificados são:

. livros que reflictam uma matemática precisa, de utilização funcional e de ideias acessíveis;

. livros que reflictam uma dimensão estética e que despertem o sentido estético das formas e a beleza da linguagem;

. livros que levem à diversidade de respostas e que envolvam o leitor na narrativa, através da articulação da linguagem matemática com as ilustrações.

Ainda em relação à utilização das histórias para crianças, na criação de tarefas matemáticas, Kátia Smole *et al.* (1995) revelam, nas orientações gerais que dão para a exploração didáctica das histórias, a preocupação de que a "impressão fundamental da história não deve ser distorcida por uma ênfase indevida em um aspecto matemático", (p. 9).

Os livros de histórias que estes autores estudaram estão agrupados em quatro categorias: a) livros de contagem e livros de números; b) histórias variadas; c) livros conceituais; d) charadas. Na primeira categoria incluem livros que possibilitam a exploração de ideias e conceitos matemáticos e, na terceira, consideram "livros que exploram ideias matemáticas específicas mas de forma diferente da dos livros didácticos convencionais, pois são escritos de tal modo que encantam o leitor e ao mesmo tempo estimulam uma investigação mais profunda" (pp. 10 -11).

[1] Ilustrações ou excertos de texto que identifiquem uma estrutura, um raciocínio ou um conceito matemáticos.

De acordo com este quadro de classificação, desenvolvem um trabalho com muitos exemplos de tarefas matemáticas construídas a partir de várias histórias que não conhecemos mas tendo sempre a preocupação de apresentar um resumo da história. Apesar da extensa lista de tarefas para cada livro, é evidenciada a preocupação de, na escola, não subjugar à exploração matemática o uso dos livros de literatura para crianças.

Para além dos livros explorados com diversas tarefas, estes autores apresentam ainda uma longa lista, constituída por mais de cinquenta livros, com potencialidades para desenvolver trabalho matemático. Entre estes livros estão alguns contos tradicionais como *O Pequeno Polegar*; *O Lobo e os Sete Cabritinhos* ou *O Capuchinho Vermelho*. Para cada título indicam a categoria, o nível/ idade mais adequados e o tipo de conceitos matemáticos a explorar.

Das conclusões retiradas acerca deste trabalho, parece-nos importante destacar as seguintes preocupações: basear em problemas significativos a experiência matemática das crianças; utilizar a literatura para crianças como um contexto onde a matemática está presente de forma natural; escolher criteriosamente os livros a utilizar. Com esta preocupação final é destacada a principal razão de ser da utilização das histórias na criação de tarefas matemáticas: "… o desenvolvimento de um universo mágico pessoal, capaz de despertar o prazer de ler" (p. 89).

Lê-me uma história que eu leio-te um padrão, em inglês, *You read me a story, I will read you a pattern*, é um trabalho menos extenso mas que apresenta, igualmente, vários exemplos de títulos passíveis de serem explorados. Realizado por Charyl Pace (2005) com alunos do 7º ano, as explorações são organizadas segundo os tipos de trabalho matemático realizado: padrões visuais (visual patterns); padrões auditivos ou lexicais (auditory patterns); padrões algébricos (algebraic patterns). Nesta última categoria, no livro *My Little Sister Ate One Hare*, há uma referência interessante a um modelo matemático muito vulgar em histórias, o da soma dos números inteiros consecutivos.

Na história, uma personagem come em cada dia o número de objectos do dia anterior bem como o número igual ao número do dia, por exemplo, no terceiro dia come 3+2+1 objectos. Esta ideia sugere ao autor que pergunte aos alunos se podem prever quantos objectos a personagem comerá no décimo dia. Um outro exemplo é o da história *A Grain Rice*, que tem subjacente um modelo análogo ao da história da invenção do jogo de xadrez. O modelo matemático é o de uma progressão geométrica de razão 2.

Pong Lo, uma das personagens da história, pretende receber no primeiro dia um grão de arroz e depois, em cada dia o dobro do número de grãos de arroz recebidos no dia anterior. A pergunta evidente é: Quantos grãos receberá ao fim de 40 dias?

Este trabalho, incluído no nº 8 da revista *Mathematics Teaching in the Middle* School (NCTM, 2005), é um entre vários que descrevem trabalhos realizados com alunos do 3º ciclo. Embora o nível de ensino seja muito diferente, parece-me importante reforçar o facto de todos estes trabalhos terem por base experiências de sala de aula e registarem as razões da inclusão de literatura na aula de matemática e o tipo de preocupações que as experiências descritas destacam.

Desta maneira, articulando literatura e matemática, os professores podem criar situações que encorajam os alunos a compreender e a familiarizar-se com a linguagem matemática, estabelecendo ligação entre a linguagem natural, aspectos do quotidiano e a linguagem matemática formal. Neste ambiente de aprendizagem, os alunos desenvolvem a capacidade de comunicar matematicamente, de formular conjecturas e novos enunciados que levam à construção e articulação de conceitos matemáticos.

A matemática possui uma linguagem própria, dada através de um conjunto de símbolos, que os alunos deverão ser capazes de transpor para a sua linguagem natural, de modo a conseguirem construir verdadeiro conhecimento matemático. É durante este processo de desconstrução, que o aluno cria imagens mentais, claras, acerca das ideias abstractas contidas na matemática e é neste processo de desconstrução, através da acção de um bom professor, que se pode esbater o distanciamento entre linguagem natural e linguagem matemática. O grau de compreensão de um conceito ou ideia está intimamente ligado com a capacidade de criação e comunicação de raciocínios. O aluno terá que ser capaz de interpretar símbolos matemáticos para poder comunicar matematicamente.

A utilização de histórias nas aulas de matemática permite a matematização da realidade e uma aprendizagem matemática contextualizada que ajuda na construção de um conhecimento matemático sólido e na utilização de uma linguagem matemática descodificada.

Durante as últimas décadas, as teorias construtivistas da aprendizagem representadas, entre outros, por Kamii & DeClarck (1985), influenciadas pelo trabalho de Piaget, têm salientado as questões ligadas à educação matemática. Estas vêem a criança como um *construtor* do seu próprio saber, através da interacção gerada no meio onde se movem e concebem a ideia do desenvolvimento matemático, à semelhança do que já acontecia com a linguagem e a leitura, dentro de uma perspectiva sociocultural (Cobb, 1995; Joram, Resnick, & Gabrielle, 1995). Propondo Cobb (1995), citado por Ann Anderson, Jim Anderson e Jon Shapiro (2004), que "a actividade aritmética de uma criança é profundamente influenciada pela sua participação nas práticas culturais, obtendo-se com esta tantos resultados como com o trabalho feito na escola" (Anderson *et al.*, 2004, p.9).

Perante estas ideias construtivistas do desenvolvimento do conhecimento matemático, a partir da interactividade social e/ ou cultural, Anderson *et al.* (1997) desenvolveram um estudo um pouco diferente dos referidos até aqui, partindo da utilização de histórias no seio familiar, com o objectivo de explorar e analisar o discurso matemático daí emergente.

Este estudo consistiu na escolha de um livro que foi entregue a um conjunto de pais e filhos, de quatro anos de idade, com o objectivo de, durante a hora do conto destas famílias, se analisar o conteúdo matemático decorrente da leitura da história.

Como conclusões os autores revelam que a leitura de histórias pode ser um meio de desenvolvimento do discurso matemático mas que isso apenas acontece quando a narrativa ou as ilustrações o sugerem. É possível, assim, afirmar que, tanto em casa como na escola (Jenner, 1999, citado por Anderson *et al.*, 2004), os conceitos matemáticos são co-construídos durante a partilha decorrente da leitura de uma história.

Em síntese, existem em países como Portugal e o Brasil, entre outros, alguns grupos de professores e investigadores, dinamizadores e divulgadores de projectos que se prendem com a análise de modelos matemáticos existentes em histórias infantis ou de cariz tradicional, para posterior construção e aplicação de tarefas matemáticas, construídas a partir dos modelos matemáticos encontrados.

Segundo Lipsey e Pasternack (2002), os autores de livros infantis introduzem a matemática nas histórias tendo em conta diferentes objectivos, como tornar uma teoria clara; criar um trabalho de arte, inspirado em tópicos matemáticos; criar motivação em tarefas matemáticas rotineiras; produzir um trabalho matemático produtivo e criativo e recontar histórias de matemáticos famosos.

Para Phylis e David Within (2004) devem ser considerados critérios de selecção de livros para crianças quando se pretende dar-lhe uma utilização matemática. Estes autores consideram que estes livros devem reflectir uma matemática precisa, de utilização funcional e apresentar ideias claras; apresentar uma dimensão estética que faça despertar o sentido estético das formas e a beleza da linguagem e ser capazes de envolver o leitor na narrativa, através da articulação da linguagem matemática com as ilustrações.

Kátia Smole *et al.* (1995) referem que o objectivo principal de uma história não deve ser distorcido colocando a ênfase num aspecto matemático.

De acordo com, as teorias construtivistas da aprendizagem, representadas por Kamii & DeClarck (1985), a criança é uma construtora do seu próprio conhecimento e a sua actividade aritmética é influenciada pelas suas interacções sociais e culturais (Cobb, 1995).

2.4. A importância do desenvolvimento do sentido espacial, com ênfase na visualização e na compreensão de propriedades das figuras geométricas, nos primeiros anos de escolaridade

O conceito de visualização pode assumir diferentes perspectivas, dependendo da área onde o pretendemos integrar. Assim, entre outras definições, Dreyfus (1990) diz que "visualização do ponto de vista da educação matemática inclui duas direcções: a interpretação e compreensão de modelos visuais e a capacidade de traduzir em informação de imagens visuais o que é dado de forma simbólica" (p. 119), ou seja a capacidade que o indivíduo tem de Interpretar, o que observa simbolicamente, e transformar informação em imagens que lhe permitam actuar.

Também o sentido espacial não é fácil de definir, contudo, de acordo com Lea (1990), podemos defini-lo como um conjunto complexo de competências que se interligam, dando origem à capacidade de perceber distâncias, direcções, movimentos e relações que o indivíduo estabelece com o espaço circundante, com os objectos ou estes entre si.

Relativamente ao trabalho com a geometria e ao desenvolvimento do sentido espacial, com ênfase na visualização, nos primeiros anos de escolaridade, Clements e Battista (1992) afirmam que os currículos escolares tradicionais apenas referem a necessidade de reconhecer e nomear formas geométricas e usar fórmulas para trabalhar a medida, acrescentando ainda que os conceitos aparecem isolados, sem qualquer articulação ou progressão, entre si, que leve à elaboração de raciocínios elaborados e bem estruturados.

Perante esta realidade, Goldenberg *et al.* (1998) propõem um novo olhar sobre a geometria e a utilização desta para a construção de hábitos de pensamento, pois o desenvolvimento do conhecimento geométrico prevê a articulação de conceitos, a realização de conjecturas e a generalização. É necessária a mudança para que não deixemos morrer nas crianças "uma matemática do espaço" (Costa, 2005, p. 165).

Para Freudenthal (1973), citado por Costa (2005), "A geometria só pode ser cheia de significado se se explora a relação da geometria com o espaço experimentado"(p. 157). Assim, a geometria permite " a matematização da realidade e a realização de descobertas, que sendo feitas "com os próprios olhos e mãos, são mais convincentes e surpreendentes" (p. 157).

Goldenberg, Cuoco e Mark (1998), bem como o NCTM (1991), referem que o ensino da geometria deve começar logo nos primeiros anos de escolaridade, de modo a que os alunos compreendam os conceitos geométricos que lhes permitirão trabalhar no espaço tridimensional.

Logo no início da escolaridade, os alunos devem trabalhar os conceitos de paralelismo, perpendicularidade, congruência, semelhança e simetria, bem como conhecer as propriedades das figuras planas e dos sólidos geométricos. Devem, também, ser capazes de visualizar o modo como os objectos se movem à sua volta, descrevendo transformações geométricas (reflexões, rotações e translações) e resolver problemas que envolvam medida. (NCSM, 1990).

Segundo Mendes e Delgado (2008), as crianças começam, desde tenra idade, a desenvolver alguns conceitos geométricos e o raciocínio espacial. Desde cedo, observam o espaço que as rodeia, passando, mais tarde, a interagir com ele em acções de alcançar, atirar e empurrar objectos. Experienciando, identificam e assimilam formas e espaços que constituirão, no futuro, o seu raciocínio espacial e conhecimento geométrico

De acordo com o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000), o ensino e aprendizagem da Geometria deve permitir, entre o jardim-de-infância e o 12º ano:

. analisar características e propriedades de formas geométricas bidimensionais e tridimensionais e desenvolver argumentos matemáticos acerca de relações geométricas;

. especificar localizações e descrever relações espaciais recorrendo à geometria de coordenadas e a outros sistemas de representação;

. aplicar transformações e usar simetrias para analisar situações matemáticas;

. usar a visualização, o raciocínio espacial e a modelação geométrica para resolver problemas (p. 41).

Assim, é fundamental que as crianças, desde cedo, sejam envolvidas em actividades de:

. observação e manipulação de objectos bi e tridimensionais, com o objectivo de os descreverem e classificarem, analisando propriedades e características;

. especificação e descrição de relações espaciais, formulando e respondendo a questões como: *Qual o caminho?*; *Qual o melhor percurso?*; *Onde está o/ a…?; quem está entre o … e a …?*; entre outras;

. aplicação de transformações e reflexões[2], envolvendo a transformação de formas ou figuras, através de acções de deslizar, rodar, reflectir (voltar) ou projectar. Experiências que têm na sua base transformações geométricas tais como a translação, rotação e reflexão;

[2] Conjunto de tarefas que suportam este estudo.

. resolução de problemas através da utilização da visualização e raciocínio espacial. Estas experiências são fundamentais para que a criança, progressivamente, desenvolva as suas capacidades de percepcionar mudanças de posição, orientação e tamanho dos objectos, e entenda as noções de congruência, semelhança e transformação de figuras.

Perante o mundo em que vivemos, não é difícil proporcionar aos nossos alunos o desenvolvimento do seu conhecimento geométrico e raciocínio espacial, já que grande parte dos nossos edifícios e decorações são baseados em formas geométricas. Também, a maior parte dos elementos naturais que nos rodeiam, podem ser descritos em termos geométricos.

A natureza cerca-nos e dá-nos ricos objectos de estudo, afirmando, por isso, Lehrer, Jacobson *et al.* (1998) que é essencial que os professores construam um ambiente de sala de aula onde o aluno é um ser activo, capaz de reflectir matematicamente e de construir generalizações. Motivadas, as crianças descobrem formas geométricas em tudo o que as rodeia e interessam-se por elas durante longos períodos de tempo, tentando captar propriedades e características das mesmas. Esta atenção e focagem, no mundo das formas, ajuda a criança, não só, a apreciar a geometria envolvente, desenvolvendo um "*valor estético* que se traduz em sensibilidade para contemplar obras de arte, que recorrem a motivos geométricos, peças de *design*, arquitectura e elementos geométricos específicos, como frisos e rosáceas, presentes em muitos monumentos" (Mendes e Delgado, 2008, p. 10) mas também a desenvolver o seu sentido espacial.

Segundo Sheffielf & Cruikshank (2000), as origens do ensino da geometria assentam em experiências informais, durante os primeiros anos de escolaridade, e necessitam ser cuidadosamente estruturadas e planificadas para dotarem os mais novos de uma grande variedade de conceitos e competências. Estas são a base para o trabalho com uma geometria mais formal, no futuro.

Para Mendes e Delgado (2008), o nosso quotidiano proporciona-nos experiências geométricas quando tentamos decifrar a informação de um manual de instruções, analisamos a planta de uma casa, interpretamos um mapa, ou explicamos um caminho a alguém. Perante este tipo de situações, mobilizamos, informalmente, as nossas capacidades de visualização e apelamos à nossa orientação espacial. Além destas, segundo as mesmas autoras, existem, ainda, outro tipo de situações como perceber "… motivos pelos quais a nossa sombra às vezes é "maior" e outras "mais pequena", nas razões porque se fazem determinadas dobragens em cartões de modo a construir caixas, ou mesmo por que razão têm as antenas parabólicas sempre a mesma forma" (p. 10).

Os exemplos apontados remetem para um conjunto de situações informais e para o "valor prático" (Mendes e Delgado, 2008, p. 10) da Geometria que pretendem salientar a importância do trabalho, dentro desta área da matemática, com os alunos ao longo de todo o seu percurso escolar. O trabalho com a geometria formará cidadãos competentes na relação com o espaço que os rodeia, pois de acordo com Mendes e Delgado (2008) "o *olhar* sobre o que nos rodeia é influenciado pelos conhecimentos e pela sensibilidade geométrica que cada um de nós vai desenvolvendo ao longo da vida" (p.10). A este propósito, Alsina (1999) menciona que "A geometria no ensino da matemática deve ser a geometria útil para todos: o conhecimento matemático do espaço. Uma geometria baseada na intuição e na experimentação aconselhada pelo sentido comum…" (p. 65).

Também os livros, muitas vezes, sugerem tarefas que ajudam o professor a motivar os alunos para a aprendizagem da geometria, através dos modelos geométricos apresentados na narrativa ou na ilustração. Estes podem criar o contexto para uma aula de geometria dinâmica e aliciante que leva os alunos, informalmente, a utilizar e discutir as ideias e conceitos geométricos implícitos.

> As crianças que desenvolvem um forte senso de relações espaciais e que dominam conceitos e linguagem da geometria, estão mais preparadas para aprender as idéias de número e medida, além de outros tópicos da matemática. Por isso, as atividades de matemática nas séries iniciais, incluindo a pré-escola, devem, sempre que possível, envolver a criança em explorações geométricas e espaciais.
>
> (Equipe Interdisciplinar da Prefeitura de Santos, Brasil, 2010)

Todas estas experiências dão oportunidade às crianças para comparar, classificar e arrumar objectos de acordo com as suas propriedades; observar, analisar e construir frisos e padrões geométricos; identificar simetrias e transformações geométricas.

Vivenciando estas práticas os alunos desenvolvem " o sentido espacial, com ênfase na visualização e na compreensão de propriedades de figuras geométricas no plano e no espaço, a noção de grandeza e respectivos processos de medida, bem como a utilização destes conhecimentos e capacidades na resolução de problemas geométricos e de medida em contextos diversos" (PMEB, 2007, p. 20).

Enquanto a criança observa as formas que a rodeia, descobre as suas propriedades, cria definições, envolvendo características essenciais, constrói e representa formas e a capacidade de comunicar as suas descobertas é fundamental, na construção do seu sentido espacial.

Sheffielf & Cruikshank (2000) referem que é durante o processo comunicativo, escrito ou oral, que as crianças organizam os conceitos, as propriedades e as características das formas com que trabalham. A escrita individual ou cooperativa de ideias geométricas é uma actividade essencial porque, enquanto se descrevem raciocínios, desenvolvem-se conceitos e competências geométricas que ficam registados, podendo ser partilhados a qualquer momento.

Hershkowitz (1998) refere que a comunicação é uma capacidade essencial na construção e desenvolvimento do conhecimento geométrico porque permite uma real interacção e o conhecimento de diferentes formas de organização e estruturação do pensamento, levando os alunos a relacionar conceitos, a articular ideias e a construir um conhecimento geométrico sólido.

Abreviando, de acordo com Dreyfus (1990), a visualização inclui a interpretação e a compreensão de modelos visuais e a capacidade de transformar em imagens visuais o que nos chega através de imagens simbólicas.

Lea (1990) define o sentido espacial como um complexo conjunto de competências que, interligadas, dão origem à percepção de distâncias, direcções, movimentos e relações do indivíduo com o espaço envolvente.

Clements e Battista (1992) referem que o trabalho com a geometria e o desenvolvimento do sentido espacial, nos primeiros anos de escolaridade, continua a ser feito com base na nomeação de formas geométricas e a utilização de fórmulas para trabalhar a medida, não permitindo a elaboração de raciocínios elaborados e bem estruturados.

Goldenberg *et al.* (1998) propõem uma nova abordagem e utilização da geometria, de maneira a que o trabalho realizado permita a construção de hábitos de pensamento, a articulação de conceitos e a realização de conjecturas e generalizações.

Goldenberg, Cuoco e Mark (1998), tal como o NCTM (1991), afirmam que o ensino da geometria deve ser iniciado nos primeiros anos de escolaridade para que, desde cedo, as crianças apreendam os conceitos geométricos que lhe possibilitarão trabalhar no espaço tridimensional.

Sheffield & Cruikshank (2000) afirmam que as origens do ensino da geometria se baseiam em experiências informais que, bem estruturadas e planificadas, durante os primeiros anos de escolaridade, dotam as crianças de competências e conceitos diversos.

Alsina (1999) refere que a geometria escolar tem como objectivo levar os alunos a um conhecimento do espaço, com base na intuição e experimentação.

Hershkowitz (1998) identifica a comunicação como uma capacidade fundamental na construção e desenvolvimento do conhecimento geométrico, dado esta permitir a interacção e o conhecimento de diferentes formas de organização e estruturação do pensamento.

2.5. Representações

No nosso quotidiano somos confrontados com problemas que exigem a utilização e articulação de várias competências para os resolver com sucesso. Durante a resolução de um problema matemático há todo um processo que se desenvolve mentalmente, desde a selecção de dados pertinentes; passando pela construção de estratégias eficazes e terminando na resposta, que exigem do ser humano o recurso a formas gráficas que apoiam o pensamento. Existem pessoas que utilizam como representações externas do pensamento, representações pictóricas, icónicas ou outras, uma grande maioria, diferentes algoritmos.

Para Woleck (2001), as representações são ferramentas que o sujeito utiliza para articular, clarificar, justificar e comunicar raciocínios. Estas são um processo dinâmico que apoiam a construção de conceitos e relações matemáticas.

O ser humano tem a capacidade de criar imagens mentais ou representações internas que pode representar externamente, tanto oralmente como por escrito.

Esta situação conduz-nos para a ideia de que para comunicar são necessários dois tipos de representações, as internas e as externas. A este propósito, o NCTM (2000) refere que as representações podem ser "observáveis externamente como ocorrências internas nas mentes daqueles que fazem matemática" (p.66) e completando a ideia, Goldin & Shteingold (2001), referem que "Só podemos fazer inferências sobre as representações internas dos alunos através da produção de representações externas" (p.6).

As representações materializam as relações criadas internamente pelo indivíduo e, segundo Ajdukiewicz, citado por Sierpinska (1994), para quem representações são a experiência mental instantânea de um indivíduo, identificada num determinado momento na mente, existem dois tipos de representações.

O primeiro tipo envolve os sentidos da visão, da audição, do olfacto e pode combinar, em simultâneo, mais do que um sentido. Mas também pode ser baseado em memórias ou sentimentos (dor, alegria, tristeza,…).

O segundo tipo consiste numa representação conceptual, baseado na construção de definições ou descrições, ou pode ser, apenas, verbal.

Dufour-Janvier *et al.* (1987) também distinguem as representações e, de acordo com eles, podemos agrupá-las em dois conjuntos: internas e externas. Na sua opinião, as representações internas ligam-se mais ao domínio do significado e correspondem a imagens mentais que, por sua vez, correspondem a formulações internas construídas a partir da realidade.

As representações externas relacionam-se com o significante e dizem respeito a todas as representações simbólicas (símbolos, esquemas, diagramas, entre outros) que pretendem representar externamente uma certa “realidade” matemática.

Goldin (2002) afirma que o conceito de representação envolve uma relação entre duas ou mais configurações, em que uma delas é a representação da outra. Assim, no contexto da aprendizagem matemática e resolução de problemas propõe:

a) configurações internas do indivíduo codificadas no cérebro mas que vão ser descritas a nível holístico (verbal, imagens visuais, símbolos matemáticos internos, regras e algoritmos, esquemas, …);

b) configurações externas ao indivíduo, observadas geralmente no ambiente imediato (objectos ou eventos da vida real, palavras escritas ou faladas, fórmulas e equações, figuras geométricas, gráficos, materiais manipulativos ou computadores);

c) relações entre representações possíveis, existentes ou potenciais, que envolvem o indivíduo (externas ou internas ao indivíduo).

Goldin (2002) refere ainda que “as representações internas encontram-se codificadas fisicamente e a sua descrição a nível cerebral ainda não é conhecida em detalhe” (p.210). Contudo, podem ser interpretadas a partir das representações externas produzidas pois “ a forma como o aluno se relaciona com ou gera uma representação externa revela a forma como representou essa informação internamente” (Hiebert & Carpenter, 1992, p. 66).

A relação entre a existência de uma representação externa correspondente a uma representação interna tem sido muito considerada e Davis *et al.*, citado por Janvier (1987b), afirma que uma “representação deve ser a combinação de algo escrito no papel, algo existente na forma de objectos físicos e a construção cuidadosa de arranjos da ideia na mente de alguém” (p.68).

Segundo os autores citados, a compreensão e construção de conceitos matemáticos depende, em muito, da estreita relação que se estabelece entre representações internas e externas, dado que é durante a combinação e manipulação das mesmas (Bruner, 1979) que os alunos constroem compreensão.

Goldin e Steingold (2001) defendem que a pesquisa sobre representações refere que é através da interacção entre representações externas que se desenvolvem sistemas de representação internas que ajudam os alunos a produzir novas produções externas.

Janvier (1987a), apoiando a ideia anterior, considera quatro tipos de representações externas (descrições verbais, tabelas, gráficos ou fórmulas) e propõe um processo de translação, entendido como um processo psicológico evolutivo, que permite passar de um modo de representação para outro.

Para que possamos entender este processo evolutivo ou de translação, o autor apresenta a seguinte tabela.

Quadro 4 - Processos de translação (Janvier, 1987a, p.28)

	Situações de descrições verbais	Tabelas	Gráficos	Fórmulas
Situações de descrições verbais		Medir	Esboçar	Modelar
Tabelas	Ler		*Plotting*	Enquadrar
Gráficos	Interpretar	Ler		*Curve fitting*
Fórmulas	Reconhecer parâmetros	Computar	Esboçar	

Ao analisar o Quadro 4 é, entre outros, possível perceber que para passar da utilização de tabelas para a utilização de descrições verbais, é necessário fazer a leitura da informação contida na mesma; da utilização de tabelas para a utilização de gráficos, é preciso recolher e interpretar os dados apresentados para os poder representar graficamente, ou ainda, para passar da utilização de tabelas para a utilização de fórmulas, é essencial saber enquadrar simbolicamente a informação recolhida.

É durante este processo interactivo que os alunos articulam saberes e constroem novas abordagens representativas do seu pensamento. A variedade e articulação de diferentes representações, para a construção de um mesmo conceito, enriquecem o processo de ensino-aprendizagem, tornando-o mais palpável e real. Ainda segundo os autores referidos atrás, a compreensão conceptual depende do poder e flexibilidade das representações internas em estreita ligação com diferentes tipos de representação externas. "Esta perspectiva enfatiza a importância de os alunos usarem e tornarem-se fluentes numa vasta variedade de modos para expressar a sua percepção como seja com diagramas, símbolos e metáforas “ (Mason, 1987b, p. 207).

A utilização de representações externas, sejam elas apresentadas pelo professor aos seus alunos ou construídas pelos mesmos para apresentarem os seus raciocínios e defenderem ou demonstrarem as suas conjecturas, são defendidas por autores como Vergnaud (1987); Dufour-Janvier *et al* (1987), Meyer (2001) ou ainda Woleck (2001), de acordo com princípios diferenciados.

Woleck (2001), a propósito da importância das representações para a compreensão matemática dos alunos, afirma que as representações pictóricas são um patamar intermédio que ajudam os alunos a interpretar enunciados e a organizar o seu pensamento, permitindo identificar a informação relevante e definir estratégias adequadas de resolução de problemas.

A este propósito, e de acordo com a educação matemática realista, Valério (2004), citando Meyer (2001), “defende que os estudantes conseguem criar uma ponte entre o concreto e abstracto, com as suas criações e uso de modelos, desenhos, diagramas, tabelas ou notações simbólicas” (p.27).

As representações dos alunos na área da Matemática funcionam como registos do seu pensamento e são construídas ou utilizadas sem recurso a qualquer tipo de convenção. Kalathil & Sherin (2000) referem que as representações dos alunos dão informação sobre o que estes pensam e sobre o seu conhecimento e a forma como partilham e constroem esse conhecimento. Nesta perspectiva, consideram que as representações servem de ferramenta, tanto a alunos como professores.

> As representações externas das crianças podem ser informativas de como elas percebem as situações problemáticas e podem dar ajudas para desenhar intervenções. A reconciliação entre os pontos de vista do aluno e professor serão então facilitadas e, acreditamos, realizadas.
>
> (Dufour- Janvier *et al*, 1987,p. 120)

Segundo os *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000) para quem o termo representações é o processo e produto observável do pensamento mental, os currículos devem proporcionar aos alunos a criação e a utilização de representações para organizar, reunir e comunicar ideias matemáticas; a selecção, aplicação e transformação de representações matemáticas para a resolução de problemas e o uso de representações para modelar e interpretar fenómenos matemáticos, físicos e sociais. Contudo, ainda hoje, não é regra centrar a atenção nas representações dos alunos, privilegiando-se antes uma aprendizagem centrada em processos formais que assentam em regras e procedimentos. Uma conduta que não permite ao professor conhecer e avaliar o conhecimento individual do aluno e perceber a evolução do mesmo.

Segundo Matos (1994), os alunos realizam a maior parte da sua aprendizagem fazendo uso de métodos próprios e, por isso, Goldin e Shteingold (2001) defendem que a abordagem às representações das crianças deve ser introduzida o mais cedo possível no currículo, para que o professor dê aos seus alunos a oportunidade para criar as suas próprias representações. Pois estas representações, de acordo com os *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000), funcionam como ferramentas de apoio à construção e aprendizagem da matemática e devem, por isso, ser bastante exploradas.

Relativamente a esta questão, Yackel, Cobb, Wood; Wheatley e Merkel (1991) afirmam que "as crianças não só são capazes de desenvolver as suas próprias estratégias para realizar as tarefas da matemática escolar mas também que cada criança tem de construir o seu próprio conhecimento matemático" (p. 17).

Nesta perspectiva, considera-se que os alunos são capazes de construir conhecimento matemático e aprender matemática de forma mais significativa, a partir da utilização das suas próprias estratégias e representações. Enquanto representam, os alunos exteriorizam e "arrumam" o seu pensamento, abrindo caminho para a criação e evolução do mesmo. Também defendendo esta ideia, Sierpinska (1994) refere que "para muitos matemáticos e físicos, a possibilidade de matematizar parte da realidade está na organização e compreensão dessa realidade" e continua, citando Pollock, "sentimos que se compreende algo quando construímos um modelo matemático disso" (p.38).

Perante estas ideias, mas ainda não de forma generalizada nas escolas portuguesas, pode afirmar-se que:

> É hoje aceite que os alunos constroem o seu conhecimento em vez de o receberem sobre uma forma final através do professor ou livro de texto, isto significará que os alunos criam as suas próprias representações internas a partir das suas interacções com o mundo e constroem as suas próprias redes de representação […] O processo de gerar compreensão não será suave nem previsível mas as evidências disponíveis sugerem que ao longo do tempo, os alunos constroem relações, criam invenções produtivas e constroem a sua compreensão (Hiebert & Carpenter, 1992, p. 74).

O aluno deve ter um papel activo nas suas aprendizagens, pois, só assim, poderá participar na construção do seu conhecimento. Um conhecimento próprio, que possa evoluir e actualizar-se. A este respeito Sierpinska (1994) refere que "Os estudantes devem aprender a aprender, mas também, estar preparados para a contínua necessidade de compreender" (p. 27).

Segundo Valério (2004), através de Niss (1983):

> É de importância democrática, tanto individual como socialmente, que qualquer cidadão disponha de instrumentos para compreender o papel da matemática (na sociedade). Qualquer um que não possua estes instrumentos será vítima de um processo social no qual a matemática é uma componente.
>
> Então, o objectivo da educação matemática deve ser possibilitar aos estudantes compreender, julgar, utilizar e aplicar a matemática na sociedade em situações particulares que sejam significativas para si, na sociedade e vida profissional (p. 248).

Se antes a matemática era vista como um produto, procura hoje dar-se maior ênfase ao processo de fazer matemática em que os alunos tenham uma profunda compreensão da sua matemática e sejam capazes de explicar e justificar os seus procedimentos (Gravemeijer, 1997).

De acordo com os autores citados, a compreensão e aprendizagem da matemática desenvolvem-se gradualmente, através da utilização de representações próprias e num processo de interacção social que as organiza e formaliza. Segundo Sierpinska (1994), os processos de interacção, formalizados na comunicação, promovem a compreensão dos alunos, enquanto estes apresentam e defendem os seus raciocínios.

Nesta perspectiva, segundo alguns autores, devemos organizar as representações matemáticas utilizadas na escola em dois grupos que se articulam: as representações dos alunos e as representações usadas, pelo professor e pelo aluno, com o objectivo de construir conceitos.

Dufour- Janvier *et al.* (1987) defendem que " O estudo das representações construídas pelos alunos deve dar-nos sugestões para formular representações alternativas para a aprendizagem de conceitos matemáticos" (p.119). Contudo, esse conhecimento não tem sido utilizado e, segundo o NCTM (2000), todas as estruturas formais como "… diagramas, gráficos e expressões simbólicas fazem parte do ensino da matemática" (p. 66) mas não são construídas com os alunos, a partir das suas representações, têm sido aprendidas e ensinadas apenas como um fim.

Nas nossas escolas, como referido anteriormente, e como defendem Dufour – Janvier *et al.* "as representações externas são impostas desde fora e parece haver poucas oportunidades para as crianças construírem e explorarem as suas próprias representações matemáticas" (p.119). Há ainda uma tradicional e forte convicção de que ao "agarrar" o pensamento do aluno para formalizar ideias matemáticas, o professor possa não conseguir traduzir correctamente os conceitos em questão. Contudo, os mesmos autores defendem também que o professor não só é capaz de interpretar bem as representações dos seus alunos como também é o elemento orientador de todo este processo e "se queremos usar as representações externas no ensino temos que ter em consideração que isto deve ser o mais próximo possível das representações internas das crianças […] A evolução é muito longa e deve ser provocada no sentido em que se perceba que o essencial na representação não é o acto de que esta seja dada a todas as pessoas mas sim o que cada pessoa percebe" (pp. 117 – 118). Nesta perspectiva, é importante que o professor, que utiliza as representações externas dos alunos para gerar conhecimento matemático, compreenda que cada uma das representações apresentadas e exploradas nas suas aulas servirá pessoas e entendimentos diferentes e que cada um deverá apenas fazer uso daquelas com que se identifica ou que melhor serve o seu entendimento do tópico trabalhado. Mas a utilização das representações externas dos alunos não implica que apenas o professor faça uma boa utilização das mesmas, ao aluno também cabe a importante tarefa de estar disponível para entender as representações como ferramentas matemáticas de grande utilidade. E para que este possa perceber a sua utilidade dever-lhe-ão ser dadas oportunidades de aprender, durante a resolução de um problema matemático, a seleccionar ou rejeitar uma dada representação sabendo porque o faz ou, como propõe Janvier (1987a), saber questionar quando se efectua a passagem de um tipo de representação para outro. Só através deste tipo de comportamentos é possível compreender se o aluno captou as representações e conhece as suas possibilidades, limites ou efectividade de cada uma. Como refere o NCTM (2000), as representações devem ser encaradas como elementos essenciais para ajudar os alunos a: "a) compreender conceitos matemáticos e a relacioná-los; b) a comunicar abordagens matemáticas, argumentar e compreendê-las; c) em reconhecer conexões através da relação de conceitos matemáticos e d) em aplicar a matemática a situações problemáticas reais, através de modelos" (p. 66).

Perante esta ideia, os alunos deverão ser orientados no sentido de perceber que existem diversas formas de representar a informação e que a cada um, individualmente, cabe interpretá-la para gerar compreensão. Perante uma representação da realidade, os alunos deverão ser capazes de identificar o que ela representa efectivamente e "quando são apresentadas às crianças tarefas que fazem sentido para elas, encorajando-as a resolvê-las, as crianças em vez de seguirem procedimentos que tenham sido apresentados pelo professor, desenvolvem uma variedade de estratégias para alcançarem a solução" (Yackel, Cobb, Wood, Wheatley e Merkel, 1991, p. 17). Essas representações têm um significado especial para aquele que as cria e, por isso, " as crianças em diferentes níveis conceptuais não só utilizam diferentes estratégias para alcançar a solução como interpretam as tarefas de diferentes formas […] para desenvolver raciocínios com significado pessoal" (Yackel et *al*., 1991, p. 18).

Os raciocínios individuais desenvolvem-se através de um processo de modelação da realidade, utilizando " a representação matemática dos elementos e a sua relação numa versão idealizada de um fenómeno complexo" (NCTM, p.69).

Quando modelamos, recorremos a símbolos que nos ajudam a representar e a manipular ideias abstractas, estabelecendo pontes entre a matemática informal e a matemática formal. Simbolizamos quando não encontramos algo que necessitamos ter presente (Pimm, 1995).

Contudo, antes de produzir símbolos, modelar e usar representações há que ter em atenção o papel da aprendizagem em contexto. Goldin (2002) identifica a contextualização como um complemento para o processo de abstracção e de conhecimento matemático. Através da contextualização, as crianças aprendem a construir casos especiais, a identificar o particular no geral, a movimentar-se pelo concreto apresentando novas representações e a dar passos flexível e espontaneamente. Para Goldin (2002) a matemática em contexto, aquela que utiliza representações, é o oposto à matemática abstracta. Contudo, estas são matemáticas complementares e devem ambas ser desenvolvidas, pois com a abstracção, os alunos aprendem a generalizar, a ver o geral no particular e a movimentar-se em informação não relevante, também com flexibilidade e de forma natural.

Os livros de histórias com matemática prestam, na questão da contextualização, como referido anteriormente, um papel crucial na motivação dos alunos para a resolução de tarefas matemáticas, pois, quando suportados por bons modelos matemáticos, emprestam o contexto necessário à modelação e à compreensão matemática.

Sintetizando, Woleck (2001) afirma que as representações apoiam a construção de conceitos e relações numéricas e são utilizadas, pelo indivíduo, como ferramentas para articular, clarificar, justificar e comunicar raciocínios.

Dufour-Janvier *et al.* (1987), identificam dois tipos de representações: as internas e as externas. Ligando-se as primeiras ao domínio dos significados e à criação de imagens mentais e as segundas, ao significante e à representação simbólica.

Goldin (2002) refere que o conceito de representação envolve uma relação entre duas ou mais configurações, em que uma delas é a representação da outra.

Para Hiebert & Carpenter (1992) a representação externa é uma apresentação da informação processada internamente.

Goldin e Steingold (2001) referem que é através da interacção entre representações externas que se desenvolvem sistemas de representações internas que ajudam os alunos a construir novas representações externas.

A compreensão e construção de conceitos matemáticos depende da estreita relação que se estabelece entre representações internas e externas, pois é durante a combinação e manipulação das mesmas Bruner (1979) que o indivíduo constrói entendimento.

Kalathil & Sherin (2000) afirmam que as representações dos alunos servem de ferramenta, tanto a alunos como professores, dado passarem informação sobre o que os primeiros pensam, sobre o seu conhecimento e a maneira como constroem e partilham esse conhecimento.

De acordo com os *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000), os currículos devem garantir que os alunos criem e utilizem representações para organizar, reunir e comunicar ideias matemáticas.

A compreensão e aprendizagem da matemática desenvolvem-se gradualmente, através da utilização de representações próprias e num processo de interacção social que as organiza e formaliza. Assim sendo, de acordo com diversos autores, as representações matemáticas, utilizadas na escola, devem ser organizadas em dois grupos articulados: as representações dos alunos e as representações utilizadas, por professores e alunos, com o objectivo de construir e compreender conceitos.

De acordo com Goldin (2002), a matemática em contexto, como a sugerida pelos livros de histórias, utiliza representações que desempenham um papel crucial na motivação dos alunos para a resolução de tarefas matemáticas.

2.6. Interacções

> "… alunos e professores contribuem activamente para a constituição interactiva das tradições matemáticas existentes na sua sala de aula."
>
> Cobb, Wood, Yackel and McNeal (1992, p. 600)

Para promover o desenvolvimento de interacção em sala de aula é necessário que o professor o fomente "a atitude do professor é crucial para o desenvolvimento de uma atmosfera […] com vista a que as crianças partilhem os seus pensamentos matemáticos" (Yackel *et al.*, 1991, p. 19). A criação de um ambiente de aprendizagem onde a interacção é privilegiada passa pela alteração do papel do professor, este deve "… passar de um mero expositor de saber a um orientador de alunos que constroem o seu saber através das actividades que ele lhes propõe, das questões pertinentes que lhes coloca e dos desafios que lhes lança" (p.19).

Durante as aulas de matemática deve haver um foco central na forma como são feitas as explicações e as justificações, ao longo da resolução de uma tarefa. Durante a resolução de um problema ou após a resolução do mesmo, os alunos deverão ser capazes de apresentar soluções, dar explicações e apresentar justificações que apoiem a solução encontrada. Os alunos ou o professor dão explicações e justificações com o objectivo de comunicar um raciocínio matemático sobre aspectos que, aparentemente, os outros ainda não terão identificado. Desta maneira, durante a actividade matemática, todos estão a contribuir para o desenvolvimento de um processo de comunicação essencial, que leva a que se possa fazer um conjunto de inferências, até ali impossível. Comunicar é muito mais do que dar resposta a uma pergunta para a qual não havia solução, é deixar que os outros construam conhecimento à medida que vão inferindo e articulando diferentes raciocínios (Cobb, Wood, Yackel & McNeal, 1992).

Uma situação de explicação ou justificação pode ocorrer enquanto os alunos resolvem uma tarefa, explicando as suas interpretações, validando o que tornaram explícito ou discutindo a legitimidade de particularidades nas construções matemáticas realizadas. Através de uma processo interactivo, a explanação e a justificação são consideradas actividades colectivas ou de pequeno grupo (Blumer, 1969; Mead, 1934), citados por Cobb *et al.* (1992).

