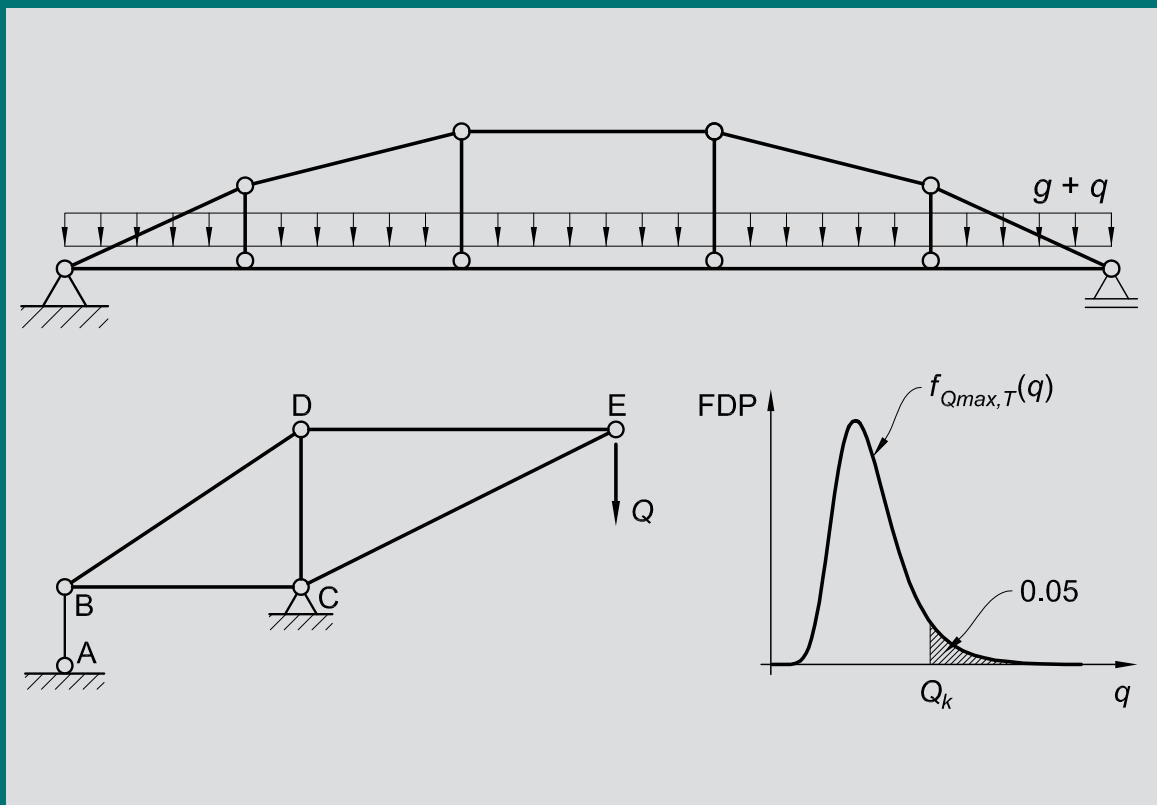


LUCIANO JACINTO

COLEÇÃO CAMINHOS DO CONHECIMENTO

SEGURANÇA ESTRUTURAL

UMA INTRODUÇÃO COM APLICAÇÕES
À SEGURANÇA DE ESTRUTURAS
EXISTENTES



LUCIANO JACINTO

SEGURANÇA ESTRUTURAL

UMA INTRODUÇÃO COM APLICAÇÕES
À SEGURANÇA DE ESTRUTURAS EXISTENTES

TÍTULO

Segurança Estrutural – Uma introdução com aplicações à segurança de estruturas existentes

AUTOR

Luciano Jacinto

EDITOR

Instituto Politécnico de Lisboa

DESIGN DA CAPA

Pedro Antunes

EXECUÇÃO GRÁFICA

Gráfica 99

© Instituto Politécnico de Lisboa, 2023



Todos os direitos reservados

Setembro de 2023

ISBN 978-989-53678-7-0

DEP. LEGAL N.º 518 975/23

À Paula, à Mariana e à Clara

Conteúdo

Prefácio	ix
Simbologia	xi
1 Introdução	1
1.1 O problema da segurança estrutural	1
1.2 Breve desenvolvimento histórico	2
1.3 O caso específico das estruturas existentes	3
2 Conceitos fundamentais de segurança estrutural	5
2.1 Requisitos básicos para as estruturas	5
2.2 Conceito de vida útil de projeto	6
2.3 Conceito de estado limite	7
2.4 Conceitos de fiabilidade e segurança	8
2.5 O método dos estados limites	8
2.5.1 Descrição do método	8
2.5.2 Método dos coeficientes parciais de segurança	10
2.5.3 Metodologia probabilística	15
2.6 Ações	17
2.6.1 Classificação das ações	17
2.6.2 Representação das ações	18
2.7 Situações de projeto	19
2.8 Combinação de ações	20
2.8.1 Regras gerais	20
2.8.2 Combinações para estados limites últimos	20
2.8.3 Combinações para estados limites de utilização	24
2.9 Durabilidade	24
2.10 Robustez	25
3 Conceitos fundamentais de probabilidade	27
3.1 Noções básicas	27
3.1.1 Noção de probabilidade	27
3.1.2 Noção de probabilidade condicionada	31
3.1.3 Noção de independência estatística	33
3.2 Variáveis aleatórias e distribuições de probabilidade	34

3.2.1	Conceito de variável aleatória	34
3.2.2	Distribuições de probabilidade	35
3.2.3	Medidas descritivas de variáveis aleatórias	37
3.3	Parâmetros dos modelos probabilísticos	42
3.4	Modelos probabilísticos comuns em segurança estrutural	44
3.4.1	Modelo Normal	44
3.4.2	Modelo Lognormal	48
3.4.3	Distribuições de extremos	49
3.5	Função distribuição inversa	54
4	Modelos probabilísticos multidimensionais	57
4.1	Conceito de vetor aleatório	57
4.2	Distribuição de probabilidade conjunta	57
4.3	Distribuições de probabilidade marginal e condicionada	59
4.3.1	Distribuição marginal	59
4.3.2	Distribuição condicionada	60
4.4	Variáveis estatisticamente independentes	61
4.5	Covariância	61
4.6	O modelo Normal bi-dimensional	64
4.7	Funções de variável aleatória	67
4.7.1	Determinação aproximada da média e variância	67
4.7.2	Análise de sensibilidade	70
5	Técnicas de estimação estatística	73
5.1	Conceitos de amostra aleatória e estatística	73
5.1.1	Amostra aleatória	73
5.1.2	Estatística	74
5.2	Estimação de parâmetros das distribuições	75
5.2.1	Método dos momentos	75
5.2.2	Método da máxima verosimilhança	76
5.3	Estimação de quantis	77
5.3.1	Variáveis normais	78
5.3.2	Variáveis lognormais	81
5.4	Estimação de valores característicos recorrendo a ensaios indiretos	82
5.5	Ajustamento de modelos probabilísticos a amostras	87
5.5.1	Análise qualitativa por meio de histogramas	87
5.5.2	Análise qualitativa por meio da função distribuição empírica	89
5.5.3	Conceito de papel de probabilidade	90
6	Método de Monte Carlo	97
6.1	Descrição do método	97
6.2	Análise de funções de variável aleatória pelo método de Monte Carlo	98
6.2.1	Estimativa da média, variância e desvio padrão	98
6.2.2	Análise da forma do histograma	99
6.2.3	Estimativa de quantis	101
6.2.4	Estimativa de probabilidades	102
6.3	Geração de amostras aleatórias	104
6.3.1	Método da transformação inversa	105
6.3.2	Aplicações do método da transformação inversa	105

6.4	Análise de sensibilidade com o método de MC	110
7	Conceitos fundamentais de fiabilidade estrutural	113
7.1	Conceitos de função estado limite e margem de segurança	113
7.2	Modelos de transformação	114
7.3	Seleção de modelos probabilísticos	117
7.3.1	Ações	117
7.3.2	Propriedades dos materiais	117
7.3.3	Parâmetros geométricos	118
7.3.4	Variáveis descritivas da incerteza de modelação	118
7.4	O problema fundamental da fiabilidade estrutural	120
7.5	Interpretação da probabilidade de falha	125
7.6	Índice de fiabilidade	125
7.7	Fiabilidade estrutural e fator tempo	130
8	Formatos de fiabilidade	137
8.1	Formatos de nível I	137
8.2	Formatos de nível II	140
8.3	Formatos de nível III	142
8.4	Formatos de nível IV	146
8.4.1	Conceito de risco	146
8.4.2	Dimensionamento ótimo	147
8.4.3	Avaliações de risco	147
9	Método FORM	151
9.1	Descrição do método	151
9.2	Coefficientes de sensibilidade FORM	157
9.3	Valores de dimensionamento FORM	161
9.4	Calibração de coeficientes parciais de segurança	164
10	Fiabilidade de sistemas	169
10.1	Fundamentos da teoria da fiabilidade de sistemas	169
10.1.1	Sistemas em série	170
10.1.2	Sistemas em paralelo	172
10.1.3	Sistemas mistos	174
10.2	Análise plástica probabilística	175
11	Critérios de aceitação da fiabilidade	179
11.1	Determinação da fiabilidade alvo	179
11.1.1	Otimização económica	180
11.1.2	Limites mínimos de fiabilidade	183
11.2	Valores da fiabilidade alvo recomendados em documentos de referência	184
11.2.1	Estruturas novas	184
11.2.2	Estruturas existentes	186
12	Valor característico e período de retorno	189
12.1	Definição de valor característico de ações variáveis	189
12.2	Probabilidade de excedência para diferentes períodos de referência	193
12.3	Período de retorno	194
12.4	Valor característico de uma ação variável em função do período de retorno	196

12.5	Ações variáveis com distribuição Gumbel	198
12.6	Período de retorno para situações de projeto transitórias	201
13	Determinação de coeficientes parciais de segurança	205
13.1	Formulação geral	206
13.2	Coeficientes de segurança para ações	210
13.2.1	Ações permanentes	210
13.2.2	Ações variáveis	211
13.3	Coeficientes de segurança para resistências	214
	Anexos	217
A	Distribuições de probabilidade discretas	219
A.1	Distribuição de Bernoulli	219
A.2	Distribuição Binomial	220
A.3	Distribuição Geométrica	220
A.4	Distribuição de Poisson	221
B	Distribuições de probabilidade contínuas	223
B.1	Distribuição Uniforme	223
B.2	Distribuição Normal	225
B.3	Distribuição Lognormal	228
B.4	Distribuição <i>t-Student</i>	232
B.5	Distribuição Gumbel (ou tipo I de máximos)	235
B.6	Distribuição Fréchet (ou tipo II de máximos)	238
B.7	Distribuição Weibull (ou tipo III de mínimos)	242
C	Modelo de regressão linear simples	249
	Bibliografia	255
	Índice remissivo	257

Prefácio

As expectativas da sociedade relativamente à segurança das construções são muito elevadas. A ocorrência de colapsos estruturais é em geral muito pouco tolerada, em especial quando daí resultam perdas humanas. Não admira, por isso, que o tema da segurança estrutural tenha atraído a atenção de muitos investigadores ao longo dos tempos.

Visto que o problema do dimensionamento e verificação da segurança das estruturas envolve tomar decisões em face de incertezas significativas, tais investigadores têm defendido que a abordagem probabilística do problema é a mais satisfatória. Neste respeito, cabe aqui uma referência especial à atividade pioneira dos engenheiros Julio Ferry Borges e Mário Castanheta, cujos trabalhos de investigação no domínio da segurança estrutural, realizados no LNEC a partir da década de 50, mereceram ampla aceitação e reconhecimento internacionais. Graças ao empenho notável desses e de outros investigadores daquele período, a segurança estrutural, até então tratada essencialmente de forma determinística, passou a ser analisada de forma mais racional e consistente.

A aplicação de conceitos probabilísticos no dimensionamento e verificação da segurança das estruturas deu origem a uma teoria conhecida atualmente como *teoria da fiabilidade estrutural*. Esta teoria está hoje bem consolidada e documentada, mas é pouco utilizada no dimensionamento das estruturas, embora a regulamentação atual o permita. A abordagem alternativa baseia-se no bem conhecido *método dos coeficientes parciais de segurança*. Devido à sua simplicidade e a um registo histórico bem-sucedido com a sua aplicação no projeto de estruturas, esse método é, e continuará a ser, o método principal de verificação da segurança de estruturas novas. No entanto, no domínio das estruturas existentes, a tendência atual é o uso cada vez mais generalizado de ferramentas probabilísticas. Uma das razões é que tais ferramentas permitem, de forma mais consistente, quantificar as diferentes fontes de incerteza, que são específicas da estrutura em avaliação. A regulamentação para estruturas novas aplica-se a populações de estruturas relativamente vastas, pelo que os coeficientes de segurança aí especificados poderão não traduzir corretamente as incertezas de uma estrutura particular em avaliação. Outra razão tem a ver com o facto de os trabalhos de reforço serem em geral muito onerosos, justificando avaliar a segurança da forma mais rigorosa possível, recorrendo, nomeadamente, a ferramentas probabilísticas.

A aplicação de tais ferramentas apresenta, porém, alguns desafios. Por um lado, verifica-se uma quase total ausência da teoria da fiabilidade estrutural nos currículos da maioria dos cursos de engenharia civil ministrados no país. Os alunos terminam os seus cursos com pouca formação nessa área, de modo que terão alguma dificuldade

caso dela necessitem na sua vida profissional. Por outro lado, trata-se de uma área com muito pouca divulgação na língua portuguesa, e os livros existentes na língua inglesa, apesar da sua elevada qualidade, são de um modo geral relativamente complexos.

O presente livro procura dar uma resposta, ainda que modesta, a esses desafios. Pensa-se, por isso, que o livro é oportuno e que será útil, não só em Portugal, mas também nos países de língua oficial portuguesa, onde os desafios não serão muito diferentes dos mencionados acima.

A teoria da fiabilidade estrutural é, contudo, um ramo do conhecimento muito vasto, e em certos aspetos também complexo, pelo que não se abordam todos os detalhes da teoria, mas apenas aqueles julgados essenciais e de aplicação prática mais imediata. Sempre que oportuno indicam-se ao longo do texto referências bibliográficas adicionais que permitirão ao leitor interessado aprofundar certas partes da matéria. Não se assume conhecimento prévio significativo na área das probabilidades, pois os conceitos probabilísticos necessários serão revistos em capítulos próprios.

As potencialidades das metodologias probabilísticas só são muitas vezes percebidas através de exemplos numéricos. Com isso em mente, privilegiou-se a inclusão de inúmeros exemplos ao longo do texto. Os exemplos estão resolvidos maioritariamente recorrendo à linguagem Python. Trata-se de uma linguagem interpretada e muito versátil, como o MATLAB. Tem, porém, a vantagem de ser gratuita, o que certamente tem contribuído para a sua enorme expansão e popularidade. Por ser uma linguagem poderosa e de fácil aplicação, constitui uma ferramenta ideal para a resolução de problemas na área da fiabilidade estrutural. A maioria dos exemplos são acompanhados pela listagem do código Python usado na sua resolução, o que permitirá ao leitor, por simples adaptação, resolver os seus próprios problemas.

Procurou usar-se uma linguagem concisa e rigorosa, mas sem sacrificar a clareza. Os capítulos foram mantidos com uma dimensão reduzida, a fim de facilitar a sua leitura. Cada capítulo inicia-se com um breve sumário do que vai ser tratado.

O autor sentir-se-á muito honrado se esta publicação contribuir para estimular no leitor o gosto por esse domínio do conhecimento tão nobre e fascinante que é a segurança estrutural.

Simbologia

Letras latinas

A	Ação de acidente
A_E	Ação sísmica
$\text{Cov}(X, Y)$	Covariância entre X e Y
$E(X)$	Valor esperado (ou valor médio) da variável X
E	Efeito das ações (deslocamento, deformação, tensão ou esforço)
$f_X(x)$	Função densidade de probabilidade da variável X (FDP)
$F_X(x)$	Função distribuição cumulativa da variável X (FDC)
$F_X^{-1}(x)$	Função distribuição inversa, ou função quantil, da variável X
$g()$	Função estado limite
g, G	Ação permanente
p_f	Probabilidade de falha, isto é, probabilidade de se ultrapassar um estado limite
p_{fT}	Probabilidade de falha alvo (<i>Target</i>)
$P(A)$	Probabilidade de ocorrência do acontecimento A
q, Q	Ação variável
R	Resistência
s	Desvio padrão amostral
s^2	Variância amostral
T	Período de referência
T_R	Período de retorno
$\text{Var}(X)$	Variância da variável X
V_X	Coefficiente de variação da variável X
\bar{x}	Média amostral
X_d	Valor de dimensionamento de X
X_k	Valor característico de X
X_{nom}	Valor nominal de X
X_p	Quantil p de X

Letras gregas

α_X	Coefficiente de sensibilidade FORM da variável X
β	Índice de fiabilidade
β_T	Índice de fiabilidade alvo (<i>Target</i>)
$\varphi(x)$	Função densidade de probabilidade da distribuição Normal reduzida
$\Phi(x)$	Função distribuição cumulativa da distribuição Normal reduzida
γ	Peso específico de um material
γ_F	Coefficiente parcial de segurança para ações
γ_M	Coefficiente parcial de segurança para resistências
μ_X	Valor esperado (ou valor médio) da variável X
θ	Parâmetro de um modelo probabilístico; variável descritiva da incerteza de modelação
σ_X	Desvio padrão da variável X
σ_X^2	Variância da variável X

Siglas

CPS	Coefficientes Parciais de Segurança
EL	Estado Limite
EN	Norma Europeia
FDC	Função Distribuição Cumulativa
FDP	Função Densidade de Probabilidade
FIB	<i>Fédération Internationale du Béton</i>
FMP	Função Massa de Probabilidade
FORM	<i>First Order Reliability Method</i>
FOSM	<i>First Order Second Moment Reliability Method</i>
IID	Independente e Identicamente Distribuída
ISO	<i>International Organization for Standardization</i>
JCSS	<i>Joint Committee on Structural Safety.</i>
LNEC	Laboratório Nacional de Engenharia Civil
NP	Norma Portuguesa
MC	Monte Carlo
TLC	Teorema do Limite Central
SP	Situação de Projeto

Capítulo 1

Introdução

Neste capítulo introdutório faz-se uma breve síntese do problema da segurança estrutural e o seu enquadramento histórico. Descreve-se também alguns dos desafios que a segurança estrutural apresenta no caso específico das estruturas existentes. Mostra-se que as ferramentas probabilísticas têm uma aplicação muito oportuna nesse domínio.

1.1 O problema da segurança estrutural

A sociedade espera que todas as construções, sejam edifícios, pontes ou outras estruturas, representem um risco muito baixo para a segurança dos seus ocupantes. No entanto, a mesma sociedade não está disposta a investir indefinidamente na segurança das mesmas, pois os recursos são limitados e necessários para outras atividades essenciais.

O problema da segurança estrutural consiste, portanto, em encontrar um bom compromisso entre estes dois aspetos aparentemente antagónicos: segurança por um lado, economia e sustentabilidade por outro. A determinação da capacidade resistente a conferir a uma estrutura deverá assegurar um nível de segurança significativo, mas sem implicar custos inportáveis.

O maior desafio na busca do referido compromisso resulta do facto de tal obrigar à quantificação de grandezas que são por natureza imprevisíveis. Considere-se, por exemplo, o projeto de uma estrutura particularmente sensível à ação do vento. Admitindo que a estrutura, uma vez construída, permanecerá em serviço durante aproximadamente 50 anos, então, seria muito útil conhecer o valor máximo da velocidade do vento que vai atuar na estrutura nesse período de 50 anos, a fim de conferir à estrutura a capacidade resistente suficiente para suportar esse preciso vento. Mas, como facilmente se compreende, tal é impossível conhecer *a priori*. Assim, nunca poderemos garantir que a velocidade do vento usada no dimensionamento não venha a ser ultrapassada durante a vida útil da estrutura. Este breve exemplo mostra claramente que não é possível garantir segurança absoluta para as estruturas. Teremos sempre de aceitar um certo risco de rotura estrutural.

1.2 Breve desenvolvimento histórico

Até sensivelmente à primeira metade do século XX, o processo de dimensionamento das estruturas foi dominado claramente pelo pensamento determinístico. Até então havia a percepção de que era possível conceber estruturas suficientemente seguras especificando os valores das ações que as mesmas teriam de suportar e estabelecendo resistências baixas (bastante inferiores às tensões de rotura dos materiais), chamadas *tensões admissíveis*, ou ainda *tensões de segurança*. Ao garantir que, para aquelas ações, as tensões aplicadas nas estruturas não excediam as tensões admissíveis, ficava demonstrado que os materiais estariam longe da rotura e as estruturas eram consideradas seguras.

A partir dos anos 20 (do século XX) verificou-se um esforço verdadeiramente notável em estabelecer em bases mais científicas e racionais o problema da segurança estrutural. Em 1924, o investigador sueco C. Forssell estabeleceu o princípio do dimensionamento ótimo, baseado na minimização do custo total das estruturas (Madsen et al., 2006). O custo total de uma estrutura inclui não só o custo inicial (projeto e construção), acrescido naturalmente do custo de manutenção, mas também o custo esperado com um eventual colapso da estrutura, que não é nulo em virtude de existir sempre uma certa probabilidade de colapso. Este custo esperado, dado pelo produto da probabilidade de colapso pelo custo a suportar em caso de colapso, é chamado risco. O risco precisa então de ser devidamente contabilizado a fim de se obter o custo total da estrutura¹. Ora, se por um lado o custo inicial aumenta com a capacidade resistente que se pretende dar à estrutura, por outro lado, o risco de colapso diminui, havendo por conseguinte um nível de capacidade resistente a que corresponde um custo total mínimo. O dimensionamento assim obtido pode ser considerado como o ótimo. Esta forma racional de pensar teve o mérito de juntar na mesma equação segurança e economia, o que permitiu conciliar os objetivos aparentemente contraditórios de que as estruturas devem ser seguras, mas não tão seguras ao ponto de isso comprometer a economia e sustentabilidade.

Considerando que o problema da segurança estrutural envolve a tomada de decisões em face de incertezas significativas, os investigadores deram-se conta de que a abordagem probabilística da segurança estrutural é a mais consistente. Estava então aberto o caminho para a mudança de paradigma no dimensionamento e verificação da segurança das estruturas. Uma das primeiras tentativas de introduzir conceitos probabilísticos na área da segurança estrutural deve-se ao investigador alemão Max Mayer, o qual publicou em 1926 um livro intitulado *Safety in constructional works and its design according to limit states instead of permissible stresses* (Borges e Castanheta, 1985).

Mas foi sobretudo a partir dos anos 40 que se registaram avanços significativos no tratamento probabilístico da segurança estrutural (Borges e Castanheta, 1985). Nas três décadas seguintes, até sensivelmente aos anos 70, foram inúmeros os investigadores que se dedicaram e contribuíram para o estudo do problema do dimensionamento estrutural em bases mais sólidas e consistentes. Nasceu então uma nova área do conhecimento: a *teoria da fiabilidade estrutural*.

O valor desta teoria é reconhecido nos modernos regulamentos e normas de segurança estrutural. Por exemplo, o regulamento português sobre segurança e ações

¹O risco pode ser encarado como o valor que estaríamos dispostos a pagar a uma companhia de seguros que aceitasse cobrir o risco em troca de uma remuneração na forma de um prémio anual.

(RSA, 1983) admite no Artigo 8.º a possibilidade de efetuar a verificação da segurança recorrendo a teorias probabilísticas, referindo que tais teorias podem conduzir a uma «quantificação mais objetiva da segurança». No comentário ao Artigo 9.º é mesmo mencionado que «o problema da verificação da segurança só pode ser corretamente resolvido com a necessária generalidade no quadro de uma formulação probabilística completa da segurança estrutural». Os Eurocódigos Estruturais também permitem a aplicação de ferramentas probabilísticas. Por exemplo, o Eurocódigo 0 (EN 1990, 2002) na Cláusula 3.5(5) refere que «poderá ser utilizado um dimensionamento diretamente baseado em métodos probabilísticos» e especifica no Anexo C as bases para a sua aplicação.

Embora o uso de ferramentas probabilísticas seja permitido no dimensionamento das estruturas novas, é na avaliação da segurança de estruturas existentes que a sua aplicação é mais promissora.

1.3 O caso específico das estruturas existentes

Embora o dimensionamento de uma estrutura nova e a avaliação da segurança de uma estrutura existente tenham muitos pontos em comum, as estruturas existentes apresentam desafios específicos que importa clarificar. Analisemos brevemente alguns desses desafios.

Em primeiro lugar, note-se que incrementar a fiabilidade de uma estrutura existente tem, regra geral, um custo bastante superior ao custo de um incremento idêntico na fiabilidade de uma estrutura ainda em projeto. Por exemplo, é muito mais fácil introduzir um varão adicional numa estrutura de betão armado quando esta está ainda no estirador do que introduzir o mesmo varão se a estrutura já existir (Vrouwenvelder, 2010). Um dimensionamento conservativo não resulta em geral num acréscimo de custo significativo, mas uma avaliação conservativa pode resultar em custos significativos (e porventura desnecessários). Assim, apesar de uma postura conservadora poder ser defensável no dimensionamento de uma estrutura nova, o mesmo não sucede no caso de uma estrutura existente. Visto que os trabalhos de reforço estrutural são em geral muito onerosos, o problema da segurança de estruturas existentes deve ser analisado da forma mais rigorosa possível.

Em segundo lugar, deve-se ter presente que algumas das incertezas existentes na fase de projeto, como por exemplo as relacionadas com as propriedades dos materiais, poderão ser reduzidas na fase de avaliação (por meio de consulta de registos de obra e certificados de qualidade dos materiais empregues, por exemplo). Há também a possibilidade de realizar ensaios não destrutivos, ou outros, que permitam colher informação relevante da estrutura em avaliação, e conseqüentemente reduzir os níveis de incerteza. Isto significa que os coeficientes parciais de segurança preconizados nos regulamentos e normas para estruturas novas, que se aplicam a populações relativamente vastas de estruturas, poderão ser excessivos quando aplicados a uma estrutura particular existente.

Além disso, pode suceder que a vida útil remanescente de uma estrutura existente seja inferior à vida útil de uma estrutura nova. Se esse for o caso, há legitimidade em reduzir os valores característicos das ações variáveis preconizados na regulamentação para estruturas novas, pois então a estrutura ficará exposta às ações durante menos tempo, reduzindo assim a probabilidade de serem atingidos valores extremos das ações.

Finalmente, questões como transtornos para os utilizadores não se colocam em geral no dimensionamento de estruturas novas, mas são pertinentes no caso de trabalhos de reabilitação de estruturas existentes.

Em vista destes desafios, compreende-se a necessidade de existirem regulamentos ou normas de segurança estrutural que tratem especificamente das estruturas existentes. A segunda geração dos Eurocódigos Estruturais, atualmente em franco desenvolvimento, procurará responder a esta necessidade.

Vários países têm vindo a encorajar o uso de ferramentas probabilísticas em avaliações da segurança de estruturas existentes. Uma das razões apontadas tem a ver com as poupanças financeiras significativas conseguidas com a aplicação de tais ferramentas. Na Dinamarca, por exemplo, relatam-se vários casos de pontes que foram classificadas como inseguras pela aplicação dos critérios tradicionais de segurança, mas que revelaram níveis de fiabilidade aceitáveis pela aplicação de métodos probabilísticos. Evitaram-se assim gastos desnecessários com trabalhos de reforço estrutural, além dos utilizadores terem sido poupados dos transtornos típicos que acompanham esses trabalhos (Lauridsen et al., 2007). Os autores desses estudos sublinham que em nenhum caso foi posta em causa a fiabilidade pretendida para essas pontes, sensivelmente idêntica à requerida para pontes novas, mas que a fiabilidade foi avaliada de forma mais realista.

Podemos então concluir que a teoria da fiabilidade estrutural tem um campo de aplicação muito oportuno na área das estruturas existentes, justamente por permitir abordar o problema da segurança de forma mais consistente e realista. Muitos exemplos que daremos ao longo do texto terão por foco as estruturas existentes. Usaremos a palavra *dimensionamento* sempre que nos estivermos a referir à verificação da segurança de estruturas novas e a palavra *avaliação* sempre que nos estivermos a referir às estruturas existentes.

Capítulo 2

Conceitos fundamentais de segurança estrutural

De acordo com os modernos regulamentos e normas de segurança estrutural, de que são exemplo os Eurocódigos Estruturais, as estruturas devem ser projetadas, construídas e mantidas de tal modo que, com apropriados níveis de fiabilidade e de forma económica, apresentem bom desempenho durante toda a sua vida útil.

Embora bastante genérico, este objetivo geral para as estruturas destaca vários aspetos importantes. Por exemplo, identifica as três fases principais da vida de uma estrutura: a fase do projeto, a fase da construção e a fase da utilização. As estruturas devem apresentar bom desempenho durante a sua vida útil, e isso é conseguido com medidas adequadas durante aquelas três fases. Esse bom desempenho deve ser realizado de forma económica e com apropriados níveis de fiabilidade.

Naturalmente é necessário esclarecer o que são níveis apropriados de fiabilidade e como se quantifica o desempenho de uma estrutura de modo a poder classificá-lo como bom. O presente capítulo procura dar respostas satisfatórias a estas questões. Iremos precisar alguns conceitos fundamentais relacionados com a segurança estrutural, incluindo o conceito muito importante de estado limite.

2.1 Requisitos básicos para as estruturas

Uma estrutura apresenta bom desempenho quando cumpre quatro requisitos gerais, que de forma sumária podem ser descritos como:

- 1. Segurança:** As estruturas devem ser capazes de resistir a cenários de muito baixa probabilidade de ocorrência, mas ainda assim verossímeis (ações extremas ou resistências muito baixas). Quando sujeitas a tais cenários extremos, admite-se que possam sofrer danos graves, mas na medida do possível sem colapsar, de modo a reduzir ao mínimo o risco de perdas humanas.
- 2. Utilização (ou serviço):** As estruturas devem apresentar comportamento adequado à sua utilização quando sujeitas às ações espetáveis durante a sua vida útil (ações com probabilidade significativa de ocorrência, ditas ações de

serviço). Quando sujeitas a estas ações, admite-se que possam sofrer danos, mas esses danos devem ser ligeiros e não prejudicar significativamente a utilização da estrutura, o seu aspeto ou o conforto dos utilizadores.

3. **Durabilidade:** As estruturas devem manter-se numa boa condição, isto é, sem deterioração significativa, durante a sua vida útil, sem que para tal sejam necessários custos de manutenção que não tenham sido previstos.
4. **Robustez:** As estruturas, quando sujeitas a ações de natureza accidental ou a erros humanos graves, não devem sofrer danos desproporcionais à causa que lhes dá origem.

A verificação do desempenho aos requisitos de segurança e utilização é feita recorrendo ao chamado *método dos estados limites*. Nas próximas secções vamos explorar a aplicação deste método. No final do capítulo, faremos considerações gerais a respeito da verificação do desempenho aos requisitos de durabilidade e robustez.

Antes de se analisar em que consiste o método dos estados limites, é oportuno precisar alguns conceitos básicos, como o conceito de vida útil de projeto, o conceito de estado limite e ainda os conceitos de fiabilidade e segurança.

2.2 Conceito de vida útil de projeto

De acordo com a EN 1990 (2002), *vida útil de projeto* é o período durante o qual se pretende que uma estrutura ou parte da mesma seja utilizada para as funções a que se destina, com a manutenção prevista, mas sem necessidade de grandes reparações.

A vida útil de projeto é usada no estabelecimento de determinados parâmetros, como por exemplo os valores das ações variáveis no tempo e certos parâmetros diretamente relacionados com a durabilidade. No caso das ações variáveis no tempo, conforme veremos, a sua quantificação é feita por análise estatística dos valores máximos da ação num determinado período de referência, que muitas vezes coincide com a vida útil de projeto. A fiabilidade (conceito a definir mais à frente) também é estabelecida com referência à vida útil de projeto. A vida útil de projeto constitui assim um dado importante, devendo ser fixado no início de qualquer projeto. Para estruturas correntes, adota-se normalmente 50 anos, e para estruturas de maior importância 100 anos.

Note-se que a vida útil real poderá ser substancialmente superior à vida útil de projeto. De facto, se a estrutura for alvo de um plano de manutenção bem definido e esse plano for cumprido, então, findo o período de vida útil de projeto, a estrutura estará numa boa condição, nada impedindo que continue a ser utilizada.

2.3 Conceito de estado limite

Como o nome sugere, *estado limite* (EL) é um estado a partir do qual a estrutura deixa de cumprir algum requisito estabelecido, estando assim de alguma forma prejudicada no desempenho das funções para que foi construída. Consoante o tipo e gravidade desses prejuízos, os EL classificam-se em dois grandes grupos:

1. **Estados limites últimos:** Estados associados a prejuízos graves, suscetíveis de comprometer a segurança das pessoas e bens. Estão associados normalmente ao colapso ou outras formas de ruína estrutural.
2. **Estados limites de utilização:** Estados associados a prejuízos de menor gravidade, que não comprometem a segurança de pessoas e bens, mas apenas o bom funcionamento da estrutura, o seu aspeto ou o conforto dos utilizadores.

Salienta-se que os EL últimos dizem respeito não só à segurança da estrutura propriamente dita, mas sobretudo à segurança das pessoas, quer as que utilizam a estrutura, quer as que estão nas suas imediações. Isto significa que, qualquer estado adverso suscetível de por em risco a vida de pessoas é suficientemente grave para que seja classificado como EL último.

Os EL últimos incluem, tipicamente:

- Perda de equilíbrio da estrutura ou de uma das suas partes, considerada como corpo rígido (derrubamento, por exemplo).
- Rotura de elementos estruturais (inclui os chamados EL últimos de resistência, por exemplo, rotura por flexão, por esforço transversal, ou por punção).
- Rotura do terreno de fundação.
- Rotura por fadiga.
- Rotura por instabilidade da estrutura ou de uma das suas partes.
- Colapso da estrutura, total ou parcial (transformação da estrutura ou de uma das suas partes num mecanismo).

Como exemplos de EL de utilização, refere-se:

- Danos locais, suscetíveis de acelerar a deterioração da estrutura ou prejudicar a sua aparência (fissuração nas estruturas de betão armado, por exemplo).
- Deformação suscetível de prejudicar o funcionamento da estrutura, o seu aspeto, ou afetar elementos não estruturais.
- Vibrações suscetíveis de causar desconforto nos utilizadores.

Enfatiza-se que a distinção entre EL último e EL de utilização tem a ver fundamentalmente com a gravidade desses estados, isto é, com as consequências mais ou menos severas que advêm se esses estados forem atingidos. É possível, no entanto, diferenciar a gravidade dentro de cada um desses dois grupos. Por exemplo, os EL de utilização podem ser reversíveis ou irreversíveis. Naturalmente estes últimos são mais graves. Os EL últimos podem ser precedidos de aviso (menos graves) ou ocorrer repentinamente (mais graves). Por exemplo, uma rotura dúctil é menos grave do que uma rotura frágil. Com efeito, quando a rotura é dúctil, as deformações que a precedem constituem um aviso, permitindo assim tomar medidas mesmo antes de se atingir o estado limite e conseqüentemente minorar as consequências.

A diferenciação da gravidade dos EL deve refletir-se nos níveis de fiabilidade a requerer para esses estados. Estados mais graves devem ter probabilidades de ocorrência menores, e portanto valores superiores de fiabilidade. É este o sentido da expressão «níveis apropriados de fiabilidade» que consta no objetivo geral para as estruturas, visto no início do capítulo. No Capítulo 11 veremos como ter em conta a gravidade dos EL na determinação dos níveis de fiabilidade a requerer.

2.4 Conceitos de fiabilidade e segurança

A fiabilidade (*reliability*) de uma estrutura é definida relativamente a um determinado requisito e a um determinado intervalo de tempo. Mais concretamente, a fiabilidade de uma estrutura em relação a um requisito e a um intervalo de tempo é a probabilidade desse requisito ser satisfeito nesse intervalo de tempo.

Trata-se assim de uma grandeza quantitativa (neste caso uma probabilidade, e portanto compreendida entre 0 e 1), suscetível de ser calculada ou estimada. Por exemplo, suponhamos uma viga para a qual se estimou uma fiabilidade à rotura por flexão de 0.9999 em 50 anos. Isto significa que a probabilidade de se verificar a rotura por flexão em 50 anos é de $1 - 0.9999 = 0.0001$.

Já o conceito de segurança é qualitativo (Schneider, 2006). Com efeito, não faz sentido a expressão «calcular a segurança». Segurança pode ser definida como um atributo das estruturas que nos permite classificá-las como seguras ou como inseguras. Uma estrutura é segura quando a sua fiabilidade (principalmente com respeito à possibilidade de causar danos em pessoas) é superior a um valor previamente aceite como mínimo admissível, e insegura caso contrário.

2.5 O método dos estados limites

2.5.1 Descrição do método

A verificação do desempenho das estruturas¹ é feita hoje em dia recorrendo ao chamado *método dos estados limites*. Este método consiste basicamente em comparar, para cada estado limite relevante, uma grandeza atuante E , representando um efeito das ações, com uma grandeza correspondente R , representando a resistência ou capacidade da estrutura face ao efeito em consideração, procurando-se garantir que:

$$E \leq R. \quad (2.1)$$

A condição expressa nesta inequação designa-se por *condição de segurança*. Se esta condição for cumprida diz-se que está satisfeita a segurança.

A grandezas E e R são diretamente comparáveis entre si, sendo por isso expressas no mesmo domínio (esforços, deslocamentos, tensões, ações, etc). Assim, se E representar um esforço atuante numa secção da estrutura, R representa o correspondente esforço resistente da secção. Se E representar uma carga atuante, R representa o valor máximo dessa carga que a estrutura é capaz de suportar, e assim sucessivamente.

¹Em vez da expressão «verificação do desempenho» iremos usar daqui em diante a expressão «verificação da segurança», por ser mais comum no meio técnico. No entanto, convém ter presente que a expressão «verificação da segurança» não se refere apenas à verificação do requisito da segurança, mas também à verificação do requisito da utilização.

Este último caso (onde E e R são expressos no domínio das ações) é utilizado na verificação da segurança aos EL últimos de equilíbrio e de transformação da estrutura num mecanismo (colapso da estrutura).

No caso da verificação da segurança aos EL de utilização, a grandeza R representa em geral um parâmetro máximo admissível, diretamente comparável com o efeito E . Por exemplo, no caso do EL de deformação, E representa um deslocamento numa dada secção da estrutura e R o deslocamento máximo admissível nessa secção. No caso do EL de abertura de fendas (relevante em estruturas de betão armado), E representa uma abertura calculada e R a abertura máxima considerada admissível.

A verificação da condição de segurança deve ser estendida a todos os EL relevantes. Um EL não é relevante quando a verificação da segurança a esse estado limite estiver automaticamente assegurada pela satisfação da segurança a outros EL, ou quando a sua probabilidade de ocorrência for muito inferior à dos outros EL.

A verificação da segurança de uma estrutura passa assim pela identificação criteriosa de todos os EL relevantes. Se a segurança estiver satisfeita para todos esses EL, considera-se que a estrutura é segura como um todo (desde que, evidentemente, nenhum EL relevante tenha ficado esquecido²).

A ideia expressa na condição $E \leq R$ é intuitiva e lógica: o que atua na estrutura não deve ultrapassar aquilo que ela é capaz de suportar. No entanto, a verificação dessa condição levanta algumas dificuldades, nomeadamente a dificuldade em quantificar com rigor e certeza absoluta o efeito E e a resistência R . Por exemplo, suponha-se que a ação do vento é uma ação importante na verificação da segurança de uma determinada estrutura. Admitindo que a estrutura está a ser projetada para uma vida útil de projeto de 50 anos, seria muito útil saber qual a velocidade máxima do vento atuante na estrutura nos próximos 50 anos, a fim de verificar a segurança para essa velocidade específica. No entanto, como facilmente se compreende, conhecer *a priori* o valor dessa velocidade é impossível. Podemos, quando muito, à base de um registo histórico de velocidades do vento, estimar a média e o desvio padrão dos máximos da velocidade do vento nos próximos 50 anos, admitindo que a variabilidade do vento no futuro é equiparável à variabilidade no passado. Com base nessa média e desvio padrão é possível estimar a probabilidade da velocidade do vento ultrapassar determinado valor nos próximos 50 anos, mas determinar o valor máximo da velocidade nesse período com absoluta certeza é impossível. Com a resistência R passa-se algo semelhante. Considere-se, por exemplo, a resistência do betão. Se ensaiarmos 7 cubos de betão à compressão provenientes da mesma amassadura, obteremos 7 valores diferentes da resistência, pelo que nunca estaremos seguros do seu verdadeiro valor. A resistência do betão só poderá assim ser conhecida em termos probabilísticos, por exemplo através de uma média e de um desvio padrão, que poderão ser estimados a partir dos resultados dos ensaios.

Uma vez que as grandezas E e R têm natureza marcadamente aleatória, tornando impossível quantificá-las com certeza absoluta, a condição $E \leq R$ não pode ser aplicada diretamente. Existem duas metodologias principais que permitem ultrapassar essa limitação: (1) metodologia semi-probabilística e (2) metodologia probabilística completa. A primeira metodologia, também conhecida como *método dos coeficientes*

²No Capítulo 7 analisaremos resumidamente o problema da fiabilidade de sistemas. Concluiremos aí que, no caso de estruturas isostáticas, pode acontecer que todos os elementos estruturais tenham fiabilidade suficiente e ainda assim a estrutura não seja segura em relação ao colapso. Isto significa que a afirmação de que a estrutura é segura se for segura em relação a todos os estados limites relevantes não é rigorosamente verdadeira.

parciais de segurança (CPS), continua a ser a metodologia principal de verificação da segurança de estruturas novas. Para estruturas existentes, porém, os métodos probabilísticos têm uma aplicação muito oportuna, conforme ficará evidente nos exemplos que iremos ver ao longo do texto.

Nota histórica A metodologia que antecedeu o método dos estados limites é conhecida como *método das tensões admissíveis*³ ou ainda como *método das tensões de segurança*. A ideia do método consistia basicamente em comparar uma tensão atuante, σ_{act} , com uma tensão admissível, σ_{adm} , procurando-se garantir que:

$$\sigma_{act} \leq \sigma_{adm}. \quad (2.2)$$

A tensão atuante era calculada para as chamadas ações de serviço, isto é, ações sem qualquer fator majorativo, e a tensão admissível era obtida dividindo a tensão de rotura do material por um fator global de segurança. A satisfação da Eq. (2.2) assegurava que as tensões aplicadas nos materiais em situação de serviço eram suficientemente baixas. Garantia-se assim que os materiais estariam longe da rotura e a estrutura era considerada segura. ■

Analisemos agora de forma mais detalhada em que consistem as duas abordagens mencionadas acima. Começemos pelo método dos coeficientes parciais de segurança (CPS), que pode ser encarado como uma metodologia semi-probabilística.

2.5.2 Método dos coeficientes parciais de segurança

Considere-se o EL representado pela condição $E \leq R$, onde E representa um determinado efeito de ação numa determinada secção da estrutura e R a resistência correspondente. De acordo com o método dos coeficientes parciais de segurança (CPS), entre os muitos valores possíveis das grandezas E e R , começa por escolher-se um valor específico de cada uma, chamado *valor representativo*. O valor representativo mais comum é o chamado *valor característico*, representado por E_k e R_k , respetivamente. Os valores característicos correspondem a certos quantis⁴ das respetivas distribuições de probabilidade, sendo comuns o quantil 0.95 para o efeito de ação E e o quantil 0.05 para a resistência R .

Substituindo na condição $E \leq R$ a variável E por E_k e a variável R por R_k , a condição de segurança passar a ser $E_k \leq R_k$. Esta condição, porém, se fosse aplicada, conduziria a estruturas com probabilidade de rotura inaceitável (considerando aqueles quantis), de modo que é necessário escolher para E um valor superior a E_k , e para R um valor inferior a R_k . Tal é feito multiplicando E_k por um fator γ_F e dividindo R_k por um fator γ_M , ambos superiores ou iguais a 1.0. Esses fatores, que se designam por *coeficientes parciais de segurança*, uma vez aplicados aos valores característicos E_k e R_k , transformam-nos nos chamados *valores de dimensionamento*, representados respetivamente por E_d e R_d , isto é:

$$E_d = \gamma_F E_k; \quad (2.3)$$

$$R_d = \frac{R_k}{\gamma_M}. \quad (2.4)$$

³Este método tem tido uma longa história de utilização na área da Geotecnia e em particular no dimensionamento de fundações.

⁴A noção de quantil e outros conceitos probabilísticos será recordada no próximo capítulo.

A condição de segurança adquire finalmente a forma:

$$E_d \leq R_d \quad (2.5)$$

Os coeficientes parciais de segurança são escolhidos de tal forma que a condição $E_d \leq R_d$, uma vez satisfeita, conduza a estruturas com fiabilidade aceitável. Esta é a essência do método dos coeficientes parciais de segurança, que se ilustra esquematicamente na Figura 2.1.

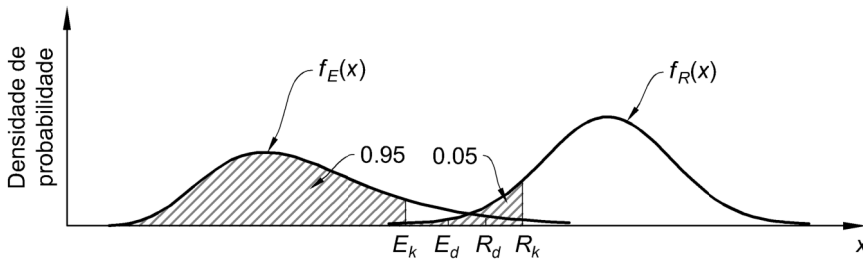


Figura 2.1 Representação esquemática do método dos coeficientes parciais de segurança. A segurança considera-se satisfeita se $E_d \leq R_d$. As funções $f_E(x)$ e $f_R(x)$ representam as chamadas funções densidade de probabilidades das variáveis E e R , respetivamente. No próximo capítulo recordaremos a definição precisa dessas funções.

O termo *parcial* na expressão *coeficiente parcial de segurança* enfatiza o facto de que cada variável interveniente num dado EL tem o seu próprio coeficiente de segurança. A aplicação de um coeficiente de segurança distinto para cada variável permite diferenciar as incertezas em cada variável, as quais, evidentemente, não são iguais em todas as variáveis.

Disse-se acima que os valores característicos são determinados a partir de certos quantis, por exemplo 0.95 no caso das ações e 0.05 no caso das resistências. É importante salientar que a escolha desses quantis é perfeitamente convencional. Na verdade, poder-se-iam usar quaisquer outros quantis, desde que os coeficientes parciais de segurança fossem corrigidos de modo a obter os mesmos valores de dimensionamento, e portanto a mesma fiabilidade. Existem boas razões, porém, para adotar esses quantis. Com efeito, os valores característicos baseados nesses quantis podem ser estimados com um nível razoável de confiança a partir de amostras de relativamente pequena dimensão (dimensão de 10 a 15, como ordem de grandeza). Se se usassem quantis mais elevados para as ações (por exemplo 0.99) e mais baixos para as resistências (por exemplo 0.01), seriam necessárias amostras de maior dimensão para o mesmo nível de confiança nas estimativas.

O método dos CPS, expresso na Eq. (2.5), é dito método semi-probabilístico visto que utiliza alguns conceitos probabilísticos, nomeadamente o conceito de valor característico. No entanto, visto que as ações e as resistências são representadas por um único valor, o método é na sua essência um método determinístico.

Convém salientar que, num problema típico de segurança, intervêm mais do que apenas duas variáveis. Na verdade, a variável E é, ela própria, função de outras variáveis: cargas atuando simultaneamente, dimensões dos elementos estruturais, propriedades elásticas dos materiais, e assim por diante. Também a variável R é em geral

função de outras variáveis: resistência dos materiais, dimensões das secções dos elementos estruturais, entre outros. As diferentes variáveis intervenientes nos problemas de segurança, por vezes chamadas de *variáveis básicas*, podem agrupar-se em três tipos principais:

- ações (F_1, F_2, \dots);
- propriedades dos materiais (f_1, f_2, \dots);
- grandezas geométricas (a_1, a_2, \dots).

O efeito E é assim função dessas variáveis, o mesmo sucedendo com a resistência R . Em símbolos⁵:

$$E = E(F_1, F_2, \dots, f_1, f_2, \dots, a_1, a_2, \dots), \quad (2.6)$$

$$R = R(F_1, F_2, \dots, f_1, f_2, \dots, a_1, a_2, \dots). \quad (2.7)$$

De acordo com o método dos CPS, o cálculo de E_d e R_d é feito substituindo cada uma das variáveis básicas pelo respetivo valor de dimensionamento, isto é:

$$E_d = E(F_{1d}, F_{2d}, \dots, f_{1d}, f_{2d}, \dots, a_{1d}, a_{2d}, \dots) \quad (2.8)$$

$$R_d = R(F_{1d}, F_{2d}, \dots, f_{1d}, f_{2d}, \dots, a_{1d}, a_{2d}, \dots) \quad (2.9)$$

O valor de dimensionamento da ação F_i é dado em geral por uma expressão do tipo:

$$F_{id} = \gamma_{F_i} \cdot \psi_i \cdot F_{ik} \quad (2.10)$$

onde ψ_i representa um eventual coeficiente de redução a aplicar às chamadas ações variáveis acompanhantes (a definir mais à frente) e os restantes símbolos têm o significado visto anteriormente.

No caso dos materiais, o valor de dimensionamento da propriedade f_i é em geral calculado por uma expressão do tipo:

$$f_{id} = \frac{f_{ik}}{\gamma_{M_i}} \quad (2.11)$$

O valor característico f_{ik} refere-se geralmente ao quantil 0.05 da distribuição de probabilidade de f_i . No entanto, se um valor elevado desta propriedade for desfavorável à segurança, deve utilizar-se o quantil 0.95. No caso das propriedades elásticas (módulo de elasticidade e coeficiente de poisson), o valor característico a usar é geralmente o valor médio.

⁵Note-se que alguns efeitos de ações dependem das propriedades dos materiais. Por exemplo, os impulsos de terras numa estrutura de suporte (efeito de ação) dependem do ângulo de atrito do aterro (um parâmetro resistente do material). Da mesma forma, algumas resistências dependem das ações. Por exemplo, o momento resistente de uma secção depende do esforço axial que lhe está aplicado, e a força de atrito máxima na base de uma sapata depende do esforço axial transmitido à sapata.

Relativamente às grandezas geométricas, o valor de dimensionamento é obtido geralmente através de uma tolerância. Assim, designando por Δa a tolerância relativa à grandeza a , o respetivo valor de dimensionamento é dado por:

$$a_d = a_{nom} \pm \Delta a \quad (2.12)$$

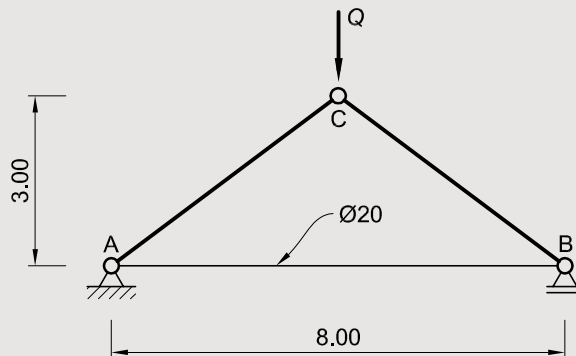
onde a_{nom} , designado *valor nominal*, é o valor de a que consta nos desenhos de construção. Visto que as grandezas geométricas apresentam geralmente menor variabilidade comparativamente com as ações e propriedades dos materiais, o valor de dimensionamento coincide habitualmente com o valor que consta nos desenhos de construção, isto é, $a_d = a_{nom}$, o que equivale à adoção de uma tolerância nula.

No caso de algumas grandezas geométricas, a sua variabilidade está incluída na variabilidade de outras grandezas que com elas estão relacionadas, não havendo assim a necessidade de introduzir qualquer tolerância. É o caso, por exemplo, da área das armaduras ordinárias (varões para betão armado). Como a tensão de cedência dessas armaduras é calculada dividindo a força de cedência obtida nos ensaios de tração pela área nominal dos varões (não pela área real), a variabilidade da tensão de cedência assim obtida já incorpora a variabilidade das áreas dos varões.

Antes de se apresentar um exemplo de aplicação do método dos CPS, convém chamar a atenção para que a condição de segurança $E_d \leq R_d$ é escrita de maneira ligeiramente diferente consoante o tipo de EL em consideração. Por exemplo, no caso dos EL de resistência, a condição de segurança é estabelecida geralmente em termos de esforços. Assim, para o EL último de flexão, escreve-se $M_{Ed} \leq M_{Rd}$; para o EL de peças só com esforço axial escreve-se $N_{Ed} \leq N_{Rd}$; para o EL de esforço transversal escreve-se $V_{Ed} \leq V_{Rd}$, e assim sucessivamente. O primeiro valor é designado *esforço atuante de cálculo* e o segundo *esforço resistente de cálculo*.

Vejamos um exemplo de aplicação do método dos CPS.

Exemplo 2.1 Considere-se a estrutura cujo modelo se representa na Figura junta. A estrutura suporta uma carga Q e o seu peso próprio é desprezável.



Por meio de algum processo de controlo eficaz, sabe-se que a carga Q não pode ultrapassar 210 kN, mas existem dúvidas sobre a capacidade de suporte da estrutura a essa carga. Mais especificamente, suspeita-se que a resistência do

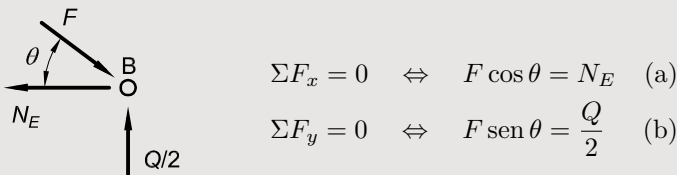
tirante AB não é suficiente. O tirante é constituído por um varão ordinário da classe A500 com diâmetro de 20 mm ($A_s = 3.14 \text{ cm}^2$). O valor característico da tensão de cedência do aço, f_{yk} , é de 500 MPa.

Recorrendo ao método dos CPS, verificar a segurança ao EL de resistência do tirante face a uma carga Q de 210 kN. Considerar o coeficiente de segurança habitual para armaduras ordinárias $\gamma_M = 1.15$.

Resolução

Uma vez que o tirante possui apenas esforço axial, a condição de segurança é $N_{Ed} \leq N_{Rd}$. Há pois que determinar o esforço axial atuante (que é função da carga Q), e o esforço axial resistente (que é função da tensão de cedência f_y do aço).

Relativamente ao esforço axial atuante, este determina-se facilmente efetuando o equilíbrio do nó B:



Dividindo (a) por (b), vem:

$$\frac{1}{\tan \theta} = \frac{N_E}{Q/2} \Leftrightarrow N_E = \frac{Q}{2 \tan \theta}$$

$$\Leftrightarrow N_E = \frac{Q}{2 \times \frac{3}{4}} = \frac{2}{3} Q.$$

Como a carga Q não pode ultrapassar 210 kN, este é o valor de dimensionamento a considerar, isto é, $Q_d = 210 \text{ kN}$. Note-se que só se justificaria aplicar um coeficiente de segurança a esse valor, se o processo de controlo referido no enunciado não fosse totalmente eficaz. Estamos a admitir que é eficaz. Assim,

$$N_{Ed} = (2/3)(210) = 140 \text{ kN}.$$

Relativamente ao esforço axial resistente, N_R , é dado pelo produto da tensão de cedência do aço, f_y , pela área do varão, A_s , isto é, $N_R = f_y A_s$. Tem-se, pois:

$$\begin{aligned} N_{Rd} &= f_{yd} A_s \\ &= \frac{f_{yk}}{\gamma_M} A_s \\ &= \frac{500 \times 10^3}{1.15} (3.14 \times 10^{-4}) = 136.6 \text{ kN}. \end{aligned}$$

Como $N_{Ed} > N_{Rd}$, a segurança não se encontra satisfeita.

Dissemos anteriormente que a condição de segurança $E_d \leq R_d$ necessita de ser adaptada em função do EL em consideração, devendo por isso ser encarada de forma

simbólica. Vejamos mais alguns casos onde tal adaptação é necessária.

No caso da flexão composta, por exemplo, o EL é estabelecido em termos do par de esforços (M, N) , de modo que é necessário adaptar a condição de segurança, uma vez que não tem sentido a comparação de um par de esforços atuantes com um par de esforços resistentes. Neste caso, a verificação da segurança consiste em comprovar que o ponto de coordenadas (M_{Ed}, N_{Ed}) está localizado no interior da região delimitada pela curva formada pelos pontos (M_{Rd}, N_{Rd}) , por vezes chamada curva de interação momento–esforço axial. Em alternativa, a condição de segurança pode ser escrita na forma:

$$M_{Ed} \leq (M_{Rd} | N_{Ed}), \quad (2.13)$$

onde $M_{Rd} | N_{Ed}$ representa o momento resiste da secção para um esforço axial atuante igual a N_{Ed} .

No caso do EL de perda de equilíbrio, a condição de segurança é escrita geralmente em termos de ações, apresentando-se geralmente com o seguinte formato:

$$E_{d,dst} \leq E_{d,stab}, \quad (2.14)$$

onde $E_{d,dst}$ representa o valor de cálculo das ações instabilizantes e $E_{d,stab}$ o valor de cálculo das ações estabilizantes. No caso do EL último de derrubamento, as ações referem-se aos momentos calculados em torno do ponto onde há risco de rotação. Para verificar a segurança ao EL de perda de equilíbrio começa por isolar-se a estrutura em estudo (tratando-a como corpo rígido), representando todas as ações que nela atuam (diagrama de corpo livre) na situação limite, isto é, quando a estrutura está na iminência de perder o equilíbrio. Estas ações e os seus efeitos (por exemplo, momentos, no caso do EL último de derrubamento) serão colocados no primeiro membro ou no segundo membro da inequação (2.14) consoante sejam ações instabilizantes ou ações estabilizantes.

Os EL de perda de equilíbrio incluem, tradicionalmente, o deslizamento (translação da estrutura, como corpo rígido) e o derrubamento (rotação da estrutura, como corpo rígido). No entanto, de acordo com os Eurocódigos Estruturais, o EL de deslizamento (de muros de suporte de terras, por exemplo) deve ser tratado como EL de resistência, pois o EL ocorre quando é ultrapassada uma resistência, neste caso a resistência ao corte na interface entre o terreno e a base da sapata.

2.5.3 Metodologia probabilística

Na metodologia probabilística, as variáveis E e R são representadas, não por um único valor, mas por uma distribuição de probabilidade. Estas distribuições descrevem a incerteza nos possíveis valores dessas variáveis. Uma vez atribuídas distribuições de probabilidade a E e R , pode avaliar-se sem dificuldade a probabilidade do evento $E > R$, probabilidade essa que designaremos por probabilidade de falha⁶. A probabilidade de falha é assim definida por:

$$p_f = P(E > R) \quad (2.15)$$

⁶Na literatura inglesa esta probabilidade é designada *failure probability*, e traduzida frequentemente por probabilidade de colapso, ou ainda probabilidade de rotura. Estas traduções não são totalmente satisfatórias pois transmitem a ideia de EL último, e a probabilidade de que estamos a falar (probabilidade de se ultrapassar um determinado EL) aplica-se tanto a EL últimos como a EL de utilização. Por este motivo iremos usar ao longo do texto a tradução literal, isto é, probabilidade de falha.

Na abordagem probabilística da segurança estrutural, procura-se que a probabilidade p_f seja inferior a um valor previamente aceite como máximo admissível, ou valor alvo (*target*), usualmente representado por p_{fT} . Assim, numa abordagem totalmente probabilística, a verificação da segurança em relação a um determinado EL consiste em verificar a condição:

$$p_f \leq p_{fT} \quad (2.16)$$

Os regulamentos modernos para a segurança das estruturas contêm recomendações respeitantes à probabilidade p_{fT} . Um valor típico para EL últimos e para um período de 50 anos é $p_{fT} = 7.2 \times 10^{-5}$. No Capítulo 11 analisaremos o problema da determinação da probabilidade p_{fT} .

No próximo capítulo iremos considerar novamente a estrutura do exemplo anterior e, após uma breve recapitulação da teoria das probabilidades, iremos determinar a probabilidade do tirante romper quando se aplica uma carga $Q = 210$ kN (Exemplo 3.5, p. 45). Veremos que essa probabilidade é muito baixa, concluindo-se que a fiabilidade da estrutura face ao cenário de rotura do tirante é suficiente. Pode acontecer assim que uma estrutura não verifique a segurança segundo o método dos CPS e ainda assim possua fiabilidade suficiente. Por este motivo, a aplicação de metodologias probabilísticas tem vindo a ser fortemente encorajada no domínio da segurança de estruturas existentes. Se uma estrutura não cumprir os critérios de segurança segundo o método dos CPS, não devemos concluir logo que a estrutura necessita de ser reforçada. Como os trabalhos de reforço são em geral muito onerosos, justifica-se plenamente uma análise da segurança mais rigorosa. Se se concluir que a estrutura, afinal, possui fiabilidade suficiente, os trabalhos de reforço serão desnecessários e os fundos poupados poderão ser empregues de maneira mais eficiente em trabalhos de manutenção.

Esclarece-se de seguida uma questão que poderá surgir na mente do leitor. Uma vez que, quando os EL últimos são atingidos, necessariamente já se violaram os EL de utilização, não seria suficiente verificar a segurança apenas aos EL de utilização? Se estiver garantida a segurança aos EL de utilização, então, aparentemente, estaria automaticamente garantida a segurança aos EL últimos, pois os EL de utilização ocorrem sempre primeiro. Por que razão é então necessário considerar explicitamente ambos os EL, utilização e últimos?

Esta questão é facilmente compreendida se atendermos à natureza probabilística do problema da segurança. De facto, quando se afirma que a segurança a um estado limite se encontra satisfeita, não se está a afirmar que esse estado limite não vai ser atingido, mas tão somente que a probabilidade de ele ser atingido é pequena (e apropriada à gravidade das consequências da sua violação). Visto que os EL últimos são muito mais graves do que os EL de utilização, é necessário comprovar que tenham uma probabilidade de ocorrência muito mais baixa, pelo que têm de ser sempre considerados explicitamente. Aliás, muitas vezes, a verificação da segurança é condicionada pelos EL últimos, não pelos EL de utilização.

2.6 Ações

2.6.1 Classificação das ações

As ações são grandezas capazes de alterar o estado de tensão e/ou deformação das estruturas⁷. Podem corresponder a forças aplicadas na estrutura (o seu peso próprio, por exemplo), ou a deformações impostas (variações de temperatura, por exemplo). Uma ação é considerada como ação individual se puder ser considerada estatisticamente independente (no tempo e no espaço) das restantes ações. Quando duas ações estiverem fortemente correlacionadas entre si (por exemplo, quando têm origem comum), devem ser consideradas como fazendo parte da mesma ação. É o caso, por exemplo, da força de frenagem dos veículos transmitida a uma ponte, que deverá ser considerada como fazendo parte da sobrecarga que lhe dá origem.

As ações podem ser classificadas segundo critérios vários. Do ponto de vista da variabilidade ao longo do tempo e no espaço, as ações classificam-se em quatro grandes categorias:

1. *Permanentes (G)*: ações cuja variabilidade no tempo é desprezável, ou, não sendo desprezável, dá-se sempre no mesmo sentido (ação monotónica). Por exemplo:
 - peso próprio da estrutura;
 - peso próprio de elementos não estruturais;
 - pré-esforço;
 - retração e fluência do betão⁸;
 - impulsos devido ao peso de terras;
 - certas pressões hidrostáticas;
 - assentamentos de apoio.
2. *Variáveis (Q)*: ações cuja variabilidade no tempo ou no espaço é significativa. Por exemplo:
 - sobrecargas de utilização;
 - vento;
 - neve;
 - variações de temperatura;
 - pressões hidrostáticas e hidrodinâmicas.
3. *Acidentais (A)*: ações excecionais de baixa probabilidade de ocorrência, em geral de curta duração e intensidade significativa. Por exemplo:
 - colisões;
 - incêndios;
 - explosões;
 - queda de cimbra durante a construção;
 - tornados;
 - queda excepcional de neve.

⁷Em sentido mais amplo, as ações devem incluir certo tipo de influências ambientais suscetíveis de afetar o desempenho das estruturas, particularmente a sua durabilidade (por exemplo, ação dos cloretos, ação da humidade, ação do CO₂), ou mesmo suscetíveis de provocar o seu colapso (por exemplo, ação da erosão em fundações).

⁸A retração e fluência do betão variam com o tempo, mas por se tratarem de efeitos monotónicos, classificam-se como permanentes.

4. Ação sísmica (A_E).

Repare-se que a ação sísmica está a ser classificada autonomamente, o que se harmoniza com a tendência atual. Embora ela apresente semelhanças com as ações de acidente, no sentido de que pode assumir valores extremamente gravosos em curtos espaços de tempo, a verdade é que se trata de uma ação com características muito próprias, fazendo todo o sentido tratá-la de forma individual. Conforme veremos, a própria combinação de ações onde intervém a ação sísmica é diferente das restantes combinações.

Existem ainda outros critérios de classificação das ações. Por exemplo, quanto ao tipo de resposta que provocam na estrutura, as ações podem ser:

1. *Estáticas*: ações que não causam acelerações significativas na estrutura.
2. *Dinâmicas*: ações que, devido à sua variabilidade rápida no tempo ou no espaço, causam acelerações significativas na estrutura.

Quanto ao modo de aplicação, as ações podem ser:

1. *Diretas*: ações aplicadas sob a forma de forças ou momentos.
2. *Indiretas*: ações aplicadas sob a forma de deformações impostas (variações de temperatura, por exemplo) ou acelerações impostas (ação sísmica, por exemplo).

Quanto à variabilidade no espaço, as ações classificam-se em:

1. *Fixas*: ações com ponto de aplicação fixo no espaço.
2. *Livres*: ações com ponto de aplicação variável no espaço. As ações livres poderão ser móveis, ou não. Ações móveis, também chamadas ações rolantes, são ações cujo ponto de aplicação segue uma trajetória contínua.

2.6.2 Representação das ações

As ações poderão ser descritas e quantificadas por meio de modelos com diferentes graus de complexidade. Assim, por ordem crescente de complexidade, as ações poderão ser descritas por meio de:

- *Valores representativos*: sempre que a ação seja quantificada por valor único.
- *Variáveis aleatórias*: sempre que a variabilidade da ação ao longo do tempo possa ser descrita por meio de uma única variável aleatória.
- *Processos estocásticos*: sempre que a variabilidade da ação ao longo do tempo não possa ser descrita por uma única variável aleatória.

O valor representativo mais comum é o chamado *valor característico*, que corresponde, como vimos, a um certo quantil da distribuição de probabilidade em causa.

No caso de ações permanentes G , se a sua variabilidade puder ser considerada pequena, como é em geral o peso próprio da estrutura, G é representada em geral pelo seu valor médio, G_m . No entanto, se o EL em consideração for muito sensível às variações de G , deverão usar-se dois valores, mesmo que a variabilidade seja baixa: quantil 0.05 se a ação for favorável e 0.95 se a ação for desfavorável, designados valor característico inferior e valor característico superior, respetivamente. As ações permanentes poderão assim ser representadas por três tipos de valores, $G_{0.05}$, G_m ou $G_{0.95}$.

No caso das ações variáveis Q , o valor característico é o valor que tem uma probabilidade pequena de ser excedido num certo período, chamado *período de referência*. Nas situações mais comuns, o valor característico Q_k é o valor com uma probabilidade de excedência de 0.05 num período de referência de 50 anos, a que corresponde um período de retorno de aproximadamente 1000 anos⁹.

No caso de ações de acidente A , estas são em geral representadas por um valor nominal, A_{nom} , já que em geral para essas ações não se dispõe de informação estatística suficiente que permita a quantificação do valor característico.

Para efeitos de combinação de ações no âmbito do método dos CPS, definem-se ainda, para ações variáveis, os seguintes valores, chamados *valores reduzidos*:

- *valor de combinação*: $Q_{comb} = \psi_0 Q_k$;
- *valor frequente*: $Q_{freq} = \psi_1 Q_k$;
- *valor quase permanente*: $Q_{qper} = \psi_2 Q_k$.

onde Q_k representa o valor característico da ação variável Q . Os coeficientes ψ_0 , ψ_1 e ψ_2 são definidos nos regulamentos e normas de segurança estrutural de cada país.

2.7 Situações de projeto

Um conceito que ajuda a sistematizar o processo de verificação da segurança das estruturas é o conceito de *situação de projeto*. Situações de projeto (SP) referem-se a determinados cenários de exposição da estrutura às ações, durante os quais é necessário verificar que os estados limites não são excedidos. Nos casos comuns, a verificação da segurança das estruturas é feita para quatro situações de projeto, a saber:

- **SP persistentes**: correspondem às situações normais de uso da estrutura.
- **SP transitórias**: correspondem a situações temporárias, com duração limitada no tempo, como por exemplo a fase construtiva ou durante a realização de trabalhos de reabilitação.
- **SP acidentais**: correspondem a cenários de ocorrência de acidentes.
- **SP sísmica**: corresponde a um cenário de ocorrência de sismo.

No caso de estruturas sujeitas a cargas que se repetem ciclicamente poderá haver lugar a perda de resistência por fenómenos de fadiga. Para essas estruturas deve considerar-se adicionalmente uma **SP envolvendo fadiga**, para a qual é necessário verificar a segurança. Os critérios de segurança para esta situação estão fortemente dependentes do tipo de material da estrutura, de modo que são normalmente definidos nos regulamentos e normas referentes aos diferentes tipos de estrutura segundo o material. Exemplos de estruturas onde o problema da fadiga poderá ser condicionante, incluem: (1) pontes ferroviárias sujeitas a tráfego intenso; (2) vigas de suporte a pontes rolantes; (3) estruturas de apoio a máquinas induzindo vibrações; (3) chaminés sujeitas a vibrações provocadas pelo vento.

A cada uma SP corresponde uma combinação de ações. Vejamos então as regras de combinação de ações a usar no âmbito do método dos CPS.

⁹No Capítulo 12 apresentaremos uma definição precisa de período de retorno e aprenderemos a determinar valores característicos em função do período de retorno. (Ver p. 194.)

2.8 Combinação de ações

2.8.1 Regras gerais

Uma vez que as estruturas estão sujeitas a várias ações atuando simultaneamente, é necessário combiná-las adequadamente. Enuncia-se de seguida três regras fundamentais relativas à combinação de ações:

- As ações permanentes figuram sempre em todas as combinações, mas não devem ser majoradas quando os seus efeitos forem favoráveis.
- As ações variáveis só devem figurar nas combinações se a sua presença for desfavorável para o EL em consideração.
- Só devem figurar na mesma combinação as ações cuja ocorrência simultânea seja verossímil. Ações que, por razões físicas ou funcionais, não possam ocorrer simultaneamente, não devem combinar-se. Por exemplo, não faz sentido combinar a ação da neve, que corresponde a cenário de inverno, com uma variação de temperatura positiva (aquecimento), que corresponde a um cenário de verão.

Convém referir que são as ações que se combinam, não os seus efeitos. No entanto, se se assumir comportamento linear para a estrutura, as ações e os seus efeitos são proporcionais entre si, de modo que o efeito de uma combinação de ações é igual à combinação dos efeitos de cada ação. Esta regra, que permite assim combinar efeitos de ações, é conhecida como *princípio da sobreposição dos efeitos*, e pode ser escrita simbolicamente por meio da expressão:

$$E(c_1 Q_1 + c_2 Q_2) = c_1 E(Q_1) + c_2 E(Q_2), \quad (2.17)$$

onde Q_1 e Q_2 são duas ações quaisquer e c_1 e c_2 , duas constantes. Note-se que o sinal «+» do primeiro membro não tem o sentido de soma algébrica, pois na maior parte das vezes as ações que se combinam têm configuração ou natureza diferente. Já o sinal «+» do segundo membro pode ser encarado corretamente como soma algébrica. Enfatiza-se que o princípio da sobreposição dos efeitos é válido apenas no caso de se assumir que a estrutura tem comportamento elástico linear.

2.8.2 Combinações para estados limites últimos

As regras específicas para as combinações de ações variam de país para país. Para ilustrar o formato típico dessas regras, consideremos brevemente as combinações usadas em Portugal e que são consistentes com os Eurocódigos. Consideremos então uma determinada estrutura e admitamos que nela atuam as seguintes ações:

- ações permanentes: G_1, G_2, \dots, G_m ;
- ações variáveis: Q_1, Q_2, \dots, Q_n ;
- ação de acidente, A ;
- ação sísmica, A_E .