Um resultado é aceitável se o processo através do qual se obteve o resultado é também aceitável (Barnes, 1982), citado por Cobb *et al*., 1992. Este tipo de interacção obriga o aluno a explicar e a justificar o seu pensamento, esperando que os colegas ou o professor, em conjunto com a turma, legitimem a sua resposta.

Um momento de interacção não pode ser visto apenas como aquele em que o professor pede para os alunos fazerem determinada tarefa e depois ele, próprio, avança indicando a forma como os alunos deverão pensar e a forma como deverão organizar o pensamento. É fundamental que haja um tempo de discussão sobre a forma como cada um interpretou a tarefa proposta, comentando o raciocínio elaborado pelo professor e confrontando-o com o seu. Sem partilha de significados, sem professor e alunos a explicarem ou justificarem a forma como pensaram, não existe uma interacção efectiva em que cada um dos presentes construiu conhecimento matemático, através da partilha de diferentes pensamentos e conhecimentos do mesmo tópico. Sem interacção, no seu sentido mais lato, os alunos apenas integram regras que aplicam sem conhecimento efectivo e apenas o professor é validador do que pode ser considerada actividade matemática legítima.

Cobb, Wood, Yackel & McNeal (1992) quando falam de interacção, identificam dois tipos de alunos:

- os que participam numa tradição matemática escolar, experienciando conhecimento matemático quando conseguem acompanhar instruções e procedimentos com sucesso;

- os que cooperam numa tradição de inquérito matemático, experienciando compreensão quando criam e manipulam objectos matemáticos, de maneira a conseguir explicar e justificar o seu pensamento.

De acordo com Yackel, Cobb e Wood (1992) a comunicação, durante a actividade matemática, deve ser um processo de interpretação activa e de mútua adaptação onde a aprendizagem ocorre num circuito de interacção social, constituído por alunos e professores. Neste, os alunos constroem sequências de acontecimentos, discutem diferentes pontos de vista, aceitam ou rejeitam estratégias, procuram novas soluções, e são autores do próprio conhecimento. O professor orienta e valida a construção de estratégias e a apresentação de soluções, através do estabelecimento de relações e da negociação de significados, tanto em pequeno como em grande grupo.

Dentro deste circuito de interacção social, através de um processo de aculturação, constroem-se regras de cooperação e um conhecimento matemático discutido e com significado.

De acordo com a ideia de aculturação, a interacção é mais do que um processo linear de causa-efeito, onde a resposta final depende exclusivamente da anterior. Esta prende-se com um processo circular onde se constrói conhecimento, a partir das relações que se estabelecem durante as diferentes intervenções.

Walkerdine (1988), Solomon (1989) e Cobb *et al.* (1992) dizem que a actividade matemática deve ser vista como uma prática social ou discursiva e não como um processo cognitivo.

Tanto o desenvolvimento individual como o desenvolvimento colectivo do ser humano resultam da interacção. Interagindo, expressamos conhecimento, discutimo-lo, articulamo-lo e fazemos novas aquisições. Nesta relação de interdependência tornamo-nos reflexivos e críticos e passamos a acreditar na construção de conhecimento através da partilha.

Cobb *et al.* (1992), citando Comaroff (1982), referem que na sala de aula as crianças aprendem tanto, quanto maior for a sua participação em situações de aprendizagem interactiva. Numa "situation for action" a aprendizagem efectua-se enquanto se justificam e validam ideias que conduzem à descoberta da solução (Brousseau, 1984), citado por Cobb *et al.* (p.119).

Em conclusão, de acordo com Yackel *et al.* (1991), a postura do professor é fundamental para a criação de um ambiente de aprendizagem onde as crianças possam partilhar os seus pensamentos matemáticos.

Segundo Cobb *et al.* (1992), comunicar ultrapassa o dar resposta a uma questão para a qual não havia solução, implica que todos construam conhecimento, à medida que vão entendendo e articulando os diferentes raciocínios, para encontrar resposta à questão colocada. Uma resposta é aceitável se o aluno for capaz de explicar e justificar o processo através do qual chegou à resposta (Barnes, 1982).

Cobb *et al.* (1992), quando falam de interacção, identificam dois tipos de alunos: os que participam numa tradição matemática escolar, experienciando conhecimento matemático, quando conseguem acompanhar instruções e procedimentos com sucesso, e os que cooperam numa tradição de inquérito matemático, experienciando compreensão, quando criam e manipulam objectos matemáticos, de forma a conseguirem explicar e justificar os seus raciocínios.

Para Yackel *et al.* (1992), a comunicação, durante a actividade matemática, deve ser um processo activo de interpretação e de adaptação recíproca onde a aprendizagem se processa num ambiente de interacção social, constituído por alunos e professores.

Walkerdine (1988), Solomon (1989) e Cobb *et al.* (1992) referem que a actividade matemática deve ser encarada como uma prática social ou discursiva e não como um processo cognitivo.

Cobb *et al.* (1992), citando Comaroff (1982), afirmam que as crianças aprendem tanto, quanto maior for a sua participação em momentos de aprendizagem interactiva.

Capítulo III

Metodologia

3.1. Opções metodológicas

Este estudo foi realizado com o objectivo de estudar o contributo das histórias com matemática no envolvimento dos alunos em tarefas de geometria e o papel das representações no desenvolvimento dos seus raciocínios, ao longo da resolução das sequências de tarefas apresentadas. Pretendeu-se, também, destacar a forma como esse envolvimento, através das interacções entre alunos, o professor da turma e eu própria, contribuiu para desenvolver aspectos relativos ao sentido espacial e outras ideias geométricas.

Nesta investigação pretendo perceber:

1. Que relação estabelecem e que tipo de representações utilizam os alunos em tarefas matemáticas criadas a partir de contextos de histórias com matemática?
2. Como evoluem as representações matemáticas dos alunos, ao longo da resolução das diferentes sequências de tarefas apresentadas?
3. Que aspectos relativos ao sentido espacial e outras ideias geométricas surgem, ao longo da resolução das diferentes tarefas?

A obtenção das respostas resultará da análise e descrição das produções escritas dos alunos e das interacções geradas na sala de aula, durante os momentos de discussão das tarefas.

Considero, assim, pelas suas características, que se trata de um estudo de natureza qualitativa, tendo por base a caracterização de Bogdan e Biklen (1994). Para estes autores um estudo de natureza qualitativa é constituído por cinco características: (1) a fonte directa dos dados é o ambiente natural e o investigador é o principal agente na recolha desses mesmos dados; (2) os dados que o investigador recolhe são essencialmente de carácter descritivo; (3) os investigadores que utilizam metodologias qualitativas interessam-se mais pelo processo em si do que propriamente pelos resultados; (4) a análise dos dados é feita de forma indutiva; e (5) o investigador interessa-se, acima de tudo, por tentar compreender o significado que os participantes atribuem às suas experiências.

Dentro da metodologia de estudo qualitativo, considero que realizei uma experiência de ensino como par pedagógico, baseada numa observação participante. Nela pretendi conhecer os processos, dinâmicas e perspectivas dos intervenientes, nas situações apresentadas.

Pela necessidade de controlar a investigação focou-se a atenção em quatro alunos, escolhidos após a análise da resolução das tarefas desenvolvidas na 1ª sessão de recolha de dados, já que tinha sido indicada, pelo professor da turma, uma amostra de sete alunos, de onde se retirariam os quatro para continuar o estudo. Pretendeu-se, desta forma, tirar o melhor partido de fontes múltiplas de evidência (Yin, 2003) como documentos produzidos pelos alunos; gravações áudio e vídeo; notas de campo, baseadas nas observações; comentários dos alunos e uma entrevista informal.

3.2. Procedimentos de carácter metodológico

Antes de dar início à recolha de dados, foi pedida uma autorização ao Director do Agrupamento de Escolas, a que pertence a escola onde foi desenvolvido o estudo, bem como à Coordenadora da instituição. Tendo sido dada a respectiva autorização para a realização do estudo, através do professor da turma, foi entregue aos encarregados de educação dos alunos a informação da realização do estudo, assim como um pedido de autorização de participação dos seus educandos no mesmo, que também foi concedida.

Foram ainda tomadas como opções metodológicas questões que se prendem com a preservação da identidade dos participantes no estudo e o anonimato da escola. Assim, ao longo de todo o trabalho, nunca é mencionado o nome ou a localização exacta da escola onde foram recolhidos os dados, bem como o verdadeiro nome dos alunos e professor envolvidos.

3.3. Participantes

A recolha de dados decorreu durante o 2º e 3º períodos do ano lectivo 2009-2010, numa escola do 1º ciclo do concelho de Oeiras, com uma turma de 3º ano de escolaridade, cuja prática lectiva habitual era já baseada na experimentação, construção e discussão dos conceitos. A escola fica situada numa urbanização recente, cuja população é predominantemente de classe média-alta, possuindo os pais, na sua maioria, o ensino secundário ou uma licenciatura. Segundo Pessoa (2004), citado por Rodrigues (2008), as habilitações académicas, a par da estabilidade familiar e da disponibilidade dos pais, são as variáveis que mais interferem no sucesso escolar na área da matemática.

A escola é formada por seis turmas, quatro do 1º Ciclo do Ensino Básico, uma de cada ano de escolaridade, e duas de Jardim de Infância.

3.3.1. O investigador participante

Decidi que esta investigação iria ser baseada numa observação participante porque pretendia investigar a minha própria prática, embora não tivesse turma atribuída. Nesta situação, restava-me a opção de encontrar um professor com o qual pudesse funcionar em regime de par pedagógico e uma turma onde, por opção, que se prende com a minha prática lectiva habitual, os alunos funcionassem como elementos activos, dentro do processo de ensino-aprendizagem.

Dado o facto de me encontrar requisitada como formadora no *Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores do 1º e 2º Ciclos do Ensino Básico* e trabalhar directamente com muitos professores e os seus alunos, não foi difícil a opção. Faltava-me apenas fazer a proposta e esperar que a mesma fosse aceite. Contactei o professor identificado, a proposta foi aceite e, logo após uma primeira conversa sobre o trabalho a desenvolver, concordámos que o trabalho a realizar seria mais vantajoso e produtivo, para os alunos, havendo uma estreita colaboração entre os dois professores envolvidos. No ano lectivo 2008/ 2009 este professor havia sido meu formando, no programa de formação contínua já referido, e o trabalho a realizar foi encarado como uma continuação do trabalho já iniciado. Todos nos conhecíamos bem e o facto de haver uma relação próxima entre mim e os participantes no estudo pode ser encarado como uma vantagem, no sentido de a minha presença não ser considerada um elemento perturbador ou estranho ao ambiente natural de sala de aula. Bogdan e Biklen (1994) apoiam esta ideia ao afirmarem que a investigação em educação pode tirar partido da relação de proximidade existente entre o investigador e o objecto de estudo.

Para além disso, Bogdan e Taylor (1986) referem que nos métodos qualitativos o investigador deve estar completamente envolvido no campo de acção dos investigados, uma vez que, na sua essência, este método de investigação se baseia fundamentalmente em conversar, ouvir e permitir a expressão livre dos participantes. Na mesma linha de pensamento, os autores atrás referidos dizem que a investigação qualitativa, por permitir a subjectividade do investigador na procura do conhecimento, implica que exista uma maior diversificação nos procedimentos metodológicos, utilizados na investigação. O investigador participante, segundo autores como Lee, Yarger, Lincoln, Guba, Gravemeijer e Shulman (citados por Vale, 2000), tem maiores probabilidades de conhecer a perspectiva dos alunos e compreender o seu ponto de vista, para tentar perceber o significado que os alunos atribuem às diferentes situações propostas pelo mesmo.

Num estudo de natureza qualitativa, baseado na própria prática, a fiabilidade e a validade depende muito da forma “decisiva“ como o investigador se implica no mesmo. O investigador é o principal meio de recolha e análise dos dados, implicando ser um elemento fulcral no desenlace do estudo.

O investigador deve estar envolvido na actividade como um *insider* e ser capaz de reflectir sobre ela como um *outsider*. Conduzir a investigação é um acto de interpretação ao nível das experiências dos participantes, devendo estas ser explicadas e interpretadas em termos das regras da sua cultura e relações sociais, e ao nível das experiências do investigador, devendo também estas ser explicadas e interpretadas em termos das regras da comunidade intelectual em que o investigador se insere.

O investigador participante envolvido na actividade como um *insider* deve, no entanto, ter presente que não deverá, através da sua actuação, alterar o comportamento habitual dos alunos no seu meio natural. É da interacção entre observador e observado que nasce uma grande parte da informação, que constituirá material de análise num estudo de natureza qualitativa, que pode ser determinante para as conclusões finais.

Neste estudo tive um papel determinante na recolha dos dados, na sua interpretação e descrição, bem como no desenvolvimento da investigação. Stenhouse (1975), citado em Oliveira e Serrazina (2002), refere que o professor investigador deve ser capaz de questionar e estudar o próprio ensino, sistematicamente, com o objectivo de alcançar o seu desenvolvimento profissional.

Nesta investigação, o meu papel começou na escolha das histórias a serem trabalhadas, passou pela elaboração das sequências de tarefas apresentadas e culminou na interacção com os alunos, na condução e discussão das mesmas tarefas.

Houve um especial cuidado na análise dos dados, para que os resultados da análise dos mesmos fossem objectivos e imparciais. Segundo Ponte (2002),

> … é essencial que o investigador, assuma o controlo do processo […] é importante não perder de vista os objectivos visados, os propósitos das actividades programadas, os papéis definidos, o calendário traçado. […] O plano de trabalho bem como os registos realizados possibilitarão ao investigador um espaço autónomo de realidade que lhe permitirá, quando necessário, o distanciamento… (p. 18).

3.3.2. O professor

O professor, titular da turma onde foi realizada a recolha de dados para este estudo, revelou-se um elemento fundamental para o sucesso no trabalho realizado com os alunos.

O professor em questão tem uma Licenciatura em Educação, na vertente da Educação Visual e Tecnológica, e completou, no ano em que foi realizada a investigação, o seu nono ano de serviço. Sendo que destes nove, apenas um corresponde ao trabalho com alunos do 2º ciclo, na área da sua formação inicial, e os restantes oito a trabalho realizado com alunos do 1º ciclo do ensino básico. O seu interesse pela matemática nasce através da Geometria, pelo facto de esta estar muito ligada à sua área de formação inicial. Um outro aspecto importante prende-se com o facto de este professor sentir que a sua formação inicial, nesta área, não foi suficiente para cobrir todas as necessidades de um professor que ensina matemática nos primeiros anos de escolaridade.

Pelos motivos já referidos, o professor Lucas inscreveu-se no *Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores do 1º e 2º Ciclos*, no ano lectivo 2006/ 2007, onde eu era formadora, tendo sido aí travado o nosso primeiro contacto. Contudo, o meu trabalho não prosseguiu com esta turma de formação mas o professor continuou a frequentá-la até ao final do ano lectivo. No ano seguinte, o professor interrompeu o seu processo de formação contínua e tornou-se professor da turma com a qual foi efectuado este trabalho. No entanto, o contacto foi sendo reforçado pelo facto de eu continuar a frequentar a escola onde trabalhava, para fazer sessões de acompanhamento em sala de aula, de outros colegas. Muitas vezes, o professor Lucas colocou questões de índole matemática, didáctica ou curricular e sobre elas foram travadas muitas conversas.

No ano lectivo seguinte, 2008/ 2009, com a turma actual a frequentar o 2º ano de escolaridade, voltou a inscrever-se no programa de formação contínua e aí encontrámo-nos como formadora e formando. Fomos ficando cada vez mais próximos, não só pelo facto de trabalharmos ambos com a sua turma mas também e, fundamentalmente, por termos percebido que defendíamos as mesmas ideias, em termos pedagógicos. Assim, no final do ano lectivo passado, foi fácil decidir qual seria a turma e o professor com que gostaria de trabalhar para desenvolver este projecto. Falámos sobre o mesmo e o professor Lucas mostrou-se imediatamente disponível para participar neste trabalho. Assim, logo que foram seleccionados os livros de histórias com que iríamos trabalhar e surgiram as primeiras tarefas, encontrámo-nos para as discutir e pensarmos, em conjunto, como é que as iríamos aplicar e qual seria o nosso papel junto dos alunos. Neste encontro, ficou também combinado com o professor que eu teria um papel activo na apresentação e discussão das tarefas com os alunos.

Depois de uma primeira conversa, fiquei completamente à vontade para realizar o trabalho e deixar fluir os acontecimentos. Todavia, ficou combinado que teríamos necessidade de construir um par pedagógico que funcionasse e se articulasse nas diferentes vertentes de planificação e operacionalização. Teríamos ambos um papel activo que nos permitisse interferir e interagir com os alunos sempre que achássemos necessário completar, corrigir ou dirigir algumas ideias. Foi, assim, possível realizar um trabalho partilhado que enriqueceu não só os alunos como os professores envolvidos.

A metodologia utilizada e as intervenções partilhadas permitiram, tanto ao professor da turma como a mim, reflectir individualmente e em conjunto sobre o trabalho desenvolvido, atitude que, segundo Oliveira e Serrazina (2002), "proporciona aos professores oportunidades para o seu desenvolvimento, tornando-os profissionais mais responsáveis, melhores e mais conscientes" (p.37). Ainda em relação à capacidade de reflexão sobre a prática, também Thompson (1992), citado por Valério (2004), refere que "os professores são conduzidos a obter uma visão crítica do contexto estrutural ou ideológico em que estão a trabalhar […] podendo levar à alteração de crenças e concepções sobre o que é ensinar" (p.42). Contudo, como referido por Dewey, citado por Ponte (2002), "reflectir implica uma consideração cuidadosa e activa daquilo em que se acredita ou se pratica, à luz dos motivos que o justificam e das consequências que daí resultam" (p.11).

Durante as primeiras dez sessões, tive um papel mais activo na direcção das discussões e na apresentação das tarefas. O professor Lucas trabalhava mais nos bastidores, durante as discussões e planificações das sessões e nos reajustamentos feitos, após a realização de cada uma das sessões. Inclusivamente, na tomada de decisão de integrar na sua planificação os tópicos a desenvolver durante a investigação. Esta necessidade surgiu aliada ao facto de ter percebido a necessidade de dar continuidade ao trabalho, não só pela envolvência manifestada pelos alunos mas, fundamentalmente, por ter sentido, por parte de alguns alunos, dificuldades relativamente aos tópicos explorados.

Porém, após este primeiro conjunto de sessões, o professor Lucas foi ganhando mais à vontade, principalmente em termos didácticos, e as últimas sessões foram integralmente partilhadas, proporcionando-me, inclusive, alguns momentos só de observação. Momentos que se revelaram muito ricos para o registo de notas de campo, *in loco*. Estes momentos proporcionaram-me observar pormenores que não são passíveis de observação quando estamos no directo com os alunos.

Tudo teria sido diferente, caso o professor Lucas não tivesse demonstrado abertura e disponibilidade.

3.3.3. A turma

A turma em estudo era constituída por 23 alunos, 13 rapazes e 10 raparigas, todos a frequentar o 3º ano de escolaridade, pela primeira vez, e habituados a debater ideias e a construir conceitos, a partir do debate.

Nesta turma, a grande maioria dos alunos era proveniente de um meio socioeconómico médio-alto que, de forma geral, lhes proporcionava vivências ricas e muito diversificadas.

Na observação da turma sempre foi notória uma grande cumplicidade entre os alunos e entre estes e o professor, uma grande motivação para participar nas discussões dos tópicos trabalhados, fazendo dos participantes seres activos e criativos, e um evidente respeito pelos diferentes tempos de intervenção.

Durante a realização das tarefas propostas, as mesas foram dispostas de maneira a permitir a formação de grupos de quatro elementos, mantendo sempre o grupo de referência e, pontualmente, alterando os restantes. A turma revelou um grande à vontade na realização do trabalho em grupo, onde foram discutidas muitas ideias e tomadas algumas decisões.

De uma forma geral, os alunos revelaram muita facilidade em debater os tópicos abordados e em responder às questões colocadas, oralmente, mas revelaram sempre muitas dificuldades em apresentar representações claras do seu raciocínio ou em responder por escrito, individualmente ou em grupo. Esta foi, aliás, umas das questões mais pertinentes ao longo de todo o trabalho. Como é que uma turma de alunos capaz de se articular tão bem em termos orais, quer individual e colectivamente, revela tantas dificuldades de expressão escrita? O que fazer?

3.3.4. O grupo de referência

Neste tipo de abordagem, baseado numa experiência de ensino sobre a própria prática, tal como Vale (2004) refere para o estudo de caso, não se privilegia uma amostragem aleatória e numerosa, mas sim criteriosa ou intencional, ou seja, a selecção da amostra está sujeita a determinados critérios que permitam ao investigador aprender o máximo sobre o fenómeno em estudo.

Tendo por base esta ideia, foi desde o início claro que iria trabalhar com um grupo de apenas quatro alunos, para que me fosse permitido aprender o mais possível sobre ele.

Contudo, a sua escolha não foi imediata e também não se considera que tenha sido uma tarefa fácil.

Inicialmente, quando falei com o professor e identifiquei as características que julgava necessárias aos alunos participantes neste projecto, ele identificou sete alunos, quatro rapazes e três raparigas. Depois desta conversa inicial, decidimos que seria necessário realizar a primeira sessão de recolha de dados para conseguirmos identificar o grupo definitivo. De facto, ao longo da realização e discussão, em torno da primeira tarefa apresentada, conseguimos identificar quatro alunos, dois rapazes e duas raparigas. As meninas identificadas não faziam parte do grupo primeiramente identificado. No entanto, durante a reflexão final sobre o trabalho desenvolvido nesta primeira sessão, tanto eu como o professor da turma, achámos pertinente que, embora uma das ideias iniciais fosse encontrar um grupo equilibrado em termos de sexo, essa situação na escolha definitiva não devia ser preponderante, dada a observação dos alunos durante a interacção gerada, ao longo da discussão da tarefa proposta. Assim, do grupo inicialmente sugerido, escolhemos três dos rapazes e seleccionámos uma rapariga que não fazia parte desse grupo.

Para a selecção dos alunos envolvidos neste trabalho de investigação foram consideradas as seguintes características: pertencerem ao grupo-turma desde o primeiro ano de escolaridade, dado, para mim, ser relevante a forma como o professor organiza o ensino da matemática. Para além disso, era também importante que fossem alunos participativos e comunicativos, alunos autónomos e que funcionassem bem em grupos de discussão. Como última característica, era também pertinente que o grupo fosse constituído por alunos com facilidade em articular e resumir ideias de grupo, para gerar interacção.

Depois do difícil processo de identificação das características referidas, apresenta-se o grupo de trabalho definitivo, salvaguardando a sua verdadeira identidade através da utilização de nomes fictícios.

António – aluno com um bom sentido espacial, muito observador e também muito crítico. A nível da expressão oral, apresenta ideias e vocabulário acima da média para a sua faixa etária. Contudo, é um aluno que se distrai com muita facilidade e que a nível escrito revela muitas dificuldades em expressar as suas ideias mentais. As suas representações escritas são apresentadas, fundamentalmente, através de desenhos e/ ou esquemas.

Afonso – aluno muito comunicativo e participativo que revela um bom sentido espacial. Oralmente, expressa-se com muita facilidade e ajuda os colegas a completarem as suas ideias, é um bom elemento reintegrador. A nível escrito, esforça-se por corresponder mas não consegue o mesmo desempenho.

Joana – aluna muito concentrada e responsável, com um bom sentido espacial. Oralmente, apresenta ideias próprias que gosta de defender e articular com outras já apresentadas. A nível escrito, é uma aluna esforçada mas com dificuldades em articular as ideias que consegue construir mentalmente e partilhar na oralidade.

Ricardo – aluno com um bom sentido espacial, muito perspicaz e com bom poder de argumentação. Na oralidade, funcionou sempre como o elemento-resumo das ideias do grupo. As suas representações escritas apresentam alguns esquemas e também texto. Quando escreve, perde muitas das ideias apresentadas na oralidade e, normalmente, não consegue articular as mesmas.

3.4. Recolha de dados

3.4.1. Documentos produzidos pelos alunos

Todos os documentos produzidos pelos alunos desempenham neste estudo o principal material de análise a ter em consideração para a retirada de conclusões.

3.4.2. Registos em vídeo e áudio

Ainda antes da realização da primeira sessão de trabalho, os alunos foram informados de que as suas intervenções iriam ser gravadas em vídeo e áudio para se poderem registar todos os acontecimentos, ocorridos ao longo das actividades. Assim, embora nas primeiras duas sessões os alunos levantassem algumas questões sobre os facto de o gravador áudio e a câmara de filmar estarem sempre dirigidos para o grupo dos quatro alunos que serviriam de base de análise do estudo, ao longo do tempo, e depois de haver uma conversa esclarecedora sobre a importância do papel de cada um, as crianças aceitaram, sem problemas, a presença destes instrumentos, chegando mesmo a esquecer-se deles.

Para a recolha de dados foi sempre utilizado um gravador áudio para captar apenas as intervenções do grupo de análise e uma câmara de filmar que, durante as discussões em grande grupo, captava o panorama geral e, durante as discussões de pequeno grupo, apenas o grupo de referência. Para além disso, esta última ferramenta, era ainda utilizada para filmar todas as intervenções individuais feitas junto ao quadro branco, que os alunos utilizavam para, através de representações diversas, ilustrarem as suas ideias.

3.4.3. Notas da investigadora

Tendo privilegiado a observação participante, pelos motivos já anteriormente expostos, as notas retiradas, inicialmente, durante a realização das tarefas eram muito poucas e consistiam basicamente em apontamentos de ideias debatidas em pequeno grupo, durante a realização do trabalho individual ou de pequeno grupo. Estas eram, normalmente, ideias-chave que seriam, mais tarde, aproveitadas para lançar na discussão final. Contudo, a partir do momento em que o professor Lucas passou a orientar, com maior frequência, as sessões de discussão, as notas retiradas passaram a ter outro carácter e a permitir outro tipo de análise. A partir deste momento, as notas de campo permitiram-me analisar ideias e representações mas também atitudes e comportamentos que, até aqui, durante a fase das discussões em grande grupo, me passavam completamente despercebidos.

As restantes notas eram escritas, normalmente, no final de cada uma das sessões de trabalho e eram o resultado de observações individuais ou da reflexão tida com o professor da turma.

3.4.4. Notas do professor

Durante os momentos de reflexão com o professor Lucas, fui informada de que os alunos andavam muito entusiasmados com o trabalho realizado e que, quase diariamente, traziam questões novas ou faziam comentários a livros lidos, filmes assistidos e a experiências tidas fora da escola, que relacionavam com os tópicos trabalhados durante as sessões. Perante, esta motivação, achei pertinente sugerir ao professor que fosse anotando essas ideias e comentários, dado que os mesmos também poderiam servir de elementos de análise, no que respeita à percepção da relação afectiva que os alunos estabelecem com os tópicos matemáticos, trabalhados a partir das histórias com matemática.

3.4.5. Entrevista aos alunos do Grupo de referência

Com o objectivo de perceber qual a opinião dos alunos sobre a utilização de histórias nas aulas de matemática e na resolução de tarefas, realizei uma pequena entrevista informal (anexo II), aos quatro alunos do grupo de referência, que será mais adiante analisada e comentada.

3.5. Análise dos dados

Para iniciar a análise de dados, comecei por transcrever as ideias essenciais das gravações de vídeo, efectuadas durante cada uma das sessões e discussões das tarefas propostas, e fui articulando as mesmas com as minhas notas de campo e as produções dos alunos. As gravações vídeo foram essenciais para relembrar situações já esquecidas, atitudes dos alunos e o ambiente de trabalho gerado na sala de aula, tanto durante a realização do trabalho individual e/ ou de pequeno grupo, sempre centradas no grupo de referência, como durante a discussão colectiva, centradas no grande grupo. A partir daí, fui conseguindo identificar algumas categorias em que poderia apoiar a minha análise e foi-se desenhando na minha mente a estrutura da mesma. Só recorri às gravações áudio, quando nas gravações de vídeo, não consegui identificar as interacções geradas no grupo de referência, aquando da realização do trabalho individual e/ ou de pequeno grupo.

As produções individuais dos alunos tiveram um papel central e foram utilizadas como ilustração das transcrições das aulas ou para fazer alguma análise da discussão colectiva. Foram também analisadas do ponto de vista do sentido espacial dos alunos e do tipo de representações utilizado para exprimir ideias geométricas.

É de realçar que o grupo de referência foi considerado para o estudo das representações, do sentido espacial e das ideias geométricas, representadas fundamentalmente através do registo escrito, pois, apesar de se dar sempre maior relevância às intervenções dos alunos em análise, nas discussões colectivas a interacção era global. Todos os alunos da turma participavam, não podendo, por isso, considerar as ideias geométricas finais apenas como ideias do grupo de referência.

Capítulo IV

4.1. Experiência de ensino

Para concretizar este trabalho optei por realizar uma experiência de ensino, dado sentir que esta seria a melhor maneira de observar o comportamento dos alunos, face à resolução de tarefas matemáticas criadas a partir de contextos de histórias com matemática, e aquela que me permitiria um maior desafio e crescimento, em termos profissionais. Isto por, ao longo da minha experiência, haver já concretizado a ideia de que é na interacção directa com os alunos que o professor mais questiona e analisa a própria prática, crescendo profissionalmente (Stenhouse, 1975).

Esta experiência foi desenvolvida numa turma de 3ºano de escolaridade que tem vindo a desenvolver o sentido espacial e a construir ideias geométricas, com base na experimentação e discussão.

Para um acompanhamento mais consistente, foquei a atenção num grupo de quatro alunos com quem interagi de forma mais persistente e do qual analiso os registos escritos. Para além destes, também são considerados elementos de análise respostas que surgiram da interacção, em grande grupo, e que ajudaram a uma melhor compreensão e articulação dos conceitos abordados.

Para o desenvolvimento deste estudo optei por uma metodologia de investigação de natureza qualitativa, tendo em conta que a principal agente de recolha de dados fui eu e que a mesma foi feita no ambiente natural dos alunos. Para além disso, é ainda importante salientar que os documentos de análise são constituídos por produções dos alunos, onde interessa mais o processo que os resultados.

A recolha de dados decorreu ao longo de dezassete sessões em sala de aula, que foram dinamizadas, inicialmente, com maior incidência, por mim e depois, em estreita colaboração com o professor da turma.

As três sequências de tarefas apresentadas aos alunos foram construídas por mim e procuraram incidir, fundamentalmente no desenvolvimento do sentido espacial dos alunos, designadamente em ideias geométricas que se relacionam com a Reflexão, Eixos de simetria de figuras e a Projecção de sombras, vista como uma reflexão provocada pela incidência de luz contra um corpo. Estas tiveram como objectivo desenvolver ou aprofundar os conceitos referidos e, também, perceber como a sombra se forma e transforma, de acordo com a posição ou incidência de maior ou menor quantidade de luz.

Dado o foco deste trabalho ser no tema da Geometria, com incidência no desenvolvimento espacial dos alunos, e conhecendo já a forma como o livro de Michael Grejniec, *A que Sabe a Lua?*, abordava o tópico da Reflexão, resolvi partir daqui e depois procurar outras histórias que, de alguma forma, permitissem uma articulação de tópicos que levassem os alunos à construção de um conhecimento matemático estruturado e com sentido. Contudo, na elaboração desta sequência de tarefas nunca esteve presente a ideia de *Trajectórias de Aprendizagem*, defendida por Simon (1995). Ao construir esta sequência, tive a preocupação de proporcionar aos alunos uma construção encadeada de conhecimentos mas não defini um caminho de aprendizagem marcado por um certo número de tarefas concebidas a pensar nas ideias e processos matemáticos que pretendia ver desenvolvidas pelos alunos (Simon, 1995). Muito pelo contrário! Pretendi, apenas, com base no envolvimento em contextos de histórias com matemática, observar as ideias que eles foram capazes de construir e os processos matemáticos utilizados para tal.

O criar tarefas antecipando as ideias e os processos matemáticos que pretendemos que os alunos desenvolvam é muito mais ambicioso e exige, não só, um trabalho continuado mas fundamentalmente um conhecimento muito profundo de cada um dos alunos, conhecimento, esse, de que eu não dispunha.

Para a construção das três sequências de tarefas realizadas pelos alunos utilizaram-se três histórias com matemática: *A que Sabe a Lua?* (Grejniec, 2002); *O Rapaz do Espelho* (Magalhães, 2008) e *O Homem sem Sombra* (Torrado, 2005).

As sequências de tarefas apresentadas bem como os conceitos nelas abordados surgiram a partir de modelos matemáticos apresentados nos livros escolhidos para desenvolver este trabalho. Em *A que Sabe a Lua? e o O Rapaz do Espelho*, os modelos matemáticos estão presentes tanto na narrativa como na ilustração, o mesmo não acontece em *O Homem sem Sombra*, onde o modelo matemático é apenas desenvolvido no texto.

Nesta experiência de ensino pretendi explorar os conceitos de reflexão, a partir do contexto matemático do livro *A que Sabe a Lua?* e a partir daí, procurei livros com contextos que assegurassem um processo contínuo de exploração do desenvolvimento espacial dos alunos, com ênfase na visualização. Assim, surgiu, depois, *O Rapaz do Espelho*, que disponibiliza um contexto onde é feita a articulação entre o tópico da Reflexão e o dos Eixos de simetria de figuras. Por último, apareceu *O Homem sem Sombra* que faz uma abordagem à projecção de sombras, vista como uma reflexão provocada pela incidência de luz contra um corpo. Este livro serviu, na minha opinião, não só para consolidar o tópico da Reflexão, focada nos dois livros anteriores, mas fundamentalmente para alargar o âmbito do mesmo tópico. A sombra aparece aqui como uma nova transformação do objecto. Uma transformação que, à partida, os alunos ainda não seriam capazes de discutir mas onde poderiam perceber a relação existente entre o objecto e a sua sombra.

Nesta investigação, as tarefas propostas aos alunos ocuparam um papel de destaque, dado representarem o principal objecto de estudo.

As tarefas a desenvolver pelos alunos fazem parte de um conjunto de três sequências, que a seguir apresento.

Sequência I – Reflexão[3]

Esta sequência é composta por três tarefas construídas a partir dos modelos matemáticos apresentados nos livros *A que Sabe a Lua?* e *O Rapaz do Espelho*. Nestas tarefas exploram-se tópicos como a reflexão e eixos de reflexão.

1ª Tarefa

O peixe tinha visto tudo
sem entender nada, disse:
— Esta é boa!
Tanto esforço para chegar à lua,
Lá em cima no céu, tão longe…
Acaso não vêem que aqui na água?
Há outra tão perto?

in *A que Sabe a Lua?*, p. 26

Questões:

1. Percebes a mensagem transmitida pelo peixe no excerto apresentado? Explica-a utilizando palavras ou desenhos.
2. Que transformação geométrica ocorre na cena observada pelo peixe?

Nesta primeira tarefa pretende-se que os alunos, partindo do excerto apresentado, consigam identificar a imagem da lua na água como um transformado da lua que está no céu. Para além disso, é ainda pretendido que os alunos identifiquem este fenómeno como uma reflexão.

[3] As sequências de tarefas foram intituladas de acordo com os tópicos explorados em cada uma delas.

2ª Tarefa

— O Senhor das Neves não é deste mundo. Veio Do Lado de Lá, digamos assim.

— O Lado de Lá? Onde fica isso? — admirou-se o rapaz.

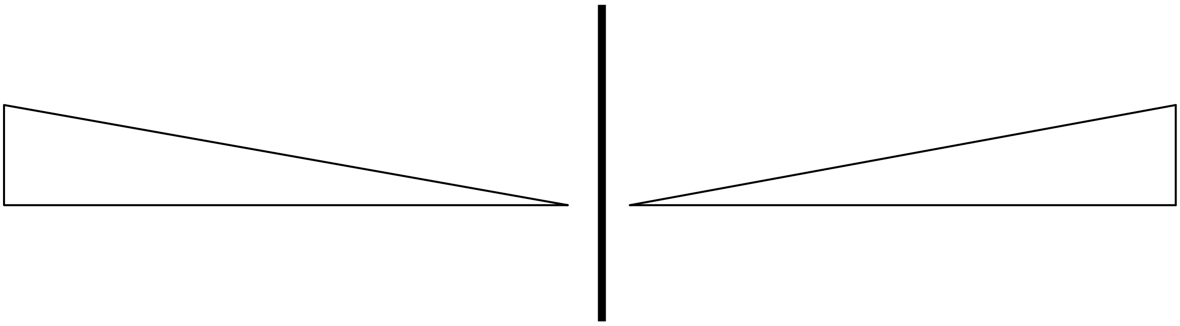
— No lado de lá — respondeu o alfaiate.

— [...] Tudo tem um lado de lá...

in O Rapaz do Espelho, p. 16

Questões:

1. Identifica nesta reflexão o Lado de Cá e o Lado de Lá.



2. Observa com atenção o que acontece durante uma reflexão e descreve-a.
3. Em que posição está este eixo de reflexão?
4. Representa o que aconteceria ao triângulo do Lado de Cá se a reflexão se fizesse a partir de um eixo de reflexão horizontal.
5. Explica o que observas nas transformações produzidas?

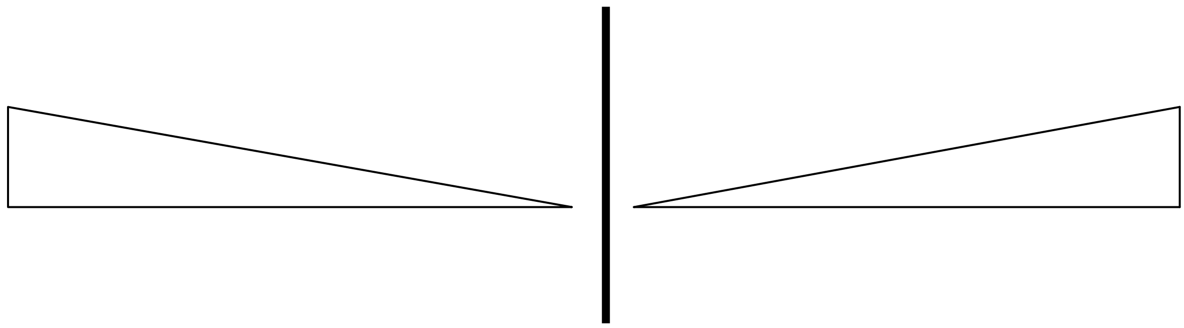
Pretendia-se nesta tarefa que os alunos, de acordo com o contexto da história, identificassem, na imagem apresentada, o triângulo que representa o objecto e o triângulo que representa o transformado, após uma reflexão. É, também, objectivo que os alunos identifiquem e distingam eixos de reflexão vertical e horizontal (PMEB, 2007, p. 22) e percebam os efeitos produzidos por um e outro, no mesmo objecto.

3ª Tarefa

> O Sábio, por exemplo, levantará um braço, enquanto a sombra levantará o braço não correspondente e assim sucessivamente…
>
> *in O Homem sem Sombra*, p. 21

Questões:

1. Já experimentaste fazer esta experiência? O que observaste?
2. Consegues explicar o motivo pelo qual o sábio "levantará um braço, enquanto a sombra levantará o braço não correspondente" ?
3. O que provoca esta situação durante a projecção da sombra na parede?
4. Consegues relacionar o que acontece com a sombra projectada na parede do Sábio com o que acontece com estes triângulos? Explica o teu raciocínio.



Na última tarefa da primeira sequência, relacionando o comportamento da imagem do alfaiate reflectida no espelho, em *O Rapaz do Espelho*, e a sombra do sábio projectada na parede, em *O Homem sem Sombra*, pretende-se que os alunos percebam que, embora, a sombra seja um fenómeno físico diferente de uma reflexão, produz, exceptuando a questão da dimensão, efeitos semelhantes aos desta, ao ser projectada num plano.

Sequência II – Reflexão e eixos de simetria de figuras

A segunda sequência é constituída por uma tarefa, constituída por doze questões, construídas a partir do modelo matemático apresentado no livro *O Rapaz do Espelho*. Nestas questões exploram-se tópicos como a classificação de figuras, reflexão e outras isometrias e eixos de simetria de figuras.

Tarefa

— Eu vi que estava alguém aqui a trabalhar — insistiu o rapaz.

— Não era eu — disse o alfaiate. — Era o outro. Quando me deito e adormeço, o outro acorda e põe-se a viver a vida dele. Também é alfaiate e também mora aqui, e é tal e qual eu. Ora vê.

O alfaiate estava a apontar para o grande espelho das provas, que tinha uma bela moldura de madeira trabalhada. Lá estava, de facto, outro alfaiate igualzinho a ele.

in O Rapaz do Espelho, p. 9

Questões:

1. Que forma poderá ter a moldura do espelho do alfaiate? Representa-a.

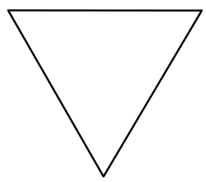
2. Classifica a figura que representaste.

3. O que acontecerá à figura que representaste se ela for reflectida através de um espelho? Utiliza desenhos, palavras ou esquemas para explicares o teu raciocínio.

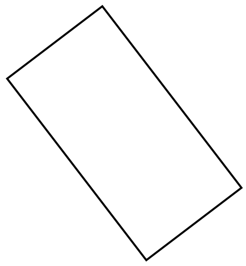
4. Representa agora a figura que representa o espelho do alfaiate noutra posição. Que movimentos terás de efectuar para ela passar da posição inicial para a posição em que a representaste agora? Representa esses movimentos através de desenhos.

5. Desenha a moldura do espelho do alfaiate e identifica nela todos os eixos de simetria. Quantos são?

6. Identifica os eixos de simetria neste triângulo. Quantos são?



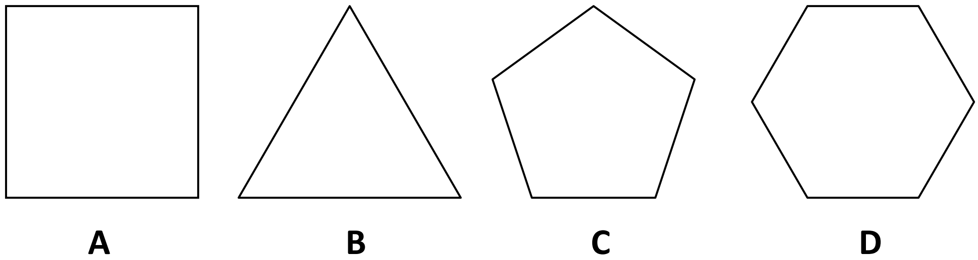
7. Que figura está aqui representada? Classifica-a.



8. Assinala nela os eixos de simetria?

9. Consegues explicar por que motivo o triângulo anterior apresenta maior número de eixos de simetria que esta última figura?

10. Observa com atenção as figuras apresentadas e marca em cada uma delas todos os eixos de simetria.



11. Identifica pelo nome cada uma das figuras apresentadas.

12. Existe alguma característica comum a estas quatro figuras? Qual?

Nesta tarefa pretende-se que os alunos sejam capazes de classificar as figuras representadas com base em propriedades ou características resultantes de processos de visualização individuais, traduzíveis numa linguagem natural, com vista ao desenvolvimento de uma linguagem formal e articulação de ideias geométricas. É, também, solicitado que os alunos construam a imagem mental de uma reflexão e outras isometrias (rotação, translação, reflexão deslizante), e sejam capazes de as representar; consigam distinguir eixos de reflexão e eixos de simetria; sejam capazes de assinalar eixos de simetria e, ainda, perceber que nos polígonos regulares, o número de eixos de simetria é sempre igual ao número de lados.

Sequência III – Projecção de sombras

A sequência três é formada por duas tarefas construídas a partir dos modelos matemáticos apresentados nos livros *O Rapaz do Espelho* e *O Homem Sem Sombra*. Nestas tarefas exploram-se tópicos como a relação entre a altura e a sombra projectada, a posição em relação ao sol e sombra projectada e, ainda, a posição do sol no horizonte e a sombra projectada.

1ª Tarefa

> Hans via a sombra do alfaiate projectada na parede, sempre em movimento.
>
> […]
>
> O rapaz mudou de posição, para ver melhor, e reparou que havia agora outra sombra na parede da casa.
>
> *in O Rapaz do Espelho*, p. 8

Tarefa 1. a)

Esta tarefa tem a particularidade de só poder ser efectuada no recreio num dia em que haja sol. Num desses dias, o professor deverá escolher dois alunos de alturas muito diferentes, levá-los até ao recreio e permitir que os colegas observem as suas sombras e tirem conclusões.

Questões:

1. O que observas relativamente às sombras dos teus colegas?
2. Consegues explicar o motivo pelo qual tamanhos diferentes projectam sombras diferentes?
3. Consegues estabelecer alguma relação entre as suas sombras e as suas alturas? Explica essa relação.

Nesta primeira tarefa de carácter experimental, propõe-se que os alunos compreendam que alturas diferentes produzem sombras, também, diferentes. Assim, deverão perceber que um aluno mais alto produzirá uma sombra maior, enquanto um aluno mais baixo produzirá uma sombra menor.

Tarefa 1. b)

Esta tarefa, no seguimento da anterior, tem a particularidade de só poder ser efectuada no recreio num dia em que haja sol. Num desses dias, o professor deverá escolher os mesmos dois alunos de alturas muito diferentes, levá-los até ao recreio e pedir aos dois para se posicionaram, para que outros dois colegas possam, por contorno em papel de cenário, representar as suas sombras na posição A. Em seguida, os alunos deverão mudar de posição e o procedimento deverá ser repetido para uma posição B e uma posição C.

Questões:

1. Descreve o que observas em relação às sombras dos teus colegas sempre que eles mudam de posição?
2. Por que pensas que isso acontece?

Aqui pretende-se que os alunos descubram o motivo da diferença entre as sombras nas diferentes posições ocupadas pelos alunos; que compreendam que, dependendo do modo como nos posicionamos em relação ao sol, a nossa sombra assume posições diferentes e observem que a nossa sombra se altera sempre que mudamos de posição.

2ª Tarefa

Sombra

Como ainda agora disse, o discípulo passou à frente do mestre… É o que acontece quando, ao fim do dia, a luz declina. A sombra também se alonga, mais comprida, mais estirada do que o seu… do que o seu…

Sábio

… dono?

in *O Homem sem Sombra*, p. 43

Tarefa

Esta tarefa tem a particularidade, tal como as anteriores, de só poder ser efectuada no recreio num dia em que haja sol. Nesse dia, os alunos trabalhando a pares, uma das crianças desenha a sombra do colega numa folha de papel cenário, contornando-a. A seguir, já na sala as folhas de papel de cenário são expostas nas paredes, a partir do nível do chão.

Num outro dia, a uma hora que corresponda a uma inclinação diferente dos raios solares, as crianças repetem a mesma actividade. As "novas" folhas de papel de cenário são colocadas lado a lado com as anteriores.

Questões:

1. O que podes observar quando comparas as duas sombras do menino A?
2. Acontece a mesma situação com as sombras do menino B?
3. Haverá alguma relação entre estes acontecimentos? Consegues explicá-la?
4. O que fará com que utilizando os mesmos meninos, em horas distintas, se obtenham sombras de tamanhos diferentes?

Com esta experiência deseja-se que os alunos percebam que as sombras da mesma criança em horas diferentes serão sombras diferentes, uma maior que a outra, pois, dependendo do modo como nos posicionamos em relação ao sol e da hora do dia, as sombras serão maiores ou menores.

Estas sequências de tarefas foram produzidas por mim, com supervisão da orientadora, tendo sempre presentes duas preocupações: a articulação entre tarefas, de maneira a que estas permitissem o desenvolvimento em espiral dos tópicos apresentados, levando os alunos a relacionar e integrar novos conceitos, e o facto de as tarefas surgirem sempre a partir de modelos matemáticos apresentados pelos livros escolhidos. Pretendi, desta forma, perceber até que ponto a ligação afectiva desenvolvida com a narrativa proporcionou aos alunos uma maior ligação às tarefas matemáticas apresentadas, desenvolvendo maior poder de concentração ou facilitando a representação matemática das ideias mentais.

Relativamente à periodicidade ou programação da apresentação das tarefas aos alunos, estas, por falta de disponibilidade da minha parte, não foram apresentadas da forma que considero mais adequada, daí também a preocupação em construir sequências de tarefas. Apresentando tarefas em sequência, minimizei o facto de os tópicos trabalhados, nas mesmas, poderem não constar da planificação semanal do professor, pelos menos inicialmente. Assim, tentei realizar, no mínimo, uma sessão de trabalho semanal, de forma a assegurar a continuidade do trabalho. Sempre que possível, foram realizadas mais do que uma sessão semanais, as quais foram divididas em duas ou três partes distintas, de acordo com as necessidades manifestadas. Inicialmente, houve, em algumas das sessões, a necessidade de discutir previamente as questões colocadas e noutras essa necessidade não se fez sentir. Assim, quando esta situação surgiu houve um primeiro momento de discussão colectiva, seguindo-se-lhe um tempo de discussão e trabalho em pequeno grupo e, um terceiro momento, em que foram analisadas e discutidas, no colectivo, as respostas dadas em pequeno grupo.

Outra questão que tive sempre em atenção, apesar do estudo incidir directamente e apenas sobre quatro alunos, foi o facto de considerar válida qualquer participação em termos orais. Quero com isto dizer que qualquer aluno da turma pôde sempre participar nas discussões em grande grupo, apresentando sugestões e ideias alternativas ou completando e articulando ideias. Esta metodologia pretendeu dar hipótese a que todos os alunos da turma crescessem durante este processo investigativo, através da interacção. Todavia, foi sempre dada relevância às intervenções dos quatro alunos directamente envolvidos no estudo, não evitando que os restantes os pudessem ajudar a completar ou formar ideias mais complexas e coerentes que estão presentes no trabalho escrito, desenvolvido pelo grupo de referência. Assim, ao fazer a análise do registo escrito do pequeno grupo identificado, tive sempre em atenção que o produto final não foi apenas o resultado das ideias individuais do pequeno grupo mas também o gerado pela interacção da turma.

Capítulo V

5.1. Os alunos e as tarefas

Este capítulo corresponde à análise das tarefas propostas aos alunos. Estas, como já foi possível identificar no capítulo anterior, foram divididas em três sequências que articulam as ideias geométricas de reflexão, eixos de simetria de figuras e projecção de sombras. Sendo cada uma delas analisada sob o ponto de vista do envolvimento e da interacção, da representação e das ideias geométricas construídas.

Assim, em cada tarefa será descrito o comportamento e interacção dos alunos durante a sua realização, individualmente ou em pequeno grupo, bem como a necessidade de intervenção dos professores, ao longo dessa fase. Serão analisadas as representações individuais, do ponto de vista da representação e das ideias geométricas que emergem. Por último, serão sempre apresentadas e analisadas as ideias resultantes da discussão em grande grupo, as interacções geradas e, resumidas, as ideias finais.

Dependendo da tarefa, também poderão surgir comentários à intervenção de alunos exteriores ao grupo de referência que considerei essenciais para a construção e articulação das ideias geométricas abordadas.

No final da análise das tarefas, elaborei uma tabela (Tabela 1, anexo I) que permite uma leitura rápida e transversal do envolvimento dos alunos, da articulação que os mesmos estabeleceram entre o contexto das histórias e o trabalho proposto, o "timing" das intervenções dos professores, as representações dos alunos, o aparecimento de ideias geométricas e os níveis de dificuldade sentidos, durante a realização da actividade.

Nas transcrições utilizadas para análise das tarefas, os alunos do grupo de referência aparecerão designados como Afonso, António, Joana e Ricardo; o professor da turma aparecerá identificado como Professor Lucas (PL); eu aparecerei identificada como Paula; o grupo de referência como (Gr) e o grupo turma como (Gt). Sempre que apareçam transcrições individuais de alunos exteriores ao grupo de referência, estes aparecerão identificados com um nome fictício.

5.2. 1ª Sequência – Reflexão

5.2.1. 1ª Tarefa

O peixe tinha visto tudo
sem entender nada, disse:
— Esta é boa!
Tanto esforço para chegar à lua,
Lá em cima no céu, tão longe…
Acaso não vêem que aqui na água?
Há outra tão perto?

in *A que Sabe a Lua?*, p. 26

Antes do início da resolução da tarefa, a história *A que Sabe a Lua?* havia já sido lida e trabalhada com os alunos, do ponto de vista da Língua Portuguesa. Assim, a primeira sessão de trabalho começou com a apresentação da tarefa aos alunos, logo seguida de trabalho em pequeno grupo/ individual.

Quando o tempo previsto para a realização da tarefa terminou, o professor Lucas começou por questionar os alunos do Gr, quanto às respostas para cada uma das questões.

Para a análise colectiva das respostas dadas em pequeno grupo e/ ou individualmente, o professor Lucas começou por questionar a Joana acerca da resposta do Gr à primeira questão.

1ª Questão - Percebes a mensagem transmitida pelo peixe no excerto apresentado? Explica-a utilizando palavras ou desenhos.

PL – Joana, o que concluíram daqui?
Joana - O peixe pensava que a lua que estava lá era um reflexo.
PL – Não se percebeu o quiseste dizer!
Explica lá isso melhor.
Joana - O peixe pensava que a lua que estava na água não era um reflexo mas era.

Inicialmente, percebe-se alguma dificuldade da aluna em explicar oralmente a ideia presente no excerto. Esta situação parece acontecer devido a uma má "arrumação" mental das ideias apresentadas, seguida da dificuldade em utilizar as palavras adequadas à descrição da ideia. Contudo, a aluna acaba por conseguir expressar a ideia presente no excerto da história apresentado.

Durante o trabalho de pequeno grupo, na resposta a esta questão, todos os alunos optaram por apresentar a sua ideia utilizando sempre o desenho e a resposta escrita. Para além disso, é também bastante perceptível a dificuldade em estruturar a resposta de forma adequada, articulando desenho e resposta escrita ou utilizando apenas a escrita para descrever a ideia apresentada no desenho ou vice-versa.

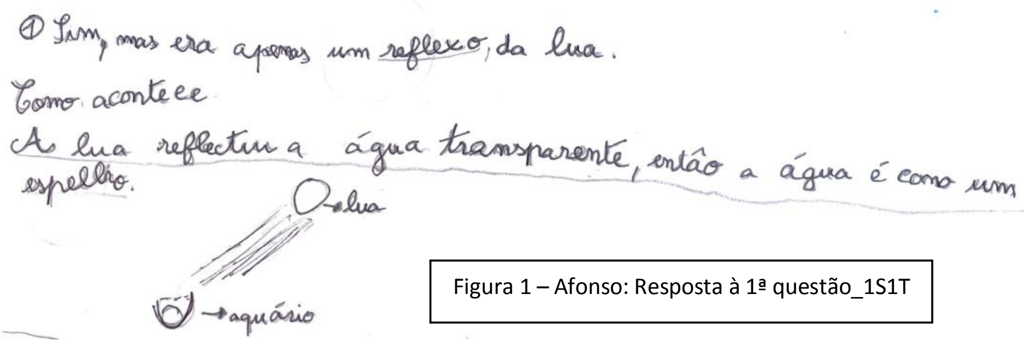


Figura 1 – Afonso: Resposta à 1ª questão_1S1T

Na resposta do Afonso, podemos perceber que o aluno entendeu a mensagem incorrecta transmitida pelo peixe mas não explica a ideia contida na mesma. Identifica a reflexão presente e tenta exemplificar, articulando escrita e desenho, a situação ocorrida na narrativa.

O aluno identificou a transformação geométrica apresentada mas não conseguiu estruturar a resposta de acordo com a questão colocada, tendo a dificuldade ocorrido em termos de expressão escrita e não em termos das ideias geométricas.

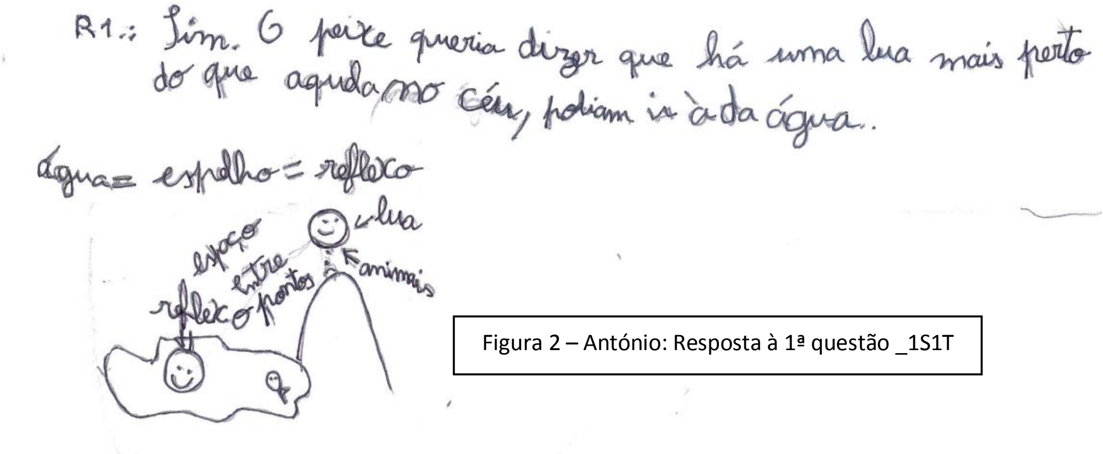


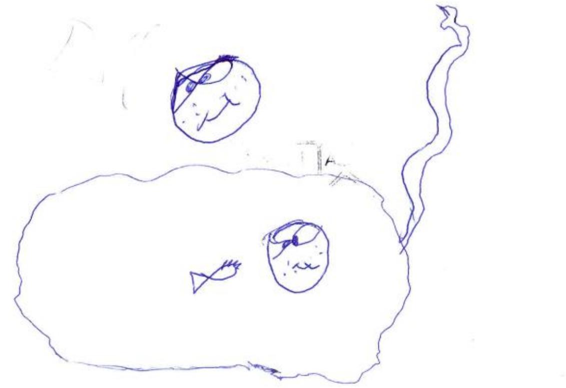
Figura 2 – António: Resposta à 1ª questão _1S1T

Na resposta escrita, o António apenas explica por palavras suas o excerto apresentado. Através do desenho e do esquema de igualdades, tenta explicar a ideia de reflexão presente na narrativa mas em nenhuma delas consegue expressar claramente a ideia percepcionada.

O aluno identificou a ideia geométrica apresentada mas em nenhuma das suas tentativas de explicação, a ideia aparece bem estruturada e clara. É notória a dificuldade em construir uma representação externa que transmita a representação interna que o aluno possui da transformação geométrica ocorrida.

O peixe tinha visto tudo
sem entender nada, disse:
— Esta é boa!
Tanto esforço para chegar à lua,
Lá em cima no céu, tão longe...
Acaso não vêem que aqui na água
Há outra tão perto?

in *A que Sabe a Lua?*, p. 26



R:1- A resposta é que era só reflesco da lua e'porisso que paresia que a lua esta na água

Figura 3 – Joana: Resposta à 1ª questão_1S1T

A Joana, tanto através da escrita como do desenho, percebe a mensagem contida na narrativa e identifica a ideia geométrica de reflexão mas não explica de forma clara a ideia incorrecta do peixe.

A aluna percebeu a mensagem do peixe e identificou a transformação geométrica apresentada mas não conseguiu estruturar a resposta de acordo com a questão colocada, tendo a dificuldade ocorrido em termos de expressão escrita e não em termos das ideias geométricas.

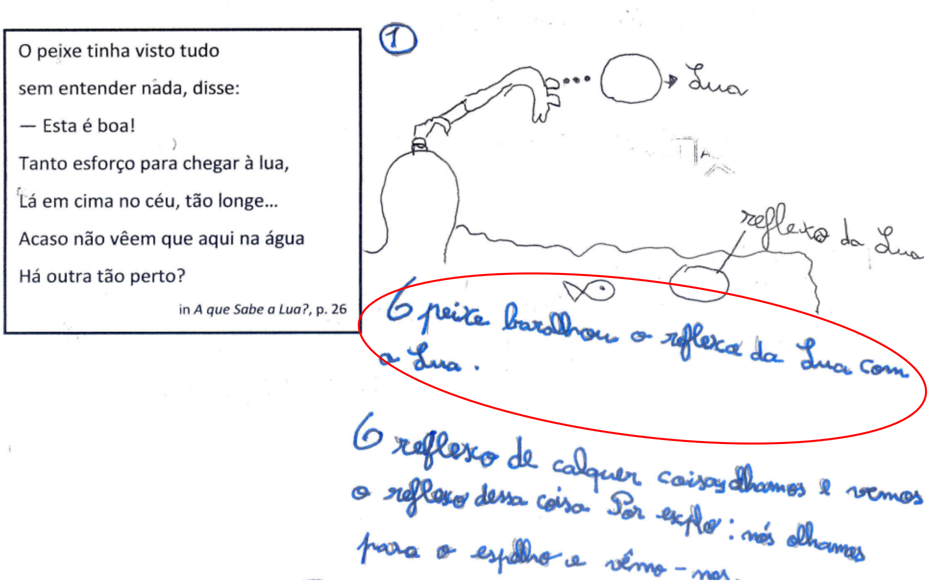


Figura 4 – Ricardo: Resposta à 1ª questão_1S1T

O Ricardo transmite claramente a incorrecção da ideia do peixe ao referir "O peixe baralhou o reflexo da Lua com a Lua" (fig. 4) e tenta, através do desenho, explicar esse erro.

O aluno conseguiu explicar claramente o erro contido na mensagem do peixe e justificá-lo através do desenho, identificou a ideia geométrica apresentada mas, mais uma vez, são evidenciadas dificuldades em articular por escrito todas as ideias contidas na resposta.

2ª Questão – Que transformação geométrica ocorre na cena observada pelo peixe?

Na resposta a esta questão, nenhum aluno levantou problemas de compreensão ou elaboração da resposta escrita e todos identificaram a transformação geométrica ocorrida. Esta situação pode estar associada ao facto de ser uma pergunta directa e, por isso, não trazer agregados problemas de interpretação e articulação de ideias.

Figura 5 – António: Resposta à 2ª questão_1S1T

Figura 6 – Afonso: Resposta à 2ª questão_1S1T

Figura 7 – Joana: Resposta à 2º questão_1S1T

Figura 8 - Ricardo: Resposta à 2º questão_1S1T

Todos os alunos identificaram o reflexo da lua na água do lago como uma reflexão, fazendo prever que todos têm presente a ideia geométrica de reflexão, pelo menos em termos informais. Contudo, como foi dado observar, a maior parte não foi capaz de explicar, por palavras ou através de desenhos, a ideia de reflexão.

Os alunos parecem conter ideias acerca da reflexão mas ainda revelam dificuldades em explicar como esta se processa.

5.2.2. 2ª Tarefa

— O Senhor das Neves não é deste mundo. Veio Do Lado de Lá, digamos assim.

— O Lado de Lá? Onde fica isso? — admirou-se o rapaz.

— No lado de lá — respondeu o alfaiate.

— [...] Tudo tem um lado de lá...

in *O Rapaz do Espelho*, p. 16

A apresentação desta tarefa começou com uma conversa sobre a história e só depois os alunos passaram à resolução das questões. Durante a conversa fez-se a interpretação oral da história, tentando perceber quais eram os espaços da narrativa e o que acontecia em cada um deles. Esta conversa inicial, sugerida por algumas dificuldades levantadas pelas crianças, teve ainda o objectivo de conduzi-las à ideia de reflexão, presente na acção da história.

Discutiu-se e analisou-se a relação entre a narrativa e a imagem presente na primeira pergunta.

Ricardo – O Lado de Lá era como se fosse outro mundo e o lado de Cá era este mundo.

Paula – Joana, achas que o mundo do Lado de Cá e o mundo do Lado de Lá se relacionam com a reflexão?

Joana – Sim, porque o Lado de Lá é como se fosse uma reflexão do Lado de Cá.

Interpretou-se o excerto apresentado e os alunos estabeleceram uma correspondência entre a história *A que Sabe a Lua?* e *O Rapaz do Espelho* afirmando que:

Joana – Nesta história a água, neste caso o rio, também é o eixo de reflexão entre o mundo do Lado de Cá e o mundo do lado de Lá. No *A que Sabe a Lua?*, o lago também reflectia a lua.

Entretanto, passou-se à realização da tarefa, individualmente ou em pequeno grupo, e depois à discussão colectiva das respostas dadas.

1ª questão – Identifica nesta reflexão o Lado de Cá e o Lado de Lá.

PL - Então a primeira pergunta pedia-vos… para identificarem na reflexão, qual era o triângulo do Lado de Cá e o triângulo do Lado de Lá.

Afonso, qual é que é o Lado de Cá e o Lado de Lá?

Afonso - São os dois, porque se estivermos deste lado (esquerda) este é o Lado de Cá e o outro é o Lado de Lá. Se estivermos do outro lado (direita) é ao contrário.

Joana – Eu não concordo! O triângulo do Lado de Cá tem de ser o da esquerda.

Paula – António e Ricardo, qual é a vossa opinião?

António – Eu concordo com a Joana.

Ricardo – Eu concordo com o Afonso.

Paula – António, por que concordas com a Joana?

António – Porque começamos sempre do lado esquerdo para o direito.

Ricardo – Mas aqui é diferente, o Afonso tem razão.

Perante esta resposta do Afonso e a concordância do Ricardo, a maior parte dos alunos ficou baralhada e não entendeu os seus pontos de vista, pois haviam tomado como referência o percurso de escrita, da esquerda para a direita, e assim sendo, só entendiam o triângulo do Lado de Cá, como sendo o triângulo da esquerda, e o do Lado de Lá, o da direita. Não percepcionaram o duplo sentido, a partir do qual uma reflexão de eixo vertical se pode fazer, dependendo do lado em que é colocado o eixo de reflexão.

Então, para tentar tornar clara a ideia do Afonso, fomos prosseguindo.

Paula – Mas não acham que o Afonso pode ter razão?

Gt (exceptuando o Ricardo) – Não!

Paula – Quem quer explicar?

Joana – Porque nós quando escrevemos, temos de escrever sempre da esquerda para a direita e aqui também deve ser assim.

Paula – É verdade que quando escrevemos, vamos da esquerda para a direita mas se tivermos um objecto e quisermos fazer uma reflexão dele, onde podemos colocar o espelho?

António – Ah, pois é! Posso pôr onde quiser.

Paula – Explica melhor.

António – Se eu tiver um triângulo e puser o espelho do lado direito, ele reflecte do lado direito mas se eu puser o espelho do lado esquerdo, ele reflecte do lado esquerdo.

Paula – Isso mesmo. Então já consegues explicar a ideia do Afonso?

António – Pois assim, acho que já percebo. Com o espelho do lado esquerdo, o triângulo original é o do lado direito, O Lado de Cá, e o outro o lado de Lá. Depois é ao contrário.

Contudo, esta ideia, inicialmente, não foi fácil de compreender por uma grande parte dos alunos e houve necessidade de recorrer a experiências, projectando um triângulo no quadro interactivo e posicionando o espelho em ambos os lados do mesmo, para que os alunos pudessem perceber que qualquer um dos triângulos da figura podia ser o Lado de Cá e que isso só dependeria do lado onde fosse colocado o eixo de reflexão.

> Paula - Tudo o que se passa na história, a acção da história, até à travessia do rio que lado é que é?
>
> Afonso - O Lado de Cá.
>
> Paula - Certo.
>
> Qual é o triângulo "original"?
>
> Afonso - Ou este ou este (reafirma a sua resposta anterior).
>
> Paula – Ok! Mas, então escolhe um deles.
>
> Afonso – O da esquerda.
>
> Paula – Mas porquê esse?
>
> Afonso – Porque pode ser um qualquer e assim este vai ser o do lado de Cá e o outro o do Lado de Lá. Se eu escolhesse o da direita, esse ia ser o lado de Cá porque o da esquerda ia ser a reflexão.

Aqui, apesar de ser perceptível que o aluno compreendeu bem a ideia lançada inicialmente e o duplo sentido que uma reflexão pode ter, parece que o "peso cultural" e as ideias dos colegas acabaram por contagiá-lo. O mesmo é visível na sua produção escrita, onde o aluno começa por identificar o triângulo do lado de Cá como sendo o triângulo da direita mas acaba por desistir da ideia e na resposta final inverte os lados.

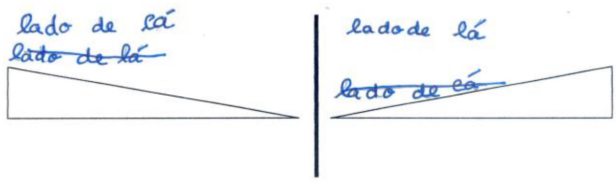


Figura 9 – Afonso: Lado de Cá e Lado de Lá

A ideia do Afonso foi também, como foi possível identificar anteriormente, a ideia do Ricardo.

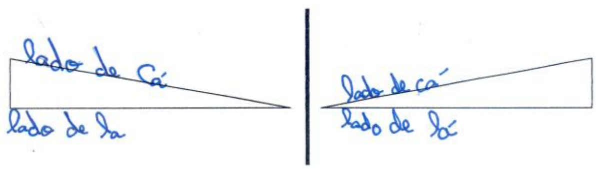


Figura 10 - Ricardo: Lado de Cá e Lado de Lá

Todavia, apesar de oralmente não se ter exposto muito, no trabalho escrito, ao invés do Afonso, o Ricardo não desistiu da sua ideia inicial e manteve a opção de considerar tanto o triângulo do lado esquerdo como o do lado direito o triângulo do Lado de Cá. A sua fraca intervenção oral pode ter sido provocada por alguma insegurança em não conseguir explicar oralmente o que havia pensado mentalmente.

Tanto a Joana como o António, caíram na ideia comum da turma, pelo motivo já explicado, de considerar, sem se questionarem, o triângulo da esquerda como o lado de Cá.

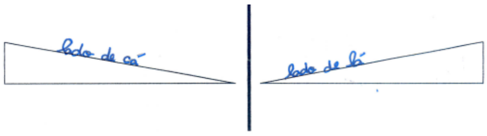


Figura 11 – Joana: Lado de Cá e Lado de Lá

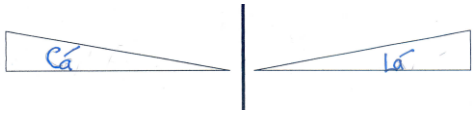


Figura 12 – António: Lado de Cá e Lado de Lá

Nesta tarefa criada a partir de um modelo matemático existente na história, o mundo do Lado de Cá representado pelo objecto e o mundo do Lado de Lá representado pelo transformado, para criar o contexto matemático traz comentários como:

> António – Não, o mundo do Lado de Cá não reflecte no mundo do Lado de Lá.
>
> Paula – Porquê, António.
>
> António – Porque na realidade o mundo do Lado de Cá nunca é igual ao mundo do Lado de Lá!
>
> Paula – Ok, e se falarmos de triângulos. Se esses dois mundos forem representados por triângulos?
>
> António – Ah, se for assim, pode ser.

Esta situação, apenas comentada pelo António, leva-me a pensar nos diferentes níveis de conhecimento que temos sempre dentro de uma sala de aula. Pois, se para a maior parte dos alunos a questão colocada não ofereceu qualquer tipo de comentário, para o António, a reacção foi diferente. Este aluno revelou espírito crítico e o conhecimento de que na natureza nada é simétrico, a simetria perfeita só existe na Geometria. Daí ser impossível haver uma reflexão perfeita do mundo do Lado de Cá no mundo do Lado de Lá.

2ª questão – Observa com atenção o que acontece durante uma reflexão e descreve-a.

Quando passámos à discussão desta segunda questão, os alunos sentiram necessidade de estabelecer uma relação entre as duas histórias trabalhadas até ao momento.

Gr - No *A que sabe a Lua?*, o mundo do Lado de Cá era a lua que estava no céu e o Lado de Lá era a lua reflectida na água do lago.

Esta questão ofereceu muitas dúvidas e o trabalho teve de ser muito orientado para que os alunos fossem criando imagens mentais fortes que lhe permitissem responder a esta questão.

Paula – Depois da nossa conversa, será que ainda é difícil explicar o que se pretende que vocês respondam nesta questão?
Joana, queres explicar.
Joana - Saber o que acontece durante uma reflexão.

Depois desta ideia, perante a imagem da reflexão dos triângulos, o António tenta verbalizar o que acontece numa reflexão.

António – Os triângulos têm um ângulo recto e dois agudos.
Paula – Boa! Essa ideia vai ser-nos muito útil para descrever o que acontece numa reflexão.
Onde estão os ângulos rectos dos dois triângulos?
António – Em lados opostos do eixo.
Paula – Então, por que será que numa reflexão os ângulos rectos dos triângulos aparecem em lados opostos do eixo?
António – Porque no triângulo do lado esquerdo, o ângulo recto está do lado esquerdo e no triângulo do lado direito, o ângulo recto está do lado direito.
Paula – Ok, e tanto num triângulo como noutro, os ângulos rectos estão afastados ou junto ao eixo de reflexão?
António – Se o ângulo recto está afastado do eixo de reflexão no triângulo, na sua reflexão vai aparecer à mesma distância, também afastado e os ângulos que estão perto, como estes que devem medir para aí 30º, ficam justapostos porque ambos estão perto do eixo.

Ao longo desta conversa os alunos retiraram algumas conclusões:

- ✓ Numa reflexão há um objecto real que é reflectido do outro lado do eixo de reflexão;
- ✓ Numa reflexão o vértice do triângulo mais próximo do eixo de reflexão é reflectido, também, junto ao eixo;
- ✓ numa reflexão, os vértices do objecto real mais afastados do eixo de reflexão aparecem, na sua reflexão, em lados opostos.

Durante a conversa que conduziu a estas conclusões, os alunos foram utilizando e fomos afinando conceitos como: lados justapostos; figuras congruentes; linhas perpendiculares;

linhas oblíquas; linhas curvas e linhas rectas; diferença entre rectas e segmentos de recta; tipos de ângulos; ângulos internos e externos; entre outros e fomos articulando e relacionando esses conceitos.

> Carminho – Os dois triângulos, o do lado de Cá e o do lado de Lá são congruentes.
>
> PL – Como podes afirmar isso?
>
> Carminho - Porque os dois têm a mesma forma e a mesma área, só não estão na mesma posição.
>
> Joana - Nos dois triângulos, onde estão os ângulos rectos, há duas linhas perpendiculares a formar esses ângulos.
>
> Paula – Então, quando duas linhas perpendiculares se encontram formam ângulos de quantos graus?
>
> Joana – Ângulos rectos, de 90 graus.

Todos estes conceitos surgem com uma nova roupagem porque foram encontradas novas propriedades e características dos mesmos e porque os alunos percebem que todos eles se relacionam entre si.

São exemplo deste encadeamento de ideias as seguintes afirmações dos alunos:

- ✓ Só temos ângulos rectos quando estamos na presença de duas linhas perpendiculares, entre si;
- ✓ Só temos figuras congruentes quando temos a mesma forma e a mesma área;
- ✓ Os ângulos agudos e obtusos podem ser sempre relacionados com o ângulo recto, porque comparamos sempre a abertura do ângulo recto com a dos restantes.

Só depois destas discussões colectivas, baseadas nas observações que os alunos tiveram necessidade de ir fazendo, passámos à análise das respostas individuais dos alunos para que estes pudessem ser auto-críticos, relativamente às suas respostas iniciais.

Na resposta à questão dois surgiram, maioritariamente e surpreendentemente, um maior número de respostas escritas em detrimento dos desenhos habituais.

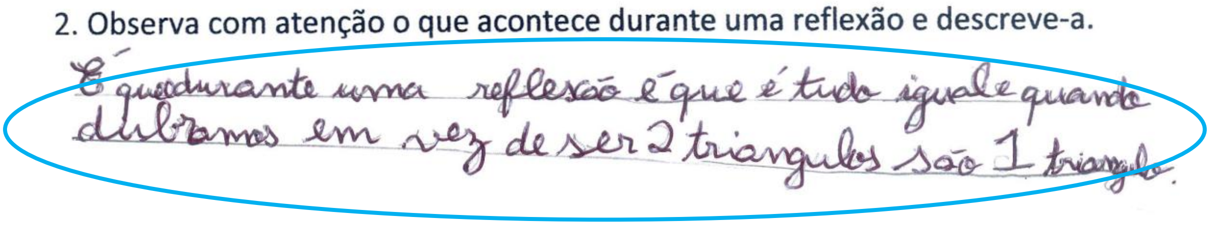


Figura 13 – Joana: Descrição de reflexão

Perante esta resposta a aluna parece ter confundido eixo de reflexão com eixo de simetria de um figura, ao escrever “quando dobramos…”. Contudo, na ideia de “é tudo igual” dá a entender que na sua imagem de reflexão existe uma ideia de congruência, discutida na análise colectiva, mas não identifica a principal transformação operada pela reflexão, a inversão da figura.

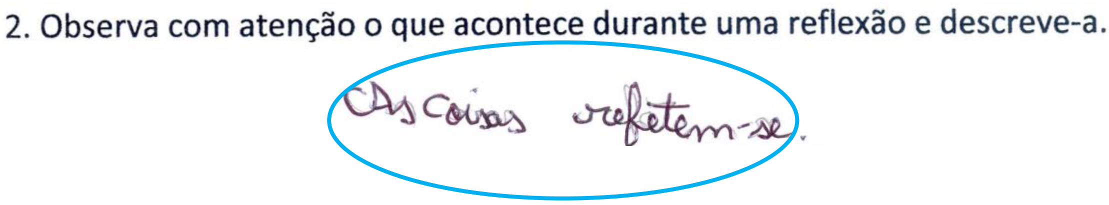


Figura 14 - António: Descrição de reflexão

O António apresenta uma resposta demasiado ampla que pode conter a ideia de reflexão sugerida apenas pela palavra ou a ideia do que esta transformação geométrica sugere. Porém, não fazendo mais qualquer tipo de afirmação ou não justificando a sua ideia, não é possível avaliar se o aluno consegue descrever uma reflexão.

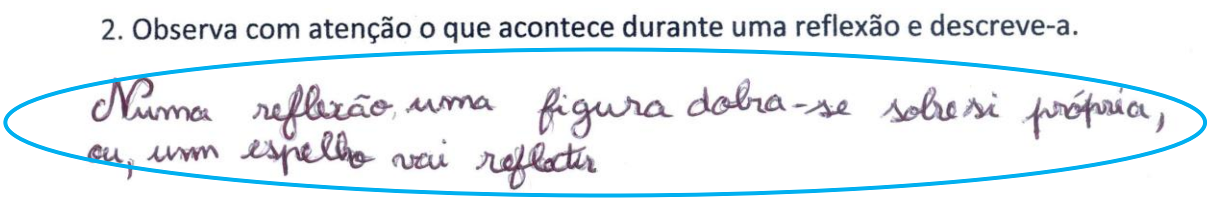


Figura 15 - Afonso: Descrição de reflexão

Também o Afonso parece não ter bem clara a diferença entre eixo de reflexão e eixo de simetria duma figura, quando refere “ uma figura dobra-se sobre si própria”. No entanto, verbaliza, sem explicar, a ideia de reflexão que tem a partir da utilização de espelhos.

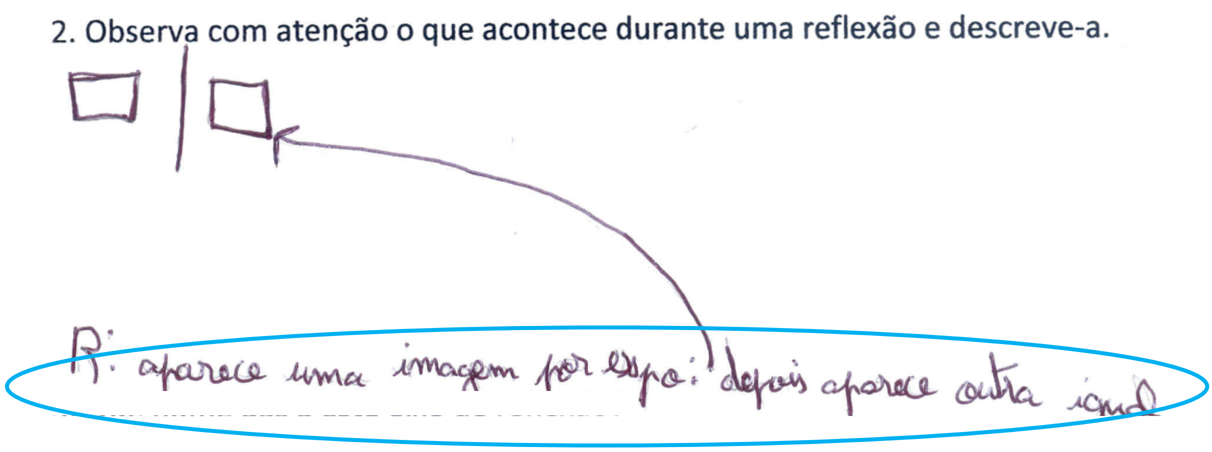


Figura 16 - Ricardo: Descrição de reflexão

Aparentemente, o aluno parece ter compreendido a ideia de reflexão. Porém, o exemplo que apresenta não permite tirar conclusões definitivas porque se em vez de apresentar quadrados, apresentasse triângulos não é possível entender se o transformado seria bem representado. Existe a ideia de que a reflexão não afecta a forma da figura mas não se consegue identificar qual a ideia existente relativamente à posição da mesma.

Ao analisar as respostas à questão 2, penso poder haver uma relação directa entre as respostas descritivas, pouco habituais, que surgem e a forma como a pergunta foi colocada. Na questão a palavra "descreve-a" sugere uma resposta descritiva e não gráfica. No entanto, as dificuldades em descrever uma ideia por escrito, são notórias. Os alunos, ainda que com pouca confiança, parecem ter adquirido a ideia geométrica que está por detrás de uma reflexão mas revelam muita dificuldade em colocar e explicar a ideia por escrito.

3ª questão – Em que posição está este eixo de reflexão?

Esta questão não trouxe dificuldades em relação à posição do eixo, tendo todos identificado a sua posição vertical, mas houve alunos que não concordaram com o facto de o mesmo estar identificado como eixo de reflexão, pois já na questão anterior haviam sido identificadas algumas confusões entre eixo de simetria e eixo de reflexão.

Figura 17 – Joana: Eixo de reflexão na vertical

Na discussão de grupo, o António começa por dizer que concorda que o eixo está na posição vertical mas que o eixo representado não é uma eixo de reflexão mas, sim, um eixo de simetria.

> PL – António, queres explicar porque fazes essa afirmação?
>
> António – Sim. Se fosse só um eixo de reflexão, era uma figura dividida ao meio.

Surgiu aqui a confusão entre eixo de simetria e eixo de reflexão de uma figura no plano.

> Paula – O António disse: "Se fosse só um eixo de reflexão era uma figura dividida ao meio."
>
> Concordam com esta ideia?
>
> Grupo de referência – (hesitando) Sim.
>
> Paula – De certeza, depois do que já discutimos anteriormente?!
>
> Gr – Hum, hum.
>
> Paula – Então e se fosse um eixo de simetria, como é que o definiam?
>
> António – A figura não estava partida ao meio, reflectia uma figura inteira e quando reflectisse, víamos duas figuras.

Os alunos revelam não ter bem definido as ideias de eixos de simetria de figuras e eixos de reflexão de uma figura.