O valor característico de cada uma dessas ações é indicado usando o índice k , e o valor de dimensionamento o índice d . Os coeficientes de segurança para as ações permanentes serão representados por γ_G , e para ações variáveis por γ_Q . Recorde-se que o objetivo é determinar, para cada EL relevante, o valor de dimensionamento do efeito de ação respetivo, E_d , a fim de comparar com R_d . O efeito E_d será determinado

recorrendo a um modelo que transforma ações em efeitos de ações, chamado modelo estrutural, ou modelo de cálculo. O modelo estrutural pode assim ser encarado como uma função, representada simbolicamente por:

$$E_d = E(\text{ações atuando simultaneamente}).$$

Para as **SP persistentes**, o efeito E_d é calculado pela combinação:

$$E_d = E \left(\sum_{j=1}^m \gamma_{G_j} G_{jk} + \gamma_{Q_1} Q_{1k} + \sum_{i=2}^n \gamma_{Q_i} \psi_{0i} Q_{ik} \right). \quad (2.18)$$

A ação Q_1 é chamada *ação variável base* e as ações Q_2, Q_3, \dots , *ações acompanhantes*. Conforme se observa, as ações acompanhantes encontram-se multiplicadas pelo coeficiente ψ_0 respetivo, que tem como efeito reduzir o valor com que a ação acompanhante intervém na combinação. O coeficiente ψ_0 pretende ter em conta o facto de que, quando uma ação variável é máxima, as restantes apresentam valores inferiores aos respetivos máximos, pois dificilmente as ações variáveis serão máximas simultaneamente. A combinação expressa na Eq. (2.18) designa-se por *combinação fundamental de ações*. Note-se que, em princípio, é necessário efetuar tantas combinações fundamentais quanto o número de ações variáveis atuantes na estrutura, elegendo em cada combinação uma das ações como ação variável base e tratando as restantes como ações acompanhantes. No fim escolhe-se a combinação para o qual o efeito E_d é máximo¹⁰.

Relativamente aos coeficientes parciais de segurança, γ_G e γ_Q , as normas e regulamentos poderão especificar valores distintos consoante o EL em consideração, sendo, no entanto, usuais os seguintes valores:

$$\gamma_G = \begin{cases} 1.35, & G \text{ desfavorável} \\ 1.00, & G \text{ favorável} \end{cases} \quad \gamma_Q = \begin{cases} 1.50, & Q \text{ desfavorável} \\ 0.00, & Q \text{ favorável} \end{cases}$$

Uma ação é desfavorável quando amplifica o efeito de ação em consideração e desfavorável caso contrário.

Para as **SP transitórias**, as ações combinam-se da mesma forma como para as SP persistentes, isto é, a combinação a usar é a fundamental. A diferença está na quantificação dos valores característicos das ações variáveis, os quais, tratando-se de situações com uma duração reduzida quando comparada com a vida útil de projeto, apresentam valores inferiores. No Capítulo 12 veremos como determinar valores característicos de ações variáveis em função da duração da situação provisória.

Para as **SP acidentais**, a combinação a usar, dita *combinação acidental*, tem o formato:

$$E_d = E \left(\sum_{j=1}^m G_{jk} + A_d + \psi_{11} Q_{1k} + \sum_{i=2}^n \psi_{2i} Q_{ik} \right). \quad (2.19)$$

Conforme se observa, a ação variável base é multiplicada pelo respetivo coeficiente ψ_1 e as ações acompanhantes por ψ_2 . Note-se que nenhuma ação é majorada pelos coeficientes parciais de segurança. Tal decorre do facto da ação de acidente ser uma ação de muito baixa probabilidade e pequena duração.

¹⁰A ideia expressa aqui baseia-se na chamada regra de Turkstra, segundo a qual o máximo de uma combinação de ações ocorre com forte probabilidade quando uma das ações variáveis é máxima.

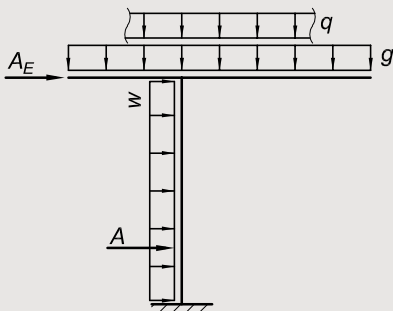
Refira-se que, no caso de alguns acidentes, é preferível proteger a estrutura desses acidentes, em vez de efetuar uma verificação explícita da segurança da estrutura aos mesmos. Por exemplo, em vez de dimensionar um pilar de uma ponte contra a colisão de uma viatura, em muitos caso é preferível proteger o pilar através de uma guarda de segurança, o que também acaba por se refletir favoravelmente nas condições de segurança rodoviária.

Para a **SP sísmica**, a combinação a usar, dita *combinação sísmica*, tem o formato:

$$E_d = E \left(\sum_{j=1}^m G_{jk} + A_{Ed} + \sum_{i=1}^n \psi_{2i} Q_{ik} \right). \quad (2.20)$$

Conforme se observa, a combinação sísmica é muito semelhante à combinação acidental, com a diferença de que, no caso da combinação sísmica, todas as ações variáveis são quantificados pelos respetivos valores quase-permanentes.

Exemplo 2.2 A estrutura representada na Figura seguinte é constituída por um pilar e uma viga. Está sujeita a 5 ações, a saber: uma ação permanente (g), uma sobrecarga (q), a ação do vento (w), uma ação de acidente (A) e a ação sísmica (A_E).



Valores característicos e coeficientes ψ :

- Ação permanente: g_k
- Sobrecarga: q_k ($\psi_0=0.0$, $\psi_1=0.0$, $\psi_2=0.0$)
- Vento: w_k ($\psi_0=0.6$, $\psi_1=0.2$, $\psi_2=0.0$)
- Ação de acidente: A_d (Valor de cálculo)
- Ação sísmica: A_{Ed} (Valor de cálculo)

Esquemematizar as combinações de ações tendo em vista o dimensionamento do pilar.

Resolução

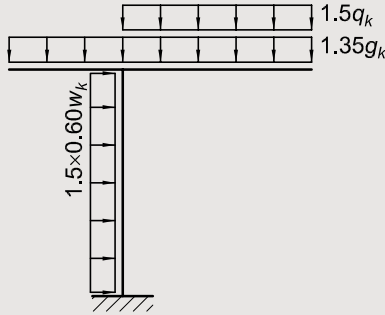
Do ponto de vista do dimensionamento do pilar, interessam as combinações que maximizam o momento fletor na sua base. Começando pela SP persistente (combinação fundamental), visto que temos duas ações variáveis (sobrecarga e vento), é necessário considerar duas combinações de ações: uma em que a sobrecarga é a ação variável base e outra em que o vento é a ação variável base. Tem-se pois:

$$1.35g_k + 1.5q_k + 1.5\psi_{0w}w_k,$$

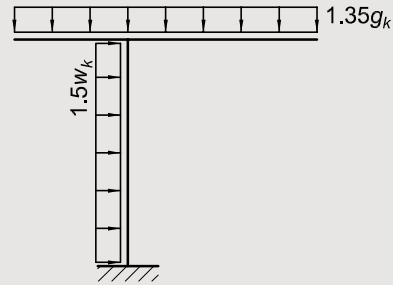
$$1.35g_k + 1.5w_k + 1.5\psi_{0q}q_k.$$

Note-se que, nesta última, a sobrecarga acaba por não intervir na combinação, uma vez que possui $\psi_0 = 0.0$. Note-se ainda que a sobrecarga, por se tratar de uma ação variável no espaço (e também no tempo), só deve ser posicionada

nas partes da estrutura em que agrava os esforços em consideração. No presente caso, para efeitos da segurança do pilar, só deverá ser posicionada na consola da direita. Tem-se, pois:



Combinação fundamental,
ação variável base: sobrecarga



Combinação fundamental,
ação variável base: vento

Relativamente à SP acidental há que considerar também duas combinações:

$$g_k + A_d + \psi_{1w}w_k + \psi_{2q}q_k,$$

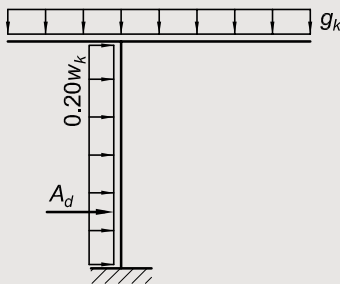
$$g_k + A_d + \psi_{1q}q_k + \psi_{2w}w_k.$$

No entanto, visto que os coeficientes ψ_1 e ψ_2 da sobrecarga são ambos nulos, apenas interessa a primeira combinação.

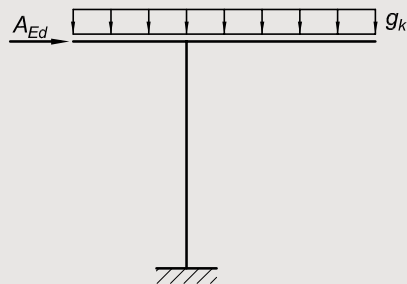
Relativamente à combinação sísmica, há apenas que considerar a combinação:

$$g_k + A_{Ed} + \psi_{2q}q_k + \psi_{2w}w_k.$$

No entanto, a sobrecarga e o vento acabam por não intervir na combinação sísmica visto que $\psi_2 = 0$ em ambos os casos. A figura seguinte esquematiza os carregamentos associados às combinações acidental e sísmica:



Combinação acidental



Combinação sísmica

Assim, em resumo, temos essencialmente 4 combinações de ações. A combinação condicionante será, naturalmente, a que conduzir ao maior momento na base do pilar.

2.8.3 Combinações para estados limites de utilização

Recorde-se que os EL de utilização são estados de pequena gravidade, que não comprometem a segurança das pessoas, mas apenas o funcionamento da estrutura (ou dos elementos a ela ligados), o seu aspeto ou o conforto das pessoas. Os EL de utilização só são considerados como tal se permanecerem instalados durante um certo período de tempo. Por exemplo, uma deformação com determinado valor só é considerada EL limite quando permanecer acima de um determinado intervalo de tempo.

Assim, as combinações de ações para EL de utilização são em geral definidas tendo por base uma certa duração das ações (ou um certo número de repetições). A título de exemplo, apresenta-se de seguida as três combinações previstas nos Eurocódigos Estruturais.

A **combinação característica**, a usar em EL que se admitem poder estar instalados apenas por *períodos de muito curta duração*, é dada por:

$$E_d = E \left(\sum_{j=1}^m G_{jk} + Q_{1k} + \sum_{i=2}^n \psi_{0i} Q_{ik} \right). \quad (2.21)$$

A **combinação frequente**, a usar em EL que se admitem poder estar instalados apenas por *períodos de curta duração*, é dada por:

$$E_d = E \left(\sum_{j=1}^m G_{jk} + \psi_{11} Q_{1k} + \sum_{i=2}^n \psi_{2i} Q_{ik} \right). \quad (2.22)$$

Finalmente, a **combinação quase permanente**, a usar em EL que se admitem poder estar instalados por *períodos de longa duração*, é dada por:

$$E_d = E \left(\sum_{j=1}^m G_{jk} + \sum_{i=1}^n \psi_{2i} Q_{ik} \right). \quad (2.23)$$

2.9 Durabilidade

Relativamente ao requisito da durabilidade, salienta-se que todas as estruturas sofrem com o tempo alguma forma de deterioração, o que exige a implementação de trabalhos periódicos de manutenção a fim de se manterem numa boa condição. O requisito da durabilidade só deixa de ser satisfeito quando os custos de manutenção são superiores aos inicialmente previstos.

A regulamentação atual dá muita ênfase ao requisito da durabilidade. Por exemplo, a NP EN 206 dedica uma boa parte das suas cláusulas a questões de durabilidade, e o mesmo sucede com os Eurocódigos Estruturais.

As metodologias para a verificação do requisito da durabilidade podem ser agrupadas em duas categoriais principais:

- metodologia prescritiva, baseada em determinadas regras a respeitar, sem consideração explícita dos mecanismos de degradação;
- metodologia baseada no desempenho (metodologia probabilística).

Os Eurocódigos Estruturais preconizam sobretudo o uso da primeira metodologia, embora prevejam também a possibilidade de se usar a segunda, na qual os mecanismos de deterioração (por exemplo, corrosão das armaduras) são modelados considerando a variabilidade (e a conseqüente incerteza) das diferentes variáveis intervenientes.

2.10 Robustez

Como vimos anteriormente, uma estrutura é robusta quando não é suscetível de sofrer danos desproporcionais à causa que lhes dá origem. Tratando-se de um conceito relativamente impreciso¹¹, a satisfação do requisito da robustez é feita principalmente ao nível das boas práticas de conceção, como por exemplo, privilegiando ligações monolíticas entre os diferentes elementos estruturais que compõem a estrutura. Claramente, ao aumentarmos o monolitismo da estrutura e conseqüentemente o grau da sua hiperstaticidade, estamos a criar percursos de carga alternativos para o caso de um dos elementos estruturais sofrer danos graves, e isso aumenta a robustez da estrutura.

Deve-se evitar soluções estruturais que potenciem o colapso progressivo, privilegiando a ocorrência de modos de rotura dúcteis, em detrimento de modos de rotura frágeis. Tal poderá ser conseguindo sobredimensionando a estrutura face aos modos de rotura frágeis, de modo a aumentar a probabilidades dos modos de rotura dúcteis ocorrerem primeiro. Outra forma de reduzir o risco de colapso progressivo poderá consistir em adotar uma estratégia de segmentação da estrutura, evitando que um colapso local não se transforme em colapso global.

Como dito acima, as boas práticas de conceção são fundamentais para conseguir estruturas robustas. A título de exemplo, a Figura 2.2 mostra uma ponte metálica que sofreu um incidente, quase provocando a queda de uma das vigas por falta de apoio. Conforme se observa, a existência de uma biela ligando as vigas, como medida simples de conceção, impediu a queda de uma das vigas e evitando, assim, o colapso da estrutura. Este exemplo mostra a importância do projetista prestar atenção a cada detalhe do seu projeto.

Poderá ser acordado entre o dono de obra e o projetista verificações explícitas de robustez. Por exemplo, no caso de uma ponte de tirantes, poderá ser decidido verificar que a ponte seja capaz de manter a sua integridade em caso da rotura de dois tirantes consecutivos. No caso de um edifício poderá ser decidido verificar que o edifício seja capaz de manter a sua integridade em caso de rotura de qualquer um dos pilares de fachada. Estas verificações explícitas de robustez deverão ser efetuadas, naturalmente, para uma SP acidental.

¹¹De facto, não é fácil definir o limite acima do qual determinado dano deixa de ser proporcional à causa que lhe dá origem.



Figura 2.2 Ponte metálica numa situação de quase colapso devido a um incidente. A biela ligando as vigas aumentou significativamente a robustez da estrutura.

Capítulo 3

Conceitos fundamentais de probabilidade

Como mencionado anteriormente, os métodos probabilísticos desempenham um papel fundamental no domínio da segurança estrutural. É pois oportuno fazer uma breve revisão dos conceitos elementares de probabilidade. Os conceitos principais serão ilustrados por meio de exemplos, todos eles diretamente relacionados com o problema da segurança estrutural. O presente capítulo trata dos conceitos e métodos para o caso unidimensional, e o próximo capítulo estende-os ao caso multidimensional.

3.1 Noções básicas

3.1.1 Noção de probabilidade

Existem diferentes interpretações do conceito de probabilidade. Mencionaremos apenas as que têm maior interesse no domínio da segurança estrutural: a interpretação frequentista e a interpretação Bayesiana.

A interpretação frequentista, que dominou claramente a primeira metade do século XX (Paulino et al., 2003), identifica a probabilidade de um acontecimento com a respectiva *frequência relativa*. Recorde-se que, dada uma experiência aleatória realizada n vezes, a frequência relativa de um acontecimento A associado a essa experiência é definida por:

$$f_A = \frac{n_A}{n}, \quad (3.1)$$

onde n_A é o número de ocorrências de A nas n realizações da experiência.

A interpretação frequentista baseia-se no princípio da regularidade estatística, segundo o qual, quando o número de realizações de uma experiência aleatória aumenta e a experiência é realizada nas mesmas condições, a frequência relativa dos diferentes resultados (ou acontecimentos) dessa experiência tende a estabilizar, dando origem à definição de probabilidade do acontecimento A por meio do seguinte limite:

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_A}{n}. \quad (3.2)$$

Esta interpretação apresenta uma limitação importante: pressupõe que a experiência em estudo seja repetível e nem todas as experiências são passíveis de repetição, e mesmo as que o são nem sempre se realizam nas mesmas condições. Por exemplo, suponha-se que se deseja avaliar a probabilidade de um determinado edifício colapsar nos próximos 50 anos. Ora, se esse edifício colapsar, isso só acontece uma vez, não sendo por isso uma experiência repetível. Por outro lado, mesmo que se considerasse que as n repetições da experiência correspondem à observação de n edifícios semelhantes (durante um certo período de tempo), mesmo assim surgiria a dificuldade do cumprimento do requisito de que a experiência tem de ser realizada em condições semelhantes, pois não existem dois edifícios iguais, sujeitos a idênticas condições.

A interpretação Bayesiana de probabilidade permite ultrapassar estas limitações. Segundo esta interpretação, a probabilidade de um acontecimento é simplesmente uma *medida na escala entre 0 e 1 da confiança* que se tem na eventual ocorrência desse acontecimento, independentemente de ser repetível ou não. O valor 0 indica plena confiança de que o acontecimento não ocorrerá e o valor 1 indica plena confiança de que ocorrerá.

Esta confiança, ou grau de certeza, depende fundamentalmente do nível de informação que se tem a respeito desse acontecimento, não tanto do acontecimento em si. Assim, a probabilidade está sempre condicionada à informação que se dispõe do acontecimento em apreço, podendo ser alterada sempre que surjam novas informações que modifiquem as expectativas que se tinha inicialmente. Não existem, pois, probabilidades absolutas (Bernardo e Smith, 1994). A interpretação Bayesiana, por vezes referida também como interpretação subjetiva ou personalista (Paulino et al., 2003), é substancialmente diferente da interpretação frequentista, que interpreta a probabilidade em sentido absoluto, definindo-a até mesmo por meio de uma equação direta (Eq. (3.2)).

Note-se no entanto que, se estiver a analisar-se uma experiência repetível e se existirem resultados em número suficiente dessa experiência, pode fundamentar-se a atribuição de uma probabilidade — como medida de confiança — a partir de uma frequência, e nesse sentido pode afirmar-se que a interpretação Bayesiana de probabilidade engloba a interpretação frequentista como um caso particular (Hahn e Shapiro, 1994).

É interessante notar que a interpretação Bayesiana está inteiramente em harmonia com o uso da palavra probabilidade no quotidiano. Por exemplo, quando alguém diz, referindo-se a um determinado acontecimento futuro, «isso é pouco provável que aconteça», essa pessoa está a afirmar que não sabe se o acontecimento vai ocorrer ou não, mas ficará mais surpreendida se acontecer do que se não acontecer. Se se pedir a essa pessoa que expresse a sua confiança numa escala entre 0 e 1, explicando-lhe que 0 significa que tem a certeza que não vai acontecer e 1 significa que tem a certeza que vai acontecer, talvez o consiga fazer.

Visto que não existem probabilidades absolutas, não sendo assim possível definir o conceito por meio de uma equação explícita (como a Eq. (3.2), por exemplo), surge o problema de como definir rigorosamente o conceito de forma a ser possível construir uma teoria lógica e consistente para o cálculo de probabilidades. Os matemáticos resolveram o problema definindo o conceito de probabilidade de forma axiomática, isto é, introduziram o conceito através das propriedades (chamados axiomas) que tem de satisfazer. Recorde-se então os três axiomas, conhecidos por axiomas de Kolmogorov, que constituem a base para a construção de toda a teoria matemática das probabilidades.

Seja S o espaço de resultados de uma dada experiência¹. Seja A um acontecimento qualquer desse espaço. Chama-se probabilidade de A ao número real, em geral representado por $P(A)$, que mede a confiança que se tem na eventual ocorrência de A e que satisfaz os seguintes axiomas:

1. $0 \leq P(A) \leq 1$
2. $P(S) = 1$
3. Se A e B forem dois acontecimentos disjuntos, isto é, acontecimentos que não podem ocorrer conjuntamente, então a probabilidade de ocorrência de qualquer um deles é dada pela soma das suas probabilidades de ocorrência individuais. Em símbolos: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

O primeiro axioma afirma que a probabilidade é um número compreendido entre 0 e 1. O segundo afirma que o espaço de resultados é um acontecimento certo, isto é, se a experiência for realizada, pelo menos um dos acontecimentos do espaço de resultados ocorre, o que é lógico, em vista da definição de espaço de resultados. O terceiro afirma que as probabilidades são aditivas². A partir destes axiomas é possível deduzir todas as propriedades do conceito de probabilidade. Por exemplo, pode demonstrar-se que, dados dois eventos quaisquer, A e B , tem-se:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \quad (3.3)$$

Os símbolos \cup e \cap , que vêm da *teoria dos conjuntos*, representam, recorde-se, reunião e interseção de conjuntos. A probabilidade $P(A \cup B)$, que se lê probabilidade de A ou B , representa a probabilidade de ocorrência de pelo menos um dos dois acontecimentos. A probabilidade $P(A \cap B)$, que se lê probabilidade de A e B , representa a probabilidade de ocorrência conjunta de ambos acontecimentos.

Por exemplo, considere-se a estrutura representada na Figura 3.1, constituída por dois tirantes suspendendo uma carga Q . Suponha-se que os únicos EL relevantes são a rotura do tirante 1 e a rotura do tirante 2. Sejam A e B os seguintes acontecimentos: $A = \{\text{o tirante 1 rompe quando se suspende uma carga } Q\}$ e $B = \{\text{o tirante 2 rompe quando se suspende uma carga } Q\}$. Então, tratando-se de uma estrutura isostática, bastará a rotura de um tirante para que se dê o colapso. Assim, a probabilidade de colapso da estrutura quando se suspende uma carga Q é:

$$\begin{aligned} p_f &= P(A \cup B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B). \end{aligned}$$

Visto que os acontecimentos podem ser interpretados como subconjuntos de um conjunto maior (o espaço de resultados), a probabilidade $p = P(A)$ pode ser vista como uma função de conjunto: uma função que faz corresponder a cada acontecimento A um número real p compreendido entre 0 e 1, que, como se disse, mede a confiança (ou grau de certeza) que se tem a respeito da possibilidade de ocorrência desse acontecimento. As probabilidades $p = 0$ e $p = 1$ correspondem às duas situações extremas em que não há incerteza: probabilidade nula indica não ocorrência certa e

¹O espaço de resultados, por vezes também chamado espaço amostral, refere-se ao conjunto de todos os resultados possíveis da experiência.

²Note-se que estes axiomas, que se aceitam sem discutir, constituem propriedades do conceito de frequência relativa, sendo por isso intuitivos.

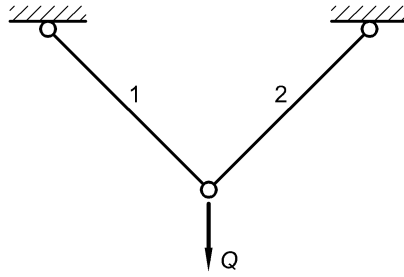


Figura 3.1 Estrutura isostática constituída por dois tirantes.

probabilidade unitária indica ocorrência certa. A probabilidade $p = 0.5$ corresponde à máxima incerteza e indica que não temos nenhuma informação que nos faça acreditar que uma das possibilidades, ocorrência ou não ocorrência, é mais provável do que a outra.

Note-se que a interpretação Bayesiana de probabilidade (como medida de confiança ou de certeza) é perfeitamente compatível com experiências que não sejam puramente aleatórias. Considere-se um exemplo. Suponha-se que se está a avaliar a segurança de uma estrutura de betão armado existente, e, especificamente, deseja determinar-se a probabilidade de se atingir o EL último de flexão numa determinada secção crítica da estrutura onde há sinais evidentes de corrosão das armaduras. Uma variável importante do problema é a área de armadura nessa secção. Ora, a área de armadura é uma quantidade fixa — é a que lá está. Contudo, mesmo que se tenha acesso ao projeto da estrutura, o seu valor exato é desconhecido, pois não se sabe em que medida a corrosão provocou perda de secção. Uma forma prática de caracterizar a incerteza nos possíveis valores da área de armadura é atribuir uma distribuição de probabilidade a esses valores. Essa atribuição não significa que se está a afirmar que a área da armadura nessa secção é aleatória, pois na realidade é uma quantidade fixa (embora desconhecida). A atribuição de uma distribuição de probabilidade à área da armadura surge assim como medida prática e conveniente de descrever a incerteza que se tem a respeito do seu valor.

Do ponto de vista Bayesiano, não há, portanto, qualquer objeção em atribuir-se distribuições de probabilidade a quantidades fixas. O verdadeiro valor de uma quantidade fixa, mas desconhecida, é muitas vezes referido como o *estado da natureza* (Benjamin e Cornell, 1970), o qual, por ser desconhecido, faz sentido atribuir-lhe uma distribuição de probabilidade como medida prática e conveniente de descrição de incerteza.

3.1.2 Noção de probabilidade condicionada

A atribuição de uma probabilidade a um acontecimento, ou a um estado desconhecido da natureza, está sempre condicionada à informação disponível. Não admira por isso que um dos conceitos probabilísticos mais importantes seja o conceito de *probabilidade condicionada*. Sejam A e B dois acontecimentos (ou dois estados desconhecidos da natureza). Chama-se probabilidade de A dada a ocorrência de B ao valor que se representa por $P(A | B)$, dado por:

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (3.4)$$

Note-se que esta equação é uma definição, não carecendo por isso de qualquer demonstração. A probabilidade $P(A | B)$ pode ser vista como a probabilidade de A em relação ao espaço de resultados reduzido B .

Como evidência de que a definição de probabilidade condicionada é consistente com os axiomas de probabilidade, determinemos $P(B | B)$, que obviamente tem de ser igual a 1. Ora vejamos:

$$\begin{aligned} P(B | B) &= \frac{P(B \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P(B)}{P(B)} = 1. \end{aligned}$$

Por definição de probabilidade condicionada pode também escrever-se:

$$P(B | A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}. \quad (3.5)$$

Juntando as Eqs. (3.4) e (3.5) resulta:

$$P(A | B) = \frac{P(B | A) P(A)}{P(B)}, \quad (3.6)$$

que constitui uma das formas de apresentação do *Teorema de Bayes* e mostra que a simples ocorrência de B modifica a probabilidade de A , que era $P(A)$ e passou a ser $P(A | B)$. Isto confirma o que se disse anteriormente de que a probabilidade de um acontecimento não deve ser encarada em sentido absoluto, pois é suscetível de ser modificada sempre que surjam novas informações.

A probabilidade $P(A)$ é designada probabilidade *a priori* e mede a incerteza que se tinha inicialmente a respeito do acontecimento A . A probabilidade $P(A | B)$ é designada probabilidade *a posteriori* e mede a incerteza em A depois de se observar a ocorrência de B . O Teorema de Bayes constitui assim um mecanismo formal de alteração de probabilidades face a novas informações. Note-se que a incerteza *a posteriori* pode aumentar ou diminuir: diminui quando $P(A | B)$ se aproxima de 0 ou 1 e aumenta quando se aproxima de 0.5.

Da definição de probabilidade condicionada obtém-se imediatamente o chamado *Teorema da multiplicação de probabilidades*:

$$P(A \cap B) = P(A | B) P(B) = P(B | A) P(A). \quad (3.7)$$

Recorda-se agora o chamado *Teorema da probabilidade total*. Mas antes recorde-se o conceito de *partição de um espaço de resultados*. Seja S um espaço de resultados e B_1, \dots, B_k um conjunto de acontecimentos desse espaço. Os acontecimentos B_1, \dots, B_k constituem uma partição de S se e só se (Figura 3.2):

1. $B_i \cap B_j = \phi$ (ϕ representa o conjunto vazio)
2. $\bigcup_{i=1}^k B_i = S$

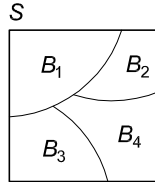


Figura 3.2 Representação esquemática de uma partição de um espaço de resultados.

Seja então B_1, \dots, B_k uma partição do espaço de resultados S , e A um acontecimento qualquer desse espaço. O *Teorema da probabilidade total* afirma que:

$$P(A) = P(A | B_1) P(B_1) + \dots + P(A | B_k) P(B_k). \quad (3.8)$$

Vejamos uma aplicação simples deste teorema.

Exemplo 3.1 Uma dada estrutura tem uma probabilidade anual de colapso de 10^{-6} . Estimou-se que, se a estrutura colapsar, a probabilidade de alguém morrer sob a estrutura é de 10^{-1} . Determinar a probabilidade de existir pelo menos uma morte no próximo ano em resultado do colapso daquela estrutura.

Resolução

Pretende-se determinar a probabilidade do evento $A = \{\text{Alguém morre no próximo ano em resultado do colapso da estrutura}\}$. Seja $B = \{\text{A estrutura colapsa}\}$ e $\bar{B} = \{\text{A estrutura não colapsa}\}$. Os acontecimentos B e \bar{B} constituem evidentemente uma partição do espaço de resultados em questão. Ora, de acordo com o enunciado $P(B) = 10^{-6}$, e $P(A | B) = 10^{-1}$. Tem-se, pois:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A | B) \cdot P(B) + P(A | \bar{B}) \cdot P(\bar{B}) \\ &= (10^{-1}) \cdot (10^{-6}) + 0 \cdot (1 - 10^{-6}) \\ &= 10^{-7}. \end{aligned}$$

Fazendo intervir o Teorema da probabilidade total no *Teorema de Bayes*, este pode ser reescrito na seguinte forma:

$$\begin{aligned} P(B_j | A) &= \frac{P(A | B_j) P(B_j)}{P(A)} \\ &= \frac{P(A | B_j) P(B_j)}{\sum_{i=1}^k P(A | B_i) P(B_i)}, \quad j = 1, \dots, k. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Exemplo 3.2 Admita-se que uma determinada viga de betão armado possui, segundo um perito, uma probabilidade de 0.75 de ter corrosão ativa nas armaduras. Com o objetivo de reduzir a incerteza sobre se existe ou não presença de corrosão, realizou-se um ensaio. O ensaio, contudo, não é 100% fiável, isto é, pode dar um resultado errado. Mais concretamente, em 5% de elementos sem corrosão, o ensaio indica que existe corrosão, e em 5% de elementos com corrosão, o ensaio indica que não existe corrosão.

Admita-se que a viga foi testada e o resultado foi positivo, isto é, indicou corrosão ativa. Determinar a probabilidade atualizada da peça possuir efetivamente corrosão ativa.

Resolução

Pretende-se determinar a probabilidade de existir corrosão sabendo que o ensaio foi positivo. Designemos essa probabilidade por $P(C | +)$. Tem-se:

$$\begin{aligned} P(C) &= 0.75; & P(\bar{C}) &= 0.25; \\ P(+ | C) &= 0.95; & P(- | C) &= 0.05; \\ P(+ | \bar{C}) &= 0.05; & P(- | \bar{C}) &= 0.95; \end{aligned}$$

Aplicando o Teorema de Bayes, vem:

$$\begin{aligned} P(C | +) &= \frac{P(+ | C)P(C)}{P(+ | C)P(C) + P(+ | \bar{C})P(\bar{C})} \\ &= \frac{(0.95)(0.75)}{(0.95)(0.75) + (0.05)(0.25)} = 0.98. \end{aligned}$$

3.1.3 Noção de independência estatística

Recorda-se agora o conceito de *independência estatística entre dois acontecimentos*. Dois acontecimentos A e B dizem-se estatisticamente independentes quando a ocorrência de um deles em nada afeta a probabilidade de ocorrência do outro, isto é, $P(A | B) = P(A)$ e $P(B | A) = P(B)$.

Comparando esta definição com a Eq. (3.7) obtém-se imediatamente o seguinte resultado:

$$A \text{ e } B \text{ são independentes} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B), \quad (3.10)$$

ou seja, quando dois acontecimentos são independentes a probabilidade de ocorrência conjunta é dada pelo produto das suas probabilidades.

Exemplo 3.3 Admita-se que uma estrutura tem uma probabilidade de colapsar $p_1 = 10^{-6}$ em um ano qualquer e que um eventual colapso é independente de ano para ano. Determinar a probabilidade de colapso nos próximos 50 anos.

Resolução

Seja $p_n = P(\text{colapso em } n \text{ anos})$. Tem-se:

$$\begin{aligned} p_n &= 1 - P(\text{n\~{a}o colapso em } n \text{ anos}) \\ &= 1 - P(\text{n\~{a}o colapso no ano } 1 \cap \text{n\~{a}o colapso no ano } 2 \cap \dots) \\ &= 1 - P(\text{n\~{a}o colapso no ano } 1) P(\text{n\~{a}o colapso no ano } 2) \dots \\ &= 1 - (1 - p_1)^n \end{aligned}$$

Considerando $p_1 = 10^{-6}$, obtém-se $p_{50} \approx 50 \times 10^{-6}$.

3.2 Variáveis aleatórias e distribuições de probabilidade

3.2.1 Conceito de variável aleatória

No texto que segue, uma *variável aleatória* refere-se a uma grandeza desconhecida, ou incerta, cujos possíveis valores só poderão ser conhecidos em termos probabilísticos. Uma tal variável não tem necessariamente natureza aleatória (no sentido de imprevisibilidade), podendo referir-se a um estado desconhecido da natureza.

Quando o valor de uma grandeza for conhecido com grau razoável de certeza, diz-se que se trata de uma *grandeza determinística*. Temos assim dois tipos de grandezas: aleatórias e determinísticas.

As variáveis aleatórias são tradicionalmente representadas por letras maiúsculas (X, Y, \dots) e as suas realizações particulares por letras minúsculas (x, y, \dots). Assim, por exemplo, a expressão $P(X = x)$ representa a probabilidade da variável X assumir o valor particular x .

As variáveis aleatórias podem ser *discretas* ou *contínuas*. Uma variável X é discreta quando o conjunto das suas realizações possíveis é numerável (finito ou infinito). Uma variável X é contínua quando o conjunto das suas realizações possíveis é não numerável. O conjunto das realizações possíveis de uma variável aleatória é chamado *espaço de resultados* ou *domínio* da variável.

Seguem alguns exemplos de variáveis discretas:

- $X = \{0, 1\}$, onde $X = 0$ significa que terminado elemento estrutural não possui certo defeito e $X = 1$ significa que possui.
- $X = \{1, 2, 3\}$, com X representando uma das 3 classes de resistência dos aços usados em Portugal nos últimos 30 anos, respetivamente A235, A400 e A500.
- $X = \{\text{Número de camiões que atravessam diariamente uma determinada ponte}\}$. O conjunto dos valores possíveis é naturalmente $X = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Exemplos de variáveis contínuas:

- $X = \{\text{Resistência à compressão do betão de determinado elemento estrutural}\}$.
- $X = \{\text{Valor da sobrecarga de utilização num determinado edifício}\}$.
- $X = \{\text{Velocidade do vento numa determinada localidade, a uma determinada altura acima do solo}\}$.

3.2.2 Distribuições de probabilidade

Variáveis discretas

Seja $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ uma variável discreta. Chama-se *função massa de probabilidade* de X (FMP) à função $p_X(x)$ que associa a cada valor de X a sua probabilidade, isto é, $p_X(x_i) = P(X = x_i)$, $i = 1, 2, \dots$, e que satisfaz a seguinte propriedade:

$$\sum_i p_X(x_i) = 1. \quad (3.11)$$

A Figura 3.3 representa um gráfico típico de uma FMP.

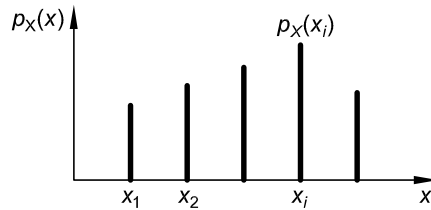


Figura 3.3 Gráfico típico de uma FMP.

Chama-se *função distribuição cumulativa* da variável X (FDC) à função $F_X(x)$ definida para todo o x real, dada por:

$$F_X(x) = P(X \leq x) \quad (3.12)$$

cuja representação gráfica tem o andamento típico ilustrado na Figura 3.4, dita função em escada. Tem-se, obviamente:

$$F_X(x) = \sum_{i: x_i \leq x} p_X(x_i) \quad (3.13)$$

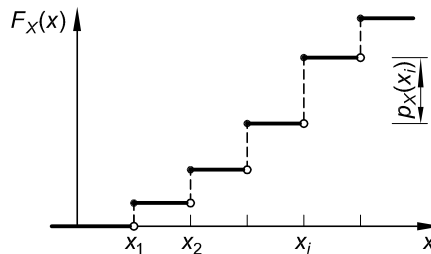


Figura 3.4 Gráfico típico de uma FDC de uma variável discreta. Note-se que o domínio de $F_X(x)$ é $] -\infty, +\infty[$, pois, por definição, a FDC está definida para todo o x .

No Anexo A apresenta-se uma breve descrição dos modelos probabilísticos mais comuns para variáveis discretas, nomeadamente as distribuições de Bernoulli, Binomial, geométrica e de Poisson.

Variáveis contínuas

Seja X uma variável contínua. Chama-se *função densidade de probabilidade* (FDP) de X à função $f_X(x)$ definida de tal modo que (ver Figura 3.5.):

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx \quad (3.14)$$

e que satisfaz a seguinte propriedade³:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1. \quad (3.15)$$

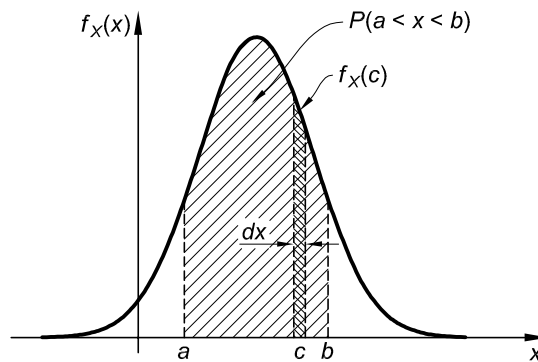


Figura 3.5 Representação gráfica de uma FDP. A probabilidade de uma variável contínua assumir valores dentro de um certo intervalo representa uma área sob a sua FDP.

Considere-se a realização particular $X = c$. Que significado tem $f_X(c)$? O valor $f_X(c)$ representa uma probabilidade por unidade de X (na vizinhança de $X = c$), e daí o nome densidade de probabilidade. Note-se que $f_X(c)$ não representa $P(X = c)$. A probabilidade $P(X = c)$ pode ser vista como o produto $f_X(c) dx$, sendo por isso uma quantidade infinitesimal, isto é, $P(X = c) \rightarrow 0$. Assim, convém ter presente que, enquanto que a probabilidade é uma quantidade adimensional, a FDP tem unidades: é expressa em unidades inversas de X . Por exemplo, se X representar uma tensão de rotura em MPa de um dado material, $f_X(x)$ é expressa em MPa^{-1} .

Definiu-se anteriormente para variáveis discretas a chamada *função distribuição cumulativa*, representada por $F_X(x)$. No caso de variáveis contínuas, a definição de *função distribuição cumulativa* é exatamente a mesma, isto é:

$$F_X(x) = P(X \leq x), \quad (3.16)$$

cujos gráficos, para variáveis contínuas, tem o andamento típico ilustrado na Figura 3.6.

³Como a integração vai de $-\infty$ a $+\infty$, está subentendido que $f_X(x) = 0$ para todos os valores de X fora do seu domínio.

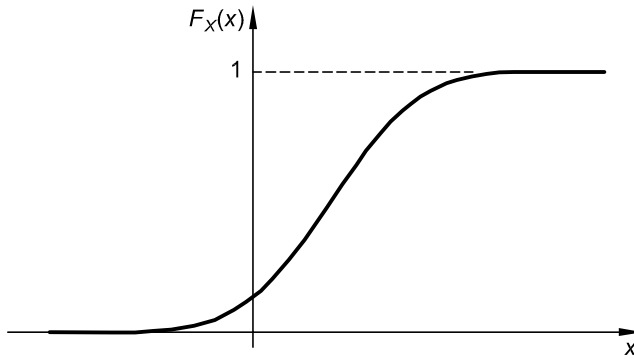


Figura 3.6 Gráfico típico de uma FDC de uma variável contínua.

Naturalmente $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(s) ds$. Além disso, por força dos teoremas fundamentais do cálculo diferencial e integral:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}, \quad (3.17)$$

$$P(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a). \quad (3.18)$$

Na secção 3.4 (p. 44) apresenta-se uma descrição sucinta dos modelos probabilísticos mais comuns na área da segurança estrutural, nomeadamente os modelos Normal, Lognormal e as chamadas distribuições de extremos. No Anexo B, dedicado a modelos para variáveis contínuas, apresenta-se uma descrição mais detalhada desses e de outros modelos.

3.2.3 Medidas descritivas de variáveis aleatórias

Medidas de posição central

Chama-se *valor esperado* ou *média* da variável X ao valor, em geral representado por $E(X)$ ou por μ_X , definido pelas expressões que se apresentam de seguida. Para variáveis discretas, o valor esperado é definido por:

$$E(X) = \sum_i x_i p_X(x_i) \quad (3.19)$$

e para variáveis contínuas, por:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx \quad (3.20)$$

O valor esperado goza das seguintes propriedades:

$$E(c) = c, \quad (3.21)$$

$$E(X + c) = E(X) + c, \quad (3.22)$$

$$E(cX) = cE(X), \quad (3.23)$$

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y), \quad (3.24)$$

onde c representa uma constante. As propriedades traduzidas nestas equações designam-se por *propriedades da linearidade da média*. No caso de X e Y serem variáveis independentes,⁴ verifica-se também que:

$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y). \quad (3.25)$$

Outras medidas de posição central incluem a *mediana* e a *moda*. A mediana divide a função densidade de probabilidade em duas partes iguais, cada uma com uma probabilidade de 0.5, e a moda é o valor com maior densidade de probabilidade. (Ver Figura 3.7.) Naturalmente, para distribuições simétricas, a moda, a mediana e a média coincidem.

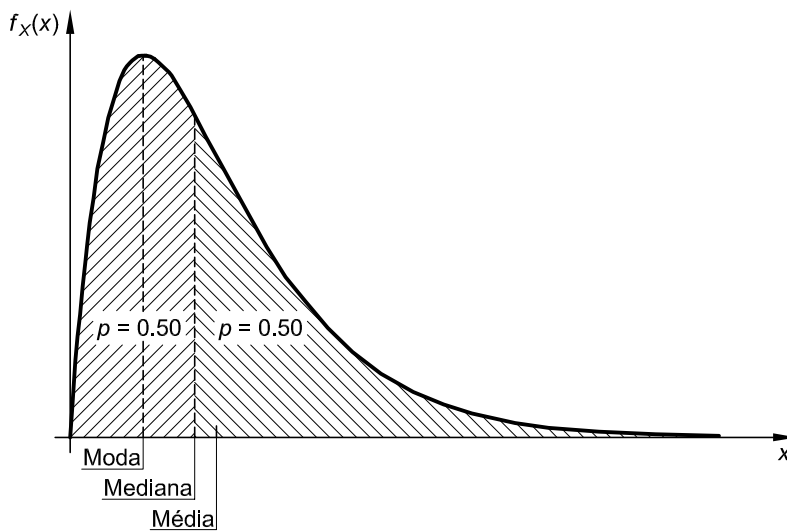


Figura 3.7 Representação gráfica da média, mediana e moda. A média corresponde ao centro de gravidade da área sob a FDP.

⁴O conceito de variáveis independentes (conceito paralelo ao conceito de acontecimentos independentes) será recordado mais à frente.

Medidas de variabilidade

Chama-se *variância* de uma variável X ao valor que se representa por $\text{Var}(X)$, ou por σ_X^2 , definido por:

$$\text{Var}(X) = \text{E} [(X - \mu_X)^2] \quad (3.26)$$

Como esta definição sugere, a variância de uma variável mede a dispersão dos seus valores em torno da média. Quanto maior é a variância, mais afastados de μ_X estão os diferentes valores de X .

De acordo com esta definição, a variância pode ser calculada por:

$$\text{Var}(X) = \sum_i (x_i - \mu_X)^2 p_X(x_i), \quad (3.27)$$

se X for discreta, e por:

$$\text{Var}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^2 f_X(x) dx, \quad (3.28)$$

se X for contínua.

Notando que $(X - \mu_X)^2 = X^2 - 2X\mu_X + \mu_X^2$, a aplicação das propriedades da linearidade da média conduz imediatamente ao seguinte resultado:

$$\text{Var}(X) = \text{E}(X^2) - \mu_X^2. \quad (3.29)$$

Este resultado, muito útil no cálculo de variâncias, mostra que o cálculo da variância de uma variável aleatória resume-se a calcular o valor esperado do seu quadrado.

A variância goza das seguintes propriedades:

$$\text{Var}(c) = 0, \quad (3.30)$$

$$\text{Var}(X + c) = \text{Var}(X), \quad (3.31)$$

$$\text{Var}(cX) = c^2 \text{Var}(X), \quad (3.32)$$

onde c representa uma constante. No caso de X e Y serem variáveis independentes, verifica-se também que:

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y), \quad (3.33)$$

$$\text{Var}(X \cdot Y) = \text{Var}(X) \cdot \text{Var}(Y) + \mu_X^2 \text{Var}(Y) + \mu_Y^2 \text{Var}(X). \quad (3.34)$$

Chama-se *desvio padrão* de X ao valor σ_X , definido por:

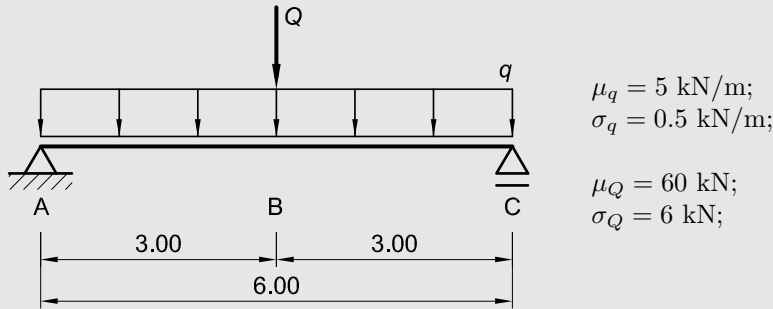
$$\sigma_X = \sqrt{\text{Var}(X)} \quad (3.35)$$

Para ilustrar que conhecer o desvio padrão de uma variável é tão importante como conhecer a sua média, imagine o leitor que decidiu construir uma casa e que o seu fornecedor de betão lhe propõe dois betões, um com uma resistência média de 35 MPa e um desvio padrão de 10 MPa e o outro com uma resistência média de 30 MPa e um desvio padrão de 5 MPa. O primeiro tem assim uma resistência esperada mais

elevada, mas também uma dispersão superior. Se o preço dos betões for o mesmo, por qual optaria? Consegue encontrar um bom critério para decidir?⁵

As propriedades da média e variância vistas acima permitem calcular facilmente a média e variância de quantidades que são funções lineares de variáveis aleatórias. Vejamos em exemplo.

Exemplo 3.4 Considere-se a viga representada na Figura junta, sujeita a duas cargas, q e Q , independentes, com médias e desvios padrão conforme indicado. Determinar a média e o desvio padrão do momento fletor a meio vão da viga.



Resolução

O momento a meio vão é dado por:

$$M = q \frac{6^2}{8} + Q \frac{6}{4} = 4.5q + 1.5Q;$$

O momento fletor é assim uma função linear das cargas q e Q , donde:

$$\begin{aligned} \mu_M &= 4.5(5) + 1.5(60) = 112.5 \text{ kNm}; \\ \sigma_M^2 &= (4.5)^2(0.5)^2 + (1.5)^2(6)^2 = 86.1 \text{ (kNm)}^2; \\ \sigma_M &= \sqrt{86.1} = 9.3 \text{ kNm}. \end{aligned}$$

Foi assim possível determinar a média e o desvio padrão do momento a meio vão da viga sem conhecer explicitamente as distribuições de probabilidade das cargas.

Um outro parâmetro relacionado com a variabilidade é o coeficiente de variação. Chama-se *coeficiente de variação* de X ao valor que representaremos por V_X , definido por:

$$V_X = \frac{\sigma_X}{\mu_X} \quad (3.36)$$

⁵Do ponto de vista da segurança da estrutura, são os valores baixos da resistência que nos devem preocupar. Assim, uma boa escolha seria optar pelo betão com menor probabilidade de possuir resistências baixas, por exemplo 10 MPa. Um outro critério lógico seria optar pelo betão com resistência característica superior.

O coeficiente de variação, como medida de dispersão ou variabilidade, tem a vantagem, comparativamente com o desvio padrão, de ser adimensional, o que facilita a comparação de variabilidades de grandezas com diferentes unidades. Note-se que um coeficiente de variação elevado não significa necessariamente desvio padrão elevado, significando apenas que esse desvio é elevado comparativamente com a média. O coeficiente de variação tende a ser elevado para variáveis com média próxima de zero (e não está definido quando a média é nula).

No caso de X e Y serem variáveis independentes, o coeficiente de variação do produto das variáveis é dado por:

$$V_{X \cdot Y} = \sqrt{V_X^2 \cdot V_Y^2 + V_X^2 + V_Y^2}. \quad (3.37)$$

Para V_X e V_Y ambos inferiores a 0.25, como ordem de grandeza, é aceitável a seguinte aproximação:

$$V_{X \cdot Y} \approx \sqrt{V_X^2 + V_Y^2}. \quad (3.38)$$

Coeficiente de assimetria

O *coeficiente de assimetria* é definido por:

$$\alpha_3 = \frac{E[(X - \mu_X)^3]}{\sigma_X^3} \quad (3.39)$$

Este coeficiente, como o nome indica, mede a assimetria das distribuições. Distribuições simétricas tem coeficiente de assimetria nulo. (Ver Figura 3.8.)

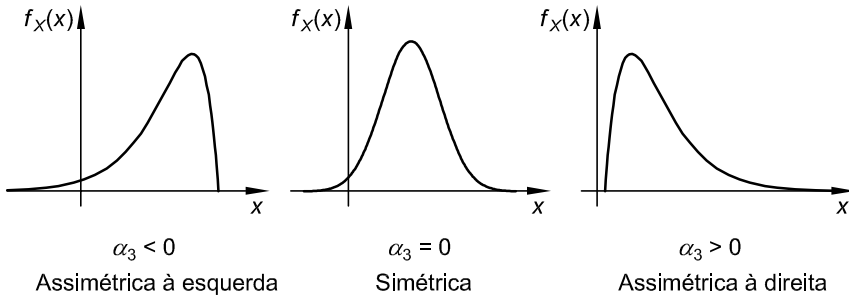


Figura 3.8 Ilustração do coeficiente de assimetria.

Coefficiente de curtose

O *coeficiente de curtose* é definido por:

$$\alpha_4 = \frac{E[(X - \mu_X)^4]}{\sigma_X^4} \quad (3.40)$$

Este coeficiente é usado como medida do peso das caudas, como ilustrado na Figura 3.9. O modelo Normal possui um coeficiente de curtose de 3. Este valor pode ser usado como referência, para efeitos comparativos com outros modelos probabilísticos.

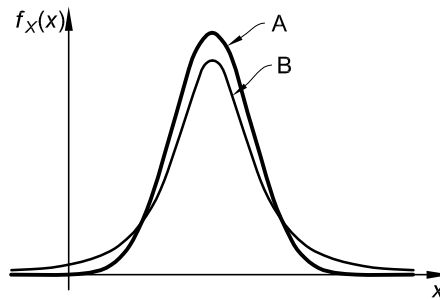


Figura 3.9 Ilustração do coeficiente de curtose. $\alpha_4(B) > \alpha_4(A)$.

3.3 Parâmetros dos modelos probabilísticos

Os modelos probabilísticos dependem geralmente de um ou mais parâmetros. Por exemplo, considere-se a chamada distribuição exponencial, cuja FDP é dada por:

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}. \quad (3.41)$$

Este modelo, que tem como domínio o intervalo $[0, +\infty[$, isto é, $x \geq 0$, apresenta um único parâmetro, λ . Para cada λ particular obtém-se um modelo distinto, pelo que a Eq. (3.41) representa uma família de modelos, chamada no presente caso família exponencial. Para enfatizar que o modelo em questão depende do parâmetro λ , que, para todos os efeitos, é uma constante, escreve-se $f(x | \lambda)$. A barra vertical separa assim a variável independente do parâmetro do modelo (ou parâmetros, nos casos de modelos com mais do que um parâmetro).

Os parâmetros dos modelos probabilísticos classificam-se em três grandes categorias, a saber: (1) parâmetros de localização, (2) parâmetros de escala e (3) parâmetros de forma. Para fazer um uso correto dos modelos probabilísticos é importante entender essa distinção, conforme se explica de seguida.

Seja X uma variável aleatória e sejam $f_X(x)$ e $F_X(x)$ as suas FDP e FDC, respetivamente. Admita-se que $f_X(x)$ não depende de nenhum parâmetro, isto é, representa um modelo único. Considere-se a transformação linear $Y = a + bX$. Naturalmente

Y , por ser função de variável aleatória, é também variável aleatória. Determinemos a FDP de Y a partir da FDP de X . Tem-se:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\ &= P(a + bX \leq y) \\ &= P\left(X \leq \frac{y-a}{b}\right) \\ &= F_X\left(\frac{y-a}{b}\right). \end{aligned} \quad (3.42)$$

Ora, sabemos que $f_Y(y) = dF_Y(y)/dy$, donde, aplicando a regra da derivação da função composta, obtém-se a distribuição pretendida:

$$f_Y(y) = \frac{1}{b} f_X\left(\frac{y-a}{b}\right). \quad (3.43)$$

O modelo $f_Y(y)$ depende assim de dois parâmetros, a e b . Para enfatizar que este modelo depende dos parâmetros a e b , escreve-se: $f_Y(y | a, b)$.

Para o caso particular em que $b = 1$, a que corresponde a transformação $Y = X + a$, obtém-se $f_Y(y) = f_X(y - a)$. Assim, a transformação $Y = X + a$ provoca apenas uma translação na distribuição de probabilidade, afetando apenas a média. O desvio padrão e a forma básica da distribuição permanecem inalterados. O parâmetro a diz-se, por isso, um *parâmetro de localização*.

Considere-se agora o caso particular $Y = bX$. Neste caso $f_Y(y) = \frac{1}{b} f_X\left(\frac{y}{b}\right)$. Ou seja, a transformação $Y = bX$ provoca essencialmente um esticamento na horizontal e um encolhimento na vertical. A média e o desvio padrão são afetados, mas a forma básica da distribuição permanece a mesma. O parâmetro b diz-se, por isso, um *parâmetro de escala*.

Assim, em resumo, quando um modelo probabilístico puder ser expresso por uma FDP na forma:

$$f_Y(y | a, b) = g\left(\frac{y-a}{b}\right), \quad (3.44)$$

onde $g(\cdot)$ representa uma função qualquer, o parâmetro a é de localização e o parâmetro b é de escala. O modelo particular dessa família com $a = 0$ e $b = 1$ diz-se que se encontra na *forma reduzida* dessa família⁶. Por exemplo, a forma reduzida da família exponencial é o modelo $f_X(x) = e^{-x}$.

Quando um parâmetro não é de localização, nem de escala, diz-se *parâmetro de forma*. Uma alteração num parâmetro de forma provoca uma alteração significativa na distribuição, incluindo as suas propriedades (a sua simetria, por exemplo), para além de alterar a sua média e desvio padrão.

Muitas distribuições não possuem parâmetro de forma, o que significa que os diferentes membros da família possuem a mesma forma básica. Também, algumas distribuições são apresentadas tradicionalmente sem parâmetro de localização ou de escala. Por exemplo, considere-se novamente a distribuição exponencial, dada por (3.41). Esta distribuição não apresenta parâmetro de localização (apresenta apenas parâmetro de escala). Todas as populações desta família apresentam como valor

⁶Na literatura inglesa utiliza-se frequentemente as expressões *standardized variable* ou *normalized variable* para designar a forma reduzida das variáveis.

mínimo $x = 0$. Mas é fácil acrescentar um parâmetro de localização, bastando para o efeito definir a variável $Y = X + a$, cuja FDP é dada por:

$$f_Y(y | \lambda, a) = \lambda e^{-\lambda(y-a)}. \quad (y \geq a)$$

Passamos assim a ter uma distribuição exponencial com dois parâmetros: um de localização (parâmetro a) e outro de escala (parâmetro λ). O parâmetro a representa o valor mínimo da distribuição.

3.4 Modelos probabilísticos comuns em segurança estrutural

Os modelos Normal, Lognormal e os modelos associados às distribuições de extremos desempenham um papel muito importante na área da segurança estrutural. Nesta secção faz-se uma breve descrição desses modelos, com ênfase no seu significado físico e nas suas aplicações. No Anexo B apresenta-se uma descrição mais detalhada desses e de outros modelos.

3.4.1 Modelo Normal

A importância do modelo Normal, também conhecido como distribuição de Gauss, resulta do *Teorema do limite central* (TLC). Este teorema estabelece que, quando uma variável X resulta da soma de n variáveis, isto é, quando $X = X_1 + \dots + X_n$, então, para n grande, a FDP de X tende para um modelo com a forma:

$$f_X(x | \mu_X, \sigma_X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_X} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu_X}{\sigma_X} \right)^2 \right]. \quad (-\infty < x < +\infty) \quad (3.45)$$

O parâmetro μ_X é claramente um parâmetro de localização e σ_X claramente um parâmetro de escala. O primeiro coincide com a média da variável e o segundo com o desvio padrão. Para indicar que uma variável aleatória X segue uma distribuição Normal com parâmetros μ_X e σ_X escreve-se $X \sim N(\mu_X, \sigma_X)$.

O TLC é verdadeiro sob condições bastante gerais, e é independente das distribuições das variáveis X_i , o que faz do modelo Normal um dos modelos probabilísticos que ocorrem mais frequentemente. Por exemplo, suponhamos um cabo constituído por muitos fios de aço, todos eles com comportamento dúctil, isto é, uma vez em cedência, têm capacidade de continuar a deforma-se mantendo a força de cedência, não partindo senão após uma deformação significativa. Nestas circunstâncias, a força de rotura do cabo, que é atingida quando todos os fios estão em cedência, é dada pela soma das forças de cedência de cada um dos fios, e tenderá para uma distribuição Normal, independentemente da distribuição de probabilidade da força de cedência dos fios individuais. Este raciocínio sugere que o modelo Normal é adequado na modelação de resistências de materiais com comportamento dúctil.

Existem também razões físicas para modelar a densidade dos materiais (peso por unidade de volume) por meio de um modelo Normal. Considere-se, por exemplo, um corpo de densidade média γ e volume V . O seu peso é então dado por $P = \gamma V$. Divida-se esse corpo em n corpos menores, com densidades γ_i e volumes v_i ($i = 1, \dots, n$). O peso total do corpo é dado pela soma dos pesos dos elementos que o compõem,

podendo escrever-se:

$$\begin{aligned} P = \sum_{i=1}^n P_i &\Leftrightarrow \gamma V = \sum_{i=1}^n \gamma_i v_i \\ &\Leftrightarrow \gamma = \sum_{i=1}^n \frac{v_i}{V} \gamma_i. \end{aligned}$$

A densidade média do material, γ , surge assim como soma de outras quantidades, não admirando por isso que a sua distribuição de probabilidade siga aproximadamente um modelo Normal.

Existem muitas outras quantidades que resultam da soma de outras quantidades, como aquelas que representam um total, uma média, entre outras. O modelo Normal, por vezes chamado *modelo das somas*, poderá ser então adequado na descrição da sua variabilidade.

A forma reduzida da distribuição Normal, isto é, a distribuição $f_X(x | 0, 1)$, representa-se tradicionalmente por $\varphi(x)$ e a FDC por $\Phi(x)$. Dada uma variável $X \sim N(\mu_X, \sigma_X)$, a distribuição desta relaciona-se com a distribuição Normal reduzida pela expressão:

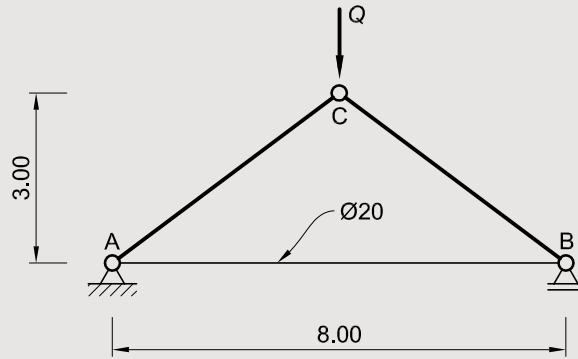
$$F_X(x) = P(X \leq x) = \Phi\left(\frac{x - \mu_X}{\sigma_X}\right). \quad (3.46)$$

Note-se que a distribuição Normal tem por domínio o intervalo $] -\infty, +\infty[$, pelo que, se a variável em estudo possuir limites bem definidos, a adequação do modelo Normal deverá ser analisada cuidadosamente. Por exemplo, suponhamos que a variável em estudo assume apenas valores positivos. O modelo Normal só deverá ser usado se conduzir a uma probabilidade $P(X < 0)$ suficientemente baixa, o que pode não acontecer para coeficientes de variação elevados, superiores a 0.25 ou 0.30, como ordem de grandeza. Com efeito, dada uma variável $X \sim N(\mu_X, \sigma_X)$, a probabilidade dessa variável assumir valores negativos é dada por:

$$P(X < 0) = \Phi\left(\frac{0 - \mu_X}{\sigma_X}\right) = \Phi\left(-\frac{1}{V}\right).$$

Para $V = 0.25$ obtém-se $P(X < 0) = \Phi(-1/0.25) = 3.2 \times 10^{-5}$. Ora esta probabilidade, embora pequena, é da ordem de grandeza das probabilidades de rotura em EL últimos. Podemos assim concluir que a distribuição Normal não deve ser usada na modelação de resistências com coeficientes de variação superiores a 0.25, pois essas assumem em geral apenas valores positivos. Por exemplo, a resistência à compressão de um betão é uma grandeza intrinsecamente positiva: o pior betão que se possa imaginar tem uma resistência nula, mas nunca negativa.

Exemplo 3.5 Considere-se novamente a estrutura analisada no Capítulo 2, cujo modelo de cálculo se reproduz de seguida. Recorde-se que a estrutura destina-se a suportar uma carga Q , cujo valor é, no máximo, 210 kN. O tirante AB é constituído por um varão $\phi 20$ da classe A500. Por aplicação do método dos CPS concluiu-se que a estrutura não é segura à aplicação de uma carga exatamente de 210 kN. (O tirante não tem resistência suficiente.)



A fim de avaliar a segurança da estrutura com maior rigor fez-se uma breve pesquisa, tendo-se encontrado um estudo contendo uma análise estatística da tensão de cedência de vários milhares de varões da classe A400 e A500, produzidos durante um período de cerca de 20 anos, envolvendo vários produtores de aço (Baptista e Filipe, 2016). No caso do aço A500, o estudo reportou uma tensão de cedência média igual a 563 MPa e um desvio padrão de 26 MPa. O histograma apresentado no estudo sugere que o modelo Normal é adequado.

- Determinar a probabilidade do tirante romper para uma carga $Q = 210$ kN, assumindo que $f_y \sim N(563, 26)$ MPa.
- Suponha-se que a estrutura suportou uma carga de 200 kN e não colapsou. Estimar novamente a probabilidade do tirante romper usando esta informação.

Resolução

- Seja N_E o esforço atuante no tirante e N_R o esforço resistente. A probabilidade do tirante romper é, então:

$$\begin{aligned}
 p_f &= P(N_E > N_R) \\
 &= P\left(\frac{2}{3}Q > f_y A_s\right) \\
 &= P\left(f_y < \frac{2Q}{3A_s}\right) \\
 &= P(f_y < 445.86 \text{ MPa}) \\
 &= 3.31 \times 10^{-6}.
 \end{aligned}$$

Iremos ver no Capítulo 11, dedicado aos critérios de aceitação da fiabilidade, que esta probabilidade é perfeitamente aceitável, pelo que a estrutura pode ser considerada segura à aplicação de uma carga de 210 kN, embora o método dos CPS tivesse conduzido a uma conclusão diferente.

Este exemplo permite apreciar as potencialidades da metodologia probabilística no âmbito da segurança de estruturas existentes. O exemplo mostra

também o benefício de se usar as propriedades reais dos materiais (quando isso for legalmente possível), e não as especificadas nos regulamentos.

A título de referência, mostra-se de seguida o código Python usado para determinar a probabilidade acima:

```
from scipy.stats import norm
pf = norm.cdf(445.86, 563, 26)
```

- b) Trata-se de uma aplicação direta do conceito de probabilidade condicionada:

$$\begin{aligned} Q = 200 \text{ kN} &\Rightarrow N_E = \frac{2}{3} 200 = 133.33 \text{ kN} \\ &\Rightarrow N_R > 133.33 \text{ kN}, \end{aligned}$$

visto que o tirante não rompeu para $Q = 200 \text{ kN}$. Assim,

$$f_y A_s > 133.33 \text{ kN} \Leftrightarrow f_y > 424.63 \text{ MPa}.$$

Pretende-se pois avaliar a probabilidade:

$$\begin{aligned} p_f &= P(f_y < 445.86 \mid f_y > 424.63) \\ &= \frac{P(424.63 < f_y < 445.86)}{P(f_y > 424.63)} \\ &= \frac{F_{f_y}(445.86) - F_{f_y}(424.63)}{1 - F_{f_y}(424.63)} \\ &= 3.26 \times 10^{-6}. \end{aligned}$$

O conhecimento de que o tirante não rompeu quando se aplicou uma carga de 200 kN reduziu assim a probabilidade procurada em cerca de 2%. Não é uma redução significativa, mas não é de estranhar. Com efeito, como a probabilidade do tirante romper para $Q = 210 \text{ kN}$ é muito pequena, não constituiu nenhuma surpresa o facto do tirante não ter rompido para $Q = 200 \text{ kN}$.

A título de referência, a probabilidade acima foi calculada com o seguinte código Python:

```
from scipy.stats import norm
X = norm(563, 26)
pf = (X.cdf(445.86) - X.cdf(424.63)) / (1 - X.cdf(424.63))
```

3.4.2 Modelo Lognormal

O modelo Lognormal apresenta afinidade forte com o modelo Normal. Com efeito, uma variável Y possui distribuição Lognormal, e escreve-se $Y \sim \text{LN}$, quando a variável $X = \ln Y$ possui distribuição Normal. De forma equivalente, dada uma variável X com distribuição Normal, a variável $Y = \exp(X)$ possui distribuição Lognormal. Em símbolos:

$$X \sim N(a, b) \Leftrightarrow [Y = \exp(X)] \sim \text{LN}(a, b). \quad (3.47)$$

A FDP de Y é facilmente obtida a partir da FDP de X . Tem-se sucessivamente,

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\ &= P(e^X \leq y) \\ &= P(X \leq \ln y) \quad (\text{pois o logaritmo é uma função crescente}) \\ &= F_X(\ln y). \end{aligned} \quad (3.48)$$

Derivando em ordem a y esta última equação, obtém-se a expressão da FDP do modelo Lognormal:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{1}{y} f_X(\ln y) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} b y} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln y - a}{b} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (3.49)$$

cujos domínio é, naturalmente $y > 0$, pois o logaritmo não está definido para valores negativos. Este modelo depende assim de dois parâmetros, que coincidem com a média e o desvio padrão do modelo Normal subjacente. Embora não seja evidente pela Eq. (3.49), pode demonstrar-se que o parâmetro a é de escala e o parâmetro b é de forma. Para indicar que uma variável aleatória X segue uma distribuição Lognormal com parâmetros a e b escreve-se $X \sim \text{LN}(a, b)$.

Sempre que uma variável Y resulta do produto de um número significativo de outras variáveis aleatórias, a distribuição de Y tende para uma distribuição Lognormal, independentemente da distribuição dessas variáveis. Este resultado, que torna o modelo Lognormal muito frequente, resulta diretamente do TLC. Com efeito, suponha-se que $Y = Y_1 \times \dots \times Y_n$, onde Y_1, \dots, Y_n são um conjunto de n variáveis com distribuição qualquer. Aplicando logaritmos a ambos os membros desta igualdade, vem $\ln Y = \ln Y_1 + \dots + \ln Y_n$. Assim, a variável $\ln Y$ tenderá para uma distribuição Normal (por resultar da soma de um certo número de variáveis), e portanto a variável Y tenderá para uma distribuição Lognormal. Por esta razão, o modelo Lognormal é por vezes chamado *modelo dos produtos*, à semelhança do modelo Normal que é chamado modelo das somas.

O modelo Lognormal apresenta como domínio o intervalo $]0, +\infty[$, sendo muito utilizado na modelação de resistências. Para resistências com coeficiente de variação elevado é preferível usar modelo Lognormal, em vez do modelo Normal. A sua assimetria à direita também o torna muitas vezes adequado na modelação de ações.

3.4.3 Distribuições de extremos

As distribuições de extremos têm manifesto interesse na área da segurança estrutural, já que são as situações extremas (ações máximas ou resistências mínimas) que provocam o colapso das estruturas. As distribuições de extremos classificam-se em duas grandes categorias: *distribuições de extremos exatas* e *distribuições de extremos assintóticas*. Como o nome sugere, as segundas constituem limites das primeiras, podendo ser encaradas como distribuições aproximadas das primeiras. Vejamos como se obtêm estas distribuições.

Distribuições de extremos exatas

Começemos pelas *distribuições de máximos*. Seja X uma variável com FDP $f_X(x)$ e FDC $F_X(x)$. Seja $\{X_1, \dots, X_n\}$ uma sequência temporal de n observações independentes de X . Defina-se a variável $X_{\max,n} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$. Trata-se de uma nova variável aleatória, com interesse óbvio na modelação de ações variáveis no tempo⁷. Admitindo então independência nas n observações de X , a distribuição de $X_{\max,n}$ é facilmente obtida a partir da distribuição de X . Com efeito,

$$\begin{aligned} F_{X_{\max,n}}(x) &= P(X_{\max,n} \leq x) \\ &= P(X_1 \leq x \cap \dots \cap X_n \leq x) \\ &= [F_X(x)]^n. \end{aligned}$$

Podemos pois escrever:

$$F_{X_{\max,n}}(x) = [F_X(x)]^n \quad (3.50)$$

A distribuição $F_X(x)$ é por vezes designada *distribuição inicial*, ou ainda *distribuição instantânea*.

A FDP de $X_{\max,n}$ é a derivada de $F_{X_{\max,n}}(x)$ em ordem a x , obtendo-se:

$$f_{X_{\max,n}}(x) = n \cdot [F_X(x)]^{n-1} \cdot f_X(x) \quad (3.51)$$

A título de exemplo, considere-se a variável $X \sim N(0, 1)$. A Figura 3.10 mostra distribuições de máximos desta variável para diferentes valores de n . Conforme se observa, à medida que n aumenta, a média também aumenta.

Vejamos agora um exemplo de aplicação da distribuição de máximos exata.

Exemplo 3.6 Após um período de observação e pesagem dos camiões que atravessam uma determinada ponte, constatou-se que o peso dos camiões pode ser modelado adequadamente por meio de uma distribuição Normal com média 16 ton e desvio padrão 8 ton. (Como o peso total dos veículos é uma soma de pesos menores, existem razões físicas para acreditar que o modelo Normal é uma escolha razoável.) Constatou-se também que, em média, passam pela referida

⁷Por exemplo, se X representar o valor médio da velocidade do vento em períodos de 10 min numa determinada localidade, tem interesse conhecer a distribuição de probabilidade dos máximos anuais dessa variável, isto é, a distribuição do máximo de $n = 6 \times 24 \times 365 = 52\,560$ observações de X .

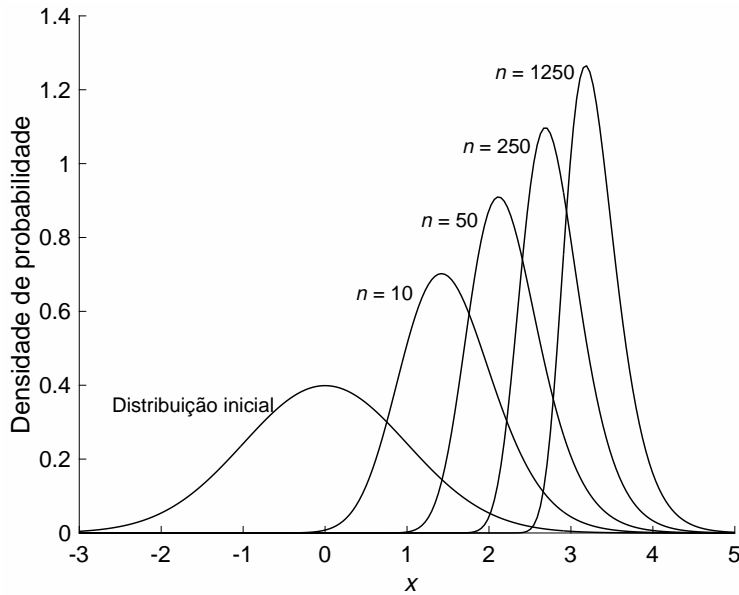


Figura 3.10 Distribuição inicial e distribuições de máximos.

ponete, diariamente, cerca de 150 camiões.