> Paula – […]"Se fosse só eixo de reflexão era uma figura dividida ao meio e a reflexão era a outra parte da figura."
>
> Então e se fosse um eixo de simetria?
>
> Estamos a falar de eixo de reflexão e de eixos de simetria. São a mesma coisa?
>
> Gr – Não!
>
> Paula – Então o que é um eixo de simetria e o que é um eixo de reflexão?
>
> Ricardo - Um eixo de reflexão é o que divide uma figura e o eixo de simetria é o que divide duas…
>
> Paula – Concordam?
>
> Gr (excepto Afonso) – Sim.
>
> […]
>
> Paula – Então explica, Afonso.
>
> Afonso – Um eixo de simetria é duas figuras…

Os alunos revelam grande confusão e não conseguem distinguir eixo de reflexão e eixo de simetria de uma figura.

Foi, então necessário, representar no quadro uma reflexão de eixo vertical para que, através da modelação da situação, fosse possível definir a sua posição.

Paula – Olhem para o quadro. Que eixo está ali representado, um eixo de simetria ou um eixo de reflexão?

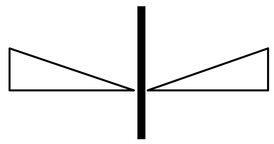


Figura 18 – Reflexão de eixo vertical

Afonso – Um eixo de reflexão porque reflecte a figura inteira.

Paula – Então, os eixos de reflexão o que é que fazem às figuras?

Afonso – Reflectem as figuras.

Paula – Então, António tenta, agora, explicar a diferença entre um eixo de reflexão e um eixo de simetria.

António – Um eixo de reflexão é algo que divide uma figura ao meio…

Afonso – Achas?! Então aquele eixo (que está representado no quadro) que é de reflexão está a dividir a figura ao meio?

Os pares revelaram-se, durante esta discussão, elementos fundamentais para esclarecer as dúvidas que persistiam. Penso que o tipo de linguagem utilizada pelos alunos pode ter contribuído para um melhor entendimento dos conceitos.

Afonso – Um eixo de reflexão são duas figuras e um eixo no meio, o eixo não divide a figura ao meio.

Paula – Então, qual é o efeito do eixo de reflexão sobre uma figura?

Afonso – Reflecte a figura “original”.

Paula – Toda a gente concorda com o Afonso?

Grupo turma – (bastante mais convictos) Sim.

Ricardo – Eu, não concordo! O eixo que está no quadro é um eixo de simetria.

Paula – É?! Então, não concordas com o que o Afonso disse?

Ouve, quando nos vemos ao espelho, o espelho funciona como eixo de reflexão ou eixo de simetria? Vês a tua imagem completamente reflectida ou o espelho apenas completa parte da tua imagem?

Ricardo e António – O espelho funciona como um eixo de simetria.

Afonso e o grande grupo – Eixo de reflexão.

O António e, agora também, o Ricardo continuavam confusos e, por isso dirigi-me ao quadro e representei:

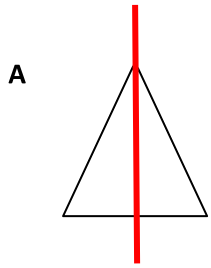


Figura 19 – Eixo de simetria (A)

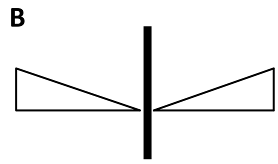


Figura 20 – Eixo de reflexão (B)

Em seguida, chamei o António para ele identificar em qual das situações tinha um eixo de simetria e um eixo de reflexão.

> Paula – Em qual das situações, A ou B, tenho um eixo de simetria?
>
> António – O eixo de simetria é o B.
>
> Gt – (em uníssono) Não.
>
> Paula – Joana, por favor, vem até aqui e tenta explicar ao António a tua ideia.
>
> Joana – O **A** é um eixo de simetria e o **B** um eixo de reflexão [...] Os eixos de simetria dividem as figuras ao meio, em partes iguais.
>
> Afonso – Porque, quando as sobrepomos, elas têm de ser do mesmo tamanho.
>
> Joana – O **B** é um eixo de reflexão porque reflecte a figura inteira.

Foi difícil para alguns alunos perceber a diferença entre eixo de reflexão e eixo de simetria. Mais difícil, ainda, foi relacionar os diferentes conceitos. Contudo, os alunos perceberam que o eixo apresentado na figura da questão três era, de facto, um eixo de reflexão.

Para chegar à resposta final, foi muito importante a colaboração de toda a turma. Fomos questionando e completando as diferentes respostas até chegarmos a uma resposta que satisfizesse todos.

Houve muitos alunos da turma que até aqui não tinham intervindo e que pediram para fazê-lo. A Carminho é uma dessas alunas e levantou a questão, da não existência de eixo de simetria nas pessoas. Questão já, anteriormente, levantada pelo António de que "nada na natureza é simétrico".

> António - Impossível, as pessoas nunca podem ter um lado completamente igual ao outro, nem sequer nas impressões digitais.

Contudo, para uma grande parte do grupo, seria possível a existência de um eixo de simetria nas pessoas. Discutimos depois essa ideia, observando-nos e dando exemplos como os olhos, o cabelo, entre outros e nada era igual de um lado e outro. Perante estas descobertas, o António reafirma:

> No mundo natural não há nada simétrico, só na matemática.

Mais adiante, a Carminho continua, afirmando:

> As pessoas não têm eixo de simetria mas pode haver um eixo de reflexão, como o espelho, que reflecte a sua imagem do outro lado. Por isso, eixo de simetria e eixo de reflexão não podem ser a mesma coisa.

Esta aluna foi muito importante no desenrolar da discussão sobre as tarefas propostas e muitas das conclusões finais foram tiradas a partir de questões lançadas por ela.

4ª questão – Representa o que aconteceria ao triângulo do Lado de Cá se a reflexão se fizesse a partir de um eixo de reflexão na horizontal.

Os alunos enquanto respondiam a esta questão solicitaram sempre, muito, a presença dos professores. Andámos de grupo em grupo em grupo, questionando os alunos para tentar ajudá-los a completar as suas ideias.

> Paula - O que acontece aos triângulos numa reflexão de eixo vertical é o mesmo que acontece numa reflexão de eixo horizontal? Ficam na mesma posição?
> Ricardo e Afonso - Não.
> Paula - Então é isso mesmo que se pretende. Queremos que digam quais são as diferenças.
> Ricardo - Podemos fazer o desenho do que acontece aos triângulos com cada um dos eixos?
> Paula - Podem mas também quero que escrevam.
> Afonso - Mas nos desenhos tu vês o que acontece.
> Paula - Sim, claro, mas também quero ver se vocês são capazes de explicar as vossas ideias utilizando palavras que expliquem o vosso desenho.

Está presente nesta conversa a resistência que os alunos ofereceram à resposta por escrito, a uma observação feita com base na visualização. Terá a ver com o facto de sentirem que se observam algo, logo podem representar essas observações através do desenho, por ser uma representação mais próxima do que observaram? Ou será que a dificuldade reside, efectivamente, na descrição escrita do que são capazes de observar? Ou ainda na dificuldade de utilização de uma linguagem articulada que exprima as suas observações?

Como já foi referido, os alunos revelaram dificuldades em visualizar o que aconteceria ao triângulo, que haviam considerado o do Lado de Cá, caso fosse reflectido a partir de um eixo de reflexão horizontal, mesmo presenciando o que acontecia a partir de uma reflexão de eixo vertical.

Observemos as representações dos alunos

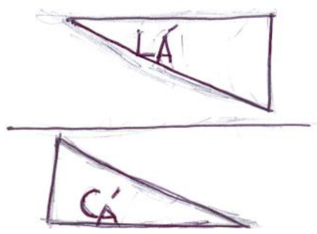


Figura 21 – António: Reflexão de eixo horizontal

O António representou correctamente o eixo pedido mas não respeita a posição do triângulo que havia considerado o Lado de Cá e representa-o numa posição diferente. Logo aqui, denota não ter noção de que há que manter a posição do triângulo dado para depois fazer a sua reflexão. Em seguida, revela não ter qualquer noção sobre os efeitos de um eixo de reflexão horizontal sobre o objecto.

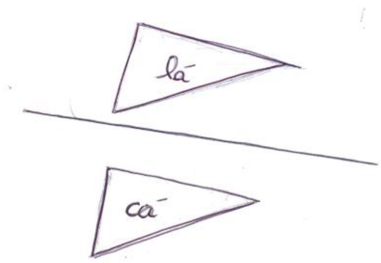


Figura 22 – Joana: Reflexão de eixo horizontal

A Joana também faz uma representação correcta da posição do eixo, mas não consegue representar o triângulo isósceles rectângulo, apresentado na tarefa. Em vez disso, representa um acutângulo, tentando manter a posição apresentada na figura da tarefa. A aluna, parece não estar desperta para características particulares ao fazer reproduções. Finalmente, não consegue representar os efeitos de uma reflexão de eixo horizontal sobre o objecto. A ideia apresentada liga-se a um deslocamento descendente do objecto, que pode estar ligado ao facto de a aluna ainda não ter entendido como se processa uma reflexão.

Figura 23 - Ricardo: Reflexão de eixo horizontal

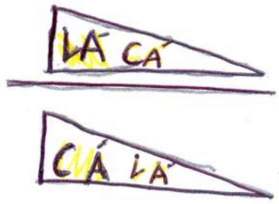


Figura 24 - Afonso: Reflexão de eixo horizontal

O Ricardo e o Afonso representam correctamente o eixo pedido, reproduzem os triângulos mantendo a posição e as suas propriedades mas também não conseguem prever os efeitos de um eixo de reflexão horizontal sobre um objecto, representando o mesmo movimento descendente, representado pela Joana.

Relativamente a esta questão, no que diz respeito às ideias geométricas trabalhadas e discutidas, é possível observar, através das respostas apresentadas pelos alunos, que qualquer um dos quatro alunos em análise não conseguiu representar correctamente a acção de um eixo de reflexão horizontal sobre o objecto. Estes alunos conversaram muito, entre si, antes de passarem à representação escrita. Nestas representações, para além da do António, podemos identificar indícios dessa interacção. É perceptível que três dos alunos encararam a reflexão de eixo horizontal apenas como se a figura fizesse um percurso descendente na mesma posição, sem terem presente a inversão existente numa reflexão.

Para a análise e discussão colectiva desta questão, escolheu-se a representação do Afonso (fig. 24).

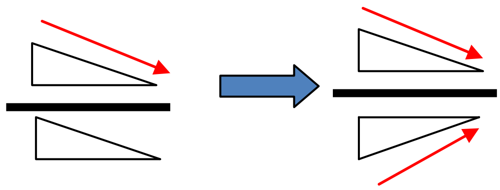
Já no quadro interactivo, o aluno começa por traçar o eixo horizontal e depois representa o triângulo do Lado de Cá, em seguida transporta-o para baixo, para representar uma reflexão de eixo horizontal.

O professor Lucas dirige esta discussão e pergunta se a representação do Afonso corresponde ao que a maioria dos alunos fez.

Uma parte dos alunos responde que não, entre os quais o Ricardo, que também não havia respondido correctamente mas que afirma:

> Ricardo – Professor, não está reflectido.
>
> Paula – ... por que achas que não está ali (no quadro) uma reflexão de eixo horizontal?
>
> Ricardo – Porque, se nós olharmos, no triângulo real, o de cima, há uma parte que vai para baixo e, no de baixo, essa parte devia ir para cima.

Ex:



O Ricardo parece querer afirmar a ideia que se apresenta no esquema mas não consegue, como veremos mais adiante, ao concretizar a ideia.

Figura 25 – Concretizar uma reflexão de eixo horizontal

O Afonso confundiu uma reflexão de eixo horizontal com um movimento descendente efectuado ao objecto, construindo a ideia de reflexão de eixo horizontal como um arrastamento da figura. Esta situação poderá estar ligada ao facto de os alunos habitualmente, através dos manuais escolares, lidarem mais com reflexões de eixo vertical do que com reflexões de eixo horizontal.

Para o Afonso uma reflexão de eixo horizontal produziria o seguinte efeito no triângulo do Lado de Lá.

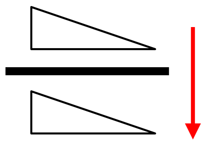


Figura 26 – Afonso: Impressões

Para tentar solucionar esta situação, tivemos que recorrer à visualização, a partir da posição do ângulo recto, do triângulo, considerado por unanimidade, o Lado de Cá (objecto) e, entretanto, o Afonso consegue identificar o erro.

> Afonso – Professor, acho que descobri onde está o erro! Se no triângulo "original" o ângulo recto está junto ao eixo, na reflexão também tem de estar. Os dois ângulos rectos, acho eu, deveriam estar um por baixo do outro.

Contudo, o Ricardo que tinha identificado o erro na representação do colega, não consegue visualizar a reflexão de eixo horizontal e, para o ajudar, recorreu-se ao esquema sugerido pela resposta do Afonso, identificando os ângulos rectos dos triângulos.

PL - Ricardo, olha para o triângulo de cima e diz-me onde está o ângulo recto. Está mais próximo do eixo de reflexão ou mais afastado?

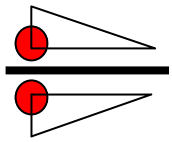


Figura 27 – Reflexão de eixo horizontal: concretização

(Ricardo localiza o ângulo recto)

PL – Sim, e no outro (no transformado)?

Afonso – Aqui (localizando o ângulo correctamente).

PL – Sim, e, em relação ao eixo, está mais afastado ou mais próximo?

Ricardo – Está mais próximo.

PL – Nos dois ou só no triângulo "original"?

Ricardo – Nos dois.

Ao longo desta interacção entre professor e aluno, percebeu-se que o Ricardo, embora tenha respondido correctamente às questões que lhe iam sendo colocadas, não conseguiu entender a acção do eixo de reflexão horizontal sobre o triângulo.

Paula – Ricardo respondeste muito bem a todas as questões que o professor te colocou. Será que, agora, és capaz de nos explicar o que acontece a uma figura quando é reflectida a partir da utilização de um eixo de reflexão horizontal?

Ricardo – Hum... é muito difícil! Só percebi que os vértices que estão perto do eixo ficam perto e os que estão longe, ficam longe.

Esta situação parece indicar que, muitas vezes, partimos do princípio de que o facto dos nossos alunos serem capazes de responder bem a um conjunto de questões encadeadas, perceberam a situação apresentada mas perante esta situação, percebemos que nem sempre isso se verifica. Para além disso, também é comum, admitir-se que alunos do 3º ano de escolaridade, fundamentalmente um aluno considerado bom, como é o caso do Ricardo, já são capazes de abstrair e visualizar tanto uma reflexão de eixo vertical como uma reflexão de eixo horizontal, ou, ainda admitir, que pelo facto de entenderem uma delas, automaticamente entendem a outra. Observando esta situação, pensaremos, talvez, em reformular a nossa teoria.

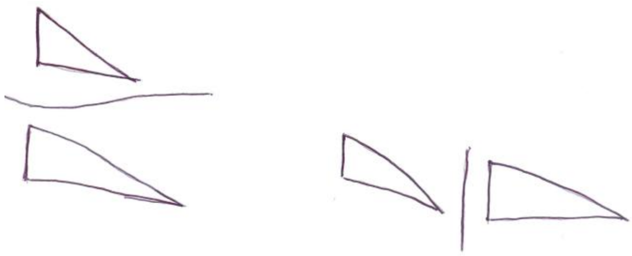
Esta dificuldade foi detectada numa grande parte dos alunos, durante a elaboração do trabalho individual. Contudo, após a discussão colectiva, com a grande ajuda que constituiu o quadro interactivo, os alunos parecem ter superado a dificuldade e percebido qual a acção dos diferentes eixos no transformado de uma reflexão.

> Paula – Então, quem é capaz de me explicar o que acontece ao triângulo do lado de Cá quando é reflectido a partir de um eixo de reflexão vertical?
> Afonso – O ângulo agudo que está mais perto do eixo, na reflexão também fica perto do eixo. É como se a figura virasse.
> Paula – E numa reflexão de eixo horizontal?
> Joana – Acho que é a mesma coisa, só que a figura em vez de virar para a direita, vira para baixo.

5ª questão – Explica o que observas nas transformações produzidas.

Na fase do trabalho individual e/ ou de pequeno grupo os alunos revelaram muitas dificuldades em estruturar uma resposta que respondesse ao pedido. Os alunos parecem não ter entendido a questão colocada e, mesmo depois desta ter sido discutida em grande grupo, não conseguiram passar de ideias como: o eixo de reflexão horizontal reflecte a figura para baixo e o vertical reflecte para o lado ou mudam de posição os eixos e a figura.

Observemos as respostas dos alunos com todas as resistências e dificuldades.



Resposta escrita: Mudam de posição os eixos e 1 figura.

Figura 28 – Ricardo: Reflexão de eixo vertical e horizontal

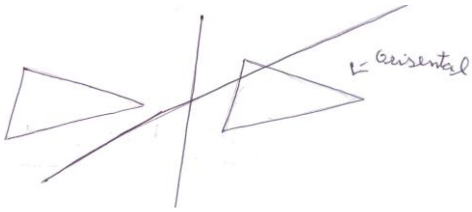
Na resposta escrita, a partir dos desenhos que produz, o Ricardo (fig. 28) é capaz de identificar a diferente posição dos eixos mas parece não ter compreendido a ideia de reflexão, já que, na continuação do que havia feito na resposta à questão anterior, tanto na representação em que utiliza um eixo vertical como na que utiliza um eixo horizontal, apresenta um movimento de deslocação, respectivamente de movimento descendente e lateral, e não de reflexão.

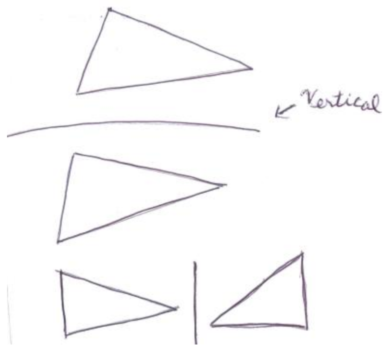
A Joana, confundiu reflexão com translação e representou-a (fig. 29).

Paula - O que é isto? É uma reflexão?

Joana – (iniciando o apagamento) Não, é uma translação.

Paula - Não apagas nada, corta e representa ao lado ou por baixo a tua reflexão.





Resposta final da Joana: A peça virou-se e desloquei para cima para o outro triângulo.

Figura 29 – Joana I: Reflexão de eixo vertical e horizontal

Figura 30 – Joana II: Reflexão de eixo vertical e horizontal

Na figura 30, a aluna foi capaz de representar correctamente a reflexão de eixo vertical, talvez por a ter visualizado na folha de trabalho, mas continua a não conseguir representar a reflexão de eixo horizontal, cometendo os erros já assinalados nas representações da questão quatro. Na resposta escrita, a Joana não identifica a reflexão acerca da qual se refere, embora, pela forma como descreve o movimento, nos pareça estar a referir-se à reflexão de eixo horizontal. Contudo, parece perceber-se na sua descrição a ideia de translação e não de reflexão: "… e desloquei para cima…".

O António não consegue explicar por escrito o que havia representado através do desenho e tento motivá-lo a fazê-lo.

Figura 31 - António: Reflexão de eixo vertical e horizontal

Paula -Não explicaste o que acontece aos triângulos.

O que é que lhes acontece? Ficam iguais quando utilizas um eixo de reflexão em posições diferentes?

António - Está aqui no desenho.

Paula – Mas também preciso que escrevas o que observas.

António - Mas está aqui no desenho.

Paula - Mas não chega, eu quero também que expliques utilizando palavras. Gostava que tu conseguisses!

António - (para os colegas de grupo depois de eu me ter afastado) Não consigo, não sou sábio!!!

E, no final, a resposta surge, apenas, através do desenho inicial.

O Afonso começa por conseguir representar uma reflexão de eixo vertical mas não consegue colocar por escrito o que observa nessa reflexão.

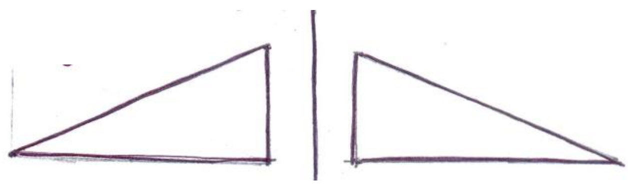


Figura 32 – Afonso: Reflexão de eixo vertical

Afonso – Paula, vê se está bem.

Paula - O que é que a mudança de eixo provoca nos triângulos? O que representaste descreve o que observaste?

Afonso – Mas está no desenho.

Paula – Sim, sei que está no desenho mas agora quero que ponhas por escrito o que representaste no desenho. Tenta, vá lá.

Esta questão suscitou muitas dificuldades em todos os alunos e houve necessidade de intervir, tentando explicar o que se pretendia:

Paula - Meninos, todos, oiçam lá a Paula. Na pergunta cinco aquilo que se pede é para vocês compararem o que acontece aos triângulos quando há uma reflexão de eixo vertical e quando há uma reflexão de eixo horizontal ou seja, que efeitos é que uma reflexão de eixo horizontal produz e que efeitos é que uma reflexão de eixo vertical produz. Os triângulos ficam na mesma posição com os dois tipos de eixos?

Mesmo depois desta intervenção, as dificuldades continuaram e só foram atenuadas ou, em alguns casos resolvidas, durante a discussão colectiva.

A discussão em grande grupo foi iniciada pelo professor Lucas e nela pretendia-se, esclarecer dúvidas, completar ideias e construir respostas estruturadas, a partir das respostas dadas pelos alunos. Assim, foi-se analisando e discutindo, uma a uma, todas as questões que fazem parte da segunda tarefa.

Apresenta-se como exemplo a resposta final do Afonso.

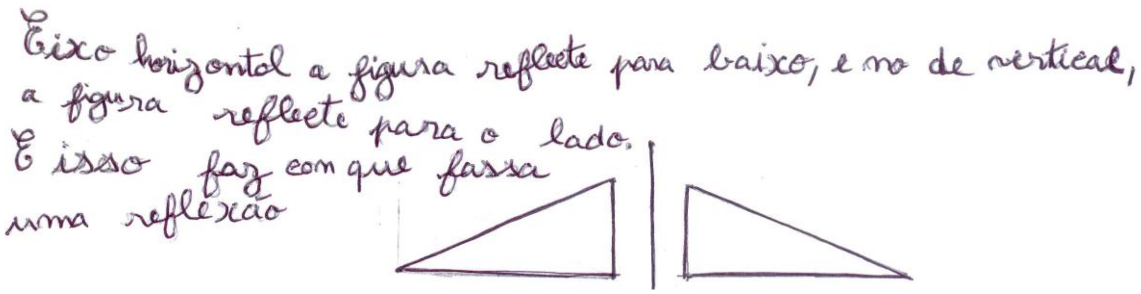


Figura 33 – Afonso: Resposta final à 5ª questão_1S2T

Perante a resposta final, o aluno parece ter compreendido, que dependendo da posição do eixo, a imagem do objecto aparece localizada em diferentes posições.

Os alunos foram capazes de representar o seu pensamento através do desenho, embora com ideias difusas ou mesmo erradas da reflexão mas não o conseguiram fazer, excepto o Afonso, utilizando palavras que descrevessem uma reflexão, através da utilização de um eixo vertical ou horizontal.

Além disso, é ainda de referir a grande necessidade que os alunos tiveram de partir do desenho, para depois ser possível escrever as ideias já representadas. Esta situação verificou-se apenas em dois dos alunos do Gr, sendo que os restantes não conseguiram passar do desenho. No resto da turma, houve alunos que não responderam, alunos que utilizaram o desenho e palavras e, uma grande parte, utilizou apenas a expressão escrita para explicar as suas ideias. Contudo, as estas não foram muito além das já descritas, anteriormente.

Porém, mais tarde, durante a discussão colectiva das respostas individuais, os alunos parecem ter conseguido ultrapassar essa dificuldade inicial, graças à interacção dos diferentes elementos presentes.

Observemos as ideias síntese da discussão da turma, tendo como base a história *O Rapaz do Espelho* e as suas considerações sobre a identificação do lado que constituía cada um dos triângulos, para resposta à questão cinco:

Numa reflexão…

- ✓ Um objecto real é reflectido do outro lado do eixo de reflexão;

- ✓ Numa reflexão observamos que os vértices do triângulo que estão mais próximos do eixo de reflexão, são reflectidos perto do eixo, tanto na reflexão de eixo vertical como na reflexão de eixo horizontal;
- ✓ Quanto mais próximo do eixo de reflexão estiver um vértice do objecto (pontos assinalados a vermelho) mais próximo do eixo vai ficar esse vértice na reflexão.

Ex:

A – reflexão de eixo horizontal B – Reflexão de eixo vertical

Figura 34 – Reflexões A e B

Ex:

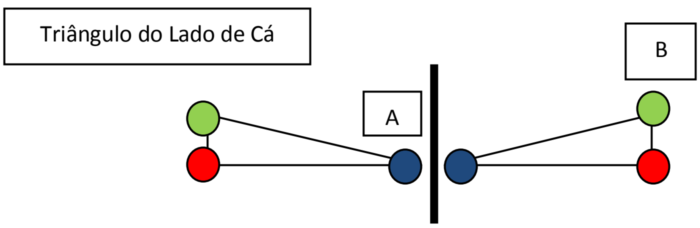


Figura 35 – Triângulos A e B

Legenda : Vértice do ângulo recto

Vértice A

Vértice B

- ✓ Na reflexão de eixo vertical, o vértice do ângulo recto do triângulo está afastado do eixo de reflexão e, por isso, na reflexão aparece em lados opostos, muito afastados. O mesmo acontece com o vértice B;
- ✓ Quanto mais afastado estiver um vértice do eixo de reflexão (ângulo recto e vértice B), mais afastado do eixo de reflexão vai surgir na reflexão, constituindo estes vértices lados opostos da figura;
- ✓ O vértice A está próximo do eixo de reflexão e, por isso, aparece próximo do eixo também na reflexão;

- ✓ Na reflexão de eixo vertical, o triângulo do Lado de Lá reflecte ao lado do triângulo do Lado de Cá. Na reflexão de eixo horizontal, o triângulo do Lado de Lá não pode reflectir ao lado porque o eixo está por baixo. Então o triângulo do Lado de Lá reflecte por baixo do triângulo do Lado de Cá;
- ✓ Numa reflexão de eixo vertical, o triângulo do Lado de Cá fica à esquerda do eixo de reflexão e o triângulo do Lado de Lá, à direita;
- ✓ Numa reflexão de eixo horizontal, o triângulo do Lado de Cá fica por cima do eixo e o triângulo do Lado de Lá fica por baixo do eixo;
- ✓ O triângulo de Lado de Cá fica na mesma posição tanto na reflexão de eixo vertical como na reflexão de eixo horizontal. O triângulo do Lado de Lá fica em posições diferentes.

Ao analisar as filmagens resultantes da discussão colectiva, gerada em torno da segunda tarefa, da 1º sequência, concretizei a ideia de que uma tarefa que traz muitas dificuldades na resolução inicial, tanto individualmente como em pequeno grupo, seja por dificuldade em interpretar as questões colocadas, seja pela dificuldade em relacionar os conceitos básicos que envolvem a mesma, pode tornar-se acessível à medida que se gera interacção e se articulam ideias.

Analisando as conclusões da turma, e depois de ter analisado o trabalho individual, parece haver uma sequência decrescente de dificuldade nas características que vão sendo identificadas. À partida, as últimas características a serem nomeadas deveriam ser as primeiras, dado que foram aquelas que os alunos identificaram no espaço de trabalho individual. Contudo, essa situação não se verificou e penso que ela poderá ter ocorrido pelo facto de na discussão da questão anterior (questão 4), o professor Lucas, para ajudar o Ricardo, ter agarrado na questão da proximidade ou afastamento dos vértices do triângulo, relativamente ao eixo. Perante esta nova ideia lançada, os alunos ficaram despertos para ela e começaram por analisá-la, pegando apenas mais tarde nas características que já tinham sido capazes de identificar sozinhos. Parece haver nesta atitude, uma acção de "arrumar" o pensamento e integrar novas ideias.

O facto de abrirmos a discussão ao grande grupo, no final da realização das tarefas, realizadas individualmente ou em pequeno grupo, e de darmos grande importância à partilha de ideias, pareceu constituir um importante elemento no desenvolvimento de ideias geométricas e sentido espacial nos alunos. Esta situação, leva-nos a admitir que, neste grupo de trabalho, a interacção nas vertentes aluno-aluno; aluno-professor e professor-aluno contribuiu de forma muito positiva para a construção de novos conceitos, a articulação dos mesmos, a criação de novas ideias geométricas, bem como para o desenvolvimento do sentido espacial dos alunos.

A comunicação matemática pareceu ser, aqui, um elemento chave para “arrumar” e completar ideias matemáticas ainda indefinidas.

Para além de tudo isto, foi ainda possível observar que na resposta às primeiras três questões os alunos utilizam, na sua maioria, palavras para responder às perguntas colocadas e nas últimas duas revelaram muitas dificuldades em colocar as suas respostas por escrito. Cerca de metade dos alunos utilizou apenas desenhos para responder.

Não se pode estabelecer uma relação directa entre a existência de respostas por escrito a perguntas directas e respostas que utilizam o desenho, a perguntas indirectas, dado que as questões dois; quatro e cinco são questões indirectas e existe uma grande percentagem de alunos que responde à segunda questão utilizando palavras, o mesmo já não acontecendo nas quarta e quinta questões.

Esta situação parece estar ligada ao facto de os conceitos subjacentes a cada uma das questões estarem mais ou menos claros para os alunos, pois, após a discussão colectiva e as muitas experiências de representação, os alunos revelaram mais facilidade em colocar por palavras as ideias representadas nos seus desenhos. Contudo, é relevante afirmar que, este grupo, dependeu das primeiras representações, através do desenho, para conseguir construir respostas escritas. Os desenhos parecem ter servido de ponte entre a ideia apresentada e a imagem necessária para a concretização da tarefa.

Nas respostas individuais à questão cinco, foi possível observar que todos os alunos, de uma forma geral, revelaram muitas dificuldades na elaboração de uma resposta escrita. Esta situação parece ter sido provocada por dois aspectos essenciais. Um, foi o facto de não terem entendido a proposta de trabalho e o outro, teve a ver com a ideia de ainda não terem ideias muito claras relativamente aos tópicos que era necessário articular para responder à questão. Esta questão foi bastante perceptível, mais tarde, durante a discussão colectiva das respostas individuais, como é possível confirmar através das transcrições, já apresentadas, das conclusões retiradas em grande grupo.

A resolução desta tarefa gerou nos alunos um grande envolvimento que atribuo a dois aspectos fundamentais: a narrativa propriamente dita, no que diz respeito à coexistência de dois mundos paralelos em que as personagens se podem mover, e a relação que se pode construir entre a tarefa proposta e a narrativa. Pois, embora, os alunos, inicialmente, tenham revelado alguma dificuldade em relacionar a acção da narrativa com a proposta de trabalho, no decurso da mesma, essa dificuldade atenuou-se e deu lugar a uma interligação permanente.

Na primeira fase da discussão colectiva, logo após o final do trabalho individual, os alunos estavam tão envolvidos na história que houve necessidade de voltar a discutir pormenores da mesma que extrapolavam a matemática. O envolvimento era bastante grande…

> Paula – Temos que acabar a discussão, já tocou para o almoço. Até segunda!
> Ricardo – Segunda? Só vens, agora, na segunda?

No final desta discussão, houve um espaço em que muitos alunos quiseram clarificar ideias e foram colocando questões, através da utilização de representações individuais que modelavam a reflexão, seguindo o exemplo que tanto eu como o professor Lucas tínhamos utilizado para clarificar, anteriormente, as ideias que haviam sido difíceis de construir: representação do transformado após uma reflexão de eixo horizontal e uma translação e identificação e comparação de características existentes numa reflexão de eixo vertical e horizontal.

> PL – Este espaço está a ser fundamental para os miúdos clarificarem ideias. É como se estivessem a arrumar tudo o que foi discutido.
> Paula – É, para eles é necessário ir até à exaustão.

5.2.3. 3ª Tarefa

> O Sábio, por exemplo, levantará um braço, enquanto a sombra levantará o braço não correspondente e assim sucessivamente…
>
> *in O Homem sem Sombra*, p. 21

O trabalho com esta tarefa começou com a leitura do excerto apresentado e a sua dramatização, através da utilização do quadro interactivo, para projecção da sombra. Pretendeu-se com esta actividade inicial, dar oportunidade aos alunos para compreenderem a situação descrita e observarem o que acontecia em termos de percepção da posição no espaço.

Durante as várias dramatizações, os alunos foram lançando ideias sobre o que percepcionavam.

> Alex – Se eu me puser de frente para o quadro interactivo e levantar o braço direito, a minha sombra levantará o braço esquerdo porque o quadro vai funcionar como um espelho.

> Carla – Mas se eu me puser de costas para o quadro interactivo, ficamos virados para o mesmo lado, e a sombra também vai levantar o braço direito.

Em seguida, partimos para o trabalho individual e o Professor Lucas começou por ler, em voz alta, as questões às quais os alunos deveriam responder. Depois da leitura, o professor incentivou a interacção em pequeno grupo pedindo aos alunos que utilizassem como metodologia de trabalho a análise e discussão das questões em pequeno grupo e que as respostas escritas, individualmente, só fossem dadas posteriormente.

> PL – Não se esqueçam que durante o trabalho podem e devem, podem e devem conversar e discutir com os colegas, antes de escreverem.

Durante o trabalho individual e de pequeno grupo, houve necessidade de ir esclarecendo os alunos relativamente ao pretendido, em cada uma das questões, e voltar a dramatizar, repetidas vezes, a cena descrita no excerto do livro que originou esta tarefa.

Parece ter havido alguma dificuldade em identificar o pretendido em cada uma das questões e em visualizar mentalmente a cena descrita e as dramatizações efectuadas, na sessão anterior, antes do desenvolvimento do trabalho individual.

Outra observação pertinente, relaciona-se com o facto de ter sido possível observar pouca interacção no Gr durante o trabalho de resposta escrita às questões. Os alunos pediram, individualmente, a minha opinião sobre o que iam escrevendo mas não utilizaram as ideias discutidas para analisar entre si, antes de as escreverem.

A pedido do professor Lucas, comecei por fazer a discussão colectiva da tarefa com os alunos. Estes foram lendo as suas respostas e só depois passámos à análise das mesmas, no sentido de aferir se todas as respostas continham a mesma ideia.

1ª questão - Já experimentaste fazer esta experiência? O que observaste?

A Joana começou por ler a sua resposta e eu registei-a no quadro.

> Joana – Sim, já experimentei e o que observei foi que quando eu virava-me para a sombra ela levantava o esquerdo e eu estava com o direito e eu estava a olhar para a parede e a sombra para a janela.

Para além da resposta escrita, a aluna apresentou, ainda, um desenho representativo da situação descrita.

Figura 36 – Joana: Objecto e sombra

A aluna, quando refere "… eu estava a olhar para a parede e a sombra para a janela" apresenta a percepção de que a posição do objecto relativamente ao plano de reflexão é fundamental para projectar uma reflexão. Parece haver o entendimento de que se o objecto estiver de costas para o plano de reflexão, ambos virados na mesma direcção, essa reflexão não se concretizará.

Entretanto, outros alunos, fora do grupo de referência, se seguiram, intercalando com os alunos pertencentes a este. A ideia de intercalar respostas, dentro e fora do Gr, teve como objectivo, gerar maior interacção durante a discussão colectiva das respostas dadas.

Chegados à resposta do António, percebemos que este apenas tinha traduzido a sua ideia através do desenho que a seguir se apresenta.

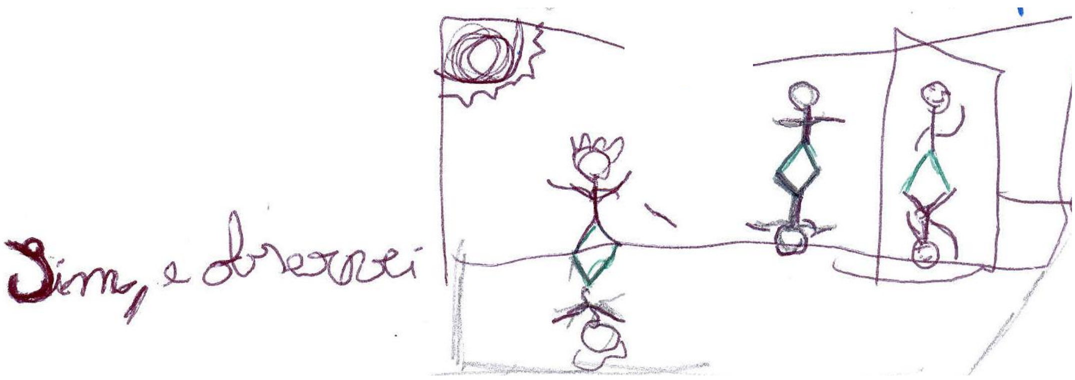


Figura 37 - António: Objecto e sombra

Entretanto, foi-lhe pedido que traduzisse por palavras o seu desenho e o aluno respondeu:

> Sim e observei que se um homem estiver de costas para o sol e levantar o braço esquerdo (fig. 37) a sombra dele que está virada de frente para ele irá levantar o direito. Se os dois estão virados para a frente, estão a levantar o mesmo lado...

Foi muito importante levar o aluno a utilizar palavras para expressar a ideia que tinha relativamente à cena descrita, pois só através do desenho, teria sido difícil perceber toda a mensagem.

Parece haver na sua resposta um entendimento claro do papel da posição do objecto face ao plano de reflexão e ao tipo de sombra que cada uma das posições irá projectar. Objecto e plano de reflexão virados no mesmo sentido "Se os dois estão virados para a frente…", o braço levantado será o mesmo; objecto e plano de reflexão virados um para o outro, o braço levantado será o não correspondente "… e levantar o braço esquerdo a sombra dele que está virada de frente para ele irá levantar o direito".

Seguiu-se a resposta do Afonso:

> Afonso – Sim, observei que quando uma pessoa levanta o braço direito, a sombra dessa pessoa levantará o braço esquerdo, e assim sucessivamente.

Perante a resposta pouco elucidativa, pedi-lhe que justificasse a ideia transmitida. Eu fui colocando algumas questões orientadoras e ele foi tentando responder, de forma a justificar a opinião dada.

> Paula – A situação que descreves, acontece sempre?
> Afonso – Não. Eu vou explicar.
> Quando estamos virados para a parede, a sombra vai ficar virada para a janela, com o mesmo braço levantado.
> Paula – E como é que o sábio e a sua sombra estão um, em relação ao outro?
> Afonso – Estão frente a frente.

Após esta indicação final, o Afonso pede para se levantar, para exemplificar o que acabara de dizer. Pede ajuda a uma colega e ambos dramatizam a situação.

> Afonso – Se eu levantar o braço direito, a Maria vai levantar o esquerdo. E agora se eu me virar na mesma direcção dela, os braços levantados, são os braços contrários.
> Paula – Porquê?
> Afonso – Porquê?
> Paula – Sim!
> Afonso – Sei lá!!!

Após esta exclamação do Afonso, outros alunos mostram vontade de responder.

Roberto – Isto acontece porque eles estão frente a frente.

Paula – Sim, mas o que faz com que esta situação aconteça?

Gt – Ah! É como se houvesse um eixo de reflexão.

Paula – E quando os dois estão virados na mesma direcção, o que acontece?

Afonso – A Maria tem o braço contrário ao meu, levantado.

Paula – Estando os dois virados na mesma direcção e sendo a Maria a tua sombra, é isso que vai acontecer?

Afonso – Não, levantamos os dois o mesmo braço.

Paula – Porquê?

Afonso – Porque estamos virados no mesmo sentido.

Paula – Então o que temos estado a discutir tem a ver, essencialmente, com o quê?

Ricardo – Com a posição.

Na resposta final, o Afonso parece continuar a não ter muita noção da importância da posição do objecto face ao plano de reflexão e o que essa posição determinará.

Prosseguimos com a análise das respostas e quando chegou a vez do David ouvimos o seguinte:

David – Eu observei uma reflexão.

Ao ouvir esta resposta, questionei:

Paula – Ai, sim? E consegues relacionar a tua resposta com tudo o que já foi dito até aqui?

O aluno não conseguiu dar resposta à questão colocada e também nenhum colega da turma ou do Gr mostrou disponibilidade para o fazer.

Seguiu-se o Ricardo que, também para completar a sua ideia, teve necessidade de recorrer a uma representação icónica da situação descrita.

Figura 38 - Ricardo: Objecto e sombra

Ricardo – Sim, observei que quando uma pessoa levantava um braço a reflexão (sombra) dessa pessoa levantava o braço não correspondente, quando estão frente a frente.

Paula – Então, tu, neste caso, consideraste que a sombra poderia ser uma reflexão, foi?

Ricardo – Sim, mais ou menos. Agora posso desenhar aí uma coisa? (o aluno na resposta escrita apresenta um desenho para exemplificar o que disse).

Durante este diálogo, o aluno descreve a sombra como se de uma reflexão se tratasse, dado o seu comportamento perante um plano de reflexão. Contudo, não foi gerado contexto para discutir, talvez, o mais importante entre sombra e reflexão, a proporção.

Na resposta a esta questão pude observar que a Joana e o Ricardo revelaram necessidade de acompanhar com desenhos a sua resposta escrita, figuras 36 e 38, respectivamente; o António, inicialmente, apenas respondeu através de um desenho (fig. 37) ilustrativo da situação descrita e apenas o Afonso não recorreu ao desenho para o fazer, dando de imediato a resposta escrita (Fig. 39).

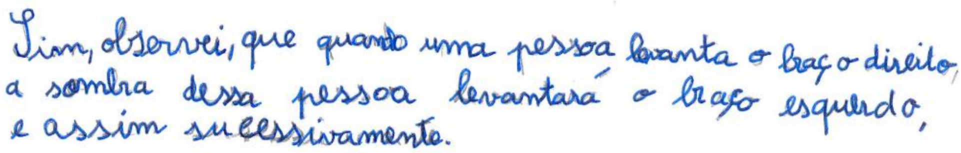


Figura 39 – Afonso: Objecto e sombra

A interacção entre todos os alunos da turma e os professores revelou-se, na resposta a esta questão, determinante, sendo essencial para tirar conclusões. Foi importante observar, dramatizando, a situação, descrita no excerto apresentado, repetidas vezes e em cada uma verbalizar o que acontecia.

Após todo processo de dramatização, análise da questão em pequeno grupo e de discussão exaustiva em grande grupo, para articulação das respostas dadas com as ideias debatidas, os alunos concluíram que dependendo da posição do corpo, em relação ao objecto de incidência da luz (plano de reflexão), a parede ou o quadro interactivo, o braço reflectido pode ser o contrário ou o mesmo. Assim, se o corpo estiver frente a frente com o plano de reflexão e levantar o braço direito, produzir-se-á uma reflexão e o braço levantado será o contrário. Se o plano de reflexão e corpo estiverem um à frente do outro, virados para o mesmo lado, e o corpo levantar o braço direito, a sombra emitida levantará também o braço direito. Os alunos entenderam a sombra como uma espécie de reflexão, não identificando, todavia, a questão da proporção que invalida a sombra de poder ser uma reflexão.

Durante a discussão exaustiva, tida para responder à primeira questão, acabámos por ver respondidas as questões dois e três. Apresentarei a seguir, apenas, as conclusões retiradas para cada uma delas.

2ª questão - Consegues explicar o motivo pelo qual o sábio "levantará um braço, enquanto a sombra levantará o braço não correspondente" ?

> Ricardo – Isto acontece porque o sábio está virado de frente para a parede e a parede funciona como um eixo de reflexão.

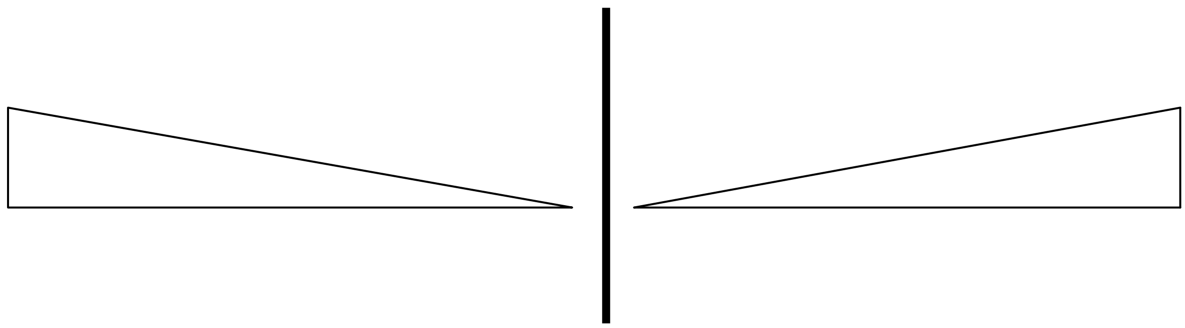
O aluno percebe que a sombra emite um comportamento semelhante ao de uma imagem projectada num espelho mas não foi capaz de observar e comparar que a dimensão da sombra projectada não corresponde à do corpo.

3ª questão - O que provoca esta situação durante uma de reflexão?

> Joana – Na reflexão isto acontece porque existe um eixo de reflexão.

Nesta resposta a aluna mostra ter entendido que para existir uma reflexão de um objecto tem de haver um eixo que reflecte o seu transformado. Sem eixo de reflexão, nunca poderá existir uma reflexão.

4ª questão - Consegues relacionar o que acontece com a sombra projectada na parede do Sábio com o que acontece com estes triângulos? Explica o teu raciocínio.



O professor Lucas iniciou a discussão desta questão pedindo ao porta-voz de cada um dos grupos para ler a resposta escrita e, posteriormente, explicá-la. Assim, serão aqui transcritas as respostas consideradas mais pertinentes, tanto dentro como fora do Gr.

> Carminho - Na história há o sábio e a sua sombra (reflexão), na figura há o triângulo verdadeiro e o triângulo falso (reflexão do triângulo verdadeiro) e há duas formas iguais, viradas uma para a outra.

Nesta afirmação, a Carminho consegue identificar as possíveis semelhanças entre uma reflexão e a projecção de uma sombra mas ao referir "e há duas formas iguais, viradas uma para a outra" não conseguiu identificar que na projecção de uma sombra não aparecem duas formas iguais, viradas uma para a outra.

> Carla – Na história o sábio tem uma sombra e nestes triângulos também há uma espécie de sombra que é a reflexão. A sombra é como se fosse uma reflexão num espelho.

A mesma situação é identificada na segunda parte da resposta da Carla "A sombra é como se fosse uma reflexão num espelho" mas, no entanto, esta aluna não considera a sombra exactamente como uma reflexão. Refere que "Na história o sábio tem uma sombra e nestes triângulos também há uma espécie de sombra que é a reflexão", querendo com isto afirmar que reflexão e sombra não são bem a mesma coisa.

Em relação a esta questão, os alunos concluíram que para existir uma reflexão é necessário um eixo de reflexão e para produzir sombra um corpo terá de ter luz a incidir por detrás e uma superfície onde a sombra é projectada. Além disto, foi, também, perceptível que alguns alunos perceberam que existem diferenças entre reflexão e sombra mas, globalmente, a turma revelou dificuldade em perceber as diferenças entre as duas.

Sendo noções diferentes, para muitos alunos, funcionou como sendo a mesma coisa.

Não considerei esta situação grave, dada a faixa etária dos alunos.

> Ricardo – Para haver sombra tem de haver luz e uma parede, para haver reflexão tem de haver um eixo de reflexão.

> Joana – A primeira coisa que precisamos para projectar uma sombra, é luz (do sol ou de uma lâmpada) e para produzir uma reflexão, é um eixo, que pode ser um espelho ou um vidro ou qualquer coisa que reflicta.

Foi muito importante os alunos perceberem que se pretendia que fosse feita uma comparação entre a situação descrita na história e a que é apresentada na figura da pergunta, com os triângulos.

Roberto – Então podemos chamar ao triângulo da esquerda "sábio verdadeiro" e ao da direita "sábio falso"?

Contudo, analisando esta questão, parece que o aluno, ainda "contaminado" pela discussão tida na questão um, da segunda tarefa, classifica o triângulo da esquerda como o objecto e o da direita como o seu transformado. Porém, a questão também pode denotar a percepção de que poderá ser o contrário, ou seja, será que ao colocar a questão o aluno pretende saber se vai ser mantido o acordado na tarefa anterior?

Agarrando na ideia do Roberto, o Afonso e o António apresentam como início da sua resposta escrita as seguintes representações:

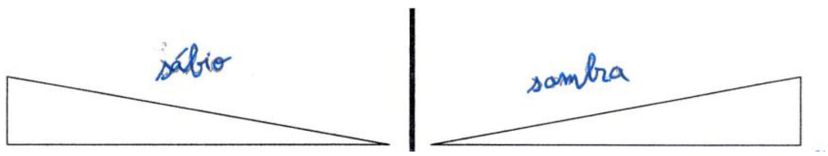


Figura 40 – Afonso: Resposta à 4ª questão_1S3T

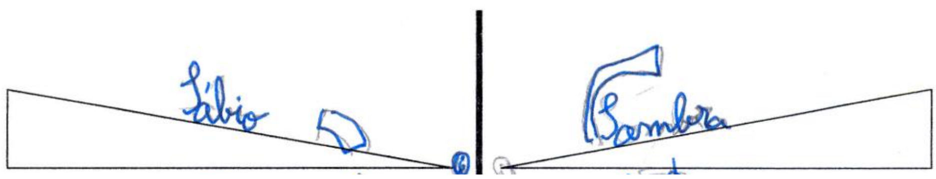


Figura 41 - António: Resposta à 4ª questão_1S3T

A partir destas representações, parece poder observar-se que os alunos conservaram a ideia inicial de considerar o triângulo da esquerda como objecto e o da direita como transformado, embora tenha sido discutida a arbitrariedade desta ideia.

Outra observação pertinente relaciona-se com o facto de os alunos nunca colocarem em causa o facto do comportamento desta reflexão nunca poder ser completamente repetido na projecção de uma sombra, dada a proporção da sombra em relação ao corpo projectado.

Foi, também, bastante perceptível a necessidade que os alunos, desta faixa etária, têm de apoiar as suas ideias em desenhos representativos das ideias que têm de escrever.

No final deste trabalho e porque os alunos haviam criado a necessidade de partilhar a sua opinião sobre o trabalho matemático desenvolvido na sala de aula, a partir da utilização das histórias, surgiu, embora não estivesse previsto, a ideia de fazer a cada um dos alunos do Gr uma pequena entrevista (anexo II) sobre a utilização das histórias, para desenvolver trabalho matemático. Esta será objecto de análise nas conclusões relativas ao envolvimento dos alunos em tarefas matemáticas criadas a partir de histórias

5.2.4. Síntese

Houve um grande envolvimento com as tarefas propostas, dado os alunos terem transposto para a resolução das mesmas o envolvimento que foram construindo com as narrativas que serviram de base à construção das tarefas matemáticas apresentadas.

Na fase do trabalho individual e de pequeno grupo, o desenho pareceu a forma mais fácil de modelar as situações propostas. Porém, nalgumas situações, nem mesmo através do desenho, os alunos foram capazes de realizar as tarefas com sucesso. Estes parecem não ter sido capazes de construir uma representação interna da situação descrita, não podendo, por isso, representá-la externamente de forma correcta.

Outra ideia, subjacente ao comportamento dos alunos, parece ser o facto de estes não dominarem convenientemente a linguagem matemática escrita e, devido a isso, revelaram muitas dificuldades em pôr por escrito as ideias que conseguiram verbalizar. Foi muito difícil a utilização de uma linguagem que, embora natural, fosse clara, relativamente à descrição de posições, movimentos e transformações geométricas. Contudo, os alunos foram capazes de, autónoma e naturalmente, transpor para o seu discurso oral e, nalguns casos, também escrito, expressões e vocabulário presente nas narrativas, é exemplo disso uma expressão que foi muito utilizada: "… a sombra levantará <u>o braço não correspondente</u>" (*O Homem sem Sombra*, p. 21).

Durante o trabalho desenvolvido ao longo desta primeira sequência de tarefas apresentadas, foi também possível observar que os alunos, oralmente, mobilizaram muita linguagem que se prende com a orientação espacial e transformações geométricas. São exemplos: "estar paralelo em relação a…"; "estar frente a frente"; " a sombra produz um efeito semelhante ao de uma reflexão"; "um eixo de reflexão é como uma linha imaginária"; "um plano para projectar sombra", entre outras.

Daqui parece poder concluir-se que as histórias podem, com maior facilidade, ajudar os alunos a utilizar uma linguagem mais estruturada e clara, relativamente a conceitos ainda difíceis de utilizar, através de uma apropriação da estrutura sintáctica da narrativa e da interacção gerada em sala de aula.

Durante a discussão colectiva, os alunos, para explicitarem o seu pensamento, passaram a utilizar representações que haviam sido utilizadas por mim e pelo professor Lucas, para dar resposta às questões colocadas pelos mesmos. Parece haver nos alunos a necessidade de contactarem com modelos de representação de pensamento, para a partir daí, conseguirem construir as suas próprias representações, mesmo que, muitas vezes, utilizem apenas imitações. Partindo desta observação, parece possível afirmar-se que estes alunos, haviam, até aqui, sido pouco estimulados e tido pouco contacto com representações próprias que envolvam esquemas, diagramas, tabelas, entre outros, e que ajudam a expressar o pensamento e a concretizar ideias matemáticas.

Todas as ideias surgidas tiveram que ser muito sublinhadas, repegando nas ideias lançadas e pedindo, constantemente, aos alunos para irem enunciando as imagens mentais que iam criando, à medida que a discussão avançava e novas ideias surgiam.

Com este conjunto de tarefas os alunos parecem ter desenvolvido ideias muito concretas da relação de um corpo com o espaço, fundamentalmente no que diz respeito à posição, relativamente a si e ao outro, às transformações geométricas que os objectos podem sofrer na presença de luz ou de um eixo reflector, às condições que proporcionam o aparecimento de sombras, entre outros.

5.3. 2ª Sequência – Reflexão e Eixos de simetria de figuras

5.3.1. Tarefa

> — Eu vi que estava alguém aqui a trabalhar — insistiu o rapaz.
>
> — Não era eu — disse o alfaiate. — Era o outro. Quando me deito e adormeço, o outro acorda e põe-se a viver a vida dele. Também é alfaiate e também mora aqui, e é tal e qual eu. Ora vê.
>
> O alfaiate estava a apontar para o grande espelho das provas, que tinha uma bela moldura de madeira trabalhada. Lá estava, de facto, outro alfaiate igualzinho a ele.
>
> in *O Rapaz do Espelho*, p. 9

Os alunos iniciaram o trabalho desta sequência fazendo o resumo oral do conto *O Rapaz do Espelho*, no qual são baseadas todas as questões que compõem a tarefa.

Ao resumirem a história os alunos puderam perceber que toda a acção, baseada em duas vidas paralelas, criara corpo graças à existência de um espelho em casa do alfaiate.

A existência deste espelho levou os alunos a considerarem a acção da história uma espécie de reflexão, dado haver um alfaiate real e um outro que reproduzia a vida do primeiro, no grande espelho das provas.

> Joana – O alfaiate que aparecia no espelho era assim tipo uma sombra ou uma alma do alfaiate da história.

Ricardo – O alfaiate do Lado de Lá era como uma reflexão que fazia a mesma coisa.

Este trabalho de interpretação possibilitou aos alunos aplicarem em novas situações os tópicos e conceitos relacionados com a reflexão, trabalhados na sequência anterior, de maneira informal e articulando linguagem natural com linguagem matemática.

Joana – O espelho era o eixo, era o que dividia o Lado de Cá e o Lado de Lá.

Ricardo – O Lado de Cá representa a realidade e o Lado de Lá representa o mundo da fantasia.

Seguidamente, passou-se à apresentação das primeiras três questões que compõem a tarefa e, mais uma vez, se apelou ao trabalho em pequeno grupo, com intuito de gerar interacção e partilha de ideias, tanto orais como escritas.

Com a apresentação das questões, começaram a surgir outras relacionadas e, mais uma vez, se deu início a um processo de interacção, discutindo oralmente os tópicos presentes nesta tarefa: eixos de simetria e classificação de figuras. Ao longo desta discussão foram surgindo intervenções como:

António – Aqui estamos a falar de simetria, não estamos a falar de reflexão.

Ricardo – Classificar uma figura é descrevê-la.

A intervenção do António deixa perceber que, ao longo deste percurso, o aluno conseguiu ultrapassar a dificuldade que evidenciou, anteriormente, em compreender a diferença entre eixo de reflexão e eixo de simetria de uma figura.

Na resolução das primeiras três questões desta tarefa, os alunos interagiram bastante dentro do pequeno grupo e essa interacção foi registada nas folhas de trabalho individuais, fundamentalmente, a nível da forma das molduras apresentadas.

1ª questão - Que forma poderá ter a moldura do espelho do alfaiate? Representa-a.

Figura 42 – Afonso: Moldura

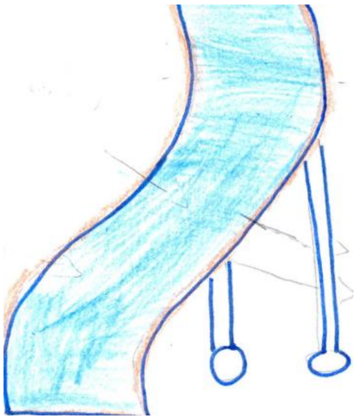


Figura 43 - Joana: Moldura

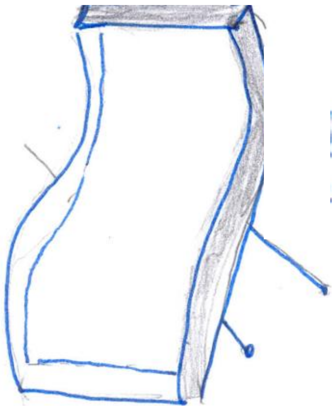


Figura 44 – António: Moldura

Durante esta fase foi notório um grande progresso em termos de autonomia dos grupos de trabalho. Os alunos solicitaram menos a presença dos professores e trabalharam discutindo ideias. Esta situação pode ter acontecido pelo facto de estas primeiras questões apelarem à representação através do desenho, o tipo de representação em que já foi identificada uma evolução a partir da última tarefa da primeira sequência, e à classificação de figuras, tópico trabalhado rotineiramente em sala de aula, desde o ano anterior.

Após o trabalho de pequeno grupo, o Gr passou a apresentar as respostas dadas, representando as mesmas no quadro da sala. Começou por apresentar aquele que tinha imaginado ser o espelho do alfaiate, o Afonso (fig. 42).

Após a representação do mesmo, os alunos identificaram, de imediato, que o Afonso tinha desenhado não só a moldura, como o espelho. Na resposta a esta questão, o contexto da história parece ter influenciado ou até condicionado a resposta pretendida, pois alguns dos grupos de trabalho ignoraram a pergunta e, tendo o espelho uma função fundamental na narrativa, apenas representam o espelho. Tendo os restantes tido necessidade de representar moldura e espelho. Outra situação que pode ter condicionado a resposta é o facto de estes alunos estarem muito habituados a trabalhar os conceitos matemáticos em contextos reais e, a grande maioria, nunca ter visto uma moldura sem espelho.

As formas das molduras, surgidas nos diferentes grupos, eram muito variadas e, por isso, decidimos fazer a classificação de todas as que fossem diferentes. Dada a variedade, este trabalho de representação de molduras e respectiva classificação foi um trabalho muito rico do ponto de vista da evolução do processo de classificação e da utilização de uma linguagem formal.

Durante o processo de classificação, os alunos lançaram ideias que tiveram de ser desmontadas, com a participação de todos, para criar conceitos claros e uma linguagem formal.

Vejamos alguns exemplos:

Carminho – A figura é recta.

Paula – A figura é recta? O que quer isso dizer?

Joana – A figura é formada por segmentos de recta.

Margarida – A moldura do grupo do Afonso é curva.

Paula – A moldura é curva? Explica melhor o que pretendes dizer.

Carla – As colunas são curvas e as linhas são rectas.

Paula – Carla, vem aqui e utiliza a moldura para explicares a tua ideia.

(depois da aluna mostrar o que pretendia)

Afonso – Paula, ela quer dizer que a figura tem "lados" curvos e lados rectos.

Paula – Quem consegue dizer ainda de maneira mais correcta?

Joana – A nossa moldura é uma figura no plano, formada por dois segmentos de recta e duas linhas curvas.

Perante estes diálogos pude observar que a interacção foi fulcral para passar de ideias geométricas pouco consistentes e a utilização de uma linguagem natural incorrecta, para ideias mais consistentes e uma linguagem mais formal e correcta.

2ª questão - Classifica a figura que representaste.

Os alunos classificaram as suas molduras tendo em conta eixos de simetria; posição das molduras (vertical e horizontal); forma; tipo de linhas (curvas e rectas); número de lados, vértices e ângulos; relação entre os segmentos de recta que compõem uma figura e paralelismo dos lados.

Ao classificar a moldura do Afonso (fig. 45), relativamente ao número de vértices, surgiu o mal entendido, muito comum, de considerar vértice, em figuras no plano, o ponto de encontro entre duas linhas consecutivas, não tendo em consideração que para formar vértice, esse encontro terá que ser entre dois segmentos de recta.

António – A moldura do Afonso tem 4 vértices.

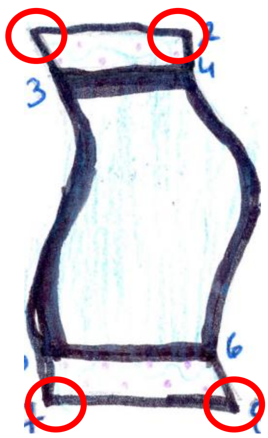


Figura 45 – Afonso: Classificação da moldura

Paula – Sim?! O que é um vértice para ti?

António – São as pontas de duas linhas que se tocam.

Paula – Quando quaisquer duas linhas se cruzam?

Gt – Não!

António – Sim.

Joaquim – Para fazer um ângulo, têm de ser duas linhas rectas.

Ricardo – Pois, é isso mesmo!

Paula – E para formar um vértice?

Joaquim – É a mesma coisa.

Paula – Como?

Joaquim – Se tivermos duas linhas curvas que se encontram ou uma linha curva e uma linha recta, como na moldura do Afonso, não se forma um vértice.

Paula – Então…

António – Sim, só se tivermos duas linhas rectas que se encontram é que pode formar vértice.

Ainda durante a classificação da mesma moldura, surgiu um outro comentário que tinha a ver com o tipo de figura.

Ricardo – A tua moldura não é uma figura geométrica.

Paula – Por que fazes essa afirmação?

Ricardo – Porque ela não é formada só por linhas rectas e, por isso, não é uma figura geométrica.

Paula – Todos concordam com o Ricardo?

Após um coro de discordância, tentei que os alunos chegassem a uma ideia mais firme e fui colocando algumas questões, na tentativa de os levar a descrever a ideia de figura geométrica. Não havendo respostas, tentei levá-los à ideia de polígonos e não polígonos, ao que o Ricardo comenta:

> Ricardo – Esse nome é novo!
>
> Paula – Ok, então diz-me que tipos de figuras conhecem.
>
> Ricardo – Figuras no plano e figuras 3D.

Perante esta resposta comecei a traçar o seguinte esquema:

Figuras no plano	Figuras 3D

> Paula – Dá-me alguns exemplos dos dois tipos de figuras que vocês conhecem.
>
> Ricardo – Então, no plano pode ser o quadrado e o rectângulo e 3D, pode ser o cubo e a pirâmide.
>
> Paula – Ok, então diz-me por que as colocas em dois grupos diferentes?
>
> Ricardo – Porque o quadrado e o rectângulo são no plano e o cubo e a pirâmide têm volume.

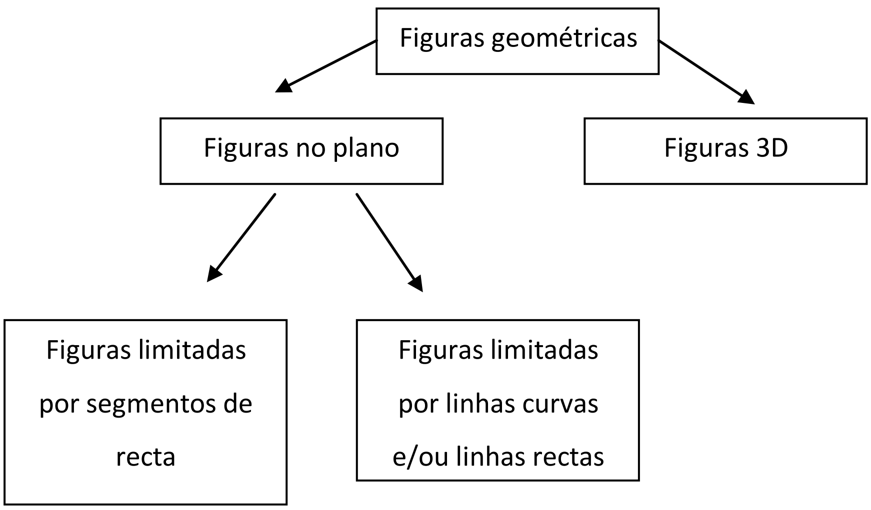
Após este diálogo, achei que estava em condições de perguntar onde deveríamos colocar a moldura que estávamos a classificar.

> Paula – Agora, diz-me onde devemos colocar a vossa moldura?
>
> Ricardo – É uma figura no plano.
>
> Paula – Certo, então vou colocá-la na caixa das figuras planas. Agora repara… todas as fronteiras de figuras no plano são formadas por 2 linhas curvas e 2 segmentos de recta?
>
> Ricardo – Não! Há figuras que só são formadas por segmentos de recta e essas são as figuras geométricas.
>
> Paula – Então, não são todas figuras no plano?
>
> Ricardo – Ah, pois! São figuras.
>
> Afonso – Eu acho que são todas figuras geométricas e também no plano. Se calhar temos é de dividir as figuras no plano, em partes.
>
> Carminho – Pois, senão o círculo também não era figura geométrica.
>
> Paula – Vamos, então, tentar.

Com a achega do Afonso, as características já enunciadas e o comentário da Carminho, fomos completando o esquema, na tentativa de chegar ao conceito de polígono e não polígono.

Paula – Vamos seguir a ideia do Afonso e dividir o grupo das figuras no plano em quantas partes?

Afonso – Eu acho que são duas. As figuras que só têm linhas rectas e as que têm linhas rectas e linhas curvas.



Paula – Assim? Todos concordam com esquema? Vai ao encontro do que o Afonso foi dizendo?

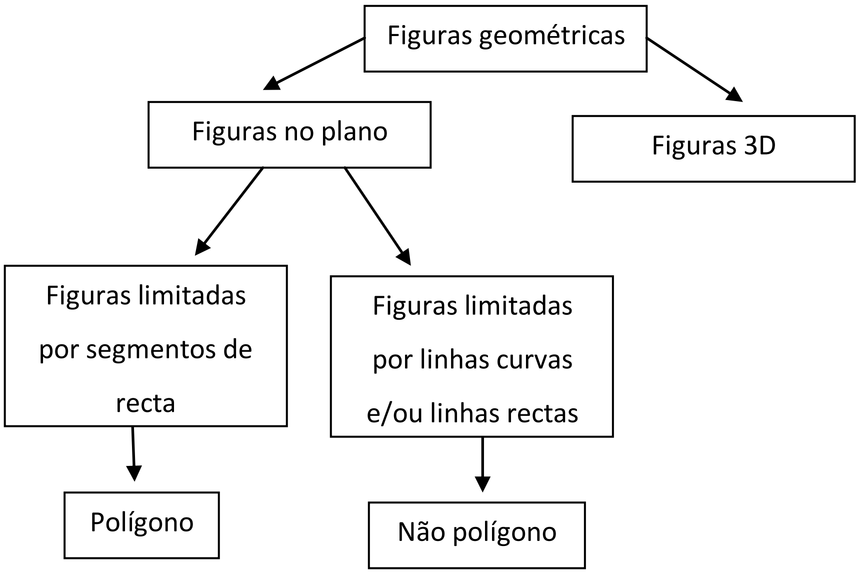
Gt – Sim.

Ricardo – Então aqueles nomes que tu disseste deve ter a ver com este dois grupos.

Paula – Sim, polígonos e não polígonos.

Vamos agora completar o esquema. Quem me ajuda?

Ricardo – Então, os polígonos são as figuras só formadas por segmentos de recta e os não polígonos as outras.



Afonso – Paula eu acho que no grupo dos não polígonos também podem estar as figuras que só são formadas por linhas curvas, como o círculo.

Paula – Boa, Afonso! Isso mesmo.

Desta forma, chegámos à noção de polígono e não polígono e como os alunos não questionaram se haveria a mesma relação para as figuras 3D, ficámos por aqui. Parece, de facto, que os alunos estavam apenas centrados no tópico que estávamos a discutir e como toda esta discussão visou a identificação de novos conceitos, ainda não muito claros, não houve mais questões. Havia, agora, que integrar os novos conceitos e saber aplicá-los à figura que tentavam classificar.

Contudo, mais tarde, ao classificar a moldura do António (fig. 44), dado o aluno ter feito uma representação 3D no plano, a questão relativa às figuras a três dimensões surgiu e completámos, então, o esquema estabelecendo a relação entre polígono e poliedro e não polígono e não poliedro.

António – A minha moldura também têm linhas curvas e linhas rectas mas não é uma figura no plano.

Paula – É verdade! Então, para completar o esquema anterior, como fazemos?

António – Ela é a 3D, por isso tem de ficar no outro grupo.

Paula – E como vamos fazer?

António – Também temos de dividir, acho eu!

Afonso – Eu concordo.

Paula – Porquê?

Afonso – Porque nas figuras 3D, também, há figuras só limitadas por linhas rectas e outras formadas por linhas rectas e curvas e há a esfera.

António – Pois, por isso, temos de dividir também em dois grupos mas não sabemos os nomes.

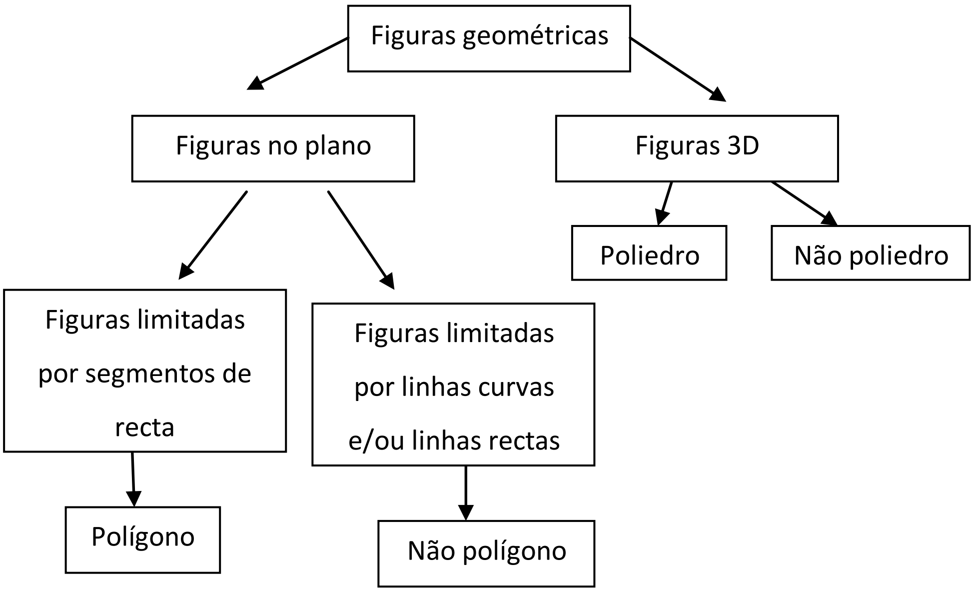
Paula – Alguém pode ajudar o António com os nomes?

Não obtendo resposta para a minha questão, e parecendo o António querer destacar a esfera por não encontrar na mesma a ideia de figura limitada por linhas curvas, dado seu volume, escrevi a palavra poliedro e perguntei se me sabiam dizer o que escrever do outro lado. Aí a resposta não se fez esperar:

Afonso – Deve ser não poliedro, por que é como nos não polígonos?

Paula – O que quer isso dizer?

Afonso – Então, a moldura do António tem linhas curvas e linhas rectas.



Depois de concluído o esquema, voltei à ideia lançada pelo António, assinalada no diálogo: “e há a esfera”.

> Paula – E a esfera onde a colocamos, António?
>
> António – Pois, assim, parece fácil, acho que vai para o grupo dos não poliedros porque o círculo ficou no dos não polígonos.

Perante esta resposta, o aluno parece ter sido capaz de concluir que, embora, a esfera seja uma figura a três dimensões, quando representada no plano, é limitada por linhas curvas.

O aluno, através da interacção e da capacidade de observação e relacionação, foi capaz de fazer uma generalização, partindo da posição do círculo para a da esfera.

Passámos, em seguida, à análise da classificação da moldura da Joana (fig.46).

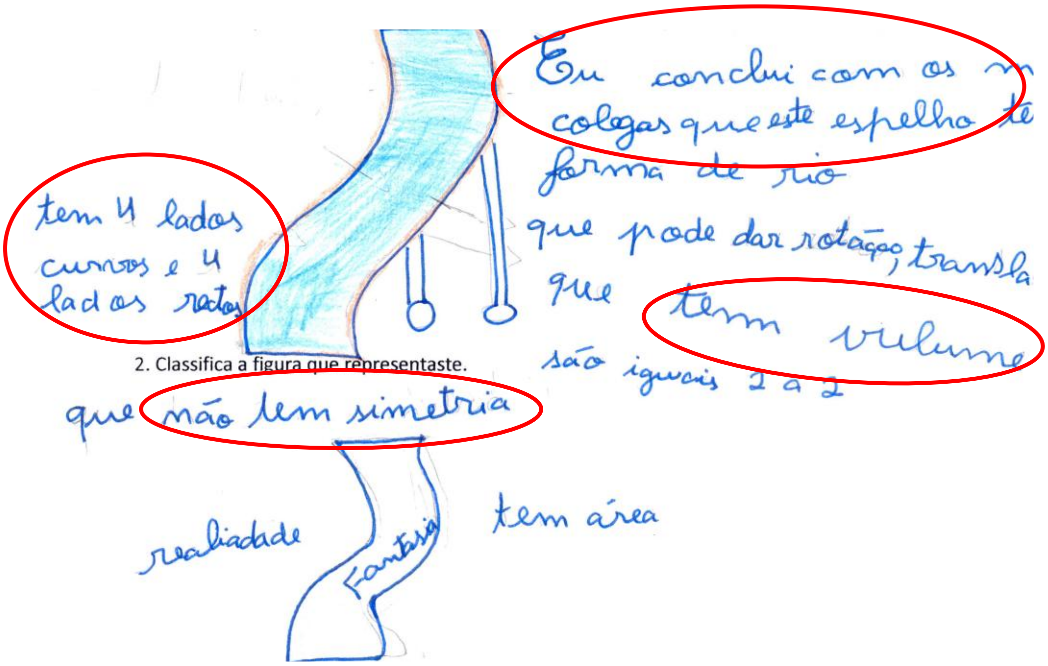


Figura 46 – Joana: Classificação da moldura

A classificação individual da Joana revela que houve interacção no grupo de trabalho, quando a mesma refere “Eu conclui com os meus colegas…; mostra que ainda não percebeu o conceito de lado de uma figura ao afirmar que a figura “tem 4 lados curvos”; deixa compreender que já entendeu o conceito de eixo de simetria de figuras, quando refere que a sua moldura “ não tem simetria”, e o de representação no plano, de figuras com três dimensões, ao afirmar que a sua moldura tem volume.

Depois da análise do trabalho individual da Joana, foi sugerido que se completasse a classificação da figura, identificando mais algumas propriedades não referidas.

Durante a análise, em grande grupo, desta moldura surgiu, mais uma vez, o erro surgido na classificação da moldura do Afonso, de identificar vértices, ângulos e classificar a relação entre as linhas, que compõem a figura, como oblíquas. Porém, relembrada a situação discutida na moldura do Afonso (fig.45), os alunos facilmente reformularam a sua ideia, afirmando que essa classificação só seria possível, caso as duas linhas que se intersectam fossem rectas.

> Joana – A linha horizontal com a linha vertical são oblíquas.
>
> PL– Sim?! É um encontro de que dois tipos de linhas?
>
> Ricardo – Uma recta e uma curva, por isso nunca serão oblíquas.

Da interacção entre os alunos da turma e depois de discutidos os erros de classificação, surgiram as seguintes ideias relativamente às representações no plano:

- ✓ Não tem eixos de simetria;
- ✓ Não forma ângulos;
- ✓ Não tem vértices;
- ✓ Tem dois segmentos de recta paralelos;
- ✓ Tem duas linhas curvas;
- ✓ É um não poliedro;
- ✓ É uma figura 3D representada no plano.

3ª questão - O que acontecerá à figura que representaste se ela for reflectida através de um espelho?

Na resposta a esta questão todos os alunos do Gr mostraram reconhecer muito bem os efeitos de uma reflexão de eixo vertical sobre um objecto.

O António, o Ricardo e a Joana fazem uma representação correcta da reflexão da moldura. Embora esta última, como ela própria comenta (fig. 49), reconheça que a reflexão não está perfeita. Ao fazer este comentário, a aluna mostra saber que uma reflexão deve manter a forma e área do objecto, no seu transformado.

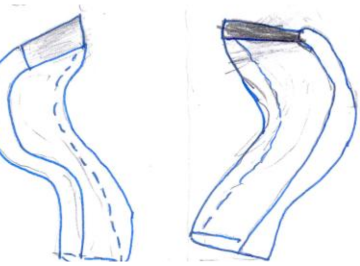


Figura 47 – António: Reflexão da moldura

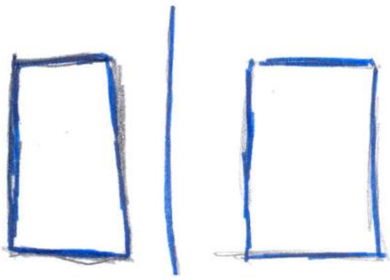


Figura 48 - Ricardo: Reflexão da moldura

Figura 49 – Joana: Reflexão da moldura

O Afonso, embora, não tenha à partida representado correctamente a reflexão da sua moldura mostra, em seguida, capacidade de se auto corrigir e fazer uma representação correcta, como pode ser observado na sua folha de trabalho (figs. 50 e 51).

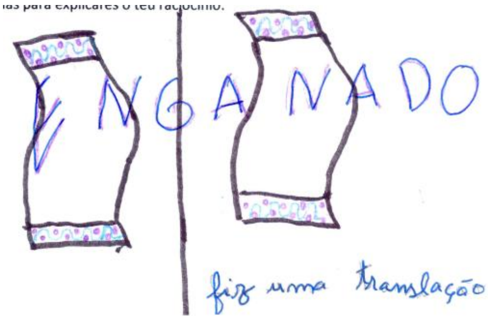


Figura 50 – Afonso I: Reflexão da moldura

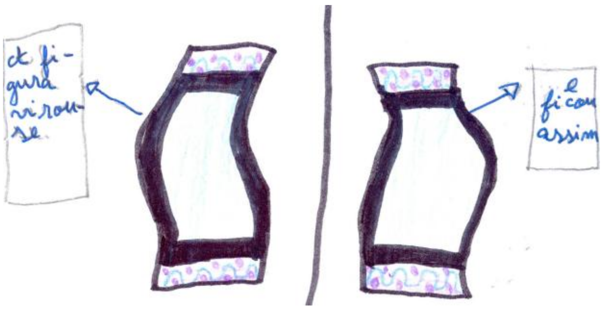


Figura 51 – Afonso II: Reflexão da moldura

4ª questão - Representa agora a figura que representa o espelho do alfaiate noutra posição. Que movimentos terás de efectuar para ela passar da posição inicial para a posição em que a representaste agora? Representa esses movimentos através de desenhos.

Da questão quatro à questão nove, as respostas foram feitas individualmente, sem qualquer tipo de discussão inicial. Ao longo do trabalho, na resposta à questão quatro, houve necessidade de ir esclarecendo os alunos relativamente à segunda parte da questão. Houve dificuldades em descrever e representar os movimentos a efectuar para, passar da posição inicial da figura, à posição pretendida pelos alunos.

Observando, por exemplo, a resposta do Ricardo posso concluir que este consegue uma boa representação da rotação de 180^0 mas não representa correctamente as de 90^0 e 270^0, respectivamente. Esta situação poderá ter decorrido do facto de os alunos já terem feito um trabalho mais incisivo e constante na reflexão, e deste ter conseguido relacionar a rotação de 180^0 (meia-volta) com a reflexão de eixo horizontal e, por isso, ser fácil ao aluno visualizá-la, não acontecendo o mesmo com as restantes rotações. Contudo, na descrição dos movimentos há correcção descritiva.

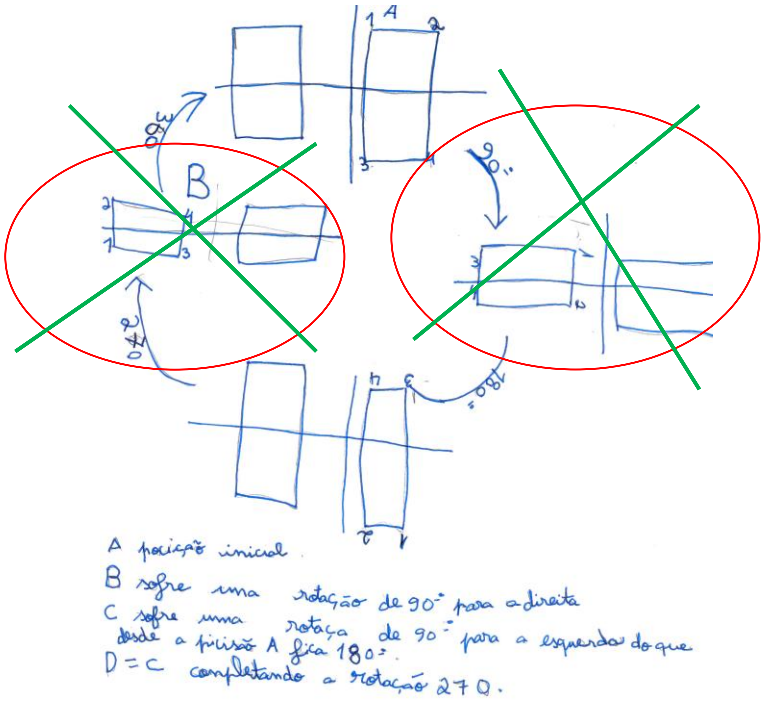


Figura 52 – Ricardo: Transformações geométricas

O Afonso, por seu turno, conseguiu representar, sem, problemas uma rotação de 90^0 e descrever, com correcção, o movimento efectuado.

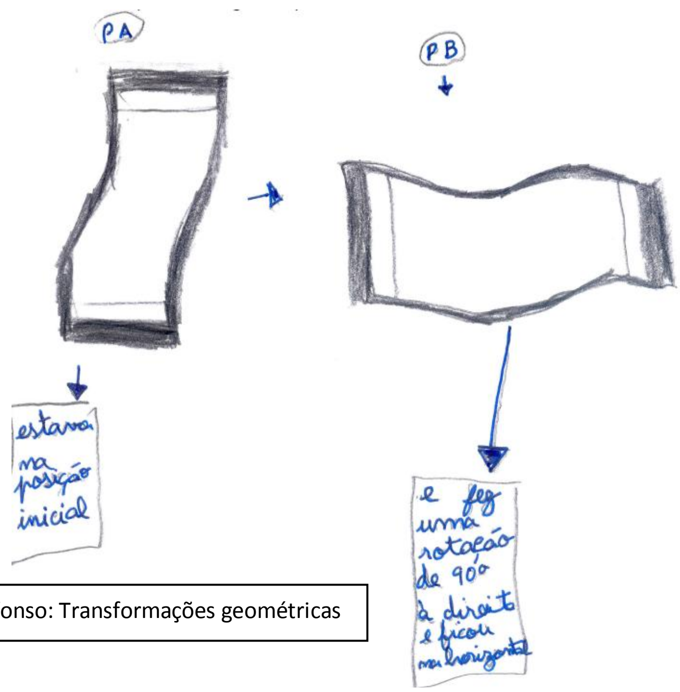


Figura 53 - Afonso: Transformações geométricas

A Joana optou por representar a moldura do espelho do alfaiate em diferentes posições, indicando as transformações geométricas ocorridas em cada uma das situações. Parece ter havido uma necessidade de testar o seu conhecimento, em relação a todas as transformações geométricas discutidas até ao momento.