- Determinar a probabilidade de um camião escolhido ao acaso numa operação stop possuir um peso superior a 44 ton (valor máximo permitido por lei).
- Determinar a probabilidade de vir a passar pela ponte, nos próximos 50 anos, pelo menos um camião com peso superior a 60 ton.
- Determinar o valor do peso dos camiões que tem uma probabilidade de 0.02 de ser excedido num ano.

Resolução

- Seja X o peso de cada camião que atravessa a ponte. Então, $X \sim N(16, 8)$. Pretende-se calcular $P(X > 44)$. Tem-se:

$$\begin{aligned} P(X > 44) &= 1 - P(X \leq 44) \\ &= 1 - F_X(44) \\ &= 0.00023. \end{aligned}$$

- Pretende-se determinar $P(X_{\max, n} > 60)$, onde $X_{\max, n}$ representa o peso máximo observado em 50 anos, isto é, o peso máximo de:

$n = 150 \times 365 \times 50 = 2\,737\,500$ camiões. Tem-se:

$$\begin{aligned} P(X_{\max,n} > 60) &= 1 - P(X_{\max,n} \leq 60) \\ &= 1 - F_{X_{\max,n}}(60) \\ &= 1 - [F_X(60)]^n \\ &= 1 - [F_X(60)]^{2\,737\,500} \\ &= 0.05. \end{aligned}$$

- c) Representemos o valor pedido por X_k . Portanto, pretendemos determinar X_k tal que $P(X_{\max,n} > X_k) = 0.02$, onde n representa agora o número de camiões esperado em um ano, isto é, $n = 150 \times 365 = 54\,750$ camiões. Tem-se, sucessivamente:

$$\begin{aligned} P(X_{\max,n} > X_k) = 0.02 &\Leftrightarrow 1 - F_{X_{\max,n}}(X_k) = 0.02 \\ &\Leftrightarrow [F_X(X_k)]^n = 0.98 \\ &\Leftrightarrow F_X(X_k) = 0.98^{1/n} \\ &\Leftrightarrow X_k = F_X^{-1}(0.98^{1/n}) = 55.6 \text{ ton.} \end{aligned}$$

Assim, o peso de 55.6 ton tem uma probabilidade de 0.02 de ser excedido em um ano.

A título de referência, indica-se a seguir o código Python usado para determinar as quantidades pedidas.

```
from scipy.stats import norm

X = norm(16, 8)

# a)
p1 = 1 - X.cdf(44)

# b)
p2 = 1 - (X.cdf(60))**2737500

# c)
Xk = X.ppf(0.98**(1/54750))
```

Vejamos agora as *distribuições exatas de mínimos*. Seja X uma variável aleatória com FDP $f_X(x)$ e FDC $F_X(x)$. Seja $\{X_1, \dots, X_n\}$ um conjunto de n observações independentes de X . Estudemos a variável $X_{\min,n} = \min\{X_1, \dots, X_n\}$. Trata-se de uma nova variável aleatória com interesse óbvio⁸, cuja distribuição é facilmente obtida

⁸Imagine-se, por exemplo, um elemento estrutural com n componentes semelhantes. Se a resistência do elemento estrutural depender fortemente da componente com resistência mais baixa, tem interesse conhecer a distribuição de probabilidade da resistência mínima dessas n componentes.

a partir da distribuição $F_X(x)$. Com efeito,

$$\begin{aligned} F_{X_{\min,n}}(x) &= P(X_{\min,n} \leq x) \\ &= 1 - P(X_{\min,n} > x) \\ &= 1 - P(X_1 > x \cap \dots \cap X_n > x) \\ &= 1 - (1 - F_X(x))^n. \end{aligned}$$

Podemos pois escrever:

$$F_{X_{\min,n}}(x) = 1 - (1 - F_X(x))^n \quad (3.52)$$

A FDP obtém-se derivando (3.52), vindo:

$$f_{X_{\min,n}}(x) = n \cdot [1 - F_X(x)]^{n-1} \cdot f_X(x) \quad (3.53)$$

A título de exemplo, considere-se a variável $X \sim N(0, 1)$. A Figura 3.11 mostra distribuições de mínimos desta variável. Comparando as distribuições de mínimos com as distribuições de máximos (Figura 3.10), observa-se que são simétricas uma da outra. Este resultado é intuitivo atendendo a que a distribuição inicial (distribuição Normal, no presente caso) também é simétrica, e portanto com caudas esquerda e direita exatamente com a mesma forma e peso.

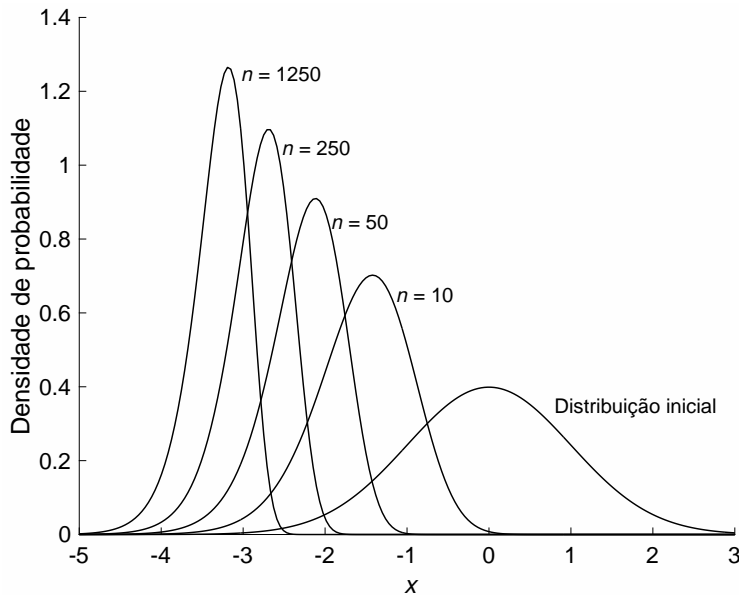


Figura 3.11 Distribuição inicial e distribuições de mínimos.

Distribuições de extremos assintóticas

Verifica-se que a forma das distribuições de extremos exatas tendem a estabilizar à medida que n cresce, o que permite determinar distribuições assintóticas, ou distribuições limite. Verifica-se também que a forma das distribuições limite não depende da distribuição inicial como um todo, mas apenas da forma das suas caudas (cauda inferior no caso da distribuição de mínimos e cauda superior no caso da distribuição de máximos).

Dependendo da forma como se dá o decaimento na cauda de interesse da distribuição inicial (cauda esquerda se estivermos interessados nos mínimos e cauda direita se estivermos interessados nos máximos), Gumbel classificou as distribuições assintóticas de extremos em três grandes categorias, a saber (Gumbel, 1958):

- *Distribuições de extremos do tipo I*: quando a distribuição inicial decai de forma exponencial na cauda de interesse e não é limitada nessa cauda.
- *Distribuições de extremos do tipo II*: quando a distribuição inicial decai de forma polinomial na cauda de interesse e não é limitada nessa cauda.
- *Distribuições de extremos do tipo III*: quando a distribuição inicial decai de forma polinomial na cauda de interesse e é limitada nessa cauda.

Temos assim seis tipos de distribuições de extremos: tipo I, de máximos e de mínimos; tipo II, de máximos e de mínimos; e tipo III, de máximos e de mínimos. Uma descrição detalhada e compreensível destas distribuições encontra-se em Ang e Tang (1984).

Das seis distribuições mencionadas, apenas três têm sido amplamente usadas no âmbito da segurança estrutural. São elas a distribuição tipo I de máximos, a distribuição tipo II de máximos e a distribuição tipo III de mínimos. A primeira é também conhecida por distribuição Gumbel, a segunda por distribuição Fréchet e a terceira por distribuição Weibull. Estas distribuições são descritas com algum detalhe no Anexo B, páginas 235, 238 e 242, respetivamente.

A título de exemplo, considere-se a importante distribuição Gumbel, cuja FDP e FDC são dadas por:

$$f_X(x | u, \alpha) = \alpha \exp \left\{ -\alpha(x - u) - \exp[-\alpha(x - u)] \right\}, \quad (3.54)$$

$$F_X(x | u, \alpha) = \exp \left\{ -\exp[-\alpha(x - u)] \right\}, \quad (3.55)$$

cujos domínios são $-\infty < x < +\infty$. Conforme se observa, o parâmetro u é de localização e o parâmetro α é de escala. O modelo de Gumbel não tem assim parâmetros de forma, pelo que os diferentes modelos da família têm todos a mesma forma básica. Para indicar que uma variável aleatória X segue uma distribuição Gumbel com parâmetros u e α escreve-se $X \sim \text{Gb}(u, \alpha)$.

As distribuições assintóticas gozam da seguinte propriedade interessante: se a distribuição inicial de uma dada variável pertence a uma determinada família de distribuições assintóticas, os máximos (ou mínimos) dessa distribuição continuam a pertencer a essa família. Este resultado é lógico. Com efeito, se os máximos (ou mínimos) de uma dada variável tendem para uma determinada distribuição assintótica, é lógico que, quando essa variável já é assintótica, os respetivos máximos (ou mínimos) continuem a sê-lo. Por exemplo, se os máximos anuais da velocidade do vento em determinada localidade seguirem uma distribuição Gumbel, o mesmo sucede com os máximos em 50 anos, e vice-versa.

3.5 Função distribuição inversa

Uma função muito utilizada na prática é a função inversa da distribuição cumulativa, representada por $F_X^{-1}(\cdot)$, e designada *função distribuição inversa*, ou ainda *função quantil*. Esta função é muito útil na geração de amostras aleatórias e na determinação de quantis (e daí o nome função quantil).

Chama-se *quantil* p de uma variável X ao valor da variável que tem uma probabilidade p de não ser excedido (Figura 3.12). Representando esse valor por X_p , tem-se:

$$\begin{aligned} X_p : P(X \leq X_p) = p &\Leftrightarrow F_X(X_p) = p \\ &\Leftrightarrow X_p = F_X^{-1}(p) \end{aligned} \quad (3.56)$$

A mediana de uma variável aleatória corresponde ao quantil 0.50.

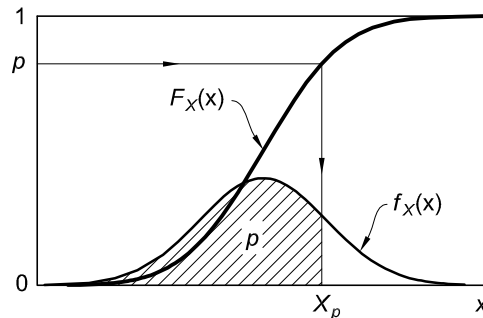


Figura 3.12 Definição de quantil p de uma variável aleatória.

A descrição apresentada no Anexo B relativa a modelos probabilísticos comuns inclui as expressões das inversas das distribuições cumulativas. Poderemos recorrer a esse anexo sempre que necessitarmos de determinar quantis de variáveis aleatórias. A Tabela 3.1 mostra a função quantil para os modelos probabilísticos mais comuns na área da segurança estrutural. A função $\Phi^{-1}(\cdot)$ representa a inversa da FDC normal reduzida.

No âmbito da Engenharia Civil, usam-se com muita frequência os quantis 0.05 e 0.95, designados respectivamente *valor característico inferior* e *valor característico superior*. O primeiro, representado usualmente por $X_{k,inf}$, é muito utilizado na quantificação de propriedades dos materiais e o segundo, representado usualmente por $X_{k,sup}$, é muito utilizado na quantificação de ações. Tem-se pois:

$$X_{k,inf} = X_{0.05} = F_X^{-1}(0.05), \quad (3.57)$$

$$X_{k,sup} = X_{0.95} = F_X^{-1}(0.95). \quad (3.58)$$

No caso de variáveis Gaussianas, considerando que $\Phi^{-1}(0.05) = -1.645$ e que $\Phi^{-1}(0.95) = 1.645$, tem-se:

$$X_{0.05} = \mu_X(1 - 1.645 V_X), \quad (3.59)$$

$$X_{0.95} = \mu_X(1 + 1.645 V_X). \quad (3.60)$$

Tabela 3.1 Função quantil de modelos probabilísticos comuns em segurança estrutural*

Modelo	$X_p = F_X^{-1}(p)$
Normal	$X_p = \mu_X [1 + \Phi^{-1}(p) V_X]$
Lognormal	$X_p = \frac{\mu_X}{\sqrt{1+V_X^2}} \exp \left[\Phi^{-1}(p) \sqrt{\ln(1 + V_X^2)} \right]$ $\approx \mu_X \exp \left[\Phi^{-1}(p) V_X \right], \quad \text{para } V_X \leq 0.25$
Gumbel	$X_p = \mu_X \left\{ 1 - \frac{\sqrt{6}}{\pi} V_X \left[0.5772 + \ln(-\ln p) \right] \right\}$

* Os parâmetros μ_X e V_X representam a média e o coeficiente de variação da variável X .

Exemplo 3.7 Considere-se um betão, cuja resistência f_c tem média de 30 MPa e desvio padrão 5 MPa ($V = 0.167$). Determinar o valor característico, f_{ck} , da resistência desse betão, assumindo que a resistência segue uma distribuição:

- a) Normal.
- b) Lognormal.

Resolução

- a) Assumindo que $f_c \sim N(30, 5)$ e considerando que se trata de uma propriedade de material, interessa naturalmente o valor característico inferior, donde:

$$f_{ck} = 30(1 - 1.645 \times 0.167) = 21.8 \text{ MPa.}$$

- b) Assumindo agora que a variável $f_c \sim LN$, tem-se:

$$f_{ck} = \frac{30}{\sqrt{1 + 0.167^2}} \exp \left(-1.645 \sqrt{\ln(1 + 0.167^2)} \right)$$

$$= 22.5 \text{ MPa.}$$

Como se observou no exemplo anterior, o modelo Normal conduziu a uma estimativa da resistência característica do betão inferior à estimativa obtida com o modelo Lognormal, estando por isso do lado da segurança. Tal deve-se ao facto do modelo Normal apresentar uma cauda esquerda mais pesada, tal como podemos apreciar na Figura 3.13. Podemos pois concluir que, para efeitos de modelação de resistências, o modelo Normal conduz a estimativas do lado da segurança, ou mais conservativas, quando comparadas com as estimativas que se obtêm com o modelo Lognormal.

Essa é uma vantagem do modelo Normal. Este modelo apresenta porém a desvantagem de assumir valores negativos, e em geral as resistências são quantidades que admitem apenas valores positivos. Conforme vimos anteriormente, o modelo Normal não deve ser usado na modelação de resistências com coeficientes de variação superiores a 0.25, como ordem de grandeza, pois nesse caso a probabilidade da variável assumir valores negativos não é desprezável. Vejamos no exemplo anterior quanto

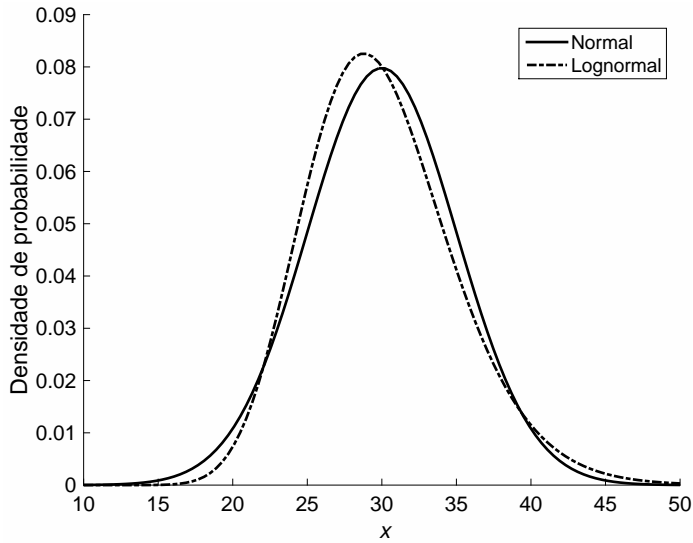


Figura 3.13 Modelos Normal e Lognormal sobrepostos, ambos com média de 30 MPa e desvio padrão de 5 MPa.

vale essa probabilidade. Tem-se:

$$\begin{aligned} P(f_c < 0) &= \Phi\left(-\frac{1}{V}\right) \\ &= \Phi\left(-\frac{1}{0.167}\right) = 1.06 \times 10^{-9}. \end{aligned}$$

Esta probabilidade é francamente pequena, pelo que, no presente caso não haveria qualquer inconveniente em modelar a resistência do betão por meio de uma distribuição Normal.

Capítulo 4

Modelos probabilísticos multidimensionais

O capítulo precedente tratou dos conceitos fundamentais de probabilidade, nomeadamente os conceitos de variável aleatória e distribuição de probabilidade. O presente capítulo estende esses conceitos ao espaço multidimensional.

4.1 Conceito de vetor aleatório

Um vetor (X_1, \dots, X_n) diz-se vetor aleatório quando cada uma das suas componentes é uma variável aleatória. Seguem exemplos de vetores aleatórios:

- $X = (M_E, M_R)$, onde M_E representa o momento atuante numa secção de uma dada estrutura e M_R o respetivo momento resistente.
- $X = (g, q, f_c, f_y)$, onde g representa o peso de uma viga de betão armado, q uma sobrecarga que nela atua, f_c a resistência do betão e f_y a tensão de cedência do aço.

O primeiro vetor possui 2 dimensões (bi-dimensional) e o segundo possui 4 dimensões.

4.2 Distribuição de probabilidade conjunta

Sem perda de generalidade, considere-se o vetor bi-dimensional (X, Y) , constituído pelas variáveis X e Y , ambas contínuas. Chama-se *função densidade de probabilidade conjunta* à função $f_{XY}(x, y)$ definida de tal modo que:

$$P[(a < X < b) \cap (c < Y < d)] = \int_a^b \int_c^d f_{XY}(x, y) dydx \quad (4.1)$$

e que verifica a seguinte condição:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dydx = 1. \quad (4.2)$$

A probabilidade $P[(a < X < b) \cap (c < Y < d)]$ representa-se mais frequentemente por $P(a < X < b, c < Y < d)$. No caso bi-dimensional, a função $f_{XY}(x, y)$ corresponde à equação de uma superfície. A probabilidade $P(a < X < b, c < Y < d)$ corresponde a um volume sob essa superfície, como ilustrado na Figura 4.1.

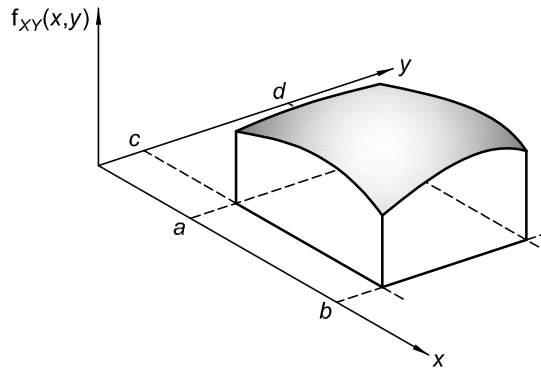


Figura 4.1 Representação de uma FDP conjunta de um vetor aleatório bi-dimensional. A probabilidade $P(a < X < b, c < Y < d)$ corresponde a um volume sob essa superfície.

No caso de variáveis discretas, chama-se *função massa de probabilidade conjunta* à função $p(x, y)$ que associa a cada valor de (X, Y) a respetiva probabilidade, isto é:

$$p(x_i, y_j) = P(X = x_i \cap Y = y_j). \quad (4.3)$$

A probabilidade $P(X = x_i \cap Y = y_j)$ escreve-se mais frequentemente por $P(X = x_i, Y = y_j)$. Naturalmente, para que $p(x, y)$ seja uma verdadeira FMP deve verificar a condição:

$$\sum_i \sum_j p(x_i, y_j) = 1. \quad (4.4)$$

A Figura 4.2 representa esquematicamente uma FMP conjunta de uma vetor bi-dimensional discreto.

As definições acima são facilmente generalizáveis para o espaço n -dimensional (embora deixe de ser possível a sua representação gráfica). Por exemplo, dado um vetor de dimensão n , (X_1, \dots, X_n) , a FDP conjunta $f_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n)$ é definida de tal modo que:

$$P[(X_1, \dots, X_n) \in \Omega] = \int \dots \int_{\Omega} f_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n, \quad (4.5)$$

onde Ω representa uma região qualquer do espaço n -dimensional.

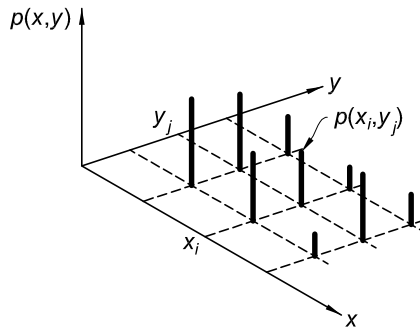


Figura 4.2 Representação de uma FMP conjunta de uma vetor aleatório bi-dimensional discreto.

4.3 Distribuições de probabilidade marginal e condicionada

4.3.1 Distribuição marginal

Considere-se o vetor (X, Y) , com FDP conjunta $f_{XY}(x, y)$. As distribuições de probabilidade das variáveis X e Y quando consideradas isoladamente designam-se por *distribuições de probabilidade marginais*. As respetivas FDP, que se representam, respetivamente, por $f_X(x)$ e $f_Y(y)$, são definidas pelas seguintes expressões:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dy, \quad (4.6)$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dx. \quad (4.7)$$

As distribuições marginais podem assim ser obtidas a partir da distribuição conjunta, mas o contrário não é em geral possível.

No caso de X e Y serem variáveis discretas, a definição de probabilidade marginal é inteiramente semelhante, substituindo-se o integral por um somatório:

$$p_X(x_i) = \sum_j p(x_i, y_j), \quad (4.8)$$

$$p_Y(y_j) = \sum_i p(x_i, y_j). \quad (4.9)$$

4.3.2 Distribuição condicionada

A distribuição de X dado $Y = y$, que se representa por $f_{X|Y}(x | y)$ e se designa por *distribuição condicionada* de X dado $Y = y$, é definida por:

$$f_{X|Y}(x | y) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)}, \quad (4.10)$$

onde $f_{XY}(x, y)$ representa a FDP conjunta do vetor (X, Y) e $f_Y(y)$ a FDP marginal de Y . De forma análoga, a distribuição de Y dado $X = x$, é definida por:

$$f_{Y|X}(y | x) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_X(x)}, \quad (4.11)$$

onde $f_X(x)$ representa a FDP marginal de X .

Note-se que as distribuições condicionadas, conforme definidas pelas expressões acima, são verdadeiras distribuições de probabilidade, isto é, o integral da função densidade ao longo do seu domínio é unitário. Com efeito, tomando como referência a Eq. (4.10), tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X|Y}(x | y) dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)} dx \\ &= \frac{1}{f_Y(y)} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dx \\ &= \frac{f_Y(y)}{f_Y(y)} = 1. \end{aligned}$$

Da definição de FDP condicionada obtém-se imediatamente a versão do *Teorema da multiplicação de probabilidades* aplicado a densidades¹:

$$f(x, y) = f(x | y) f(y) = f(y | x) f(x). \quad (4.12)$$

Frequentemente as distribuições de probabilidade condicionadas são mais fáceis de caracterizar do que a distribuição conjunta, pois correspondem a espaços de resultados de menor dimensão. O Teorema da multiplicação das probabilidades mostra que se for conhecida a distribuição condicionada de uma das variáveis em relação à outra e a distribuição marginal desta última, fica definida a distribuição conjunta — basta multiplicar essas duas distribuições.

Juntando a definição de probabilidade marginal com o Teorema da multiplicação de probabilidades obtém-se imediatamente o chamado *Teorema da probabilidade total* (aplicado a densidades):

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x | y) f(y) dy, \quad (4.13)$$

$$f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y | x) f(x) dx. \quad (4.14)$$

¹Omitiram-se os índices por razões de clareza de leitura.

4.4 Variáveis estatisticamente independentes

Recorda-se agora o conceito de variáveis independentes, conceito este paralelo ao conceito de acontecimentos independentes. As variáveis X e Y dizem-se estatisticamente independentes quando a sua FDP conjunta for igual ao produto das FDP marginais, isto é:

$$X \text{ e } Y \text{ são independentes} \quad \Leftrightarrow \quad f(x, y) = f(x) f(y) \quad (4.15)$$

É fácil verificar que a independência entre X e Y implica que $f(x | y) = f(x)$ e que $f(y | x) = f(y)$, ou seja, quando duas variáveis são independentes, o conhecimento do valor de uma em nada altera a distribuição de probabilidade da outra.

4.5 Covariância

Considere-se o vetor aleatório (X, Y) . Chama-se *covariância* entre X e Y à quantidade:

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] \quad (4.16)$$

Vimos anteriormente que a variância de uma variável mede a dispersão dos seus valores em torno da média. Veremos mais à frente que a covariância mede o grau de relação linear entre X e Y . Observe-se que $\text{Cov}(X, X) = \text{Var}(X)$.

Recorrendo à definição de valor esperado, podemos calcular a covariância entre X e Y através do seguinte integral²:

$$\text{Cov}(X, Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (X - \mu_X)(Y - \mu_Y) f_{XY}(x, y) dx dy. \quad (4.17)$$

Este integral pode ser de difícil determinação. Geralmente é mais fácil calcular covariâncias recorrendo ao resultado que se descreve de seguida. Desenvolvendo o produto $(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)$ e aplicando valor esperado ao resultado, verifica-se facilmente que:

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - \mu_X \mu_Y. \quad (4.18)$$

Esta fórmula, que é muito útil no cálculo de covariâncias, mostra que o cálculo da covariância resume-se a calcular $E(XY)$.

Recorde-se que, quando X e Y são independentes, $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$. Donde, observando (4.18), podemos concluir que

$$X \text{ e } Y \text{ independentes} \quad \Rightarrow \quad \text{Cov}(X, Y) = 0. \quad (4.19)$$

O contrário não é em geral verdade, isto é, covariância nula não implica independência. A única conclusão que podemos tirar é que, quando a covariância é diferente de zero, as variáveis X e Y possuem algum grau de dependência, ou estão de alguma forma correlacionadas. Mas quando a covariância é nula, nada se pode afirmar relativamente ao grau de dependência entre as variáveis. Na verdade, a covariância até pode ser nula e as variáveis serem totalmente dependentes entre si³.

²Naturalmente, se X e Y forem variáveis discretas, o integral é substituído por um somatório.

³Dois variáveis são totalmente dependentes quando se relacionam entre si por meio de um modelo determinístico.

Quando $\text{Cov}(X, Y) = 0$ diz-se que as variáveis X e Y não estão correlacionadas (não necessariamente independentes, como vimos), e quando $\text{Cov}(X, Y) \neq 0$ diz-se que estão correlacionadas (e portanto dependentes).

Um parâmetro diretamente relacionado com a covariância entre duas variáveis é o chamado *coeficiente de correlação*. Chama-se coeficiente de correlação entre as variáveis X e Y à quantidade:

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \quad (4.20)$$

Trata-se de um parâmetro adimensional, apresentando por isso vantagens em relação à covariância. Determinemos o coeficiente de correlação entre duas variáveis iguais entre si. Tem-se:

$$\begin{aligned} \rho_{XX} &= \frac{\text{Cov}(X, X)}{\sigma_X \sigma_X} \\ &= \frac{\text{E}[(X - \mu_X)^2]}{\sigma_X^2} \\ &= \frac{\sigma_X^2}{\sigma_X^2} = 1. \end{aligned}$$

Assim, o coeficiente de correlação entre duas variáveis iguais entre si é unitário. Pode demonstrar-se que, dadas duas variáveis X e Y quaisquer:

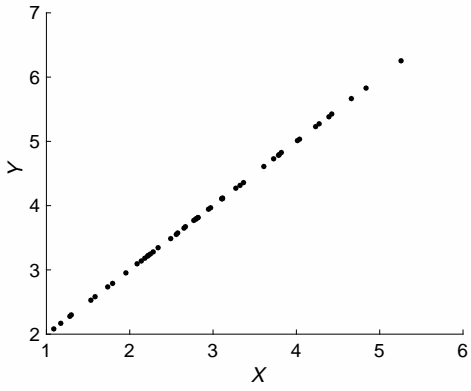
$$-1 \leq \rho_{XY} \leq 1. \quad (4.21)$$

Embora não seja evidente pelas definições de covariância e coeficiente de correlação, estes parâmetros medem, como se disse acima, o grau de relação linear entre as variáveis X e Y . Em particular, os casos extremos $\rho_{XY} = 1$ e $\rho_{XY} = -1$ correspondem à existência de uma relação linear determinística entre X e Y , isto é, uma relação da forma $Y = aX + b$. ($\rho_{XY} = 1$ corresponde a $a > 0$ e $\rho_{XY} = -1$ corresponde a $a < 0$.) Um coeficiente de correlação elevado (próximo de 1 ou de -1) significa que as variáveis tendem a variar linearmente uma em relação à outra. Um coeficiente de correlação próximo de zero indica apenas fraca relação linear, podendo ocorrer quando as variáveis são independentes, ou quando são dependentes, mas a relação entre elas é não linear. A Figura 4.3 ilustra o que acaba de ser dito.

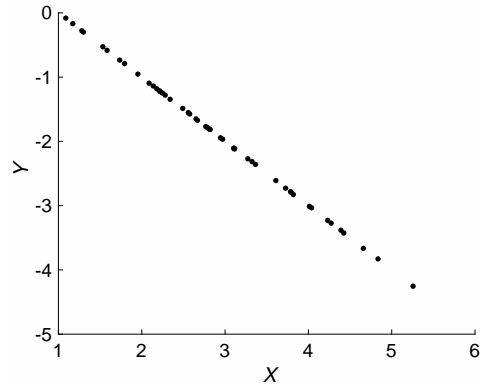
Conforme vimos, a covariância é estabelecida entre duas variáveis. Assim, dado um vetor $X = (X_1, \dots, X_n)$, as covariâncias entre as diferentes variáveis do vetor são estabelecidas para cada par de variáveis do vetor, sendo geralmente organizadas na forma de uma matriz, chamada matriz de covariâncias e representada geralmente por Σ , definida por:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \text{Var}(X_1) & \text{Cov}(X_1, X_2) & \cdots & \text{Cov}(X_1, X_n) \\ \text{Cov}(X_2, X_1) & \text{Var}(X_2) & \cdots & \text{Cov}(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Cov}(X_n, X_1) & \text{Cov}(X_n, X_2) & \cdots & \text{Var}(X_n) \end{bmatrix}$$

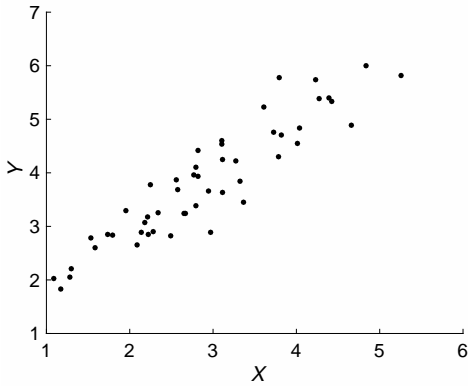
Trata-se naturalmente de uma matriz simétrica. A diagonal da matriz de covariâncias é constituída pelas variâncias das componentes do vetor em apreço. Quando as componentes do vetor são independentes entre si, a matriz de covariâncias é diagonal.



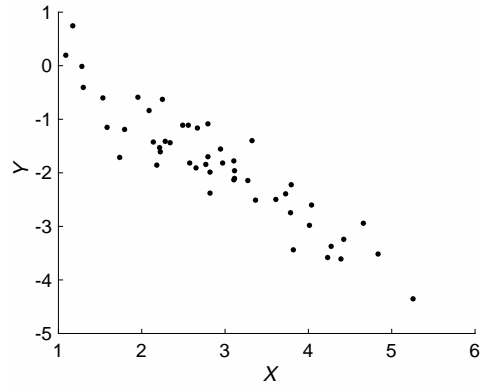
(a) $\rho_{XY} = 1$



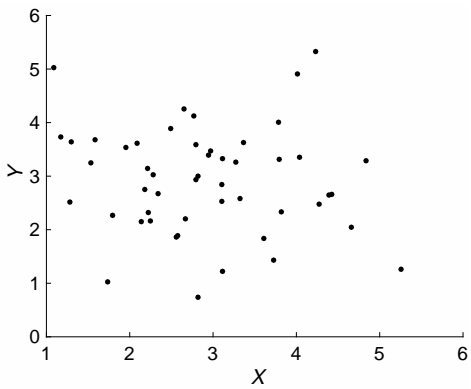
(b) $\rho_{XY} = -1$



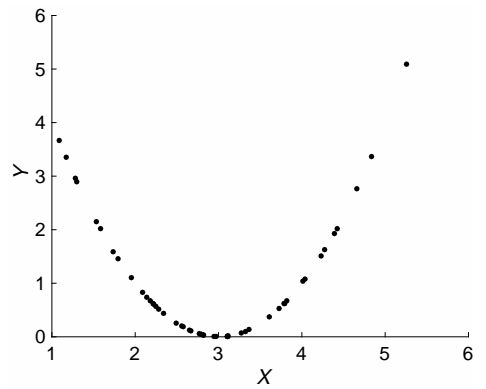
(c) $\rho_{XY} \approx 0.9$



(d) $\rho_{XY} \approx -0.9$



(e) $\rho_{XY} = 0$ (variáveis independentes)



(f) $\rho_{XY} = 0$ (variáveis com relação determinística entre si, não linear)

Figura 4.3 Exemplos de vetores aleatórios com diferentes coeficientes de correlação.

4.6 O modelo Normal bi-dimensional

Considere-se o vetor aleatório (X, Y) e admita-se que a FDP conjunta tem a forma:

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \times \right. \\ \left. \times \left[\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X} \right)^2 - 2\rho \frac{(x-\mu_X)(y-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y} + \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y} \right)^2 \right] \right\}. \quad (4.22)$$

Diz-se então que o vetor (X, Y) tem distribuição Normal bi-dimensional e escreve-se $(X, Y) \sim N(\mu_X, \sigma_X, \mu_Y, \sigma_Y, \rho)$. Trata-se assim de um modelo com 5 parâmetros. A Figura 4.4 mostra o gráfico desta distribuição para o caso do vetor $(X, Y) \sim N(0, 1, 0, 1, 0.5)$.

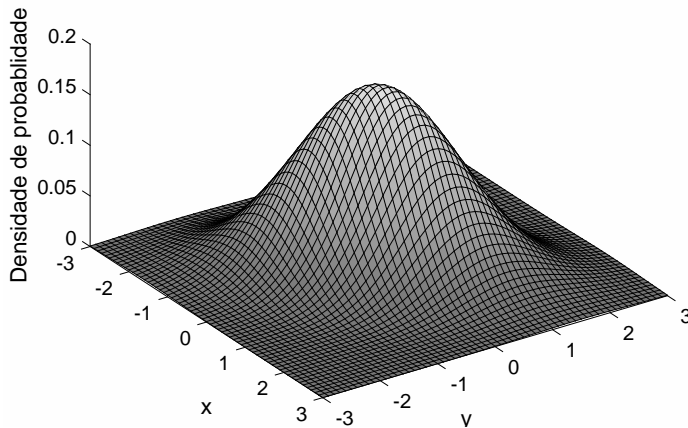


Figura 4.4 Exemplo da FDP conjunta de um vetor Normal bi-dimensional (Vetor $(X, Y) \sim N(0, 1, 0, 1, .5)$).

Pode provar-se que os parâmetros μ_X e σ_X coincidem com a média e desvio padrão da distribuição marginal de X e que μ_Y e σ_Y coincidem com a média e desvio padrão da distribuição marginal de Y . Além disso, verifica-se que as distribuições marginais de X e Y são ambas Normais, podendo assim escrever-se $X \sim N(\mu_X, \sigma_X)$ e $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y)$. O contrário desta proposição não é verdadeira, isto é, é possível que as distribuições marginais de X e Y sejam ambas Normais e a distribuição conjunta não seja Normal bi-dimensional. Pode também provar-se que o parâmetro ρ coincide com o coeficiente de correlação entre X e Y .

Se fizermos $\rho = 0$ na Eq. (4.4), verifica-se que a FDP conjunta transforma-se no produto das distribuições marginais de X e Y , isto é, as variáveis X e Y tornam-se independentes. Assim, no caso de variáveis com FDP Normal bi-dimensional, $\rho = 0 \Rightarrow$ independência, pelo que, neste caso específico, correlação nula e independência são equivalentes.

Um resultado interessante e útil do modelo Normal bi-dimensional tem a ver com as distribuições condicionadas. Por exemplo, a observação $X = x$ permite atualizar a

distribuição de Y . Verifica-se que esta, dita distribuição condicionada ou atualizada, continua a ser Normal, com média e desvio padrão dados por:

$$\mu_{Y|x} = \mu_Y + \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X), \quad (4.23)$$

$$\sigma_{Y|x} = \sigma_Y \sqrt{1 - \rho^2}. \quad (4.24)$$

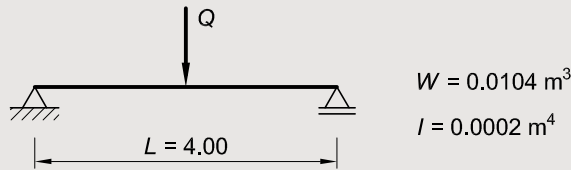
De mesma forma, a observação $Y = y$ permite atualizar a distribuição de X , obtendo-se expressões semelhantes às anteriores para a média condicionada e desvio padrão condicionado. Em resumo, as distribuições condicionadas de X dado Y e de Y dado X , são:

$$X | y \sim N \left(\mu_X + \rho \frac{\sigma_X}{\sigma_Y} (y - \mu_Y), \sigma_X \sqrt{1 - \rho^2} \right), \quad (4.25)$$

$$Y | x \sim N \left(\mu_Y + \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X), \sigma_Y \sqrt{1 - \rho^2} \right). \quad (4.26)$$

Vejamos um exemplo de aplicação do modelo Normal bi-dimensional.

Exemplo 4.1 (Adaptado do Anexo C da Norma ISO 13822 (2010)) Considere-se a viga simplesmente apoiada representada na Figura junta. A viga é de madeira e a secção possui modulo de flexão e inércia como indicado.



A carga (Q), a resistência da viga (f), e o módulo de elasticidade (E) possuem distribuição Normal, com as seguintes médias e coeficientes de variação:

Variável	Modelo	Média	Coef. de variação
Q	Normal	100 kN	0.20
f	Normal	20 MPa	0.15
E	Normal	30 GPa	0.15

A carga Q e a resistência f da viga são naturalmente independentes entre si, mas entre a resistência e o módulo de elasticidade E existe uma correlação positiva, caracterizada por um coeficiente de correlação $\rho = 0.5$.

- Determinar a probabilidade de se atingir o EL último de flexão na secção a meio vão da viga.
- Suponha-se que a viga foi ensaiada com uma carga $Q = 50$ kN, tendo-se registado uma deformação a meio vão de 9 mm. Tirando partido da correlação existente entre a resistência e o modulo de elasticidade, determinar uma nova estimativa da probabilidade de se atingir o EL último de flexão.

Resolução

- a) Designando por M_E o momento atuante a meio vão da viga e por M_R o momento resistente da mesma secção, tem-se:

$$\begin{aligned} p_f &= P(M_E > M_R) \\ &= P\left(Q \frac{L}{4} > Wf\right) \\ &= P\left(Wf - \frac{L}{4}Q < 0\right) \\ &= P(Z < 0), \end{aligned}$$

com $Z = Wf - \frac{L}{4}Q$. A variável Z , comumente designada por margem de segurança, é assim uma função linear da resistência f e da carga Q , e portanto possui distribuição Normal. A média e desvio padrão de Z determinam-se facilmente recorrendo às propriedades da linearidade da média e variância, vindo:

$$\begin{aligned} \mu_Z &= (0.0104)(20 \times 10^3) - (4/4)(100) \\ &= 108.0 \text{ kNm}; \\ s_Z &= \sqrt{(0.0104)^2(0.15 \times 20 \times 10^3)^2 + (4/4)^2(0.20 \times 100)^2} \\ &= 37.06 \text{ kNm}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} p_f &= P(Z < 0) \\ &= 0.0018. \end{aligned}$$

Conforme veremos no Capítulo 11, trata-se de uma probabilidade demasiado elevada, pelo que, com a informação disponível, a viga deverá ser classificada como não segura.

A probabilidade acima foi calculada com o seguinte código Python:

```
from scipy.stats import norm
pf = norm.cdf(0, 108.0, 37.06)
```

- b) A deformação a meio vão da viga, δ , relaciona-se com a carga Q por meio da expressão: $\delta = \frac{QL^3}{48EI}$. Assim, a observação de uma deformação $\delta = 9 \text{ mm}$ para uma carga conhecida $Q = 50 \text{ kN}$ permite determinar a

seguinte estimativa do módulo de elasticidade:

$$\begin{aligned} E &= \frac{QL^3}{48\delta I} \\ &= \frac{50 \times 4^3}{48(0.009)(0.0002)} \\ &= 37 \text{ GPa.} \end{aligned}$$

Conhecer esta estimativa habilita-nos a atualizar a média e desvio padrão da resistência da viga. Com efeito, recorrendo às equações (4.23) e (4.24), vem:

$$\begin{aligned} \mu_f &= 20 + (0.50) \frac{0.15 \times 20}{0.15 \times 30 \times 10^3} (37 \times 10^3 - 30 \times 10^3) \\ &= 22.3 \text{ MPa;} \\ s_f &= (0.15 \times 20) \sqrt{1 - 0.5^2} \\ &= 2.6 \text{ MPa.} \end{aligned}$$

Um cálculo semelhante ao realizado na alínea a) conduz à probabilidade $p_f = 4.2 \times 10^{-5}$. Esta probabilidade é considerada aceitável (conforme veremos no Capítulo 11). O ensaio realizado na viga revelou-se assim muito útil e informativo, tendo permitido alterar a classificação da viga de insegura para segura.

4.7 Funções de variável aleatória

4.7.1 Determinação aproximada da média e variância

Em engenharia aparecem frequentemente variáveis que são funções de outras variáveis. Seja $Z = g(X_1, \dots, X_n)$, uma função (ou modelo) de n variáveis aleatórias. A variável Z designa-se habitualmente por *resposta do modelo*, ou *variável de saída*, e as variáveis X_1, \dots, X_n por *variáveis de entrada*, ou *variáveis básicas*. A variável Z , sendo função de variáveis aleatórias, é ela própria variável aleatória, tendo por isso a sua própria FDP, assim como média e variância. A determinação da FDP, incluindo a média e variância, tem interesse óbvio. Nesta secção analisaremos brevemente o problema da determinação analítica da média e variância de uma função $Z = g(X_1, \dots, X_n)$. Vamos estudar dois casos.

Considere-se em primeiro lugar o caso em que Z é uma combinação linear das variáveis básicas, isto é, $Z = a_0 + a_1X_1 + \dots + a_nX_n$. Neste caso, recorrendo às propriedades da linearidade da média e variância, vistas anteriormente, obtém-se:

$$E(Z) = a_0 + a_1\mu_1 + \dots + a_n\mu_n, \quad (4.27)$$

$$\text{Var}(Z) = a_1^2\sigma_1^2 + \dots + a_n^2\sigma_n^2, \quad (4.28)$$

onde μ_i e σ_i^2 representam, respetivamente, a média e a variância da variável X_i . Recorde-se que a Eq. (4.28) é válida apenas no caso das variáveis serem independentes. (A Eq. (4.27) é válida mesmo no caso de variáveis dependentes.) Se as variáveis X_i

estiverem correlacionadas entre si, a variância é dada pela seguinte expressão mais genérica:

$$\text{Var}(Z) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \text{Cov}(X_i, X_j). \quad (4.29)$$

Para a função particular $Z = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2$, isto é, a função linear de apenas duas variáveis, a Eq. (4.29) transforma-se em:

$$\text{Var}(Z) = a_1^2 \sigma_1^2 + a_2^2 \sigma_2^2 + 2a_1 a_2 \text{Cov}(X_1, X_2). \quad (4.30)$$

Considere-se agora de uma função genérica $Z = g(X_1, \dots, X_n)$, não linear das variáveis básicas. Neste caso a determinação analítica da sua média e variância pode ser difícil, mas podemos recorrer a expressões simplificadas como se descreve de seguida⁴. Desenvolvendo a função g em série de Taylor em torno do ponto $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$, a que chamaremos ponto médio, e desprezando os termos de ordem superior, tem-se:

$$Z \approx g(\mu_1, \dots, \mu_n) + (X_1 - \mu_1) \left. \frac{\partial g}{\partial X_1} \right|_{\mu} + \dots + (X_n - \mu_n) \left. \frac{\partial g}{\partial X_n} \right|_{\mu}. \quad (4.31)$$

Esta equação constitui assim uma aproximação linear da função $Z = g(X_1, \dots, X_n)$ em torno do ponto $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$, donde, aplicando a propriedade da linearidade e admitindo que as variáveis X_i são independentes entre si:

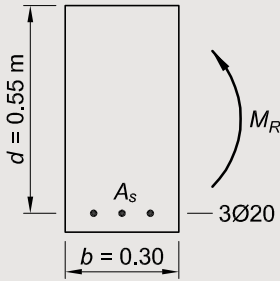
$$E(Z) \approx g(\mu_1, \dots, \mu_n) \quad (4.32)$$

$$\text{Var}(Z) \approx \left(\left. \frac{\partial g}{\partial X_1} \right|_{\mu} \right)^2 \sigma_1^2 + \dots + \left(\left. \frac{\partial g}{\partial X_n} \right|_{\mu} \right)^2 \sigma_n^2 \quad (4.33)$$

Assim, conforme se observa, para obter uma estimativa da média de Z , basta calcular o valor de Z no ponto médio. Para obter uma estimativa da variância de Z , basta somar as variâncias das variáveis básicas, multiplicadas pelos quadrados das derivadas parciais de g no ponto médio. Vejamos um exemplo.

Exemplo 4.2 Considere-se uma secção retangular de betão armado, com largura $b = 0.30$ m e altura útil $d = 0.55$ m. A armadura é constituída por $3\phi 20$, a que corresponde a área $A_s = 9.42$ cm². A tensão de cedência f_y da armadura possui uma média de 560 MPa e um desvio padrão de 30 MPa. A resistência à compressão f_c do betão possui uma média de 35 MPa e um desvio padrão de 4.2 MPa.

⁴Veremos no Capítulo 6 como determinar a média e variância (e outras quantidades) de funções de qualquer tipo recorrendo a simulação numérica (método de Monte Carlo). Trata-se de um método muito versátil e as suas estimativas podem ser consideradas exatas.



O momento resistente da secção pode ser estimado pela expressão:

$$M_R = f_y A_s \left(d - 0.50 \frac{f_y A_s}{f_c b} \right).$$

Determinar valores aproximados para a média e desvio padrão do momento resistente da secção.

Resolução

De acordo com o enunciado, as únicas variáveis aleatórias são a tensão de cedência do aço e a resistência do betão. Assim, o momento resistente pode ser encarado como uma função de duas variáveis aleatórias, f_y e f_c , isto é, $M_R = g(f_y, f_c)$. Para estimar a média do momento resistente, basta substituir na expressão acima f_y e f_c pelas respetivas médias, vindo:

$$\begin{aligned} \mu_{M_R} &= (560 \times 10^3)(9.42 \times 10^{-4}) \left(0.55 - 0.50 \frac{(560 \times 10^3)(9.42 \times 10^{-4})}{(35 \times 10^3)(0.30)} \right) \\ &= 276.9 \text{ kNm}. \end{aligned}$$

Para estimar a variância de $M_R = g(f_y, f_c)$, necessitamos das derivadas parciais de g :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial f_y} &= A_s d - \frac{f_y A_s^2}{f_c b}, \\ \frac{\partial g}{\partial f_c} &= 0.50 \frac{f_y^2 A_s^2}{f_c^2 b}. \end{aligned}$$

Calculando agora o valor dessas derivadas no ponto $\mu = (\mu_{f_y}, \mu_{f_c})$ vem:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial g}{\partial f_y} \right|_{\mu} &= (9.42 \times 10^{-4})(0.55) - \frac{(560 \times 10^3)(9.42 \times 10^{-4})^2}{(35 \times 10^3)(0.30)} = 0.00047, \\ \left. \frac{\partial g}{\partial f_c} \right|_{\mu} &= 0.50 \frac{(560 \times 10^3)^2 (9.42 \times 10^{-4})^2}{(35 \times 10^3)^2 (0.30)} = 0.00038. \end{aligned}$$

Assim, uma estimativa do desvio padrão do momento resistente é dada por:

$$\sigma_{M_R} = \sqrt{(0.00047)^2 (30 \times 10^3)^2 + (0.00038)^2 (4.2 \times 10^3)^2} = 14.2 \text{ kNm}.$$

No Capítulo 6 iremos determinar os valores exatos de μ_{M_R} e σ_{M_R} recorrendo ao método de Monte Carlo. Conforme veremos, os valores exatos são 276.6 e 14.2 kNm, respetivamente, verificando-se assim que, no presente caso, as expressões simplificadas conduziram a estimativas muito boas.

4.7.2 Análise de sensibilidade

Observemos atentamente a Eq. (4.33). Esta equação permite determinar um valor aproximado da variância de uma função genérica $Z = g(X_1, \dots, X_n)$, com as variáveis X_i independentes entre si. Conforme se observa, a variância de Z é dada por uma soma de n parcelas, em que a parcela i pode ser encarada como a contribuição da variável X_i para a variância de Z . A contribuição da variável X_i é tanto mais significativa quanto maior for o respetivo desvio padrão e quanto maior for a respetiva derivada parcial (calculada no ponto médio). Para que a contribuição seja significativa, tanto o desvio padrão como a derivada parcial têm de ser ambos elevados.

Estas considerações sugerem a definição do seguinte coeficiente, a que chamaremos *coeficiente de sensibilidade* da variável X_i :

$$\alpha_i = \frac{\left. \frac{\partial g}{\partial X_i} \right|_u \cdot \sigma_i}{\sqrt{\sum_{j=1}^n \left(\left. \frac{\partial g}{\partial X_j} \right|_u \cdot \sigma_j \right)^2}} \quad (4.34)$$

Tratam-se assim de coeficientes adimensionais. É fácil de verificar que estes coeficientes têm a seguinte propriedade:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = 1. \quad (4.35)$$

Como a soma dos quadrados dos coeficientes de sensibilidade é igual a 1, estes coeficientes podem ser vistos como uma fração de um total. O coeficiente α_i^2 representa a fração da variância de Z que é devida à variável X_i . Uma vez que os quadrados dos coeficientes de sensibilidade têm um significado mais preciso do que os próprios coeficientes, geralmente é preferível apresentar os primeiros. De qualquer forma, tanto uns como outros constituem uma medida da contribuição de cada variável para a variância da função em estudo.

Uma vez que a variância de Z constitui uma medida da sua variabilidade (em torno da média), e portanto uma medida da incerteza no conhecimento de Z , podemos concluir que as variáveis que mais contribuem para essa incerteza são as variáveis com maior coeficiente de sensibilidade. O coeficiente de sensibilidade constitui assim uma medida da contribuição de cada variável para a incerteza no valor da função em estudo. Por conseguinte, se desejarmos reduzir a incerteza no valor dessa função à custa da redução da incerteza nas variáveis de entrada, devemos investir nas variáveis com maior coeficiente de sensibilidade. Trata-se por isso de um coeficiente bastante útil.

Determinemos, a título de exemplo, os coeficientes de sensibilidade da resistência do aço e da resistência do betão no valor do momento resistente da secção de betão armado do exemplo anterior:

$$\begin{aligned} f_y : \quad \alpha &= \frac{(0.00047)(30 \times 10^3)}{14.19} = 0.99366; \quad (\alpha^2 = 0.987) \\ f_c : \quad \alpha &= \frac{(0.00038)(4.2 \times 10^3)}{14.19} = 0.11247. \quad (\alpha^2 = 0.013) \end{aligned}$$

Assim, 98.7% da variância do momento resistente é atribuído ao aço e apenas 1.3% é atribuído ao betão. A contribuição do aço para a incerteza do momento é assim muito superior à contribuição da resistência do betão. Por outras palavras: o momento resistente é muito mais sensível à resistência do aço do que à resistência do betão, de modo que, se desejássemos caracterizar melhor essas resistências com o objetivo de reduzir a incerteza no momento resistente, deveríamos privilegiar a resistência do aço.

Capítulo 5

Técnicas de estimação estatística

Quando se avalia a segurança de uma estrutura existente é muitas vezes necessária a colheita de amostras da estrutura e a sua análise recorrendo a técnicas estatísticas bem estabelecidas. Justifica-se pois rever alguns conceitos dessa importante área da Matemática. Recorde-se que a Estatística ocupa-se do estudo de populações a partir de amostras colhidas dessas populações.

As amostras disponíveis são frequentemente de reduzida dimensão, originando um tipo especial de incerteza, conhecida como incerteza estatística. Veremos neste capítulo como ter em conta tal tipo de incerteza na estimação de quantis.

5.1 Conceitos de amostra aleatória e estatística

5.1.1 Amostra aleatória

Seja X uma variável aleatória com determinada distribuição de probabilidade. Sejam X_1, \dots, X_n n variáveis aleatórias independentes entre si e com a mesma distribuição que X . Diz-se então que o conjunto $\{X_1, \dots, X_n\}$ constitui uma *amostra aleatória* de dimensão n de X ¹. A amostra aleatória é também chamada amostra IID, sigla esta que enfatiza o facto de se tratar de uma sequência de variáveis Independentes e Identicamente Distribuídas.

Por exemplo, seja $X = \{\text{Velocidade máxima anual do vento em determinada localidade, a 10 m acima do terreno}\}$. Seja $\{X_1, \dots, X_n\}$ uma sequência de n observações dessa população ao longo de n anos. Se se puder assumir independência nas sucessivas observações X_i e se, além disso, se puder admitir que a distribuição de probabilidade se mantém constante ao longo dos anos, então $\{X_1, \dots, X_n\}$ constitui uma amostra aleatória de X .

Uma realização particular da amostra $\{X_1, \dots, X_n\}$ é representada em geral por $\{x_1, \dots, x_n\}$.

¹Por vezes diz-se população X quando nos referimos à variável X .

5.1.2 Estatística

Estatística é qualquer função de amostra aleatória, isto é, qualquer função do tipo $Y = Y(X_1, \dots, X_n)$. Estatísticas são usadas com o objetivo de estimar características de uma população a partir de amostras dela extraídas. Por esse motivo, as estatísticas também se designam por estimadores.

Uma estatística, ou estimador, sendo função de variáveis aleatórias, é ela própria uma variável aleatória, possuindo assim uma determinada FDP, assim como valor esperado e desvio padrão. Quando o valor esperado do estimador coincide com o parâmetro da população a estimar, diz-se que o estimador é centrado. Quando tal não se verifica, diz-se que se trata de um estimador enviesado.

O desvio padrão de uma estatística, designado habitualmente por *erro padrão*, constitui uma medida da precisão da estatística. Quanto mais baixo for o erro padrão, mais precisa é a estatística.

Dois estatísticas muito importantes são a média amostral e a variância amostral, a primeira usada para estimar a média de uma população e a segunda usada para estimar a variância. Ambas são consideradas bons estimadores. Dada uma amostra $\{X_1, \dots, X_n\}$, a média amostral é definida por:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i. \quad (5.1)$$

A variância, o desvio padrão e o coeficiente de variação amostrais, são definidos, respetivamente, por:

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2, \quad (5.2)$$

$$S = \sqrt{S^2}, \quad (5.3)$$

$$V = S/\bar{X}. \quad (5.4)$$

A variância amostral representa a média dos desvios quadráticos dos X_i em relação à média. Note-se que a soma destes desvios é dividida por $n-1$, não por n , o que torna a variância amostral assim definida um estimador centrado, isto é, a média do estimador passa a coincidir com o parâmetro a estimar (neste caso a variância).

Outras estatísticas importantes são o coeficiente de assimetria e o coeficiente de curtose amostrais. O coeficiente de assimetria amostral é definido por:

$$\eta = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^3}{\left(\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \right)^3}, \quad (5.5)$$

e o coeficiente de curtose amostral por:

$$k = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^4}{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \right)^2}. \quad (5.6)$$

Estes dois estimadores fornecem estimativas enviesadas, respetivamente do coeficiente de simetria e do coeficiente de curtose. No entanto é possível encontrar na literatura da especialidade correções a esses estimadores de forma a torná-los centrados.

5.2 Estimação de parâmetros das distribuições

Seja X uma população com FDP $f_X(x | \theta)$, em que θ é um parâmetro desconhecido da população, cujo valor pretendemos estimar a partir de uma amostra da população. A estimativa de θ representa-se habitualmente por $\hat{\theta}$. Os métodos que permitem estimar parâmetros de populações dividem-se em dois grandes grupos: (1) métodos de estimação pontual e (2) métodos de estimação por intervalo.

Iremos considerar brevemente apenas o primeiro grupo, visto ser o que tem mais interesse no domínio da segurança estrutural. Entre os métodos de estimação pontual, dois frequentemente utilizados são: (1) o método dos momentos e o (2) o método da máxima verosimilhança.

5.2.1 Método dos momentos

O método dos momentos é de muito fácil aplicação: se um modelo probabilístico de uma população depender de apenas um parâmetro, começa-se por estimar a média da população (1.º momento) a partir da média amostral. Depois, recorrendo à relação funcional entre o parâmetro e a média da população, determina-se uma estimativa do parâmetro. Para um modelo que dependa de dois parâmetros, começa-se por estimar a média (1.º momento) e a variância (2.º momento) da população a partir da média amostral e da variância amostral. Depois, recorrendo às relações funcionais entre os parâmetros da população e a sua média e variância, determina-se as estimativas pretendidas (sistema de 2 equações a 2 incógnitas). Para uma população que dependa de 3 parâmetros, recorre-se aos 3 primeiros momentos e assim sucessivamente. Recorde-se que o 3.º momento corresponde ao coeficiente de assimetria e o 4.º momento corresponde ao coeficiente de curtose.

Exemplo 5.1 A amostra seguinte diz respeito à velocidade máxima anual do vento observada ao longo de 10 anos numa dada localidade, a 10 m acima do terreno.

$$v = \{14.9, 22.2, 21.5, 16.6, 18.6, 14.8, 16.3, 20.3, 18.6, 21.6\} \quad [\text{m/s}]$$

Assumindo que a velocidade máxima anual do vento pode ser modelada através de uma distribuição Gumbel, estimar os parâmetros desta distribuição, u e α , recorrendo ao método dos momentos.

Resolução

Começa-se por estimar a média e desvio padrão da amostra dada. Obteve-se os seguintes valores:

$$\bar{v} = 18.54 \text{ m/s}; \quad s = 2.80 \text{ m/s.}$$

Recorrendo agora à relação funcional entre os parâmetros da população e os momentos acabados de estimar (equações (B.52) e (B.53), p. 236), tem-se:

$$\hat{u} = \bar{v} - \frac{\sqrt{6}\gamma}{\pi} s = 18.54 - \frac{\sqrt{6} \times 0.5772}{\pi} 2.80 = 17.3 \text{ m/s};$$

$$\hat{\alpha} = \frac{\pi}{\sqrt{6} s} = \frac{\pi}{\sqrt{6} \times 2.80} = 0.46 \text{ (m/s)}^{-1}.$$

5.2.2 Método da máxima verosimilhança

Seja X uma população com FDP $f_X(x)$ e $\{x_1, \dots, x_n\}$ uma amostra de X . Chama-se verosimilhança da amostra $\{x_1, \dots, x_n\}$ à função de θ , dada por:

$$L(\theta | x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_X(x_i | \theta). \quad (5.7)$$

Se X for discreta, a verosimilhança $L(\theta | x_1, \dots, x_n)$ representa a probabilidade de ter saído aquela amostra (em função de θ). Se X for contínua, representa simplesmente o valor da FDP conjunta no ponto (x_1, \dots, x_n) , em função de θ .

O método da máxima verosimilhança consiste em estimar o valor de θ que maximiza a verosimilhança da amostra, ou, o que é o mesmo, que maximiza a probabilidade de ocorrência daquela amostra. Em símbolos:

$$\hat{\theta}: L(\theta | x_1, \dots, x_n) \text{ é máxima.} \quad (5.8)$$

A estimativa de máxima verosimilhança é assim o valor de θ que torna mais provável aquela amostra, ou que melhor explica os valores observados da amostra.

Note-se que o parâmetro θ pode ser um vetor. Por exemplo, se $\theta = (\theta_1, \theta_2)$, a verosimilhança da amostra $\{x_1, \dots, x_n\}$ é dada por:

$$L(\theta_1, \theta_2 | x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_X(x_i | \theta_1, \theta_2), \quad (5.9)$$

que corresponde à equação de uma superfície.

Para alguns modelos probabilísticos, as estimativas de máxima verosimilhança coincidem com as estimativas dadas pelo método dos momentos. Em outros casos não se verifica essa coincidência, mas as estimativas de máxima verosimilhança são em geral consideradas boas estimativas. Por exemplo, considere-se a distribuição uniforme. (Ver Anexo B.1, p. 223.) Seja $X \sim \text{Un}(a, b)$, em que a é o valor mínimo da população e b o valor máximo. Dada uma amostra $\{x_1, \dots, x_n\}$ da população, as estimativas dadas pelo método dos momentos são:

$$\hat{a} = \bar{x} - s,$$

$$\hat{b} = \bar{x} + s,$$

onde \bar{x} é a média da amostra e s o desvio padrão. As estimativas de máxima verosimilhança são:

$$\hat{a} = \min\{x_1, \dots, x_n\},$$

$$\hat{b} = \max\{x_1, \dots, x_n\},$$

as quais, no presente caso, são claramente mais intuitivas do que as dadas pelo método dos momentos.

Exemplo 5.2 Considerando os dados do Exemplo 5.1, estimar novamente os parâmetros do modelo Gumbel, mas desta vez recorrendo ao método da máxima verosimilhança.

Resolução

Recorrendo ao seguinte *script* Python:

```
from scipy.stats import gumbel_r as gumb
x = [14.9, 22.2, 21.5, 16.6, 18.6, 14.8, 16.3, 20.3, 18.6, 21.6]
loc, scale = gumb.fit(x, method='MLE')
u = loc
alpha = 1/scale
```

obteve-se as seguintes estimativas:

$$\hat{u} = 17.21 \text{ m/s}; \quad \hat{\alpha} = 0.42 \text{ (m/s)}^{-1}.$$

Estas estimativas são naturalmente diferentes das estimativas obtidas com o método dos momentos. À partida é difícil saber quais delas são as melhores.

5.3 Estimação de quantis

Recorde-se que o quantil p , que representaremos por X_p , de uma variável aleatória é o valor da variável com probabilidade p de não ser excedido, isto é, $X_p = F_X^{-1}(p)$. Dois quantis são especialmente importantes no âmbito da segurança estrutural: o quantil $p = 0.05$, chamado *valor característico inferior*, e o quantil $p = 0.95$, chamado *valor característico superior*. O primeiro é utilizado principalmente na representação de propriedades dos materiais, e o segundo é utilizado sobretudo na representação das ações.

Nesta secção vamos estimar quantis de populações a partir de amostras dessas populações. Há que distinguir dois casos: o caso em que o modelo probabilístico da população é desconhecido (caso em que os quantis poderão ser estimados recorrendo aos conceitos de *estatística de ordem* e *distribuição empírica*), e o caso em que o modelo probabilístico é conhecido (a menos, naturalmente, dos respetivos parâmetros). No primeiro caso, para que as estimativas sejam fiáveis, é necessário uma amostra de dimensão apreciável. Uma vez que raramente se dispõe de uma tal amostra, é preferível, sempre que possível e à base de argumentos físicos, atribuir à população em estudo um modelo probabilístico específico (cujos parâmetros serão então estimados a partir da amostra disponível) e estimar de seguida os quantis pretendidos. Na presente secção consideraremos apenas este segundo caso, isto é, o caso em que o modelo probabilístico da população em estudo é conhecido. Começamos pelo caso de populações normais.

5.3.1 Variáveis normais

Seja $X \sim N(\mu_X, \sigma_X)$. Ora, o quantil p de X é dado por:

$$X_p = \mu_X + k_p \sigma_X, \quad (5.10)$$

com

$$k_p = \Phi^{-1}(p). \quad (5.11)$$

Se estivermos interessados no valor característico inferior ($p = 0.05$), $k_p = -1.645$, e se estivermos interessados no valor característico superior ($p = 0.95$), $k_p = 1.645$.

Admita-se que μ_X e σ_X são desconhecidos, mas que se dispõe da amostra $\varepsilon = \{x_1, \dots, x_n\}$ da população. Estimativas para μ_X e σ_X poderão então ser efetuadas recorrendo às expressões habituais:

$$\hat{\mu}_X = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i,$$

$$\hat{\sigma}_X = s_X = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}.$$

Uma vez que \bar{x} e s_X são boas estimativas de μ_X e σ_X , segue que uma boa estimativa do quantil p da população é dada por:

$$\hat{X}_p = \bar{x} + k_p s_X. \quad (5.12)$$

Exemplo 5.3 Considere-se uma estrutura existente de betão da qual foram extraídas 9 carotes, as quais, depois de ensaiadas em laboratório, forneceram a seguinte amostra de resistências^a:

$$f_c = \{63.5, 65.5, 68.5, 45.0, 41.0, 44.5, 60.5, 37.5, 34.5\} \quad [\text{MPa}]$$

Efetuar uma estimativa da resistência característica do betão, f_{ck} , assumindo que a resistência do betão segue uma distribuição Normal.

Resolução

Começa-se por estimar a média e o desvio padrão da amostra. Obtém-se: $\bar{x} = 51.17$ MPa; $s = 13.21$ MPa. Assim, uma estimativa do valor característico da resistência do betão é:

$$\hat{f}_{ck} = 51.1 - 1.645 \times 13.21 = 29.4 \text{ MPa.}$$

^aEsta amostra é real.

A estimativa que acabámos de determinar não tem em conta, porém, a chamada *incerteza estatística*, isto é, a incerteza originada no facto de se ter usado uma amostra de dimensão limitada. Esta incerteza é função da dimensão n da mostra usada, e tende a diminuir à medida que n aumenta.

É possível realizar uma estimativa de quantis tendo em conta esta incerteza, isto é, tendo em conta a dimensão da amostra usada. Há vários métodos que o permitem

fazer. O método que vamos considerar aqui consiste em recorrer ao chamado *modelo preditivo* da variável X . O modelo preditivo de uma variável é o modelo que permite estimar probabilidades e quantis dessa variável tendo em conta o efeito da incerteza estatística.

Seja então $X \sim N(\mu_X, \sigma_X)$ com μ_X e σ_X desconhecidos. Suponha-se que se dispõe da amostra $\varepsilon = \{x_1, \dots, x_n\}$. O modelo preditivo de X , que representaremos por $f_X(x | \varepsilon)$, pode ser obtido, quer através da Estatística Clássica (Montgomery e Runger, 2007), quer através da Estatística Bayesiana (Bernardo e Smith, 1994). Ambas as escolas conduzem ao seguinte resultado:

$$f_X(x | \varepsilon) = \text{St}(x | a, b, \nu), \quad (5.13)$$

onde $\text{St}(x | a, b, \nu)$ representa a distribuição t-Student de 3 parâmetros (Anexo B, p. 232), em que:

$$\begin{aligned} a &= \bar{x}, \\ b &= s_X \sqrt{1 + \frac{1}{n}}, \\ \nu &= n - 1. \end{aligned}$$

Observa-se assim que, apesar da população ser Normal, os cálculos probabilísticos que envolvem X serão feitos a partir de uma distribuição t-Student, que tem caudas mais pesadas que a distribuição Normal. Tal permite ter em conta o efeito da incerteza estatística.

O resultado expresso na Eq. (5.13) mostra que a predição de valores de X pode ser feita a partir da expressão:

$$\begin{aligned} X &= a + b T_{n-1} \\ &= \bar{x} + s_X \sqrt{1 + \frac{1}{n}} T_{n-1}, \end{aligned} \quad (5.14)$$

onde T_{n-1} representa uma variável t-Student reduzida, com $\nu = n - 1$ graus de liberdade. Por conseguinte, o quantil p de X pode ser estimado por:

$$\hat{X}_p = \bar{x} + k_{pn} s_X \quad (5.15)$$

com

$$k_{pn} = \sqrt{1 + \frac{1}{n}} t_{p, n-1} \quad (5.16)$$

e em que $t_{p, n-1}$ representa a inversa de uma distribuição t-Student reduzida com $\nu = n - 1$ graus de liberdade, avaliada em p , isto é, $t_{p, n-1} = F_{T_{n-1}}^{-1}(p)$.

A Tabela 5.1 mostra valores do coeficiente k_{pn} para diferentes valores de p e n . Note-se que para $n = \infty$, a estimativa dada por (5.15) coincide com a estimativa dada por (5.12), a qual corresponde à não existência de incerteza estatística. Isto confirma aquilo que se disse anteriormente, de que a incerteza estatística diminui à medida que a dimensão da amostra, n , aumenta.

Tabela 5.1 Valores de k_{pn} para a determinação de valores característicos de populações Normais (Eqs. (5.15) e (5.16))

p	n									
	2	3	4	5	7	10	15	20	30	∞
0.05	-7.73	-3.37	-2.63	-2.34	-2.08	-1.92	-1.82	-1.77	-1.73	-1.645
0.95	7.73	3.37	2.63	2.34	2.08	1.92	1.82	1.77	1.73	1.645

Exemplo 5.4 Considerando novamente a amostra de carotes do exemplo anterior, efetuar uma nova estimativa do valor característico da resistência do betão, mas desta vez tendo em conta a incerteza estatística.

Resolução

Tem-se:

$$k_{pn} = \sqrt{1 + \frac{1}{9}} t_{.05, 9-1} = -1.96,$$

$$\hat{f}_{ck} = 51.1 - 1.96 \times 13.21 = 25.3 \text{ MPa.}$$

Verificou-se assim uma redução de 14% em relação à estimativa inicial. Esta redução no valor característico pode ser encarada como uma penalização devido à incerteza estatística.

Os cálculos acima foram realizados com o seguinte código Python:

```
from numpy import sqrt
from scipy.stats import t
n = 9
kpn = sqrt(1 + 1/n)*t.ppf(0.05, n-1)
fck = 51.1 + kpn*13.21
```

A modelação de resistências com o modelo Normal é geralmente considerado um procedimento conservativo, já que conduz a estimativas inferiores às que se obtêm, por exemplo, com o modelo Lognormal (também muito utilizado na modelação de resistências). Porém, como referido anteriormente, a adequação do modelo Normal requer que $P(X < 0)$ seja desprezável, pois as resistências são em geral quantidades positivas. Avalie-se esta probabilidade no exemplo que temos vindo a estudar, tendo

em consideração o efeito da incerteza estatística:

$$\begin{aligned}
 P(X < 0) &= P\left(\bar{x} + s\sqrt{1 + \frac{1}{n}} T_{n-1} < 0\right) \\
 &= P\left(T_{n-1} < \frac{-\bar{x}}{s\sqrt{1 + \frac{1}{n}}}\right) \\
 &= F_{T_{n-1}}\left(\frac{-\bar{x}}{s\sqrt{1 + \frac{1}{n}}}\right) \\
 &= F_{T_8}(-3.67) \\
 &= 0.0032.
 \end{aligned}$$

A título de referência, indica-se de seguida o código Python usado para avaliar a esta probabilidade:

```

from scipy.stats import t
p = t.cdf(-3.67, df=8)

```

Conforme se observa, a probabilidade acima, apesar de pequena, não é inteiramente desprezável, pelo que no presente caso o modelo Lognormal afigura-se preferível, já que este assume apenas valores positivos. Vejamos então como estimar um quantil a partir de uma amostra de uma população Lognormal, incluindo o efeito da incerteza estatística.

5.3.2 Variáveis lognormais

Dada uma amostra $\{y_1, \dots, y_n\}$ de uma população Lognormal, para estimar o quantil p da população, com o efeito da incerteza estatística, procede-se da seguinte forma:

1. Transforma-se a amostra dada na amostra:

$$\{x_1, \dots, x_n\} = \{\ln y_1, \dots, \ln y_n\}.$$

A amostra assim obtida pertence a uma população Normal, pelo que podemos aplicar os resultados vistos anteriormente para populações Normais.

2. Determina-se:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i; \quad s_X = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}.$$

3. Obtém-se uma estimativa de X_p pela expressão:

$$\hat{X}_p = \bar{x} + k_{pn} s_X,$$

com k_{pn} dado por (5.16).

4. Finalmente, a estimativa pretendida obtém-se considerando que $Y = e^X$, ou seja:

$$\hat{Y}_p = e^{\hat{X}_p}.$$

Vejamos um exemplo.

Exemplo 5.5 Considerando novamente o exemplo da amostra de carotes de betão que temos vindo a analisar, efetuar uma nova estimativa da resistência do betão, assumindo que a resistência segue uma distribuição Lognormal.