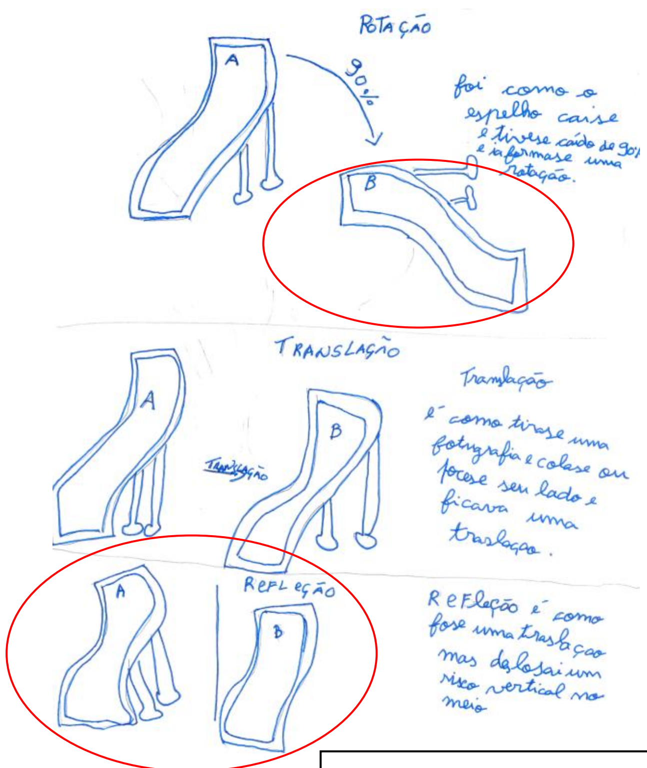


Figura 54 - Joana: Transformações geométricas

A aluna faz uma representação correcta da translação mas não conseguiu representar correctamente a rotação e a reflexão. Na primeira, inverte a posição dos pés da moldura, após o movimento, e na segunda apresenta a reflexão como uma translação, esquecendo-se de representar os pés da mesma. Nos comentários escritos, comete os mesmos erros.

O António, optou por uma representação de uma reflexão de eixo horizontal que concretizou com sucesso.

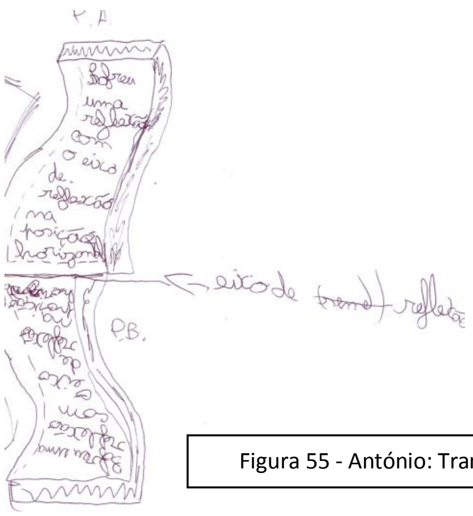


Figura 55 - António: Transformações geométricas

Após a análise das respostas individuais, parece possível concluir que os alunos foram capazes de descrever, utilizando uma linguagem natural, os movimentos que conseguiram representar mas, também, que os efeitos de uma reflexão sobre o objecto ainda não são claros para todos, sendo, por vezes, a reflexão representada como uma translação.

5ª questão - Desenha a moldura do espelho do alfaiate e identifica nela todos os eixos de simetria. Quantos são?

Na resposta a esta questão, todos os alunos do Gr afirmaram que na moldura do alfaiate não existe qualquer tipo de eixo de simetria, dada a sua forma irregular. É, no entanto, de salientar que existem alunos que já conseguem justificar as suas afirmações, como o Afonso, enquanto, outros, apenas fazem afirmações.

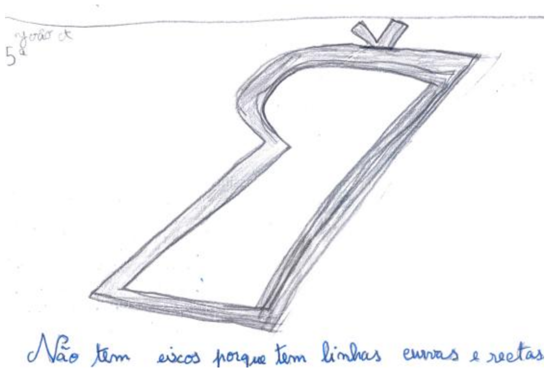


Figura 56 – Afonso: Eixos de simetria na moldura

O António representa a moldura reflectida e não apresenta qualquer tipo de justificação para a não existência de eixos de simetria.

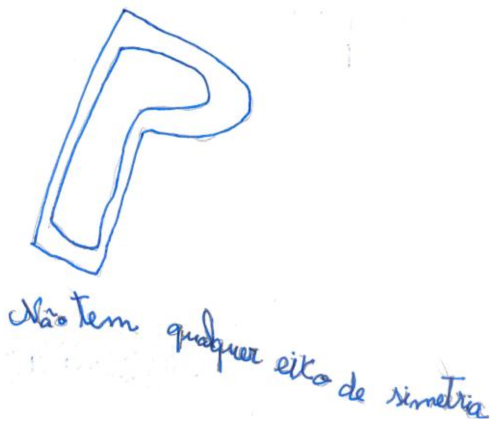


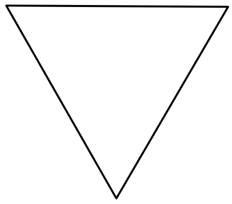
Figura 57 - António: Eixos de simetria na moldura

Perante esta situação, tentámos que na discussão geral surgisse uma ideia colectiva que transmitisse uma ideia clara da não existência de qualquer eixo. Dessa discussão surgiu a ideia da Carminho:

> A moldura do alfaiate não tem qualquer eixo de simetria porque um dos "lados" tem uma parte curva que não existe em qualquer outro, em qualquer posição.

Na afirmação feita, a aluna mostra ter percebido que um eixo de simetria divide uma figura em parte iguais, tornando-a invariante.

6 ª questão - Identifica os eixos de simetria neste triângulo. Quantos são?



Todos alunos realizaram com sucesso esta tarefa, representando no triângulo os três eixos de simetria.

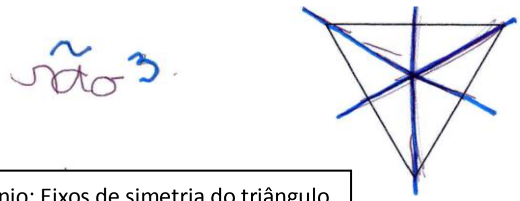


Figura 58 – António: Eixos de simetria do triângulo

Todavia, na discussão colectiva, começámos por classificar o triângulo apresentado na questão, dado sentirmos que esta seria uma tarefa mais desafiante do que aquela que fora colocada por escrito e, de facto, assim aconteceu.

PL – Quem me classifica esta figura?

Afonso - É um triângulo, porque tem três lados iguais e é um trilátero.

PL – Como são os seus lados?

António – Todos iguais?

PL – Consegues dizer isso de outra maneira?

António – Têm todos o mesmo comprimento.

PL - Então, é um triângulo especial.

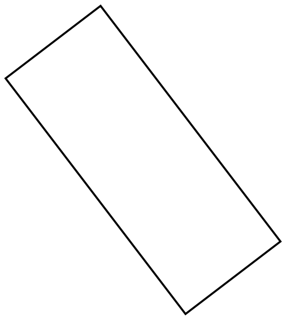
Afonso – É um polígono regular.

PL – Pois, é verdade. Mas dado os seus lados terem todos a mesma medida, de que triângulo estamos a falar?

Gt – Triângulo equilátero.

A obtenção desta resposta é, mais uma vez conseguida, a partir da interacção gerada entre os alunos do Gr, que começaram por responder, o professor e os alunos do Gt. Foi necessário levar as crianças a estabelecer relações entre diferentes características, como o número de lados e o comprimento dos mesmos, para que conseguissem perceber o tipo de resposta pretendida. Quanto à identificação do número de eixos de simetria, entendidos como o número de linhas que pode dividir a figura ao meio, tornando-a invariante, não houve qualquer tipo de dúvida. Todos os alunos corresponderam positivamente à questão colocada, assinalando sem erros os três eixos de simetria.

7ª questão - Que figura está aqui representada? Classifica-a.



Na resposta a esta questão, todos os alunos identificaram a figura pelo seu nome e todos a classificaram tendo em atenção, fundamentalmente, propriedades e características discutidas ao longo do percurso até aqui efectuado. Observemos as respostas:

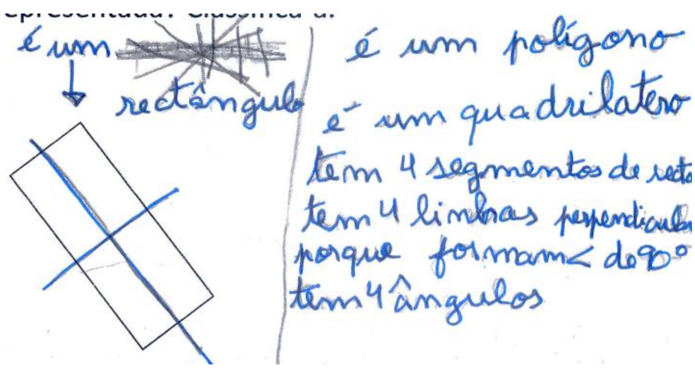


Figura 59 – Afonso: Classificação do rectângulo

O Afonso consegue identificar propriedades como o tipo e o grupo de figuras a que pertence o rectângulo, quando afirma: “é um polígono” e “é um quadrilátero”, e também identifica características que se relacionam directamente com a forma da figura, quando refere o tipo de ângulos, a perpendicularidade das linhas e o número de segmentos de recta que a compõem.

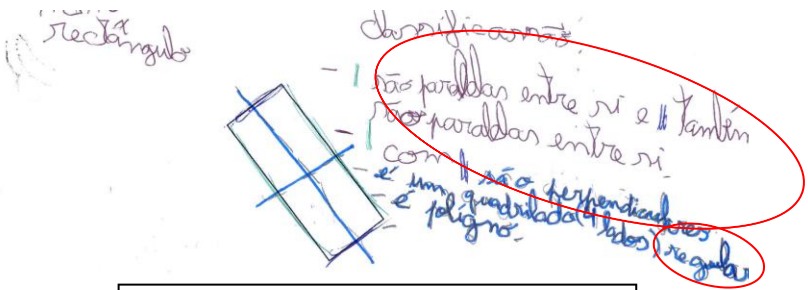


Figura 60 - António: Classificação do rectângulo

A António, em termos globais, também refere propriedades e características da figura mas parece não ter ainda bem definido o conceito de polígono regular, ao classificar o rectângulo como tal. Outra dificuldade prende-se com o facto de ao estruturar a sua resposta não deixar claro o que pretende dizer quando escreve “são paralelas entre si e também são paralelas entre si”, depreendendo-se, no entanto, que se refere aos dois pares de linhas paralelas que compõem o rectângulo. Não deixa também perceber o que pretende afirmar, quando refere “são perpendiculares”. Todas estas limitações parecem ser devidas, não ao desconhecimento das ideias geométricas que identifica, mas à dificuldade em estruturar correctamente as frases.

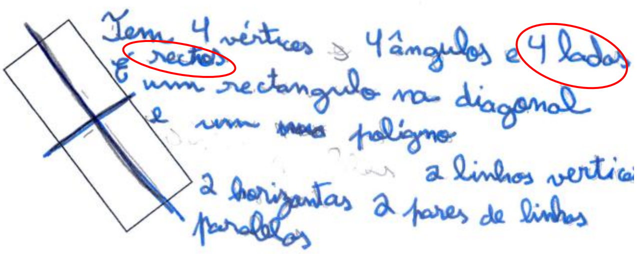


Figura 61 - Ricardo: Classificação do rectângulo

Na classificação do Ricardo é encontrada uma classificação feita com base em propriedades e características, à semelhança das anteriores, e é identificada a mesma estrutura débil em termos de descrição das ideias geométricas. Destaca-se nesta classificação a ideia de “4 lados rectos”, ou seja, o aluno parece ainda não ter compreendido que para falar em lados, só pode referir a existência de segmentos de recta. Bastando que referisse, apenas, que o rectângulo é formado por quatro lados.

De uma maneira geral, todos os alunos classificaram a figura quanto ao número de vértices, ângulos e lados; ao paralelismo e perpendicularidade dos lados; ao tipo de figura (polígono) e ao grupo de figuras (quadrilátero).

Resultando da discussão os seguintes diálogos:

António – O rectângulo tem dois grupos de lados paralelos.

Paula – Então, os seus lados são paralelos em grupos de quantos?

António – Dois a dois.

Joana – Os lados são paralelos, dois a dois.

[…]

António - … as larguras e os comprimentos do rectângulo têm uma relação de perpendiculares.

PL – Tenta dizer de outra forma. No rectângulo…

António – … existem dois pares de linhas perpendiculares.

A utilização de uma linguagem correcta, foi uma preocupação constante ao longo de todo o percurso. Pretendeu-se sempre que os alunos fossem capazes de construir imagens mentais poderosas que conseguissem traduzir em linguagem natural. A linguagem foi sendo melhorada, a partir das análises e discussões em grande grupo, com vista à formalização.

8ª questão - Assinala nela os eixos de simetria?

Os quatro alunos do Gr, como pode ser observado nas suas produções, (figuras 59; 60; 61 e 62) identificaram os dois eixos de simetria existentes no rectângulo e foram capazes de os representar, com relativa precisão, na figura.

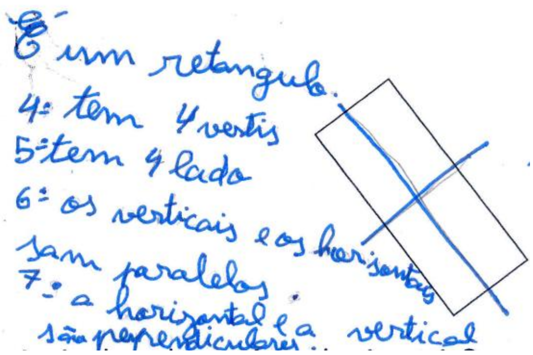


Figura 62 – Joana: Classificação do rectângulo

Na produção escrita da Joana, podemos perceber a resposta às questões sete e oito e, na sétima, identificar algumas das características enumeradas anteriormente.

Seguidamente, passou-se à análise da questão nove.

9ª questão - Consegues explicar por que motivo o triângulo anterior apresenta maior número de eixos de simetria que esta última figura?

Na resposta escrita, três dos alunos, do Gr, identificaram a característica "ter lados iguais" para justificar o maior número de eixos de simetria no triângulo mas não conseguiram chegar à justificação pedida.

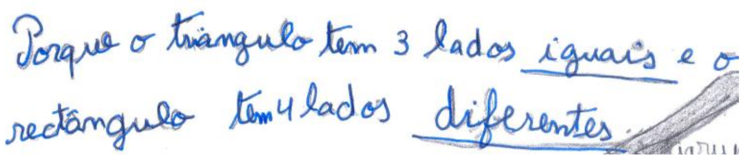


Figura 63 – Joana: Resposta à 9ª questão_2S

Nesta resposta, a aluna ao escrever que "o rectângulo tem 4 lados diferentes" não quererá, provavelmente, dizer que cada um dos lados tem uma medida diferente, pois essa questão foi discutida durante a classificação da figura. Penso que o que pretende dizer, é que o facto de a figura não ter os lados todos com a mesma medida faz com que tenha menos eixos de simetria. Mais uma vez, se pode constatar a dificuldade que existe nos alunos em expressar as suas ideias por escrito.

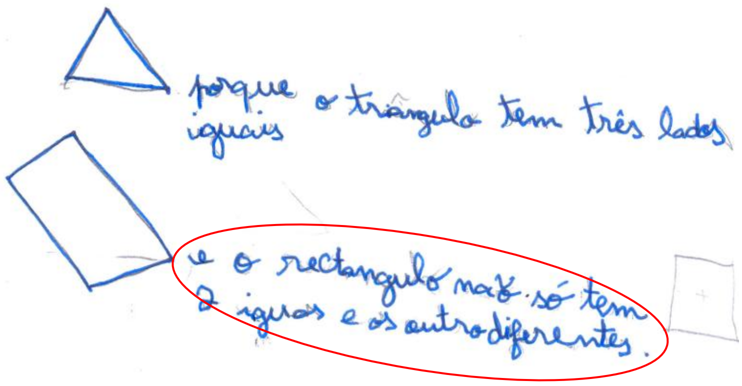


Figura 64 - Ricardo: Resposta à 9ª questão_2S

O Ricardo acaba por conseguir transmitir um pouco melhor (fig. 64) o que a Joana pretendeu transmitir, relativamente à medida dos lados do rectângulo, ao afirmar " e o rectângulo não, só tem 2 iguais e os outros diferentes". Porém, também, não consegue explicar que o rectângulo tem os lados iguais, dois a dois.

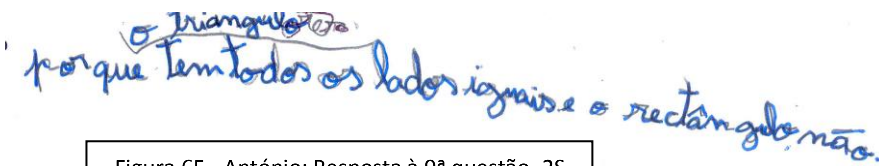


Figura 65 - António: Resposta à 9ª questão_2S

O António, também, parece considerar a igualdade da medida dos lados determinante para a existência de maior número de eixos de simetria no triângulo mas não dá qualquer tipo de justificação.

Não tendo conseguido obter justificação, nas respostas individuais, para a afirmação apresentada, iniciou-se a discussão colectiva, tentando obter essa resposta. Para isso, os alunos começaram por representar as duas figuras no quadro, lado a lado, traçar os seus eixos de simetria, para podermos, depois iniciar a análise das mesmas. Em seguida, os alunos foram lançando ideias que foram sendo registadas, para posterior discussão.

- ✓ Porque no triângulo se podem fazer eixos diagonais;
- ✓ Porque o triângulo tem os três lados iguais e o rectângulo não tem. Tem dois lados iguais e dois diferentes, agrupados dois a dois;
- ✓ O triângulo tem três eixos porque tem três ângulos, o rectângulo tem dois que são a metade do número dos ângulos;
- ✓ Porque o triângulo tem três lados e é um trilátero e o rectângulo tem quatro lados e é um quadrilátero.

A análise das ideias lançadas pelas crianças começa com uma pergunta colocada pelo professor Lucas. Observe-se os diálogos daí resultantes:

> PL – Joana, para ti, quais são as afirmações mais correctas?
>
> Joana – Eu acho que é a segunda, "Porque o triângulo tem os três lados iguais e o rectângulo não tem. Tem dois lados iguais e dois diferentes, agrupados dois a dois".
>
> PL – Porquê?
>
> Carminho – Porque é a única que fala em lados iguais e isso aqui é importante.
>
> Paula – Ok, então, com base no que têm estado a dizer, vejam se conseguem construir uma conjectura.
>
> PL – Será que existe alguma relação entre os eixos de simetria e o número de lados de uma figura?

Perante este desafio mais um conjunto de ideias surgiu. Ideias que, relacionadas, se desenvolveram, dando origem à resposta pretendida.

> António – Quanto menor o número de lados, mais eixos de simetria tem.
>
> Afonso – Achas, não é nada disso!!! Eu acho que é…. Todas as figuras com os lados iguais têm maior número de eixos de simetria do que as figuras com lados diferentes.
>
> Paula – Como é que pensaste nisso, Afonso?
>
> Afonso – Pensei no quadrado em comparação com o rectângulo, porque eu sei que o quadrado também tem os lados todos iguais.

Estes diálogos deixam perceber que os alunos já são capazes de estabelecer relações e, a partir destas, fazer generalizações. Concluem, após mais algumas comparações, que o número de eixos de simetria e o número de lados nas figuras regulares, é igual.

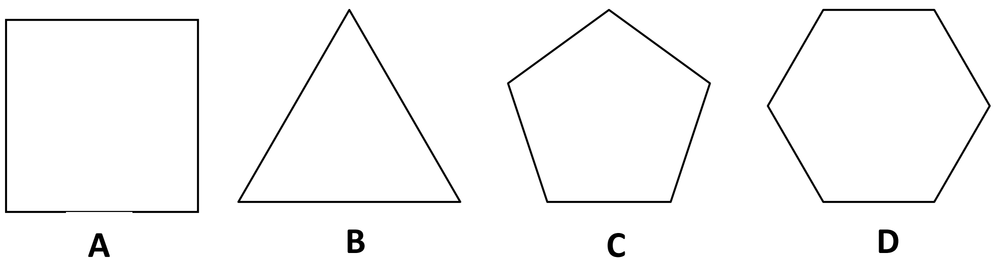
As questões dez, onze e doze foram apresentadas aos alunos pelo professor Lucas e foram resolvidas em pequeno grupo, sem qualquer momento de discussão inicial. Antes do início do trabalho, porém, dados os fracos resultados, habituais, em termos de expressão escrita, foi pedido aos alunos para que tivessem algum cuidado na estruturação das respostas.

Ao longo do trabalho realizado nesta fase, foi notória uma interacção muito positiva dentro do Gr. Interacção essa que foi perceptível, tanto a nível de colaboração dentro do grupo de trabalho, como nas respostas escritas.

Outro aspecto a salientar é a necessidade progressivamente menor que os alunos manifestaram de recorrer aos professores, durante a realização do trabalho individual/ pequeno grupo.

Terminada esta fase do trabalho, o professor Lucas projectou as figuras da questão dez no quadro interactivo para dar início à discussão das três tarefas.

10ª questão - Observa com atenção as figuras apresentadas e marca em cada uma delas todos os eixos de simetria.



Nas respostas escritas do Gr, a Joana, o Afonso e o António foram capazes de marcar correctamente todos os eixos de simetria que compõem as figuras, tendo o Ricardo falhado dois dos eixos no hexágono.

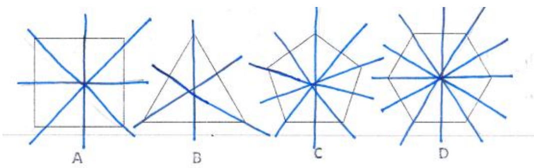


Figura 66 – Joana: Figuras e eixos de simetria

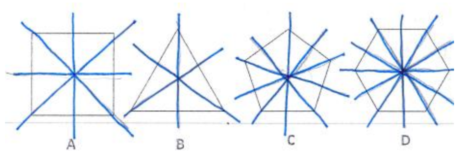


Figura 67 - Afonso: Figuras e eixos de simetria

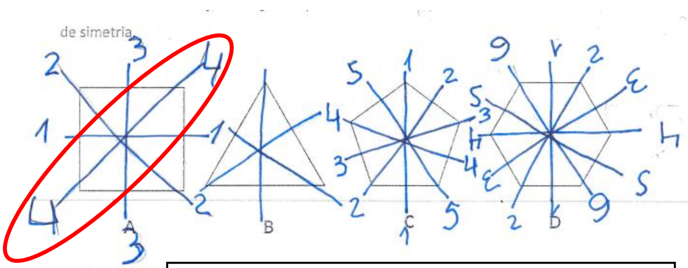


Figura 68 - António: Figuras e eixos de simetria

O António, para além de marcar os eixos de simetria, faz a sua contabilização colocando o mesmo número nas extremidades de cada um dos eixos, como mostrado na figura 68.

O Ricardo, como referido anteriormente, apenas marca quatro eixos de simetria no hexágono (fig. 69), esquecendo-se de marcar dois dos que assentam em pontos médios de dois dos lados. A situação poderá ter a ver com a questão de o aluno já ter marcado todos os eixos que assentavam em vértices e ainda não ter percebido que a questão da marcação dos eixos de simetria está directamente relacionada com o facto de ao dobrar a figura sobre o eixo identificado, esta ficar invariante.

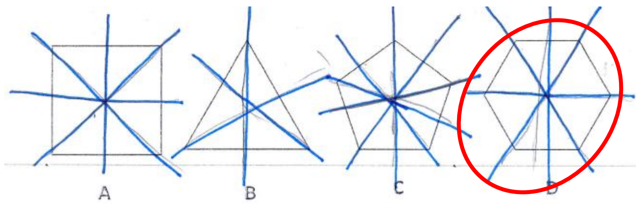


Figura 69 – Ricardo: Figuras e eixos de simetria

11ª questão - Identifica pelo nome cada uma das figuras apresentadas.

Na resposta a esta questão, todos os alunos, à semelhança da Joana, identificaram o nome das figuras apresentadas e escreveram com erro a palavra hexágono, tendo o Ricardo sido o único a justificar os nomes, partindo de uma característica sua conhecida (fig. 71).

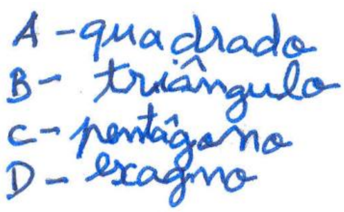


Figura 70 – Joana: Resposta à 11ª questão_2S

O Ricardo, para além de ter escrito os nomes das figuras, tentou explicar como conseguiu identificar cada uma delas.

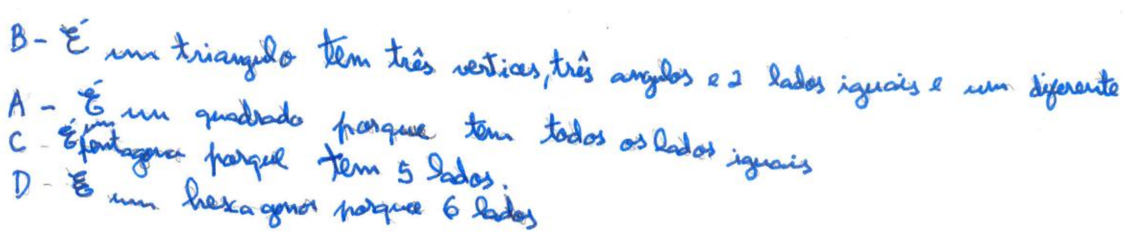
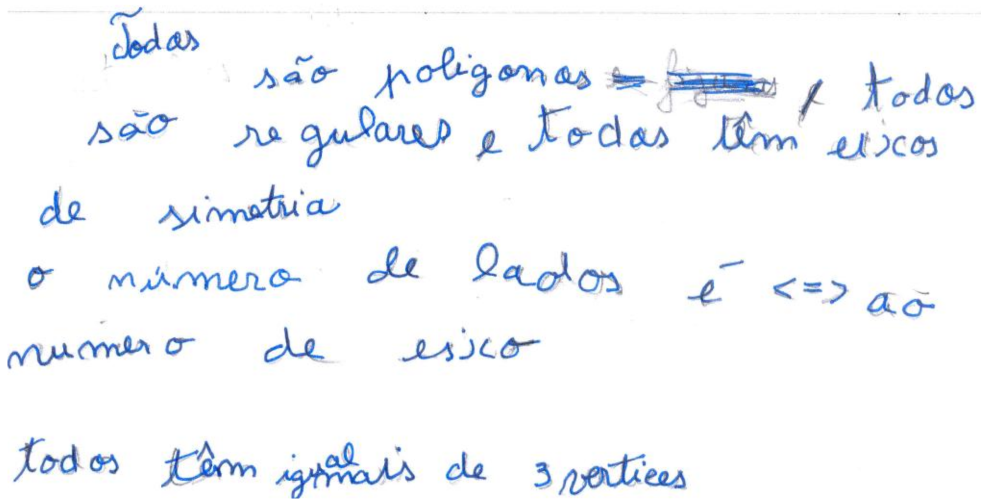


Figura 71 - Ricardo: Resposta à 11ª questão I_2S

12ª questão - Existe alguma característica comum a estas quatro figuras? Qual?

Dentro do Gr, a interacção foi, essencialmente, notada na resposta a esta questão. Três dos alunos que compõem este grupo, o Afonso, a Joana e o António, traduzem em termos escritos, exactamente, as mesmas ideias, utilizando o mesmo texto, apresentado em seguida.


Todas são poligonos e todos são regulares e todas têm eixos de simetria
o número de lados é <=> ao numero de eixo

todos têm iguais de 3 vertices

Figura 72 – Afonso: Resposta à 12ª questão_2S

Os alunos apresentam diferentes características comuns às quatro figuras, apresentadas na questão 10, mas não destacaram as que se relacionam directamente: o número de lados nas figuras regulares corresponde sempre ao número de eixos de simetria.

Nas produções do Ricardo, pode perceber-se que o aluno não participou nas discussões do grupo de trabalho e faz algumas afirmações que levantam dúvidas quanto ao conceito que construiu de “figuras regulares”. Analisando a resposta dada à questão onze, o aluno classifica o triângulo como isósceles, ao afirmar:

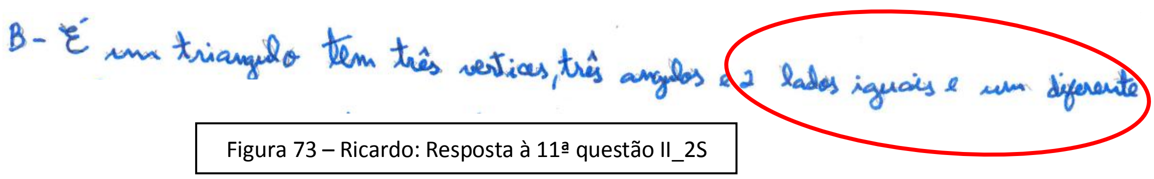

B- É um triangulo tem três vertices, três angulos e 2 lados iguais e um diferente

Figura 73 – Ricardo: Resposta à 11ª questão II_2S

Já na resposta à questão doze, entre outras características comuns, afirma que todas as figuras são regulares. Perante esta incongruência de ideias, parece não estar ainda muito sólido este conceito.

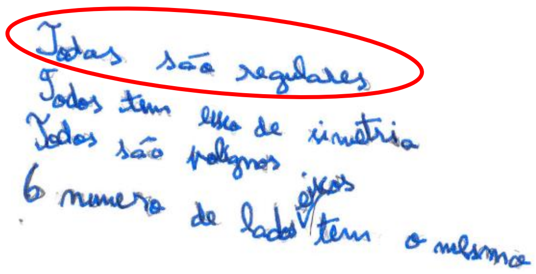


Figura 74 – Ricardo: Resposta à 12ª questão_2S

Da discussão colectiva, final, surgiu a seguinte lista de características comuns:

- ✓ Todas as figuras são limitadas por segmentos de recta;
- ✓ Em todas as figuras, o número de lados, vértices e ângulos é igual ao número de eixos de simetria;
- ✓ São todas figuras regulares porque todos os lados que as constituem têm a mesma medida;
- ✓ Todos os eixos de simetria de uma figura se encontram num ponto que é o centro da figura;
- ✓ Todas as figuras são polígonos;
- ✓ Todas as figuras têm três ou mais vértices

5.3.2. Síntese

Nesta tarefa os alunos exploraram os conceitos de linhas curvas e linhas rectas; segmento de recta; linhas paralelas, perpendiculares e oblíquas; ângulos; vértices; polígono e não polígono; poliedro e não poliedro; vértice; ângulo; linhas oblíquas; eixo de simetria; figuras regulares e irregulares e mostraram ser capazes de fazer uma classificação bastante abrangente de figuras no plano. Eis algumas transcrições de conversas que abordam os tópicos identificados:

> Joana – A linha horizontal com a linha vertical são oblíquas.
>
> PL– Sim?! É um encontro de que dois tipos de linhas?
>
> Ricardo – Uma recta e uma curva, por isso nunca serão oblíquas.

Joaquim – Se tivermos duas linhas curvas que se encontram ou uma linha curva e uma linha recta, como na moldura do Afonso, não se forma um vértice.

Paula – Então…

António – Sim, só se tivermos duas linhas rectas que se encontram é que pode formar vértice.

Afonso – Quando dois segmentos de recta formam ângulos de 90^0, são perpendiculares.

Ricardo – Então, os polígonos são as figuras só formadas por segmentos de recta e os não polígonos as outras.

[…]

Afonso – Paula eu acho que no grupo dos não polígonos também podem estar as figuras que só são formadas por linhas curvas, como o círculo.

Afonso – É um polígono regular.

PL – Pois, é verdade. Mas dado os seus lados terem todos a mesma medida, de que triângulo estamos a falar?

Gt – Triângulo equilátero.

Resolveram problemas envolvendo a compreensão de relações espaciais, antecipando e auto-corrigindo "os resultados produzidos pela alteração da posição de uma figura, mantendo a forma e as dimensões" (PMEB, 2007).

A representação de transformações geométricas revelou-se bastante mais consistente e segura, deixando perceber claramente o raciocínio e os movimentos efectuados mentalmente.

Evidenciaram ser capazes de formular conjecturas e formar generalizações a partir do estabelecimento de correspondência entre diferentes propriedades ou características das figuras.

Os alunos concluíram que o número de eixos de simetria e o número de lados nas figuras regulares, são sempre iguais.

Outro aspecto a salientar, prende-se com o facto de, progressivamente, ao longo do desenrolar desta tarefa, ser possível observar uma maior autonomia dos alunos durante a realização de trabalho individual/ e ou pequeno grupo e a não necessidade de gerar um discussão prévia à execução do trabalho.

5.4. 3ª Sequência – Projecção de sombras

5.4.1. 1ª Tarefa

> Hans via a sombra do alfaiate projectada na parede, sempre em movimento.
>
> [...]
>
> O rapaz mudou de posição, para ver melhor, e reparou que havia agora outra sombra na parede da casa.
>
> in *O Rapaz do Espelho*, p. 8

O início do trabalho com esta tarefa começou, como sugerido, levando os alunos para o recreio num dia de sol, às 9:30h. Foram escolhidos dois alunos da turma, o Alex e o Sebastião, com alturas distintas e pediu-se aos restantes que observassem as suas sombras e retirassem conclusões.

Os alunos colocaram-se lado a lado, para que os colegas pudessem observar o tamanho das suas sombras e mudaram, diversas vezes, de posição, para se poder perceber que, independentemente da posição, um corpo mais alto produz sempre uma sombra maior que um corpo mais baixo. Para além destas, foram realizadas muitas outras experiências de posição que permitiram aos alunos retirar as conclusões que passo a registar:

- ✓ O sol aparece do lado direito e a sombra é projectada do lado esquerdo dos corpos;
- ✓ Quando o sol bate num corpo a sombra vai sempre para o lado oposto;
- ✓ Se um corpo estiver virado para poente (oeste), a sombra aparece ao lado do corpo;
- ✓ Se um corpo estiver virado para nascente (este), a sombra desse corpo não aparece ao lado do corpo mas, sim, atrás;
- ✓ Quando a sombra é reflectida no chão, os corpos estão de pé e a sombra está deitada. Se a sombra for reflectida na parede, corpo e sombra ficam na vertical;
- ✓ A sombra de um corpo aparece sempre espalmada, sem volume;
- ✓ Uma sombra é sempre uma figura a 2D;
- ✓ Os pés aparecem agarrados à sombra e a restante parte do corpo é desviada;
- ✓ Se o corpo estiver deitado, a sombra fica debaixo do corpo;
- ✓ Se a sombra for projectada num plano inclinado, fica menor;

- ✓ O tamanho da sombra, à mesma hora, varia de acordo com o plano em que é projectada;
- ✓ A sombra do Alex é maior que a do Sebastião porque o Alex é mais alto que o Sebastião;
- ✓ Se houver dois corpos da mesma altura, posicionados lado a lado, as sombras ficam do mesmo tamanho;
- ✓ Se houver dois corpos de alturas diferentes, posicionados lado a lado, a sombra do corpo mais alto é maior e a do corpo mais baixo é menor;
- ✓ As sombras têm sempre uma altura inferior às dos corpos;
- ✓ Dependendo da posição da Terra em relação ao Sol, as sombras aumentam ou diminuem: às 9:30h a sombra do Sebastião era maior e ao final da manhã a sombra dele é menor.

No período de aulas da tarde, a seguir à realização das experiências atrás descritas, foi pedido aos alunos que fizessem um resumo do trabalho feito durante a manhã, visto não ter sido possível a minha presença nas actividades realizadas.

Desse resumo surgiu alguma discussão sobre os tópicos tratados:

> Paula – Podem explicar-me por que motivo o professor escolheu o Alex e o Sebastião para fazer esta experiência?
>
> Carmen – Porque o Sebastião é pequeno e o Alex é grande.
>
> Paula – Então, para o que pretendiam observar, era importante haver diferença nas alturas?
>
> António – Sim, porque, assim, era mais fácil percebermos o que estava a acontecer.
>
> Paula – Mas o que pretendiam vocês observar?
>
> Carmen – Queríamos ver as sombras deles.
>
> Paula – E o que observaram?
>
> Carmen – Observámos muitas coisas mas percebemos que a sombra do Alex era maior que a do Sebastião porque o Alex é mais alto.
>
> Paula – E isso quer dizer o quê?
>
> António – Que uma pessoa mais alta projecta uma sombra maior e uma pessoa mais baixa, uma sombra mais pequena.

Para além desta conclusão, os alunos relataram todas as outras que foi já possível referir, partindo do visionamento do filme, gravado durante o trabalho prático.

O resumo oral, das actividades realizadas durante a manhã, parece ter funcionado como um "arrumar" de ideias que possibilitou uma tirada de conclusões mais completas e objectivas.

> Paula – Então, dependendo da posição da Terra em relação ao Sol, o que acontece às sombras?
> Afonso – Quando o Sol está mais baixo, as sombras são maiores. Quando o sol está mais alto, por exemplo ao meio-dia, o sol bate nas nossas cabeças e quase não projecta sombra. Quanto mais baixo estiver o Sol, maior a sombra. Quanto mais alto, menor a sombra.

Após este resumo, bem discutido e esclarecedor de ideias, os alunos passaram ao trabalho escrito.

O professor Lucas apresentou as questões e referiu, mais uma vez, a importância de respostas claras e bem estruturadas.

Esta tarefa suscitou muita interacção e discussão entre os alunos, dentro e fora de cada um dos pequenos grupos de trabalho. Os alunos pareciam ter necessidade de continuar a discutir entre si as diferentes observações e sensações tidas durante as experiências efectuadas de manhã. Esta atitude gerou um tempo de trabalho, supostamente individual e autónomo, muito discutido entre alunos mas pouco produtivo, em termos individuais. Esta interacção pouco produtiva, dado as respostas escritas, da maior parte dos alunos, revelarem ideias pouco claras sobre os tópicos abordados, faz-me pensar na pertinência da afirmação de Cobb *et al* (1992) quando referem que "Comunicar é [...] deixar que os outros construam conhecimento à medida que vão inferindo e articulando diferentes raciocínios" (p. 38). A discussão desta tarefa, embora muito discutida, parece não ter, de facto, constituído um bom momento comunicativo, dado não ter contribuído para que os alunos conseguissem construir ideias e respostas bem estruturadas para as questões colocadas.

Tarefa 1. a)

1ª questão - O que observas relativamente às sombras dos teus colegas?

Na resposta a esta questão, O Ricardo e a Joana responderam de forma confusa e com uma estrutura frásica pouco consistente, não chegando a indicar claramente o pretendido. Para estes alunos, a experiência visual e o resumo partilhado, feito mais tarde, parecem não ter contribuído para que as suas ideias, relativamente à projecção e tamanho de sombras, tenham ficado claras.

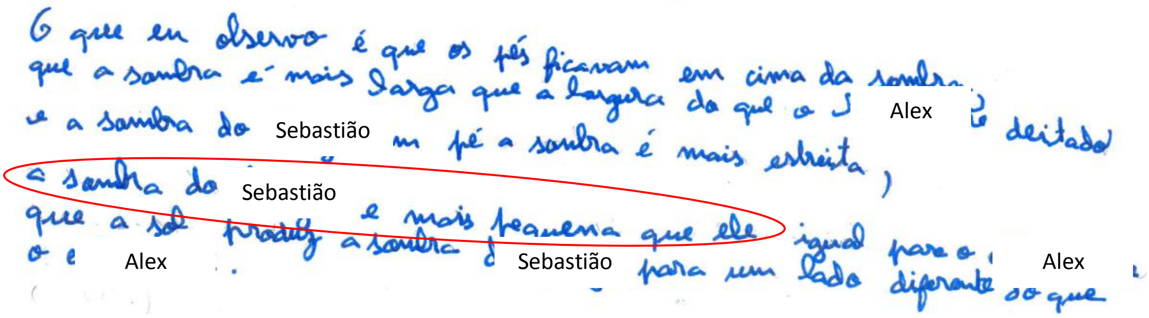


Figura 75 – Ricardo: Comparação de sombras

A resposta do Ricardo refere um conjunto de observações feitas durante o trabalho experimental mas não estabelece qualquer tipo de relação entre as mesmas. Seria desejável, após o trabalho de comparação entre reflexão e sombra, que o aluno ao afirmar que "a sombra do Sebastião é mais pequena que ele" (fig. 75) pudesse, agora, concluir, dado não o ter conseguido fazer anteriormente, o porquê de uma reflexão e uma sombra nunca poderem ser iguais. Contudo, a resposta do aluno não mostra que tenha sido capaz de o fazer.