Resolução

Recorrendo ao código Python abaixo, obteve-se $\hat{f}_{ck} = 29.7$ MPa. Podemos considerar esta estimativa melhor que a estimativa obtida com o modelo Normal, pelos motivos apontados anteriormente.

```
from numpy import log, mean, std, sqrt, exp
from scipy.stats import t

fc = [63.5, 65.5, 68.5, 45.0, 41.0, 44.5, 60.5, 37.5, 34.5]

n = len(fc)
x = log(fc);
xbar = mean(x)
sx = std(x, ddof=1)

xk = xbar + sx*sqrt(1 + 1/n)*t.ppf(0.05,n-1)
fck = exp(xk)
```

5.4 Estimação de valores característicos recorrendo a ensaios indiretos

Graças à sua economia e facilidade de uso, os ensaios indiretos, e em particular os ensaios não destrutivos, têm gozado de ampla aceitação no domínio das avaliações estruturais. Por exemplo, para caracterizar a resistência do betão dispõe-se de equipamentos não destrutivos como o esclerómetro ou os ultra-sons. Embora menos precisos do que o ensaio direto sobre carotes extraídas da estrutura, tais ensaios são muito mais económicos e fáceis de utilizar, além de não introduzirem dano na estrutura.

O uso destes ensaios requer, porém, que sejam calibrados especificamente para a estrutura em avaliação (NP EN 13791, 2008). De outra forma, podem introduzir-se erros sistemáticos significativos. No caso do esclerómetro, por exemplo, torna-se evidente a necessidade de calibrar o equipamento especificamente para a estrutura em avaliação, se atendermos a que o índice esclerométrico é afetado por fatores, tais como:

- Tipo de agregado. Obtêm-se índices esclerométricos bastante diferentes para betões com idêntica resistência mas com diferentes tipo de agregado.
- Idade do betão. Betões com idêntica resistência mas idades diferentes conduzem a índices esclerométricos diferentes.

- Humidade do betão. Se um betão estiver húmido obtêm-se índices esclerométricos distintos dos que se obtêm depois do mesmo betão se encontrar seco.
- Carbonatação. O índice esclerométrico de um betão carbonatado pode ser até cerca de 50% superior ao de um betão não carbonatado.

Compreende-se assim que o esclerómetro deva ser calibrado especificamente para a estrutura em avaliação. As curvas de calibração do fabricante podem conduzir a erros sistemáticos importantes, pelo que o seu uso deve ser feito com as devidas reservas.

Vejamus então como estimar o valor característico da resistência do betão, f_{ck} , de um determinado elemento de uma estrutura existente, recorrendo a um ensaio indireto devidamente calibrado para a estrutura em avaliação. A calibração é realizada a partir de um conjunto de carotes a extrair da estrutura, e consiste basicamente em estimar os parâmetros de regressão linear (β_0 , β_1 e σ) a partir de uma amostra de n pares (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, n$, onde x_i representa o valor do ensaio indireto medido no local i e y_i o valor da resistência da carote extraída do mesmo local². As estimativas dos parâmetros de regressão, que se representam habitualmente por $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$ e $\hat{\sigma}$, são em geral realizadas pelo método dos mínimos quadrados.

Uma vez calibrado o ensaio, isto é, uma vez determinadas as estimativas $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$ e $\hat{\sigma}$, suponha-se que o ensaio indireto aplicado num dado local da estrutura indicou o valor x . O valor característico da resistência do betão (quantil 0.05) pode então ser estimado recorrendo à expressão:

$$\hat{f}_{ck}(x) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x + \hat{\sigma} \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x - \bar{x})^2}{S_{xx}}} t_{0.05, n-2} \quad (5.17)$$

onde, $t_{0.05, n-2}$ representa a inversa da distribuição t-Student com $n - 2$ graus de liberdade, avaliada em $p = 0.05$ e n o número de carotes usadas na calibração. As outras quantidades são:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad S_{xx} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

Note-se que o parâmetro σ constitui uma medida da precisão do ensaio indireto, ou uma medida da sua capacidade em explicar a resistência do betão. Trata-se assim de um parâmetro importante na caracterização da fiabilidade do ensaio.

Antes de aplicar o modelo de regressão linear é importante verificar o cumprimento dos pressupostos deste modelo, que se resumem de seguida:

- Os resíduos apresentam média nula. Este requisito é automaticamente satisfeito se os parâmetros de calibração forem estimados pelo método dos mínimos quadrados.
- A variância dos resíduos é constante (requisito da *homocedasticidade*). O gráfico de dispersão de pontos (x_i, y_i) ajuda a apreciar qualitativamente a satisfação deste requisito. Com efeito, quando este requisito é satisfeito, a banda dos valores y_i em torno da reta de regressão possui largura constante.

²No Anexo C (p. 249) faz-se uma breve revisão da técnica da regressão linear. Talvez o leitor queira fazer uma leitura rápida desse anexo, antes de prosseguir, e assim recordar essa técnica estatística.

- Os resíduos devem seguir uma lei Normal. O requisito da Normalidade pode ser apreciado qualitativamente observando a distribuição empírica dos resíduos $e_i = y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i$ impressos em papel Normal³. Pode-se também efetuar uma apreciação quantitativa recorrendo a um teste de ajustamento, tal como o teste χ^2 ou o teste Kolmogorov-Smirnov (Benjamin e Cornell, 1970).
- Os resíduos sucessivos são independentes entre si. Para avaliar a satisfação deste requisito pode recorrer-se a um teste de independência. A independência também pode ser apreciada qualitativamente observando o gráfico de pontos (i, e_i) , onde $i = 1, \dots, n$ representa a sequência temporal de medições e $e_i = y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i$ representa a correspondente sequência de erros observados. Quando os erros e_i são independentes entre si, os pontos (i, e_i) situam-se aleatoriamente acima e abaixo do eixo das abcissas.

Em geral considera-se que a correlação entre a resistência do betão e o índice esclerométrico satisfaz esses pressupostos (Monteiro e Gonçalves, 2008). O ensaio de arranque (*pull out test*) é outro caso onde se considera que tais requisitos são satisfeitos (NP EN 13791, 2008).

Enfatiza-se que a estimativa de f_{ck} dada pela Eq. (5.17), admitindo como desprezáveis eventuais incertezas originadas no não cumprimento perfeito dos pressupostos do modelo de regressão linear, contempla as fontes relevantes de incerteza do problema, a saber:

- Incerteza originada na falta de precisão do ensaio indireto, traduzida no parâmetro σ .
- Incerteza estatística, associada ao facto de o ensaio ter sido calibrado a partir de um número limitado de carotes (parâmetro n).

Note-se que, para n grande, a incerteza estatística desaparece. Para n grande $t_{0.05, n-2} \approx -1.645$ e a Eq. (5.17) pode ser aproximada por:

$$\hat{f}_{ck}(x) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x - 1.645 \hat{\sigma}. \quad (5.18)$$

A título de exemplo, considere-se um caso real de aplicação do esclerómetro à medição da resistência do betão de uma estrutura existente (Monteiro e Gonçalves, 2008). O caso diz respeito a uma estrutura que estava em construção na altura da recolha dos dados, cuja segurança foi questionada por suspeitas de má qualidade do betão. Para esse efeito foi efetuado um levantamento exaustivo dos pilares da estrutura com um esclerómetro, assim como a extração de um certo número de carotes, cuja resistência medida em laboratório serviu para calibrar o esclerómetro. A Tabela 5.2 mostra os pares (x_i, y_i) usados na calibração do esclerómetro (21 pares). Os valores do índice esclerométrico que constam na Tabela foram obtidos através da mediana de 9 leituras em cada local de ensaio⁴.

Com base nos dados da Tabela 5.2, procedeu-se à calibração do esclerómetro, tendo-se obtido os seguintes parâmetros de regressão:

$$\hat{\beta}_0 = -21.78 \text{ MPa}; \quad \hat{\beta}_1 = 1.14 \text{ MPa}; \quad \hat{\sigma} = 2.12 \text{ MPa}; \quad R^2 = 0.697.$$

Uma vez calibrado o esclerómetro, pode estimar-se sem dificuldade a resistência do betão em qualquer local desejado da estrutura. Por exemplo, suponhamos que o

³Na próxima secção introduziremos o conceito de papel de probabilidade.

⁴A utilização da mediana em vez da média tem a vantagem de eliminar automaticamente *outliers*.

Tabela 5.2 Pares (x_i, y_i) para calibração do esclerómetro

Local i	Índice esclerométrico x_i	Resistência da carote [MPa] y_i
1	41.0	24.9
2	37.0	19.3
3	38.0	23.9
4	37.0	20.2
5	39.0	22.5
6	37.5	22.6
7	32.0	12.3
8	37.0	23.6
9	30.5	13.2
10	31.0	15.3
11	35.0	16.6
12	35.5	22.2
13	34.0	17.7
14	35.5	15.5
15	37.5	23.7
16	37.5	18.4
17	35.0	16.3
18	36.0	20.9
19	38.5	23.5
20	39.5	22.3
21	39.0	19.7
min	30.5	12.3
max	41.0	24.9
média	36.3	19.7
desvio padrão	2.74	3.76

esclerómetro num dado local deu um índice de 36 (mediana de 9 disparos nesse local). No caso em apreço $S_{xx} = 150.7$ e $\bar{x} = 36.3$. Assim aplicando a Eq.(5.17), vem:

$$\begin{aligned}\hat{f}_{ck} &= -21.78 + 1.14 \times 36 + 2.12 \sqrt{1 + \frac{1}{21} + \frac{(36 - 36.3)^2}{150.7}} t_{0.05,19} \\ &= 15.5 \text{ MPa.}\end{aligned}$$

Este valor tem em conta a incerteza associada à precisão do ensaio (traduzida no parâmetro $\hat{\sigma}$) e a incerteza estatística associada ao número finito de carotes usado na calibração.

Efetuada um cálculo similar para outros valores de x podemos traçar uma curva que dá o valor característico da resistência do betão. O gráfico da Figura 5.1, que representa o modelo de regressão linear do exemplo acabado de analisar, mostra essa curva, assim como a reta central, chamada reta de regressão. Esta reta fornece o valor médio (ou valor esperado) da resistência do betão, f_{cm} , em função do índice esclerométrico, x .

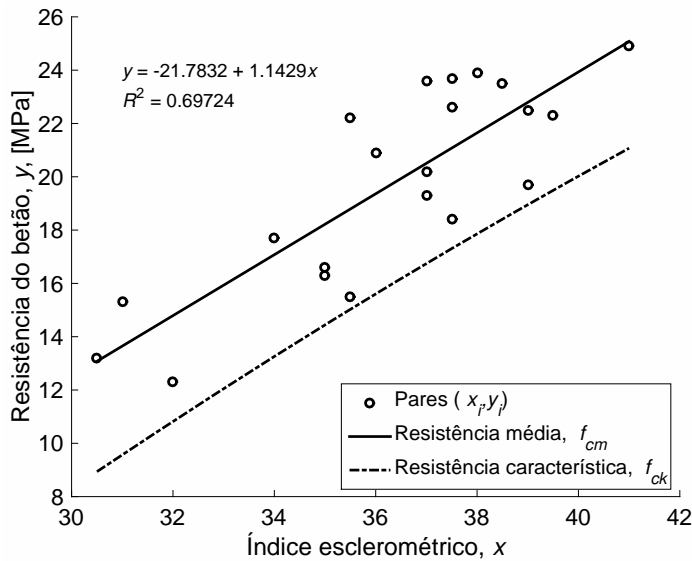


Figura 5.1 Representação gráfica do modelo de regressão linear obtido no processo de calibração do esclerómetro.

Estimemos novamente o valor característico da resistência do betão no local em que o esclerómetro indicou $x = 36$, mas agora desprezando a incerteza estatística. Usando então a Eq. (5.18), tem-se:

$$\begin{aligned}\hat{f}_{ck} &= -21.78 + 1.14 \times 36 - 1.645 \times 2.12 \\ &= 15.8 \text{ MPa.}\end{aligned}$$

Este valor é apenas ligeiramente superior ao valor calculado anteriormente, o que nos permite concluir que, no presente caso, a incerteza estatística é pequena, ou, por outras palavras, o número de carotes usado na calibração (21 carotes) foi perfeitamente suficiente.

5.5 Ajustamento de modelos probabilísticos a amostras

Vimos anteriormente como estimar parâmetros desconhecidos de uma população a partir de uma amostra dessa população. Admitiu-se como conhecido o modelo probabilístico subjacente à população. Acontece frequentemente, porém, que o próprio modelo probabilístico da população é desconhecido. Coloca-se então o problema de, dada uma amostra de uma população, escolher um modelo probabilístico que se ajuste bem a essa amostra, ou, por outras palavras, determinar o modelo que terá gerado essa amostra.

Em geral começa-se por uma análise gráfica qualitativa, observando a forma do histograma da amostra. Esta análise qualitativa é extremamente importante e pode, em conjunto com razões físicas ou técnicas, ditar a escolha de um determinado modelo, sem necessidade de recorrer a uma análise mais detalhada. No entanto, podemos recorrer também a métodos quantitativos que ajudam a decidir se determinado modelo probabilístico ajusta-se bem ou não à amostra dada. Tais métodos, designados por *testes de ajustamento*, baseiam-se na conhecida teoria dos *testes de hipóteses*. Dois desses testes são frequentemente utilizados: o teste χ^2 e o teste kolmogorov-Smirnov. A descrição detalhada destes testes pode ser consultada em qualquer texto tradicional de Probabilidades e Estatística, e não os consideraremos aqui. (Ver por exemplo Benjamin e Cornell (1970)). Faremos apenas uma breve descrição da análise gráfica qualitativa. Esta análise pode ser realizada por meio de histogramas, ou por meio da chamada distribuição empírica. Começemos pela primeira técnica.

5.5.1 Análise qualitativa por meio de histogramas

Como se disse acima, quando se pretende escolher um modelo probabilístico a partir de uma amostra da população, é boa ideia começar por desenhar um histograma dessa amostra (no caso da população ser contínua) e observar a sua forma. Um histograma (de uma amostra de uma população contínua) é um gráfico de barras verticais contíguas, em que a largura de cada barra corresponde a um intervalo de valores da população e a altura é proporcional ao número de observações da amostra que caem no intervalo. Cada intervalo de valores designa-se por *classe*. O número de barras verticais do gráfico define assim o número de classes do histograma. As barras (ou classes) podem ser de largura variável, mas as barras de largura constante são mais utilizadas.

Para desenhar o histograma é necessário escolher primeiro o número de classes pretendido, função da dimensão da amostra disponível. Para tal, pode recorrer-se à seguinte expressão (Benjamin e Cornell, 1970), conhecida como regra de Sturges, que fornece o número de classes, k , em função da dimensão n da amostra:

$$k = 1 + 3.3 \log_{10}(n), \quad (5.19)$$

onde $\log_{10}()$ indica logaritmo na base decimal.

Uma vez desenhado o histograma, sobrepõe-se a esse histograma a FDP do modelo cujo ajuste se pretende analisar, em que os parâmetros do modelo deverão ser estimados a partir da amostra dada. Podemos então apreciar qualitativamente o ajuste entre o modelo proposto e o histograma da amostra. Se a qualidade do ajuste for razoável e existirem razões físicas ou técnicas em abono do modelo probabilístico proposto, a

análise pode parar por aqui.

Analisemos agora, com um pouco mais de detalhe, a construção de um histograma de uma amostra de uma população. A Figura 5.2 mostra um histograma com k classes. A classe i corresponde ao intervalo de valores $[x_{i-1}, x_i[$. Para traçar o histograma é necessário determinar o número de valores da amostra que caem em cada uma das classes. Seja N_i o número de valores que caem na classe i . Esse número é chamado de *frequência absoluta* da classe. Se dividirmos N_i por n (dimensão da amostra) obtém-se a proporção de valores que caem na classe, chamada *frequência relativa*. Os histogramas podem ser, portanto, de frequências absolutas ou frequências relativas.

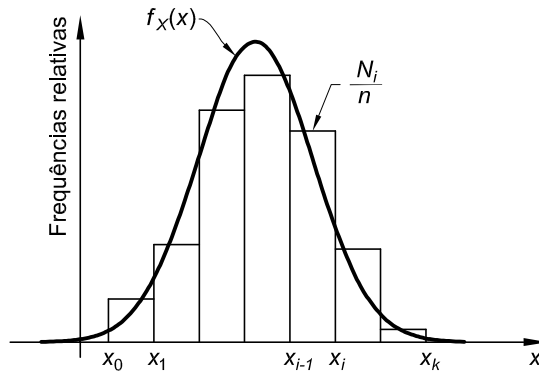


Figura 5.2 Histograma com k classes e modelo probabilístico sobreposto.

Ao traçar o histograma de uma amostra, é importante ter presente que o histograma que se obtém é apenas um entre os muitos que poderiam ter sido obtidos da população em estudo. Um histograma de outra amostra da mesma população pode até ser bastante diferente, sobretudo se a amostra for de pequena dimensão. Por conseguinte, a frequência absoluta N_i deve ser encarada como variável aleatória. Como cada valor da amostra ou cai na classe i ou em outra classe, o número N_i de observações que caem na classe i corresponde ao número de sucessos de uma experiência de Bernoulli realizada n vezes, sendo n a dimensão da amostra. Designando por p_i a probabilidade de um valor qualquer da amostra cair na classe i (probabilidade de sucesso), a variável N_i possui distribuição Binomial com parâmetros n e p_i . Em símbolos: $N_i \sim \text{Bin}(n, p_i)$. A média, variância e coeficiente de variação de N_i têm assim os seguintes valores:

$$E(N_i) = np_i, \quad (5.20)$$

$$\text{Var}(N_i) = np_i(1 - p_i), \quad (5.21)$$

$$V_i = \sqrt{\frac{1}{n} \left(\frac{1}{p_i} - 1 \right)}. \quad (5.22)$$

Observando a Eq. (5.22), conclui-se que, para reduzir o coeficiente de variação de N_i deve-se aumentar a dimensão da amostra, ou reduzir o número de classes (que equivale a aumentar p_i). Por exemplo, suponha-se que a classe i do histograma possui $p_i = 0.10$. Para que o coeficiente de variação da frequência dessa classe seja de 0.20

(que até já é significativo), a dimensão da amostra teria de ser de pelo menos 225. Isto mostra que, em geral, quando o problema é escolher um modelo probabilístico para uma população a partir de uma amostra da população, para que tal escolha seja fiável, a amostra deve ter uma dimensão significativa. (Quando o problema se resume a determinar parâmetros de uma população conhecida, a amostra disponível não precisa de ser tão grande.)

Chama-se à atenção para que, ao se reduzir o número de classes do histograma, melhora-se o ajuste do modelo ao histograma, mas diminui-se ao mesmo tempo a predisposição em aceitar o modelo proposto, já que se melhora também o ajuste a outros modelos candidatos.

Considere-se agora a seguinte situação: suponha-se que o histograma da amostra disponível ajusta-se igualmente bem a dois modelos probabilísticos candidatos, originando dúvidas sobre por qual deles se deve optar. Para ajudar a escolher um desses modelos, pode-se determinar, para cada um deles, a verosimilhança da amostra e optar pelo modelo que conduz à máxima verosimilhança. (Ver Eq. (5.7), p. 76.) Estamos assim a escolher o modelo com a maior probabilidade de ter gerado aquela amostra, o que faz sentido.

5.5.2 Análise qualitativa por meio da função distribuição empírica

A análise qualitativa do ajuste de um modelo probabilístico a uma amostra de uma população pode também, como alternativa aos histogramas, ser efetuada recorrendo à chamada *função distribuição empírica*. Esta função constitui uma estimativa da FDC da população em causa, e é obtida a partir de uma amostra da população, como se explica de seguida. Seja $F_X(x)$ a FDC (que se desconhece) de uma população X e seja $\{x_1, \dots, x_n\}$ uma amostra dessa população. Para obter uma estimativa da FDC a partir da amostra, começa-se por ordenar os valores da amostra por ordem crescente. Seja $\{x^{(1)}, \dots, x^{(n)}\}$ a amostra ordenada. O valor $x^{(1)}$ corresponde assim ao valor mínimo da amostra e $x^{(n)}$ ao valor máximo. O valor $x^{(i)}$ representa o valor de ordem i . Ora, $F_X(x^{(i)}) = P(X \leq x^{(i)})$, donde uma estimativa de $F_X(x)$, que representaremos por $\hat{F}_X(x)$ e a que chamaremos *função distribuição empírica*, é dada por:

$$\hat{F}_X(x^{(i)}) = \frac{\text{número de observações} \leq x^{(i)}}{n} = \frac{i}{n}.$$

Este estimador, embora intuitivo, não é o mais usado. Muitos autores preferem usar o seguinte estimador (Ang e Tang, 2007):

$$\hat{F}_X(x^{(i)}) = \frac{i}{n+1}. \quad (5.23)$$

Recorrendo a este último estimador, o gráfico da distribuição empírica é dada pelo conjunto de pontos $(x^{(i)}, i/(n+1))$, $i = 1, \dots, n$. (Ver Figura 5.3.)

Sobrepondo o gráfico do modelo $F_X(x)$ proposto (com os parâmetros estimados a partir da amostra) com o gráfico da distribuição empírica, podemos apreciar qualitativamente o ajuste do modelo a essa amostra. Este método, comparativamente com a análise por meio de histogramas, tem a vantagem de utilizar diretamente os valores individuais da amostra disponível. Com efeito, quando se desenha um histograma de uma amostra, os valores individuais são perdidos.

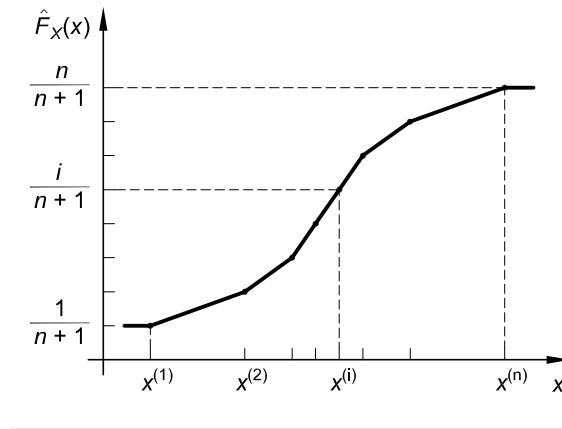


Figura 5.3 Função distribuição empírica.

5.5.3 Conceito de papel de probabilidade

Em alternativa à observação do gráfico da função distribuição empírica sobreposto com o gráfico da FDC em análise, pode recorrer-se ao conceito de *papel de probabilidade*. A ideia do método consiste no uso de uma folha de papel comercial previamente calibrada a um dado modelo probabilístico (por exemplo o modelo Normal, caso em que o papel se diz papel Normal), na qual se marca os pontos da função distribuição empírica. A escala vertical da folha está modificada de tal maneira que, se os pontos assim marcados seguirem aproximadamente uma reta, é porque a amostra disponível segue o modelo probabilístico subjacente à folha.

O uso de papel de probabilidade deixou de ter interesse hoje e dia, dada a facilidade com que se desenham gráficos em computador. No entanto, a ideia subjacente ao conceito continua a ter interesse, porque dispensa a plotagem da FDC proposta, evitando assim a necessidade de se estimar previamente os parâmetros do modelo proposto. Vale a pena, por isso, explicar brevemente o conceito.

A ideia é aplicar uma transformação de escala às ordenadas do modelo proposto $F_X(x)$ (eixo vertical) de modo a que o respetivo gráfico seja transformado numa reta. A título de exemplo, suponha-se que se está a estudar o ajuste de um modelo Normal a uma dada amostra. Ora, a FDC do modelo Normal é expressa por:

$$F_X(x) = \Phi\left(\frac{x - \mu_X}{\sigma_X}\right),$$

onde μ_X e σ_X são os parâmetros do modelo. Aplicando $\Phi^{-1}()$ a ambos os membros da equação, vem:

$$\Phi^{-1}(F_X(x)) = \frac{x - \mu_X}{\sigma_X},$$

que corresponde à equação de uma reta $y = ax + b$, com $a = 1/\sigma_X$ e $b = -\mu_X/\sigma_X$. Isto significa que, se a amostra disponível $\{x_1, \dots, x_n\}$ pertencer a uma população Normal, espera-se que o gráfico de pontos $(x^{(i)}, \Phi^{-1}(i/(n+1)))$ siga aproximadamente uma reta com inclinação $1/\sigma_X$ e ordenada na origem $-\mu_X/\sigma_X$. Se tal não acontecer, então é porque a distribuição Normal não é um bom modelo para a população e estudo.

Repare-se que, recorrendo ao conceito de papel de probabilidade, não é necessário sobrepor-se à função distribuição empírica o gráfico da FDC do modelo proposto. Basta verificar se a função distribuição empírica (com as ordenadas transformadas) tem ou não uma tendência linear.

Vejam os mais um caso. Suponha-se agora que modelo proposto é a distribuição Gumbel, cuja FDC é dada por:

$$F_X(x) = e^{-e^{-\alpha(x-u)}}, \quad (5.24)$$

onde u e α são os parâmetros do modelo. Aplicando logaritmos naturais a ambos os membros da equação vem:

$$\begin{aligned} \ln(F_X(x)) = -e^{-\alpha(x-u)} &\Leftrightarrow -\ln(F_X(x)) = e^{-\alpha(x-u)} \\ &\Leftrightarrow \ln(-\ln(F_X(x))) = -\alpha(x-u), \end{aligned}$$

que corresponde à equação de uma reta $y = ax + b$, com $a = -\alpha$ e $b = \alpha u$. Assim, se a amostra $\{x_1, \dots, x_n\}$ pertencer a uma população Gumbel, espera-se que o gráfico constituído pelos pontos $(x^{(i)}, \ln(-\ln(i/(n+1))))$ siga aproximadamente uma linha reta com inclinação $-\alpha$ e ordenada na origem αu .

Note-se que, aplicando a técnica da regressão linear, pode estimar-se os parâmetros a e b da reta, a partir dos quais é possível realizar uma estimativa dos parâmetros u e α da população. Assim, o conceito de papel de probabilidade, não só permite apreciar qualitativamente o ajuste de um modelo probabilístico a uma amostra de uma população, mas oferece também uma técnica de estimação de parâmetros.

Termina-se esta parte por enfatizar que, quando o problema é escolher um modelo probabilístico para uma população a partir de uma amostra da população, para que a escolha seja fiável, é necessário que a amostra tenha dimensão apreciável (acima de 100, como ordem de grandeza). Compreende-se também que a dimensão mínima que uma amostra deve ter a fim de representar razoavelmente bem a população depende do coeficiente de variação da população. Quanto maior for esse coeficiente de variação, maior deverá ser a dimensão da amostra.

Exemplo 5.6 A Tabela seguinte mostra os valores máximos semanais da sobrecarga de utilização observados ao longo de 100 semanas numa laje de um edifício. Os valores estão em kN/m^2 .

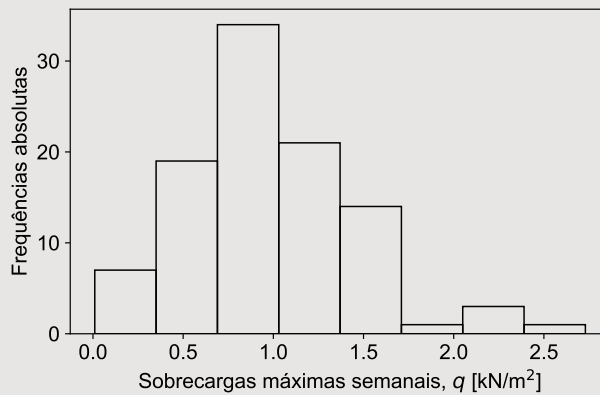
0.71	1.58	0.86	0.37	2.10	0.73	0.81	0.37	2.03	0.72
0.32	0.93	0.71	1.55	0.88	0.45	1.25	0.73	0.39	1.55
1.04	0.97	0.90	0.88	0.81	0.38	1.30	1.16	1.51	1.59
1.18	0.83	1.63	0.87	0.54	0.10	0.39	1.35	0.91	1.08
0.78	1.19	1.51	0.43	0.63	0.57	1.15	0.88	0.77	0.94
0.62	0.39	1.00	0.01	0.52	1.15	0.70	0.86	0.70	0.80
0.90	1.28	1.52	0.28	0.52	0.90	1.42	0.35	1.09	0.87
1.55	2.73	1.57	2.37	1.07	0.67	0.23	1.10	0.92	1.52
0.86	1.31	0.34	0.92	0.81	0.89	1.56	0.64	1.26	1.12
1.35	0.46	0.75	0.48	0.41	1.50	1.30	1.26	1.13	2.15

Analisar a qualidade do ajuste do modelo Gumbel à amostra dada:

- a) Por meio de um histograma.
- b) Por meio da distribuição empírica.
- c) Por meio do conceito de papel de probabilidade.

Resolução

- a) Começa-se por escolher o número de classes do histograma. Recorrendo à fórmula de Sturges, para uma amostra de dimensão $n = 100$ obtém-se $k = 8$ classes. A Figura seguinte mostra o histograma de frequências relativas, com 8 classes, da amostra dada. Conforme se observa, o histograma possui uma assimetria clara à direita.



A título de referência, mostra-se de seguida o código Python usado para criar este histograma.

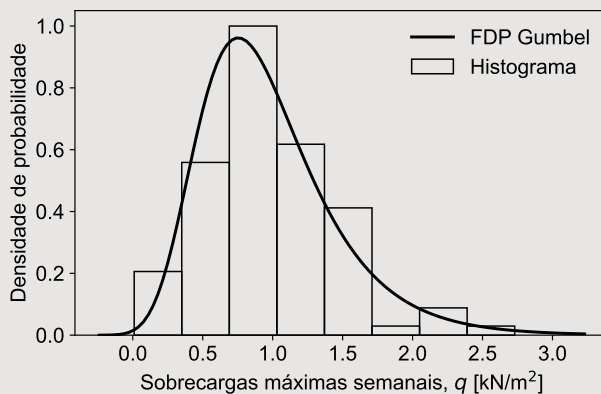
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

q = [0.71,1.58,0.86,0.37,2.10,0.73,0.81,0.37, (...)]

n = len(q)
nbins = round(1 + 3.3*np.log10(n))

fig1, ax1 = plt.subplots()
ax1.hist(q, nbins, linewidth=1, edgecolor="black", facecolor='
None')
ax1.set_xlabel('Sobrecargas maximas semanais, $q$ [kN/m$^2$]')
ax1.set_ylabel('Frequencias absolutas')
```

Para ajustar um modelo Gumbel ao histograma, é necessário estimar os parâmetros u e α do modelo. Aplicando o método dos momentos, obteve-se $u = 0.75 \text{ kN/m}^2$ e $\alpha = 2.6 (\text{kN/m}^2)^{-1}$. A Figura seguinte mostra o modelo Gumbel com esses parâmetros sobreposto ao histograma da amostra.



Conforme se observa, o modelo Gumbel ajusta-se razoavelmente bem à amostra dada.

A título de referência, mostra-se de seguida o código Python usado para criar o histograma com o modelo Gumbel sobreposto:

```
(...)
fig2, ax2 = plt.subplots()
ax2.hist(q, nbins, density=True, linewidth=1, edgecolor='black
        ', facecolor='None', label='Histograma')

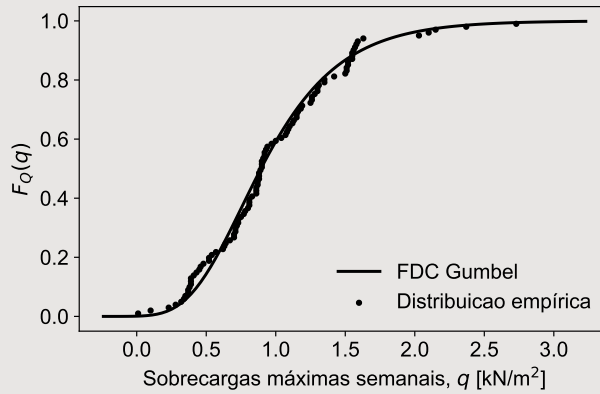
m = np.mean(q)
s = np.std(q)

u = m - np.sqrt(6)*.57722/np.pi*s
alpha = np.pi/(np.sqrt(6)*s)

x = np.linspace(min(q)-.25, max(q)+.5,100)
y = alpha*np.exp(-alpha*(x-u) - np.exp(-alpha*(x-u)))

ax2.plot(x, y, color='black', linewidth=2, label='FDP Gumbel')
ax2.set_xlabel('Sobrecargas maximas semanais, $q$ [kN/m$^2$]')
ax2.set_ylabel('Densidade de probabilidade')
ax2.legend(loc='best', frameon=False)
```

b) A próxima Figura mostra a função distribuição empírica com a FDC Gumbel sobreposta. Conforme se observa, o ajuste é bastante bom.



A título de referência mostra-se de seguida o código Python que gerou a Figura anterior.

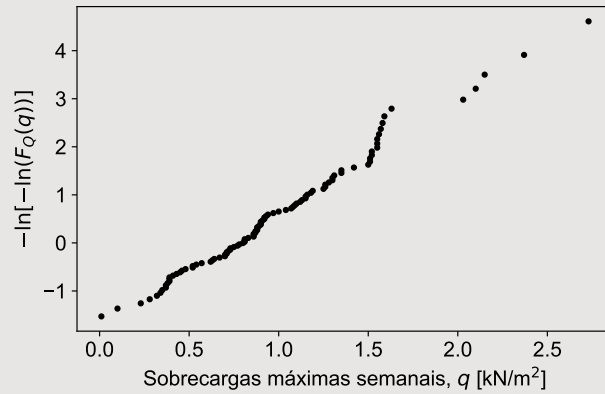
```
(...)
fig3, ax3 = plt.subplots()
q = np.sort(q)
i = np.arange(1,n+1)

ax3.scatter(q, i/(n+1), s=10, facecolor='k', label='
    Distribuicao empirica')

x = np.linspace(min(q)-.25, max(q)+.5, 100)
y = np.exp(-np.exp(-alpha*(x-u)))

ax3.plot(x, y, color='black', linewidth=2, label='FDC Gumbel')
ax3.set_xlabel('Sobrecargas maximas semanais, $q$ [kN/m$^2$]')
ax3.set_ylabel('$F_Q(q)$')
ax3.legend(loc='best', frameon=False)
```

- c) Recorrendo agora ao conceito de papel de probabilidade, representa-se na Figura seguinte a função distribuição empírica com o eixo das ordenadas modificado ao modelo Gumbel. Conforme se observa, a distribuição empírica apresenta uma tendência claramente linear. Consegue-se com relativa facilidade traçar à mão uma linha reta mostrando a referida tendência. Isto corrobora o que se constatou nas alíneas a) e b).



A título de referência, mostra-se de seguida o código Python usado para criar a Figura anterior.

```
(...)
fig4, ax4 = plt.subplots()
q = np.sort(q)
i = np.arange(1,n+1)

ax4.scatter(q, -np.log(-np.log(i/(n+1))), s=10, facecolor='k')
ax4.set_xlabel('Sobrecargas maximas semanais, $q$ [kN/m$^2$]')
ax4.set_ylabel('$-\ln[-\ln(F_Q(q))]$')
```


Capítulo 6

Método de Monte Carlo

O método de Monte Carlo (MC) é um método numérico destinado a resolver certo tipo de problemas (não necessariamente de natureza probabilística) com recurso a amostras aleatórias geradas artificialmente em computador. É muito utilizado na área da segurança estrutural (e em muitas outras áreas), o que justifica a sua consideração aqui. A nossa abordagem será necessariamente de nível introdutório, pois uma consideração completa do assunto extravasa claramente o âmbito do presente livro.

6.1 Descrição do método

A ideia do método é muito simples. Suponha-se que se pretende estudar a função $Z = g(X, Y)$, dada por $g(X, Y) = X^2/Y$, em que X e Y são duas variáveis aleatórias, cada uma com a sua própria distribuição de probabilidade. Z é naturalmente uma variável aleatória, pois é função de variáveis aleatórias. Qual é o valor esperado de Z ? E a variância? E a FDP? Teríamos alguma dificuldade em responder se tentássemos resolver o problema analiticamente. Mas com o método de MC o problema torna-se simples. O método MC consiste em gerar uma amostra $\{x_1, \dots, x_n\}$ de X , outra amostra $\{y_1, \dots, y_n\}$ de Y , e depois obter uma amostra $\{z_1, \dots, z_n\}$ de Z , usando a relação $z_i = x_i^2/y_i$, $i = 1, \dots, n$. A partir desta amostra fazem-se com toda a facilidade os cálculos probabilísticos necessários relativos à variável Z .

Assim, dada uma função genérica $Z = g(X_1, \dots, X_m)$, o método de MC consiste essencialmente em simular n vezes a função $g()$. Por isso se diz que o método de MC é um método de simulação numérica. Trata-se naturalmente de um método aproximado, pois utiliza amostras que não esgotam as distribuições progenitoras. No entanto, a capacidade dos computadores atuais permite trabalhar com amostras de grande dimensão, tornando os resultados obtidos com esse método praticamente exatos. Além disso, conforme veremos, existem ferramentas estatísticas que permitem estimar a precisão dos resultados obtidos, tornando assim possível controlar, e reduzir tanto quanto se deseje, os erros cometidos com o método de MC.

6.2 Análise de funções de variável aleatória pelo método de Monte Carlo

Considere-se a função $Z = g(X_1, \dots, X_m)$. As variáveis X_1, \dots, X_m são chamadas variáveis de entrada, ou variáveis básicas. A variável Z é chamada variável de saída, ou resposta do modelo. Iremos estudar o comportamento probabilístico da variável Z recorrendo ao método de MC.

O estudo que iremos realizar será ilustrado por meio do seguinte exemplo. Considere-se a secção de betão armado representada na Figura 6.1. O momento resistente da secção pode ser estimado a partir da expressão:

$$M_R = f_y A_s \left(d - 0.5 \frac{f_y A_s}{f_c b} \right), \quad (6.1)$$

onde f_y representa a resistência do aço (tensão de cedência) e f_c a resistência do betão (tensão de rotura). Considerando como determinísticas a geometria da secção (b e d) e a área das armaduras (A_s), o momento resistente é assim função de duas variáveis aleatórias, f_y e f_c , podendo escrever-se $M_R = g(f_y, f_c)$. Admita-se que estas têm as distribuições indicadas na Figura 6.1.

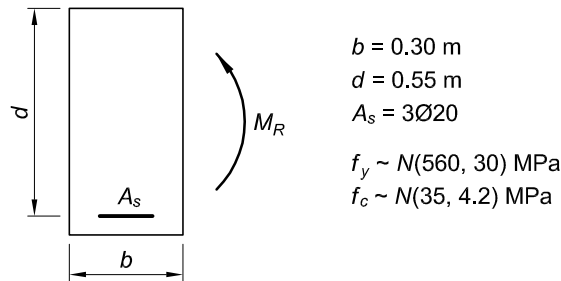


Figura 6.1 Secção retangular de betão armado.

Vejamos então como podemos empregar o método de MC para estudar o comportamento probabilístico do momento resistente da secção. Começemos por estimar a média, a variância e o desvio padrão.

6.2.1 Estimativa da média, variância e desvio padrão

Para estimar a média, variância e desvio padrão do momento resistente recorrendo ao método de MC, desenvolveu-se a seguinte rotina Python:

```
import numpy as np
from scipy.stats import norm

b = 0.30; d = 0.55
As = 3*3.14e-4

nsamp = 100000
```

```

fy = norm.rvs(loc=560e3, scale= 30e3, size=nsamp)
fc = norm.rvs(loc= 35e3, scale=4.2e3, size=nsamp)

MR = fy*As*(d - 0.50*fy*As/(fc*b))

m_MR = np.mean(MR)
var_MR = np.var(MR, ddof=1)
s_MR = np.std(MR, ddof=1)

V_MR = s_MR/m_MR

```

Usando esta rotina, obtiveram-se as seguintes estimativas:

$$\mu_{M_R} = 276.6 \text{ KNm}; \quad \sigma_{M_R} = 14.2 \text{ KNm}; \quad V_{M_R} = 0.05.$$

Cada vez que se corre a rotina, obtêm-se estimativas diferentes, mostrando assim que o método de MC é um método aproximado. A variância das estimativas entre corridas sucessivas constitui uma medida do erro dessas estimativas. Se desejarmos aumentar a precisão das estimativas obtidas, bastará aumentar n (número de simulações) até que os valores das estimativas entre corridas sucessivas estabilizem. Quando tal suceder, podemos concluir que se obteve uma estimativa muito próxima do valor exato.

Conforme se acaba de ver, é possível controlar, e até mesmo eliminar, o erro inerente ao método de MC. O número de simulações requerido depende do grau de aproximação pretendido, e também do tipo de quantidade a estimar. No exemplo acima, verifica-se que a variância, em comparação com a média, exige um número de simulações superior para o mesmo erro.

6.2.2 Análise da forma do histograma

Dada uma função $Z = g(X_1, \dots, X_m)$ pode ter interesse examinar a distribuição de probabilidade da variável Z e eventualmente escolher um modelo probabilístico que se ajuste bem a essa distribuição. O primeiro passo consiste em gerar uma amostra de Z suficientemente grande e observar a forma de um histograma dessa amostra. O problema do ajuste de um modelo probabilístico a uma amostra de uma população foi analisado brevemente no Capítulo 5. As técnicas aí estudadas podem ser aplicadas no âmbito do método de MC.

Analisemos então a forma do histograma do momento resistente da secção que temos vindo a estudar. A Figura 6.2 mostra o histograma com 40 classes de uma amostra do momento resistente gerada com o método de MC. Conforme se observa, o histograma é praticamente simétrico e tem a forma típica do modelo Normal. Assim, se desejarmos atribuir um modelo probabilístico ao momento resistente, o modelo Normal poderá ser uma boa escolha.

Para examinar melhor a normalidade do momento resistente, pode sobrepor-se ao histograma obtido o gráfico de uma distribuição Normal com média e desvio padrão iguais aos da amostra do momento resistente. Recorrendo ao código que a seguir se apresenta, obteve-se o gráfico representado na Figura 6.3. Conforme se observa, o modelo Normal ajusta-se perfeitamente ao histograma dado, donde, se necessitássemos de um modelo probabilístico concreto para modelar o momento resistente, o

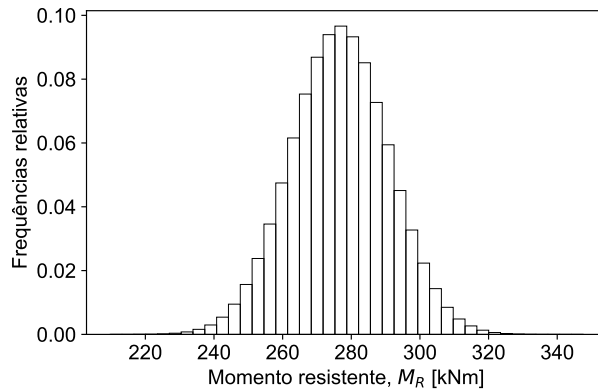


Figura 6.2 Histograma do momento resistente.

modelo Normal seria uma boa escolha. Em certa medida, este resultado não é de estranhar. Com efeito, como se viu no Exemplo 4.2 (p. 68), o momento resistente é muito sensível à resistência do aço, e como esta segue uma distribuição Normal, não admira que o momento resistente siga também uma distribuição Normal.

```
import numpy as np
from scipy.stats import norm
import matplotlib.pyplot as plt

b = 0.30; d = 0.55
As = 3*3.14e-4

nsamp = 100000

fy = norm.rvs(loc=560e3, scale= 30e3, size=nsamp)
fc = norm.rvs(loc= 35e3, scale=4.2e3, size=nsamp)

MR = fy*As*(d - 0.50*fy*As/(fc*b))

m_MR = np.mean(MR)
s_MR = np.std(MR, ddof=1)

fig, ax = plt.subplots()
ax.hist(MR, bins=40, density=True, linewidth=0.5, edgecolor="black",
facecolor='None', label='Histograma')

x = np.linspace(220, 350, 100)
y = norm.pdf(x, loc=m_MR, scale=s_MR)
ax.plot(x, y, color='black', linewidth=2, label='FDP Normal')
ax.set_xlabel('Momento resistente, $M_R$ [kNm]')
ax.set_ylabel('Densidade de probabilidade')
ax.legend(loc='best', frameon=False)
```

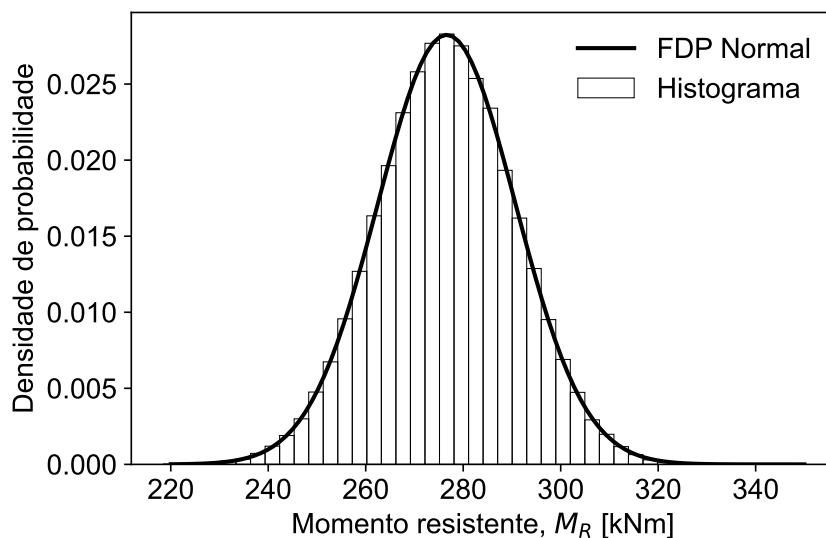


Figura 6.3 Histograma do momento resistente com modelo Normal sobreposto.

6.2.3 Estimativa de quantis

Estimar o quantil p da variável $Z = g(X_1, \dots, X_m)$ recorrendo ao método de MC, equivale a estimar o quantil p da amostra $\{z_1, \dots, z_n\}$ a gerar recorrendo a esse método. A estimativa de quantis a partir de uma amostra passa normalmente pela obtenção da função distribuição empírica da amostra, apresentada brevemente na Secção 5.5.2, p. 89. Conforme aí referido, existem vários estimadores para essa função. No entanto, para efeitos de aplicação do método de MC, como normalmente se trabalha com amostras de muito elevada dimensão, acaba por ser irrelevante o estimador utilizado. Pelo mesmo motivo, o efeito da incerteza estatística é desprezável.

Estimemos então o quantil $p = 0.05$ (valor característico) do momento resistente da função que temos vindo a estudar. Recorrendo à instrução Python,

```
MRk = np.quantile(MR, 0.05)
```

obteve-se $M_{Rk} = 253.2$ kNm.

Para estimar M_{Rk} poderíamos ser tentados a calcular f_{yk} e f_{ck} , e depois fazer $M_{Rk} = g(f_{yk}, f_{ck})$. Este procedimento, embora sugestivo, não está correto. No exemplo acima teríamos obtido $M_{Rk} = 250.8$ kNm e o valor correto é 253.2 kNm. Neste exemplo concreto a diferença não é significativa, mas em casos de funções fortemente não lineares, o erro pode ser significativo.

6.2.4 Estimativa de probabilidades

Considere-se mais uma vez a função genérica $Z = g(X_1, \dots, X_m)$. Pretende determinar-se a probabilidade $p = P(Z \leq a)$, em que a é um número real qualquer. Proceda-se assim: começa-se por gerar uma amostra $\{z_1, \dots, z_n\}$ de Z . Depois, conta-se quantos valores dessa amostra são inferiores ou iguais a a . Seja $n_{Z \leq a}$ o número encontrado. Este número representa a frequência absoluta do evento $Z \leq a$. Então, uma estimativa da probabilidade p é dada pela frequência relativa desse evento, isto é:

$$\hat{p} = \frac{n_{Z \leq a}}{n}. \quad (6.2)$$

De um ponto de vista mais formal, é conveniente formular este procedimento da seguinte forma: partindo da amostra $\{z_1, \dots, z_n\}$ começa-se por gerar uma amostra $\{I_1, \dots, I_n\}$ da variável I , definida conforme segue:

$$I = \begin{cases} 1, & Z \leq a \\ 0, & Z > a \end{cases}. \quad (6.3)$$

Na terminologia do método de MC, esta função é designada *função indicadora*. Repare-se que $n_{Z \leq a} = \sum_{i=1}^n I_i$. Assim, uma estimativa da probabilidade p , é dada por:

$$\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^n I_i}{n}. \quad (6.4)$$

Como exemplo, considere-se novamente a secção que temos vindo a estudar. Determine-se a probabilidade da secção atingir a rotura por flexão se lhe for aplicado um momento de 230 kNm. No fundo, pretendemos estimar $p = P(M_R \leq 230)$. Recorrendo às seguintes instruções Python:

```
I = (MR <= 230)
p = np.sum(I)/nsamp
```

obteve-se $p = 5.4 \times 10^{-4}$. A primeira instrução cria um vetor de zeros (*False*) e uns (*True*), dependendo da condição $M_R \leq 230$ ser falsa ou verdadeira, respetivamente. A segunda instrução avalia a probabilidade pretendida.

Vejam agora como controlar a precisão das probabilidades estimadas com o método de MC. Como referido anteriormente, uma forma de controlar a precisão das estimativas consiste em observar como essas estimativas variam em corridas sucessivas da rotina desenvolvida. Quando essas estimativas variam muito pouco, significa que a estimativa encontrada pode ser considerada muito próxima do valor exato.

Mas há ainda outra forma de controlar a precisão, baseada no facto do método de MC permitir estimar o erro associado às suas estimativas. Ilustremos como isso é feito no caso específico envolvendo estimativas de probabilidades. Conforme explicado acima, uma estimativa da probabilidade $p = P(Z \leq a)$ é dada pela Eq. (6.4). Por outras palavras: uma estimativa de p é dada pelo estimador:

$$\hat{P} = \frac{\sum_{i=1}^n I_i}{n}, \quad (6.5)$$

onde I é a função indicadora definida pela Eq. (6.3). Repare-se que I tem distribuição de Bernoulli com probabilidade de sucesso igual a p . Por conseguinte, a média e a

variância de I têm os seguintes valores: $\mu_I = p$ e $\sigma_I^2 = p(1-p)$, respetivamente. (Ver Anexo A.)

Determinemos agora a média e variância de \hat{P} . Relativamente à média tem-se:

$$\begin{aligned}\mu_{\hat{P}} &= \frac{1}{n} n \mu_I \\ &= p.\end{aligned}$$

O estimador \hat{P} é por isso um estimador centrado, pois a sua média coincide com o parâmetro a estimar. Relativamente à variância, tem-se:

$$\begin{aligned}\sigma_{\hat{P}}^2 &= \frac{1}{n^2} n \sigma_I^2 \\ &= \frac{p(1-p)}{n}.\end{aligned}$$

O desvio padrão é a raiz quadrada da variância, donde:

$$\sigma_{\hat{P}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}.$$

Considerando agora o facto de \hat{P} resultar de uma soma de variáveis aleatórias, então, em virtude do TLC, para n grande $\hat{P} \sim N$, podendo assim escrever-se:

$$\hat{P} \sim N\left(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right). \quad (6.6)$$

Ora, sabe-se que, para uma variável $X \sim N(\mu, \sigma)$,

$$P(\mu - 1.96\sigma \leq X \leq \mu + 1.96\sigma) = 0.95.$$

Assim, relativamente ao estimador \hat{P} , podemos escrever:

$$P\left(p - 1.96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq \hat{P} \leq p + 1.96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) = 0.95.$$

Esta equação pode ser escrita numa forma mais compacta, por:

$$P(p - e \leq \hat{P} \leq p + e) = 0.95 \quad (6.7)$$

em que,

$$e = 1.96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \quad (6.8)$$

A quantidade e pode ser encarada como o erro máximo do estimador \hat{P} com uma confiança de 0.95. Este erro depende da probabilidade p , que é desconhecida (é justamente a probabilidade que desejamos determinar). Se substituirmos p pela sua estimativa \hat{p} na Eq. (6.8), obtém-se uma estimativa do erro, dada por:

$$\hat{e} = 1.96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}. \quad (6.9)$$

Assim, em resumo, ao estimarmos p recorrendo ao método de MC, tem-se uma confiança de aproximadamente 95% de que a estimativa encontrada, \hat{p} , não deverá diferir do verdadeiro valor em mais do que \hat{e} , dado por (6.9).

Muitas vezes tem-se uma melhor percepção da magnitude do erro, usando, não o erro absoluto, mas o erro relativo, definido por:

$$\hat{e}_r = \frac{\hat{e}}{\hat{p}} = 1.96 \sqrt{\frac{1 - \hat{p}}{\hat{p} n}} \quad (6.10)$$

Considerando o exemplo que temos vindo a estudar, estime-se a probabilidade $p = P(M_R \leq 230)$ e o respetivo erro relativo, considerando sucessivamente $n = 100\,000$, $n = 1\,000\,000$ e $n = 10\,000\,000$. A Tabela 6.1 mostra os resultados obtidos. Conforme se observa, a estimativa $\hat{p} = 5.4 \times 10^{-4}$ possui, com forte probabilidade (confiança de 0.95) um erro inferior a 2.7%, podendo pois considerar-se uma boa estimativa.

Tabela 6.1 Erro relativo em função do número de simulações

n	\hat{p}	\hat{e}_r
100 000	5.8×10^{-4}	26%
1 000 000	5.5×10^{-4}	8.3%
10 000 000	5.4×10^{-4}	2.7%

Desenvolvendo a Equação (6.10) em ordem a n , obtém-se:

$$n = \left(\frac{1.96}{\hat{e}_r} \right)^2 \frac{1 - \hat{p}}{\hat{p}}, \quad (6.11)$$

que dá o número de simulações necessário para se conseguir um determinado erro relativo máximo. Para um erro relativo máximo de 5%, tem-se:

$$n \approx 1600 \frac{1 - \hat{p}}{\hat{p}}. \quad (6.12)$$

6.3 Geração de amostras aleatórias

Temos estado a usar o método `norm.rvs()` para gerar amostras com distribuição Normal, disponível no módulo Python `scipy.stats`. Para além do modelo Normal, esse módulo implementa um número significativo de modelos probabilísticos. Porém, pode acontecer que, para um problema concreto, necessitemos de desenvolver a nossa própria rotina para gerar uma amostra aleatória com determinada distribuição. Justifica-se pois abordar brevemente o problema da geração de sequências aleatórias com determinada distribuição de probabilidade. Uma consideração completa deste problema extravasa claramente o âmbito deste livro, pelo que, entre os vários métodos disponíveis, consideraremos apenas o chamado *método da transformação inversa*¹.

¹Para o leitor interessado em aprofundar este assunto, citam-se duas referências importantes no domínio da geração de números aleatórios: o livro *Simulation and the Monte Carlo Method* (Rubinstein, 1981) e o livro *Simulation Modeling & Analysis* (Law, 2007).

6.3.1 Método da transformação inversa

O método da transformação inversa baseia-se no seguinte resultado: seja U uma variável com distribuição Uniforme no intervalo $]0, 1[$, isto é, $U \sim \text{Un}(0, 1)$. Seja $F_X(x)$ a FDC associada a um determinado modelo probabilístico. Então a variável aleatória $X = F_X^{-1}(U)$ tem distribuição $F_X(x)$.

Este resultado, ilustrado graficamente na Figura 6.4, é relativamente fácil de demonstrar. Em primeiro lugar, note-se que $P(U \leq a) = a$. Com efeito,

$$P(U \leq a) = \int_0^a 1 \, du = u \Big|_0^a = a.$$

Seja $X = F_X^{-1}(U)$. Portanto,

$$\begin{aligned} P(X \leq x) &= P(F_X^{-1}(U) \leq x) \\ &= P(U \leq F_X(x)) = F_X(x). \end{aligned}$$

Ou seja, a variável $X = F_X^{-1}(U)$ tem distribuição $F_X(x)$, como se queria demonstrar.

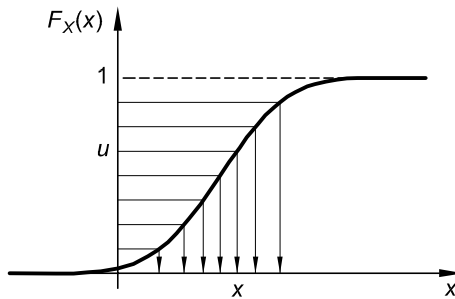


Figura 6.4 Ilustração do método da transformação inversa.

O método da transformação inversa aplica-se então do seguinte modo: suponha-se que se pretende gerar uma amostra de uma variável com distribuição $F_X(x)$. O algoritmo consiste em:

1. gerar $u \sim \text{Un}(0, 1)$
2. obter $x = F_X^{-1}(u)$

6.3.2 Aplicações do método da transformação inversa

Geração de amostras da distribuição Gumbel

A FDC da distribuição Gumbel é dada por:

$$F_X(x) = \exp \left(- \exp \left(- \alpha(x - u) \right) \right),$$

em que u e α são os parâmetros do modelo. Para aplicar o método da transformação inversa, começa-se por obter a inversa de $F_X(\cdot)$, bastando para o efeito resolver a

equação $p = \exp(-\exp(-\alpha(x-u)))$ em ordem a x . Aplicando logaritmos a ambos os termos da equação, vem:

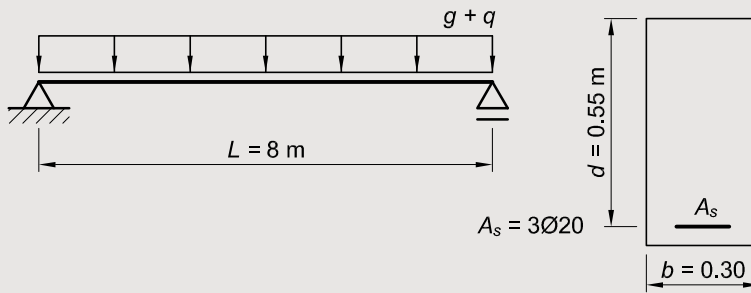
$$\begin{aligned} \ln p = -\exp(-\alpha(x-u)) &\Leftrightarrow -\ln p = \exp(-\alpha(x-u)) \\ &\Leftrightarrow \ln(-\ln p) = -\alpha(x-u) \\ &\Leftrightarrow x = u - \frac{1}{\alpha} \ln(-\ln p). \end{aligned}$$

Assim, para gerar uma amostra de $X \sim \text{Gb}(u, \alpha)$, procede-se da seguinte forma:

1. gerar $p \sim \text{Un}(0, 1)$
2. obter $x = u - (1/\alpha) \ln(-\ln p)$

Apresenta-se de seguida um exemplo onde se aplica este algoritmo.

Exemplo 6.1 Considere-se a viga de betão armado representada na Figura junta. A viga possui secção retangular e está sujeita a duas ações, uma de natureza permanente, g , e outra variável, q .



As ações g e q , a tensão de cedência do aço f_y , e a resistência do betão f_c têm os seguintes modelos probabilísticos:

Variável	Modelo	Média	Coef. de variação
g	Normal	16 kN/m	0.05
q	Gumbel	8 kN/m	0.10
f_y	Normal	560 MPa	0.05
f_c	Normal	35 MPa	0.12

- a) Determinar a probabilidade de se atingir o EL de rotura por flexão na secção de meio vão da viga.
- b) Estimar quantas simulações são necessárias de forma a garantir que o erro na probabilidade calculada seja inferior a 5% com uma confiança de 95%.

Resolução

- a) Pretende-se determinar $P(M_E > M_R)$. Começa-se por determinar os pa-

râmetros do modelo Gumbel, u e α . Recorrendo ao Anexo B, vem:

$$u = 8 - \frac{\sqrt{6} \times 0.5772}{\pi} (0.10 \times 8) = 7.64 \text{ kN/m};$$

$$\alpha = \frac{\pi}{\sqrt{6} (0.10 \times 8)} = 1.60 \text{ (kN/m)}^{-1}.$$

Recorrendo à rotina que segue, obteve-se $p_f = 2.0 \times 10^{-6}$.

```
import numpy as np
from scipy.stats import norm, uniform

L = 8.0
b = 0.30; d = 0.55
As = 3*3.14e-4

nsim = 50000000

g = norm.rvs(loc=16, scale=.05*16, size=nsim)

rnd = uniform.rvs(size=nsim)
q = 7.64 - (1/1.6)*np.log(-np.log(rnd))

ME = (g + q)*L**2/8

fy = norm.rvs(loc=560e3, scale=.05*560e3, size=nsim)
fc = norm.rvs(loc= 35e3, scale=0.12*35e3, size=nsim)

MR = fy*As*(d - 0.50*fy*As/(fc*b))

I = (ME > MR)
pf = sum(I)/nsim
```

b) Estima-se que são necessárias:

$$n = 1600 \frac{1 - 2.0 \times 10^{-6}}{2.0 \times 10^{-6}} \approx 800\,000\,000 \text{ simulações.}$$

Uma vez que o computador usado no momento de preparação deste exemplo não tinha memória suficiente para executar numa única vez um número tão grande de simulações, a rotina, que realiza 50 000 000 simulações de cada vez, foi executada 16 vezes, perfazendo o número de simulações desejado. Temos assim forte confiança de que o valor $p_f = 2.0 \times 10^{-6}$ (obtido pela média dessas 16 corridas) tem um erro máximo de 5%.

Comentários:

- (1) Se a distribuição da ação q referir-se aos máximos em 50 anos, então a probabilidade estimada pode ser interpretada como a probabilidade de rotura para um período de utilização da estrutura de 50 anos.
- (2) O momento resistente foi calculado de modo simplificado. Com efeito, a expressão utilizada pressupõe que os aços, em EL último, estão em cedência, pelo que se deveria ter verificado o cumprimento de tal pressuposto em cada simulação. Efetuou-se uma análise mais correta do problema, tendo-se obtido os mesmos resultados, o que significa, que, no presente caso, a probabilidade do aço não estar em cedência em EL último é extremamente reduzida e não afeta a probabilidade calculada.

Geração de amostras de máximos

O método da transformação inversa é facilmente aplicado na geração de amostras de máximos. Vejamos como isso é feito. Suponhamos uma variável X com distribuição $F_X(x)$. Seja $\{X_1, \dots, X_n\}$ uma sequência temporal de n observações independentes de X . Estamos interessados na variável $X_{\max, n} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$. Como vimos anteriormente, a distribuição de $X_{\max, n}$ obtém-se da distribuição $F_X(x)$ por meio da relação:

$$F_{X_{\max, n}}(x) = [F_X(x)]^n. \quad (6.13)$$

Para gerar uma amostra da variável $X_{\max, n}$ recorrendo ao método da transformação inversa, começa-se por obter a inversa de $F_{X_{\max, n}}(x)$, bastando para o efeito resolver a equação $u = [F_X(x)]^n$ em ordem a x . Tem-se:

$$\begin{aligned} u = [F_X(x)]^n &\Leftrightarrow u^{1/n} = F_X(x) \\ &\Leftrightarrow x = F_X^{-1}(u^{1/n}). \end{aligned}$$

Assim, dada uma variável X com distribuição $F_X(x)$, para gerar uma amostra de máximos de n valores da variável, procede-se conforme segue:

1. gerar $u \sim \text{Un}(0, 1)$
2. obter $x_{\max} = F_X^{-1}(u^{1/n})$

Exemplo 6.2 Após um período de observação e pesagem dos camiões que atravessam uma determinada ponte, concluiu-se que o peso desses camiões segue uma distribuição Normal, com media 16 ton e desvio padrão 8 ton. Observou-se que, em média, atravessam diariamente a referida ponte cerca de 150 camiões.

Recorrendo ao método de MC, desenvolver uma rotina Python para a determinação das seguintes quantidades:

- a) Média, desvio padrão e valor característico (quantil 95%) do peso máximo dos camiões em 50 anos.
- b) Probabilidade do peso máximo em 50 anos exceder 60 ton.

Resolução

Em primeiro lugar há que estimar quantos camiões atravessam a ponte em 50 anos. Tem-se: $n = 150 \times 365 \times 50 = 2\,737\,500$ camiões. A seguinte rotina Python permite responder às questões formuladas:

```
import numpy as np
from scipy.stats import norm, uniform

n = 150*365*50
nsim = 1000000

u = uniform.rvs(size=nsim);
Pmax = norm.ppf(u**(1/n), loc=16, scale=8)

# a)
m_Pmax = np.mean(Pmax)
s_Pmax = np.std(Pmax, ddof=1)
Pmax_k = np.quantile(Pmax, .95)

# b)
I = (Pmax >= 60)
p = sum(I)/nsim
```

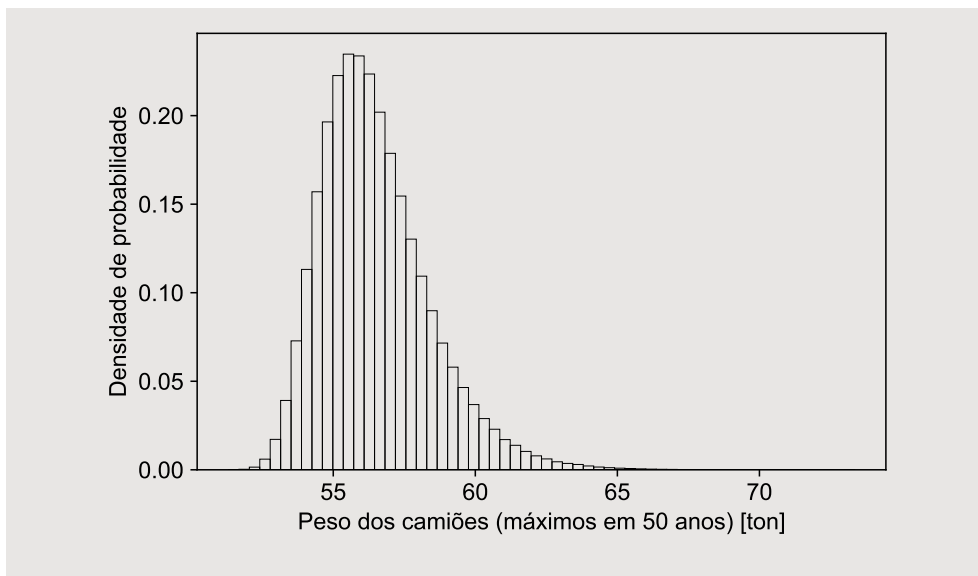
Recorrendo a esta rotina, obtiveram-se os seguintes resultados:

a) média = 56.5 ton;
desvio padrão = 1.9 ton;
valor característico = 60.0 ton.

b) $p = 0.05$.

Nota: Esta probabilidade já tinha sido calculada analiticamente no Problema 3.6 (p. 49). Como se acaba de constatar, o método de MC conduziu ao mesmo resultado, como não podia deixar de ser.

A título de referência, apresenta-se de seguida um histograma do peso máximo dos camiões em 50 anos.



6.4 Análise de sensibilidade com o método de MC

Vimos na Secção 6.2.1 (p. 98) como estimar a variância de uma função genérica $Z = g(X_1, \dots, X_m)$ recorrendo ao método de MC. Tem interesse conhecer quais das variáveis básicas X_i mais contribuem para essa variância, ou, o que é o mesmo, quais das variáveis básicas mais contribuem para a incerteza da função. Com efeito, se desejarmos reduzir esta incerteza por procurar mais informação acerca das variáveis básicas, deve-se privilegiar as variáveis que mais contribuem para essa incerteza. A determinação de quais são essas variáveis é realizada por meio de uma análise de sensibilidade.

Para realizar uma análise de sensibilidade com o método de MC, pode seguir-se o seguinte procedimento: seja σ_Z^2 a variância da função em estudo, cuja determinação é simples recorrendo ao método de MC. A contribuição da variável X_i para o valor σ_Z^2 é medida pela variância de Z que se obtém considerando todas as variáveis básicas como determinísticas (representadas pelo seu valor médio), exceto a variável X_i , o que se faz facilmente com o método de MC. Seja $\sigma_Z^2|_i$ a variância de Z que se obtém nessas condições. Então, a contribuição da variável X_i para a variância total da função pode ser medida pelo seguinte coeficiente, a que chamaremos *coeficiente de sensibilidade*:

$$\omega_i^2 = \frac{\sigma_Z^2|_i}{\sigma_Z^2}. \quad (6.14)$$

Este coeficiente representa, aproximadamente, a fração da variância de Z que é devida à variável X_i .

Podemos demonstrar-se que, quando Z é uma função linear nas variáveis X_i e estas são independentes entre si, $\sum \omega_i^2 = 1$. Num caso geral, a soma dos quadrados dos ω não será 1, mas poderá ser próxima de 1, dependendo do grau de linearidade da função em estudo e do grau de independência das variáveis básicas.

A título de exemplo, determinemos o valor dos coeficientes acabados de definir para as variáveis básicas do momento resistente da secção que temos vindo a estudar:

a resistência do aço e a resistência do betão. Recorrendo ao código Python que se apresenta de seguida, obtiveram-se os seguintes valores:

$$\omega_{\text{aco}}^2 = 0.989, \quad \omega_{\text{betao}}^2 = 0.014,$$

cuja soma dá 1.003, e portanto muito próximo de 1, o que significa que o momento resistente apresenta um grau de não linearidade relativamente pequeno. Confirma-se mais uma vez que o momento resistente da secção é muito pouco sensível à resistência do betão. Se desejássemos reduzir a incerteza no momento resistente, não se justificaria pois qualquer tentativa de conhecer melhor a resistência do betão, mas apenas a resistência do aço.