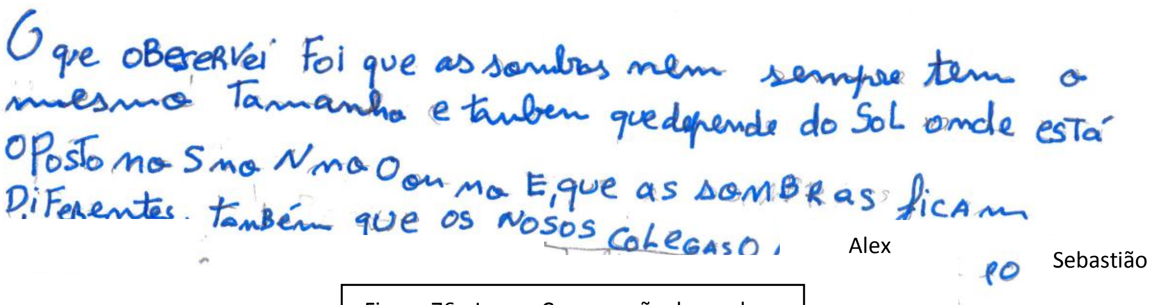


Figura 76 - Joana: Comparação de sombras

A resposta da Joana resulta de um misto de observações feitas, não relacionáveis entre si, e não termina a última ideia. Uma resposta confusa e mal estruturada que não deixa perceber as ideias construídas pela aluna.

Tanto o Afonso como o António são directos na resposta à questão colocada. O primeiro fá-lo por palavras e o segundo utilizando um esquema muito simples.

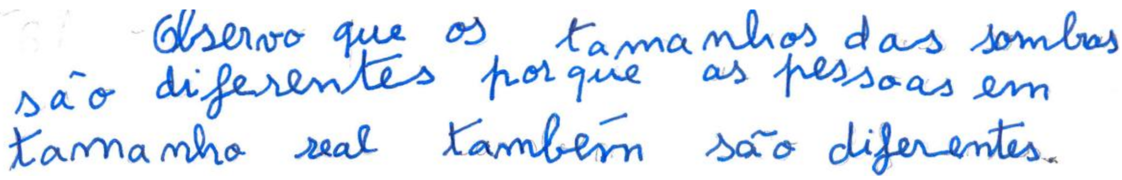


Figura 77 - Afonso: Comparação de sombras

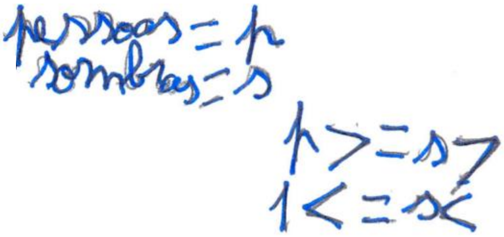


Figura 78 - António: Comparação de sombras

Estes alunos revelam ter percebido o objectivo da questão e conseguiram, de tudo o que observaram, destacar apenas o pretendido.

2ª questão - Consegues explicar o motivo pelo qual tamanhos diferentes projectam sombras diferentes?

A esta questão, apenas, respondeu correctamente o Afonso.

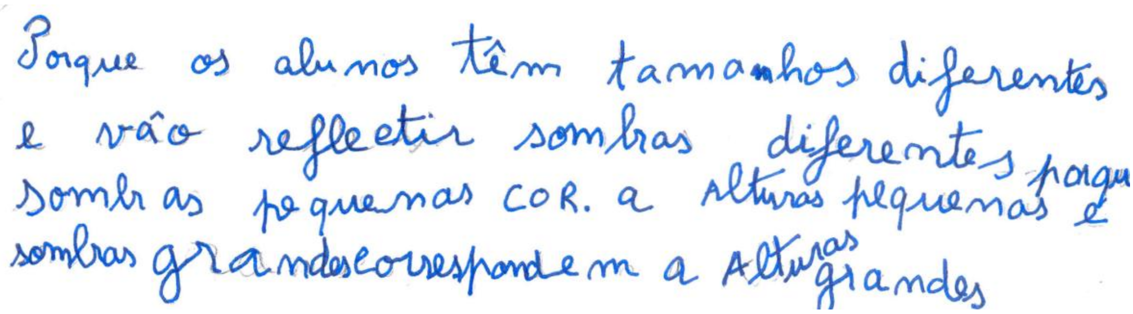


Figura 79 – Afonso: Tamanhos e sombras

A Joana e o Ricardo apresentaram respostas confusas e incorrectas e o António não apresentou resposta.

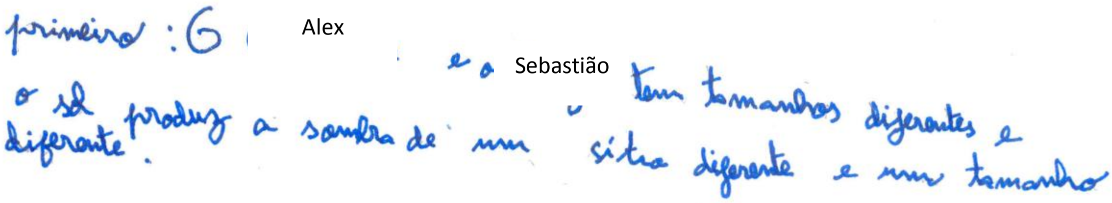


Figura 80 - Ricardo: Tamanhos e sombras

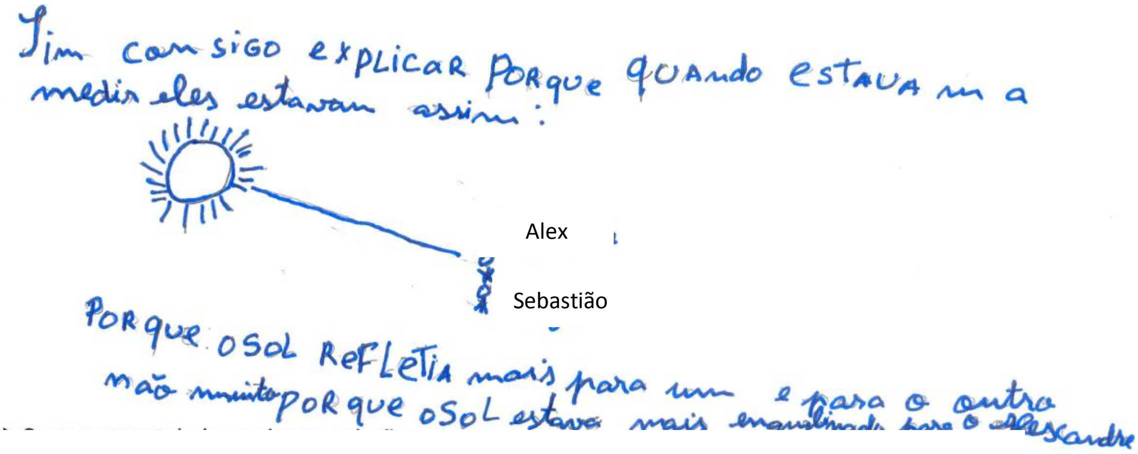


Figura 81 - Joana: Tamanhos e sombras

Nas respostas a esta questão, parece, mais uma vez, possível afirmar que, apesar de haver algumas ideias matemáticas, os alunos não as conseguem explicar, por escrito, quando têm de relacionar e articular conceitos.

3ª questão - Consegues estabelecer alguma relação entre as suas sombras e as suas alturas? Explica essa relação.

O António não apresenta resposta para esta questão e os restantes três elementos do Gr, apresentam respostas pouco consistentes, não chegando ao objectivo da pergunta.

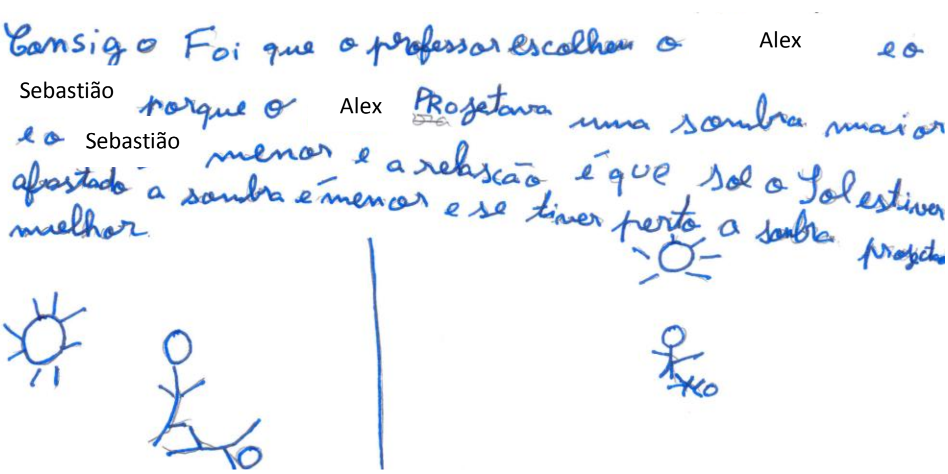


Figura 82 – Joana: Resposta à 3ª questão_3S1Ta

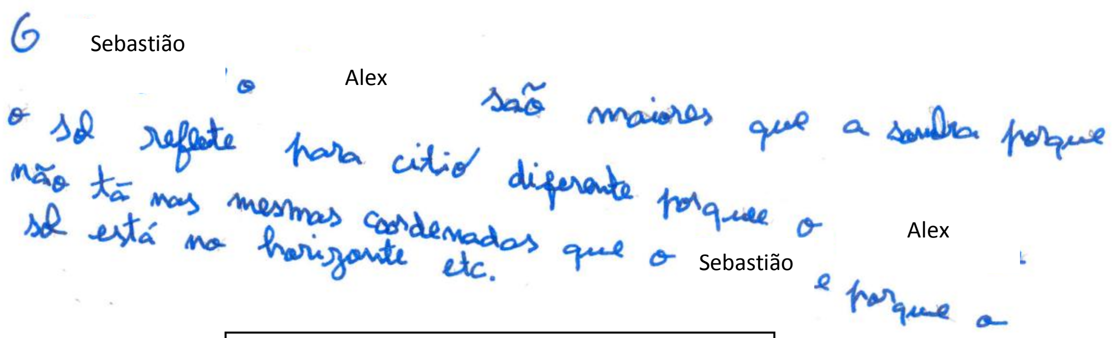


Figura 83 - Ricardo: Resposta à 3ª questão_3S1Ta

Nesta resposta, o Ricardo apresenta mais uma vez a ideia já enunciada na resposta à primeira questão (ver fig. 75), revelando ter percebido que as sombras são sempre menores que o objecto.

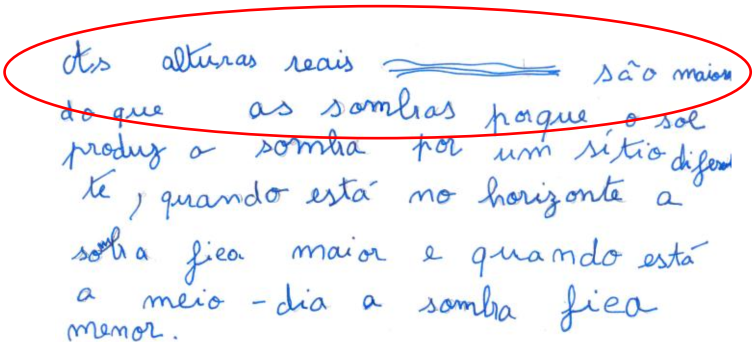


Figura 84 - Afonso: Resposta à 3ª questão_3S1Ta

O Afonso, à semelhança do Ricardo, conseguiu perceber que "As alturas reais são maiores do que as sombras" (fig. 84) e que o tamanho da sombra depende da posição da fonte de luz, em relação ao objecto.

Este conjunto de respostas débeis e de estrutura confusa, parecem estar associadas ao facto de, durante a tarefa experimental, se terem discutido muitos conceitos novos que surgiram das observações individuais dos alunos. Perante este grande conjunto de conceitos e ideias novas, os alunos não foram, na sua maioria, capazes de destacar o essencial do acessório ou não conseguiram, mesmo, colocar por escrito a amálgama de ideias que ainda não haviam tido tempo para assimilar. Contudo, parecem ter compreendido a relação entre o tamanho do objecto e a sombra projectada e, ainda, a forma como a direcção de incidência da fonte de luz influencia a direcção e o tipo de sombra do objecto, ou seja que a sombra do objecto se forma sempre do lado oposto da fonte de luz.

Da análise desta tarefa, surge a ideia de que, provavelmente, a tarefa experimental deveria ter sido feita por etapas, tentando ir ao encontro de cada uma das questões, ou poder-se-ia ter seguido o mesmo trajecto, mas não deixando dispersar os alunos por tópicos tão diversos, mesmo que relacionáveis entre si, como aconteceu.

Tarefa 1. b)

A resolução desta tarefa teve início no pátio da escola, onde era possível captar as sombras do Alex e do Sebastião, em três posições distintas, contornando, em cada uma delas, a sombra produzida.

Posição A – em pé e de costas para o sol, pisando o canto inferior esquerdo da folha de reprodução;

Figura 85 – Posição A

Posição B – em pé e de costas para o sol, de braços abertos e pisando o canto inferior esquerdo da folha de reprodução;

Figura 86 – Posição B

Posição C – de cócoras e de lado em relação ao sol, pisando o canto inferior esquerdo da folha de reprodução.

Figura 87 – Posição C

Depois da realização deste trabalho, fomos para a sala de aula e iniciámos a análise do contorno de cada uma das sombras.

Para uma melhor visualização e análise comparativa mais fácil, os contornos foram colocados, dois a dois (posição A; posição B; posição C), nas paredes da sala e os alunos foram fazendo comentários ao que observavam.

Posição A – em pé e de costas para o sol, pisando o canto inferior esquerdo da folha de reprodução.

Figura 88 – Sombra posição A

Paula – Que diferenças observas entre os contornos destas sombras?

Carminho – A sombra do Sebastião está mais inclinada e mais fininha que a do Alex.

Paula – Sabes explicar porquê?

Carminho - Porque o Sebastião estava à frente do Alex e o Sol estava atrás das costas do Alex.

Paula – Então, por que surge a sombra do Sebastião mais inclinada e fininha?

Carminho – Porque o Sebastião, em relação ao Sol, está mais afastado e a luz dele chega lá mais fraca e, por isso, a sombra fica mais inclinada e fina.

Ao fazer este comentário, a aluna revela ter percebido que a posição de incidência de uma fonte luminosa, neste caso o sol, num objecto provoca variações nas sombras projectadas. Neste caso, percebeu que quando se aumenta a distância da fonte luminosa ao objecto, a sombra reduz.

Posição B – em pé e de costas para o sol, de braços abertos e pisando o canto inferior esquerdo da folha de reprodução.

Figura 89 – Sombra posição B

Paula – Consegues perceber nesses contornos quem é o Alex e quem é o Sebastião?

Afonso – Sim, o Alex é o da esquerda e o Sebastião, o da direita.

Paula – Como tens a certeza?

Afonso – Porque o Alex é maior e a sombra da esquerda é a maior.

Neste diálogo, é perceptível a relação que os aluno já é capaz de estabelecer entre tamanho do objecto e sombra. Objectos maiores projectam sombras maiores e objectos menores, sombras, também menores.

Posição C – de cócoras e de lado em relação ao sol, pisando o canto inferior esquerdo da folha de reprodução.

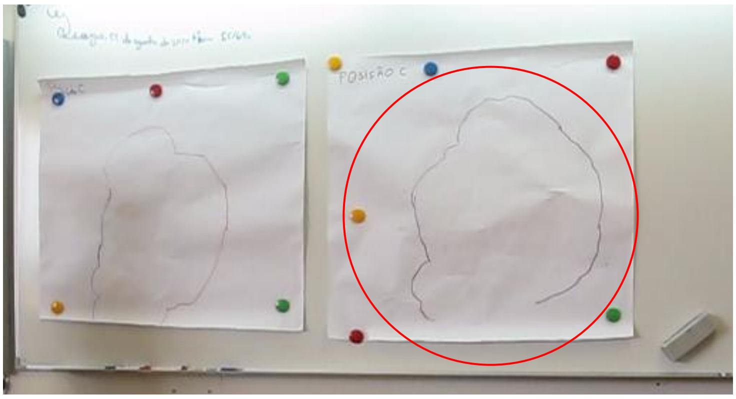


Figura 90 – Sombra posição C

Paula – Afonso, comparando os dois contornos das sombras, do Alex e do Sebastião, o que é mais evidente para ti?

Afonso – Eu acho que o do Sebastião deixa perceber mais pormenores…

Paula – Ok, mas no todo o que consegues observar?

Carminho – Posso responder?

Paula – Sim, diz.

Carminho – Que o corpo do Alex produziu uma sombra maior.

A Carminho estabeleceu o mesmo tipo de relação que o Afonso, ao afirmar, sem qualquer tipo de dúvida, "o corpo do Alex produziu uma sombra maior."

Depois da conversa tida em torno do registo das sombras obtidas, da qual registei apenas alguns exemplos, os alunos passaram ao trabalho individual de resposta às questões que integravam esta tarefa.

Nestas pretendia-se, em primeiro lugar, que os alunos concluíssem que a sombra se altera sempre que mudamos de posição e, em segundo lugar, que houvesse a percepção de que, dependendo do modo como nos posicionamos em relação ao sol, a nossa sombra assume posições diferentes.

Durante o trabalho individual, os alunos solicitaram pouco a presença dos professores, interagiram entre si, conversando bastante sobre o que lhes tinha sido dado a observar mas, mais uma vez, em termos escritos, ficaram muito aquém do desejado e, na maior parte dos casos, não respondem ao solicitado.

Observemos as produções dos alunos.

Na primeira questão apenas será possível apresentar as produções do Afonso, da Joana e do António, dado o Ricardo não ter estado presente neste dia.

1ª questão - Descreve o que observas em relação às sombras dos teus colegas sempre que eles mudam de posição?

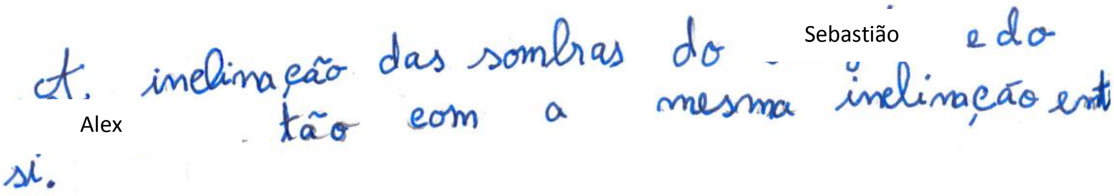


Figura 91 – Afonso: Mudança de posição e sombra

O Afonso, ao identificar a inclinação das sombras dos colegas, parece querer referir-se ao facto de a nossa sombra assumir posições diferentes de acordo com o modo como nos posicionamos em relação ao sol, porém não podemos assumir essa posição porque o aluno não completa a ideia. Relativamente às alterações posturais e ao tipo de sombra produzida, o aluno não apresenta qualquer comentário.

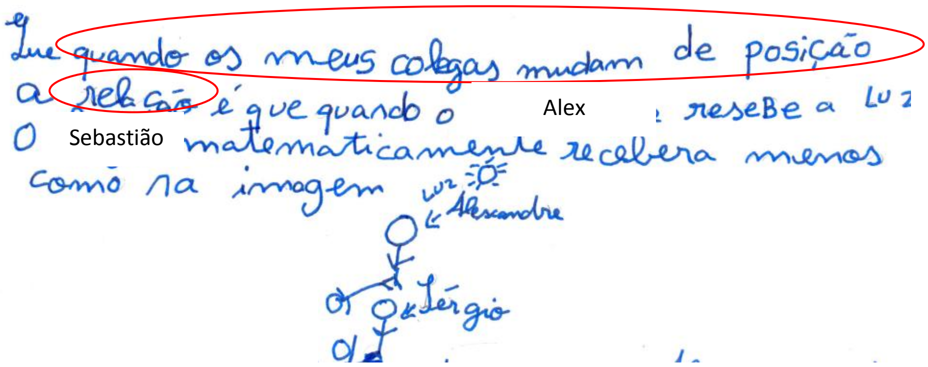


Figura 92 - Joana: Mudança de posição e sombra

A Joana inicia a sua resposta parecendo ter vontade de responder à questão colocada, quando escreve “ quando os meus colegas mudam de posição” (fig. 92) mas não consegue completar a ideia e passa a focar-se numa relação que não deixa perceber qual é.

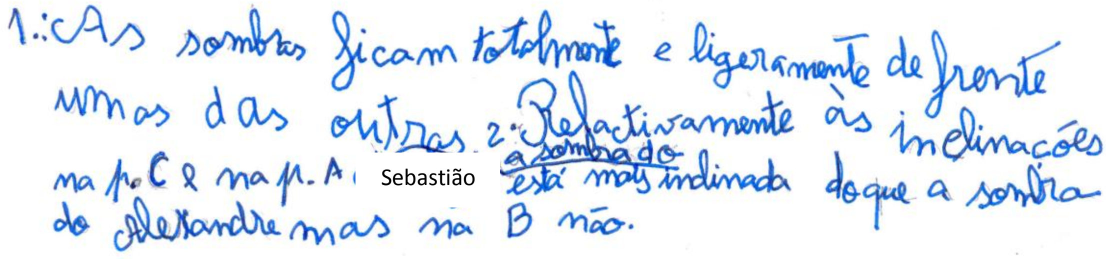

1.: As sombras ficam totalmente e ligeiramente de frente umas das outras. 2: Relativamente às inclinações na p. C e na p. A, Sebastião a sombra do está mais inclinada do que a sombra do Alexandre mas na B não.

Figura 93 - António: Mudança de posição e sombra

O António, à semelhança do Afonso (fig. 91), refere também a questão da inclinação das duas sombras mas não desenvolve a ideia que o fez abordar esta situação e não deixa, por isso, perceber as ideias que construiu, relativamente à produção de sombras, dependendo de diferenças posturais ou da posição do corpo em relação ao sol.

2ª questão - Por que pensas que isso acontece?

Nas respostas a esta questão, o Afonso e a Joana, desenvolvem um pouco a ideia dos efeitos da distância da fonte luminosa (sol) em relação ao objecto (corpo dos alunos), dado numa determinada altura das experiências realizadas, o Sebastião se ter posicionado à frente do Alex, não recebendo, por isso, incidência directa do sol no seu corpo mas não respondem à questão que lhes foi colocada.

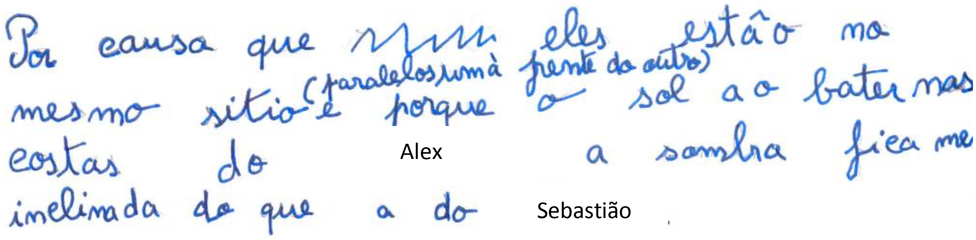

Por causa que ~~um~~ eles estão no mesmo sitio (paralelos um à frente do outro) e porque o sol a o bater nas costas do Alex a sombra fica me inclinada do que a do Sebastião

Figura 94 – Afonso: Mudança de posição e sombra - justificação

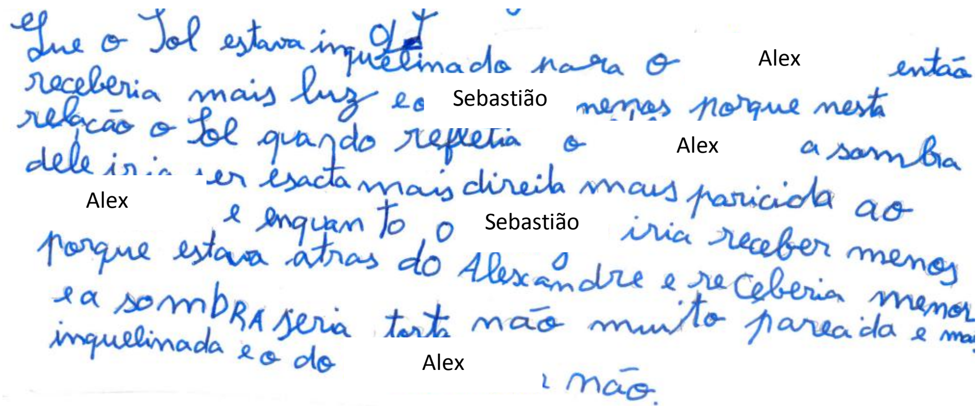


Figura 95 - Joana: Mudança de posição e sombra - justificação

O António apresenta uma reprodução das sombras contornadas, durante as três diferentes posições em que o Alex e o Sebastião se colocaram durante a actividade experimental, e destaca o facto de a sombra do Sebastião surgir mais inclinada do que a do Alex, dada a menor incidência de luz e, também, apesar da frase incompleta e mal estruturada, a ideia de que a diferentes posições correspondem diferentes sombras. Todavia, não explica os motivos pelos quais tudo isto acontece.

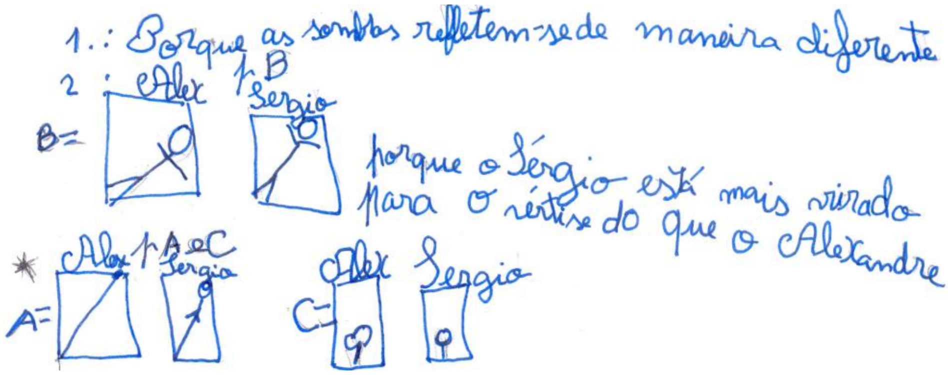


Figura 96 - António: Mudança de posição e sombra - justificação

Analisando, as respostas escritas dos alunos, a este grupo de questões, parece possível afirmar que, embora, os alunos tenham ficado com algumas ideias sobre a influência da distância de incidência da fonte luminosa no objecto e o tipo de sombra obtida, não conseguiram pôr essa ideia por escrito e explicá-la. Mais uma vez, fica a percepção de que os alunos apesar de criarem ideias matemáticas sobre o que observam e discutem, têm muitas dificuldades em representar externamente essas ideias, quer através de esquemas mas, fundamentalmente, por escrito. A maior dificuldade parece residir, não na construção de ideias matemáticas, mas na construção de frases capazes de traduzir essas ideias.

5.4.2. 2ª Tarefa

> Sombra
>
> Como ainda agora disse, o discípulo passou à frente do mestre… É o que acontece quando, ao fim do dia, a luz declina. A sombra também se alonga, mais comprida, mais estirada do que o seu… do que o seu…
>
> Sábio
>
> … dono?
>
> *in O Homem sem Sombra*, p. 43

A realização desta tarefa começou, levando os alunos para o pátio da escola às 9:45h, de uma manhã de sol, de forma a poderem observar o efeito da luz do sol na projecção de sombras, a esta hora da manhã.

A experiência foi realizada com todos os alunos da turma, para que se pudesse observar que, a esta hora da manhã, independentemente das alturas, a sombra projectada apareceria de lado, reproduzindo na totalidade os corpos virados para o sol.

Os alunos trabalharam a pares, para que uns fossem utilizados para produzir sombra e outros para contornar a sombra dos primeiros, numa folha de papel de cenário.

Os alunos escolhidos, aleatoriamente, para projectar a sua sombra colocaram-se todos na mesma posição, relativamente ao sol, como mostra a figura 97, e os parceiros fizeram o contorno das sombras.

Figura 97 – Sombra 9:45h

Mais tarde, às 11:45h, voltámos ao pátio e repetimos a experiência (fig. 98) para que os alunos pudessem observar quais os efeitos da luz do sol na projecção de sombras, a esta hora do dia.

Figura 98 – Sombra 11.45h

Pretendia-se que os alunos comparassem as duas sombras e percebessem que, dependendo da hora do dia e da posição do sol no horizonte, a sombra produzida é diferente.

Depois desta segunda experiência, fomos para os ginásio para que fosse possível colocar os contornos das duas sombras de cada criança, lado a lado, e tirar conclusões.

Ainda antes da observação dos diferentes pares de contornos de sombras, o professor Lucas, querendo perceber as observações feitas pelos alunos durante a realização da actividade, perguntou:

> PL – Ainda antes de observarmos as vossas sombras, alguém é capaz de me dizer que tipo de sombra foi captado às 9:45h e às 11.45h?
>
> Carminho – A sombra das 9:45h é uma sombra maior e a sombra das 11.45h é mais pequena.

Depois da intervenção desta aluna, outros concordaram com a sua opinião, revelando ter estado atentos às experiências realizadas.

Passado este momento, expusemos os contornos das sombras em redor das paredes do ginásio (fig. 99) e o professor Lucas questionou:

Figura 99 – Sombras em redor das paredes

PL – Agora, perante todos os pares de sombras, confirmam a opinião da Carminho?

Gt – Sim.

PL - E por que será que isso aconteceu?

Ricardo – Porque às 9:45h o sol estava ainda muito baixo e batia-nos de lado e, por isso a sombra é comprida. Se o sol nos bate na cabeça, de cima, a sombra quase não se vê, é muito pequena.

Paula – Será que, depois do que o Ricardo disse e do que observaram lá fora, conseguem tirar alguma conclusão relativamente à posição do sol e ao tipo de sombras projectadas?

Joana – Eu acho que quando o sol está baixinho, de manhã e à tarde, as sombras são grandes e quando o sol está alto, assim, mais ou menos a meio do dia, as sombras são pequenas.

Afonso – Posso acrescentar uma coisa?

PL – Claro!

Afonso – As sombras ficam mais pequenas a meio do dia, porque, enquanto de manhã e à noitinha, o sol só bate numa parte do corpo, a meio do dia o sol bate no corpo todo e, por isso, projecta uma sombra muito pequena.

Depois desta conversa, houve uma aluna que remeteu para o excerto da história do *Homem sem Sombra* que introduz esta tarefa, afirmando:

Carmen – Paula, o que a Joana disse podemos confirmar na história quando diz "É o que acontece quando, ao fim do dia, a luz declina. A sombra também se alonga, mais comprida…" (p. 43).

Paula – Queres explicar por palavras tuas a frase que acabaste de ler?

Carmen – Sim, eu acho que quer dizer que quanto menos luz o sol dá, maiores são as sombras.

Paula – Concordam com a ideia da Carmen?

Gt – Sim.

Ricardo – Sim, é verdade porque se for de noite a nossa sombra ainda fica maior do que aquela que nós temos das 9:45h porque há menos luz.

Estes comentários sugerem que o contexto e as ideias contidas nesta história ajudaram os alunos a compreender e a relacionar, com mais facilidade, os tópicos trabalhados durante as actividades realizadas.

Após a discussão das observações efectuadas durante as experiências e da análise dos diferentes pares de contornos de sombras produzidos, os alunos parecem ter percebido que a projecção de sombras se altera de acordo com a posição da fonte de luminosidade. Assim, sombras maiores são projectadas, quanto mais baixa estiver a fonte de luminosidade e sombras menores, quanto mais alta estiver a fonte de luz.

Depois da análise e discussão colectiva das experiências efectuadas, os alunos fizeram o trabalho síntese desta tarefa, respondendo, individualmente e por escrito, às questões colocadas que serão, em seguida, analisadas e comentadas.

1ª questão - O que podes observar quando comparas as duas sombras do menino A?

Três dos quatro alunos, que compõem o Gr, fizeram uma boa observação das experiências realizadas e expressaram por escrito as suas observações. A Joana apresentou uma resposta confusa, baseada nas impressões que tirou durante a realização das experiências e não na observação dos contornos das sombras expostos, durante a realização desta fase do trabalho.

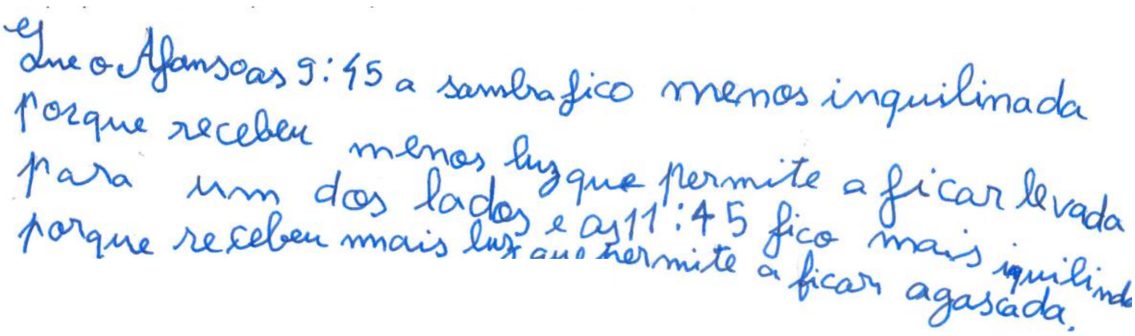

e Que o Afonso as 9:45 a sombra fico menos inquilinada
porque recebeu menos luz que permite a ficar levada
para um dos lados e as 11:45 fico mais inquilinda
porque recebeu mais luz que permite a ficar agasada.

Figura 100 – Joana: Sombras do menino A

Na sua resposta, a Joana consegue perceber que o sol às 9.45h emitia uma luz mais fraca, que a sombra é sempre projectada do lado contrário aquele em que está a fonte de luminosidade e que a sombra do colega às 11.45h fica mais “agachada”, ou seja menos comprida. Contudo, mostra não ter observado com atenção os contornos das duas sombras expostos e não consegue dar uma resposta clara e coerente.

O Afonso e o Ricardo dão a sua resposta através da apresentação de um esquema simples mas bastante elucidativo, comparando as sombras obtidas em horas distintas.

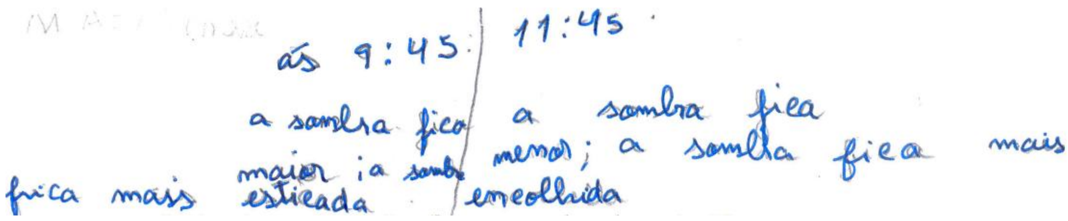


Figura 101 - Afonso: Sombras do menino A

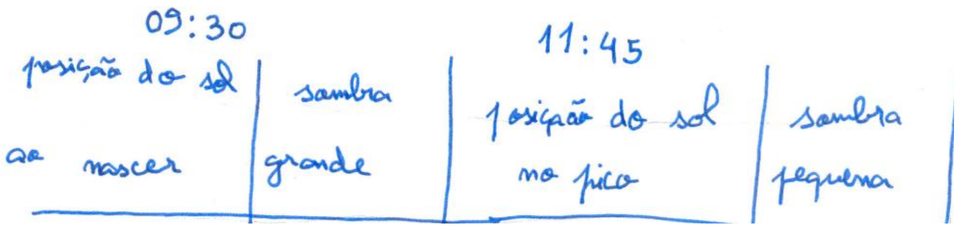


Figura 102 - Ricardo: Sombras do menino A

O António apresenta uma resposta escrita onde identifica a diferença de tamanhos das duas sombras, a diferença de inclinação e, também, a diferença de forma apresentada pelas duas sombras, “desenho” (fig. 103). Ao identificar esta última característica, o aluno parece ter percebido que diferentes posições da fonte luminosa provocam alterações de forma nas sombras projectadas, aspecto que não foi referido por nenhum dos restantes alunos.

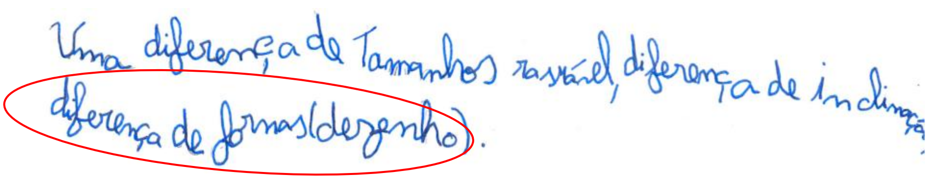


Figura 103 - António: Sombras do menino A

2ª questão - Acontece a mesma situação com as sombras do menino B?

Nesta questão, ao pedir aos alunos que identifiquem, se o comportamento das sombras de dois alunos diferentes, a horas distintas, é o mesmo, todos afirmam que sim, havendo uns que justificam e outros não.

Figura 104 - Afonso: Sombras do menino B

Figura 105 - Joana: Sombras do menino B

O Afonso e a Joana, limitam-se a afirmar o que podem observar.

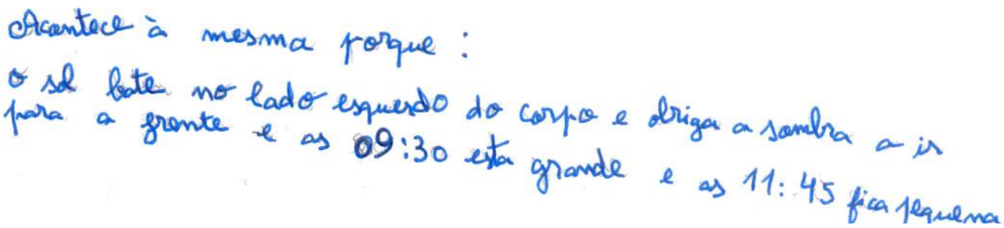


Figura 106 - Ricardo: Sombras do menino B

Figura 107 - António: Sombras do menino B

O Ricardo e o António fazem a mesma afirmação e justificam que o facto de observarem o mesmo comportamento nas duas sombras, a horas distintas, se deve ao facto de ambos os registos terem sido feitos à mesma hora.

3ª questão - Haverá alguma relação entre estes acontecimentos? Consegues explicá-la?

Nesta questão pretendia-se que os alunos conseguissem explicar que a forma aproximada das sombras registadas, nos dois momentos, se devia à posição do sol na hora da realização das experiências e do registo e não à diferença de alturas dos diferentes alunos.

Porém os alunos, revelaram alguma dificuldade em descrever de forma clara e bem estruturada as ideias construídas.

O Ricardo não entendeu a questão e dá uma resposta que em nada se relaciona com o pedido.


Todos as sombras saõ emporradas pelo corpo.

Figura 108 – Ricardo: Resposta à 3ª questão_3S2T

O António não explica o motivo pelo qual não existe grande diferença entre os dois tipos de sombras registadas, em todos os alunos, apenas constata a diferença entre as sombras projectadas nos diferentes momentos.


É que a A é maior do que a B e a A está sempre mais inclinado do que a B.

Figura 109 - António: Resposta à 3ª questão_3S2T

A Joana e o Afonso apresentam respostas nas quais é possível perceber que entenderam a questão colocada mas revelaram alguma dificuldade em estruturar, por escrito, a ideia que construíram internamente.

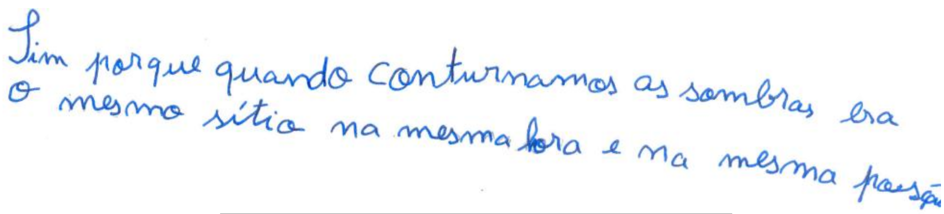

Sim porque quando conturnamos as sombras era o mesmo sítio na mesma hora e na mesma posiçã

Figura 110 - Joana: Resposta à 3ª questão_3S2T

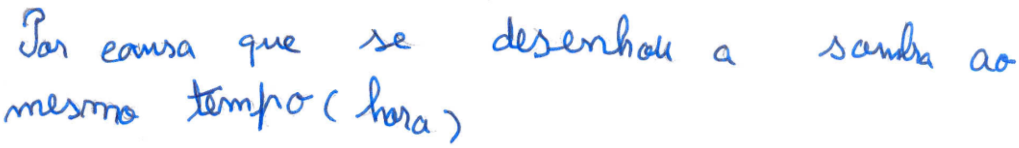

Por causa que se desenhou a sombra ao mesmo tempo (hora)

Figura 111 - Afonso: Resposta à 3ª questão_3S2T

4ª questão - O que fará com que utilizando os mesmos meninos, em horas distintas, se obtenham sombras de tamanhos diferentes?

Pretendia-se, nesta questão, que os alunos fossem capazes de explicar que o mesmo corpo produz sombras diferentes, dependendo da hora do dia, devido à posição da Terra em relação ao Sol e que percebessem a relação entre grau de luminosidade e tipo de sombra projectada.

Analisando as respostas dadas, é perceptível que os alunos, embora tenham utilizado frases incompletas e confusas, entenderam que, dependendo da posição do sol no horizonte, se obtêm sombras diferentes de um mesmo corpo (objecto) mas não foram capazes de relacionar essa situação com o tipo de sombra obtida.