```
import numpy as np
from scipy.stats import norm

b = 0.30; d = 0.55
As = 3*3.14e-4

m_fy = 560e3; s_fy = 30e3
m_fc = 35e3; s_fc = 4.2e3

def var_z(fy, fc):
    z = fy*As*(d - 0.50*fy*As/(fc*b))
    varz = np.var(z, ddof=1)
    return varz

n = 1000000
fyrnd = norm.rvs(loc=m_fy, scale=s_fy,size=n)
fcrnd = norm.rvs(loc=m_fc, scale=s_fc,size=n)

# Variancia total
fy = fyrnd
fc = fcrnd
var_tot = var_z(fy, fc)

# Contribuicao do aco
fy = fyrnd
fc = m_fc
w2_aco = var_z(fy, fc)/var_tot

# Contribuicao do betao
fy = m_fy
fc = fcrnd
w2_betao = var_z(fy, fc)/var_tot

sum_w2 = w2_aco + w2_betao
```


Capítulo 7

Conceitos fundamentais de fiabilidade estrutural

No Capítulo 2 foram apresentados os conceitos básicos de segurança estrutural e nos capítulos seguintes foram revistos conceitos probabilísticos importantes. Agora que estamos munidos das ferramentas probabilísticas necessárias, estamos em condições de apresentar a teoria da fiabilidade estrutural. O presente capítulo trata dos conceitos fundamentais dessa teoria.

7.1 Conceitos de função estado limite e margem de segurança

Seja E um efeito das ações em determinado elemento estrutural e R a resistência correspondente. O evento $E < R$ representa um estado de segurança e pode escrito na forma:

$$R - E > 0.$$

A função $M = g(R, E) = R - E$ designa-se por *função estado limite*, e M por *margem de segurança*. Visto que R e E são variáveis aleatórias, segue que a margem de segurança, M , é também variável aleatória.

No caso geral haverá mais do que apenas duas variáveis, pois R e E são, frequentemente, funções de outras variáveis. Suponha-se que, na definição de um EL específico, intervêm n variáveis, X_1, \dots, X_n . Então, a função estado limite $M = g(X_1, \dots, X_n)$, também chamada *função desempenho*, é definida de tal forma que (Andrzej S. Nowak, 2013):

- $g(X_1, \dots, X_n) > 0$ corresponde a estados de segurança;
- $g(X_1, \dots, X_n) = 0$ corresponde a estado limite;
- $g(X_1, \dots, X_n) < 0$ corresponde a estados de insegurança.

Assim, margem de segurança positiva ($M > 0$) representa estados de segurança, margem nula ($M = 0$) indica estado limite e margem de segurança negativa ($M < 0$)

representa estados de insegurança. A equação $g(X_1, \dots, X_n) = 0$ designa-se por *superfície de falha*. A superfície de falha separa assim duas regiões, uma contendo estados favoráveis (segurança) e outra contendo estados desfavoráveis (insegurança).

As variáveis X_1, \dots, X_n são por vezes chamadas *variáveis básicas*, e são assim chamadas por não resultarem de outras variáveis (Kiureghian e Ditlevsen, 2009). São exemplos de variáveis básicas as ações, as propriedades dos materiais e os parâmetros geométricos.

Para ilustrar os conceitos de função EL e variável básica, considere-se a viga simplesmente apoiada representada na Figura 7.1, com vão L , módulo de elasticidade E , inércia constante I , sujeita a duas cargas, $g + q$. Relativamente ao EL de deformação, a verificação da segurança considera-se satisfeita se a flecha a meio vão não ultrapassar o valor máximo admissível, que poderemos assumir como sendo $\delta_{\max} = L/500$. A condição de segurança é $\delta \leq \delta_{\max}$, donde a função EL que lhe corresponde é expressa por:

$$\begin{aligned} M &= \delta_{\max} - \delta \\ &= \frac{L}{500} - \frac{5(g+q)L^4}{384EI}. \end{aligned}$$

O vetor das variáveis básicas tem, portanto, cinco componentes: $X = (g, q, E, I, L)$.

As incertezas em algumas das variáveis básicas poderá ser desprezável face às incertezas em outras variáveis básicas. Por exemplo, a incerteza no vão da viga poderá ser desprezada face às incertezas nas ações e no módulo de elasticidade. Quando se despreza a incerteza numa variável básica, tal variável é tratada como *parâmetro determinístico*.

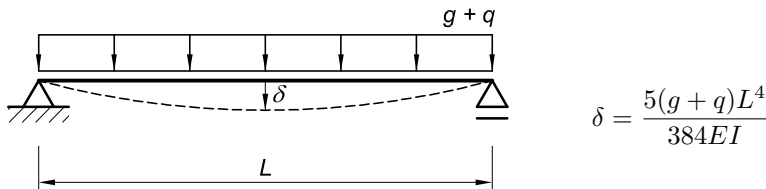


Figura 7.1 Viga simplesmente apoiada. EL de deformação a meio vão.

7.2 Modelos de transformação

A função estado limite $M = g(X_1, \dots, X_n)$ descreve o modo como a margem de segurança M é obtida a partir das variáveis básicas X_1, \dots, X_n , mas em geral não pode ser expressa por meio de uma função matemática explícita. Com efeito, na definição de um estado limite específico é necessário empregar frequentemente variáveis que são funções de outras variáveis. Estas funções, que até podem consistir em algoritmos, são chamados *modelos de transformação*, ou simplesmente *modelos*. Observe-se atentamente a Figura 7.2. Conforme sugerido na Figura, numa função EL típica intervêm fundamentalmente três tipos de modelos:

- *Modelos de ações*, $Q = Q(X)$, que transformam variáveis básicas em ações.

- *Modelos estruturais*, $E = E(Q)$, que transformam ações em efeitos de ações (deslocamentos, deformações, tensões e esforços).
- *Modelos de resistência*, $R = R(X)$, que transformam variáveis básicas em resistências correspondentes aos efeitos das ações.

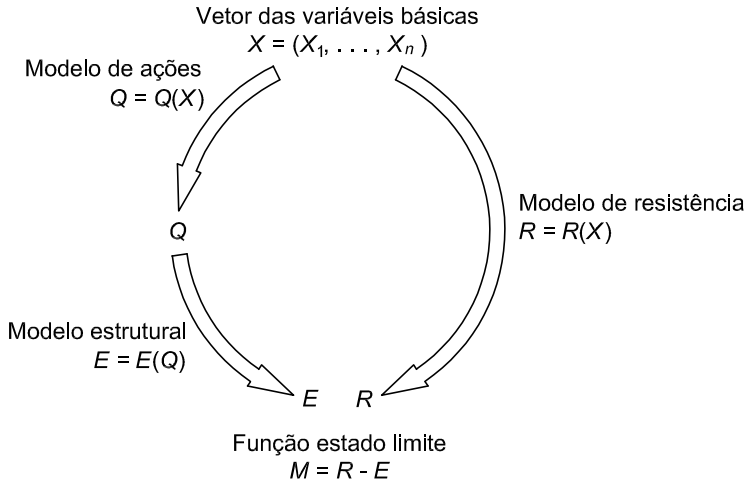


Figura 7.2 Modelos de transformação.

Vejam os alguns exemplos destes três tipos de modelos. O peso de uma viga de betão armado de secção retangular $a \times b$ é dado por $p = \gamma_c a b$, onde γ_c representa o peso específico do betão armado. Este é um exemplo de um modelo muito simples de ações: transforma variáveis básicas (γ_c , a e b) em ação (força por metro linear, no presente caso). A ação do vento numa superfície exerce-se sob a forma de uma pressão, calculada em geral por uma expressão do tipo $w = \frac{1}{2} c \rho v^2$, onde c representa um coeficiente adimensional (chamado coeficiente de forma), ρ a massa específica do ar (massa por unidade de volume) e v a velocidade do vento. Esta expressão constitui outro exemplo de um modelo de ações: transforma variáveis básicas (c , ρ e v) em ação (pressão numa superfície).

Considere-se agora um exemplo de um modelo estrutural. A flecha a meio vão na viga representada na Figura 7.1 é dada por $\delta = \frac{5(g+q)L^4}{384EI}$. Esta expressão representa um modelo estrutural: transforma ações ($g + q$) em efeito de ações (flecha a meio vão). Na maior parte das vezes, porém, o modelo estrutural não pode ser expresso por uma expressão matemática direta. De facto, na maioria dos casos, a determinação dos efeitos das ações, isto é, a resposta da estrutura às ações que nela atuam, é feita com a ajuda de uma aplicação informática (programa de análise estrutural), mais ou menos complexo, de modo que a relação funcional $E = E(Q)$ deve ser encarada de forma simbólica.

Como exemplo de um modelo de resistência, podemos mencionar a expressão que permite estimar o momento resistente de uma secção de betão armado: $M_R = f_y A_s (d - 0.5 \frac{f_y A_s}{f_c b})$, cujo significado dos símbolos já foi explicado anteriormente. Este é um modelo de resistência, visto que transforma variáveis básicas (f_y , f_c , A_s , b e d) em uma resistência (um momento fletor, neste caso).

Os modelos de transformação, porém, não traduzem a realidade com perfeição, seja porque se desprezam determinados efeitos, seja porque se introduzem deliberadamente determinadas simplificações, o que origina novas incertezas. Tais incertezas, à semelhança de outros tipos de incerteza, deverão ser modeladas por meio de variáveis aleatórias, representadas habitualmente pelas letras gregas $\theta_1, \theta_2, \dots$, tantas quantos os modelos empregues.

Considere-se o modelo representado simbolicamente pela expressão $Y = Y(X_1, \dots, X_n)$. Visto que o modelo é imperfeito, a resposta Y contém um erro associado. Torna-se assim necessário corrigir o modelo, podendo adotar-se um dos seguintes formatos:

$$Y = \theta \cdot Y(X_1, \dots, X_n), \quad (7.1)$$

$$Y = Y(X_1, \dots, X_n) + \theta, \quad (7.2)$$

onde θ é a variável que se destina, justamente, a corrigir o erro do modelo. Por se tratar de um erro desconhecido, a variável θ deverá ser tratada como variável aleatória. O primeiro formato indicado (formato multiplicativo) é mais usual, apresentando a vantagem de que a variável θ é adimensional, o que já não sucede com o segundo formato (formato aditivo), onde θ se expressa nas mesmas unidades que a resposta Y .

Numa função EL típica intervêm, como se disse acima, três tipos de modelos: modelo de ações, modelo estrutural e modelo de resistência. Assim, adotando o formato multiplicativo mencionado acima, os modelos a empregar na função EL em causa são expressos por:

$$Q = \theta_Q \cdot Q(X_1, \dots, X_n), \quad (7.3)$$

$$E = \theta_E \cdot E(Q), \quad (7.4)$$

$$R = \theta_R \cdot R(X_1, \dots, X_n), \quad (7.5)$$

onde θ_Q , θ_E , e θ_R representam as variáveis representativas das incertezas nos modelos de ações, estrutural e de resistência, respetivamente.

Muitas vezes a incerteza em θ_Q é desprezável ou pode ser incorporada na variável θ_E . Neste caso, na formulação do EL em consideração, são necessárias apenas duas variáveis, θ_E e θ_R , definidas de tal modo que:

$$E = \theta_E \cdot E(X_1, \dots, X_n), \quad (7.6)$$

$$R = \theta_R \cdot R(X_1, \dots, X_n). \quad (7.7)$$

A função EL será, então:

$$\begin{aligned} M &= R - E \\ &= \theta_R \cdot R(X_1, \dots, X_n) - \theta_E \cdot E(X_1, \dots, X_n). \end{aligned} \quad (7.8)$$

As variáveis θ deverão ser tratadas como variáveis básicas, devendo por isso ser acrescentadas ao vetor das variáveis básicas da função EL em causa. Assim, na formulação de um EL podemos identificar quatro categorias de variáveis básicas:

- ações e influências ambientais;
- propriedades dos materiais, incluindo solos;
- parâmetros geométricos;
- variáveis descritivas da incerteza de modelação.

7.3 Seleção de modelos probabilísticos

A seleção dos modelos probabilísticos a atribuir a cada uma das variáveis básicas deve ser feita criteriosamente, pois isso afeta de forma substancial os resultados da verificação da segurança. As médias e desvios padrão desses modelos devem ser estimados para populações criteriosamente definidas e, se possível, a partir de medições reais. Na falta de tais medições, é possível encontrar na bibliografia da especialidade recomendações para a maioria das variáveis básicas que aparecem nos problemas de segurança estrutural. O *Probabilistic Model Code* (JCSS, 2001) constitui uma boa referência nessa área e uma boa fonte de informação. Seguem-se algumas recomendações muito gerais, usualmente aceites como razoáveis.

7.3.1 Ações

Os pesos próprios de elementos estruturais e não estruturais, quantificados a partir dos pesos específicos dos respetivos materiais, são geralmente modelados pela distribuição Normal, uma vez que podem ser considerados como uma soma de pesos menores. A média do peso específico coincide geralmente com o respetivo valor nominal. Um valor típico do coeficiente de variação para materiais estruturais é de 0.05, enquanto que para materiais não estruturais é de 0.10.

As ações variáveis são frequentemente modeladas por meio de uma distribuição de máximos num determinado período de referência. A distribuição de máximos do tipo I (distribuição Gumbel) é uma das mais utilizadas. No entanto, a distribuição de máximos do tipo II (distribuição Fréchet) poderá ser mais adequada na modelação de ações variáveis diretamente relacionadas com fenómenos meteorológicos extremos (ventos ciclónicos, por exemplo).

7.3.2 Propriedades dos materiais

As propriedades dos materiais, e em particular as suas resistências, são geralmente modeladas por meio de uma distribuição Normal ou Lognormal. O modelo Lognormal apresenta a vantagem de não admitir valores negativos (o que se harmonia com as propriedades dos materiais, que são grandezas intrinsecamente positivas), mas o modelo Normal conduz a resultados do lado da segurança, e portanto, havendo dúvidas, constitui uma boa escolha. O modelo Normal é particularmente adequado na modelação de resistências de materiais dúcteis.

A distribuição Normal, porém, não deve ser usada na modelação de resistências com coeficiente de variação superior a 0.25, como ordem de grandeza, pois então a probabilidade de conduzir a valores negativos deixa de ser desprezável. Nestes casos, é preferível adotar a distribuição Lognormal.

A distribuição de Weibull (ou tipo III de mínimos) também é utilizada por vezes na modelação da resistências de materiais frágeis, particularmente nos casos em que a resistência é fortemente dependente da presença de defeitos.

O coeficiente de variação depende do material em questão. Por exemplo, para a resistência do aço (tensão de cedência) adota-se frequentemente, à falta de melhor informação, um coeficiente de variação de 0.05, embora o verdadeiro valor possa ser inferior. No caso da resistência do betão com produção sujeita a controlo de qualidade razoável, um coeficiente de variação de 0.15 é comum. No entanto, podem encontrar-se na prática betões muito heterogêneos com coeficientes de variação muito superiores.

7.3.3 Parâmetros geométricos

Em muitos estados limites, a incerteza nos parâmetros geométricos é bastante inferior à incerteza nas ações e resistências, pelo que é frequentemente desprezada. Pode suceder também que a sua incerteza já esteja incluída em outras variáveis, não havendo assim necessidade de a considerar explicitamente. Um caso típico é a área dos varões para betão armado, cuja variabilidade está incluída na variabilidade da tensão de cedência. Tal resulta do próprio processo de medição da tensão de cedência, como se explicou no Capítulo 2.

7.3.4 Variáveis descritivas da incerteza de modelação

Considere-se o modelo simbolicamente representado por $Y = \theta \cdot Y(X_1, \dots, X_n)$, onde θ é a variável destinada a corrigir os erros os erros introduzidos pelo modelo. Na exposição que segue considerar-se-á os modelos que se apresentem nessa forma (forma multiplicativa), por ser a mais comum. Para modelos que se apresentem nessa forma, a variável θ é usualmente modelada por meio de uma distribuição Lognormal.

A escolha dos valores a atribuir à média e desvio padrão de θ refletem a confiança que se tem no modelo em causa, devendo por isso ser feita caso a caso. Neste respeito convém distinguir entre erros de natureza sistemática e erros de natureza aleatória. Os primeiros ditam a exatidão do modelo e os segundos a sua precisão, como se explica seguidamente.

A média de θ constitui uma medida da *exatidão* do modelo, isto é, a sua capacidade em prever valores cuja média seja próxima do verdadeiro valor que desejamos obter. Assim, se o modelo for relativamente exato, isto é, se os erros de natureza sistemática forem relativamente baixos, a média de θ será próxima de 1.00.

O desvio padrão de θ constitui uma medida da *precisão* do modelo, isto é, a sua capacidade em prever valores com pequena dispersão em torno da média. Assim, se o modelo for relativamente preciso, isto é, se os erros de natureza aleatória forem relativamente baixos, o desvio padrão será próximo de 0.0.

Analisemos especificamente o modelo estrutural, representado simbolicamente por meio da relação funcional $E = \theta_E \cdot E(X_1, \dots, X_n)$. A variável θ_E é assim definida por:

$$\theta_E = \frac{E}{E_{\text{mod}}}, \quad (7.9)$$

onde E representa o verdadeiro valor do efeito de ação para o EL em consideração e $E_{\text{mod}} = E(X_1, \dots, X_n)$ representa o valor desse efeito predito pelo modelo. De acordo com o exposto acima, a média de θ_E traduz a exatidão do modelo e o desvio padrão a sua precisão. A Tabela 7.1 contém as recomendações do *Probabilistic Model Code* (JCSS, 2001) relativas à variável θ_E .

Conforme se observa, em todos os casos a média da variável é unitária, o que reflete a percepção de que os modelos estruturais podem em geral ser considerados exatos. Já o coeficiente de variação depende do tipo de modelo usado e do tipo de esforço avaliado. Por exemplo, no caso dos modelos de barras, o coeficiente de variação para esforços axiais é inferior ao coeficiente de variação para momentos e esforços transversos, o que reflete a percepção de que os primeiros são determinados com menor nível de incerteza. Convém, no entanto, ter presente de que se tratam apenas de recomendações, devendo por isso ser ajustadas caso a caso. Por exemplo, a determinação de esforços em estruturas isostáticas é feita sempre como menor incer-

Tabela 7.1 Modelos probabilísticos para a variável θ_E (JCSS, 2001)

Modelo estrutural	Tipo de resposta	Distribuição	Média, μ_{θ_E}	Coef. var., V_{θ_E}
Modelo de barras	Momentos	Lognormal	1.00	0.10
	Esf. axial	Lognormal	1.00	0.05
	Esf. Transverso	Lognormal	1.00	0.10
Modelo de casca	Momentos	Lognormal	1.00	0.20
	Forças	Lognormal	1.00	0.10

teza do que em estruturas hiperstáticas, pois no primeiro caso os esforços dependem apenas de equações de equilíbrio, enquanto que no segundo caso dependem também das relações constitutivas e das condições fronteira, muitas vezes modeladas de forma aproximada.

Analisemos agora o modelo de resistência, representado simbolicamente pela expressão $R = \theta_R \cdot R(X_1, \dots, X_n)$. A variável θ_R é assim definida por:

$$\theta_R = \frac{R}{R_{\text{mod}}}, \tag{7.10}$$

onde R representa o verdadeiro valor da resistência para o EL em consideração e $R_{\text{mod}} = R(X_1, \dots, X_n)$ representa o valor dessa resistência predito pelo modelo. As características probabilísticas da variável θ_R podem ser avaliadas experimentalmente (ISO 2394, 2015; EN 1990, 2002). Com efeito, supondo que um programa experimental envolve a realização de k ensaios, conduzindo à obtenção de k resistências R_1, \dots, R_k e que os valores das correspondentes resistências preditas pelo modelo são $R_{\text{mod}1}, \dots, R_{\text{mod}k}$, a expressão $\theta_R = R/R_{\text{mod}}$ permite obter k valores de θ , a partir dos quais se podem determinar as suas características probabilísticas.

Não existindo informação específica a respeito da variável θ_R , pode recorrer-se a recomendações encontradas em bibliografia da especialidade. A título de exemplo, apresenta-se na Tabela 7.2 as recomendações do *Probabilistic Model Code* (JCSS, 2001). Conforme se observa, a média recomendada para θ_R é em vários casos superior à unidade, o que reflete a percepção de que os modelos de resistência são em geral conservativos.

Tabela 7.2 Modelos probabilísticos para a variável θ_R (JCSS, 2001)

Material	Tipo de resistência	Distribuição	Média, μ_{θ_R}	Coef. var., V_{θ_R}
Aço estrutural	Flexão	Lognormal	1.00	0.05
	Esforço transverso	Lognormal	1.00	0.05
	Ligações soldadas	Lognormal	1.15	0.15
	Lig. aparafusadas	Lognormal	1.25	0.15
Betão armado	Flexão	Lognormal	1.20	0.15
	Esforço transverso	Lognormal	1.40	0.25

Os valores constantes na Tabela acima deverão ser interpretados como meras indicações, devendo ser ajustados caso a caso, em função da confiança que se tem no modelo que estivermos a empregar.

Uma vez caracterizadas todas as variáveis básicas de uma dada função EL estamos em condições de avaliar a probabilidade de se ultrapassar esse EL. Este é o problema fundamental da fiabilidade estrutural.

7.4 O problema fundamental da fiabilidade estrutural

Considere-se o EL definido pela função $M = g(X)$, com $X = (X_1, \dots, X_n)$ representando o vetor das variáveis básicas. O problema fundamental da fiabilidade estrutural consiste em avaliar a probabilidade desse EL ser ultrapassado, isto é, avaliar o integral:

$$\begin{aligned} p_f &= P(M < 0) \\ &= P[g(X) < 0] \\ &= \int \cdots \int_{X:g(X) < 0} f_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n, \end{aligned} \quad (7.11)$$

onde $f_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n)$ representa a FDP conjunta do vetor das variáveis básicas.

Note-se que, se a FDP da margem de segurança for conhecida (em geral não é), a probabilidade de falha é dada por:

$$\begin{aligned} p_f &= P(M < 0) \\ &= \int_{-\infty}^0 f_M(x) dx = F_M(0), \end{aligned}$$

onde $f_M(x)$ e $F_M(x)$ representam, respetivamente, a FDP e a FDC da margem de segurança.

Particularize-se a formulação expressa na Eq. (7.11) para o caso do problema de fiabilidade de duas variáveis, E e R , respetivamente efeito de ação e resistência correspondente. A função EL é neste caso dada por $M = g(R, E) = R - E$. Seja $f_{RE}(r, e)$ a FDP conjunta do vetor (R, E) . A probabilidade de falha é então dada por:

$$\begin{aligned} p_f &= P(M < 0) \\ &= P[g(R, E) < 0] \\ &= \iint_{(r,e):g < 0} f_{RE}(r, e) dr de. \end{aligned} \quad (7.12)$$

A Figura 7.3 representa esquematicamente o problema de fiabilidade de duas variáveis. A probabilidade de falha é dada pelo volume sob a superfície $f_{RE}(r, e)$ na região $g < 0$.

Se R e E forem independentes, então $f_{RE}(r, e) = f_R(r) f_E(e)$, onde $f_R(r)$ repre-

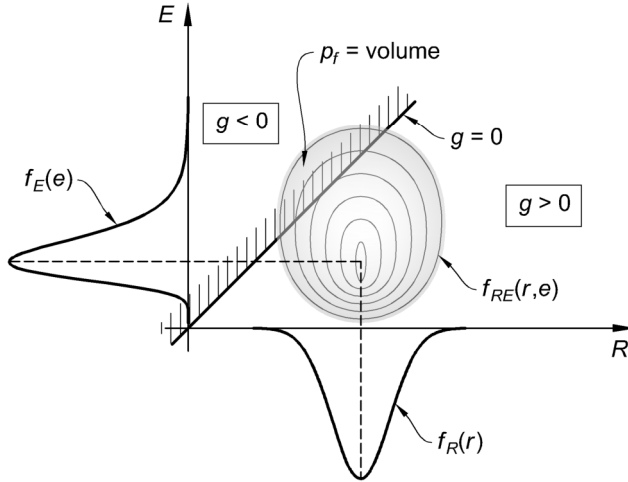


Figura 7.3 Representação gráfica do problema básico de duas variáveis. A probabilidade de falha é dada pelo volume da FDP conjunta sob o domínio a tracejado.

senta a FDP marginal de R e $f_E(e)$ a FDP marginal de E . Pode então escrever-se:

$$\begin{aligned}
 p_f &= \iint_{(r,e):e>r} f_R(r) f_E(e) drde \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^e f_R(r) f_E(e) drde \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_E(e) \int_{-\infty}^e f_R(r) drde \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_E(e) F_R(e) de,
 \end{aligned} \tag{7.13}$$

ou, de forma equivalente:

$$\begin{aligned}
 p_f &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_r^{\infty} f_R(r) f_E(e) dedr \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_R(r) \int_r^{+\infty} f_E(e) dedr \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_R(r) [1 - F_E(r)] dr \\
 &= 1 - \int_{-\infty}^{+\infty} f_R(r) F_E(r) dr.
 \end{aligned} \tag{7.14}$$

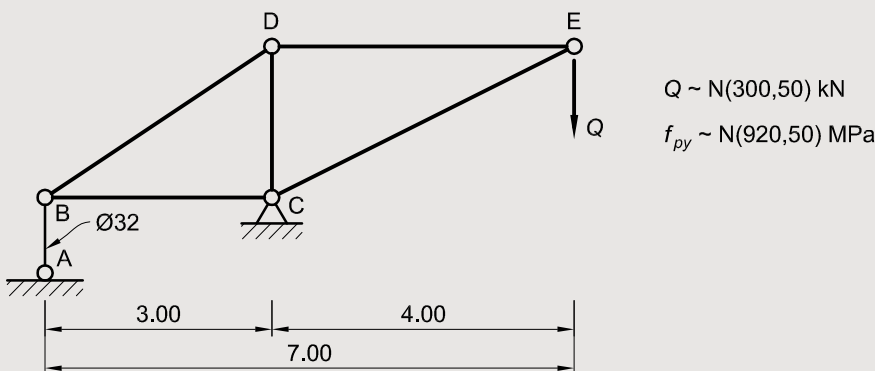
Os integrais acima, que definem a probabilidade de falha, podem ser avaliados recorrendo a um dos seguintes métodos:

- integração analítica;

- integração numérica;
- método de Monte Carlo (MC).

A integração analítica é possível em muito poucos casos. A integração numérica apresenta limitações para espaços de integração com dimensão n superior a 5, ou quando a superfície de falha $g = 0$ possui geometria complexa (Melchers, 1999). O método de MC, já explicado anteriormente, permite ultrapassar essas limitações. No exemplo que segue, avalia-se a probabilidade de falha recorrendo a esses três métodos.

Exemplo 7.1 Considere-se a estrutura representada na Figura junta, destinada à suspensão de uma carga Q . O valor da carga Q é desconhecido, sabendo-se, contudo, que tem um valor médio de 300 kN e um desvio padrão de 50 kN, e que segue aproximadamente uma lei Normal. O tirante AB é constituído por uma barra de aço de alta resistência $\phi 32$ ($A_p = 8.04 \text{ cm}^2$), cuja resistência, f_{py} , segue também uma distribuição Normal, com média 920 MPa e desvio padrão 50 MPa.



Determinar a probabilidade do tirante AB romper durante a suspensão de uma carga recorrendo aos seguintes métodos:

- a) Integração analítica.
- b) Integração numérica.
- c) Método de Monte Carlo.

Resolução

- a) Designando por N_E o esforço normal atuante no tirante e por N_R o esforço resistente, a condição de segurança é $N_E \leq N_R$, donde a margem de segurança é:

$$M = N_R - N_E,$$

em que $N_R = f_{py} A_p$. Efetuando o equilíbrio de momentos em torno de C, obtém-se $N_E = \frac{4}{3} Q$. Tem-se, pois:

$$M = f_{py} A_p - \frac{4}{3} Q.$$

A margem de segurança é assim uma combinação linear de variáveis normalmente distribuídas, pelo que é também normalmente distribuída. A média da margem de segurança é:

$$\mu_M = (8.04 \times 10^{-4})(920 \times 10^3) - \frac{4}{3} 300 = 339.68 \text{ kN},$$

e o desvio padrão é:

$$\sigma_M = \sqrt{(8.04 \times 10^{-4})^2(50 \times 10^3)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 (50)^2} = 77.85 \text{ kN}.$$

Portanto, a probabilidade do tirante romper é igual a:

$$\begin{aligned} p_f &= P(M < 0) \\ &= \Phi\left(\frac{0 - 339.68}{77.85}\right) = 6.4 \times 10^{-6}. \end{aligned}$$

Esta probabilidade foi avaliada com o seguinte código Python:

```
from scipy.stats import norm
pf = norm.cdf(0, 339.68, 77.85)
```

- b) Recorrendo à Eq. (7.13) e ao código abaixo indicado, obteve-se $p_f = 6.4 \times 10^{-6}$, e portanto o mesmo valor que o obtido na alínea anterior, como não podia deixar de ser.

```
from scipy.stats import norm
from scipy.integrate import quad

E = norm(4/3*300, 4/3*50)
R = norm(920*8.04*1e-1, 50*8.04*1e-1)

def f(x):
    return E.pdf(x)*R.cdf(x)

pf = quad(f, -1000, 1000)
```

- c) Para aplicar o método de MC, desenvolveu-se a seguinte rotina:

```
from scipy.stats import norm

nsim = 10000000
Q = norm.rvs(300, 50, nsim)
```

```

fpy = norm.rvs(920e3, 50e3, nsim)

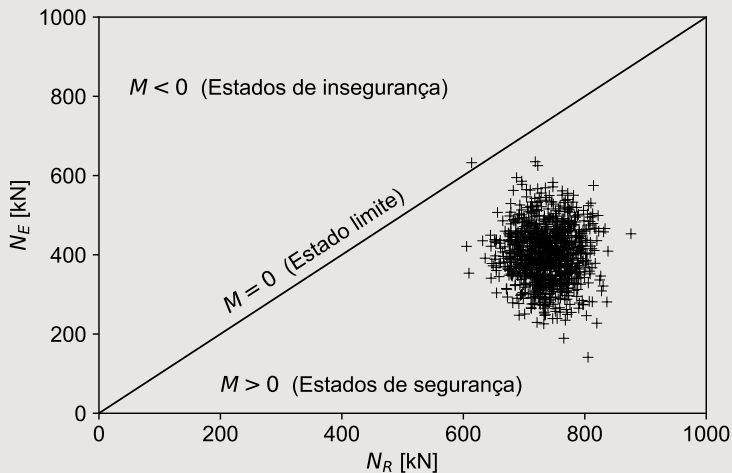
M = fpy*8.04e-4 - (4/3)*Q

pf = sum(M < 0)/nsim

```

Após ter corrido a rotina várias vezes e ter efetuado a média de p_f nessas corridas, obteve-se o mesmo resultado que o obtido com o método analítico, isto é, $p_f = 6.4 \times 10^{-6}$.

A título de referência, mostra-se na Figura seguinte a representação esquemática da aplicação do método de Monte Carlo. Cada ponto no gráfico corresponde a uma simulação. A probabilidade de falha é dada pelo número de pontos que caem na região de insegurança ($M < 0$) a dividir pelo número total de pontos.



Comentário: Neste exemplo não foram consideradas explicitamente as incertezas nos modelos de transformação, por serem pouco significativas. Com respeito, por exemplo, à incerteza no modelo estrutural, tratando-se de uma estrutura isostática, não havendo assim lugar a redistribuições de esforços, estes podem ser calculados com relativa precisão e exatidão. Com respeito ao modelo de resistência, sendo simplesmente o produto de uma tensão de cedência por uma área, também não oferece muitas dúvidas.

7.5 Interpretação da probabilidade de falha

As diferentes fontes de incerteza nos problemas de fiabilidade estrutural são agrupadas, tradicionalmente, em duas grandes categorias (Kiureghian e Ditlevsen, 2009):

- incerteza intrínseca ou aleatória;
- incerteza epistémica.

A primeira, também chamada incerteza do tipo 1, caracteriza-se pela impossibilidade de ser eliminada. Está associada a fenómenos inerentemente aleatórios, ou imprevisíveis, como a velocidade do vento em determinada localidade (que varia constantemente ao longo do tempo). A segunda, também chamada incerteza do tipo 2, está associada à limitação do conhecimento e, naturalmente, é suscetível de ser reduzida (ou mesmo eliminada) através de investigação ou recolha de mais informação.

Uma vez que a probabilidade constitui o meio por excelência de descrição de incerteza, todas as fontes de incerteza, sejam elas do tipo 1 ou do tipo 2, deverão ser modeladas por meio de distribuições de probabilidade. Embora não haja distinção na forma de modelar esses dois tipos de incerteza, é importante distinguir a sua presença, pois isso tem reflexo na interpretação das probabilidades calculadas. Com efeito, sempre que existam incertezas do tipo epistémico e estiverem disponíveis novas informações que permitam reduzi-las (ou aumentá-las), podemos efetuar uma nova estimativa da probabilidade de colapso. A probabilidade de colapso varia assim à medida que novas informações ficam disponíveis, pelo que não pode ser interpretada como frequência de colapsos. Quando muito, poderá ser interpretada como uma estimativa dessa frequência.

Além disso, a experiência tem mostrado que os colapsos estruturais devem-se em geral a erros humanos graves, que estão normalmente excluídos da teoria da fiabilidade estrutural e portanto não contemplados na estimativa da probabilidade de falha (Schneider, 2006). Assim, também por este motivo, a probabilidade de falha calculada não traduz frequência de colapsos, devendo por isso ser encarada meramente como um valor de referência, útil para efeitos comparativos e tomadas de decisão.

7.6 Índice de fiabilidade

Definiu-se anteriormente fiabilidade relativa a um EL e a um intervalo de tempo como sendo a probabilidade desse EL não ser atingido durante esse intervalo de tempo. Assim, designando a probabilidade de se atingir esse EL por p_f , a fiabilidade, que representaremos por r , é o complementar dessa probabilidade, isto é:

$$r = 1 - p_f. \quad (7.15)$$

A fiabilidade, sendo uma probabilidade, está compreendida entre 0 e 1. Por exemplo, para uma probabilidade de falha $p_f = 7.2 \times 10^{-5}$ (valor típico para EL últimos e para um período de 50 anos), a fiabilidade é $r = 1 - 7.2 \times 10^{-5} = 0.999928$ em 50 anos.

Uma outra medida de fiabilidade, muito comum na área da segurança estrutural, é dada pelo chamado *índice de fiabilidade*, representado usualmente pela letra grega β . Conforme veremos, este índice apresenta algumas propriedades com interesse, e daí a sua ampla utilização. O índice de fiabilidade é definido de tal modo que:

$$p_f = \Phi(-\beta) \quad (7.16)$$

onde Φ representa a FDC da distribuição Normal reduzida. Resolvendo a Eq. (7.16) em ordem a β , tem-se:

$$\beta = -\Phi^{-1}(p_f). \quad (7.17)$$

O índice β pode assim ser convertido em probabilidade de falha e vice-versa, constituindo por isso uma medida equivalente de fiabilidade. Por exemplo, a probabilidade $p_f = 7.2 \times 10^{-5}$ corresponde ao índice $\beta = 3.8$.

O índice de fiabilidade está compreendido entre $-\infty$ e $+\infty$, embora valores abaixo de -5 e acima de 5 correspondam a probabilidades de rotura muito próximas de 1 e muito próximas de 0, respetivamente. (Veja-se a Fig. 7.4.) Um índice $\beta = 0$ corresponde a uma probabilidade de falha de 0.5.

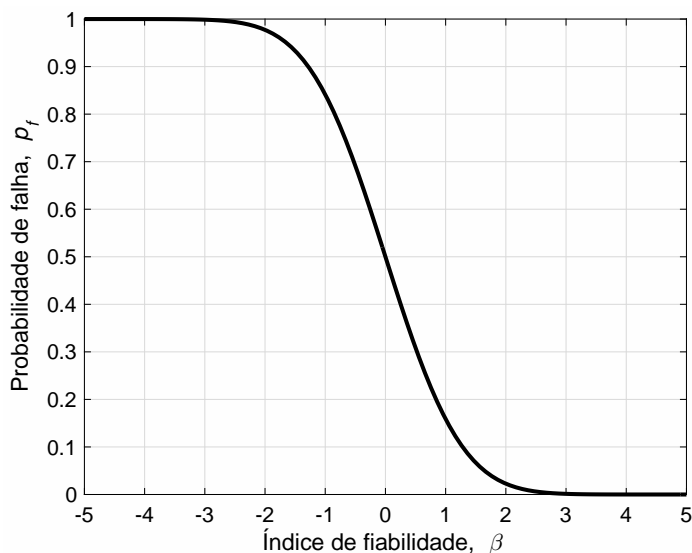


Figura 7.4 Relação entre índice de fiabilidade e probabilidade de falha.

Note-se que, para os valores típicos de β , a uma dada variação percentual de β corresponde uma variação percentual muito maior na probabilidade de falha. Na Tabela 7.3 apresenta-se, para diferentes valores de β , a variação percentual na probabilidade de falha correspondente uma variação de 5% no índice de fiabilidade. Por exemplo, um aumento de 5% num índice $\beta = 4.0$ (β passa de 4.0 para 4.2), corresponde uma redução de 58% na probabilidade de falha! Os índices 4.0 e 4.2 podem até parecer semelhantes, mas na verdade correspondem a probabilidades de falha bastante distintas, e portanto riscos muito distintos. Deve por isso ter-se algum cuidado ao interpretar variações no índice de fiabilidade.

Analisemos agora, mais de perto, o significado prático do índice de fiabilidade. Suponha-se que, para um dado EL, a margem de segurança M tem distribuição Normal, isto é, $M \sim N(\mu_M, \sigma_M)$, onde μ_M e σ_M representam, respetivamente, a média e o desvio padrão da margem de segurança. A probabilidade desse EL ser

Tabela 7.3 Variação percentual na probabilidade de falha para uma variação de 5% no índice de fiabilidade

β_1	p_{f1}	β_2	p_{f2}	$(\beta_2 - \beta_1)/\beta_1$	$(p_{f2} - p_{f1})/p_{f1}$
1.00	1.59E-01	1.05	1.47E-01	5%	-7%
1.50	6.68E-02	1.58	5.76E-02	5%	-14%
2.00	2.28E-02	2.10	1.79E-02	5%	-21%
2.50	6.21E-03	2.63	4.33E-03	5%	-30%
3.00	1.35E-03	3.15	8.16E-04	5%	-40%
3.50	2.33E-04	3.68	1.19E-04	5%	-49%
4.00	3.17E-05	4.20	1.33E-05	5%	-58%
4.50	3.40E-06	4.73	1.15E-06	5%	-66%
5.00	2.87E-07	5.25	7.60E-08	5%	-73%

atingido é então dada por:

$$\begin{aligned}
 p_f &= P(M < 0) \\
 &= \Phi\left(\frac{0 - \mu_M}{\sigma_M}\right) \\
 &= \Phi\left(-\frac{\mu_M}{\sigma_M}\right).
 \end{aligned} \tag{7.18}$$

Comparando (7.18) com (7.16) conclui-se que, para um EL cuja margem de segurança siga uma lei Normal, o índice de fiabilidade é dado por: $\beta = \mu_M/\sigma_M$. Em símbolos:

$$M \sim N(\mu_M, \sigma_M) \Rightarrow \beta = \frac{\mu_M}{\sigma_M}.$$

O índice de fiabilidade cresce assim com a média da margem de segurança e decresce com o desvio padrão.

Considere-se novamente o problema de fiabilidade de duas variáveis, com função estado limite $M = R - E$. Para alguns casos particulares de distribuições de probabilidade de E e de R é possível deduzir expressões do índice de fiabilidade β em função dos parâmetros das distribuições de E e de R . Vejamos um caso muito simples.

Suponhamos que $E \sim N(\mu_E, \sigma_E)$ e que $R \sim N(\mu_R, \sigma_R)$. Então $M \sim N$, pois a função EL em causa é uma combinação linear de variáveis Normais. Assumindo independência entre E e R , a margem M tem a seguinte média e desvio padrão:

$$\begin{aligned}
 \mu_M &= \mu_R - \mu_E, \\
 \sigma_M &= \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_E^2}.
 \end{aligned}$$

Assim,

$$\beta = \frac{\mu_M}{\sigma_M} = \frac{\mu_R - \mu_E}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_E^2}}.$$

Ou seja, no presente caso é possível expressar o índice de fiabilidade como função da média e desvio padrão das variáveis básicas do problema.

Nota histórica Deve referir-se que o índice de fiabilidade β aparece historicamente ligado à conveniência em medir a fiabilidade por meio de uma grandeza que não necessitasse do conhecimento completo das distribuições de probabilidade das variáveis básicas (já que estas podem ser difíceis de obter por falta de informação), mas apenas dos seus dois primeiros momentos (média e desvio padrão). Cornell propôs medir a fiabilidade relativa a um estado limite justamente pela quantidade $\beta = \mu_M/\sigma_M$ (Thoft-Christensen e Baker, 1982). Atualmente, é usual representar-se essa quantidade por β_C , por um lado, para a distinguir da definição (7.16) e por outro, como homenagem ao seu autor. A quantidade:

$$\beta_C = \frac{\mu_M}{\sigma_M}, \quad (7.19)$$

é conhecida hoje por *índice de Cornell* (Madsen et al., 2006). Do exposto anteriormente, podemos afirmar que:

$$M \sim N(\mu_M, \sigma_M) \Rightarrow \beta \equiv \beta_C.$$

Nos casos em que a margem de segurança M não é normalmente distribuída, o índice de Cornell já não coincide com o índice de fiabilidade, não deixando, contudo, de poder ser encarada como uma medida de fiabilidade.

A título de exemplo, determinemos β e β_C referente ao EL descrito no Exemplo 6.1 (p. 106). A probabilidade de falha obtida foi de 2.0×10^{-6} , a que corresponde $\beta = 4.61$. Para esse mesmo exemplo $\beta_C = 5.27$, que é bastante diferente da fiabilidade exata. ($\beta_C = 5.27$ corresponde $p_f = 6.8 \times 10^{-8}$!) Este exemplo mostra que o índice de Cornell pode corresponder a probabilidades de falha muito distintas das reais, podendo pois concluir-se que, como medida de fiabilidade, não é um parâmetro totalmente satisfatório. ■

Exemplo 7.2 Considere-se a função EL de duas variáveis $M = R - E$. Admita-se que ambas as variáveis R e E são Lognormais e independentes entre si.

- Desenvolver uma expressão para β em função de μ_R e V_R (média e coeficiente de variação de R) e de μ_E e V_E (média e coeficiente de variação de E).
- Determinar β para o caso $\mu_R = 2.0$; $V_R = 0.15$; $\mu_E = 1.0$; $V_E = 0.15$.
- Determinar β_C e comparar com β calculado na alínea anterior.

Resolução

- Tem-se sucessivamente:

$$\begin{aligned} p_f &= P(E > R) = P(R < E) \\ &= P(\ln R < \ln E) \quad (\text{pois o logaritmo é uma função crescente}) \\ &= P(\ln R - \ln E < 0) = P(Z < 0), \end{aligned}$$

com $Z = \ln R - \ln E$. Note-se que $\ln R \sim N$ e que $\ln E \sim N$. Por conseguinte, $Z \sim N$, pois corresponde a uma combinação linear de variáveis

Normais. Assim, $\beta = \mu_Z / \sigma_Z$. Resta, pois, calcular μ_Z e σ_Z . Tem-se:

$$\begin{aligned}\mu_Z &= \ln \left(\frac{\mu_R}{\sqrt{1 + V_R^2}} \right) - \ln \left(\frac{\mu_E}{\sqrt{1 + V_E^2}} \right) \\ &= \ln \left(\frac{\mu_R \sqrt{1 + V_E^2}}{\mu_E \sqrt{1 + V_R^2}} \right).\end{aligned}$$

Em relação a σ_Z , tem-se:

$$\sigma_Z = \sqrt{\ln(1 + V_R^2) + \ln(1 + V_E^2)}.$$

Assim,

$$\beta = \frac{\ln \left(\frac{\mu_R \sqrt{1 + V_E^2}}{\mu_E \sqrt{1 + V_R^2}} \right)}{\sqrt{\ln(1 + V_R^2) + \ln(1 + V_E^2)}}.$$

Para o caso em que o coeficiente de variação $V \leq 0.25$, são admissíveis as seguintes aproximações: $\sqrt{1 + V^2} \approx 1$ e $\ln(1 + V^2) \approx V^2$. Por conseguinte, se os coeficientes de variação do efeito de ação E e da resistência R forem ambos inferiores a 0.25, é válida a seguinte aproximação:

$$\beta \approx \frac{\ln(\mu_R / \mu_E)}{\sqrt{V_R^2 + V_E^2}}.$$

- b) Considerando os dados fornecidos, obteve-se $\beta = 3.29$, a que corresponde $p_f = 5.08 \times 10^{-4}$. (A formula aproximada dá $\beta = 3.27$ a que corresponde $p_f = 5.42 \times 10^{-4}$.)
- c) Recorrendo à definição do índice de Cornell, Eq. (7.19), vem:

$$\begin{aligned}\beta_C &= \frac{\mu_M}{\sigma_M} \\ &= \frac{\mu_R - \mu_E}{\sqrt{(V_R \cdot \mu_R)^2 + (V_E \cdot \mu_E)^2}} \\ &= 2.98.\end{aligned}$$

Este índice corresponde a uma probabilidade de falha $p_f = 14 \times 10^{-4}$, que é 2.8 vezes superior à probabilidade correta. Confirma-se mais uma vez que o índice de Cornell não é uma medida satisfatória de fiabilidade.

7.7 Fiabilidade estrutural e fator tempo

O conceito de fiabilidade está por definição associado ao fator tempo, pelo que este é indissociável dos problemas de fiabilidade. Por exemplo, a afirmação de que a fiabilidade relativa a determinado EL é de 0.999 tem pouco ou nenhum significado. É necessário especificar a que período de tempo essa fiabilidade diz respeito. Se essa fiabilidade referir-se a um período de, digamos, 50 anos, o valor 0.999 passa a ter significado: significa que a probabilidade do EL não ser atingido em 50 anos é de 0.999.

Além disso, muitas das variáveis básicas (como é o caso das ações variáveis) são por natureza funções do tempo, e por essa razão, num caso geral, são apropriadamente descritas por meio de processos estocásticos¹. Nos casos em que a deterioração dos materiais não possa ser desprezada no intervalo de tempo em consideração, até mesmo as variáveis de resistência deverão ser descritas por meio de processos estocásticos. O fator tempo está assim sempre presente nos problemas de fiabilidade estrutural.

Considere-se novamente o problema de fiabilidade de duas variáveis, E e R , a primeira representando efeito de ação e a segunda representando resistência correspondente. No caso geral, como acabamos de ver, as variáveis E e R são processos estocásticos, isto é, $E = E(t)$ e $R = R(t)$, e a probabilidade de falha no intervalo de tempo $[0, T]$ é dada por (Figura 7.5):

$$p_f(0, T) = P[E(t) > R(t) \text{ em algum instante } t \in [0, T]]. \quad (7.20)$$

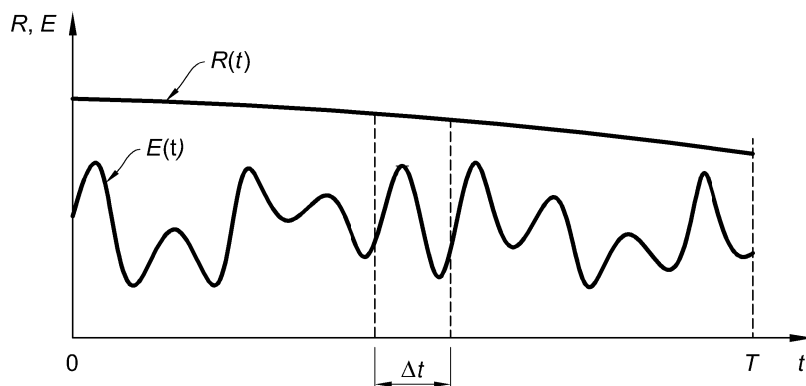


Figura 7.5 Realização particular dos processos $R(t)$ e $E(t)$. Neste caso particular não ocorreu falha estrutural, visto que em nenhum instante $E(t)$ ultrapassou $R(t)$.

O problema formulado em termos de processos estocásticos diz-se problema de fiabilidade dependente do tempo. Em muitos casos, porém, é possível substituir os processos estocásticos por simples variáveis aleatórias, tornando o problema de fiabilidade bastante mais simples. Uma forma de o fazer consiste em discretizar os

¹Um processo estocástico $X(t)$ é uma coleção de variáveis aleatórias em sucessão no tempo, cada uma possuindo a sua própria distribuição de probabilidade. Se essas variáveis possuírem a mesma distribuição ao longo do tempo, o processo diz-se *estacionário*.

processos estocásticos no tempo. Suponha-se que se deseja determinar a probabilidade de falha num intervalo de tempo específico, digamos Δt , e que nesse intervalo não há deterioração significativa dos materiais, o que equivale a assumir que R permanece constante nesse intervalo. Se o intervalo Δt não for muito grande, esta hipótese é razoável. A Figura 7.6 mostra uma realização particular dos processos $R(t)$ e $E(t)$ no intervalo Δt , tendo-se assumido R constante.

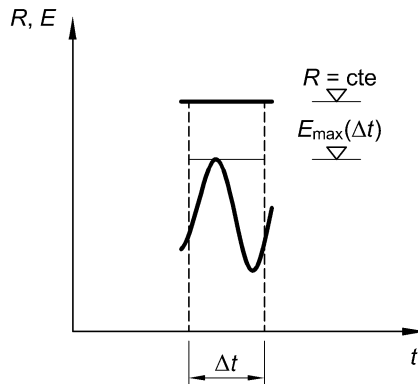


Figura 7.6 Realização particular dos processos $R(t)$ e $E(t)$ no intervalo Δt .

Observando a Figura 7.6, fica evidente que a probabilidade de falha no intervalo Δt é dada por:

$$p_f(\Delta t) = P[E_{\max}(\Delta t) > R], \tag{7.21}$$

onde $E_{\max}(\Delta t)$ representa o valor máximo de $E(t)$ no intervalo Δt . Isto significa que, para determinar tal probabilidade, não é necessário conhecer todo o processo $E(t)$ em Δt , mas apenas o seu máximo nesse intervalo. Podemos assim concluir que as distribuições de máximos (que em conjunto com as distribuições de mínimos são conhecidas por distribuições de extremos) desempenham um papel fundamental nos problemas de fiabilidade.

Analisemos agora o que se passa numa sucessão de n intervalos de tempo. Admita-se que os máximos de $E(t)$ em intervalos sucessivos são independentes², podendo as respectivas distribuições permanecer idênticas ou não. Relativamente à resistência R admita-se que existe deterioração de intervalo para intervalo (o que se traduz numa diminuição gradual da resistência), mas que dentro do intervalo de tempo Δt_i permanece constante. Estas hipóteses equivalem a substituir os processos estocásticos $E(t)$ e $R(t)$, por *processos retangulares*, ou *de valores constantes*, como indicado na Figura 7.7.

Devido à deterioração, a probabilidade de falha vai aumentando nos sucessivos intervalos de tempo. Seja $p_f(\Delta t_i)$ a probabilidade de falha no intervalo Δt_i . A

²O intervalo de tempo Δt pode ser escolhido de forma a tornar plausível a hipótese de independência. Quanto maior for o intervalo, mais plausível é tal hipótese.

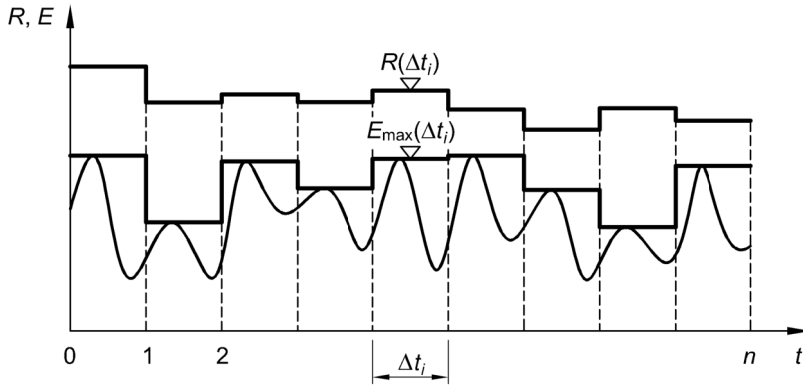


Figura 7.7 Transformação dos processos $R(t)$ e $E(t)$ em processos retangulares.

probabilidade de falha no período $[0, n]$ é então dada por:

$$\begin{aligned}
 p_f(0, n) &= 1 - P(\text{Não ocorrência de falha no intervalo } [0, n]) \\
 &= 1 - P(\text{Não ocorrência em } \Delta t_1 \cap \dots \cap \text{Não ocorrência em } \Delta t_n) \\
 &= 1 - (1 - p_f(\Delta t_1)) \times \dots \times (1 - p_f(\Delta t_n)) \\
 &= 1 - \prod_{i=1}^n (1 - p_f(\Delta t_i)).
 \end{aligned} \tag{7.22}$$

Admitiu-se independência entre não ocorrência de falha em intervalos de tempo sucessivos³. Se se admitir, além disso, que não existe deterioração ao longo do tempo e que a distribuição dos máximos de E permanece constante (processo estacionário), então a probabilidade $p_f(\Delta t_i)$ também permanece constante em sucessivos intervalos de tempo. Chamemos p_{f1} a essa probabilidade. Então, a probabilidade de falha em n intervalos de tempo é dada por $p_f(0, n) = 1 - (1 - p_{f1})^n$. Com o objetivo de aligeirar a notação, representemos $p_f(0, n)$ por p_{fn} . Assim, p_{fn} representa a probabilidade de falha em n intervalos de tempo. Podemos então escrever:

$$p_{fn} = 1 - (1 - p_{f1})^n, \tag{7.23}$$

onde p_{f1} é a probabilidade de falha em 1 intervalo de tempo, que se admite constante em sucessivos intervalos de tempo.

Observe-se que $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{fn} = 1$, conforme se pode apreciar na Figura 7.8. Resolvendo (7.23) em ordem a p_{f1} , obtém-se:

$$p_{f1} = 1 - (1 - p_{fn})^{1/n}. \tag{7.24}$$

³Note-se que esta hipótese só é razoável se as ações variáveis tiverem um peso significativo na probabilidade de falha. Se, num problema concreto, não existissem ações variáveis, a probabilidade de falha no segundo intervalo de tempo tenderia a anular-se se não tivesse ocorrido falha no primeiro intervalo de tempo, mostrando assim que, nesse caso, a não ocorrência de falha em intervalos sucessivos já não seria independente de intervalo para intervalo.

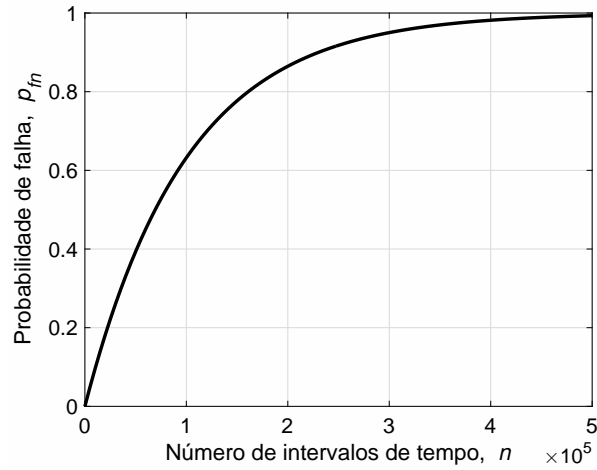


Figura 7.8 Probabilidade de falha em n intervalos de tempo, em função de n .

A Eq. (7.24) pode ser reescrita para um período de m intervalos de tempo, vindo: $p_{f1} = 1 - (1 - p_{fm})^{(1/m)}$. Substituindo este resultado na Eq. (7.23), obtém-se:

$$p_{fn} = 1 - (1 - p_{fm})^{n/m} \tag{7.25}$$

Esta expressão permite assim converter uma probabilidade de falha em m intervalos de tempo na probabilidade de falha em n intervalos de tempo. A expressão pode ser aplicada independentemente de m ser maior ou menor que n . Enfatiza-se que a expressão pressupõe que a probabilidade de falha permanece constante em sucessivos intervalos de tempo, ou seja, pressupões que:

- As ações variáveis permanecem estacionárias no tempo e a sua contribuição para os esforços totais não é muito inferior à contribuição das cargas permanentes.
- Não há deterioração dos materiais.

Para valores pequenos de probabilidade de falha, a probabilidade cresce com o tempo de forma aproximadamente linear, sendo aceitável a seguinte aproximação:

$$p_{fn} \approx \frac{n}{m} p_{fm} \tag{7.26}$$

Exemplo 7.3 Considere-se uma estrutura com uma probabilidade de colapso em 50 anos de 7.2×10^{-5} . Determinar a probabilidade de colapso nos próximos 5 anos, admitindo que não há deterioração dos materiais e que as ações permanecem estacionárias.

Resolução

No presente caso desejamos determinar p_{f5} a partir de p_{f50} . Portanto, $n = 5$ e $m = 50$. Aplicando (7.25), vem:

$$\begin{aligned} p_{f5} &= 1 - (1 - p_{f50})^{5/50} \\ &= 1 - (1 - 7.2 \times 10^{-5})^{5/50} \\ &= 7.2 \times 10^{-6}. \end{aligned}$$

Nota: No presente caso, se tivéssemos feito $p_{f5} = (5/50)p_{f50}$ teríamos obtido mesmo valor.

A Eq. (7.23) permite converter uma probabilidade de falha em 1 intervalo de tempo na probabilidade de falha em n intervalos de tempo. Deduzamos uma expressão semelhante, mas em termos de índices de fiabilidade β . Seja β_1 o índice de fiabilidade referido a 1 intervalo de tempo e β_n o índice de fiabilidade referido a n intervalos de tempo. Por definição $p_{f1} = \Phi(-\beta_1)$, e, da mesma forma, $p_{fn} = \Phi(-\beta_n)$. Substituindo estas quantidades na Eq. (7.23), e notando que $\Phi(-\beta) = 1 - \Phi(\beta)$ (Ver Figura 7.9.) vem:

$$\begin{aligned} p_{fn} &= 1 - (1 - p_{f1})^n \Leftrightarrow \Phi(-\beta_n) = 1 - (1 - \Phi(-\beta_1))^n \\ &\Leftrightarrow 1 - \Phi(\beta_n) = 1 - (1 - (1 - \Phi(\beta_1)))^n \\ &\Leftrightarrow -\Phi(\beta_n) = -(\Phi(\beta_1))^n \\ &\Leftrightarrow \Phi(\beta_n) = [\Phi(\beta_1)]^n. \end{aligned} \quad (7.27)$$

Como anteriormente, podemos deduzir uma expressão mais genérica do que esta, destinada a converter índices de fiabilidade referidos a períodos quaisquer, digamos m e n intervalos de tempo. Obtém-se a seguinte expressão (deixa-se a demonstração como exercício):

$$\beta_n = \Phi^{-1} \left([\Phi(\beta_m)]^{n/m} \right) \quad (7.28)$$

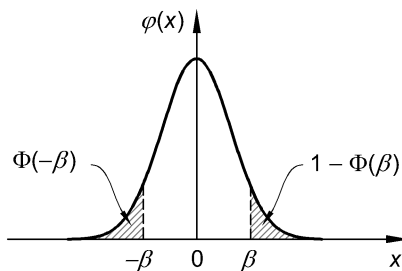


Figura 7.9 Distribuição Normal reduzida. Conforme se observa $\Phi(-\beta) = 1 - \Phi(\beta)$.

Exemplo 7.4 Determinar o índice de fiabilidade anual de uma estrutura que tem uma fiabilidade de 3.8 em 50 anos, admitindo que não há deterioração dos materiais e que as ações variáveis permanecem estacionárias.

Resolução

No presente caso desejamos determinar β_1 a partir de β_{50} . Portanto, fazendo $n = 1$ e $m = 50$ na Eq. (7.28), vem:

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \Phi^{-1} \left([\Phi(\beta_{50})]^{1/50} \right) \\ &= \Phi^{-1} \left([\Phi(3.8)]^{1/50} \right) \\ &= 4.68.\end{aligned}$$

Código Python usado:

```
from scipy.stats import norm
beta_1 = norm.ppf(norm.cdf(3.8)**(1/50))
```


Capítulo 8

Formatos de fiabilidade

A expressão «formatos de fiabilidade» refere-se aos métodos usadas na verificação da segurança das estruturas com o objetivo de as classificar como «seguras» ou como «inseguras». Já mencionámos dois importantes métodos: o método dos coeficientes parciais de segurança e o método totalmente probabilístico. Iremos agora acrescentar dois novos métodos: o método probabilístico simplificado e a avaliação de risco. Estes métodos, ou formatos, são agrupados tradicionalmente em quatro categorias, ou níveis, a saber: (1) formatos de nível I, que incluem o método dos coeficientes parciais de segurança e o método das tensões admissíveis; (2) formatos de nível II, que se caracterizam por determinar o índice de fiabilidade, β , de forma aproximada; (3) formatos de nível III, que avaliam a probabilidade de falha, p_f , de forma exata e, finalmente, (3) formatos de nível IV, que se caracterizam por fazerem uso do conceito de risco.

No presente capítulo faz-se uma breve síntese destes formatos e apresenta-se um exemplo de uma estrutura cuja segurança será avaliada recorrendo aos diferentes formatos.

8.1 Formatos de nível I

Como referido acima, os formatos de nível I incluem o método das tensões admissíveis (que têm tido uma longa utilização no dimensionamento de fundações) e o método dos Coeficientes Parciais de Segurança (CPS). No que segue, mencionaremos apenas este último, visto que o método das tensões admissíveis tenderá no curto prazo a ser totalmente substituído pelo método dos CPS.

O método dos CPS foi descrito em detalhe no Capítulo 2, de modo que faremos agora apenas breves considerações. Recorde-se que, de acordo com este método, a verificação da segurança em relação a um determinado EL consiste em satisfazer a condição:

$$E_d \leq R_d, \quad (8.1)$$

onde E_d representa o valor de dimensionamento do efeito de ação em causa, E , e R_d o valor de dimensionamento da correspondente grandeza resistente, R . Fazendo uso dos conceitos de função EL e margem de segurança, o método dos CPS pode tam-

bém ser expresso da seguinte forma alternativa: para um EL genérico representado simbolicamente pela função $M = g(X_1, \dots, X_n)$, a segurança a esse EL considera-se satisfeita se, substituindo cada variável básica X_i pelo respetivo valor de dimensionamento, X_{id} , a margem de segurança que se obtém for não negativa, isto é, a segurança encontra-se satisfeita se:

$$g(X_{1d}, \dots, X_{nd}) \geq 0 \quad (8.2)$$

Recorde-se que as variáveis básicas X_i pertencem a uma das seguintes categorias:

- ações e influências ambientais ($F_1, F_2, \dots, F_i, \dots$);
- propriedades dos materiais ($f_1, f_2, \dots, f_i, \dots$);
- parâmetros geométricos ($a_1, a_2, \dots, a_i, \dots$);
- parâmetros descritivos da incerteza nos modelos de transformação ($\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_i, \dots$).

Os valores de dimensionamento das variáveis básicas obtêm-se a partir dos respetivos valores característicos (ou outros valores representativos), majorando-os (caso das ações), ou minorando-os (caso das propriedades dos materiais) pelos respetivos coeficientes parciais de segurança. Fazendo intervir estes coeficientes na Eq. 8.2, esta toma a forma:

$$g\left(\dots, \gamma_{F_i} \psi_i F_{ik}, \dots, \frac{f_{ik}}{\gamma_{M_i}}, \dots, a_i, \dots\right) \geq 0, \quad (8.3)$$

onde:

F_{ik} é o valor característico da ação i ;

γ_{F_i} é o coeficiente parcial de segurança da ação i ;

ψ_i é o coeficiente de combinação da ação i (a aplicar apenas a ações variáveis acompanhantes);

f_{ik} é o valor característico da propriedade do material i ;

γ_{M_i} é o coeficiente parcial de segurança do material i ;

a_i é o valor do parâmetro geométrico i .

Em geral o valor de dimensionamento dos parâmetros geométricos a_i (vãos, espessuras, larguras, alturas, áreas de armadura, etc.) coincide com o valor nominal que consta nas peças desenhadas. Em relação aos parâmetros θ_i (parâmetros descritivos da incerteza nos modelos de transformação), estes não aparecem explicitamente na Eq. (8.3) visto que esta incerteza é normalmente incorporada nos coeficientes γ_F e γ_M .

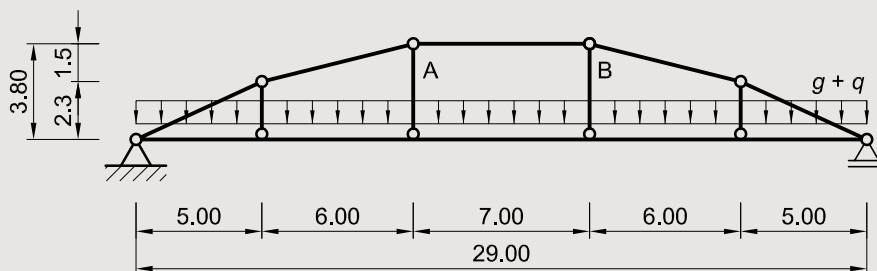
O método dos CPS é de muito fácil aplicação, mas apresenta importantes limitações. Por exemplo, o método não permite ter uma noção do risco de ocorrência de rotura na estrutura que está a ser avaliada. O engenheiro projetista, ao utilizar os coeficientes de segurança preconizados nos regulamentos, confia que a estrutura, caso verifique a segurança, é suficientemente fiável, mas na realidade desconhece quão longe está da rotura, ou quão fiável é a estrutura.

Além disso, o uso dos coeficientes de segurança constitui um modo muito simplificado de modelação de incertezas. Haverá casos em que os coeficientes de segurança são excessivos (para o nível real de incerteza), e haverá casos onde se passa o contrário. Os exemplos que iremos dar nesta secção tornarão este aspeto mais claro.

Exemplo 8.1 A Figura junta representa o modelo de cálculo de uma ponte pedonal em betão armado. Admita-se que uma inspeção à ponte revelou um padrão de fissuração acima do normal nos pendurais A e B, o que suscitou dúvidas sobre a segurança da ponte. Foi então decidido verificar a segurança ao EL de rotura dos pendurais. Uma análise da estrutura em regime elástico permitiu concluir que o esforço de tração nos referidos pendurais, em kN, é dado por:

$$N = 6.75(g + q),$$

onde g representa a carga permanente e q a carga variável atuantes no tabuleiro, ambas em kN/m.



As cargas g e q , e a resistência do tirante f_y , são variáveis básicas com as seguintes distribuições de probabilidade:

Variável	Modelo	Média	Coef. de variação
g	Normal	12.0 kN/m	0.05
q	Gumbel	6.0 kN/m	0.10
f_y	Normal	560 MPa	0.05

A distribuição de q refere-se aos máximos em 50 anos. Os pendurais A e B são armados com $4\phi 10$ ($1\phi 10 = 0.79 \text{ cm}^2$).

- Com base nas distribuições fornecidas, determinar os valores característicos das variáveis básicas, considerando: (1) o quantil 0.50 para a carga g (valor médio), (2) o quantil 0.95 para a carga q , e (3) o quantil 0.05 para a resistência do aço f_y .
- Recorrendo ao método dos CPS, verificar a segurança em relação ao EL de resistência do pendural A. Adotar os coeficientes parciais de segurança seguintes: $\gamma_g = 1.35$; $\gamma_q = 1.50$; $\gamma_M = 1.15$.

Resolução

a) Tem-se:

$$g_k = g_m = 12.0 \text{ kN/m},$$

$$q_k = 6.0 \left\{ 1 - \frac{\sqrt{6}}{\pi} (0.10) \left[0.5772 + \ln(-\ln 0.95) \right] \right\} = 7.12 \text{ kN/m},$$

$$f_{yk} = 560(1 - 1.645 \times 0.05) = 513.9 \text{ MPa}.$$

b) A condição de segurança é $N_{Ed} \leq N_{Rd}$, onde N_{Ed} representa o valor de cálculo do esforço axial no pendural e N_{Rd} representa a sua resistência. De acordo com o enunciado, o esforço axial no pendural vale $N_E = 6.75(g+q)$. Substituindo as variáveis básicas pelos respetivos valores de dimensionamento, tem-se:

$$\begin{aligned} N_{Ed} &= 6.75(\gamma_g g_k + \gamma_q q_k) \\ &= 6.75(1.35 \times 12.0 + 1.5 \times 7.12) = 181.4 \text{ kN}. \end{aligned}$$

Desprezando a resistência à tração do betão, a resistência do pendural é dada pela resistência da armadura, isto é, $N_R = f_y \times A_s$, onde $A_s = 4 \times 0.79 = 3.16 \text{ cm}^2$. Substituindo a variável básica f_y pelo respetivo valor de dimensionamento (a área da armadura, A_s , entra com o respetivo valor nominal, pelos motivos explicados anteriormente), tem-se:

$$\begin{aligned} N_{Rd} &= f_{yd} A_s = \frac{f_{yk}}{\gamma_M} A_s \\ &= \frac{513.9}{1.15} \times 3.16 \times 10^{-1} = 141.2 \text{ kN}, \end{aligned}$$

donde a segurança não se encontra satisfeita, pois $N_{Ed} > N_{Rd}$. Assim, aparentemente, as suspeitas de falta de segurança dos pendurais da ponte parecem confirmar-se.

8.2 Formatos de nível II

Os formatos de nível II baseiam-se em métodos probabilísticos aproximados. Como vimos anteriormente, o índice de fiabilidade, β , surgiu do interesse em dispor de uma grandeza capaz de medir a fiabilidade (e portanto útil para efeitos de avaliação da segurança das estruturas), mas que não necessitasse da informação probabilística completa das variáveis básicas intervenientes, visto que esta informação nem sempre está disponível.

Como vimos, dada uma função estado limite $M = g(X_1, \dots, X_n)$, Cornell propôs medir a fiabilidade pelo índice $\beta_C = \mu_M / \sigma_M$. Se a função g for linear nas variáveis básicas, o cálculo de μ_M e σ_M é imediato, e só depende das médias e variâncias das variáveis básicas (e de eventuais correlações, se existirem). Se a função g for não linear, pode-se linearizar a função (em torno, por exemplo, dos valores médios das variáveis básicas), usando a técnica descrita na secção 4.7.1 (p. 67), o que permite

estimar μ_M e σ_M e conseqüentemente obter uma expressão para β recorrendo apenas aos dois primeiros momentos das variáveis básicas (médias e variâncias). Esta é a essência do método FOSM¹, método este que pertence à categoria dos formatos de nível II. Representado o índice de fiabilidade assim obtido por β_{FOSM} , tem-se:

$$\beta_{\text{FOSM}} = \frac{g(\mu_1, \dots, \mu_n)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial X_i} \Big|_{\mu} \cdot \sigma_i \right)^2}}, \quad (8.4)$$

onde μ_i e σ_i representam, respetivamente, a média e desvio padrão da variável X_i e $\frac{\partial g}{\partial X_i} \Big|_{\mu}$ a derivada parcial da função EL em ordem a X_i , avaliada no ponto $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$.

O método FOSM permite assim obter um índice de fiabilidade sem necessidade da informação probabilística completa das variáveis básicas, mas apenas dos seus dois primeiros momentos. Vejamos um exemplo.

Exemplo 8.2 Considere-se novamente a estrutura que se analisou no exemplo anterior. Determinar o índice β_{FOSM} referente ao EL de rotura do tirante A.

Resolução

A função EL correspondente à rotura do tirante A é:

$$\begin{aligned} M &= f_y A_s - 6.75(g + q) \\ &= (3.16 \times 10^{-4})f_y - 6.75(g + q). \end{aligned}$$

Determinemos, em primeiro lugar, o somatório:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial X_i} \Big|_{\mu} \cdot \sigma_i \right)^2 &= ((3.16 \times 10^{-4})(0.05 \times 560 \times 10^3))^2 + \\ &+ ((-6.75)(0.05 \times 12.0))^2 + \\ &+ ((-6.75)(0.10 \times 6.0))^2 = 111.092. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \beta_{\text{FOSM}} &= \frac{(3.16 \times 10^{-4})(560 \times 10^3) - 6.75(12.0 + 6.0)}{\sqrt{111.092}} \\ &= 5.26. \end{aligned}$$

Embora apelativo e fácil de determinar, o índice β_{FOSM} pode corresponder a uma probabilidade de falha muito distinta da probabilidade calculada rigorosamente, tornando o método pouco atrativo. Por exemplo, o índice obtido acima ($\beta = 5.26$) corresponde a uma probabilidade de falha $p_f = \Phi(-\beta) = 0.0072 \times 10^{-5}$ e, conforme veremos na próxima secção, a verdadeira probabilidade de falha é 0.14×10^{-5} . Ou seja, o método FOSM indicou uma probabilidade aproximadamente 20 vezes inferior à

¹O nome FOSM vem da expressão inglesa *First Order Second Moment method*.

verdadeira probabilidade, e conseqüentemente um risco 20 vezes inferior ao verdadeiro risco.

O método FOSM apresenta ainda um problema sério, conhecido como o problema da falta de invariância. Para entender este problema, considere-se a função EL simples com apenas duas variáveis: $M = R - E$. Esta função pode ser reescrita de forma totalmente equivalente por $M = R/E - 1$. Com efeito:

$$\begin{aligned} p_f &= P(R - E < 0) \\ &= P\left(\frac{R}{E} - 1 < 0\right), \end{aligned}$$

assumindo, naturalmente, que $E > 0$. A função estado limite $M = R/E - 1$ tem assim à mesma fiabilidade que a função original, mas irá conduzir a um índice β_{FOSM} distinto, o que é incoerente.

Os investigadores que se dedicaram a estes assuntos sentiram assim a necessidade de obter medidas de fiabilidade mais robustas. É neste contexto que surge o chamado método FORM². Embora aproximado, e portanto enquadrado nos formatos de nível II, conduz a boas estimativas do índice de fiabilidade e não apresenta o problema mencionado acima da falta de invariância. Além disso, exige muito menos esforço computacional que o método de MC. Pela sua importância e ampla utilização, dedicaremos o próximo capítulo ao estudo deste método.

Uma vez estimado o índice de fiabilidade β referente a um dado EL, a segurança em relação a esse EL considera-se satisfeita se:

$$\beta \geq \beta_T, \quad (8.5)$$

onde β_T representa a fiabilidade mínima aceitável, por vezes também chamada fiabilidade-alvo (*Target*). No Capítulo 11 trataremos da determinação dessa fiabilidade mínima, e entenderemos a razão do nome fiabilidade-alvo. Um valor típico de β_T é 3.8 para EL últimos e 1.50 para EL de utilização.

8.3 Formatos de nível III

Nos formatos de fiabilidade de nível III procura determinar-se a probabilidade de falha diretamente a partir do integral que a define. (Ver Eq. (7.11), p. 120.) Assim, contrariamente aos métodos de nível II (que são aproximados), os métodos de nível III podem ser considerados exatos.

Uma vez estimada a probabilidade de falha p_f referente a um dado EL, a segurança em relação a esse EL considera-se satisfeita se:

$$p_f \leq p_{fT}, \quad (8.6)$$

onde p_{fT} representa a probabilidade de falha máxima aceitável, que se relaciona com β_T por meio da expressão $p_{fT} = \Phi(-\beta_T)$. Para EL últimos, um valor típico é $p_{fT} = \Phi(-3.8) = 7.2 \times 10^{-5}$ e para EL de utilização, um valor típico é $p_{fT} = \Phi(-1.5) = 0.067$.

Vimos anteriormente que a determinação de p_f pode ser efetuada por um dos seguintes métodos: (1) método analítico; (2) integração numérica ou (3) método de

²O nome FORM vem da expressão inglesa *First Order Reliability Method*.

MC. Como vimos, o método analítico é possível em muito poucos casos e a integração numérica pode suscitar dificuldades quanto o espaço de integração tem dimensão superior a 5, ou quando a superfície de falha $g(X) = 0$ possui geometria complexa (Melchers, 1999).

O método de MC, além de simples e intuitivo, permite ultrapassar as limitações mencionadas acima. Embora o método de MC seja por definição aproximado, o erro cometido pode ser reduzido tanto quanto se deseje, pelo que o método pertence à categoria dos formatos de nível III.

O método de MC apresenta, porém, uma dificuldade: como a probabilidade de falha é em geral muito pequena, é necessário um grande número de simulações para se obter uma estimativa com um erro suficientemente baixo. No Capítulo 6 deduziu-se uma expressão que permite determinar o número n de simulações requeridas para se obter, com uma confiança de 95%, um erro inferior a 5%, que se repete de seguida por comodidade:

$$n \approx 1600 \frac{1 - \hat{p}}{\hat{p}}. \quad (8.7)$$

Por exemplo, para uma probabilidade de falha de 7.2×10^{-5} , a expressão acima conduz a 22 milhões de simulações. Seria assim necessário simular a função estado limite em causa 22 milhões de vezes para se obter, com uma confiança de 95%, uma estimativa da probabilidade de falha com um erro máximo de 5%.

Nos exemplos que vimos até aqui, não se sentiu qualquer dificuldade, pois as funções EL usadas foram relativamente fáceis de avaliar, não exigindo ao computador mais do que 1 ou 2 segundos para realizar aquele número de simulações. Mas, suponhamos que em cada simulação é necessário analisar a estrutura usando um modelo mais complexo, e que tal análise demora 1 segundo. A realização de 1 milhão de simulações iria demorar 1 milhão de segundos, ou seja, 11 dias e meio, tornando o método impraticável.

Felizmente estão disponíveis técnicas de redução da variância que possibilitam uma redução muito significativa do número de simulações requeridos para se conseguir uma determinada precisão na estimativa. Duas das mais utilizadas no domínio da segurança estrutural são a chamada *amostragem de importância* e o método *hipercubo latino*. Estas e outras técnicas ultrapassam o âmbito introdutório deste livro, pelo que não serão aqui consideradas. O Método de MC que empregamos até aqui é chamado de Método de MC puro ou básico, designação esta que o permite distinguir de outros métodos de MC, nomeadamente os que empregam técnicas de redução da variância.

Apresenta-se de seguida mais um exemplo de aplicação do método de MC básico.

Exemplo 8.3 Considere-se uma vez mais a ponte pedonal que se tem vindo a analisar. Nas questões que seguem, admite-se que a probabilidade de rotura, por unidade de tempo, permanece constante ao longo do tempo, o que equivale a admitir que não há deterioração dos materiais e que as ações variáveis permanecem estacionárias ao longo do tempo.

- a) Determinar a probabilidade de rotura do pendural A nos próximos 50 anos. À base desse valor, é de considerar a estrutura segura com respeito à possibilidade de rotura do pendural nos próximos 50 anos?
- b) Determinar a probabilidade de rotura do pendural nos próximos 100 anos.

Resolução

- a) Vimos no exemplo anterior que $N_E = 6.75(g + q)$. O esforço resistente no tirante é naturalmente dado por $N_R = f_y A_p$. A condição de segurança é $N_E \leq N_R$, donde a margem de segurança é:

$$\begin{aligned} M &= N_R - N_E \\ &= f_y A_p - 6.75(g + q). \end{aligned}$$

Pretende-se avaliar a probabilidade $p_f = P(M < 0)$. O seguinte *script* Python avalia essa probabilidade recorrendo ao método de MC básico:

```
from numpy import sqrt, pi
from scipy.stats import norm, gumbel_r as gumb

As = 4*0.79*1e-4

mg = 12.0;   Vg = 0.05;   sg = Vg*mg
mq = 6.0;    Vq = 0.10;   sq = Vq*mq
mfy = 560e3; Vfy = 0.05; sfy = Vfy*mfy

nsim = 10000000

g = norm.rvs(mg, sg, nsim)

loc = mq - sqrt(6)*(0.5772/pi)*sq
scale = sqrt(6)*sq/pi
q = gumb.rvs(loc, scale, nsim)

fy = norm.rvs(mfy, sfy, nsim)

M = fy*As - 6.75*(g + q)

pf = sum(M < 0)/nsim
```

Recorrendo a esta rotina obteve-se $p_f = 0.14 \times 10^{-5}$. Como a distribuição de q refere-se aos máximos em 50 anos, essa probabilidade pode ser interpretada como a probabilidade de rotura em 50 anos. Considerando o valor habitual $p_{fT} = 7.2 \times 10^{-5}$ para EL últimos, é de considerar a estrutura segura. (Recordamos que esta estrutura não verificou a segurança aplicando os coeficientes de segurança habituais.) A probabilidade $p_f = 0.14 \times 10^{-5}$ corresponde a $\beta = 4.68$

- b) Para calcular a probabilidade de falha nos próximos 100 anos, temos duas possibilidades. Uma possibilidade consiste em determinar os novos parâmetros da distribuição Gumbel (u e α) referente aos máximos em 100

anos, recorrendo às seguintes expressões (Ver Anexo B.5, p. 235.):

$$\begin{aligned}\alpha_{100} &= \alpha_{50} = \alpha, \\ u_{100} &= u_{50} + (1/\alpha) \ln(100/50).\end{aligned}$$

Outra possibilidade, mais simples ainda, consiste em usar a Eq. (7.25) com $n = 50$ e $m = 100$. Vem:

$$\begin{aligned}p_{f100} &= 1 - (1 - p_{f50})^{100/50} \\ &= 1 - (1 - 0.14 \times 10^{-5})^2 \\ &= 0.28 \times 10^{-5}.\end{aligned}$$

Ambas as metodologias dão o mesmo resultado. Conclui-se assim que a probabilidade de falha em 100 anos aumenta sensivelmente para o dobro da probabilidade de falha em 50 anos.

Comentário: No presente exemplo não foram consideradas quaisquer incertezas nos modelos de transformação empregues. Recorde-se que, numa dada função EL, intervêm essencialmente três tipos de modelos: modelos que transformam variáveis básicas em ações; modelos que transformam ações em efeitos de ações e modelos que transformam variáveis básicas em resistências. Quanto ao primeiro tipo, não houve necessidade de usar nenhum, pois as ações consideradas, g e q , são, elas próprias, variáveis básicas. Quanto ao segundo tipo, utilizou-se o seguinte modelo $N_E = 6.75(g + q)$, que transforma ações no efeito de ação pretendido (esforço axial no pendural). Esse modelo foi obtido por meio de uma análise elástica da estrutura e, naturalmente, origina alguma incerteza, em virtude do comportamento não linear da estrutura. No entanto, visto que os pendurais serão, com forte probabilidade, os primeiros elementos a atingir o estado limite (como se concluiu pela inspeção ao estado atual da estrutura, onde se detetou um padrão de fissuração fora do normal), os esforços a que ficarão sujeitos tenderão a migrar para outras partes da estrutura (devido à diminuição de rigidez axial causada pela fissuração), tornando-se inferiores aos esforços elásticos. O modelo estrutural usado (modelo elástico) pode assim ser considerado conservativo do ponto de vista dos esforços nos pendurais, pelo que se julgou não ser necessário modelar especificamente a incerteza em tal modelo. Relativamente ao modelo que transforma variáveis básicas em resistências, a simplicidade do modelo empregue, $N_R = f_y A_s$, sugere uma muito reduzida incerteza, pelo que também não se considerou necessário modela-la especificamente.

O exemplo que acabámos de analisar confirma uma conclusão que já tirámos anteriormente: pode acontecer que uma estrutura não verifique a segurança segundo o método dos CPS e ainda assim possua fiabilidade suficiente. Se uma estrutura existente não cumprir os critérios de segurança segundo o método dos CPS, não devemos concluir logo que a estrutura necessita de ser reforçada. Como os trabalhos de reforço são em geral muito onerosos, poderá justificar-se uma análise mais rigorosa da segurança, recorrendo por exemplo a uma análise probabilística.

No exemplo acima constatou-se que os coeficientes de segurança empregues não traduziram corretamente os níveis de incerteza implícitos nas distribuições de proba-

bilidade usadas (foram excessivos). Fica assim evidente a limitação dos coeficientes de segurança como meio de modelar as incertezas nos problemas de segurança. Haverá casos em que tais coeficientes são excessivos, podendo também haver casos onde se passa o contrário.

No Capítulo 6 aprendemos como efetuar uma análise de sensibilidade com o método de MC. Trata-se de uma análise com muito interesse no âmbito da segurança de estruturas existentes. Tomemos como exemplo a estrutura da ponte pedonal que temos vindo a estudar. Admita-se que se deseja efetuar uma nova estimativa da probabilidade de rotura do pendural procurando obter mais informação a respeito das variáveis básicas do problema (g , q e f_y), nomeadamente obter mais informação a respeito das suas médias e desvios padrão. Dessas três variáveis, qual ou quais delas deveríamos privilegiar no esforço de obter mais informação? A resposta obtém-se por meio de uma análise de sensibilidade do problema. Esta análise permite determinar quais são as variáveis que mais contribuem para a incerteza da margem de segurança, medida através da respetiva variância. No capítulo acima referido introduzimos a conceito de *coeficiente de sensibilidade*, ω_i^2 , que mede a fração da variância da função $M = g(X_1, \dots, X_n)$ que é devida à variável X_i .

No exemplo que temos vindo a estudar, a função EL de rotura do tirante é $M = f_y A_s - 6.75(g + q)$. Efetuando uma análise de sensibilidade a esta função obtiveram-se os coeficientes de sensibilidade seguintes:

$$\omega_g^2 = 0.15, \quad \omega_q^2 = 0.15, \quad \omega_{f_y}^2 = 0.70,$$

cuja soma é igual 1, como seria de esperar, por se tratar de uma função EL que é linear nas variáveis básicas. Assim, no presente caso, podemos afirmar que 15% da variância de M é atribuída a g , 15% a q e 70% a f_y . Visto que a variância de uma variável constitui uma medida da sua incerteza, podemos concluir que a resistência do aço, f_y , é claramente a variável que mais contribui para a incerteza na margem de segurança, pelo que seria esta a variável a privilegiar se fosse decidido investigar a estrutura a fim de se obter mais informação.

8.4 Formatos de nível IV

8.4.1 Conceito de risco

Os formatos de nível IV referem-se aos métodos de fiabilidade que fazem uso do conceito de risco. O risco de um acontecimento adverso é o produto da probabilidade de ocorrência desse acontecimento pelas suas consequências. Existem outras definições mais gerais de risco (ISO 31000, 2009), mas esta é a mais usada no âmbito da segurança estrutural (ISO 13824, 2009; EN 1991-1-7, 2006). Assim, dada uma estrutura e um acontecimento adverso em potencial (ocorrência de um EL último, por exemplo), o risco R_f desse acontecimento é definido por:

$$R_f = p_f \cdot C_f, \quad (8.8)$$

onde p_f é a probabilidade de ocorrência do acontecimento e C_f as suas consequências. O risco é expresso nas mesmas unidades que as consequências, por exemplo em valor monetário.

Repare-se que o risco pode ser encarado como o custo esperado de rotura. Por exemplo, se p_f referir-se à probabilidade anual de rotura, então o risco representa

o custo que certamente pagaríamos em média, todos os anos, se tivéssemos muitas estruturas iguais em funcionamento.

8.4.2 Dimensionamento ótimo

O conceito de risco permite formular e resolver vários problemas úteis na área da segurança estrutural. Por exemplo, podemos determinar o índice de fiabilidade ótimo e o correspondente dimensionamento, que poderá então ser considerado como o dimensionamento ótimo da estrutura. É lógico considerar que o dimensionamento ótimo é o que minimiza o custo total da estrutura em análise.

O custo total da estrutura deve incluir, naturalmente, o custo associado ao risco de rotura, dado pela Eq. (8.8), que pode ser maior ou menor, mas nunca é zero. Designando por z um determinado parâmetro de dimensionamento, o custo total, por vezes também designado *custo generalizado*, é dado pela soma das seguintes parcelas:

$$C_g(z) = C_i(z) + C_m(z) + p_f(z) \cdot C_f, \quad (8.9)$$

onde $C_i(z)$ representa os custos iniciais (projeto + construção ou reabilitação) e $C_m(z)$ os custos de manutenção. O parâmetro z é por vezes chamado variável de decisão. De um ponto de vista racional, o valor ótimo de z é o que corresponde ao custo total mínimo. No Capítulo 11 vamos usar a Eq. (8.9) para determinar a fiabilidade ótima de uma estrutura, isto é, a fiabilidade que minimiza o custo total.

Numa perspetiva mais genérica, o conceito de risco pode ser empregue num problema de decisão formulado em termos de análise custo-benefício, procurando-se maximizar a diferença entre o benefício e o custo, isto é, maximizar a seguinte quantidade, designada *utilidade*:

$$U(z) = B(z) - C_g(z), \quad (8.10)$$

onde $B(z)$ representa os benefícios que se espera obter com a estrutura em causa. No âmbito da segurança estrutural, os benefícios não dependem geralmente do parâmetro de dimensionamento z , isto é, são idênticos para os diferentes valores z , de modo que maximizar $U(z)$ equivale a minimizar o custo C_g . Neste caso, a análise custo-benefícios resume-se simplesmente a um problema de minimização de custos.

8.4.3 Avaliações de risco

No caso de estruturas que envolvam riscos fora do comum, ou com consequências potencialmente catastróficas, poderá haver conveniência em avaliar a segurança em relação a um EL — ou mais genericamente em relação a um evento adverso —, não por se comparar a probabilidade de ocorrência desse evento com uma probabilidade previamente aceite como máxima admissível, mas por se comparar o risco desse evento com o risco previamente aceite como máximo admissível, ou máximo tolerável. A condição de segurança formulada em termos de risco é pois:

$$R_f \leq R_{tol}, \quad (8.11)$$

onde R_f representa o risco estimado, calculado pela Eq. (8.8), e R_{tol} representa o risco máximo tolerável. Se o risco estimado ultrapassar o valor máximo tolerável, há duas formas de o reduzir: aumentar a fiabilidade da estrutura (reduzir p_f) em relação ao EL em questão, ou implementar medidas suscetíveis de mitigar as consequências envolvidas (reduzir C_f).

A especificação do risco máximo tolerável baseia-se em geral no chamado princípio ALARP (*As Low As Reasonably Practicable*), que se esquematiza na Figura 8.1. Conforme se observa, podemos identificar três zonas de risco:

- Uma zona onde o risco é baixo, devendo por isso ser aceite sem qualquer restrição.
- Uma zona intermédia, onde o risco é aceitável, mas a sua aceitação deve ser acompanhada de medidas que o reduzam segundo o que for razoavelmente praticável.
- Uma zona onde o risco é demasiado elevado, sendo por isso inaceitável (a não ser em casos muito excecionais).

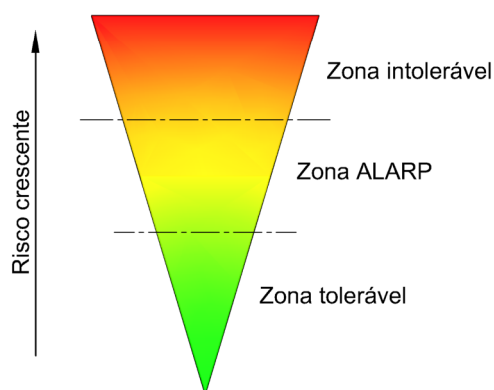


Figura 8.1 Tolerabilidade ao risco e princípio ALARP (*As Low As Reasonably Practicable*).

A formulação que acabámos de expor, embora consistente, não é usual no âmbito da verificação da segurança de estruturas correntes. Tal deve-se ao facto das probabilidades máximas admissíveis para as situações comuns estarem relativamente bem estabelecidas (e até regulamentadas, conforme veremos no Capítulo 11) e conduzirem geralmente a riscos muito baixos, não havendo por isso necessidade de quantificar explicitamente as consequências envolvidas. No entanto, em situações em que estejam envolvidos riscos fora do comum, pode justificar-se a realização de uma *avaliação de risco*. Tais avaliações podem ter interesse em estruturas vulneráveis à ocorrência de certos acidentes com consequências potencialmente severas, por exemplo a ocorrência de uma explosão seguida de incêndio numa fábrica de pirotecnia, ou a colisão de uma embarcação contra um pilar de uma ponte sobre um rio navegável.

Tipicamente uma avaliação de risco compreende as seguintes etapas:

1. Especificação dos objetivos da avaliação e identificação clara do sistema que vai ser avaliado, incluindo as suas fronteiras.
2. Identificação criteriosa dos perigos e cenários adversos em potencial (no fundo, identificar o que pode vir a correr mal).
3. Análise do risco, isto é, caracterização das probabilidades e consequências de cada cenário adverso identificado na etapa anterior.

4. Avaliação do risco (entendido como o produto das probabilidades pelas consequências) e análise da sua aceitabilidade.
5. Conclusões da avaliação, incluindo proposta de medidas razoáveis tendentes a reduzir o risco (se estivermos na zona ALARP).

A identificação de todas as fontes de perigo (etapa 2) é de crucial importância numa avaliação de risco bem feita. Existem metodologias disponíveis que ajudam a sistematizar o processo de identificação de tais fontes, de que são exemplos as técnicas conhecidas pelas designações HAZOP e FMEA, entre outras³.

A análise do risco (etapa 3) pode ser qualitativa ou quantitativa. A análise quantitativa é mais objetiva, mas também bastante mais trabalhosa em comparação com a análise qualitativa. A determinação das probabilidades de falha do sistema podem ser efetuadas com o auxílio de ferramentas tais como as *árvores de falha* ou os *diagramas de blocos*, entre outros⁴.

Muitas vezes, porém, não é possível realizar uma análise quantitativa, seja porque não existem dados estatísticos suficientes para uma quantificação fidedigna das probabilidades, seja porque as consequências são difíceis de quantificar. Neste caso pode realizar-se uma análise qualitativa, na qual a descrição das probabilidades e consequências é feita através de termos mais ou menos subjetivos, tais como: muito baixas, baixas, médias, altas e muito altas (EN 1991-1-7, 2006). A análise da aceitabilidade do risco pode ser feita com o auxílio de uma matriz de risco, como a indicada na Figura 8.2.

Consequências	Muito altas					
	Altas					
	Médias					
	Baixas					
	Muito baixas					
		Muito baixa	Baixa	Média	Alta	Muito alta
		Probabilidade				

Figura 8.2 Exemplo de uma matriz gradativa de risco. A zona ALARP corresponde à zona a amarelo. (Adaptado da EN 1991-1-7 (2006), Anexo B.)

De referir ainda que poderá haver situações em que seja prático transferir o risco para uma companhia de seguros, que aceita cobri-lo em troca de uma remuneração, em geral na forma de um prémio anual. O próximo exemplo ilustra a ideia dos seguros.

³O estudo destas técnicas está fora do âmbito da presente publicação.

⁴O estudo destas ferramentas está fora do âmbito da presente publicação.

Exemplo 8.4 Considere-se uma vez mais a ponte pedonal que temos vindo a analisar. A probabilidade de rotura do pendural A (estado limite identificado como crítico) em 50 anos foi estimada em 0.14×10^{-5} . Admita-se que, em caso de rotura, a despesa estimada é de 10 milhões de unidades monetárias (um). Determinar o valor anual de um seguro que estaríamos dispostos a pagar a uma companhia de seguros que aceitasse cobrir o risco em questão.

Resolução

Começa-se por determinar a probabilidade de falha anual:

$$\begin{aligned} p_{f1} &= 1 - (1 - p_{f50})^{1/50} \\ &= 1 - (1 - 0.14 \times 10^{-5})^{1/50} \\ &= 2.8 \times 10^{-8}. \end{aligned}$$

Estaríamos assim dispostos a pagar a uma companhia de seguros um prémio anual de: $2.8 \times 10^{-8} \times 10^7 = 0.28$ um/ano.

Uma análise de risco é mais abrangente e robusta do que uma análise de fiabilidade, visto que, para além do cálculo de probabilidades de eventos adversos, envolve também a quantificação das suas consequências. Além disso, uma análise de risco permite incorporar fontes de perigo normalmente não incluídas numa análise de fiabilidade, como por exemplo erros humanos graves ou certo tipo de acidentes. Trata-se de uma área de grande interesse, mas muito vasta e claramente fora do âmbito da presente publicação. Não lhe faremos por isso referência adicional. O leitor interessado encontra com facilidade muita literatura dedicada ao Risco, incluindo Normas. Veja-se por exemplo as Normas ISO 31000 (2009) e ISO 13824 (2009), esta última dedicada especificamente às avaliações de risco envolvendo estruturas.

Capítulo 9

Método FORM

Como vimos no capítulo anterior, o método FORM faz parte dos formatos de fiabilidade de nível II, caracterizados por serem formatos probabilísticos aproximados. Apesar do método não conduzir a valores exatos do índice de fiabilidade, o erro é em geral pequeno. Além disso, comparativamente com o método de MC, o método FORM exige muito menos esforço computacional. Estas duas características (erro pequeno e baixo esforço computacional) tornaram o método muito popular, pelo que se justifica a sua consideração aqui. A ampla aceitação do método também se deve aos conceitos úteis que lhe estão associados, nomeadamente o conceito de ponto de dimensionamento. O método FORM oferece ainda uma metodologia simples para a calibração de coeficientes parciais de segurança. Daremos conta de tudo isso no presente capítulo.

9.1 Descrição do método

Considere-se a função estado limite $M = g(X_1, X_2)$, linear nas variáveis X_1 e X_2 , definida por:

$$M = a_0 + a_1X_1 + a_2X_2.$$

Admita-se que:

$$X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1); \quad X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2); \quad \text{Cov}(X_1, X_2) = \sigma_{12}^2.$$

Como g é uma combinação linear de variáveis Gaussianas, a margem de segurança, M , é também Gaussiana, donde o índice de fiabilidade relativamente aquele EL é:

$$\beta = \frac{\mu_M}{\sigma_M} = \frac{a_0 + a_1\mu_1 + a_2\mu_2}{\sqrt{a_1^2\sigma_1^2 + a_2^2\sigma_2^2 + 2a_1a_2\sigma_{12}^2}}. \quad (9.1)$$

Faça-se agora a transformação $X_i \rightarrow Z_i$, tal que:

$$Z_i = \frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i} \quad \Leftrightarrow \quad X_i = \mu_i + \sigma_i Z_i.$$

Naturalmente $Z_i \sim N(0,1)$. O espaço das novas variáveis, Z_1 e Z_2 , diz-se *espaço normalizado*. Escreva-se agora a função g neste novo espaço:

$$\begin{aligned} M = g(X_1, X_2) &= a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 \\ &= a_0 + a_1(\mu_1 + \sigma_1 Z_1) + a_2(\mu_2 + \sigma_2 Z_2) \\ &= a_0 + a_1 \mu_1 + a_1 \sigma_1 Z_1 + a_2 \mu_2 + a_2 \sigma_2 Z_2 \\ &= g_Z(Z_1, Z_2). \end{aligned}$$

A função g_Z , que continua a ser linear, representa assim a função EL transformada no espaço normalizado, e, naturalmente:

$$\begin{aligned} p_f = P(M < 0) &= P[g(X_1, X_2) < 0] \\ &= P[g_Z(Z_1, Z_2) < 0]. \end{aligned}$$

A Figura 9.1 representa esquematicamente a obtenção do espaço normalizado.

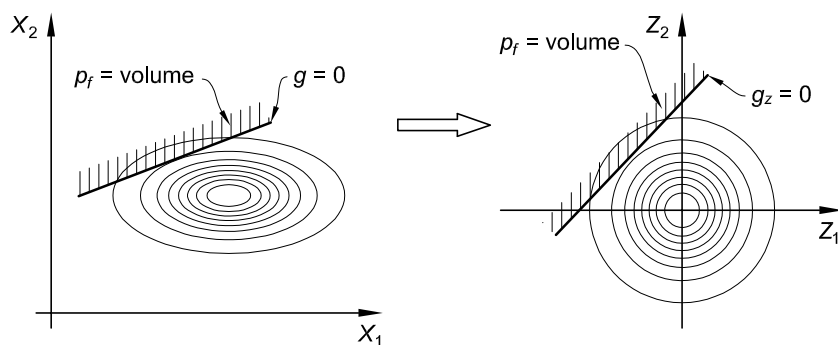


Figura 9.1 Obtenção do espaço normalizado. A probabilidade de falha (dada pelo volume da FDP conjunta na região de falha) é idêntica num espaço e noutro.

Calculemos agora a distância do ponto $(0,0)$ do espaço normalizado à reta $g_Z = 0$. Como se sabe, a distância de um ponto de coordenadas (x_1, y_1) à reta $ax + by + c = 0$ é dada por:

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

onde, a distância pretendida é igual a:

$$d = \frac{a_0 + a_1 \mu_1 + a_2 \mu_2}{\sqrt{a_1^2 \sigma_1^2 + a_2^2 \sigma_2^2}}. \quad (9.2)$$

Comparando (9.2) com (9.1), constata-se que d coincide exatamente com β no caso em que as variáveis X_1 e X_2 são independentes (caso em que $\sigma_{12} = 0$). Este resultado foi obtido para o espaço bi-dimensional, mas é generalizável ao espaço n -dimensional.

Assim, em resumo, quando uma função EL: (1) é uma função linear nas variáveis básicas, (2) estas são normais e (3) independentes entre si, verifica-se que o índice de fiabilidade β coincide com a distância da origem do espaço normalizado à superfície $g_Z = 0$ (chamada, recorde-se, superfície de rotura).

A Figura 9.2 mostra a representação gráfica deste resultado para o caso bi-dimensional. Observando a Figura, notamos que o ponto P assinalado (cuja distância à origem coincide com o índice de fiabilidade) é o ponto da superfície de rotura com maior densidade de probabilidade, correspondendo assim ao ponto mais provável para início de uma eventual rotura. Esse ponto é designado *ponto de dimensionamento*.

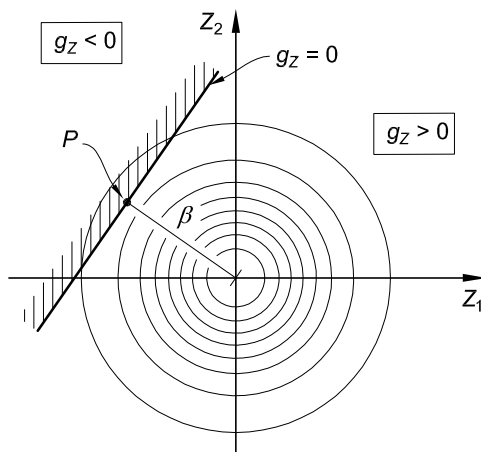


Figura 9.2 Interpretação geométrica do índice de fiabilidade. O ponto P assinalado designa-se por ponto de dimensionamento.

Enfatiza-se que o índice de fiabilidade só coincide com a distância da origem do espaço normalizado à superfície $g_Z = 0$ quando esta é linear. Para que essa superfície seja linear, é necessário que a superfície $g = 0$ seja também linear e, simultaneamente, as variáveis básicas sejam normalmente distribuídas. Quando uma destas condições não se cumpre (o que, aliás, corresponde à situação típica), a distância da origem do espaço normalizado à superfície $g_Z = 0$ já não coincide com o índice de fiabilidade β , mas pode ser encarada como uma aproximação a esse índice. O método FORM usa justamente essa distância, que representaremos por β_{FORM} , como aproximação de β , sendo portanto um método aproximado¹. A Figura 9.3 ilustra o erro cometido pelo método FORM, em geral pequeno.

Do exposto acima, podemos concluir que, quanto maior for a não linearidade da função EL, maior é o erro cometido pelo método FORM. Note-se, porém, que o grau de linearidade da função EL é importante apenas na vizinhança do ponto de dimensionamento, porque é essa a zona que mais contribui para a probabilidade de falha. Isto significa que a função EL até pode ser fortemente não linear e ainda assim o erro cometido ser pequeno, bastando para tal que a não linearidade ocorra numa zona afastada do ponto de dimensionamento.

Em resumo, a essência do método FORM consiste em encontrar o ponto da superfície $g_Z = 0$ mais próximo da origem do espaço normalizado e estimar o índice de fiabilidade a partir da distância desse ponto à origem. O problema da determinação

¹A ideia de definir β como a distância da origem do espaço normalizado à superfície $g_Z = 0$, é devida a Hasofer e Lind (Thoft-Christensen e Baker, 1982), razão por que β_{FORM} também se representa por β_{HL} .

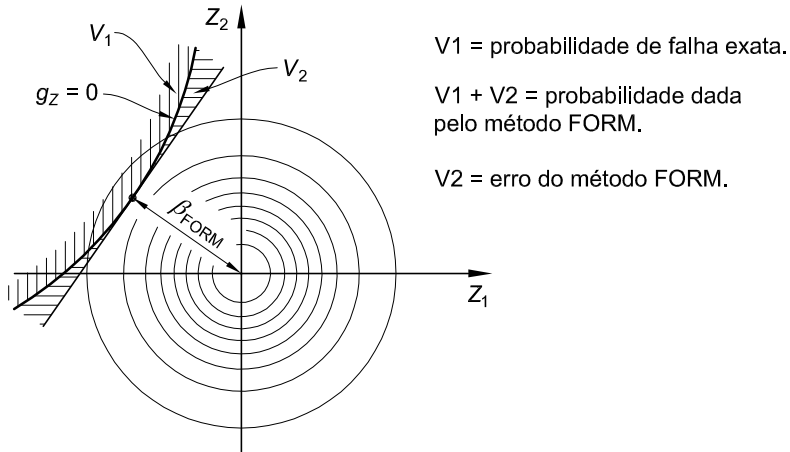


Figura 9.3 Erro cometido pelo método FORM.

do índice β_{FORM} pode assim ser encarado como um problema de otimização (minimização duma distância, neste caso), podendo ser formulado da seguinte forma (Figura 9.4):

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && d = \sqrt{z_1^2 + \dots + z_n^2}, \\ &\text{sujeito a} && g_Z(z_1, \dots, z_n) = 0. \end{aligned}$$

Representaremos as coordenadas do ponto de dimensionamento por (z_{1d}, \dots, z_{nd}) .

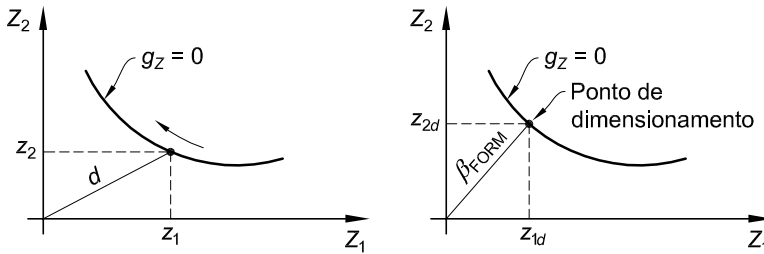


Figura 9.4 O método FORM consiste em encontrar o ponto da superfície $g_Z = 0$ para o qual a distância $d = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$ seja mínima. Essa distância define o índice β_{FORM} .

Sintetiza-se de seguida a sequência de cálculo envolvida na aplicação do método FORM. Dada uma função estado limite $M = g(X_1, \dots, X_n)$, pretende-se estimar $p_f = P[g(X_1, \dots, X_n) < 0]$. Proceda-se assim:

1. Transforma-se as variáveis X_i nas variáveis Z_i , caracterizadas por serem independentes entre si e terem distribuição Normal reduzida, isto é, $Z_i \sim N(0, 1)$. O espaço das novas variáveis (Z_1, \dots, Z_n) diz-se espaço normalizado. A Superfície de rotura $g(X_1, \dots, X_n) = 0$ deverá então ser reescrita neste novo espaço, obtendo-se a superfície $g_Z(Z_1, \dots, Z_n) = 0$.

2. Determina-se o ponto da superfície $g_Z(Z_1, \dots, Z_n) = 0$ mais próximo da origem, recorrendo a um algoritmo de otimização. O ponto assim determinado designa-se por ponto de dimensionamento e a distância desse ponto à origem define o índice β_{FORM} .
3. Estima-se $p_f \approx \Phi(-\beta_{\text{FORM}})$.

Naturalmente interessa examinar como se pode realizar a transformação referida no passo 1, isto é, a transformação $X_i \rightarrow Z_i$ tal que $Z_i \sim N(0, 1)$. Quando as variáveis básicas são independentes, a variável Z_i obtém-se da variável X_i de tal modo que:

$$\begin{aligned} \Phi(Z_i) = F_{X_i}(X_i) &\Leftrightarrow Z_i = \Phi^{-1}(F_{X_i}(X_i)) \\ &\Leftrightarrow X_i = F_{X_i}^{-1}(\Phi(Z_i)), \end{aligned} \tag{9.3}$$

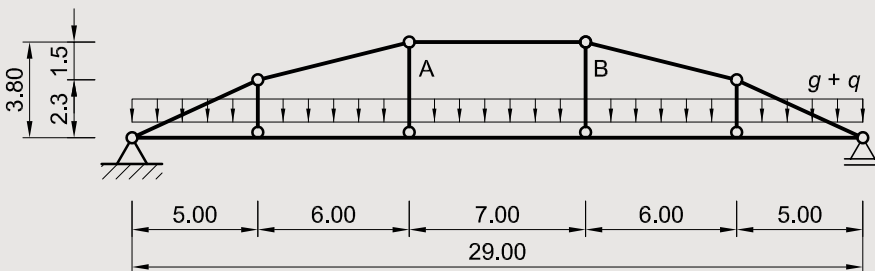
onde $F_{X_i}(\cdot)$ representa a FDC da variável X_i . Um caso particular desta transformação é quando $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i)$. Neste caso, atendendo a que $F_{X_i}(X_i) = \Phi\left(\frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i}\right)$, a transformação simplifica-se, vindo:

$$Z_i = \frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i} \Leftrightarrow X_i = \mu_i + \sigma_i Z_i. \tag{9.4}$$

Quando as variáveis básicas X_i são dependentes, é necessário recorrer a outras transformações. Por exemplo, se as variáveis forem Normais (e correlacionadas entre si), usa-se uma transformação baseada numa decomposição Choleski da matriz de correlação das variáveis básicas. Se não forem Normais, usa-se habitualmente a transformação de Rosenblat, ou a transformação de Nataf, dependendo do modo como foi definida a dependência entre as variáveis básicas. Explicações pormenorizadas destas transformações encontram-se nas referências Madsen et al. (2006) e Ditlevsen e Madsen (1996).

O próximo exemplo mostra como aplicar o método FORM recorrendo ao Python. O problema de otimização descrito acima será resolvido usando a função `minimize()` do módulo `scipy.optimize`.

Exemplo 9.1 Considere-se novamente a ponte pedonal analisada no capítulo anterior, cujos dados se repetem aqui por comodidade. Recorde-se que uma inspeção à ponte revelou um padrão de fissuração acima do normal nos pendurais A e B, o que suscitou dúvidas sobre a segurança da ponte. Foi então decidido verificar a segurança ao EL de rotura dos pendurais.



Os pendurais A e B são armados com $4\phi 10$ ($1\phi 10 = 0,79 \text{ cm}^2$). Uma análise da estrutura em regime elástico linear permitiu concluir que o esforço de tração

nos referidos pendurais, em kN, é dado por: $N = 6.75(g + q)$. As cargas g e q , e a resistência do tirante f_y têm as distribuições indicadas na quadro seguinte. A distribuição de q refere-se aos máximos em 50 anos.

Variável	Modelo	Média	Coef. de variação
g	Normal	12.0 kN/m	0.05
q	Gumbel	6.0 kN/m	0.10
f_y	Normal	560 MPa	0.05

Desenvolver uma rotina Python para a determinação do índice de fiabilidade referente ao EL de rotura do tirante A pelo método FORM.

Resolução

O vetor das variáveis básicas é o vetor $X = (g, q, f_{py})$. A seguinte rotina implementa o método FORM recorrendo à função `minimize()` do módulo `scipy.optimize`:

```

from numpy import sqrt, pi
from scipy.stats import norm, gumbel_r as gumb
from scipy.optimize import minimize

def funobj(z):
    d = sqrt(sum(z**2))
    return d

def sbjto(z):
    g = norm.ppf(norm.cdf(z[0]), mg, sg)
    q = gumb.ppf(norm.cdf(z[1]), loc, scale)
    fy = norm.ppf(norm.cdf(z[2]), mfy, sfy)
    M = fy*As - 6.75*(g + q)
    return M

As = 4*0.79*1e-4
mg = 12.0;   sg = 0.05*mg
mq = 6.0;   sq = 0.10*mq
mfy = 560e3; sfy = 0.05*mfy
loc = mq - sqrt(6)*(0.5772/pi)*sq
scale = sqrt(6)*sq/pi

cons = {'type':'eq', 'fun':sbjto}
z0 = [.0, .0, .0]
res = minimize(funobj, z0, method='SLSQP', constraints=cons)

z = res.x
beta = res.fun
pf = norm.cdf(-beta)

```

A rotina devolve as coordenadas do ponto z (ponto da superfície de rotura mais próximo da origem) e a respetiva distância à origem, que coincide com o índice de fiabilidade β . Obteve-se $\beta_{\text{FORM}} = 4.71$, a que corresponde $p_f = 0.12 \times 10^{-5}$.

Comentário: Recordamos que a probabilidade de falha exata, calculada com o método de MC, foi de 0.14×10^{-5} , a que corresponde $\beta = -\Phi^{-1}(0.14 \times 10^{-5}) = 4.68$. Os valores são bastante próximos, podendo concluir-se que o método FORM forneceu uma boa estimativa.

9.2 Coeficientes de sensibilidade FORM

Um conceito muito útil associado ao método FORM é o conceito de *coeficiente de sensibilidade*. As coordenadas z_{1d}, \dots, z_{nd} do ponto de dimensionamento podem ser vistas como as componentes de um vetor cujo comprimento é igual a β_{FORM} . Assim, a componente z_{id} do ponto de dimensionamento pode ser expressa como $z_{id} = \alpha_i \beta_{\text{FORM}}$, em que o coeficiente α_i representa o coseno diretor da componente i , estando por isso compreendido entre -1 e 1 . (Ver Figura 9.4.)

Esta consideração sugere a seguinte definição: dada uma função estado limite $M = g(X_1, \dots, X_n)$, chama-se coeficiente de sensibilidade FORM da variável X_i ao coeficiente definido por:

$$\alpha_i = -\frac{z_{id}}{\beta_{\text{FORM}}} \quad (9.5)$$

em que z_{id} é a componente i do ponto de dimensionamento no espaço normalizado e β_{FORM} é o índice de fiabilidade obtido pelo método FORM relativo ao EL em consideração. O sinal «-» foi introduzido de forma a que os α_i sejam negativos para ações e positivos para resistências.

Para além de estarem compreendidos entre -1 e 1 , estes coeficientes gozam da seguinte propriedade: para um EL com n variáveis básicas, verifica-se que:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = 1. \quad (9.6)$$

Com efeito, visto que $z_{id} = -\alpha_i \beta$, podemos escrever:

$$\begin{aligned} z_{id}^2 = (-\alpha_i \beta)^2 &\Rightarrow \sum_{i=1}^n z_{id}^2 = \sum_{i=1}^n (-\alpha_i \beta)^2 \\ &\Leftrightarrow \beta^2 = \beta^2 \sum_{i=1}^n (-\alpha_i)^2 \\ &\Leftrightarrow 1 = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2. \end{aligned} \quad (9.7)$$

Examinemos mais de perto o significado dos coeficientes de sensibilidade α_i . Notando que as componentes z_{id} do ponto de dimensionamento podem ser expressas

como $z_{id} = -\alpha_i \beta_{\text{FORM}}$, podemos concluir que cada uma dessas componentes corresponde a uma fração de β_{FORM} , sendo α_i o valor dessa fração relativa à componente i . Assim, o coeficiente α_i pode ser encarado como uma medida da contribuição da componente i (e portanto da variável X_i) para a fiabilidade estimada, β_{FORM} . Uma variável com coeficiente de sensibilidade elevado é uma variável com contribuição significativa, ou com impacto significativo, na fiabilidade estimada. Qualquer redução na sua incerteza produzirá alteração significativa na fiabilidade estimada.

Os coeficientes de sensibilidade têm por isso grande interesse prático. Por exemplo, suponhamos que, após se obter uma primeira estimativa da fiabilidade de uma estrutura em avaliação, foi decidido colher informação adicional com o objetivo de melhorar essa estimativa. As considerações acima mostram que, para efeitos de colheita de informação adicional, deve-se privilegiar as variáveis com coeficiente de sensibilidade elevado, pois são essas as variáveis para as quais a fiabilidade é mais sensível.

Uma vez determinado o índice de fiabilidade e as coordenadas z_{id} do ponto de dimensionamento, os coeficientes de sensibilidade α_i poderão ser calculados recorrendo diretamente Eq. (9.5). Vejamos um exemplo.

Exemplo 9.2 Considerando uma vez mais o exemplo da ponte pedonal, determinar os coeficientes de sensibilidade FORM de cada uma das variáveis básicas do EL correspondente à rotura do tirante A. Comentar os valores obtidos.

Resolução

Para resolver a questão formulada, acrescentou-se as seguintes instruções à rotina Python apresentada no exemplo anterior:

```
(...)  
alpha = -z/beta  
alpha2 = alpha**2
```

Obtiveram-se os seguintes valores:

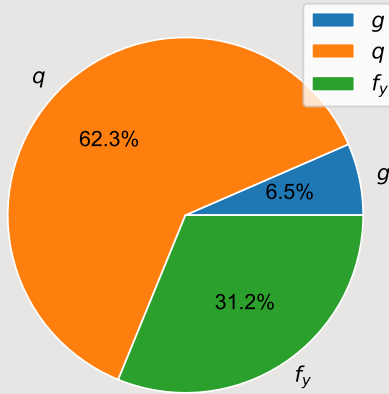
$$\alpha_g = -0.256; \quad \alpha_q = -0.789; \quad \alpha_{f_{py}} = 0.558;$$

cujos quadrados valem:

$$\alpha_g^2 = 0.065; \quad \alpha_q^2 = 0.623; \quad \alpha_{f_{py}}^2 = 0.312.$$

Podemos assim concluir que a carga q é a variável básica com maior impacto na fiabilidade estimada, seguida da resistência do aço f_y e finalmente a carga g .

É usual exibir os quadrados dos coeficientes de sensibilidade (cuja soma é igual a 1) na forma de um diagrama circular, como se exemplifica na Figura seguinte:



Este diagrama foi desenhado com o auxílio do seguinte código:

```
fig, ax = plt.subplots()
labels = '$g$', '$q$', '$f_y$'
ax.pie(alpha2, labels=labels, autopct='%1.1f%%',
wedgeprops={'linewidth': 1, 'edgecolor': 'white'})
ax.legend()
```

Recorda-se de seguida os coeficientes de sensibilidade que se obteve com o método de MC neste mesmo exemplo:

$$\omega_g^2 = 0.15, \quad \omega_q^2 = 0.15, \quad \omega_{f_y}^2 = 0.70.$$

Conforme se observa, estes coeficientes não coincidem com os coeficientes de sensibilidade FORM, mas não tinham de coincidir, pois têm significados diferentes. Enquanto que estes últimos traduzem o impacto de cada variável básica na fiabilidade estimada, os primeiros traduzem a contribuição de cada variável na variância da função EL em causa.

Apresenta-se de seguida uma expressão que permite o cálculo manual dos α_i para o caso particular em que as variáveis X_i da função EL em apreço são todas Normais. Seja $M = g(X_1, \dots, X_n)$ uma função EL, na qual $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i)$. O coeficiente de sensibilidade FORM da variável X_i é então dado por:

$$\alpha_i = \frac{\left. \frac{\partial g}{\partial X_i} \right|_d \cdot \sigma_i}{\sqrt{\sum_{j=1}^n \left(\left. \frac{\partial g}{\partial X_j} \right|_d \cdot \sigma_j \right)^2}} \tag{9.8}$$

onde as derivadas parciais deverão ser calculadas no pondo de dimensionamento. Esta expressão mostra que o coeficiente de sensibilidade de uma variável é tanto maior

quanto maior for a taxa de variação da margem de segurança na vizinhança do ponto de dimensionamento e tanto maior quanto maior for o respectivo desvio padrão. Para que uma variável possua um coeficiente de sensibilidade significativo, é necessário que ambas as quantidades (taxa de variação da margem de segurança e desvio padrão) sejam significativas.

Nota Vejamos como se pode obter a expressão (9.8). Em primeiro lugar, multiplicando ambos os membros de (9.7) por β_{FORM} , vem:

$$\begin{aligned}\beta_{\text{FORM}} &= \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \beta_{\text{FORM}} \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \alpha_i \beta_{\text{FORM}} \\ &= - \sum_{i=1}^n \alpha_i z_{id},\end{aligned}\tag{9.9}$$

ou seja, β_{FORM} pode ser decomposto numa soma de n parcelas $\alpha_i z_{id}$, em correspondência com as n variáveis básicas da função EL em apreço.

Por outro lado, sabe-se que o método FORM substitui a função EL por uma função linear na vizinhança do ponto de dimensionamento, ou seja, substitui a função EL em apreço pelo desenvolvimento em série de Taylor da função em torno do ponto de dimensionamento e desprezando os termos não lineares. Assim, no método FORM a função EL g_Z é expressa por:

$$g_Z(Z_1, \dots, Z_n) = g_Z(z_{1d}, \dots, z_{nd}) + \sum_{i=1}^n \left((Z_i - z_{id}) \frac{\partial g_Z}{\partial Z_i} \Big|_d \right).\tag{9.10}$$

Trata-se da equação de um hiperplano tangente à função EL no ponto de dimensionamento. Repare-se que $g_Z(z_{1d}, \dots, z_{nd}) = 0$, uma vez que o ponto de dimensionamento pertence à superfície $g_Z = 0$ (superfície de rotura). Assim, a Eq. (9.10) simplifica-se, vindo:

$$g_Z(Z_1, \dots, Z_n) = \sum_{i=1}^n \left((Z_i - z_{id}) \frac{\partial g_Z}{\partial Z_i} \Big|_d \right).\tag{9.11}$$

A superfície de rotura ($g_Z = 0$) é então dada por:

$$\sum_{i=1}^n \left((Z_i - z_{id}) \frac{\partial g_Z}{\partial Z_i} \Big|_d \right) = 0.\tag{9.12}$$

A distância do ponto $(0, \dots, 0)$ a essa superfície, que define β_{FORM} , é igual a:

$$\beta_{\text{FORM}} = \frac{- \sum_{i=1}^n \left(z_{id} \cdot \frac{\partial g_Z}{\partial Z_i} \Big|_d \right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g_Z}{\partial Z_i} \Big|_d \right)^2}}.\tag{9.13}$$

Comparando a Eq. (9.13) com a Eq. (9.9), resulta imediatamente que:

$$\alpha_i = \frac{\left. \frac{\partial g_Z}{\partial Z_i} \right|_d}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\left. \frac{\partial g_Z}{\partial Z_i} \right|_d \right)^2}}. \quad (9.14)$$

Ora, aplicando a regra da derivação da função composta, tem-se:

$$\left. \frac{\partial g_Z}{\partial Z_i} \right|_d = \frac{\partial g_Z}{\partial X_i} \cdot \frac{\partial X_i}{\partial Z_i}. \quad (9.15)$$

Considerando agora que todas as variáveis X_i são normalmente distribuídas, podemos escrever $X_i = \mu_i + \sigma_i Z_i$, donde $\frac{\partial X_i}{\partial Z_i} = \sigma_i$. Substituindo este resultado em (9.15) e considerando que $\frac{\partial g_Z}{\partial X_i} = \frac{\partial g}{\partial X_i}$ (uma vez que $g_Z(Z_1, \dots, Z_n) = g(X_1, \dots, X_n)$), vem

$$\left. \frac{\partial g_Z}{\partial Z_i} \right|_d = \frac{\partial g}{\partial X_i} \cdot \sigma_i, \quad (9.16)$$

o que, por substituição em (9.14), nos permite obter o resultado pretendido, expresso na Eq. (9.8). ■

Enfatiza-se que o resultado expresso em (9.8) só pode ser aplicado caso as variáveis básicas da função EL em questão sejam todas Gaussianas.

9.3 Valores de dimensionamento FORM

Uma aplicação prática do método FORM consiste na determinação direta de valores de dimensionamento sem necessidade de explicitar valores característicos e coeficientes parciais de segurança. Conforme vimos, o ponto de dimensionamento FORM corresponde ao ponto da superfície de falha onde é mais provável que se dê o início da rotura. O valor das variáveis nesse ponto corresponde assim ao valor mais provável que cada variável terá quando a rotura se inicia, podendo ser adotado como valor de dimensionamento. Suponhamos que se acabou de determinar, para um dado EL, o índice de fiabilidade β e as componentes z_{id} do ponto de dimensionamento. Essas componentes estão referidas ao espaço normalizado, mas são facilmente convertidas no espaço original, bastando para o efeito aplicar a Eq. (9.3). O valor de dimensionamento da variável X é assim dado por²:

$$X_d = F_X^{-1}(\Phi(-\alpha_X \beta)) \quad (9.17)$$

onde α_X é o coeficiente de sensibilidade FORM da variável X .

A partir das inversas das FDC (Ver Anexo B), a Eq. (9.17) permite obter expressões para a determinação de valores de dimensionamento de variáveis básicas com

²Comparando a Eq. (9.17) com a definição de quantil p de uma variável aleatória ($X_p = F_X^{-1}(p)$), conclui-se que o valor de dimensionamento FORM de uma variável pode ser encarado como o quantil $\Phi(-\alpha \beta)$ dessa variável. Por exemplo, considere-se uma variável de resistência que, num dado EL, possui um coeficiente de sensibilidade $\alpha = 0.80$. Para um índice de fiabilidade $\beta = 3.8$, o valor de dimensionamento dessa variável corresponde ao quantil $p = \Phi(-0.80 \times 3.8) \approx 0.001$.

modelos probabilísticos específicos. A Tabela 9.1 mostra as expressões que se obtêm para três importantes modelos probabilísticos: Normal, Lognormal e Gumbel. As expressões da Tabela podem ser usadas para determinar diretamente o valor de dimensionamento de uma dada variável básica, sem necessidade de explicitar o valor característico e o coeficiente parcial de segurança. Este método de determinação de valores de dimensionamento é conhecido como *método dos valores de dimensionamento*.

Tabela 9.1 Expressões do valor de dimensionamento FORM para modelos probabilísticos comuns em segurança estrutural

Modelo	$X_d = F_X^{-1}(\Phi(-\alpha_X \beta))$
Normal	$X_d = \mu_X - \alpha_X \beta \sigma_X$
Lognormal	$X_d = \frac{\mu_X}{\sqrt{1 + V_X^2}} \cdot \exp\left(-\alpha_X \beta \sqrt{\ln(1 + V_X^2)}\right)$ $\approx \mu_X \cdot \exp(-\alpha_X \beta V_X), \text{ para } V_X \leq 0.25$
Gumbel	$X_d = \mu_X - \frac{\sqrt{6}}{\pi} \sigma_X [0.5772 + \ln(-\ln \Phi(-\alpha_X \beta))]$

As expressões que constam na Tabela 9.1 mostram que, dada uma variável básica interveniente num determinado EL, uma vez atribuído um modelo probabilístico a essa variável, o respetivo valor de dimensionamento fica definido, uma vez fixados:

- a média e desvio padrão da variável (μ_X e σ_X);
- o índice de fiabilidade pretendido para o EL em causa (β);
- o coeficiente de sensibilidade da variável (α_X).

O índice de fiabilidade β a usar nas expressões acima pode ser encarado como o índice de fiabilidade objetivo, geralmente especificado nos regulamentos modernos de segurança, como é o caso dos Eurocódigos. No Capítulo 11 veremos as recomendações habituais para o índice β .

Relativamente ao coeficiente α_X , que mede o impacto da variável X na fiabilidade estimada, o seu valor varia de EL para EL. No entanto, é possível identificar certos valores típicos para as situações mais comuns. A norma ISO 2394 (2015) tipifica os valores que se reproduzem na Tabela 9.2, chamados valores padrão.

Tabela 9.2 Valores padrão de α especificados na ISO 2394 (2015)

Variável básica	α
Ação dominante (para o EL em apreço)	-0.70
Restantes ações (ações acompanhantes).....0.40(-0.70).....	-0.28
Resistência dominante (para o EL em apreço)	0.80
Restantes parâmetros de resistência.....0.40(0.80).....	0.32

Note-se que esses valores são em geral conservativos. Considere-se, por exemplo, um EL constituído por apenas duas variáveis: uma ação e uma resistência. Naturalmente a ação, por ser única, é a ação dominante, e o mesmo se passa com a

resistência. Usando então os valores constantes na Tabela 9.2, tem-se, para esse EL: $(-0.70)^2 + (0.8)^2 = 1.13$, soma esta que, sendo superior a 1.00, mostra que os valores -0.70 e 0.80 são conservativos quando usados em conjunto. Se tivermos mais do que duas variáveis, o grau de conservadorismo aumenta.

Os valores que constam na Tabela 9.2 só devem ser usados se, para o EL em causa (ISO 2394, 2015):

$$0.16 < \frac{\sigma_E}{\sigma_R} < 6.6, \quad (9.18)$$

onde σ_E e σ_R representam os desvios padrão, respetivamente, da ação dominante e da resistência dominante. Se esta condição não for satisfeita, poderá utilizar-se $\alpha = \pm 1.0$ para a variável com o maior desvio padrão, e $\alpha = \pm 0.40$ para as restantes³.

O uso dos valores padrão dos coeficientes de sensibilidade (Tabela 9.2) permite-nos determinar facilmente valores de dimensionamento. Vejamos um exemplo.

Exemplo 9.3 Considere-se uma laje onde atua uma carga cujos máximos anuais têm uma média de 1.75 kN/m^2 e um coeficiente de variação de 0.15.

- Determinar o valor de dimensionamento da carga assumindo uma distribuição Gumbel. Adotar um índice de fiabilidade em 50 anos de 3.8 e um coeficiente de sensibilidade igual a -0.70 . Assumir que este coeficiente aplica-se aos máximos da carga em 50 anos.
- Determinar o coeficiente parcial de segurança implícito no valor de dimensionamento calculado na alínea anterior.

Resolução

- Começa-se por determinar a média e desvio padrão dos máximos em 50 anos. Recorde-se que o desvio padrão da distribuição Gumbel é invariante com o período de referência. Assim, recorrendo às formulas da distribuição Gumbel do Anexo B, nomeadamente a Eq. (B.60) (p. 237) tem-se:

$$\begin{aligned} \sigma_{50} &= \sigma_1 = 0.15 \times 1.75 = 0.263 \text{ kN/m}^2, \\ \mu_{50} &= 1.75 + \frac{\sqrt{6}}{\pi} (0.263) \ln 50 = 2.55 \text{ kN/m}^2. \end{aligned}$$

O valor de dimensionamento é então dado por:

$$\begin{aligned} q_d &= 2.55 - \frac{\sqrt{6}}{\pi} (0.263) [0.5772 + \ln(-\ln \Phi(0.7 \times 3.8))] \\ &= 3.57 \text{ kN/m}^2. \end{aligned}$$

- A resposta a esta questão depende do quantil e período de referência associados ao valor característico. Por exemplo, assumindo que o valor ca-

³Para ações $\alpha < 0$ e para resistências $\alpha > 0$.

racterístico corresponde ao quantil 0.95 dos máximos em 50 anos, vem:

$$\begin{aligned} q_k &= 2.55 - \frac{\sqrt{6}}{\pi}(0.263)[0.5772 + \ln(-\ln 0.95)] \\ &= 3.04 \text{ kN/m}^2. \end{aligned}$$

O coeficiente parcial de segurança implícito no valor de dimensionamento é então:

$$\gamma_f = \frac{q_d}{q_k} = \frac{3.57}{3.04} = 1.17.$$

Assumindo agora um valor característico correspondente ao quantil 0.98 dos máximos anuais, tem-se:

$$\begin{aligned} q_k &= 1.75 - \frac{\sqrt{6}}{\pi}(0.263)[0.5772 + \ln(-\ln 0.98)] \\ &= 2.43 \text{ kN/m}^2. \end{aligned}$$

Neste caso, o coeficiente parcial de segurança implícito no valor de dimensionamento seria:

$$\gamma_f = \frac{q_d}{q_k} = \frac{3.57}{2.43} = 1.47.$$

Comentário: Como se acaba de ver, o coeficiente de segurança implícito num determinado valor de dimensionamento depende do quantil usado na quantificação do valor característico da variável em causa. Conforme dissemos anteriormente, os quantis usados na quantificação dos valores característicos (tipicamente 0.95 para ações e 0.05 para resistências), são perfeitamente convencionais. Na verdade poderíamos usar quaisquer outros quantis, desde que, naturalmente, os coeficientes de segurança fossem ajustados de forma a manter os valores de dimensionamento e consequentemente a fiabilidade pretendida.

Este breve exemplo deixa antever as potencialidades do método FORM como ferramenta de calibração de coeficientes parciais de segurança, assunto que analisaremos na próxima secção.

9.4 Calibração de coeficientes parciais de segurança

Conforme vimos, dado um EL qualquer, o método FORM permite determinar o valor de dimensionamento de cada uma das variáveis básicas que compõem esse EL. (Ver Eq. (9.17).) Ora, uma vez fixado o critério de quantificação do valor característico de cada uma das variáveis básicas do EL em consideração, podemos determinar facilmente o coeficiente parcial de segurança implícito em cada valor de dimensionamento FORM. Por exemplo, para uma variável básica X representando uma ação, o valor de dimensionamento é, como sabemos, dado por: $X_d = \gamma_f X_k$, donde o coeficiente parcial de segurança γ_f pode ser calibrado a partir da expressão:

$$\gamma_f = \frac{X_d}{X_k} = \frac{F_X^{-1}(\Phi(-\alpha_X \beta))}{X_k}, \quad (9.19)$$

onde β é o índice de fiabilidade pretendido para o EL em consideração e α_X o coeficiente de sensibilidade da variável X obtido pelo método FORM.

Da mesma forma, para uma variável básica X representando uma resistência, o valor de dimensionamento é, como sabemos, dado por: $X_d = X_k/\gamma_m$, donde o coeficiente parcial de segurança γ_m pode ser calibrado a partir da expressão:

$$\gamma_m = \frac{X_k}{X_d} = \frac{X_k}{F_X^{-1}(\Phi(-\alpha_X \beta))}, \quad (9.20)$$

onde, mais uma vez, β é o índice de fiabilidade pretendido para o EL em consideração e α_X o coeficiente de sensibilidade obtido pelo método FORM. Vejamos um exemplo.

Exemplo 9.4 Considerando uma vez mais o exemplo da ponte pedonal que temos vindo a analisar, calibrar os coeficientes parciais de segurança das três variáveis básicas do EL em consideração (rotura do tirante A) de modo a que o índice de fiabilidade desse EL seja de 3.8 em 50 anos. Adotar os seguintes valores característicos (determinados no Problema 8.1, p. 139):

$$g_k = 12.0 \text{ kN/m}, \quad q_k = 7.12 \text{ kN/m}, \quad f_{yk} = 513.9 \text{ MPa}.$$

Resolução

Para resolver o problema proposto, desenvolveu-se o *script* Python que se apresenta de seguida, semelhante ao *script* do Exemplo 9.1 (p. 155).

```

from numpy import sqrt, pi
from scipy.stats import norm, gumbel_r as gumb
from scipy.optimize import minimize

def funobj(z):
    d = sqrt(sum(z**2))
    return d

def sbjto(z):
    g = norm.ppf(norm.cdf(z[0]), mg, sg)
    q = gumb.ppf(norm.cdf(z[1]), loc, scale)
    fy = norm.ppf(norm.cdf(z[2]), mfy, sfy)
    M = fy*As - 6.75*(g + q)
    return M

factor = .9145
As = (4*0.79*1e-4)*factor

mg = 12.0;   sg = 0.05*mg
mq = 6.0;   sq = 0.10*mq
mfy = 560e3; sfy = 0.05*mfy

loc = mq - sqrt(6)*(0.5772/pi)*sq
scale = sqrt(6)*sq/pi

```

```

cons = {'type':'eq', 'fun':sobjto}
z0 = [.0, .0, .0]
res = minimize(funobj, z0, method='SLSQP', constraints=cons)

z = res.x
beta = res.fun
print('\nbeta = ', beta)

alpha = -z/beta
print('\nalpha = ', alpha)

gd = norm.ppf(norm.cdf(-alpha[0]*beta), mg, sg)
gamma_g = gd/12.0

qd = gumb.ppf(norm.cdf(-alpha[1]*beta), loc, scale)
gamma_q = qd/7.12

fyd = norm.ppf(norm.cdf(-alpha[2]*beta), mfy, sfy)
gamma_m = 513.9e3/fyd

print('\ngamma_g =', gamma_g)
print('gamma_q =', gamma_q)
print('gamma_m =', gamma_m)

```

Na listagem acima, a instrução `factor = 0.9145` define o fator a aplicar à área da armadura (que é o parâmetro de dimensionamento principal do EL em apreço) de modo a que o índice de fiabilidade seja de aproximadamente 3.8.

Obtiveram-se os seguintes coeficientes parciais de segurança:

$$\gamma_G = 1.06; \quad \gamma_Q = 1.20; \quad \gamma_M = 1.04.$$

Estes coeficientes parciais de segurança conduzem, assim, a um índice de fiabilidade $\beta = 3.8$ em 50 anos.

Comentários:

- (1) Os coeficientes que acabámos de determinar são inferiores aos habituais: $\gamma_G = 1.35$, $\gamma_Q = 1.50$ e $\gamma_M = 1.15$. Podemos assim concluir que estes seriam excessivos para os níveis de incerteza do EL em apreço.
- (2) Como mencionado anteriormente, a incerteza nos modelos de transformação implícitos na função EL em apreço é desprezável, pelo que não foi aqui considerada. No Capítulo 13 veremos como incorporar esta incerteza nos valores finais dos coeficientes parciais de segurança.

Apresenta-se de seguida uma síntese das etapas no processo de calibração de coeficientes parciais de segurança recorrendo ao método FORM. Considere-se o EL representado simbolicamente pela função $M = g(X_1, \dots, X_n)$. Pretende-se determinar os coeficientes parciais de segurança de cada uma das variáveis básicas desse EL que garanta uma determinada fiabilidade para a vida útil de projeto. O procedimento consiste em:

1. Selecionar os modelos probabilísticos a adotar para cada uma das variáveis básicas da função EL em consideração, incluindo as suas médias e desvios padrão.
2. A partir desses modelos probabilísticos, determinar os valores característicos de cada uma das variáveis básicas, em função dos quantis previamente fixados para a sua quantificação.
3. Escolher o índice de fiabilidade objetivo pretendido para a função EL em estudo.
4. Selecionar um parâmetro de dimensionamento apropriado, por exemplo, a área de armadura numa dada secção de betão armado, o módulo de flexão da secção de uma viga metálica, a área de uma sapata, o diâmetro de uma estaca, etc.
5. Analisar a função EL com o método FORM e determinar o valor do parâmetro de dimensionamento escolhido que conduza a um índice de fiabilidade próximo do índice de fiabilidade objetivo.
6. Guardar os coeficientes de sensibilidade FORM obtidos no passo anterior.
7. Determinar os valores de dimensionamento com base nesses coeficientes de sensibilidade.
8. Finalmente, determinar os coeficientes parciais de segurança implícitos nesses valores de dimensionamento.

Capítulo 10

Fiabilidade de sistemas

Estivemos a analisar até agora a fiabilidade de uma estrutura com respeito à ocorrência de um único EL. Em estruturas hiperstáticas, porém, a ocorrência de um único EL traduz-se apenas numa rotura local, não no colapso da estrutura. Naturalmente, as consequências de um colapso global são muito mais severas do que uma rotura local. Quando a análise de fiabilidade envolve a verificação de apenas um EL numa dada estrutura, diz-se que se trata de uma *análise de fiabilidade ao nível do elemento*. Quando a análise de fiabilidade envolve a ocorrência conjunta de mais do que um EL, diz-se que se trata de uma *análise de fiabilidade ao nível do sistema*.

Refira-se que os regulamentos de segurança estrutural, de que são exemplo os Eurocódigos Estruturais, preconizam em geral verificações de segurança ao nível do elemento. A verificação da segurança é feita EL a EL, partindo-se do princípio de que, se a segurança estiver satisfeita para todos os EL relevantes, a estrutura como um todo possui fiabilidade aceitável. Como iremos ver nesta secção, isto pode não ser verdade. A fiabilidade estrutural ao nível do sistema tem por isso manifesto interesse.

A fiabilidade ao nível do sistema pode ser analisada de duas formas: (1) aplicando a teoria geral de fiabilidade de sistemas e (2) recorrendo à teoria da plasticidade estrutural. Neste capítulo apresenta-se uma visão geral das duas abordagens.

10.1 Fundamentos da teoria da fiabilidade de sistemas

A teoria da fiabilidade de sistemas é relativamente vasta, com aplicações em muitas áreas de engenharia. A nossa abordagem aqui, para além de nível introdutório, foca-se apenas nas estruturas, consideradas como sistemas constituídos por elementos estruturais ligados entre si.

Dependendo da forma como se comportam face à ocorrência de falha nos seus elementos, os sistemas (em sentido geral) classificam-se em três grandes categorias:

- sistemas em série;
- sistemas em paralelo;
- sistemas mistos.

Nos primeiros, uma falha em qualquer um dos elementos determina a falha do sistema. Nos segundos, é necessária a ocorrência de falha em todos os elementos para que ocorra falha do sistema. Nos últimos, a falha do sistema exige a ocorrência de falha em mais do que um elemento, mas não em todos. Dito de outra forma, um sistema é misto quando não é em série nem em paralelo.

Analisemos cada uma destas categorias do ponto de vista dos sistemas estruturais.

10.1.1 Sistemas em série

Considere-se a estrutura representada na Figura 10.1. Admita-se que existem apenas dois EL relevantes: rotura do tirante 1 e rotura do tirante 2. Como a estrutura é isostática, a rotura de um único tirante determina o seu colapso (a estrutura transforma-se num mecanismo). As estruturas isostáticas são assim sistemas em série, pois a rotura de um único elemento ou ligação implica o colapso da estrutura.

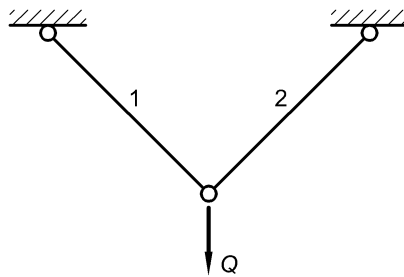


Figura 10.1 Estrutura isostática como exemplo de sistema em série.

Seja g_1 a função EL correspondente à rotura do tirante 1 e g_2 a função EL correspondente à rotura do tirante 2. Sejam p_{f1} e p_{f2} as probabilidades de excedência dos EL g_1 e g_2 , respetivamente. A probabilidade de colapso da estrutura (ou do sistema) é assim dada por:

$$\begin{aligned} p_{f_{sys}} &= P(g_1 < 0 \cup g_2 < 0) \\ &= P(g_1 < 0) + P(g_2 < 0) - P(g_1 < 0 \cap g_2 < 0) \\ &= p_{f1} + p_{f2} - P(g_1 < 0 \mid g_2 < 0) p_{f2}, \end{aligned}$$

ou, de forma equivalente, dada por:

$$p_{f_{sys}} = p_{f1} + p_{f2} - P(g_2 < 0 \mid g_1 < 0) p_{f1}.$$

As probabilidades $P(g_1 < 0 \mid g_2 < 0)$ e $P(g_2 < 0 \mid g_1 < 0)$ são função da dependência entre os eventos $g_1 < 0$ e $g_2 < 0$. Podemos considerar duas situações extremas: (1) independência entre os eventos e (2) dependência total, ou correlação perfeita entre os eventos (se um ocorrer, o outro ocorre necessariamente).

Na primeira situação (eventos independentes) podemos escrever:

$$\begin{aligned} p_{f_{sys}} &= p_{f1} + p_{f2} - \underbrace{P(g_1 < 0 \mid g_2 < 0)}_{=P(g_1 < 0)} p_{f2} \\ &= p_{f1} + p_{f2} - p_{f1} p_{f2}. \end{aligned}$$

Uma vez que a probabilidade é uma quantidade positiva, podemos afirmar que, para este caso, $p_{f_{sys}} \leq p_{f1} + p_{f2}$. Podemos também afirmar que, para p_{f1} e p_{f2} pequenos, $p_{f_{sys}} \approx p_{f1} + p_{f2}$.

Na segunda situação (correlação perfeita), podemos escrever:

$$\begin{aligned} p_{f_{sys}} &= p_{f1} + p_{f2} - \underbrace{P(g_1 < 0 \mid g_2 < 0)}_{=1.00} p_{f2} \\ &= p_{f1} + p_{f2} - p_{f2} \\ &= p_{f1}, \end{aligned}$$

ou, de forma equivalente:

$$\begin{aligned} p_{f_{sys}} &= p_{f1} + p_{f2} - \underbrace{P(g_2 < 0 \mid g_1 < 0)}_{=1.00} p_{f1} \\ &= p_{f1} + p_{f2} - p_{f1} \\ &= p_{f2}. \end{aligned}$$

Como a probabilidade de falha do sistema tem de ser única, tem-se necessariamente $p_{f1} = p_{f2}$. Com efeito, considerando correlação perfeita entre os eventos $g_1 < 0$ e $g_2 < 0$, estes ocorrem sempre em simultâneo, tendo por isso a mesma probabilidade. Se a correlação não for perfeita, mas for muito forte, podemos escrever:

$$p_{f_{sys}} = \max\{p_{f1}, p_{f2}\}.$$

As expressões acima são facilmente generalizáveis a um sistema em série com k estados limites relevantes. Seja p_{fi} a probabilidade de ocorrência do EL i . Tem-se pois, para sistemas em série:

a) Hipótese de independência entre os k EL:

$$p_{f_{sys}} = 1 - \prod_{i=1}^k (1 - p_{fi}) \approx \sum_{i=1}^k p_{fi}. \quad (10.1)$$

b) Hipótese de correlação muito forte entre os k EL:

$$p_{f_{sys}} = \max\{p_{f1}, \dots, p_{fk}\}. \quad (10.2)$$

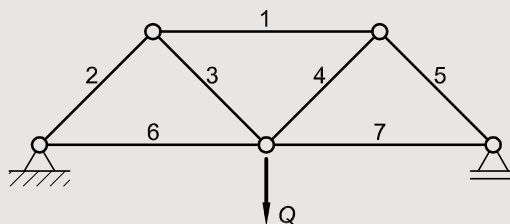
Numa situação real estaremos numa situação intermédia entre esses dois casos extremos, pelo que, para sistemas em série, podemos escrever

$$\max\{p_{f1}, \dots, p_{fk}\} \leq p_{f_{sys}} \leq \sum_{i=1}^k p_{fi} \quad (10.3)$$

Conforme se observa, a existência de correlação entre os diferentes EL em estruturas isostáticas é favorável à segurança, pois faz baixar a probabilidade de colapso. Assim, a hipótese da independência faz aumentar a probabilidade de colapso, sendo por isso uma hipótese conservativa.

Repare-se também que, neste tipo de estruturas, pode acontecer que todos os EL tenham fiabilidade aceitável (isto é, $p_{fi} \leq p_{fT}$), mas a estrutura como um todo não seja fiável (isto é, $p_{f_{sys}} > p_{fT}$). Assim, para estruturas isostáticas, pode não ser verdadeiro o princípio comumente utilizado de que, se uma estruturas for segura para todos os EL relevantes, é segura como um todo.

Exemplo 10.1 Considere-se a estrutura representada na Figura junta. Admita-se que os únicos EL relevantes são a rotura das 7 barras da treliça, e que a probabilidade de rotura das barras são idênticas entre si e iguais a 10^{-5} .



Determinar um minorante e um majorante da probabilidade de colapso da estrutura.

Resolução

Aplicando a Eq. (10.3) vem:

$$10^{-5} \leq p_{f_{sys}} \leq 7 \times 10^{-5}.$$

10.1.2 Sistemas em paralelo

Considere-se agora a estrutura representada na Figura 10.2 e admita-se que o tirante do meio está sobredimensionado, de modo que, ao aumentar a carga Q até ao colapso da estrutura, os tirantes 1 e 2 rompem primeiro com forte probabilidade. Há assim apenas dois EL relevantes, mas, para haver colapso, é necessário que ambos os tirantes 1 e 2 rompam. Estamos assim perante um sistema em paralelo.

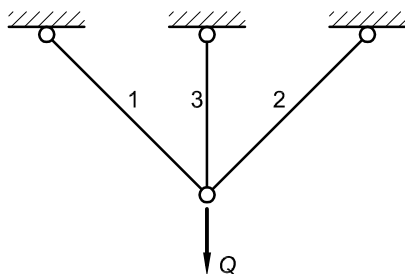


Figura 10.2 Estrutura hiperstática como exemplo de sistema em paralelo.

Seja g_1 a função EL associada à rotura do tirante 1 e g_2 a função EL associada à rotura do tirante 2. Sejam p_{f1} e p_{f2} as probabilidades de ocorrência dos EL g_1 e g_2 , respetivamente. A probabilidade de colapso do sistema é então dada por:

$$p_{f_{sys}} = P(g_1 < 0 \cap g_2 < 0).$$

Novamente, podemos considerar duas situações extremas: (1) independência entre os eventos $g_1 < 0$ e $g_2 < 0$, e (2) correlação perfeita entre esses eventos. Na primeira situação, tem-se:

$$p_{f_{sys}} = p_{f1} \times p_{f2}.$$

Na segunda situação, podemos escrever

$$p_{f_{sys}} = \underbrace{P(g_1 < 0 \mid g_2 < 0)}_{1.00} p_{f2} = p_{f2},$$

ou ainda,

$$p_{f_{sys}} = \underbrace{P(g_2 < 0 \mid g_1 < 0)}_{1.00} p_{f1} = p_{f1}.$$

Como referido anteriormente, a correlação perfeita entre esses dois eventos obriga a que $p_{f1} = p_{f2}$, e a probabilidade de colapso do sistema coincide com a probabilidade de rotura de qualquer dos tirantes (necessariamente iguais entre si, no presente caso). Se a correlação for forte (mas não for perfeita) e as probabilidades não forem exatamente iguais, podemos escrever:

$$p_{f_{sys}} = \min\{p_{f1}, p_{f2}\}.$$

As expressões acima são facilmente generalizáveis a um sistema em paralelo com k estados limites relevantes. Seja p_{fi} a probabilidade de se atingir o EL i . Tem-se, pois:

a) Hipótese de independência entre os k EL:

$$p_{f_{sys}} = \prod_{i=1}^k p_{fi}. \quad (10.4)$$

b) Hipótese de correlação muito forte entre os k EL:

$$p_{f_{sys}} = \min\{p_{f1}, \dots, p_{fk}\}. \quad (10.5)$$

Numa situação real estaremos algures entre esses dois casos extremos, pelo que, para sistemas em paralelo, podemos escrever:

$$\prod_{i=1}^k p_{fi} \leq p_{f_{sys}} \leq \min\{p_{f1}, \dots, p_{fk}\} \quad (10.6)$$

Repare-se que, agora, contrariamente ao que sucedeu para sistemas em série, a correlação é prejudicial à segurança, pois faz aumentar a probabilidade de colapso. Assim, para sistemas em paralelo, a hipótese de correlação forte faz aumentar a probabilidade de colapso, sendo por isso uma hipótese conservativa.

10.1.3 Sistemas mistos

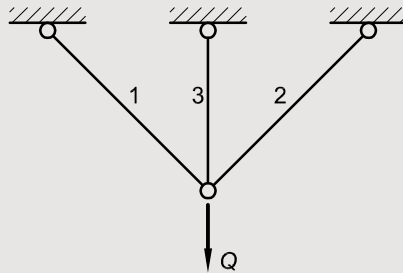
Quando um sistema não é em série nem em paralelo, diz-se sistema misto. Considere-se novamente a estrutura com 3 tirantes, mas admita-se desta vez que a rotura de qualquer deles é relevante (nenhum deles está sobredimensionado). Como a estrutura é hiperstática do 2.º grau, terá de haver rotura de dois dos três tirantes para a estrutura colapsar, mas não é necessário que se dê a rotura dos três. Estamos assim perante um sistema misto. Este exemplo sugere que a grande maioria das estruturas reais correspondem a sistemas mistos.

Sejam g_1 , g_2 e g_3 as funções EL correspondentes à rotura dos tirantes 1, 2 e 3, respetivamente. A probabilidade de colapso da estrutura é assim dada por:

$$p_{f_{sys}} = P[(g_1 < 0 \cap g_2 < 0) \cup (g_1 < 0 \cap g_3 < 0) \cup (g_2 < 0 \cap g_3 < 0)]. \quad (10.7)$$

Observa-se assim que a probabilidade de colapso de sistemas mistos corresponde a uma probabilidade de reunião de interseções de EL. Este exemplo sugere também que, em estruturas com muitos modos de ruína possíveis, a determinação da probabilidade de colapso não é uma tarefa simples.

Exemplo 10.2 Considere-se a estrutura representada na Figura junta. Admita-se que a probabilidade de rotura dos tirantes é idêntica e igual a 10^{-5} .



- Determinar a probabilidade de colapso da estrutura, admitindo as seguintes hipóteses: (1) Independência entre os EL de rotura de cada um dos tirantes, e (2) Correlação perfeita entre os mesmos.
- Discutir a plausibilidade das hipóteses assumidas.

Resolução

- (1) Aplicando (10.7) tem-se:

$$p_{f_{sys}} \approx 3 \times (10^{-5} \times 10^{-5}) \\ = 3 \times 10^{-10}.$$

- (2) Tem-se naturalmente, $p_{f_{sys}} = 10^{-5}$.

- Deixa-se como exercício de reflexão.

10.2 Análise plástica probabilística

Como sabemos, a *teoria da plasticidade estrutural* ocupa-se da determinação da carga de colapso de estruturas recorrendo a modelos rígido-plásticos. Nesta secção, analisa-se brevemente como essa teoria pode ser aplicada eficazmente na determinação da probabilidade de colapso de estruturas reticuladas.

A título de exemplo, considere-se a viga de 3 tramos representada na Figura 10.3. A viga está sujeita a duas cargas, uma permanente g , e outra variável Q . Vejamos como determinar a probabilidade de colapso do tramo central. O colapso desse tramo dá-se quando se formam 3 rótulas plásticas, conforme indicado na Figura.

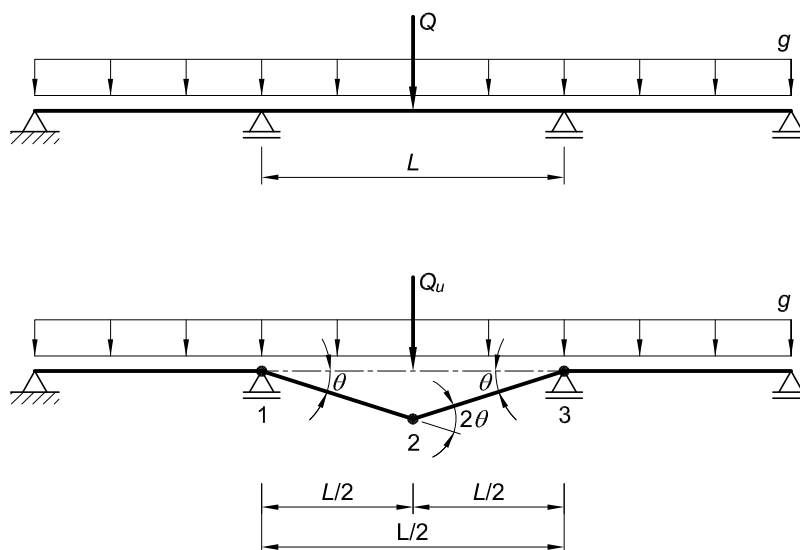


Figura 10.3 Viga de 3 tramos. Mecanismo associado ao colapso do tramo central.

Designando por Q_u a carga que provoca o colapso do tramo central (carga última), a probabilidade de colapso será, então:

$$p_{f_{sys}} = P(Q > Q_u). \quad (10.8)$$

A condição de segurança é assim formulada em termos de ações, sendo a margem de segurança dada, naturalmente, por $M = Q_u - Q$. Conforme se observa, a análise plástica de estruturas hipertáticas é uma análise ao nível do sistema, pois envolve a ocorrência de vários estados limites. No presente exemplo, são 3 os estados limites envolvidos: EL último de flexão nas secções 1, 2 e 3.

A determinação da carga de colapso, Q_u , é feita recorrendo aos teoremas cinemático e estático da teoria da plasticidade. O *teorema cinemático* estabelece que uma distribuição de esforços associada a um mecanismo cinematicamente admissível¹ fornece um majorante da carga de colapso. O *teorema estático* estabelece que uma distribuição de esforços estaticamente admissível² fornece um minorante da carga de

¹Mecanismo constituído por rótulas plásticas em número suficiente para transformar a estrutura num mecanismo.

²Distribuição de esforços na qual em nenhuma secção são excedidos os esforços resistentes.

colapso. Juntando estes dois teoremas, segue imediatamente que uma distribuição de esforços que seja, simultaneamente, cinemática e estaticamente admissível, fornece a verdadeira carga de colapso.

A determinação da carga de colapso associada a um mecanismo cinematicamente admissível é relativamente simples, exigindo apenas o recurso a equações de equilíbrio. A tarefa fica bastante facilitada recorrendo ao *princípio dos trabalhos virtuais*, segundo o qual é condição necessária e suficiente para o equilíbrio que o trabalho das forças exteriores seja igual ao trabalho das forças interiores ($\tau_{ext} = \tau_{int}$) para toda e qualquer rotação θ do mecanismo em estudo.

Determinemos então a carga de colapso, Q_u , associada ao colapso do tramo central na viga representada na Figura 10.3. Começa-se por determinar o trabalho das forças exteriores (cargas g e Q) correspondente a esse mecanismo. Tem-se:

$$\begin{aligned}\tau_{ext} &= Q_u \theta \frac{L}{2} + g \frac{1}{2} L \theta \frac{L}{2} \\ &= \left(Q_u \frac{L}{2} + g \frac{L^2}{4} \right) \theta.\end{aligned}$$

Em relação ao trabalho das forças interiores, tem-se:

$$\begin{aligned}\tau_{int} &= M_{p1} \theta + M_{p2} 2\theta + M_{p3} \theta \\ &= (M_{p1} + 2M_{p2} + M_{p3}) \theta,\end{aligned}$$

onde M_{p1} , M_{p2} e M_{p3} representam os momentos plásticos (momentos resistentes) das secções 1, 2 e 3, respetivamente. Igualando o trabalho das forças exteriores ao trabalho das forças interiores, determina-se imediatamente o carga de colapso:

$$Q_u = \frac{2}{L} (M_{p1} + 2M_{p2} + M_{p3}) - \frac{gL}{2}. \quad (10.9)$$

Porém, para que a carga Q_u assim determinada seja a verdadeira carga de colapso, é necessário que a distribuição de esforços que lhe corresponde cumpra as condições do teorema estático, o que exige verificar que não ocorrem outros modos de ruína, como a rotura de esforço transverso. Por exemplo, o esforço transverso na secção 1 imediatamente após o colapso (que se determina facilmente por equilíbrio) é dado por $V = Q_u/2 + gL/2$. É necessário verificar então que este esforço transverso não excede a resistência da secção.

Além disso, para que o mecanismo seja estaticamente admissível, é necessário comprovar que as secções onde se formam as rótulas plásticas têm capacidade de rotação suficiente. No caso de vigas metálicas esta verificação não é em geral condicionante, mas no caso de estruturas de betão armado convém verificar. Por exemplo, no exemplo que temos vindo a analisar, verifica-se que a rotação na rótula 2 é o dobro da rotação nas rótulas 1 e 3, pelo que a respetiva capacidade de rotação também tem de ser o dobro. Esta verificação obriga a traçar os diagramas momento-curvatura das secções envolvidas. No exemplo em apreço, uma vez conhecidos esses diagramas, procede-se da seguinte forma: a partir do diagrama momento-curvatura das secções de apoio, determina-se o valor da curvatura acima da qual o momento plástico já se desenvolveu plenamente. Depois, observando o diagrama momento-curvatura de secção de vão, verifica-se se esta secção suporta o dobro daquela curvatura, isto é, verifica-se se as extensões no betão e no aço estão ainda dentro dos limites suportados por esses materiais, nomeadamente a extensão limite de 3.5‰ no caso do betão.

O cálculo da probabilidade $p_{f_{sys}} = P(Q > Q_u)$ pode ser efetuado recorrendo a um dos métodos de fiabilidade vistos anteriormente, como por exemplo o método MC. Este método exige a simulação da função $M = Q_u - Q$ um número significativo de vezes. A probabilidade pretendida é dada pelo número de vezes em que ocorre colapso ($M < 0$), a dividir pelo número total de simulações. Designando por n o número de simulações, é assim necessário gerar n cargas Q (a partir do respetivo modelo probabilístico) e n cargas Q_u , calculadas a partir da Eq. (10.9), que depende dos momentos plásticos M_{p1} , M_{p2} e M_{p3} . Para uma viga de betão armado, o momento plástico numa secção genérica i é função essencialmente de duas variáveis aleatórias: a resistência do aço nessa secção, f_{yi} , e a resistência do betão na mesma secção, f_{ci} . No exemplo que temos vindo a analisar, a carga de colapso Q_u é assim função de sete variáveis aleatórias, a saber:

$$Q_u = Q_u(f_{s1}, f_{s2}, f_{s3}, f_{c1}, f_{c2}, f_{c3}, g).$$

As variáveis f_{s1} , f_{s2} e f_{s3} estão claramente correlacionadas entre si, o mesmo sucedendo com as variáveis f_{c1} , f_{c2} e f_{c3} . Verifica-se assim que a determinação da probabilidade de colapso de estruturas exige a especificação das correlações existentes entre determinadas variáveis básicas do problema. Note-se que a adoção de coeficientes de correlação elevados constitui uma hipótese conservativa. Em particular, assumindo uma correlação perfeita e positiva entre essas variáveis, isto é, assumindo que $f_{s1} = f_{s2} = f_{s3} = f_s$ e que $f_{c1} = f_{c2} = f_{c3} = f_c$, a probabilidade de colapso assim calculada está do lado da segurança, isto é, é superior à real. De facto, sob esta hipótese, a probabilidade das resistências dos aços serem simultaneamente baixas tenderia a aumentar, fazendo assim aumentar a probabilidade de colapso.

A geração de amostras aleatórias de variáveis aleatórias correlacionadas entre si pode ser efetuada com diferentes métodos. O leitor interessado encontra em Law (2007) descrições detalhadas de alguns desses métodos.

Capítulo 11

Critérios de aceitação da fiabilidade

Vimos anteriormente que, em termos probabilísticos, a segurança em relação a um determinado EL encontra-se satisfeita se $p_f \leq p_{fT}$, onde p_f representa a probabilidade de se atingir esse EL e p_{fT} a probabilidade previamente aceite como máxima admissível. De forma inteiramente equivalente, a mesma condição de segurança pode ser escrita da seguinte forma: $\beta \geq \beta_T$, onde β representa o índice de fiabilidade referente ao EL em consideração e β_T o índice de fiabilidade mínimo admissível. Analisaremos neste capítulo o problema da determinação do índice β_T e veremos as recomendações sobre este assunto existentes na literatura da especialidade.

11.1 Determinação da fiabilidade alvo

Os modernos regulamentos de segurança recomendam valores para o índice β_T , a que designam índice de fiabilidade objetivo, ou índice de fiabilidade alvo (*Target*). Tais valores podem ser encarados como valores mínimos de fiabilidade, procurando-se que a estrutura tenha uma fiabilidade igual ou superior. Podem também ser encarados como valores a alcançar por alvo, procurando-se que a fiabilidade da estrutura não se afaste muito do valor recomendado, quer por excesso, quer por defeito. Se a estrutura possuir uma fiabilidade significativamente diferente do valor alvo (para mais, ou para menos) tal tenderá a penalizar o custo total esperado, incluindo o risco de rotura. Uma fiabilidade demasiado alta penaliza os custos iniciais, e uma fiabilidade demasiado baixa penaliza os custos associados ao risco de rotura. Os valores de β_T recomendados podem assim ser encarados como valores ótimos do índice de fiabilidade, isto é, valores que tendem a minimizar o custo esperado de ciclo de vida da estrutura.

Vejamos como determinar o índice de fiabilidade por otimização económica.

11.1.1 Otimização económica

Começa-se por recordar que o risco de rotura, R_f , é definido como o produto da probabilidade de rotura, p_f , pelas consequências da rotura, C_f , isto é:

$$R_f = p_f C_f. \quad (11.1)$$

As consequências de rotura incluem não só os prejuízos de natureza económica, mas também prejuízos decorrentes das perdas de vidas humanas e ainda prejuízos ambientais e sociais.

Observe-se que o risco de rotura, conforme definido pela Eq. (11.1), representa o custo esperado de rotura durante a vida útil da estrutura (ou o custo médio por estrutura que esperaríamos pagar se tivéssemos muitas estruturas iguais em funcionamento). Para se obter o custo de ciclo de vida de uma estrutura, é necessário contabilizar esse custo e adicioná-lo ao custo inicial (projeto e construção), sem esquecer naturalmente o custo de manutenção. O custo total esperado da estrutura, por vezes chamado custo generalizado, é assim dado por:

$$C_g = C_i + C_m + p_f C_f, \quad (11.2)$$

onde C_i representa o custo inicial (projeto e construção) e C_m o custo de manutenção durante a vida da estrutura. A expressão (11.2) é bastante simplificada¹, mas é útil para tirarmos algumas conclusões.

Admita-se que o custo C_i pode ser expresso por uma função do tipo $C_i = C_0 + C_1\beta$, em que C_0 e C_1 são constantes. O custo C_1 representa um custo unitário de segurança, podendo ser definido como o acréscimo no custo da estrutura para um acréscimo unitário de β ($C_1 = \Delta C_i / \Delta \beta$). Esse custo é designado frequentemente por *custo marginal de segurança*. Assim, atendendo a que $p_f = \Phi(-\beta)$, o custo generalizado é dado por:

$$C_g = C_0 + \beta C_1 + C_m + \Phi(-\beta) C_f. \quad (11.3)$$

O valor ótimo de β é o valor que minimiza o custo generalizado, podendo ser obtido derivando (11.3) em ordem a β e igualando a zero a derivada obtida. Admitindo que o custo de manutenção não depende de β , vem:

$$\frac{\partial C_g}{\partial \beta} = C_1 - C_f \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\beta^2/2}. \quad (11.4)$$

Igualando esta equação a zero e resolvendo em ordem a β , obtém-se o valor ótimo de beta:

$$\beta_{\text{opt}} = \sqrt{2 \ln \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{C_f}{C_1} \right)} \quad (11.5)$$

Podemos então concluir que o índice de fiabilidade ótimo depende fundamentalmente de duas grandezas: (1) custo relativo para o aumento da segurança, refletido no custo marginal C_1 , e (2) gravidade das consequências de uma eventual rotura estrutural, refletida no custo C_f .

¹Por exemplo, a expressão ignora o facto dos diferentes custos ocorrerem em instantes diferentes. Numa análise mais rigorosa, é necessário aplicar a esses custos uma taxa de desconto de forma a transformá-los a um instante de referência comum. Este aspeto, contudo, não tem influência significativa no valor ótimo da fiabilidade (Holický, 2013), pelo que não será aqui considerado.

Observando a Eq. (11.5), podemos concluir que custos marginais de segurança elevados tenderão a fazer baixar a fiabilidade ótima. Por exemplo, é bem sabido que as estruturas existentes apresentam regra geral um custo marginal de segurança bastante superior ao das estruturas novas. Assim, a fiabilidade alvo para estruturas existentes tende a ser inferior à fiabilidade alvo para estruturas novas.

Podemos ainda concluir que a fiabilidade ótima de uma estrutura muito importante (estrutura com elevadas consequências em caso de rotura), tenderá a ser superior à fiabilidade ótima de uma estrutura com consequências menos severas. Por exemplo, a fiabilidade ótima de uma ponte crucial para a economia de uma região ou país tenderá a ser superior à fiabilidade ótima de uma ponte localizada num itinerário secundário.

Exemplo 11.1 Suponha-se que se está a avaliar a segurança de uma estrutura existente, tendo-se concluído que, mesmo depois de refinamentos no cálculo, a estrutura não é segura face a um determinado Estado Limite. Foi então decidido reforçar a estrutura, implementando uma determinada solução de reforço, mas de forma ótima, isto é, a “quantidade de reforço” a executar deverá ser a que corresponde a um custo generalizado mínimo. Admita-se que as consequências de violação do referido Estado Limite foram estimadas em 200 000 unidades monetárias (um) e que o custo de reforço (que depende naturalmente da “quantidade de reforço”) é expressa por $C_r = 10\,000 + 1000\beta$. Estimar a fiabilidade ótima da estrutura em relação ao Estado Limite em consideração e o correspondente custo ótimo de reforço.

Resolução

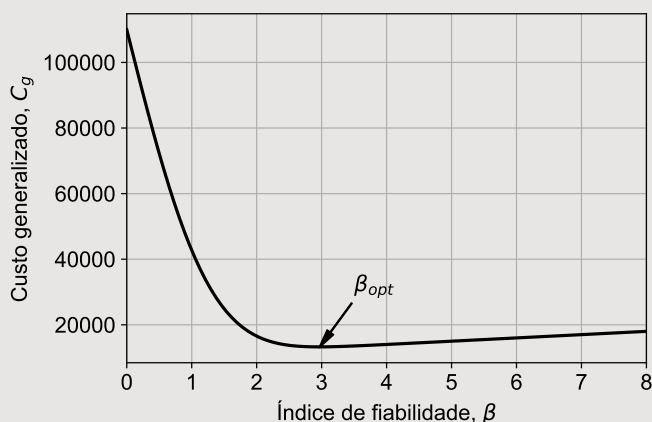
Aplicando (11.5) com $C_1 = 1000$ e $C_f = 200\,000$, vem:

$$\beta_{\text{opt}} = \sqrt{2 \ln \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{200\,000}{1000} \right)} = 2.96.$$

Esta é assim a fiabilidade ótima da estrutura, a que corresponde o seguinte custo de reforço:

$$C_r = 10\,000 + 1000 \times 2.96 = 12\,960 \text{ um.}$$

Este custo pode ser encarado como o custo ótimo de investimento. O gráfico seguinte mostra o custo generalizado (custo de ciclo de vida) em função do índice de fiabilidade.



Comentário: Conforme se observa, o custo generalizado neste exemplo é mínimo para um índice de fiabilidade compreendido entre 2 e 4. Acima de 4, o custo cresce suavemente, mas abaixo de 2 o custo cresce muito rapidamente. Verifica-se assim que, no exemplo, índices inferiores ao ótimo afetam muito mais o custo da estrutura do que índices superiores ao ótimo.

O índice de fiabilidade ótimo dado pela Eq. (11.5) deve ser encarado como a fiabilidade ótima da estrutura para a sua vida útil, pois resultou da minimização do custo de ciclo de vida. Como o período de vida útil não interviu na análise, podemos concluir que tal fiabilidade ótima é independente do período de vida útil². A Tabela 11.1 exemplifica valores de β_{opt} para diferentes rácios C_f/C_1 . Os rácios considerados na Tabela conduzem a valores de β_{opt} semelhantes aos valores recomendados pela EN 1990 (2002), Quadro B.2.

Tabela 11.1 Valores de β_{opt} para diferentes rácios C_f/C_1

C_f/C_1	Período de referência	
	1 ano*	Vida útil
30000	5.1	4.3
4000	4.7	3.8
500	4.2	3.3

* Fiabilidade anual ótima quando a vida útil é de 50 anos. Os valores indicados na coluna «1 ano» foram obtidos a partir da expressão $\beta_1 = \Phi^{-1}([\Phi(\beta_n)]^{1/n})$, considerando $n = 50$ anos.

Conforme se acaba de ver, o problema da otimização do índice de fiabilidade é relativamente simples de resolver de um ponto de vista estritamente matemático. A dificuldade está na obtenção dos dados do problema, nomeadamente a quantificação dos custos de rotura estrutural. Tais custos poderão ser muito difíceis de quantificar,

²Isto não é rigorosamente verdade, uma vez que os custos foram adicionados sem terem sido previamente convertidos a um instante de referência comum. No entanto, como se disse anteriormente, o erro introduzido por esta simplificação não é significativo, podendo-se afirmar que a fiabilidade ótima é pouco afetada pelo período de vida útil considerado (Holický, 2013).

especialmente se estiverem envolvidos perdas de vidas humanas, dadas as questões éticas e morais suscitadas quando se tenta atribuir um valor à vida humana. A dificuldade em atribuir um valor à vida humana pode ser contornada de várias formas. Uma delas é por impor limites mínimos de fiabilidade que permitam garantir que os níveis de fiabilidade obtidos por otimização económica não conduzam a um risco inaceitável de perdas de vidas humanas, tal como delineado na ISO 2394 (1998).

11.1.2 Limites mínimos de fiabilidade

A determinação do que é aceitável em termos de risco de perdas humanas devido a um colapso estrutural pode ser feita por comparação com o risco de perdas humanas devido a outros acidentes (Melchers, 1999). De acordo com a Norma ISO 2394 (1998), tomando como base uma frequência anual de mortes por acidente de 10^{-4} , conforme documentado por estatísticas, uma frequência anual de mortes de 10^{-6} em resultado de colapsos estruturais pode ser considerada aceitável. Ora, a probabilidade de alguém morrer devido ao colapso de uma dada estrutura é $P(d) = P(d | f) \cdot p_f$, onde $P(d | f)$ designa a probabilidade de alguém morrer se a estrutura colapsar e p_f a probabilidade da estrutura colapsar num determinado período de tempo. Assumindo o limite $P(d) = 10^{-6}$ para a probabilidade de alguém morrer em 1 ano como resultado do colapso de uma dada estrutura, a probabilidade anual de colapso dessa estrutura deve verificar a seguinte condição:

$$p_{f1} \leq \frac{10^{-6}}{P(d | f)}, \quad (11.6)$$

onde o índice 1 enfatiza de que se trata de uma probabilidade anual (ou referente a um período de 1 ano). Em termos de índice de fiabilidade, esta condição é equivalente a:

$$\beta_1 \geq -\Phi^{-1} \left(\frac{10^{-6}}{P(d | f)} \right). \quad (11.7)$$

Assim, se o valor de β_{opt} obtido por otimização económica conduzir a uma fiabilidade anual inferior à que se obtém por (11.7), é esta a que deverá ser utilizada na verificação da segurança. O documento fib bulletin 80 (2016) dá indicações sobre possíveis valores da probabilidade $P(d | f)$.

Para além do risco individual máximo, traduzido nas inequações (11.6) e (11.7), a Norma ISO 2394 (1998) refere ainda que, em muitos casos, autoridades competentes desejarão evitar acidentes envolvendo muitas mortes. Para um número esperado de mortes igual a N , a referida Norma sugere o seguinte limite para a probabilidade anual de colapso:

$$p_{f1} \leq \frac{A}{N^\alpha}, \quad (11.8)$$

onde A e α são dois parâmetros a definir por cada país. O parâmetro A , com valores a variar entre 0.01 e 0.10, representa a frequência anual de acidentes com um número de mortes superior ou igual a 1. O parâmetro α representa o grau de aversão pública a colapsos estruturais que envolvam perdas humanas, sendo frequentemente adotado o valor $\alpha = 2$. O documento fib bulletin 80 (2016) dá indicações sobre a quantificação do número de mortes N para edifícios (em função de área colapsada) e para pontes (em função do comprimento da ponte). A condição (11.8) pode ser expressa de forma equivalente como:

$$\beta_1 \geq -\Phi^{-1} \left(\frac{A}{N^\alpha} \right). \quad (11.9)$$

11.2 Valores da fiabilidade alvo recomendados em documentos de referência

11.2.1 Estruturas novas

A Tabela 11.2 sintetiza as recomendações do Eurocódigo 0 (EN 1990, 2002) referentes ao índice de fiabilidade alvo, β_T . Os valores são apresentados para três classes de consequências: CC1 (consequências baixas), CC2 (consequências médias) e CC3 (consequências elevadas). A Tabela 11.3 dá exemplos de estruturas que podem enquadrar-se em cada uma destas classes.

Tabela 11.2 Índice de fiabilidade alvo, β_T , recomendados pelo Eurocódigo 0 (EN 1990, 2002) — EL últimos

Classe de consequências	Consequências	Período de referência	
		1 ano	50 anos
CC3	Elevadas	5.2	4.3
CC2	Médias	4.7	3.8
CC1	Baixas	4.2	3.3

Tabela 11.3 Definição das classes de consequências (reprodução do Quadro B.1 da EN 1990 (2002))

Classe de consequências	Descrição	Exemplos de edifícios e de obras de engenharia civil
CC3	Consequência elevada em termos de perdas de vidas humanas; ou consequências económicas, sociais ou ambientais muito importantes.	<u>Bancadas</u> , edifícios públicos em que as consequências do colapso são elevadas (por exemplo, uma <u>sala de concertos</u>).
CC2	Consequência média em termos de perda de vidas humanas; consequências económicas, sociais ou ambientais mediamente importantes.	<u>Edifícios de habitação</u> e de <u>escritórios</u> , edifícios públicos em que as consequências do colapso são médias (por exemplo, um edifício de escritórios).
CC1	Consequência baixa em termos de perda de vidas humanas; consequências económicas, sociais ou ambientais pouco importantes ou desprezáveis.	<u>Edifícios agrícolas</u> normalmente não ocupados permanentemente por pessoas (por exemplo, <u>armazéns</u>), <u>estufas</u> .

Conforme se observa na Tabela 11.2, os valores recomendados para o índice de fiabilidade são apresentados para dois períodos de referência: 1 e 50 anos. Note-se que os índices para esses dois períodos (1 e 50 anos) correspondem ao mesmo nível de fiabilidade. Por exemplo, uma estrutura que tem uma fiabilidade de 3.8 em 50 anos,

possui uma fiabilidade anual de:

$$\beta_1 = \Phi^{-1}\left([\Phi(3.8)]^{1/50}\right) = 4.68 \approx 4.7.$$

Por outras palavras, uma estrutura que tem uma probabilidade de 7.2×10^{-5} de colapsar em 50 anos ($\beta = 3.8$), tem uma probabilidade de colapsar em um ano qualquer de 1.3×10^{-6} ($\beta = 4.7$)³.

A leitura da Tabela 11.2 deve ser feita por isso com cuidado. A coluna “50 anos” deve ser encarada como a fiabilidade alvo a considerar para o período de vida útil da estrutura, qualquer que este seja. Quando esse período é de 50 anos, a fiabilidade alvo anual é a indicada na coluna “1 ano”. Para clarificar melhor a interpretação dos valores constantes na Tabela, considere-se o seguinte exemplo. Suponhamos que se pretende projetar uma estrutura da classe CC2 para uma vida útil de 100 anos. Essa estrutura deverá ter uma fiabilidade em 100 anos de 3.8, a que corresponde uma fiabilidade anual de:

$$\beta_1 = \Phi^{-1}\left([\Phi(3.8)]^{1/100}\right) = 4.82 \approx 4.8,$$

valor este superior à fiabilidade alvo anual para uma estrutura com vida útil de 50 anos, o que é lógico. De facto, faz sentido exigir uma fiabilidade anual superior a uma estrutura que tenha de estar em serviço por mais tempo.

A Tabela 11.4 mostra as recomendações da Norma ISO 2394 (1998), que se encontram mais discriminadas comparativamente com as recomendações do Eurocódigo 0 (EN 1990, 2002), nomeadamente explicitando o custo relativo do aumento da segurança. É interessante notar que a Norma não especifica a vida útil que considera, o que é compreensível em face dos comentários acima: os valores de β_T recomendados aplicam-se à vida da útil da estrutura, qualquer que seja a sua duração.

Tabela 11.4 Valores de β_T recomendados pela ISO 2394 (1998)—EL últimos e vida útil de projeto

Custo relativo do aumento da segurança	Consequências de falha			
	Baixas	Algumas	Moderadas	Elevadas
Alto	0	1.5	2.3	3.1
Moderado	1.3	2.3	3.1	3.8
Baixo	2.3	3.1	3.8	4.3

O *Probabilistic Model Code* (JCSS, 2001) recomenda os valores que se reproduzem na Tabela 11.5. A nova versão da Norma ISO 2394 (2015) recomenda esses mesmos valores. Conforme se pode constatar, os valores recomendados são globalmente mais baixos que os valores recomendados pela versão anterior da Norma.

³Estamos a admitir que a probabilidade de colapso se mantém constante de ano a ano, isto é, que não há deterioração e as ações variáveis mantêm-se estacionárias.

Tabela 11.5 Valores de β_T recomendados pela JCSS (2001)—EL últimos e período de referência de 1 ano e 50 anos (valor entre parêntesis)

Custo relativo do aumento da segurança	Consequências de falha		
	Baixas	Moderadas	Elevadas
Alto	3.1 (1.7)	3.3 (2.0)	3.7 (2.6)
Moderado	3.7 (2.6)	4.2 (3.2)	4.4 (3.5)
Baixo	4.2 (3.2)	4.4 (3.5)	4.7 (3.8)

11.2.2 Estruturas existentes

Como referido anteriormente, as estruturas existentes apresentam um custo marginal de segurança superior ao custo correspondente para estruturas novas, o que se traduz numa redução do índice de fiabilidade ótimo. Apresenta-se de seguida as recomendações da FIB, conforme publicadas no documento fib bulletin 80 (2016), onde essa redução é reconhecida.

Esse documento especifica dois índices de fiabilidade: β_0 e β_{up} . O primeiro refere-se à fiabilidade mínima que uma estrutura existente em avaliação precisa de ter para ser dispensada de um reforço estrutural, e o segundo refere-se à fiabilidade alvo que a estrutura deverá possuir após o reforço (*upgrade*), caso este seja necessário. O índice β_0 é obtido considerando uma redução $\Delta\beta = 1.5$ em relação ao especificado no Eurocódigo 0 para estruturas novas, e o índice β_{up} é obtido considerando uma redução $\Delta\beta = 0.5$, também em relação ao especificado no Eurocódigo 0 para estruturas novas. A Tabela 11.6 sintetiza estas recomendações.

Tabela 11.6 Índices de fiabilidade para estruturas existentes recomendados pelo fib bulletin 80 (2016)—EL últimos e vida útil remanescente

Classe de consequências	β_0	β_{up}
CC3	$4.3 - 1.5 = 2.8$	$4.3 - 0.5 = 3.8$
CC2	$3.8 - 1.5 = 2.3$	$3.8 - 0.5 = 3.3$
CC1	$3.3 - 1.5 = 1.8$	$3.3 - 0.5 = 2.8$

Quando se avalia a segurança de uma estrutura existente, é importante tentar definir o período de vida útil remanescente, por vezes designado *vida útil residual*, pois isso afeta a fiabilidade alvo anual. Como é evidente, exige-se uma fiabilidade anual superior a uma estrutura que tenha de permanecer em serviço por mais tempo. No entanto, a fiabilidade para o período de vida residual deverá ser a mesma, independentemente desse período (fib bulletin 80, 2016).

Por exemplo, considere-se uma estrutura existente pertencente à classe de consequências CC2 (consequências moderadas). Suponha-se que, devido a um estado avançado de degradação, considerou-se não ser técnica e economicamente viável reparar a estrutura, tendo sido decidido substituí-la por uma nova dentro de um prazo de 5 anos. Para que a estrutura possa continuar em serviço até à sua substituição, deverá possuir, de acordo com a Tabela 11.6, uma fiabilidade β_0 de pelo menos 2.3

em 5 anos, que corresponde a uma fiabilidade anual de:

$$\beta_1 = \Phi^{-1}\left([\Phi(2.3)]^{1/5}\right) = 2.85.$$

Se a vida residual fosse de 10 anos, a estrutura continuaria a ter de possuir uma fiabilidade mínima de 2.3, mas em 10 anos, que corresponderia a uma fiabilidade anual de:

$$\beta_1 = \Phi^{-1}\left([\Phi(2.3)]^{1/10}\right) = 3.07.$$

Quando se avalia a segurança de uma estrutura existente, nem sempre é possível definir a vida útil residual. Nestes casos, é aconselhável tomar-se para a vida útil residual o período usual para estruturas novas, por exemplo 50 anos.

Capítulo 12

Valor característico e período de retorno

No âmbito da aplicação do método dos coeficientes parciais de segurança é necessário quantificar valores característicos de ações. No caso de ações variáveis, o conceito de valor característico apresenta algumas particularidades que importa clarificar. No presente capítulo, define-se de forma rigorosa a noção de valor característico de ações variáveis e introduz-se outros conceitos importantes, como o conceito de período de retorno. Analisa-se também como quantificar valores característicos de ações variáveis para situações de projeto transitórias.

12.1 Definição de valor característico de ações variáveis

Como visto anteriormente, o valor característico de uma ação é o valor da ação que tem uma certa probabilidade, em geral pequena, de ser excedido. Um valor típico dessa probabilidade, chamada *probabilidade de excedência*, é 0.05. Representando essa probabilidade por p_e , o valor característico de uma ação corresponde assim ao quantil $p = 1 - p_e$ da sua distribuição de probabilidade.

A definição que acabamos de dar aplica-se a ações permanentes. No caso específico de ações variáveis no tempo é necessário especificar o período de tempo a que a probabilidade de excedência se aplica. Esse período designa-se por *período de referência* e a distribuição de probabilidade da ação que nos interessa é a distribuição dos máximos da ação nesse período. Assim, como representado na Figura 12.1, o valor característico de uma ação variável Q em relação a uma probabilidade de excedência p_e e a um período de referência T é o valor da ação que tem uma probabilidade p_e de ser excedido em T , isto é, refere-se ao quantil $p = 1 - p_e$ da distribuição dos máximos de Q em T . Em símbolos:

$$Q_k(p, T) = F_{Q_{\max, T}}^{-1}(p) \quad (12.1)$$

onde $F_{Q_{\max,T}}^{-1}(\cdot)$ é a inversa da FDC dos máximos de Q em T .

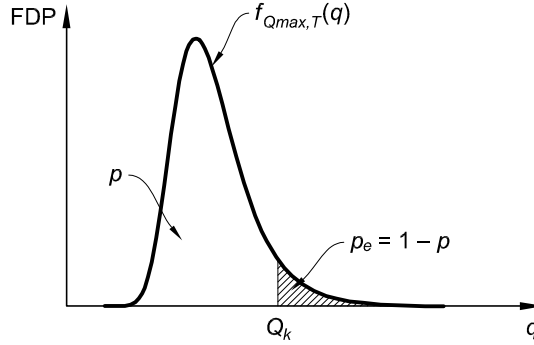


Figura 12.1 Definição de valor característico de uma ação variável. $Q_k(p, T) = F_{Q_{\max,T}}^{-1}(p)$.

A determinação do valor característico de uma ação variável poderá exigir o conhecimento da distribuição de máximos num período de referência relativamente longo, por exemplo 50 anos. A determinação dessa distribuição a partir de uma amostra de máximos em 50 anos exigiria um período de observação muito extenso. Por exemplo, para obter uma amostra com apenas 10 valores de máximos em 50 anos seria necessário um período de observação de $10 \times 50 = 500$ anos, algo que não seria fácil obter. Vejamos então como obter a distribuição de máximos de uma ação variável referente a um período T a partir da distribuição de máximos referente a um período mais curto, digamos τ .

Considere-se a ação Q representada na Figura 12.2. Divida-se o período T em n períodos mais curtos com duração igual a τ . Este período mais curto, a que chamaremos *período elementar*, ou *período unitário*, pode ser 1 dia, 1 semana, 1 mês, 1 ano, e assim sucessivamente. Registre-se agora o valor máximo de Q observado em cada período unitário. Obtém-se assim uma amostra $\{q_1, q_2, \dots\}$ da variável $Q_{\max,\tau} = \{\text{Máximo de } Q \text{ no período } \tau\}$. Admita-se que o período τ é escolhido de modo a que esses valores possam ser considerados independentes entre si. Com base nessa amostra podemos então atribuir uma distribuição à variável $Q_{\max,\tau}$, que representaremos, como habitualmente, por $F_{Q_{\max,\tau}}(\cdot)$.

Seja agora a variável $Q_{\max,T} = \{\text{Máximo de } Q \text{ no período } T\}$. A FDC desta variável é dada por:

$$\begin{aligned} F_{Q_{\max,T}}(q) &= P(Q_{\max,T} \leq q) \\ &= P((Q_{\max,\tau} \leq q) \cap \dots \cap (Q_{\max,\tau} \leq q)) \\ &= [F_{Q_{\max,\tau}}(q)]^n, \end{aligned} \quad (12.2)$$

com $n = T/\tau$.

Inverta-se agora a Eq. (12.2). Fazendo $p = F_{Q_{\max,T}}(q) = [F_{Q_{\max,\tau}}(q)]^n$, tem-se:

$$\begin{aligned} p &= [F_{Q_{\max,\tau}}(q)]^n &\Leftrightarrow & p^{1/n} = F_{Q_{\max,\tau}}(q) \\ & &\Leftrightarrow & q = F_{Q_{\max,\tau}}^{-1}(p^{1/n}). \end{aligned}$$

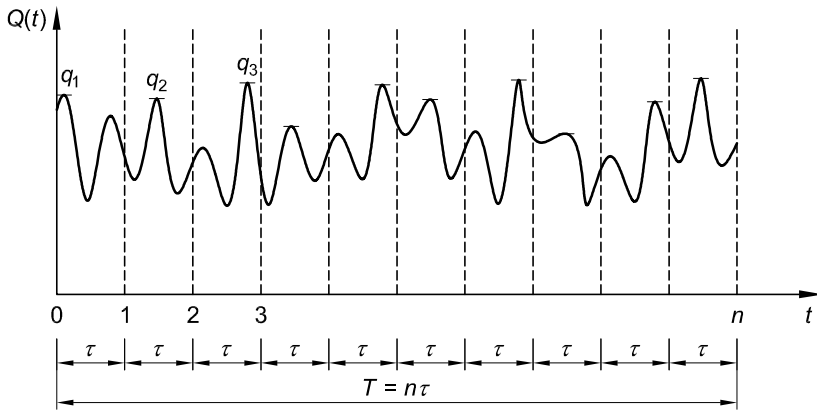


Figura 12.2 Representação de uma ação variável ao longo do tempo.

Mas como $p = F_{Q_{\max,T}}(q)$, podemos escrever $q = F_{Q_{\max,T}}^{-1}(p)$, donde:

$$F_{Q_{\max,T}}^{-1}(p) = F_{Q_{\max,\tau}}^{-1}(p^{1/n}). \tag{12.3}$$

Comparando esta Eq. com (12.1) e considerando que $1/n = \tau/T$, tem-se finalmente:

$$Q_k(p, T) = F_{Q_{\max,\tau}}^{-1}(p^{\tau/T}) \tag{12.4}$$

Acabámos de deduzir uma expressão que nos permite determinar o valor característico de uma ação variável referente a um período T a partir da distribuição de máximos referente a um período τ .

Note-se que a Eq. (12.1) pode ser vista como um caso particular da Eq. (12.4). Com efeito, se substituirmos nesta última τ por T , obtém-se a primeira. Note-se também que, apesar de termos considerado que τ é um submúltiplo de T , a Eq. (12.4) permanece válida quaisquer que sejam os períodos τ e T . O importante é que, ao determinarmos o quociente τ/T , os períodos τ e T sejam expressos nas mesmas unidades de tempo, de forma a que tal quociente seja adimensional.

Exemplo 12.1 Numa dada ponte em serviço, foram medidos os pesos dos veículos de transporte de mercadorias durante um mês típico, tendo-se registado os pesos máximos diários, em kN, que se reproduzem seguidamente (30 valores):

240.3	337.5	30.6	264.7	223.9	101.9	167.5	225.7	468.4	407.7
98.8	427.6	254.4	195.3	253.6	184.6	190.7	311.7	305.7	306.3
250.4	109.4	253.8	322.3	236.7	277.6	254.5	177.2	222.0	141.0

Determinar o valor característico do peso dos camiões correspondente a uma probabilidade de excedência de 0.05 em 50 anos, admitindo que os máximos diários podem ser modelados por meio de uma distribuição:

- a) Normal;
- b) Gumbel.

Resolução

- a) Começa-se por determinar a média e o desvio padrão da amostra colhida da ponte. Um cálculo simples conduz aos seguintes valores: $\mu = 241.4$ kN e $\sigma = 97.5$ kN.

Assim, de acordo com o enunciado: $Q_{\max,1 \text{ dia}} \sim N(241.4, 97.5)$ kN.

A relação entre os períodos τ e T vale:

$$\frac{\tau}{T} = \frac{1 \text{ dia}}{50 \text{ anos}} = \frac{1 \text{ dia}}{50 \times 365 \text{ dias}} = 1/18250.$$

Pretende-se determinar $Q_k(0.95, 50 \text{ anos})$. Recorrendo então à Eq. (12.4), vem:

$$\begin{aligned} Q_k(0.95, 50 \text{ anos}) &= F_{Q_{\max,1 \text{ dia}}}^{-1}(0.95^{1/18250}) \\ &= 684.1 \text{ kN}. \end{aligned}$$

- b) Seguindo um raciocínio idêntico, mas considerando agora que $Q_{\max,1 \text{ dia}}$ segue uma distribuição Gumbel, tem-se:

$$\begin{aligned} Q_k(0.95, 50 \text{ anos}) &= F_{Q_{\max,1 \text{ dia}}}^{-1}(0.95^{1/18250}) \\ &= 1169.2 \text{ kN}. \end{aligned}$$

Apresenta-se de seguida o código Python usado para responder às questões formuladas:

```
from numpy import sqrt, pi
from scipy.stats import norm, gumbel_r as gumb

mu = 241.4
sigma = 97.5

# a)
Qka = norm.ppf(0.95**(1/18250), mu, sigma)

# b)
loc = mu - (sqrt(6)*0.5772/pi)*sigma
scale = sqrt(6)*sigma/pi
Qkb = gumb.ppf(0.95**(1/18250), loc, scale)
```

Comentários:

- (1) É interessante notar que bastou apenas um mês de observação para se conseguir uma previsão para os próximos 50 anos. Note-se também que o

valor acabado de estimar nunca foi observado. A Estatística oferece assim metodologias que permitem prever valores nunca antes ocorridos. Essas previsões são credíveis se as hipóteses de base estiverem corretas, nomeadamente a escolha do modelo probabilístico para a distribuição inicial, e a escolha do mês para realizar as observações. Este exemplo mostrou que a escolha do modelo probabilístico é determinante na estimativa do valor característico, pelo que deve ser feita criteriosamente. A escolha do mês para a recolha dos dados também é importante. Por exemplo, nunca escolheríamos o mês de agosto, por razões óbvias.

- (2) Efetuando um cálculo semelhante, mas para um período de referência de 100 anos ($\tau/T = 1/36500$), obteve-se, considerando a distribuição de Gumbel, $Q_k(0.95, 100 \text{ anos}) = 1221.9 \text{ kN}$. Constata-se assim que, no presente caso, a duplicação do período de referência traduz-se num aumento muito ligeiro do valor característico do peso dos camiões (aumento de apenas 4.5 %).

12.2 Probabilidade de excedência para diferentes períodos de referência

Seja p_{e1} a probabilidade de certo valor q de uma ação variável Q ser excedido em 1 unidade de tempo (1 dia, 1 mês, 1 ano, 1 período de 50 anos, etc.). Seja p_{en} a probabilidade desse mesmo valor ser excedido em n unidades de tempo. É possível relacionar p_{en} com p_{e1} . Com efeito,

$$p_{e1} = P(Q_{\max,1} > q) = 1 - F_{Q_{\max,1}}(q).$$

Da mesma forma,

$$p_{en} = P(Q_{\max,n} > q) = 1 - F_{Q_{\max,n}}(q).$$

Mas como $F_{Q_{\max,n}}(q) = [F_{Q_{\max,1}}(q)]^n$, vem:

$$\begin{aligned} p_{en} &= 1 - [F_{Q_{\max,1}}(q)]^n \\ &= 1 - (1 - p_{e1})^n. \end{aligned} \tag{12.5}$$

Resolvendo (12.5) em ordem a p_{e1} , obtém-se:

$$p_{e1} = 1 - (1 - p_{en})^{1/n}. \tag{12.6}$$

Acabámos assim de deduzir expressões que nos permitem determinar a probabilidade de excedência em n unidades de tempo, de um determinado valor, a partir da probabilidade de excedência em uma unidade de tempo desse mesmo valor, e vice-versa. Podemos ainda deduzir uma expressão mais genérica que engloba as Eq. (12.6) e (12.5) como casos particulares. Com efeito, aplicando a Eq. (12.6) a m unidades de tempo, tem-se:

$$p_{e1} = 1 - (1 - p_{em})^{1/m}.$$

Substituindo esta Equação em (12.5), obtém-se a expressão pretendida:

$$p_{en} = 1 - (1 - p_{em})^{n/m} \tag{12.7}$$

Exemplo 12.2 Determinar a probabilidade de excedência em 50 anos de um valor que tem uma probabilidade de excedência anual de 0.02.

Resolução

Pretendemos calcular p_{e50} . Considerando $n = 50$ e $m = 1$ na Eq. (12.7), tem-se:

$$p_{e50} = 1 - (1 - 0.02)^{50} = 0.636.$$

Comentário: Os valores característicos das ações ambientais especificados no Eurocódigo 1 (vento, variações de temperatura e neve) têm uma probabilidade de excedência anual de 0.02. Conforme se acaba de constatar, tais valores têm uma probabilidade de ocorrência muito significativa (diríamos mesmo, quase certa) durante a vida útil de uma estrutura (50 anos, nos casos correntes).

12.3 Período de retorno

Vimos anteriormente que o valor característico de uma ação variável é caracterizado por uma probabilidade de excedência e por um período de referência (por exemplo, valor com probabilidade de excedência de 0.05 em 50 anos). Uma forma alternativa de caracterizar o valor característico de uma ação variável é por meio do chamado *período de retorno*. O período de retorno de um certo evento (com probabilidade não nula de ocorrência) é, por definição, a duração média entre ocorrências sucessivas desse evento.

Apliquemos esta definição ao evento correspondente à excedência do valor característico de uma ação variável. Seja então Q uma ação variável e $Q_{\max,1} = \{\text{Máximo de } Q \text{ em 1 unidade de tempo}\}$. Seja Q_k o valor característico de Q correspondente à probabilidade de excedência p_{e1} nessa unidade de tempo. Portanto, $P(Q_{\max,1} > Q_k) = p_{e1}$. Seja agora a variável $X = \{\text{Número de unidades de tempo até observar o evento } Q_{\max,1} > Q_k\}$. O período de retorno desse evento, que representaremos por T_R , é então o valor médio de X , e é dado por:

$$T_R = \frac{1}{p_{e1}}. \quad (12.8)$$

Nota É relativamente fácil demonstrar este resultado. Com efeito,

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= p_{e1}, \\ P(X = 2) &= (1 - p_{e1}) p_{e1}, \\ P(X = 3) &= (1 - p_{e1})^2 p_{e1}, \\ &\dots \\ P(X = x) &= (1 - p_{e1})^{x-1} p_{e1}. \end{aligned}$$

Verifica-se assim que a variável X é uma variável com distribuição geométrica, cujo valor médio é dado por $1/p_{e1}$. (Ver Anexo A.) ■

Substituindo na Eq. (12.8) p_{e1} pelo valor dado por (12.6), tem-se:

$$T_R = \frac{1}{1 - (1 - p_{en})^{1/n}} \quad (12.9)$$

Esta expressão permite determinar o período de retorno de um valor que tem uma probabilidade p_{en} de ser excedido em n unidades de tempo. O período de retorno vem expresso nessas unidades de tempo. Temos assim duas formas de caracterizar o valor característico de uma ação variável:

- através de (1) uma probabilidade de excedência e (2) um período de referência;
- através simplesmente de um período de retorno.

Repare-se que a Eq. (12.8) pode ser vista como um caso particular de (12.9). Com efeito, se fizermos $n = 1$ em (12.9), obtém-se (12.8).

Exemplo 12.3 Determinar o período de retorno dos seguintes valores:

- a) Valor característico correspondente a uma probabilidade de excedência de 0.05 em 50 anos.
- b) Valor característico das ações ambientais definidas no Eurocódigo 1 (valor com probabilidade de excedência anual de 0.02).
- c) Valor característico da ação sísmica definida no Eurocódigo 8 (valor com probabilidade de excedência de 0.10 em 50 anos).

Resolução

- a) Considerando $n = 50$ e $p_{e50} = 0.05$ na Eq. (12.9), obtém-se:

$$T_R = \frac{1}{1 - (1 - 0.05)^{1/50}} = 975 \text{ anos.}$$

- b) Considerando $n = 1$ e $p_{e1} = 0.02$ na Eq. (12.9), obtém-se:

$$T_R = \frac{1}{0.02} = 50 \text{ anos.}$$

- c) Considerando $n = 50$ e $p_{e50} = 0.10$ na Eq. (12.9), obtém-se:

$$T_R = \frac{1}{1 - (1 - 0.10)^{1/50}} = 475 \text{ anos.}$$

Uma expressão aproximada à Eq. (12.9), comumente utilizada, é a seguinte (Cremona, 2011):

$$T_R = -\frac{n}{\ln(1 - p_{en})}. \quad (12.10)$$

Note-se que n representa um período com duração igual a n unidades de tempo. Designando esse período por T , chamado período de referência, obtém-se a seguinte

expressão (que aparece frequentemente na bibliografia):

$$T_R = -\frac{T}{\ln(1 - p_{eT})} \quad (12.11)$$

onde p_{eT} designa a probabilidade de excedência em T . As expressões (12.9) e (12.11) dão praticamente o mesmo resultado. Para p_{eT} pequeno, $\ln(1 - p_{eT}) \approx -p_{eT}$, donde a Eq. (12.11) pode ser aproximada por:

$$T_R \approx \frac{T}{p_{eT}}. \quad (12.12)$$

12.4 Valor característico de uma ação variável em função do período de retorno

De acordo com a notação que temos vindo a usar, p_{eT} representa a probabilidade de certo valor q de uma ação variável Q ser excedido no período T . Em símbolos:

$$p_{eT} = P(Q_{\max, T} > q) = 1 - F_{Q_{\max, T}}(q).$$

Tomando o período T como uma unidade de tempo, a Eq. (12.8) conduz a:

$$T_R = \frac{1}{1 - F_{Q_{\max, T}}(q)}. \quad (12.13)$$

Esta equação permite determinar o período de retorno associado à excedência de um dado valor q de uma ação variável. Em particular, fazendo $q = Q_k$, a equação fornece o período de retorno correspondente à excedência do valor característico:

$$T_R(Q_k) = \frac{1}{1 - F_{Q_{\max, T}}(Q_k)} \quad (12.14)$$

Reciprocamente, invertendo (12.14), obtém-se o valor característico correspondente a um determinado período de retorno:

$$Q_k(T_R) = F_{Q_{\max, T}}^{-1}\left(1 - \frac{1}{T_R}\right) \quad (12.15)$$

O período de retorno deve ser expresso nas unidades de tempo a que se refere a distribuição $F_{Q_{\max, T}}$, tomando o período T como uma unidade de tempo. Assim, se a distribuição referir-se aos máximos anuais ($T = 1$ ano), o período de retorno deve ser expresso em anos. Se a distribuição referir-se aos máximos em 50 anos ($T = 50$ anos), o período de retorno deve ser expresso em intervalos de 50 anos, e assim sucessivamente.

Exemplo 12.4 Considere-se uma ponte na qual os pesos máximos diários dos caminhões que a atravessam têm uma média de 241.4 kN e um desvio padrão de 97.5 kN.

- Determinar o valor característico do peso dos caminhões correspondente a um período de retorno de 1000 anos, assumindo que os máximos diários seguem um modelo Gumbel.
- Determinar o período de retorno a que corresponde $1.5Q_k$, onde Q_k é o valor determinado na alínea a).

Resolução

- De acordo com o enunciado, $Q_{\max,1 \text{ dia}} \sim \text{Gb}(\mu = 241.4, \sigma = 97.5)$ kN.

O período de referência T é assim de 1 dia. Começa-se então por expressar o período de retorno em dias:

$$T_R = 1000 \times 365 = 365\,000 \text{ dias.}$$

Para este período de retorno, o valor característico do peso dos caminhões é igual a:

$$Q_k = F_{Q_{\max,1 \text{ dia}}}^{-1} \left(1 - \frac{1}{365\,000} \right) = 1171.2 \text{ kN.}$$

- Período de retorno correspondente a $1.5Q_k$ é:

$$\begin{aligned} T_R &= \frac{1}{1 - F_{Q_{\max,1 \text{ dia}}}(1.5 \times 1171.2)} \\ &= 808\,432\,577 \text{ dias} \\ &\approx 2 \text{ milhões de anos!} \end{aligned}$$

A questão que acabamos de responder ilustra um aspeto importante a ter presente: quando aplicamos um coeficiente de segurança a um valor característico (a fim de obter o respetivo valor de dimensionamento), na prática tal poderá significar que a verificação da segurança vai ser efetuada para uma ação com um período de retorno substancialmente superior ao do valor característico, porventura inatingível.

Apresenta-se de seguida o código Python usado para responder às questões formuladas.

```
from numpy import sqrt, pi
from scipy.stats import gumbel_r as gumb

mu = 241.4
sigma = 97.5
```

```
# a)
loc = mu - sqrt(6)*(0.5772/pi)*sigma
scale = sqrt(6)*sigma/pi
Qk = gumb.ppf(1 - 1/365000, loc, scale)