A Joana identificou a posição da Terra em relação ao sol como a responsável pelos diferentes tipos de sombra obtida e tenta explicar o tipo de sombra originado pelos diferentes graus de luminosidade: às 9.45h, com menos luminosidade, é como “um elástico que puxa para um lado”; às 11.45h, com maior luminosidade incidindo, sobretudo, na parte superior do corpo “é como um elástico que puxou o corpo para baixo.

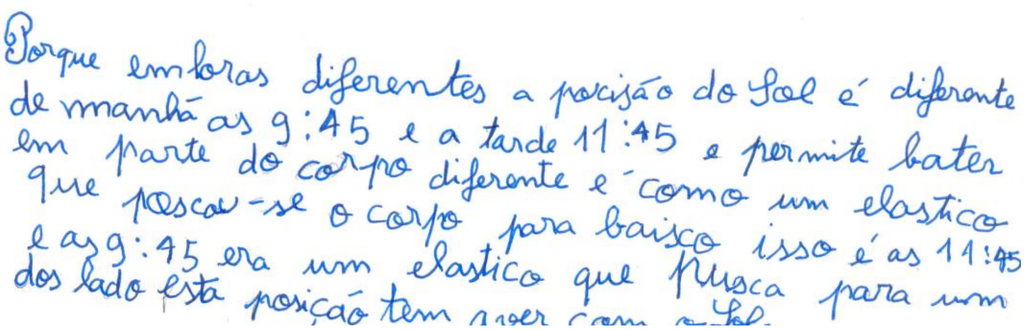

Porque em horas diferentes a pocisão do Sol é diferente
de manhã as 9:45 e a tarde 11:45 e permite bater
em parte do corpo diferente e como um elastico
que rosca-se o corpo para baisco isso é as 11:45
e as 9:45 era um elastico que rusca para um
dos lado esta posição tem a ver com o Sol.

Figura 112 - Joana: Horas e sombras

Nesta resposta conseguem identificar-se as representações internas que a aluna construiu sobre as ideias trabalhadas mas, também é visível a dificuldade que houve em estruturar essas ideias por escrito.

O Afonso, à semelhança da Joana, também entendeu a posição da Terra em relação ao sol como a responsável pelos diferentes tipos de sombra obtida e depois tenta explicar, embora utilizando um vocabulário inadequado (fig. 114), que às 9.45h a Terra ainda se encontra numa posição em que o sol incide com pouca intensidade e que às 11.45h, a posição da terra já é mais favorável à incidência de luz solar.

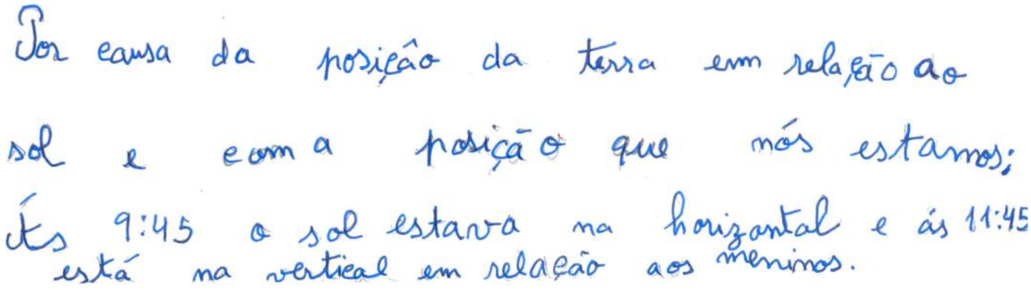

Por causa da posição da terra em relação ao sol e com a posição que nós estamos; Ás 9:45 o sol estava na horizontal e ás 11:45 está na vertical em relação aos meninos.

Figura 113 - Afonso: Horas e sombras

Tanto o António como Ricardo, registam, de alguma forma, a influência da posição da Terra em relação ao sol, na projecção de diferentes sombras mas apresentam respostas pouco cuidadas e que não deixam claro as ideias construídas.


O Sol esta noutra direcção em relação em nós e a Terra está rodado.

Figura 114 - António: Horas e sombras

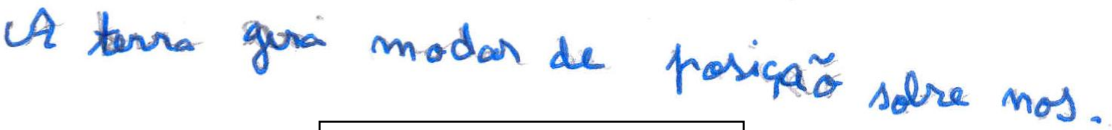

A terra gira modar de posiçaõ sobre nos.

Figura 115 - Ricardo: Horas e sombras

Nas respostas dos alunos, pode perceber-se que estes construíram algumas ideias sobre os tópicos debatidos mas a sua expressão escrita não consegue acompanhar e expor essas ideias.

5.4.3. Síntese

Em relação, à primeira tarefa, entre muitas outras conclusões, os alunos concluíram que quanto maior for a altura de um corpo, maior será a sombra projectada. Contudo, houve que realizar experiências diversas porque, inicialmente, não foi fácil antecipar se esta característica se tornava invariante, dependendo da posição.

Durante o trabalho individual e/ ou de pequeno grupo, a interacção gerada, fora dos grupos de trabalho, motivada pela grande necessidade de partilhar observações e sensações relativas ao trabalho prático, tornou o processo comunicativo muito confuso e pouco produtivo.

Os alunos revelaram algumas dificuldades em colocar por palavras as ideias observadas e em responder às questões colocadas, fundamentalmente, quando era pedido que estabelecessem algumas relações. Solicitaram muito a presença dos professores para os ajudar na estruturação das ideias mas, mesmo assim, as suas respostas surgiram confusas e com uma estrutura débil. A ideia de tentar discutir tudo o que foi observado individualmente, parece não ter trazido grandes benefícios à maioria dos alunos, pois estes aglutinaram um conjunto de ideias que não foram capazes de articular e separar.

Na segunda tarefa, os alunos, durante a análise e discussão colectiva das experiências realizadas, perceberam que, dependendo da hora do dia e da posição do sol no horizonte, a sombra produzida é diferente e que esta diferença se relaciona com a maior ou menor incidência de luz sobre um objecto. Para além disso, conseguiram relacionar a situação vivida e as conclusões retiradas com as ideias apresentadas no excerto retirado do livro, para apresentação desta tarefa (ver p. 136). Contudo revelaram, como habitualmente, muita dificuldade em colocar por escrito as ideias que foram construindo, tornando mais forte a convicção de que os alunos são capazes de construir representações mentais das ideias trabalhadas mas revelam dificuldade em expressá-las através da escrita, desenhos ou outros.

Da realização das experiências que constituem a última sequência de trabalho, os alunos construíram ideias sobre os factores que podem influenciar a projecção de uma sombra, entre os quais: os efeitos da distância da fonte luminosa em relação ao objecto (corpo dos alunos); a posição de incidência da fonte luminosa (sol) no objecto (corpo dos alunos) e o tipo de sombra obtida; a forma como a direcção de incidência da fonte de luz influencia a direcção e o tipo de sombra do objecto e, ainda, a relação entre o tamanho do objecto (altura dos alunos) e a sombra projectada.

5.5. Opinião dos alunos sobre as tarefas

Embora não estivesse previsto inicialmente, no final do trabalho, dado o envolvimento dos alunos com as tarefas apresentadas e as relações estabelecidas entre tarefas e narrativas, foi feita aos alunos do Gr uma pequena entrevista informal (ver anexo II) onde lhes era pedido que comparassem as propostas de trabalho feitas a partir da utilização de histórias e outras que não utilizassem como recurso as mesmas. Transcrevo e analiso, seguidamente, os excertos mais significativos.

> Alex – As histórias ajudam-nos a dizer as coisas, tudo parece mais fácil.

> Ricardo – A partir do teatro que fizemos e das frases da história nós podemos tirar ideias. Por exemplo, quando diz "… a sombra levantará o braço não correspondente…" (p. 21).

Os comentários do Alex e do Ricardo remetem-me para a afirmação do (NCTM, 2004) quando refere que " … a utilização de livros de histórias constitui um óptimo veículo para comunicar ideias matemáticas" (p.5).

Segundo a opinião dos alunos, a utilização de histórias pode ajudar a transmitir ideias matemáticas, fornecendo vocabulário e criando imagens mentais fortes, que favorecem o processo comunicativo.

> Joana – Com esta história podemos aprender várias coisas porque durante o trabalho estamos sempre a discutir uns com os outros e a completar ideias.

A ideia lançada pela Joana remete para a questão da interacção que durante todo este percurso foi um conceito chave, no desenvolvimento do sentido espacial e criação de ideias geométricas, pois tal como Cobb *et al.* (1992), citando Comaroff (1982), sugerem, as crianças aprendem tanto, quanto maior for a sua participação em momentos de aprendizagem interactiva.

> Afonso – Assim, é fácil reunir ideias.

A reflexão do Afonso parece remeter para a questão da riqueza do contexto, criada pelas narrativas utilizadas nas aulas de matemática, que os alunos são capazes de utilizar, referida por Bay-Williams (2005). Para além disso, considero que também está presente no seu comentário a ideia sugerida por Yunes e Ponde (1989) quando afirmam que a literatura pode oferecer elementos como auxílio para compreender a realidade.

Capítulo VI – Conclusões, recomendações e limitações do estudo

6.1. Conclusões

Este capítulo contém as conclusões do estudo efectuado e pretende dar resposta às questões formuladas inicialmente. Nele estão, também, contidas algumas recomendações que surgiram da reflexão sobre a minha prática, como professora e investigadora, e, finalmente, são assinaladas algumas das limitações deste trabalho e lançadas algumas ideias sobre a sua possível continuação.

6.1.1. O envolvimento dos alunos em tarefas matemáticas criadas com base em modelos presentes em histórias com matemática

As histórias pareceram, ao longo de todo o trabalho, ser uma mais-valia para o envolvimento dos alunos nas tarefas apresentadas. Envolvidos na narrativa, os alunos resolveram todas as tarefas apresentadas de forma motivada e recorrendo, muitas vezes, às situações descritas nas histórias para explicarem os conceitos apresentados.

Os alunos recorreram com muita frequência a expressões da narrativa para explicarem ideias matemáticas, evidenciando-se aqui a importância da utilização de histórias para o desenvolvimento do processo comunicativo.

Em síntese, este estudo mostrou que crianças de 3º ano de escolaridade se podem envolver directa e emocionalmente em tarefas matemáticas construídas a partir de modelos presentes em histórias infantis e conseguem modelar, sem dificuldade, as situações apresentadas com base nos contextos fornecidos. O envolvimento emocional, torna-as persistentes e motiva-as a apresentar respostas, a analisar e discutir possibilidades e ainda a articular ideias e conceitos.

Os contextos e/ou as ilustrações das histórias podem ajudar a construir imagens geométricas muito poderosas que desenvolvem a capacidade de visualização e orientação espacial dos alunos, desta faixa etária, criando ideias geométricas muito definidas e ajudando a compreender relações espaciais.

A opinião dos alunos, como referido anteriormente, está de acordo com a ideia de Zambo (2005), quando aponta a importância da utilização de histórias na aula de matemática, pelo gosto de ouvir histórias e pela importância do contexto da tarefa e, também, vai ao encontro dos pareceres de Bay-Williams (2005) e do NCTM (2004), quando faz referência à importância dos conteúdos, para dar sentido à matemática, e à importância da utilização de histórias no desenvolvimento do processo comunicativo, respectivamente.

6.1.2. Representações

As representações dos alunos pareceram não sofrer grande evolução ao longo de todo o percurso, tendo existido sempre muitas dificuldades em colocar as ideias construídas internamente e verbalizadas, por escrito. As maiores dificuldades encontradas foram a nível da articulação de ideias e da estrutura frásica.

As dificuldades na escrita de ideias comuns podem ter sido condicionadas pelo facto de, em todas as tarefas apresentadas, os alunos terem folhas de trabalho individual.

Houve, inicialmente, muita dificuldade em desenhar ou esquematizar, de forma clara, as ideias que conseguiam verbalizar. Contudo, ao longo do percurso, foram notórias evoluções nas representações icónicas utilizadas.

Foi, desde o princípio, identificada a necessidade de utilizar desenhos ou esquemas para representar ideias geométricas e relações espaciais, parecendo, por isso possível, referir que tarefas de índole geométrica propiciam a utilização de representações que utilizam os desenhos, os esquemas, os diagramas, entre outros, levando a uma melhor compreensão das ideias apresentadas.

As ideias mentais sobre os tópicos discutidos apareceram sempre de forma mais estruturada e clara quando verbalizadas ou dramatizadas do que quando representadas, quer através de desenhos, quer através de palavras.

Nunca foram dados aos alunos exemplos das representações a utilizar, deixando sempre que as mesmas surgissem a partir do entendimento individual de cada grupo de trabalho ou aluno, sendo estas valorizadas durante as discussões colectivas. Porém, foi perceptível que os alunos foram agregando e utilizando as representações apresentadas, tanto por colegas como pelos professores, ao longo das discussões e sínteses finais, passando a fazer uso das mesmas em tarefas ou explicações individuais subsequentes.

Outra das apropriações notada foi a utilização que os alunos passaram a fazer de expressões ou palavras, existentes nas narrativas trabalhadas, que constituíam imagens geométricas muito fortes. Estas, ao longo do percurso, passaram a fazer parte do vocabulário activo dos alunos.

Dadas as verbalizações dos alunos, durante as discussões e análises colectivas das tarefas propostas, parece possível afirmar que este grupo, apesar de conseguir construir representações internas suficientemente claras para discutir os tópicos trabalhados, não conseguiu, muitas vezes, representar externamente as ideias construídas em torno dos assuntos debatidos. A principal dificuldade, dada a apropriação de representações externas já referida, pareceu ser a falta de modelos para representar as ideias matemáticas construídas e não a falta de capacidade para compreender, articular e representar internamente essas ideias.

6.1.3. Conceitos matemáticos surgidos a partir das tarefas desenvolvidas

Ao longo de todo o estudo, os alunos foram clarificando e articulando conceitos que lhes permitiram lidar com os conceitos de reflexão e simetria de figuras, com um maior à vontade e distinguido claramente os dois conceitos. Para além disso, os alunos passaram a saber distinguir e descrever reflexões que utilizam eixos verticais e horizontais; construíram a ideia de que qualquer figura no plano pode sofrer transformações geométricas e do não estatismo destas figuras; aprenderam a identificar figuras simétricas; passaram a classificar figuras, com base nas suas propriedades, com maior destreza e articulando ideias, como por exemplo, perceberam que nas figuras planas, regulares, o número de vértices e de ângulos corresponde sempre ao número de lados, passando a generalizar propriedades como estas. Também compreenderam os conceitos de linha recta e segmento de recta; linhas paralelas; relacionaram o conceito de linhas perpendiculares com o conceito de ângulo recto e o de linhas oblíquas com o de ângulo agudo e/ ou obtuso; perceberam a diferença entre polígono e não polígono e poliedro e não poliedro; clarificaram o conceito de lado de uma figura; perceberam os efeitos da distância de uma fonte de luz em relação ao um objecto; a importância da posição de incidência da fonte luminosa no objecto, para o tipo de sombra obtida; a forma como a direcção de incidência da fonte de luz influencia a direcção e o tipo de sombra do objecto e, ainda, a relação entre o tamanho do objecto e a sombra projectada.

Ainda foi bastante notória a mobilização de linguagem feita pelos alunos, pois estes apropriaram-se muito das expressões utilizadas pelos professores nas discussões colectivas e nas narrativas trabalhadas, tendo, em termos de utilização de uma linguagem formal, oral, evoluído bastante ao longo de todo o processo. Todavia, esta evolução não foi observada em termos escritos. Parece-me haver necessidade de dar continuidade ao trabalho iniciado, através da utilização de histórias e tarefas diversificadas, para que a partir de interacção continuada os conceitos vão sendo clarificados, até ser possível estruturá-los também por escrito ou articulando palavras, desenhos ou esquemas. Nesta faixa etária, parece ser muito importante a discussão e descrição continuada de conceitos e ideias geométricas.

A partir do final da primeira sequência de tarefas, foi bastante notória a facilidade com que a maior parte dos alunos identificava e representava, através da utilização de desenhos, as transformações geométricas trabalhadas. As ideias claras construídas acerca deste tópico permitiram que alguns alunos, após uma representação incorrecta, fossem capazes de se auto-corrigir durante o trabalho autónomo, referindo, nas folhas de trabalho individual, os erros cometidos ou as imperfeições das suas representações.

Parece possível afirmar que os alunos, com os quais foi realizado este trabalho, estão no 2º nível de pensamento geométrico (*descriptive level*) identificado por van Hiele (1999). Os alunos são capazes de identificar a situação descrita, através de um dado número de características ou propriedades mas quando se lhes pede para as relacionarem e passarem ao nível seguinte (*the informal deduction level*), onde as propriedades são logicamente organizadas através do estabelecimento de relações, não são capazes de o fazer, confirmando a ideia defendida pelo investigador de que, neste nível de ensino, os alunos ainda não atingiram o nível da dedução informal (p. 311).

6.1.4. Interacções dos alunos

Em pequeno grupo, a capacidade de interacção alternou com essa incapacidade, dependendo das tarefas apresentadas. Contudo, foi possível observar que, de uma maneira geral, os alunos desta idade ainda têm alguma dificuldade em interagir, construindo ideias geométricas válidas, autonomamente. Os alunos foram capazes de discutir ideias mas raramente conseguiram construir estruturas articuladas que representassem o pensamento do grupo. Para além disso, foi também visível a dificuldade em apresentar por escrito as ideias construídas internamente ou representativas das discussões autónomas.

Tal como Sheffielf & Cruikshank (2000) sugerem, durante o processo comunicativo, em grande grupo, através da orientação sempre atenta dos professores e de muitas intervenções, os alunos foram capazes de criar uma interacção muito produtiva, em termos de criação e explicitação das ideias geométricas contidas nas tarefas apresentadas e de relacionamento das mesmas com ideias debatidas noutras ocasiões. Gerou-se, progressivamente, uma maior capacidade de relacionamento, apropriação e criação de conceitos.

Também a nível das representações, a interacção se mostrou muito pertinente, pois, ao longo do percurso foi visível a apropriação que os alunos foram fazendo das representações utilizadas por colegas ou pelos professores, durante as discussões finais.

> É hoje aceite que os alunos constroem o seu conhecimento em vez de o receberem sobre uma forma final através do professor ou livro de texto, isto significará que os alunos criam as suas próprias representações internas a partir das suas interacções com o mundo e constroem as suas próprias redes de representação […] O processo de gerar compreensão não será suave nem previsível mas as evidências disponíveis sugerem que ao longo do tempo, os alunos constroem relações, criam invenções produtivas e constroem a sua compreensão (Hiebert & Carpenter, 1992, p. 74).

O trabalho desenvolvido pelos alunos, ao longo deste estudo, parece confirmar as ideias apresentadas Hiebert & Carpenter (1992). Assim, parece, efectivamente, possível afirmar que, quando o ambiente de aprendizagem é propício ao desenvolvimento de interacções, os alunos constroem conhecimento, criando representações internas que são capazes de comunicar externamente, aumentando esta capacidade e a necessidade de construir relações, à medida que o processo de compreensão também aumenta.

6.2. O investigador enquanto participante

Quando iniciei este estudo tinha como objectivo encontrar resposta para as questões formuladas inicialmente e perceber como seria a minha actuação, numa turma da qual não era professora titular, e quais as vantagens ou desvantagens deste trabalho, tanto na aprendizagem dos alunos como no meu desenvolvimento profissional.

A primeira preocupação foi encontrar as histórias que melhor servissem os tópicos que se pretendia trabalhar e, consequentemente, criar tarefas, com base nos modelos matemáticos apresentados pelas mesmas, que constituíssem verdadeiros desafios para os alunos. Seguidamente, apesar de ter já existido um contacto anterior com o professor da turma, agora a situação era de continuidade e exigia uma actuação diferente. Era necessário agir para que a nossa relação na sala de aula pudesse constituir, de facto, um par pedagógico, cujas preocupações centrais fossem a partilha, com vista ao desenvolvimento profissional de ambos, e o sucesso escolar dos alunos.

Esta situação permitiu-me fazer reflexões que nunca teriam sido possíveis na minha prática como professora ou como formadora. Assim, uma das primeiras ideias a salientar é o facto de que para haver um verdadeiro par pedagógico, dentro de uma sala de aula, não poder haver a necessidade de sobressair em relação ao outro mas, sim, gerar um ambiente de cumplicidade onde as partes envolvidas criam, orientam, aprendem, articulam e constroem conhecimento, em uníssono. Completa este processo, a possibilidade de poder reflectir sobre uma aula em que o par esteve presente e actuou em momentos distintos ou completando ideias. Durante esta partilha, discutiram-se e melhoraram-se actuações, reformularam-se planos e estratégias, consertaram-se procedimentos e identificou-se a necessidade de construção de um fio condutor que guiasse a apresentação de tarefas, tanto no processo investigativo, como no quotidiano do trabalho com a turma.

Outra questão relevante, parece ter sido a possibilidade de, muitas vezes, ao estar apenas como observadora, mas no papel de investigadora, perceber que, como professores, deixamos cair muitas ideias importantes, lançadas pelos alunos, sem nos darmos conta da importância que a discussão das mesmas teria, no momento. Contudo, esta situação só é perceptível quando observamos outros ou quando, durante a análise das filmagens da minha prática, me apercebi, algumas vezes, dessa situação. Ao analisar as filmagens foi, também, possível perceber que, muitas vezes, deixamos cair o assunto ou a questão pelo simples facto de não percebermos a intenção do aluno durante a sua intervenção, na altura devida. Isto leva-me a pensar que daqui para a frente precisarei, de vez em quando, de filmar uma aula para poder identificar pontos fracos da minha actuação como professora. Os vídeos ajudaram-me a perceber algumas falhas de actuação na interacção com os alunos e a perceber onde poderei actuar, com vista à melhoria da minha prática.

Também a análise dos trabalhos escritos dos alunos, como investigadora, me abriram outra perspectiva do que deve ser a avaliação do professor. Neste papel, consegui perceber que o processo de avaliação é muito mais do que decifrar a resposta do aluno e catalogar com certo ou errado. Este deve centrar-se, fundamentalmente, na percepção de concluir o que o aluno aprendeu ou não aprendeu e do porquê da sua resposta, a forma como representa as suas ideias, qual o tipo de representação mais usual e o porquê da mesma, de que forma a sua resposta e/ ou representação se relaciona com os tópicos discutidos, entre outros.

6.3. Influência da investigadora e do professor na construção de conceitos e representações

Durante as discussões em pequeno, mas fundamentalmente, em grande grupo tivemos sempre a preocupação de ouvir os alunos e de os orientar nos sentido de todas as ideias serem articuladas ou ajudando-os a perceber, através da colocação de questões, aquelas de que deviam ou poderiam desistir. Nalgumas situações, sentimos que algumas das respostas poderão ter sido induzidas por intervenções da investigadora ou do professor da turma, mais no sentido de concordância ou discordância de ideias do que na dádiva de respostas, que foi totalmente nula.

As tarefas propostas foram cuidadosamente pensadas para que constituíssem problemas e suscitassem a investigação e discussão. Foram sempre construídas a partir de modelos matemáticos apresentados pela narrativa ou ilustração das histórias trabalhadas ou articuladas com outras questões.

Estas situações fazem prever que sendo a investigadora ou o professor da turma pessoas diferentes, os resultados do estudo podiam variar. Esta variação poderá depender do tipo de questões formuladas, dos contextos geradores dessas questões mas, fundamentalmente, da prática e postura dos professores envolvidos, relativamente ao ambiente de aprendizagem gerado e à relação que estabeleceram com os alunos.

6.4. Recomendações e limitações do estudo

Quando utiliza histórias nas aulas de matemática, o professor deve perceber o potencial que a utilização dos contextos dos livros podem ter no processo de ensino-aprendizagem da matemática mas perceber, também, que é preciso saber dosear a utilização deste meio para não descaracterizar os seus principais objectivos: o desenvolvimento da linguagem, do vocabulário e da imaginação infantil.

Para além disso, deve, também, entender que só deve utilizar nas suas aulas livros que apresentem bons modelos matemáticos e que constituam um bom contexto para a criação de tarefas matemáticas desafiantes e indutoras de um bom trabalho matemático.

Em termos de uma prática pedagógica baseada num ambiente de aprendizagem em que a interacção é fundamental para a criação e desenvolvimento de conceitos, deve ser tido em conta que uma postura indutora de respostas, por parte do professor, não tem necessidade de acontecer. Este deverá, apenas, ir lançando questões e não conduzir, através de gestos ou acenos de cabeça, sorrisos…, os alunos para que cheguem à resposta pretendida.

Quando se trabalha matemática a partir da utilização de contextos de livros, e não só, deve ser tomada em consideração a idade dos alunos e o tipo de tarefas a propor, pois, dependendo da faixa etária, os alunos terão comportamentos diferenciados e necessitarão de mais ou menos tempo para a concretização dos objectivos propostos pelo professor.

No 1º ciclo do ensino básico, tendo esta ideia estado bem patente ao longo de todo o estudo, os alunos necessitam observar, dramatizar e discutir os mesmos tópicos repetidamente, em situações diversificadas. Só assim é possível perceber evoluções, gerar melhores interacções e identificar apropriações e articulações dos conceitos trabalhados. Deve, por isso, haver sempre o cuidado, por parte do professor, de trabalhar o mesmo tópico apresentando diferentes roupagens, situações diversificadas e contextos motivadores.

Valeria a pena dar continuidade a este estudo no sentido de perceber, em anos posteriores, a evolução dos alunos em termos da descrição escrita das ideias geométricas construídas nas aulas de matemática. Pois, o período em que decorreu, apenas, deixou perceber evolução das representações pictóricas e icónicas mas não evoluções ao nível da representação escrita. Dando continuidade ao mesmo, será, com certeza, possível fazê-lo dado este desenvolvimento estar ligado a uma maior maturidade cognitiva e também, como foi perceptível, à continuação de um trabalho matemático centrado na experimentação e interacção.

Outra limitação sentida neste estudo foi a falta de generalização da utilização do quadro interactivo na resolução e discussão de tarefas de natureza geométrica. Depois deste estudo, após termos utilizado esta ferramenta em situações pontuais e que necessitaram de maior exploração, considero que este pode ser um instrumento muito útil à concretização de ideias geométricas, fundamentalmente no tópico das isometrias, pelas possibilidades de visualização e manipulação que oferece. Assim, dada a importância que as TIC assumem hoje no ensino da matemática, poderiam ter sido criadas tarefas que exigissem a utilização e manipulação deste instrumento, propiciando aos alunos a utilização de diferentes ferramentas e a articulação de ideias, em novas situações.

Poderá ser interessante que se transponham as ideias deste estudo para outras investigações que envolvam outros níveis de ensino, outros materiais, um número de alunos mais alargado e, até, um outro contexto educativo, deixando perceber evoluções, pontos comuns e pontos discrepantes.

Referências bibliográficas:

Anderson, A., Anderson, J. & Shapiro, J. (2004). Mathematical discourse in shared storybook reading, *Journal for Research in Mathematics Education*, 35 (1), 5 - 33.

Alsina, C. (1999). Painel "Geometria no currículo de Matemática", *in* Departamento de Educ. da Fac. de Ciências da Univ. de Lisboa (Eds), *Ensino da Geometria no virar do milénio* (p.65). Lisboa: Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Bay-Williams, Jennifer (2005). Poetry in Motion, *Mathematics Teaching in the Middle School*, 10 (8), 386 -393.

Bogdan, R. & Biklen, S. K. (1994). Investigação Qualitativa em investigação. Porto: Porto Editora.

Clements, D. & Battista, M. (1992). Geometry and Spatial Reasoning *in* D. A. Grouws (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 420 – 464). Nova Iorque: Macmillan.

Cobb, P., Yackel, E. & Wood, T. (1992). *Interaction and Learning in Mathematics* – Classroom situations (pp. 99 – 122), Dordrecht: Kluwer.

Cobb, P., Wood T., Yackel E. & McNeal B. (1992). Characteristics of Classroom Mathematics Traditions: An Interactional Analysis, *American Educational Research Journal*, 29 (3), 573 – 604.

Costa, M. C. M. (2005). *Modelo do Pensamento Visual-Espacial: transformações geométricas no início da escolaridade*. Tese de doutoramento, Universidade Nova de Lisboa.

DGIDC (2010). *Metas de Aprendizagem – 1º Ciclo*, Ministério da Educação, Lisboa.

Dreyfus, T. (1990). Advanced Mathematical thinking, *in* P. Nesher e J. Kilpatrick (Ed.), *Mathematics and Cognition* (pp. 113-134), Cambridge: University Press.

Dufour- Janvier, B., Bednarz, N. & Belanger, M. (1987). Pedagogical Considerations Concerning the Problem of Representation, *in* C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 109 – 122), Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Goldenberg, P. & Cuoco, A. (1998). What is a dynamic geometry?, *in* R. Lehrer e D. Chazan (Eds.), *Designing, learning environments for developing understanding of geometry and space* (pp. 351 -368), Londres: Lawrence Erlbaum.

Goldenberg, P., Cuoco, A. e Mark. J. (1998). A Role for Geometry in General Education, *in* R. Lehrer & D.Chazan (Eds.), *Designing, learning environments for developing understanding of geometry and space* (pp. 3-44), Londres: Lawrence Erlbaum.

Goldin, G. & Shteingold, N. (2001). Systems of Representations and Development on Mathematical Concepts, *in* A. A. Cuoco e F. R. Curcio (Eds), *Roles of Representation in School Mathematics*. Yearbook (pp. 1-23), Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Goldin, G. (2002). Representation in Mathematical Learning and Problem Solving, *in* Lyn D. English *et al*. (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 197 - 217), New Jersey: National Council of Teachers of Mathematics.

Grejniec, Michael (2002). *A que Sabe a Lua?*, trad. Alexandre Honrado, 1ª edição, Lisboa: Kalandraka.

Hiebert, J. & Carpenter, T.P. (1992). Learning as and Teaching with Understanding, *in* D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 65 – 97), New York: Macmillan.

Hiele, P. M. van (1999). Developing geometric thinking through activities that Begin with Play, *Teaching Children Mathematics*, 310 - 316.

Janvier, C. (1987a). Translations Processes in Mathematics Education, *in* C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*, (pp. 27 – 32), Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Janvier, C. (1987b). Representation and Understanding: The Notion of function as an Example, *in* C. janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 67-71), Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Kalathil, R. R., & Sherin, M. G. (2000). Role of Students Representations in the Mathematics Classroom *in* B. Fishman & S. O'Connor- divelbis (Ed.), *Fourth Internacional Conference of the learning Sciences* (pp. 27-28), Mahwah, NJ: Erlbaum.

Lea, H. (1990). Spatial concepts in the Kalahari, *in* Orit George Booker, Paul Cobb and Teresa Mendicuti (Ed.), *Proceedings of 14th PME conference* (Vol. 2, pp. 259 - 266), México: Program Committe of the 14th PME Conference.

Lehrer, R., Jacobson, C., Thoyre, G. e Kemery, V. (1998). Developing understanding of geometry and space in the primary grades, *in* R. Lehrer e D. Chazan (Eds.), *Designing, learning environments for developing understanding of geometry and space*, (pp. 169 - 200) Londres: Lawrence Erlbaum.

Lehrer, R. & Jenkins, M. & Osana, H. (1998). Longitudinal study of children´s reasoning about space and geometry, *in* R. Lehrer e D. Chazan (Eds.), *Designing, learning environments for developing understanding of geometry and space*, (pp. 137 - 167) Londres: Lawrence Erlbaum.

Loureiro, Cristina (2006). Os livros de histórias e a matemática – Era uma vez…, artigo não publicado.

Loureiro, Cristina (2006). Os livros de Histórias e a Matemática, *Actas Profmat*, Associação de Professores de Matemática – Lisboa: APM.

Machado, Nilson José (1991). *Matemática e língua materna:* análise de uma impregnação mútua, São Paulo: Cortez.

Magalhães, Álvaro (2008). *O Rapaz do Espelho*, 1ª edição, Lisboa: Texto Editores.

Manzano, Mercedes Gómez del (1987). *El protagonista-niño en la literatura infantil del siglo XX*, Madrid: Narcea.

Martins, P. Isabel, Maria Luísa Veiga, Filomena Teixeira, Celina Tenreiro-Vieira, Rui Marques Vieira, Ana V. Rodrigues, Fernanda Couceiro (2007). *Explorando a luz… sombras e imagens*: guião didáctico para professores, Ensino Experimental das Ciências, Lisboa, Ministério da Educação e DGIDC.

Matos, José Manuel, Fátima Gordo (1993). Visualização espacial: algumas actividades, *Educação e Matemática*, 26, 13 -17.

Matos, J. M. (1994). Os métodos próprios dos alunos: início de uma investigação *in V Seminário de Investigação em Educação Matemática – Actas* (pp. 109 – 117). Lisboa: APM.

Mendes, Maria de Fátima, Catarina Coutinho Delgado (2008). *Geometria: Textos de Apoio para Educadores de Infância*, Lisboa, Direcção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular (DGIDC).

ME (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências Essenciais*, Ministério da Educação, Lisboa.

National Council of Supervisors of Mathematics (1990). A Matemática para o século XXI, *Educação e Matemática*, 14, 23-25.

National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar*. Lisboa: APM e IIE.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*, Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Niss, M. (1983). Considerations and experiences concerning integrated courses in mathematics and other subjects, *in* Zweng, M. *et al.* (Eds), *Proceedings of the Fourth Internacional Congress on Mathematical Education* (pp. 247 – 9), Boston, MA, Birkhäuser.

Oliveira, L. & Serrazina, L. (2002). A reflexão e o professor como investigador in *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 29 – 42). Lisboa: APM.

Pace, Charyll (2005). You read me a story, I will read you a pattern *Mathematics Teaching in the Middle School*, 10 (8), 424-429.

Pimm, D. (1995). *Symbols and meanings in school mathematics*, London: Routledge.

Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática *in Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 5 – 28). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H. M., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. E. G., Oliveira, P. A. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*, Lisboa: Ministério da Educação, DGIDC.

Rocha, Natércia (2001). *Breve História da Literatura para Crianças em Portugal*, Lisboa: Caminho.

Rodrigues, A. P. A. (2008). *A literatura para crianças, meio de potenciar aprendizagens em Matemática*. Dissertação de Mestrado, Universidade Aberta.

Saraiva, J. A. (2001). *Literatura e alfabetização* – do plano do choro ao plano da ação, Porto Alegre: Artes Médicas.

Smole, Kátia C. S., Rocha, Glauce H. R., Cândido, Patrícia T., Stancanelli, Renata (1995). *Era uma vez na Matemática: uma conexão com a literatura infantil*, São Paulo: CAEM, Centro de Aperfeiçoamento do Ensino da Matemática, Instituto de Matemática e Estatística da USP.

Sierspinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics*, London: Falmer Press.

Simon, A. Martin (1995). Reconstructing Mathematics Pedagogy From a Constructivism Perspective, *Journal for Research in Mathematics Education*, 25 (2), 114 – 145.

Simon, A. Martin (2004). A Forum for Researchers – Raising Issues of Quality in Mathematics Education (pp. 157 – 163), The Pennsylvania State University.

Sheffield, L. J. & Cruikshank D. E. (2000). *Teaching and Learning Elementary and Middle School Mathematics*, New York: John Wiley & Sons, Inc.

Stenhouse, L. (1975). *An Introduction to Curriculum Research and Development*. London: Heinmann.

Torrado, António (2005). *O Homem sem Sombra*, Lisboa: Caminho.

Uno – Revista de Didáctica de las Matemáticas (2009). Literatura y matemáticas, nº 50, Barcelona: Graó.

Vale, Isabel (2004). Algumas notas sobre Investigação Qualitativa em Educação Matemática, O Estudo de Caso. Revista da Escola Superior de Educação, vol.5. Escola Superior de Educação de Viana do Castelo, 171-202.

Valério, Nuno (2004). *Papel das representações na construção da compreensão matemática dos alunos do 1º ciclo*, Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa. Lisboa: APM.

Vergnaud, G. (1987). Conclusion *in* C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 227 - 232), Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Whitin, Phyllis & David Whitin (2004). *Linking Literature and Mathematics in Meaningful Ways*, Wayne State University, Detroit: Wayne State University.

Woleck, K. R. (2001). Listen to Their Pictures An Investigation of Children's Mathematical Drawings, *in* A. A. Cuoco e F. R. Curcio (Eds), *Roles of Representaion in School Mathematics*, 2001 Yearbook (pp. 215 – 227), Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Yackel, E., Cobb, P., Wood, T., Wheatley G. & Merkel, G. (1991). A importância da interacção social na construção do conhecimento matemático das crianças, *Educação e Matemática*, 18, 17-21.

Yackel, E., Cobb, P., Wood, T., Wheatley G. & Merkel, G. (1991). A importância da interacção social na construção do conhecimento matemático das crianças, *Educação e Matemática*, 40, 39-43.

Yin, R. K. (2003). *Case Study Research: design and methods*, (3rd Ed.), California: Sage Publications.

Zambo, Ron. (2005). The power of two: Linking Mathematics and Literature, *Mathematics Teaching in the Middle School*, 10 (8), 394-399.

Sítios na internet:

http://math.unipa.it/~grim/SiLipsey.PDF, 29 – 09 – 2009.

http://sharepdf.net/view/25075/mathematics-in-literature-sally-i-lipsey-and-bernard-s-pasternack, 29 – 09 – 2009

http://www.santos.sp.gov.br/frame.php?pag=/educacao/educacao.php, 08 – 10 – 2009.

http://www.spce.org.pt/sem/CC.pdf, 08 – 10 – 2009.

http://repositorium.sdum.uminho.pt/bitstream, 05 – 09 – 2010

http://www.scribd.com/doc/3347544/Matematica-A-leitura-e-a-Literatura-nas-Aulas-de-Matematica, 7 -10 – 2009

http://ojs.c3sl.ufpr.br/ojs2/index.php/educar/article/viewFile/2249/1881, 7 -10- 2009

http://www.eses.pt/usr/ramiro/docs/etica_pedagogia/APedagogiadeJeromeBruner.pdf, 26 – 01 – 2011.

ANEXOS

Anexo I

Tabela 1 - Grelha síntese de análise de dados

			Envolvimento alunos		Articulação história/ tarefa		Discussão das tarefas			Representações			Ideias geométricas		Dificuldades sentidas		
			Muito	Pouco	Sim	Não	Prévia	Durante	Final	Palavras	Esquemas	Desenhos	Surgem	Não surgem	Linguagem	Tópicos	Outros
1ª Sequência	Simetria de reflexão	1ª tarefa	**X**		**X**				**X**	**X** (+-)	**X** (+-)	**X** (+)	**X**		**X**		**X**
		2ª tarefa	**X**			**X**	**X**	**X**	**X**	**X** (-)	**X** (+-)	**X** (+)	**X**			**X**	
		3ª tarefa	**X**		**X**		**X**	**X**	**X**	**X** (+)	**X (-)**	**X** (+)	**X**		**X**		
2ª Sequência	Simetria de figuras	1ª tarefa	**X**		**X**				**X**	**X** (+)	**X** (+-)	**X** (+)	**X**		**X**		
3ª Sequência	Sombras e projecções: Comprimento e proporcionalidade	1ª tarefa	**X**			**X**			**X**	**X** (+)	**X** (+-)	**X** (+-)	**X**		**X**		**X**
		2ª tarefa	**X**		**X**			**X**	**X**	**X** (+)	**X** (+-)		**X**		**X**		

Legenda:

(-) - pouco

(+-)- alguns

(+) - muito

Anexo II

Entrevista informal aos alunos do Gr

Questões iniciais:

- ✓ Está a ser interessante trabalhar estas tarefas construídas a partir das histórias?
- ✓ Gostam mais de trabalhar tendo uma história por base ou a partir de uma tarefa matemática apresentada sem história?

António – Eu acho que ter as histórias é importante porque fica mais giro e trabalhamos mais coisas.

Paula – Queres explicar melhor o que é isso de "ficar mais giro"?

António – Fica mais divertido trabalhar a matemática assim e trabalhamos coisas mais difíceis, mais ao meu gosto. Estou a chegar à conclusão que as histórias que eu gosto mais são mesmo aquelas que têm matemática.

Afonso – Eu gosto mais de trabalhar a matemática com histórias porque eu gosto de ouvir histórias e também porque as histórias têm vários problemas lá dentro e sem as histórias só resolvemos um problema.

Paula – E quando as tarefas matemáticas são apresentadas a partir de histórias o que é que tu sentes?

Afonso – Que as histórias nos ajudam a resolver os problemas.

Ficamos com mais ideias.

Ricardo – Eu gosto mais da matemática com histórias porque com as histórias nós conseguimos perceber o que aconteceu e isso ajuda-nos a dar as respostas e também porque, assim, eu consigo perceber de onde é que as perguntas da matemática aparecem. Por exemplo, *O Rapaz do Espelho* não apareceu de um momento para o outro.

Paula – Mas sem as histórias achas que não conseguias chegar às respostas?

Ricardo - Nós, sem as histórias, também chegávamos às respostas mas não da mesma maneira.

Paula – Porquê?

Ricardo - Porque não chegávamos às mesmas conclusões.

Paula – Mas porquê?

Ricardo – Porque com as histórias nós discutimos as situações e tiramos muitas ideias.

Joana – Eu gosto de resolver tarefas matemáticas com histórias e sem histórias. Com as histórias nós sabemos melhor as respostas mas sem as histórias também é possível responder.

Paula – Então se eu trouxesse estas perguntas para a aula sem as histórias para ti era indiferente, respondias da mesma maneira?

Joana – Se houvesse um texto ou uma frase, sim, nós respondíamos.

Paula – Mas sem o contexto da história, tu achas que chegavas à resposta da mesma maneira?

Joana – Não, porque, assim, eu não conhecia todas as coisas da história. Com a história eu conheço as personagens e sei porque estou a responder.

Anexo III

Autorizações