# b)
TR = 1/(1 - gumb.cdf(1.5*Qkb, loc, scale))
```

12.5 Ações variáveis com distribuição Gumbel

As expressões desenvolvidas nas seções anteriores aplicam-se a ações variáveis com distribuição genérica $F_{Q_{\max,T}}(q)$. Visto que a distribuição Gumbel é uma das mais utilizadas na modelação de máximos de ações variáveis, justifica-se concretizar algumas dessas expressões para esta distribuição específica.

Considere-se então uma ação variável Q , cujos máximos no período de referência T seguem uma distribuição Gumbel com média μ_T e desvio padrão σ . Recorde-se que o desvio padrão da distribuição Gumbel é invariante com o período T . O valor característico de Q correspondente ao quantil p é, como vimos anteriormente, dado por $Q_k(p, T) = F_{Q_{\max,T}}^{-1}(p)$, donde, recorrendo à expressão para a inversa da distribuição Gumbel, tem-se:

$$Q_k(p, T) = \mu_T - \frac{\sqrt{6}}{\pi} \sigma [0.5772 + \ln(-\ln p)] \quad (12.16)$$

Se o período a que se refere a distribuição de máximos for diferente do período de referência T , digamos τ , usa-se Eq. (12.4), vindo:

$$Q_k(p, T) = \mu_\tau - \frac{\sqrt{6}}{\pi} \sigma [0.5772 + \ln(-\ln(p^{\tau/T}))] \quad (12.17)$$

Vejamos agora como determinar valores característicos (de ações com distribuição Gumbel) em função do período de retorno. A aplicação da Eq. (12.15) em conjunto com a expressão para a inversa da distribuição Gumbel, conduz imediatamente a:

$$Q_k(T_R) = \mu_T - \frac{\sqrt{6}}{\pi} \sigma \left\{ 0.5772 + \ln \left[-\ln \left(1 - \frac{1}{T_R} \right) \right] \right\} \quad (12.18)$$

onde μ_T e σ são a média e o desvio padrão dos máximos no período T da ação em causa. O período de retorno deve ser expresso nas unidades de tempo tomando T como uma unidade de tempo. Por exemplo, se T for 50 anos, o período de retorno deve ser expresso em intervalos de 50 anos (1 unidade de tempo equivale neste caso a 50 anos).

Exemplo 12.5 Considere-se novamente a ponte do exemplo anterior, na qual os pesos máximos diários dos camiões que a atravessam seguem uma distribuição Gumbel com uma média de 241.4 kN e um desvio padrão de 97.5 kN. Determinar o valor característico do peso dos camiões para um período de retorno de 1000 anos.

Resolução

Visto que os parâmetros do modelo refere-se aos máximos diários, o período de retorno a usar na Eq. (12.18) deve ser expresso em dias. Assumindo que 1 ano são 365 dias, tem-se:

$$T_R = 1000 \times 365 = 365\,000 \text{ dias.} \quad (12.19)$$

Aplicando então (12.18) vem:

$$Q_k = 241.4 - \frac{\sqrt{6}}{\pi} 97.5 \left\{ 0.5772 + \ln \left[-\ln \left(1 - \frac{1}{365000} \right) \right] \right\} = 1171.2 \text{ kN.}$$

Esta questão já tinha sido respondida no exemplo anterior, recorrendo à função `gumbel_r()` do módulo `scipy.stats` do Python, tendo-se obtido o mesmo resultado, como não podia deixar de ser.

Suponha-se agora que se conhece $Q_k(p, T)$ e pretende determinar-se $Q_k(p, T')$, ou seja, pretende determinar-se o valor característico de Q correspondente ao mesmo quantil p , mas referente ao período T' . Ora, de acordo com a Eq. (12.16):

$$Q_k(p, T) = \mu_T - \frac{\sqrt{6}}{\pi} \sigma [0.5772 + \ln(-\ln p)]. \quad (12.20)$$

Para o período de referência T' , tem-se, de acordo com (12.17):

$$\begin{aligned} Q_k(p, T') &= \mu_{T'} - \frac{\sqrt{6}}{\pi} \sigma [0.5772 + \ln(-\ln(p^{T/T'}))] \\ &= \mu_{T'} - \frac{\sqrt{6}}{\pi} \sigma [0.5772 + \ln(-\frac{T}{T'} \ln p)] \\ &= \mu_{T'} - \frac{\sqrt{6}}{\pi} \sigma [0.5772 + \ln\left(\frac{T}{T'}\right) + \ln(-\ln p)]. \end{aligned} \quad (12.21)$$

Subtraindo (12.20) a (12.21), tem-se:

$$\begin{aligned} Q_k(p, T') - Q_k(p, T) &= -\frac{\sqrt{6}}{\pi} \sigma \ln\left(\frac{T}{T'}\right) \\ &= \frac{\sqrt{6}}{\pi} \sigma \ln\left(\frac{T'}{T}\right), \end{aligned}$$

donde,

$$Q_k(p, T') = Q_k(p, T) + \frac{\sqrt{6}}{\pi} \sigma \ln\left(\frac{T'}{T}\right) \quad (12.22)$$

Esta expressão permite assim determinar o valor característico respeitante a um dado período de referência a partir do valor característico respeitante a outro período de referência (para a mesma probabilidade de excedência em ambos os períodos). Para tal, como mostra a expressão que acabámos de deduzir, só necessitamos de conhecer o desvio padrão da distribuição Gumbel em causa (que se mantém invariante com o período de referência). Vejamos um exemplo.

Exemplo 12.6 Uma ponte existente de pequena dimensão foi projetada originalmente para um veículo com peso característico de 600 kN. De acordo com o regulamento em vigor à época, esse valor refere-se a um certo quantil da distribuição de máximos em 50 anos. A ponte apresenta-se atualmente em estado bastante avançado de degradação, tendo sido decidido substituí-la num prazo de 2 anos, durante o qual ainda se manterá em serviço, caso seja segura.

A fim de verificar a segurança da ponte durante este período remanescente, pretende-se determinar o peso característico do veículo (a usar nos cálculos) consistente com os critérios originais do projeto e com o período de vida residual de 2 anos. Estima-se que os pesos máximos dos veículos pesados de mercadorias que circulam sobre a ponte apresentam um desvio padrão de 40 kN.

Resolução

Tem-se:

$$Q_k(p, 2 \text{ anos}) = 600 + \frac{\sqrt{6}}{\pi}(40) \ln\left(\frac{2}{50}\right) = 500 \text{ kN.}$$

A verificação da segurança para um período de 2 anos irá traduzir-se assim numa redução do valor característico de 600 para 500 kN.

Comentários:

- (1) É interessante notar que a resposta não depende do quantil implícito no valor de 600 kN.
- (2) Note-se que a consideração de um desvio padrão superior a 40 kN iria traduzir-se numa diminuição mais acentuada do valor característico, pelo que a consideração de um desvio padrão elevado seria um procedimento contra a segurança. Isto pode parecer estranho à primeira vista, pois normalmente a consideração de desvios padrão elevados é um procedimento conservativo. Note-se, porém, que o valor de 600 kN também está afetado pelo mesmo desvio padrão. Assim, a consideração de um desvio padrão elevado implica assumir que o valor de 600 kN também é elevado, pelo que sofrerá uma maior redução ao diminuirmos o período de referência.

Vimos acima como determinar o valor característico de uma ação variável para um determinado período de referência a partir do valor característico para outro período de referência. Vejamos agora como determinar o valor característico para um determinado período de retorno, digamos T_{R2} , a partir do valor característico

referente a outro período de retorno, T_{R1} . De acordo com (12.18):

$$\begin{aligned} Q_k(T_{R2}) &= \mu_T - \frac{\sqrt{6}}{\pi} \sigma \left\{ 0.5772 + \ln \left[-\ln \left(1 - \frac{1}{T_{R2}} \right) \right] \right\} \\ &= \mu_T \left\{ 1 - \frac{\sqrt{6}}{\pi} V_T \left\{ 0.5772 + \ln \left[-\ln \left(1 - \frac{1}{T_{R2}} \right) \right] \right\} \right\}, \end{aligned} \quad (12.23)$$

onde μ_T e V_T representam a média e coeficiente de variação dos máximos da ação no período de referência T .

Da mesma forma, para o período de retorno T_{R1} , o valor característico será:

$$Q_k(T_{R1}) = \mu_T \left\{ 1 - \frac{\sqrt{6}}{\pi} V_T \left\{ 0.5772 + \ln \left[-\ln \left(1 - \frac{1}{T_{R1}} \right) \right] \right\} \right\}. \quad (12.24)$$

Dividindo (12.23) por (12.24), obtém-se a expressão pretendida:

$$Q_k(T_{R2}) = \frac{1 - \frac{\sqrt{6}}{\pi} V_T \left\{ 0.5772 + \ln \left[-\ln \left(1 - \frac{1}{T_{R2}} \right) \right] \right\}}{1 - \frac{\sqrt{6}}{\pi} V_T \left\{ 0.5772 + \ln \left[-\ln \left(1 - \frac{1}{T_{R1}} \right) \right] \right\}} Q_k(T_{R1}) \quad (12.25)$$

Recorde-se que os períodos de retorno (T_{R1} e T_{R2}) devem ser expressos tomando T como unidade de tempo. Por exemplo, se o coeficiente de variação V_T referir-se à distribuição dos máximos diários, os períodos de retorno devem ser expressos em dias. Se se referir à distribuição dos máximos anuais, os períodos de retorno devem ser expressos em anos, e assim por diante.

12.6 Período de retorno para situações de projeto transitórias

Em situações de projeto transitórias faz sentido usar nas verificações de segurança valores característicos (de ações variáveis) inferiores aos que se usam nas situações de projeto persistentes, visto que se aplicam a uma situação com duração relativamente reduzida, comparativamente com a vida útil de projeto. Por exemplo, suponha-se que, durante a construção de uma estrutura nova (ou durante a reabilitação de uma estrutura existente), esta fica temporariamente numa situação relativamente vulnerável à ação do vento, exigindo uma verificação específica da segurança para essa situação. Tratando-se de uma situação temporária, na qual a estrutura ficará exposta à ação do vento durante um período de tempo relativamente curto (quando comparado com a vida útil de projeto), faz sentido verificar a segurança usando um valor característico da ação inferior ao usado nas situações normais (situações de projeto persistentes).

O problema da quantificação do valor característico de uma ação variável para uma situação de projeto transitória pode ser resolvido determinando o valor característico da ação para um período de referência com duração igual à duração da situação de projeto transitória e adotando uma probabilidade de excedência nesse período semelhante à que se adota nas situações de projeto persistentes. Vejamos um exemplo.

Exemplo 12.7 Uma ponte rodoviária de betão armado vai ser alvo de uma intervenção, que inclui a substituição dos aparelhos de apoio. Durante as operações de substituição dos aparelhos de apoio (que exigem o levantamento do tabuleiro), a ponte deve permanecer em serviço. Visto que a estrutura da ponte é hiperstática, o levantamento do tabuleiro vai introduzir uma redistribuição de esforços na estrutura, o que obriga a efetuar uma verificação da segurança, nomeadamente a verificação de eventual abertura de fendas no tabuleiro. A ponte está sujeita a tráfego relativamente pesado. Com o objetivo de melhor caracterizar o peso das sobrecargas, analisaram-se registos recentes dos pesos dos camiões que atravessaram a ponte. A partir desses registos obteve-se uma amostra de pesos máximos diários, cuja média e desvio padrão foram estimados em, respetivamente, 150 kN e 50 kN. Verificou-se também que o modelo Gumbel ajusta-se bem a essa amostra. Admitindo que os trabalhos não demoram mais de 7 dias, determinar o valor característico do peso dos camiões a considerar na verificação de segurança durante as operações de levantamento do tabuleiro.

Resolução

Para responder a esta questão é necessário fixar a probabilidade de excedência que se pretende durante os trabalhos de levantamento do tabuleiro (situação de projeto transitória). A probabilidade de 0.05 (a que corresponde o quantil de 0.95) é típica para a vida útil de projeto das estruturas, pelo que é razoável adotar a mesma probabilidade para a duração da situação provisória. Pretende-se, pois, determinar $Q_k(0.95, 7 \text{ dias})$. Recorrendo então à Eq. (12.17) tem-se:

$$\begin{aligned} Q_k(0.95, 7 \text{ dias}) &= 150 - \frac{\sqrt{6}}{\pi}(50) \left[0.5772 + \ln(-\ln(0.95^{1/7})) \right] \\ &= 319.2 \text{ kN.} \end{aligned}$$

Em alternativa, pode recorrer-se ao conceito de período de retorno. O período de retorno correspondente à probabilidade de excedência de 0.05 em 7 dias é:

$$T_R = \frac{1}{1 - (1 - 0.05)^{1/7}} = 137 \text{ dias.}$$

Para este período de retorno, o valor característico do peso dos camiões é igual a:

$$\begin{aligned} Q_k(137 \text{ dias}) &= 150 - \frac{\sqrt{6}}{\pi}(50) \left\{ 0.5772 + \ln \left[-\ln \left(1 - \frac{1}{137} \right) \right] \right\} \\ &= 319.2 \text{ kN,} \end{aligned}$$

que é igual ao valor determinado acima, como não podia deixar de ser.

No exemplo que acabámos de analisar, o valor característico para a situação de projeto transitória foi determinado considerando uma probabilidade de excedência de 0.05 no período com duração igual à da situação transitória. Conforme o exemplo mostrou, uma análise equivalente consiste em determinar o valor característico para um período de retorno reduzido, facilmente obtido considerando aquela probabilidade

de excedência durante aquele período de tempo. A Tabela 12.1 exemplifica valores de períodos de retorno a usar em situações de projeto transitórias.

Tabela 12.1 Exemplos de períodos de retorno a considerar em situações de projeto transitórias

Duração da situação transitória (T)	Período de retorno a considerar (T_R)*
1 mês	2 anos
3 meses	5 anos
6 meses	10 anos
12 meses	20 anos

* Calculado recorrendo à Eq. (12.11) para uma probabilidade de excedência de 0.05 durante a situação transitória.

As situações de projeto transitórias ocorrem tipicamente durante trabalhos de construção de estruturas novas ou durante trabalhos de reabilitação de estruturas existentes. Por exemplo, na construção de pontes por consolas sucessivas estas ficam particularmente vulneráveis à ação do vento e à ação sísmica antes da execução das aduelas de fecho, obrigando a uma verificação da segurança específica, mas, naturalmente, para valores da ação do vento e sísmica convenientemente reduzidos (Jacinto e Santos, 2021). Um outro exemplo ocorre na reabilitação de edifícios antigos, nos quais, por razões arquitectónicas e patrimoniais, é decidido manter algumas das suas fachadas. Durante os trabalhos de reabilitação, essas fachadas ficam particularmente fragilizadas, exigindo a construção de estruturas de contenção provisórias, em geral metálicas. Essas estruturas poderão ser dimensionadas para uma ação do vento adequadamente reduzida, função do período de utilização da estrutura provisória.

Note-se que o princípio da redução do valor característico das ações variáveis em situações de projeto transitórias aplica-se também no dimensionamento de certos elementos que tenham uma vida útil inferior à da estrutura onde estão inseridos, ou seja, elementos que tenham de ser substituídos antes da estrutura atingir o fim da sua vida útil. Um caso típico são as juntas de dilatação das pontes, que têm aproximadamente uma vida útil de 10 anos. Então, na determinação dos deslocamentos que a junta terá de suportar, as ações variáveis intervenientes deverão ser quantificadas com valor reduzido. Por exemplo, em Portugal continental, para um período de referência de 10 anos, os deslocamentos impostos pela ação sísmica reduzem-se aproximadamente para metade em relação à ação sísmica de projeto, o que conduzirá, naturalmente, a juntas de dilatação mais económicas.

Capítulo 13

Determinação de coeficientes parciais de segurança

A possibilidade de ajustar coeficientes parciais de segurança tem manifesto interesse no âmbito da segurança de estruturas existentes. Os coeficientes de segurança especificados na regulamentação para estruturas novas aplicam-se a populações relativamente vastas de estruturas, podendo não refletir corretamente os níveis de incerteza reais para uma estrutura particular existente. Se, durante a avaliação de uma estrutura existente, estiver disponível informação estatística relevante a respeito de uma dada variável básica do problema, pode equacionar-se a possibilidade de ajustar o coeficiente de segurança dessa variável concreta.

Conforme mencionado anteriormente, o método FORM pode ser usado como ferramenta simples de calibração de coeficientes parciais de segurança. Neste capítulo vamos usar esse método para obter expressões que nos permitem determinar coeficientes parciais de segurança para os modelos probabilísticos mais comuns em segurança estrutural. A ideia vai ser usar os valores padrão dos coeficientes de sensibilidade FORM apresentados no Capítulo 9.

Conforme veremos, uma vez selecionado um modelo probabilístico para uma dada variável, o coeficiente parcial de segurança para essa variável é função de: (1) coeficiente de variação da variável; (2) quantil implícito no valor característico da ação; (3) importância da variável no EL em consideração (medida pelo respectivo coeficiente de sensibilidade FORM); (4) índice de fiabilidade pretendido para o EL em consideração.

13.1 Formulação geral

Recorde-se que, de acordo com o método FORM, o valor de dimensionamento de uma variável genérica X com distribuição $F_X(x)$ é dado por:

$$X_d = F_X^{-1}(\Phi(-\alpha_X \beta)). \quad (13.1)$$

onde α_X é o coeficiente de sensibilidade FORM da variável no EL em consideração e β o índice de fiabilidade referente ao mesmo EL.

A partir da Eq. (13.1) podemos obter expressões gerais para os coeficientes parciais de segurança. Para variáveis básicas representando ações, tem-se:

$$X_d = \gamma_f X_k \Rightarrow \gamma_f = \frac{F_X^{-1}(\Phi(-\alpha_X \beta))}{X_k} \quad (13.2)$$

Para variáveis representando resistências, tem-se:

$$X_d = \frac{X_k}{\gamma_m} \Rightarrow \gamma_m = \frac{X_k}{F_X^{-1}(\Phi(-\alpha_X \beta))} \quad (13.3)$$

O valor característico corresponde geralmente a um certo quantil p da distribuição de X , isto é:

$$X_k = F_X^{-1}(p) \quad (13.4)$$

Os coeficientes γ_f e γ_m dependem assim do quantil p implícito no valor característico da variável em causa.

O índice de fiabilidade β que aparece nas equações (13.2) e (13.3) pode ser encarado como o índice de fiabilidade alvo. No Capítulo 11 sintetizaram-se as recomendações dos Eurocódigos e outra literatura relevante relativamente a esse índice, quer para estruturas novas, quer para estruturas existentes.

O ponto chave para a determinação de coeficientes parciais de segurança recorrendo ao método FORM reside nos coeficientes de sensibilidade α . Conforme vimos no Capítulo 9, dada uma função estado limite $M = g(X_1, \dots, X_n)$, constituída por n variáveis básicas, a cada uma das variáveis X_i corresponde um coeficiente de sensibilidade α_i , os quais obedecem às seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} -1 &\leq \alpha_i \leq 1, \\ \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 &= 1. \end{aligned}$$

O coeficiente de sensibilidade α_i mede o impacto da variável X_i no índice de fiabilidade β . Quanto mais próximo de 1 ou de -1 for α_i maior o impacto, ou importância, da variável na fiabilidade do EL em consideração. Naturalmente, o coeficiente de sensibilidade de uma dada variável depende do EL em consideração. A mesma variável terá outros coeficientes de sensibilidade para outros EL, pois a sua importância não é a mesma em todos os EL onde aparece. No entanto, conforme vimos no Capítulo 9, é

possível identificar determinados valores típicos desses coeficientes, como os indicados na Tabela 9.2 (p. 162). O uso desses valores, chamados valores padrão, permite-nos de um modo muito simples determinar coeficientes parciais de segurança de variáveis específicas sem efetuar uma análise de fiabilidade.

Voltando às equações (13.2) e (13.3), convém ter presente que os coeficientes γ_f e γ_m aí definidos refletem apenas a incerteza na variável básica em questão, conforme traduzida na distribuição $F_X(x)$, e portanto não podem ser diretamente comparados com os coeficientes de segurança especificados nos Eurocódigos, pois estes refletem também a incerteza nos modelos de transformação que intervêm na formulação dos estados limites. O Eurocódigo 0 (EN 1990, 2002) representa por γ_F o coeficiente de segurança a aplicar às ações, o qual incorpora todas as incertezas relevantes do lado das ações, incluindo as incertezas de modelação. De acordo com essa Norma, o coeficiente γ_F pode ser desdobrado da seguinte forma:

$$\gamma_F = \gamma_{Sd} \cdot \gamma_f \tag{13.5}$$

onde γ_{Sd} traduz as incertezas nos modelos estrutural e de ações e γ_f é dado por (13.2).

De forma semelhante, o mesmo Eurocódigo representa por γ_M o coeficiente de segurança a aplicar às resistências, o qual incorpora todas as incertezas relevantes do lado da resistência, podendo ser desdobrado da seguinte forma:

$$\gamma_M = \gamma_{Rd} \cdot \gamma_m \tag{13.6}$$

onde γ_{Rd} traduz as incertezas no modelo empregue para determinar a resistência (e eventualmente outras incertezas, tais como as incertezas nos parâmetros geométricos) e γ_m é dado por (13.3).

Vejamos como obter expressões para γ_{Sd} e γ_{Rd} .

Expressão para o coeficiente γ_{Sd}

Seja $E(X_1, \dots, X_n)$ o efeito de ação predito pelos modelos estrutural e de ações implícitos numa dada função EL, e seja E o verdadeiro valor do efeito da ação. Então, a variável básica θ_E usada para descrever a incerteza nesses modelos é definida de tal maneira que:

$$E = \theta_E \cdot E(X_1, \dots, X_n). \tag{13.7}$$

Ora, de acordo com o método dos CPS, o valor de dimensionamento de E é obtido substituindo todas as variáveis básicas em (13.7) pelo respetivo valor de dimensionamento, isto é:

$$E_d = \theta_{Ed} \cdot E(X_{1d}, \dots, X_{nd}), \tag{13.8}$$

onde θ_{Ed} representa o valor de dimensionamento da variável básica θ_E . Por outro lado, de acordo com a EN 1990 (2002), E_d é expresso por:

$$E_d = \gamma_{Sd} \cdot E(X_{1d}, \dots, X_{nd}). \tag{13.9}$$

Comparando (13.8) com (13.9) segue imediatamente que γ_{Sd} coincide com o valor de dimensionamento de θ_E . Assim, representando a FDC de θ_E por $F_{\theta_E}(\cdot)$, a Eq. (13.1) conduz à seguinte expressão:

$$\gamma_{Sd} = F_{\theta_E}^{-1}(\Phi(-\alpha_E \beta)), \tag{13.10}$$

onde α_E é o coeficiente de sensibilidade da variável básica θ_E . Como referido anteriormente, a variável θ_E é modelada frequentemente pela distribuição Lognormal, pelo que, recorrendo à inversa da respetiva FDC, obtém-se a seguinte expressão para γ_{Sd} :

$$\gamma_{Sd} = \mu_{\theta_E} \cdot \exp(-\alpha_E \beta V_{\theta_E}) \quad (13.11)$$

onde μ_{θ_E} e V_{θ_E} são a média e coeficiente de variação da variável θ_E , respetivamente. Recorde-se que μ_{θ_E} traduz a exatidão no modelo estrutural (e de ações, se relevante), isto é, a sua capacidade em prever valores cuja média seja próxima do verdadeiro valor do efeito de ação em causa. Se o modelo estrutural for relativamente exato, $\mu_{\theta_E} \approx 1.00$. O coeficiente de variação V_{θ_E} traduz, recorde-se, a precisão do modelo estrutural, isto é, a sua capacidade em prever valores com pequena dispersão em relação à média. Um modelo estrutural com boa precisão terá $V_{\theta_E} \approx 0.0$, a que corresponderá $\gamma_{Sd} \approx \mu_{\theta_E}$.

A título de exemplo, a Tabela 13.1 mostra os valores de γ_{Sd} que se obtêm usando para μ_{θ_E} e V_{θ_E} os valores recomendados pelo *Probabilistic Model Code* (JCSS, 2001).

Tabela 13.1 Valores de γ_{Sd} que se obtêm usando para μ_{θ_E} e V_{θ_E} os valores recomendados pelo *Probabilistic Model Code* e considerando $\alpha_E = -0.28$, $\beta = 3.8$

Tipo de modelo estrutural	Tipo de resposta	μ_{θ_E}	V_{θ_E}	γ_{Sd}
Modelo de barras	Momentos	1.00	0.10	1.11
	Esf. axial	1.00	0.05	1.05
	Esf. Transverso	1.00	0.10	1.11
Modelo de casca	Momentos	1.00	0.20	1.24
	Forças	1.00	0.10	1.11

Expressão para o coeficiente γ_{Rd}

Seguindo um raciocínio idêntico ao acima, seja $R(X_1, \dots, X_n)$ o valor predito pelo modelo de resistência implícito numa dada função EL, e seja R o verdadeiro valor da resistência. Então, a variável básica θ_R usada para descrever a incerteza nesse modelo é definida de tal maneira que:

$$R = \theta_R \cdot R(X_1, \dots, X_n). \quad (13.12)$$

Ora, de acordo com o método dos CPS, o valor de dimensionamento de R é obtido substituindo todas as variáveis básicas em (13.12) pelo respetivo valor de dimensionamento, isto é:

$$R_d = \theta_{Rd} \cdot R(X_{1d}, \dots, X_{nd}), \quad (13.13)$$

onde θ_{Rd} representa o valor de dimensionamento da variável básica θ_R . Por outro lado, de acordo com a EN 1990 (2002), R_d é expresso por:

$$R_d = \frac{1}{\gamma_{Rd}} \cdot R(X_{1d}, \dots, X_{nd}). \quad (13.14)$$

Comparando (13.13) com (13.14) segue imediatamente que γ_{Rd} coincide com o inverso do valor de dimensionamento de θ_R . Assim, representando a FDC de θ_R por $F_{\theta_R}(\cdot)$,

a Eq. (13.1) conduz à seguinte expressão:

$$\gamma_{Rd} = \frac{1}{F_{\theta_R}^{-1}(\Phi(-\alpha_R \beta))}. \tag{13.15}$$

onde α_R é o coeficiente de sensibilidade da variável básica θ_R . Como referido anteriormente, a variável θ_R é modelada frequentemente pela distribuição Lognormal, pelo que, recorrendo à inversa da FDC dessa distribuição, obtém-se a seguinte expressão para γ_{Rd} :

$$\gamma_{Rd} = \frac{1}{\mu_{\theta_R} \cdot \exp(-\alpha_R \beta V_{\theta_R})} \tag{13.16}$$

onde μ_{θ_R} e V_{θ_R} são a média e coeficiente de variação da variável θ_R , respetivamente. A média μ_{θ_R} traduz a exatidão do modelo de resistência em causa, isto é, a sua capacidade em prever valores da resistência cuja média seja próxima do valor exato. Os modelos de resistência são frequentemente conservativos, isto é, preveem valores da resistência sistematicamente inferiores aos valores reais. Isto sugere que μ_{θ_R} será muitas vezes superior a 1.00. O coeficiente de variação V_{θ_R} traduz a precisão do modelo de resistência em causa, isto é, a sua capacidade em prever valores da resistência com pequena dispersão em relação à média. Um modelo de resistência com boa precisão terá $V_{\theta_R} \approx 0.0$, a que corresponderá $\gamma_{Rd} \approx 1/\mu_{\theta_R}$.

A título de exemplo, a Tabela 13.2 mostra os valores de γ_{Rd} que se obtêm usando para μ_{θ_R} e V_{θ_R} os valores recomendados pelo *Probabilistic Model Code* (JCSS, 2001). Conforme se observa, em vários casos obtêm-se coeficientes γ_{Rd} inferiores à unidade, o que significa que, nesses casos, os erros de natureza aleatória (traduzidos no coeficiente V_{θ_R}) são compensados pelos erros sistemáticos (traduzidos na média μ_{θ_R}), que são favoráveis nesses casos devido ao conservadorismo do modelo.

Tabela 13.2 Valores de γ_{Rd} que se obtêm usando para μ_{θ_R} e V_{θ_R} os valores recomendados pelo *Probabilistic Model Code* e considerando $\alpha_R = 0.32$, $\beta = 3.8$

Material estrutural	Tipo de resistência	μ_{θ_R}	V_{θ_R}	γ_{Rd}
Aço estrutural	Flexão	1.00	0.05	1.06
	Esforço transversal	1.00	0.05	1.06
	Ligações soldadas	1.15	0.15	1.04
	Ligações aparafusadas	1.25	0.15	0.96
Betão armado	Flexão	1.20	0.15	1.00
	Esforço transversal	1.40	0.25	0.97

13.2 Coeficientes de segurança para ações

13.2.1 Ações permanentes

As ações permanentes, e em particular as que resultam dos pesos próprios dos materiais estruturais e não estruturais, são modeladas frequentemente pelo modelo Normal. Seja então g uma variável básica representando uma ação permanente, e admita-se que $g \sim N(\mu, \sigma)$. Então, considerando a expressão da inversa da distribuição Normal, a Eq. (13.2) conduz ao seguinte coeficiente parcial de segurança:

$$\gamma_g = \frac{\mu(1 - \alpha \beta V)}{g_k} \quad (13.17)$$

Para ações permanentes, o valor característico coincide geralmente com o valor médio, isto é, $g_k = \mu$, pelo que, na maioria dos casos:

$$\gamma_g = 1 - \alpha \beta V \quad (13.18)$$

Designando por γ_G o coeficiente de segurança que contemple todas as incertezas relevantes do lado da ação, tem-se, naturalmente:

$$\gamma_G = \gamma_{Sd} \gamma_g \quad (13.19)$$

Exemplo 13.1 Propor um coeficiente de segurança a aplicar a um peso específico de um material nas seguintes hipóteses:

- O coeficiente de variação V do peso específico é estimado em 0.075.
- O peso não é ação dominante no EL em consideração, podendo considerar-se $\alpha = -0.28$. (Ver Tabela 9.2, p. 162.)
- O índice de fiabilidade pretendido para o EL em consideração é $\beta = 3.8$.
- A incerteza de modelação é traduzida num coeficiente $\gamma_{Sd} = 1.1$.

Resolução

De acordo com as hipóteses indicadas, e considerando adicionalmente que o modelo Normal é adequado para modelar o peso específico do material, tem-se:

$$\gamma_G = (1.1) \left(1 - (-0.28)(3.8)(0.075) \right) \approx 1.20.$$

13.2.2 Ações variáveis

As ações variáveis, e em particular os seus valores máximos num determinado período de referência, são modeladas frequentemente recorrendo à distribuição Gumbel. Assim, dada uma ação variável q , designando por μ_n e V_n a média e o coeficiente de variação dos máximos da ação em n unidades de tempo (n anos, por exemplo), o coeficiente parcial de segurança da ação é dado por:

$$\gamma_q = \frac{\mu_n \left\{ 1 - \frac{\sqrt{6}}{\pi} V_n [0.5772 + \ln(-\ln \Phi(-\alpha\beta_n))] \right\}}{q_k} \quad (13.20)$$

onde α é o coeficiente de sensibilidade FORM da ação e β_n o índice de fiabilidade para o período de referência em causa (n unidades de tempo).

O valor do coeficiente de sensibilidade de uma ação variável depende do coeficiente de variação da variável, e portanto depende do período de referência, pois o coeficiente de variação depende do período de referência. Assim, se for decidido usar os valores-padrão de α indicados na Tabela 9.2, é necessário fixar o período de referência a que esses valores se aplicam. No que segue, assumiremos que esses valores aplicam-se à vida útil de projeto. Assim, o período de referência n na Eq. (13.20) refere-se à vida útil de projeto.

O valor característico da ação, q_k , corresponde a um certo quantil p_n dos máximos da ação em n unidades de tempo, ou seja:

$$q_k = \mu_n \left\{ 1 - \frac{\sqrt{6}}{\pi} V_n [0.5772 + \ln(-\ln p_n)] \right\}. \quad (13.21)$$

Assim, para uma vida útil de projeto igual a n unidades de tempo, o coeficiente parcial de segurança de acordo com (13.20) é dado por:

$$\gamma_q = \frac{1 - \frac{\sqrt{6}}{\pi} V_n [0.5772 + \ln(-\ln \Phi(-\alpha\beta_n))]}{1 - \frac{\sqrt{6}}{\pi} V_n [0.5772 + \ln(-\ln p_n)]} \quad (13.22)$$

O valor característico das ações variáveis é muitas vezes definido para o quantil $p_1 = 0.98$ dos máximos anuais (período de referência = 1 ano). É o caso das ações ambientais (vento, variações de temperatura e neve) definidas nos Eurocódigos. Para este caso particular, o valor característico da ação é, então:

$$q_k = \mu_1 \left\{ 1 - \frac{\sqrt{6}}{\pi} V_1 [0.5772 + \ln(-\ln p_1)] \right\} \quad (13.23)$$

$$= \mu_n \left\{ 1 - \frac{\sqrt{6}}{\pi} V_n [0.5772 + \ln(-\ln p_1^n)] \right\}. \quad (13.24)$$

onde μ_1 e V_1 designam, respetivamente, a média e coeficiente de variação dos máximos anuais. Assim, para as ações ambientais definidas nos Eurocódigos, o coeficiente parcial de segurança será:

$$\gamma_q = \frac{1 - \frac{\sqrt{6}}{\pi} V_n [0.5772 + \ln(-\ln \Phi(-\alpha\beta_n))]}{1 - \frac{\sqrt{6}}{\pi} V_n [0.5772 + \ln(-\ln p_1^n)]} \quad (13.25)$$

onde $p_1 = 0.98$ e n indica a vida útil de projeto em anos. Note-se que as equações (13.22) e (13.25) acabam por ser equivalentes, independentemente do valor de p_1 , pois $p_n = p_1^n$. Designando por γ_Q o coeficiente de segurança que contemple todas as incertezas relevantes do lado da ação, tem-se, naturalmente:

$$\gamma_Q = \gamma_{Sd} \gamma_q \quad (13.26)$$

Uma expressão útil aplicável à distribuição Gumbel é a que relaciona o coeficiente de variação dos máximos em n unidades de tempo com o coeficiente de variação dos máximos em 1 unidade de tempo. Pode demonstrar-se que:

$$V_n = \frac{\pi}{\frac{\pi}{V_1} + \sqrt{6} \ln n}. \quad (13.27)$$

Exemplo 13.2 Propor um coeficiente de segurança a aplicar à ação do vento numa dada estrutura, de acordo com as seguintes hipóteses:

- A ação do vento é dominante, considerando-se assim $\alpha = -0.70$.
- O coeficiente de variação dos máximos anuais da velocidade do vento é 0.13 ($V_1 = 0.13$).
- Considerar uma vida útil de projeto de 50 anos e um índice de fiabilidade para esse período de 3.8 ($\beta_{50} = 3.8$).
- A ação do vento vai ser quantificada de acordo com os Eurocódigos, pelo que o valor característico corresponde ao quantil 0.98 dos máximos anuais.
- A incerteza de modelação é traduzida num coeficiente $\gamma_{Sd} = 1.1$.

Resolução

Começa-se por determinar o coeficiente de variação dos máximos em 50 anos:

$$V_{50} = \frac{\pi}{\frac{\pi}{0.13} + \sqrt{6} \ln 50} = 0.093.$$

Aplicando a Eq. (13.25), vem

$$\gamma_q = \frac{1 - \frac{\sqrt{6}}{\pi}(0.093) [0.5772 + \ln(-\ln \Phi(0.70 \times 3.8))]}{1 - \frac{\sqrt{6}}{\pi}(0.093) [0.5772 + \ln(-\ln 0.98^{50})]} = 1.42.$$

Considerando agora uma incerteza de modelação traduzida num coeficiente $\gamma_{Sd} = 1.1$, tem-se, finalmente:

$$\gamma_Q = (1.1)(1.42) = 1.56.$$

Comentário: Obteve-se assim um coeficiente de segurança superior ao valor habitual de 1.50. Visto que os dados acima são razoáveis, este exemplo sugere

que, em estruturas onde o vento é uma ação condicionante, o coeficiente habitual de 1.50 pode não ser suficiente para garantir um índice de fiabilidade de 3.8 em 50 anos.

Exemplo 13.3 Uma linha de caminho-de-ferro, usada fundamentalmente para o transporte de minério, vai ser reativada. É necessário verificar até que ponto as pontes inseridas nessa linha cumprem as condições de segurança. A fim de caracterizar com maior rigor o peso dos vagões cheios de minério, procedeu-se à pesagem de vagões em circulação durante um certo período, tendo-se registado os pesos máximos diários. Observou-se que a amostra de máximos diários possui um coeficiente de variação de 0.30. Propor um coeficiente parcial de segurança a aplicar ao valor característico do peso dos vagões consistente com essa informação e com um índice de fiabilidade $\beta = 3.8$ em 50 anos.

Resolução

Os pesos próprios são em geral modelados por meio de uma distribuição Normal. Como a cauda direita desta distribuição não tem limite e decai de forma exponencial, os máximos dos pesos tendem para uma distribuição Gumbel. Assim, iremos assumir que os máximos diários do peso dos vagões seguem uma distribuição Gumbel.

É necessário estimar o coeficiente de variação dos máximos em 50 anos. De acordo com o enunciado, $V_{\text{dia}} = 0.30$. Portanto, o coeficiente de variação dos máximos em 50 anos (ou 50×365 dias) é igual a:

$$V_{50 \times 365} = \frac{\pi}{\frac{\pi}{0.30} + \sqrt{6} \ln(50 \times 365)} = 0.091.$$

Para responder à questão formulada, é necessário ainda fixar o valor para o coeficiente de sensibilidade, α , e o critério de definição do valor característico. Quanto ao coeficiente de sensibilidade, admite-se o valor usual para ações dominantes, isto é, $\alpha = -0.70$. Quanto ao critério de definição do valor característico, considera-se o valor correspondente ao quantil 0.95 dos máximos em 50 anos. Assim, recorrendo à Eq. (13.22), vem:

$$\gamma_q = \frac{1 - \frac{\sqrt{6}}{\pi}(0.091) [0.5772 + \ln(-\ln \Phi(0.70 \times 3.8))]}{1 - \frac{\sqrt{6}}{\pi}(0.091) [0.5772 + \ln(-\ln 0.95)]} = 1.16.$$

Para determinar o coeficiente final, γ_Q , é necessário assumir um valor para γ_{sd} . Tratando-se de uma ponte de betão armado hiperstática, na qual há sempre redistribuições de esforços, e portanto alguma incerteza nos esforços atuantes, consideraremos $\gamma_{sd} = 1.15$. Propõe-se, pois:

$$\gamma_Q = (1.15)(1.16) = 1.33.$$

13.3 Coeficientes de segurança para resistências

As resistências dos materiais são modeladas principalmente pelas distribuições Normal ou Lognormal. Apresentaremos expressões para ambas as distribuições. Começando pela distribuição Normal, a Eq. (13.3) conduz a:

$$\gamma_m = \frac{1 + \Phi^{-1}(p) V}{1 - \alpha \beta V}, \quad (13.28)$$

onde p é o quantil usado para quantificar o valor característico da resistência em consideração. Para resistências usa-se frequentemente o quantil $p = 0.05$. Assim, para este caso particular muito comum, considerando que $\Phi^{-1}(0.05) = -1.645$, o coeficiente de segurança é:

$$\gamma_m = \frac{1 - 1.645 V}{1 - \alpha \beta V} \quad (13.29)$$

Considerando agora uma resistência com distribuição Lognormal, a Eq. (13.3) conduz a:

$$\gamma_m = \exp\left(\sqrt{\ln(1 + V^2)}(\alpha \beta + \Phi^{-1}(p))\right). \quad (13.30)$$

Para o quantil muito frequente $p = 0.05$, obtém-se:

$$\gamma_m = \exp\left(\sqrt{\ln(1 + V^2)}(\alpha \beta - 1.645)\right) \quad (13.31)$$

Como vimos anteriormente, designando por γ_M o coeficiente de segurança que tenha em conta todas as incertezas relevantes do lado da resistência, tem-se:

$$\gamma_M = \gamma_{Rd} \gamma_m \quad (13.32)$$

Exemplo 13.4 Determinar o coeficiente parcial de segurança a aplicar à tensão de cedência do aço para betão armado, considerando:

$$V = 0.05, \quad \alpha = 0.80, \quad \beta = 3.8, \quad \gamma_{Rd} = 1.05,$$

e admitindo as seguintes distribuições:

- Normal;
- Lognormal.

Resolução

- Para o modelo Normal tem-se:

$$\gamma_m = \frac{1 - 1.645 \times 0.05}{1 - (0.80)(3.8)(0.05)} = 1.082,$$

$$\gamma_M = (1.05)(1.08) = 1.14.$$

b) Para o modelo Lognormal tem-se:

$$\gamma_m = \exp\left(\sqrt{\ln(1 + 0.05^2)}(0.80 \times 3.8 - 1.645)\right) = 1.072,$$

$$\gamma_M = (1.05)(1.07) = 1.13.$$

Comentário: Conforme se acaba de ver, o modelo Normal conduziu a um coeficiente de segurança superior ao que se obteve com o modelo Lognormal, o que já era expetável. No entanto, a diferença é mínima, resultado este que se atribui ao facto do coeficiente de variação ser baixo. Podemos assim concluir que, para coeficientes de variação baixos, a escolha do modelo probabilístico não é tão importante como no caso de coeficientes de variação elevados.

Exemplo 13.5 Determinar o coeficiente parcial de segurança a aplicar à resistência do betão, considerando:

$$V = 0.15, \quad \text{modelo Normal}, \quad \beta = 3.8, \quad \gamma_{Rd} = 1.05,$$

e admitindo os seguintes coeficientes de sensibilidade:

- a) $\alpha = 0.80$ (Resistência do betão dominante);
- b) $\alpha = 0.40 \times 0.80 = 0.32$ (Resistência do betão não dominante).

Resolução

a) Para $\alpha = 0.80$ tem-se:

$$\gamma_m = \frac{1 - 1.645 \times 0.15}{1 - (0.80)(3.8)(0.15)} = 1.385,$$

$$\gamma_M = (1.05)(1.385) = 1.45.$$

b) Para $\alpha = 0.32$, tem-se

$$\gamma_m = \frac{1 - 1.645 \times 0.15}{1 - (0.32)(3.8)(0.15)} = 0.921,$$

$$\gamma_M = (1.05)(0.921) = 0.97.$$

Comentários:

- (1) Conforme se acaba de ver, a consideração de um coeficiente de sensibilidade para variável não dominante pode conduzir a um coeficiente de segurança inferior à unidade, o que, à partida, pode parecer estranho. De facto, o senso comum indica que o coeficiente de segurança deveria ser no mínimo 1.00. Por exemplo, o coeficiente de segurança a aplicar a variáveis determinísticas (variáveis que poderão ser quantificadas com rigor, ou seja, com incerteza desprezável) é, logicamente, unitário, nunca inferior a 1.00. Para entender o que aconteceu no exemplo, onde se obteve $\gamma_M = 0.97$, é preciso não esquecer que o próprio valor característico incorpora parte da

incerteza na variável em consideração. Assim, se o método FORM conduzir a um coeficiente de segurança inferior à unidade, isso significa que, nesse caso, a incerteza incorporada no valor característico é sobejamente suficiente para a fiabilidade pretendida.

- (2) Em estruturas de betão armado, a resistência do betão apresenta geralmente um coeficiente de sensibilidade baixo, não sendo por isso a variável de resistência dominante. Normalmente é a resistência do aço que é dominante. No entanto, não haverá inconveniente de maior se determinarmos o coeficiente de segurança considerando que a resistência do betão é dominante ($\alpha = 0.80$), mesmo não o sendo. Com efeito, embora tal conduza a um coeficiente parcial de segurança superior, e portanto a um valor de dimensionamento mais baixo, o impacto que isso terá nos resultados da verificação da segurança não serão certamente significativos, justamente pelo facto do coeficiente de sensibilidade da resistência do betão ser baixo.

ANEXOS

Anexo A

Distribuições de probabilidade discretas

A.1 Distribuição de Bernoulli

Começa-se por introduzir o conceito de *sequência de Bernoulli*. Chama-se sequência de Bernoulli a uma sequência de realizações (ou tentativas) de uma experiência aleatória, na qual:

1. Cada tentativa tem apenas 2 resultados possíveis, designados sucesso e insucesso.
2. A probabilidade de sucesso, p , é a mesma em cada tentativa.
3. As sucessivas tentativas são independentes entre si.

Seja $X = \{0, 1\}$ uma variável aleatória associada a uma sequência de Bernoulli, em que $X = 0$ significa insucesso e $X = 1$ significa sucesso. Seja p a probabilidade de sucesso. Diz-se então que X tem distribuição de Bernoulli com parâmetro p e escreve-se $X \sim \text{Ber}(p)$.

A FMP $p_X(x) = P(X = x)$ é dada por:

$$p_X(x) = p^x(1-p)^{1-x}, \quad x \in \{0, 1\} \quad (\text{A.1})$$

e os momentos são:

$$\mu_X = p, \quad (\text{A.2})$$

$$\sigma_X^2 = p(1-p). \quad (\text{A.3})$$

A.2 Distribuição Binomial

Considere-se uma sequência de Bernoulli constituída por n tentativas, com probabilidade de sucesso de uma tentativa igual a p . Seja $X = \{\text{n.º de sucessos nas } n \text{ tentativas}\}$. Diz-se então que X tem uma distribuição Binomial com parâmetros n e p e escreve-se $X \sim \text{Bin}(n, p)$.

A FMP $p_X(x) = P(X = x)$ é dada por:

$$p_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x \in \{0, 1, \dots, n\} \quad (\text{A.4})$$

com

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}.$$

Os momentos são:

$$\mu_X = np, \quad (\text{A.5})$$

$$\sigma_X^2 = np(1-p). \quad (\text{A.6})$$

As distribuições de Bernoulli e Binomial estão relacionadas entre si pela seguinte propriedade: Seja X_1, \dots, X_n uma sequência de variáveis independentes e identicamente distribuídas, tais que $X_i = \text{Ber}(p)$. Então,

$$(X_1 + \dots + X_n) \sim \text{Bin}(n, p). \quad (\text{A.7})$$

Uma consequência direta desta propriedade é que a soma de variáveis Binomiais continua a ser Binomial. Mais precisamente, seja $X_1 \sim \text{Bin}(n_1, p)$ e $X_2 \sim \text{Bin}(n_2, p)$. Então,

$$(Y = X_1 + X_2) \sim \text{Bin}(n_1 + n_2, p). \quad (\text{A.8})$$

A.3 Distribuição Geométrica

Considere-se uma sequência de Bernoulli constituída por um número infinito de tentativas, com probabilidade de sucesso de cada tentativa igual a p . Seja $X = \{\text{Número de tentativas até ao 1.º sucesso}\}$. Diz-se então que X tem uma distribuição Geométrica com parâmetro p e escreve-se $X \sim \text{Geo}(p)$.

A FMP $p_X(x) = P(X = x)$ é dada por:

$$p_X(x) = p(1-p)^{x-1}, \quad x \in \{0, 1, 2, \dots\} \quad (\text{A.9})$$

e os momentos são:

$$\mu_X = 1/p, \quad (\text{A.10})$$

$$\sigma_X^2 = \frac{1-p}{p^2}. \quad (\text{A.11})$$

A média da distribuição geométrica é assim o inverso da probabilidade de sucesso, isto é, se a probabilidade de sucesso for p , então, em média, é necessário realizar $1/p$ tentativas até obter o primeiro sucesso.

A distribuição Geométrica tem a seguinte propriedade:

$$P(X \geq k + c \mid X > k) = P(X > c). \quad (\text{A.12})$$

Esta propriedade costuma enunciar-se afirmando que a distribuição geométrica não tem memória.

A.4 Distribuição de Poisson

Seja $X = \{\text{Número de eventos que ocorrem num dado intervalo de tempo}\}$. Seja $\lambda > 0$ o n.º médio de eventos que ocorrem nesse intervalo de tempo. Se o número x de eventos que ocorrem em sucessivos intervalos de tempo forem independentes entre si e a média λ permanecer constante, diz-se que a variável X possui distribuição de Poisson com parâmetro λ e escreve-se $X \sim \text{Poi}(\lambda)$.

A FMP $p_X(x) = P(X = x)$ é dada por:

$$p_X(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, \quad x \in \{0, 1, 2, \dots\} \quad (\text{A.13})$$

e os momentos são:

$$\mu_X = \lambda, \quad (\text{A.14})$$

$$\sigma_X^2 = \lambda. \quad (\text{A.15})$$

A distribuição de Poisson pode ser encarada como uma distribuição limite da distribuição Binomial. Com efeito, dada uma variável $X \sim \text{Bin}(n, p)$, pode demonstrar-se que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, \quad (\text{A.16})$$

caso $p \rightarrow 0$ (à medida que $n \rightarrow \infty$) de tal maneira que $np \rightarrow \lambda$. Podemos assim obter uma aproximação de probabilidades binomiais com a distribuição de Poisson caso n seja grande e p pequeno.

A distribuição de Poisson verifica a seguinte propriedade: seja X_1, \dots, X_n uma sequência de variáveis independentes, em que $X_i \sim \text{Poi}(\lambda_i)$. Então,

$$(X_1 + \dots + X_n) \sim \text{Poi}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n). \quad (\text{A.17})$$

Uma consequência imediata desta propriedade é a seguinte: seja λ o número médio de eventos por unidade de tempo (um segundo, uma hora, um dia, etc.). Seja Δt um intervalo de tempo envolvendo várias dessas unidade de tempo e $X = \{\text{Número de eventos no intervalo } \Delta t\}$. Então $X \sim \text{Poi}(\lambda \Delta t)$, donde:

$$p_X(x) = \frac{e^{-\lambda \Delta t} (\lambda \Delta t)^x}{x!}. \quad (\text{A.18})$$

Anexo B

Distribuições de probabilidade contínuas

B.1 Distribuição Uniforme

Definição

Diz-se que uma variável contínua tem distribuição Uniforme (ou Difusa) com parâmetros a e b quando a sua FDP for uma constante no intervalo $]a, b[$, isto é, quando for dada por:

$$f_X(x | a, b) = \frac{1}{b - a}, \quad (a < x < b) \quad (\text{B.1})$$

Para indicar que uma variável X tem distribuição Uniforme com parâmetros a e b usaremos a notação: $X \sim \text{Un}(a, b)$. A Figura B.1 mostra distribuições pertencentes à família Uniforme.

Parâmetros

O parâmetro a corresponde ao valor mínimo da variável e o parâmetro b ao valor máximo. O parâmetro a pode ser encarado como um parâmetro de localização e a diferença $(b - a)$ como um parâmetro de escala. Os momentos são dados por:

$$E(X) = \frac{a + b}{2}, \quad (\text{B.2})$$

$$\text{Var}(X) = \frac{(b - a)^2}{12}, \quad (\text{B.3})$$

$$\sigma_X = \frac{b - a}{2\sqrt{3}}. \quad (\text{B.4})$$

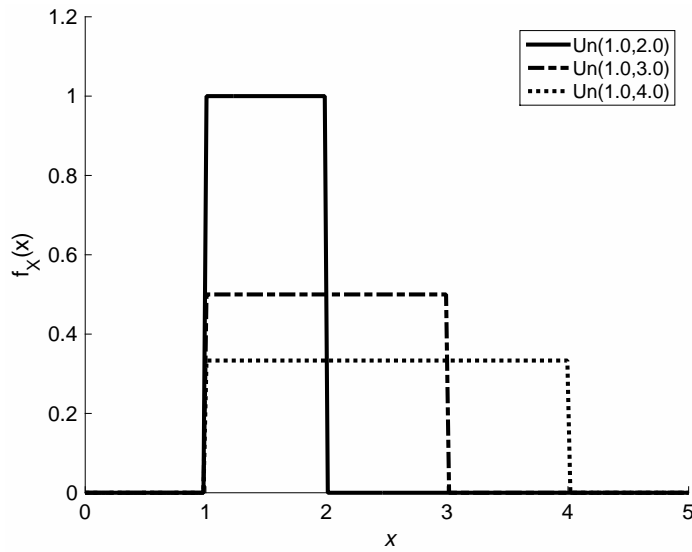


Figura B.1 Distribuições pertencentes à família Uniforme.

Função distribuição

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x < b \\ 1, & x \geq b \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

Função distribuição inversa

$$F_X^{-1}(p) = a + (b-a)p \quad (\text{B.6})$$

Forma reduzida

Seja $X \sim \text{Un}(a, b)$. Esta variável pode ser transformada na variável $U \sim \text{Un}(0, 1)$, na qual o primeiro parâmetro é nulo e o segundo é unitário. Diz-se que U está na forma reduzida. É fácil verificar que a referida transformação é dada por:

$$U = \frac{X-a}{b-a}. \quad (\text{B.7})$$

Podemos então escrever:

$$X \sim \text{Un}(a, b) \Rightarrow \left(U = \frac{X-a}{b-a} \right) \sim \text{Un}(0, 1), \quad (\text{B.8})$$

e, da mesma forma:

$$U \sim \text{Un}(0, 1) \Rightarrow (X = a + (b-a)U) \sim \text{Un}(a, b), \quad (\text{B.9})$$

Aplicações

A distribuição uniforme é usada quando a variável em estudo é limitada inferior e superiormente e à cerca da qual pouco é sabido, isto é, não existe qualquer informação que nos faça acreditar que uns valores são mais prováveis do que outros.

B.2 Distribuição Normal

Definição

Diz-se que uma variável X tem distribuição Normal (ou Gaussiana), com parâmetros μ e σ , quando a sua FDP for dada por:

$$f_X(x | \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right]. \quad (-\infty < x < \infty) \quad (\text{B.10})$$

Para indicar que uma variável X tem distribuição Normal com parâmetros μ e σ usaremos a notação habitual: $X \sim N(\mu, \sigma)$. A Figura B.2 mostra diferentes distribuições, todas elas pertencentes a família Normal.

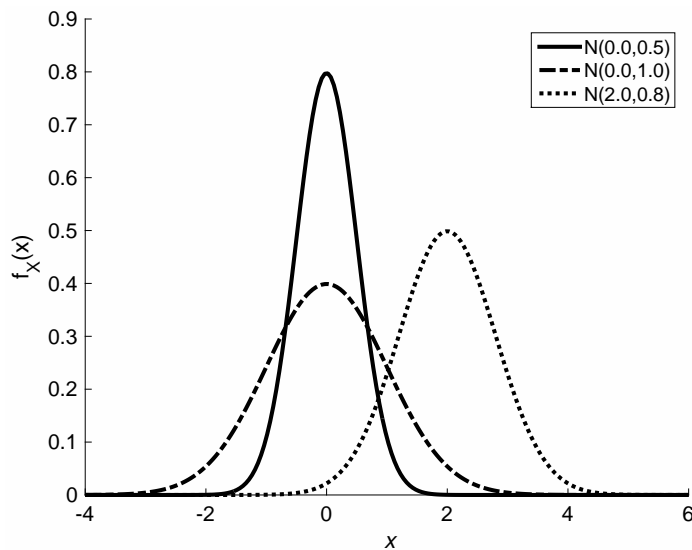


Figura B.2 Distribuições pertencentes à família Normal.

Parâmetros

Os parâmetros da distribuição coincidem com os seus dois primeiros momentos, isto é, $E(X) = \mu$ e $\text{Var}(X) = \sigma^2$. O primeiro é naturalmente um parâmetro de localização e o segundo um parâmetro de escala.

O coeficiente de curtose, α_4 , é igual a 3. Recorde-se que o coeficiente de curtose mede o peso das caudas das distribuições. O valor $\alpha_4 = 3$ pode ser adotado como valor de referência para efeitos comparativos com outros modelos.

Forma reduzida

Dada uma variável $X \sim N(\mu_X, \sigma_X)$, é fácil verificar que a variável:

$$Z = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X} \quad (\text{B.11})$$

tem média nula e desvio padrão unitário, isto é, $Z \sim N(0, 1)$. Diz-se que a variável Z é uma variável gaussiana reduzida ou padronizada. Podemos então escrever:

$$X \sim N(\mu, \sigma) \Rightarrow \left(Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \right) \sim N(0, 1). \quad (\text{B.12})$$

e, inversamente:

$$Z \sim N(0, 1) \Rightarrow (X = \mu + \sigma Z) \sim N(\mu, \sigma). \quad (\text{B.13})$$

A FDP da variável Normal reduzida é representada tradicionalmente por $\varphi(z)$, e a FDC por $\Phi(z)$. Portanto,

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}, \quad (\text{B.14})$$

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-t^2/2} dt. \quad (\text{B.15})$$

A função $\Phi(z)$ não possui forma fechada, isto é, não existe nenhuma função expressa por um número finito de funções elementares conhecidas cuja derivada seja igual a $\exp(-t^2/2)$, pelo que o cálculo de probabilidades envolvendo variáveis normais tem de ser feito numericamente, ou recorrendo a tabelas. Para usar tabelas da função $\Phi(z)$ procede-se como se indica de seguida. Seja $X \sim N(\mu_X, \sigma_X)$. Pretende-se calcular $P(X \leq a)$. Note-se que $X = \mu_X + \sigma_X Z$, e portanto:

$$\begin{aligned} P(X \leq a) &= P(\mu_X + \sigma_X Z \leq a) \\ &= P\left(Z \leq \frac{a - \mu_X}{\sigma_X}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{a - \mu_X}{\sigma_X}\right). \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Assim, para avaliar a probabilidade $P(X \leq a)$ consulta-se uma tabela da função $\Phi(z)$ no ponto $z = (a - \mu_X)/\sigma_X$.

Função distribuição

De acordo com o exposto na secção anterior, a FDC de uma variável $X \sim N(\mu_X, \sigma_X)$ pode ser expressa na seguinte forma:

$$F_X(x) = \Phi\left(\frac{x - \mu_X}{\sigma_X}\right). \quad (\text{B.17})$$

Função distribuição inversa

Para obter a inversa de $F_X(x)$ fazamos $y = \Phi\left(\frac{x - \mu_X}{\sigma_X}\right)$, e resolvamos esta equação em ordem a x . Vem:

$$\begin{aligned} y = \Phi\left(\frac{x - \mu_X}{\sigma_X}\right) &\Leftrightarrow \Phi^{-1}(y) = \frac{x - \mu_X}{\sigma_X} \\ &\Leftrightarrow x = \mu_X + \sigma_X \Phi^{-1}(y). \end{aligned}$$

Portanto, a inversa da distribuição cumulativa é dada por $F_X^{-1}(y) = \mu_X + \sigma_X \Phi^{-1}(y)$, ou, usando para variável independente p em vez de y (o que tem a vantagem de nos lembrar que o argumento da função inversa é uma probabilidade, e portanto um número necessariamente compreendido entre 0 e 1):

$$F_X^{-1}(p) = \mu_X + \sigma_X \Phi^{-1}(p). \quad (\text{B.18})$$

Propriedades

A propriedade mais importante do modelo Normal decorre do *Teorema do Limite Central* (TLC). Segundo este teorema, recorde-se, quando uma variável resulta da soma de um certo número de outras variáveis, então, dentro de condições bastante gerais, a distribuição de tal variável tende para uma distribuição Normal.

A propriedade seguinte é intuitiva em face do TLC. Sejam X_1, \dots, X_n n variáveis normais, independentes entre si, tais que $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i)$. Então, a variável $Y = a_1X_1 + \dots + a_nX_n$, em que a_1, \dots, a_n são constantes, é ainda Normal, com:

$$\mu_Y = a_1\mu_1 + \dots + a_n\mu_n, \quad (\text{B.19})$$

$$\sigma_Y = \sqrt{a_1^2\sigma_1^2 + \dots + a_n^2\sigma_n^2}. \quad (\text{B.20})$$

Ou seja, qualquer combinação linear de variáveis normais e independentes é ainda normal. Se as variáveis X_1, \dots, X_n forem dependentes, a soma é ainda normal, porém, a variância da soma irá depender dos coeficientes de correlação entre as variáveis.

Seja $X \sim N(\mu, \sigma)$. Determinemos $P(X < \mu + k\sigma)$. Tem-se:

$$\begin{aligned} P(X < \mu + k\sigma) &= \Phi\left(\frac{\mu + k\sigma - \mu}{\sigma}\right) \\ &= \Phi(k). \end{aligned}$$

Portanto $P(X < \mu + k\sigma)$ só depende de k . Assim, para calcular $P(X < a)$ só

precisamos de saber quantos desvios padrões a dista da média¹. Por exemplo:

$$\begin{aligned} P(X < \mu - \sigma) &= \Phi(-1) = 0.159, \\ P(X < \mu - 2\sigma) &= \Phi(-2) = 0.023, \\ P(X < \mu - 3\sigma) &= \Phi(-3) = 0.00135, \\ P(X < \mu - 4\sigma) &= \Phi(-4) = 3.17 \times 10^{-5}. \end{aligned}$$

Calculemos agora $P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma)$. Tem-se:

$$\begin{aligned} P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma) &= \Phi(k) - \Phi(-k) \\ &= \Phi(k) - (1 - \Phi(k)) \\ &= 2\Phi(k) - 1. \end{aligned}$$

Por exemplo:

$$\begin{aligned} P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) &= 0.683, \\ P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) &= 0.954, \\ P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) &= 0.997. \end{aligned}$$

Podemos então afirmar que, para uma população Normal, o intervalo $\mu \pm \sigma$ contém 68% da população e o intervalo $\mu \pm 2\sigma$ contém 95%.

Aplicações

Quando uma quantidade resulta da soma de um número apreciável de outras quantidades, tal quantidade é em geral modelada por uma distribuição Normal. Existem muitas quantidades na natureza que representam um *total*, não admirando por isso que o modelo Normal seja um dos modelos probabilísticos mais utilizados.

Por exemplo, a força de rotura de um cordão constituído por um certo número de fios será próxima da distribuição Normal se os fios possuírem comportamento dúctil. Com efeito, se cada fio possuir tal comportamento significa que mantém a força após entrar em cedência, de modo que a força de rotura do cordão é dada pela soma das forças de rotura dos diferentes fios, tendo assim uma distribuição tendencialmente Normal.

O tamanho de filas de espera e os erros de medição são outros exemplos de quantidades modeladas habitualmente por distribuições normais.

B.3 Distribuição Lognormal

Definição

Uma variável Y é Lognormal se, e somente se, a variável $X = \ln Y$ for Normal. (Ver Figura B.3.)

Para indicar que uma variável Y tem distribuição Lognormal com parâmetros a e b usaremos a notação habitual: $Y \sim \text{LN}(a, b)$. Os parâmetros a e b são a média e

¹Isto acontece com qualquer distribuição que apenas tenha parâmetros de localização e de escala.

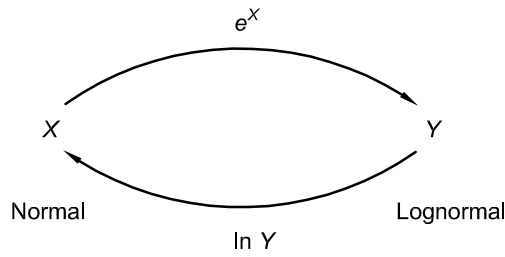


Figura B.3 Definição da distribuição Lognormal.

o desvio padrão da variável normal subjacente (variável $X = \ln Y$), isto é, $a = \mu_X$ e $b = \sigma_X$.

Função densidade de probabilidade

Seja $X \sim N(\mu_X, \sigma_X)$. Então, de acordo com a definição, $(Y = e^X) \sim LN(\mu_X, \sigma_X)$. É fácil verificar que $F_Y(y) = F_X(\ln y)$. Derivando $F_Y(y)$ obtém-se $f_Y(y) = (1/y)f_X(\ln y)$, e portanto:

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_X y} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln y - \mu_X}{\sigma_X} \right)^2 \right], \quad (y > 0) \tag{B.21}$$

A Figura B.4 exemplifica distribuições pertencentes à família Lognormal.

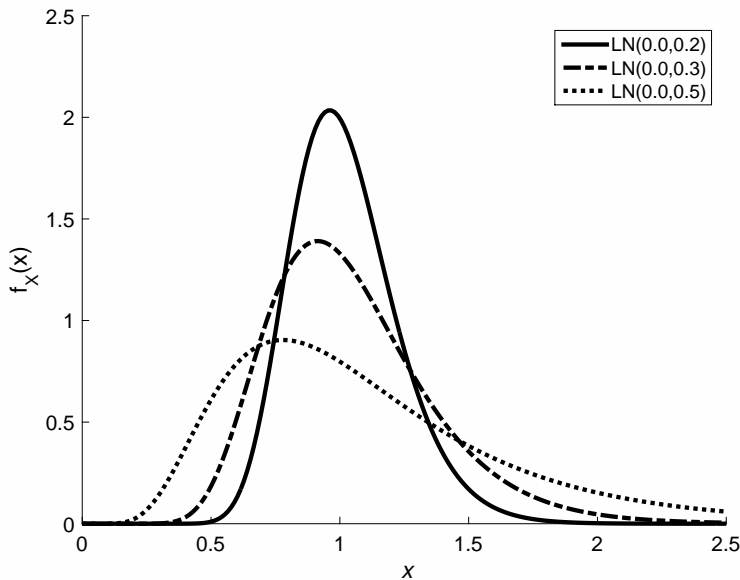


Figura B.4 Distribuições pertencentes à família Lognormal.

Parâmetros

Como dito acima, os parâmetros da distribuição Lognormal, μ_X e σ_X , são a média e o desvio padrão da variável Normal subjacente. Pode mostrar-se que:

$$\mu_Y = e^{\mu_X + \frac{1}{2}\sigma_X^2} \quad (\text{B.22})$$

$$\sigma_Y^2 = \left(e^{\sigma_X^2} - 1\right) e^{2\mu_X + \sigma_X^2} \quad (\text{B.23})$$

$$\text{Mediana} = e^{\mu_X} \quad (\text{B.24})$$

$$\text{Moda} = e^{\mu_X - \sigma_X^2}. \quad (\text{B.25})$$

Invertendo B.22 e B.23 obtém-se as expressões que permitem determinar μ_X e σ_X , a partir de μ_Y e σ_Y :

$$\mu_X = \ln \left(\frac{\mu_Y^2}{\sqrt{\mu_Y^2 + \sigma_Y^2}} \right) = \ln \left(\frac{\mu_Y}{\sqrt{1 + V_Y^2}} \right), \quad (\text{B.26})$$

$$\sigma_X = \sqrt{\ln \left(1 + (\sigma_Y/\mu_Y)^2 \right)} = \sqrt{\ln (1 + V_Y^2)}, \quad (\text{B.27})$$

onde $V_Y = \sigma_Y/\mu_Y$.

Para $V_Y \leq 0.25$, são aceitáveis as seguintes aproximações: $\sqrt{1 + V_Y^2} \approx 1$ e $\ln(1 + V_Y^2) \approx V_Y^2$, donde, nessas circunstâncias:

$$\mu_X \approx \ln \mu_Y, \quad (\text{B.28})$$

$$\sigma_X \approx V_Y. \quad (\text{B.29})$$

O modelo $f_Y(y)$ pode ser expresso de forma equivalente por:

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X \cdot y} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\ln \left(\frac{y}{e^{\mu_X}} \right)^{\frac{1}{\sigma_X}} \right)^2 \right], \quad (\text{B.30})$$

o que mostra que μ_X é um parâmetro de escala e σ_X é um parâmetro de forma. O modelo Lognormal, conforme expresso pelas equações acima, não possui assim parâmetro de localização, mas é fácil acrescentá-lo, considerando a variável $Y' = Y + a$. Passamos assim a ter uma distribuição Lognormal com 3 parâmetros: a , μ_X e σ_X , em que a é um parâmetro de localização e representa o valor mínimo da nova variável.

Função distribuição

De acordo com o exposto acima, dada uma variável $Y \sim \text{LN}(\mu_X, \sigma_X)$, tem-se $F_Y(y) = F_X(\ln y)$, e portanto:

$$F_Y(y) = \Phi \left(\frac{\ln y - \mu_X}{\sigma_X} \right). \quad (\text{B.31})$$

Esta expressão habilita-nos a usar uma tabela da distribuição Normal reduzida para calcular probabilidades envolvendo uma variável Lognormal.

Função distribuição inversa

Para obter a distribuição inversa de $F_Y(y)$ fazamos $p = F_Y(y) = \Phi\left(\frac{\ln y - \mu_X}{\sigma_X}\right)$ e resolvamos esta equação em ordem a y :

$$\begin{aligned} p = \Phi\left(\frac{\ln y - \mu_X}{\sigma_X}\right) &\Leftrightarrow \Phi^{-1}(p) = \frac{\ln y - \mu_X}{\sigma_X} \\ &\Leftrightarrow \ln y = \mu_X + \sigma_X \Phi^{-1}(p) \\ &\Leftrightarrow y = e^{\mu_X + \sigma_X \Phi^{-1}(p)} \end{aligned}$$

e portanto,

$$F_Y^{-1}(p) = \exp\left(\mu_X + \Phi^{-1}(p) \sigma_X\right). \quad (\text{B.32})$$

Tem interesse expressar $F_Y^{-1}(p)$ em função da média e coeficiente de variação de Y . Recorrendo à Eq. (B.26) e (B.27), vem:

$$\begin{aligned} F_Y^{-1}(p) &= \exp(\mu_X) \cdot \exp(\Phi^{-1}(p) \sigma_X) \\ &= \frac{\mu_Y}{\sqrt{1 + V_Y^2}} \cdot \exp\left(\Phi^{-1}(p) \sqrt{\ln(1 + V_Y^2)}\right). \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

Para o caso de $V_Y \leq 0.25$ é admissível a seguinte simplificação:

$$F_Y^{-1}(p) \approx \mu_Y \cdot \exp\left(\Phi^{-1}(p) V_Y\right). \quad (\text{B.34})$$

Propriedades

Sejam Y_1, \dots, Y_n n variáveis Lognormais. Então a variável $Y = Y_1 \times \dots \times Y_n$ continua a ser Lognormal. Em palavras: o produto de variáveis Lognormais continua a ser Lognormal.

É fácil demonstrar este resultado. Com efeito, aplicando logaritmos à equação $Y = Y_1 \times \dots \times Y_n$, tem-se:

$$\ln Y = \ln Y_1 + \dots + \ln Y_n. \quad (\text{B.35})$$

Mas, cada uma das variáveis $\ln Y_i$ é Normal, pelo facto de Y_i ser Lognormal. A variável $\ln Y$ é assim uma soma de variáveis Normais, e portanto, por força do TLC, é também Normal. Então, sendo $\ln Y$ Normal, a variável Y é Lognormal.

Repare-se que, mesmo que as variáveis Y_1, \dots, Y_n não sejam Lognormais, para n grande a distribuição de Y tenderá para uma distribuição Lognormal. Podemos assim concluir que, da mesma forma que o modelo Normal tem grande interesse prático em virtude do TLC, este mesmo teorema torna o modelo Lognormal também com muito interesse prático. Quando uma quantidade resulta do produto de outras quantidades, a sua distribuição tenderá para uma distribuição Lognormal, independentemente da distribuição dessas outras quantidades.

Aplicações

A distribuição Lognormal tem sido amplamente usada em Engenharia Civil, não só por razões físicas (como vimos, quando uma variável resulta do produto de outras variáveis, tenderá para uma distribuição Lognormal), mas também devido às suas características de assimetria (muitos dados são efetivamente assimétricos) e ao facto de assumir apenas valores positivos.

É um modelo frequentemente recomendado na modelação da resistência do betão. Os autores Ang e Tang (2007) mencionam as seguintes aplicações adicionais: resistência de materiais, intensidade de precipitação e volume de tráfego aéreo. Repare-se que em todos estes casos a variável de interesse nunca tem valores negativos.

B.4 Distribuição *t-Student*

Definição

Diz-se que uma variável T tem distribuição *t-Student* com ν graus de liberdade quando a sua FDP for da forma:

$$f_T(t | \nu) = c \cdot \left(1 + \frac{1}{\nu} t^2\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}, \quad (-\infty < t < \infty) \quad (\text{B.36})$$

com,

$$c = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\pi\nu} \Gamma(\frac{\nu}{2})}, \quad (\text{B.37})$$

em que $\Gamma(\cdot)$ é a chamada função Gama, dada por: $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$.

Para indicar que uma variável T tem distribuição *t-Student* com ν graus de liberdade usaremos a notação: $T \sim \text{St}(\nu)$.

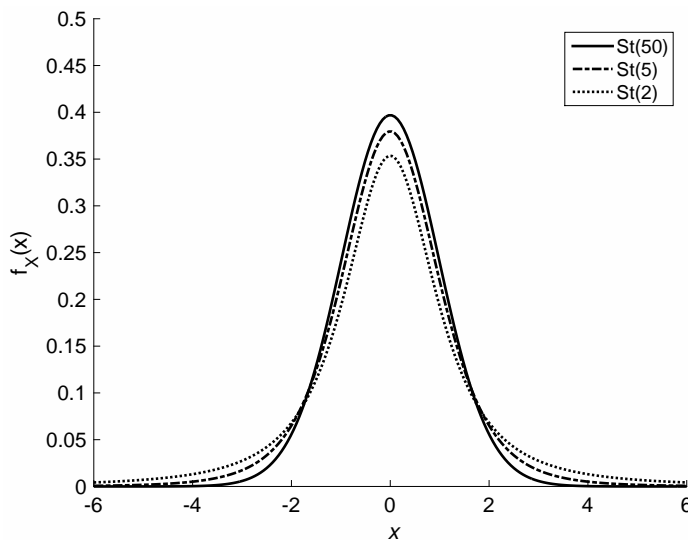


Figura B.5 Distribuições pertencentes à família *t-Student*.

Parâmetros

O Parâmetro ν , chamado *número de graus de liberdade*, é um parâmetro de forma, e assume apenas valores inteiros positivos. A média e variância de T são dadas por:

$$\mu_T = 0, \quad (\nu > 1) \quad (\text{B.38})$$

$$\sigma_T^2 = \frac{\nu}{\nu - 2}. \quad (\nu > 2) \quad (\text{B.39})$$

Forma expandida

A distribuição *t-Student* conforme apresentada acima encontra-se na forma reduzida. Não possui parâmetros de localização e de escala, mas é fácil acrescentá-los. De facto, seja $T \sim \text{St}(\nu)$. Aplique-se a transformação linear $X = a + bT$. Obtém-se assim uma nova distribuição *t-Student*, mas com 3 parâmetros, e escreve-se $X \sim \text{St}(a, b, \nu)$, cuja FDP é dada por:

$$\begin{aligned} f_X(x | a, b, \nu) &= \frac{1}{b} f_T\left(\frac{x-a}{b}\right) \\ &= \frac{c}{b} \left[1 + \frac{1}{\nu} \left(\frac{x-a}{b}\right)^2 \right]^{-\frac{\nu+1}{2}}. \end{aligned} \quad (\text{B.40})$$

A média e variância de X são dadas por:

$$\mu_X = a, \quad (\text{B.41})$$

$$\sigma_X^2 = \frac{\nu}{\nu - 2} b^2. \quad (\text{B.42})$$

De acordo com o que acaba de ser exposto, podemos escrever:

$$T \sim \text{St}(\nu) \quad \Rightarrow \quad (X = a + bT) \sim \text{St}(a, b, \nu), \quad (\text{B.43})$$

e, inversamente:

$$X \sim \text{St}(a, b, \nu) \quad \Rightarrow \quad \left(T = \frac{X-a}{b}\right) \sim \text{St}(\nu). \quad (\text{B.44})$$

Função distribuição

A FDC da *t-Student* não possui forma fechada, isto é, não existe nenhuma função expressa por um número finito de funções elementares conhecidas cuja derivada tenha o formato da equação B.40, pelo que o cálculo de probabilidades envolvendo variáveis *t-Student* tem de ser feito numericamente, ou recorrendo a tabelas. Os livros tradicionais de Probabilidades e Estatística têm usualmente tabelas com os valores de $F_T(t | \nu)$.

Dada uma variável $X \sim \text{St}(a, b, \nu)$ é fácil estabelecer a relação entre a sua FDC, representada por $F_X(x | a, b, \nu)$, e a FDC de uma variável $T \sim \text{St}(\nu)$, representada

por $F_T(t | \nu)$. Com efeito, notando que $X = a + bT$, tem-se:

$$\begin{aligned} F_X(x | a, b, \nu) &= P(X < x) \\ &= P(a + bT < x) \\ &= P\left(T < \frac{x - a}{b}\right) \\ &= F_T\left(\frac{x - a}{b} | \nu\right). \end{aligned} \quad (\text{B.45})$$

Assim, dada uma variável $X \sim \text{St}(a, b, \nu)$, para determinar $P(X < c)$ basta calcular $t = \frac{c-a}{b}$ e em seguida consultar uma tabela ou usar *software* que dê $F_T(t | \nu)$.

Função distribuição inversa

Para obter a inversa de $F_X(x | a, b, \nu)$, façamos $p = F_T\left(\frac{x-a}{b}\right)$. Resolvendo esta equação em ordem a x , obtém-se:

$$\begin{aligned} p = F_T\left(\frac{x - a}{b}\right) &\Leftrightarrow F_T^{-1}(p) = \frac{x - a}{b} \\ &\Leftrightarrow x = a + b F_T^{-1}(p). \end{aligned}$$

Portanto,

$$F_X^{-1}(p) = a + b F_T^{-1}(p). \quad (\text{B.46})$$

Assim como existem tabelas e *software* que dão os valores de $F_T(t | \nu)$, existem também tabelas e *software* que dão os valores de $F_T^{-1}(p)$.

Propriedades

A distribuição *t-Student* reduzida, tal como a distribuição Normal reduzida, tem média nula e é simétrica, donde:

$$F_T(-t) = 1 - F_T(t). \quad (\text{B.47})$$

À medida que o número e graus de liberdade aumenta, a *t-Student* aproxima-se da Normal, podendo escrever-se $f_T(t | \nu) \rightarrow \varphi(t)$ quando $\nu \rightarrow \infty$.

A distribuição Normal pode assim ser encarada como uma distribuição limite da *t-Student*. Na prática, para $\nu \geq 30$ considera-se aceitável a aproximação $F_T(t | \nu) \sim \varphi(t)$, embora para valores muito baixos de t a diferença possa ser importante.

Aplicações

A distribuição *t-Student* é muito utilizada na Estatística, surgindo de forma natural sempre que se realizam inferências de populações Normais a partir de amostras de dimensão reduzida.

B.5 Distribuição Gumbel (ou tipo I de máximos)

Definição

Uma variável X tem distribuição Gumbel com parâmetros u e α quando a sua FDP for da forma:

$$f_X(x | u, \alpha) = \alpha \exp \left\{ -\alpha(x - u) - \exp[-\alpha(x - u)] \right\}. \quad (-\infty < x < +\infty) \quad (\text{B.48})$$

Para indicar que uma variável X tem distribuição Gumbel com parâmetros u e α usaremos a notação $X \sim \text{Gb}(u, \alpha)$, em que $\alpha > 0$. A Figura B.6 mostra diferentes FDP pertencentes à família Gumbel.

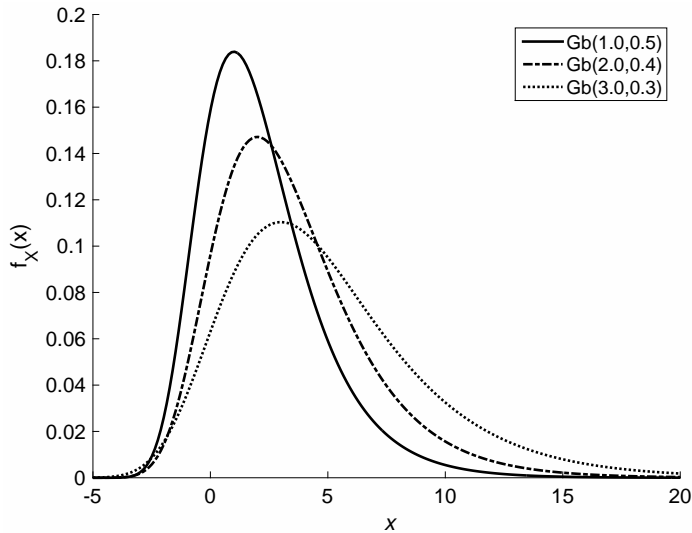


Figura B.6 Distribuições pertencentes à família Gumbel.

Parâmetros

O parâmetro u é um parâmetro de localização e o parâmetro α é de escala. O primeiro coincide com a moda da distribuição e o segundo é inversamente proporcional ao desvio padrão. A distribuição Gumbel não tem assim parâmetro de forma, o que significa que os membros desta família têm todos forma idêntica.

Dada uma variável $X \sim \text{Gb}(u, \alpha)$, a média e variância de X relacionam-se com os parâmetros u e α através das seguintes expressões:

$$\mu_X = u + \frac{\gamma}{\alpha}, \quad (\gamma \approx 0.57722) \quad (\text{B.49})$$

$$\sigma_X^2 = \left(\frac{\pi}{\sqrt{6}\alpha} \right)^2. \quad (\text{B.50})$$

O coeficiente de variação é dado por:

$$V_X = \frac{\pi}{\sqrt{6}(\alpha u + \gamma)}. \quad (\text{B.51})$$

Se se conhecer a média e o desvio padrão da população, os parâmetros u e α podem ser determinados pelo método dos momentos, recorrendo às expressões:

$$u = \mu_X - \frac{\sqrt{6}\gamma}{\pi} \sigma_X, \quad (\text{B.52})$$

$$\alpha = \frac{\pi}{\sqrt{6} \sigma_X}. \quad (\text{B.53})$$

Função distribuição

A FDC é dada por:

$$F_X(x | u, \alpha) = \exp \left\{ - \exp \left[- \alpha(x - u) \right] \right\}. \quad (-\infty < x < +\infty) \quad (\text{B.54})$$

Função distribuição inversa

A inversa da FDC é dada por:

$$F_X^{-1}(p) = u - \frac{1}{\alpha} \ln(-\ln p). \quad (\text{B.55})$$

A inversa da FDC pode também ser expressa em função da média e desvio padrão da variável (μ_X e σ_X):

$$\begin{aligned} F_X^{-1}(p) &= \mu_X - \frac{\sqrt{6}\gamma}{\pi} \sigma_X - \frac{\sqrt{6}\sigma_X}{\pi} \ln(-\ln p) \\ &= \mu_X - \frac{\sqrt{6}}{\pi} \sigma_X \left[\gamma + \ln(-\ln p) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.56})$$

Por exemplo, $F_X^{-1}(0.95) = \mu_X + 1.866 \sigma_X$.

Propriedades

Seja X_1, \dots, X_n uma amostra aleatória de uma variável (ou população) X . As variáveis X_i são por isso independentes e identicamente distribuídas. Seja $X_{\max, n} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$. Suponha-se que a cauda superior da FDP da variável X decresce de forma exponencial. Demonstra-se que, nestas circunstâncias, para n grande, a distribuição de $X_{\max, n}$ tende para uma distribuição Gumbel. Este resultado torna a distribuição Gumbel vocacionada para a modelação de máximos. Note-se que não é necessário conhecer explicitamente a distribuição da variável X , exigindo-se apenas que a respetiva distribuição decresça exponencialmente junto à cauda superior. A distribuição exponencial e a normal cumprem este requisito (Benjamin e Cornell, 1970).

Seja $X_{\max, 1} \sim \text{Gb}(u_1, \alpha_1)$ uma variável correspondente aos máximos em 1 unidade de tempo (máximos em 1 ano, por exemplo). Seja $X_{\max, n}$ a correspondente distribuição dos máximos em n unidades de tempo (máximos em 50 anos, por exemplo). Verifica-se que a distribuição de $X_{\max, n}$ continua a ser Gumbel. Em símbolos:

$$X_{\max, 1} \sim \text{Gb}(u_1, \alpha_1) \quad \Rightarrow \quad X_{\max, n} \sim \text{Gb}(u_n, \alpha_n). \quad (\text{B.57})$$

Os parâmetros das variáveis $X_{\max,1}$ e $X_{\max,n}$ estão relacionados entre si pelas expressões:

$$\alpha_n = \alpha_1 = \alpha, \quad (\text{B.58})$$

$$u_n = u_1 + \frac{1}{\alpha} \ln n. \quad (\text{B.59})$$

Nota Demonstremos este resultado. Seja $X_{\max,1} \sim \text{Gb}(u_1, \alpha_1)$. Portanto $F_{X_{\max,1}}(x) = e^{-e^{-\alpha_1(x-u_1)}}$. Mas, $F_{X_{\max,n}}(x) = [F_{X_{\max,1}}(x)]^n$, donde:

$$\begin{aligned} F_{X_{\max,n}}(x) &= \left[e^{-e^{-\alpha_1(x-u_1)}} \right]^n \\ &= e^{-n e^{-\alpha_1(x-u_1)}} \\ &= e^{-e^{\ln n} e^{-\alpha_1(x-u_1)}} \\ &= e^{-e^{-\alpha_1(x-u_1) + \ln n}} \\ &= e^{-e^{-\alpha_1(x-u_1 - (1/\alpha_1) \ln n)}} \\ &= e^{-e^{-\alpha_1(x - (u_1 + (1/\alpha_1) \ln n))}}. \end{aligned}$$

Conclui-se assim que a FDC de $X_{\max,n}$ tem a forma $F_{X_{\max,n}}(x) = e^{-e^{-\alpha_n(x-u_n)}}$, ou seja, a distribuição de $X_{\max,n}$ continua a ser Gumbel, com $\alpha_n = \alpha_1$ e $u_n = u_1 + \frac{1}{\alpha_1} \ln n$. ■

Conforme se acaba de constatar, o parâmetro α é invariante com o período de tempo a que se refere a distribuição de máximos (chamado período de referência). O facto de α permanecer constante com período de referência, significa que o desvio padrão também se mantém constante. Esta é assim uma importante característica do modelo Gumbel: o desvio padrão é invariante com o período de referência, isto é, $\sigma_n = \sigma_1 = \sigma$.

A Eq. (B.59) é facilmente convertida em termos da relação entre as médias de $X_{\max,n}$ e de $X_{\max,1}$:

$$\mu_n = \mu_1 + \frac{\sqrt{6}}{\pi} \sigma \ln n. \quad (\text{B.60})$$

Podemos também afirmar que o coeficiente de variação diminui com o período de referência (já que o desvio padrão mantém-se constante e a média aumenta). A expressão seguinte relaciona o coeficiente de variação dos máximos em n unidades de tempo com os máximos em 1 unidade de tempo:

$$V_n = \frac{\pi}{\frac{\pi}{V_1} + \sqrt{6} \ln n}. \quad (\text{B.61})$$

Aplicações

A distribuição Gumbel tem sido extensivamente usada na modelação dos máximos de ações variáveis, incluindo a velocidade do vento, sobrecargas em edifícios, variações de temperatura, ação da neve e acelerações no terreno devidas à ação sísmica.

B.6 Distribuição Fréchet (ou tipo II de máximos)

Definição

Uma variável X tem distribuição Fréchet com parâmetros u e k quando a sua FDP for da forma:

$$f_X(x | u, k) = \frac{k}{u} \left(\frac{u}{x}\right)^{k+1} \exp\left[-\left(\frac{u}{x}\right)^k\right]. \quad (x \geq 0) \quad (\text{B.62})$$

Para indicar que uma variável X tem distribuição Fréchet com parâmetros u e k usaremos a notação $X \sim \text{Fr}(u, k)$. Ambos os parâmetros admitem apenas valores positivos. A Figura B.7 mostra diferentes FDP da família Fréchet. Trata-se de uma distribuição que assume apenas valores positivos e claramente assimétrica à direita, como a distribuição Gumbel.

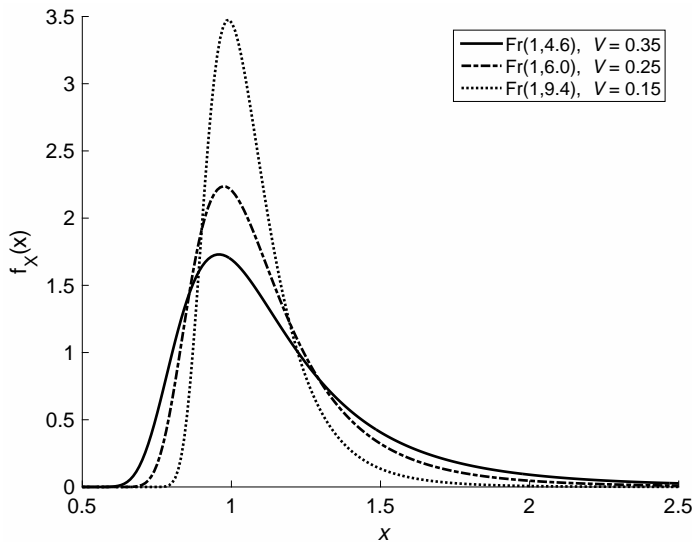


Figura B.7 Distribuições pertencentes à família Fréchet.

Tem interesse comparar a distribuição Fréchet com a distribuição Gumbel, visto que ambas são utilizadas na modelação de máximos. A Figura B.8 sobrepõe uma FDP Gumbel com uma FDP Fréchet com idêntica média e desvio padrão. Conforme se observa, acima de um determinado valor a cauda direita da distribuição Fréchet torna-se mais pesada. Por esta razão a distribuição Fréchet conduz a estimativas de extremos mais severas que a distribuição Gumbel.

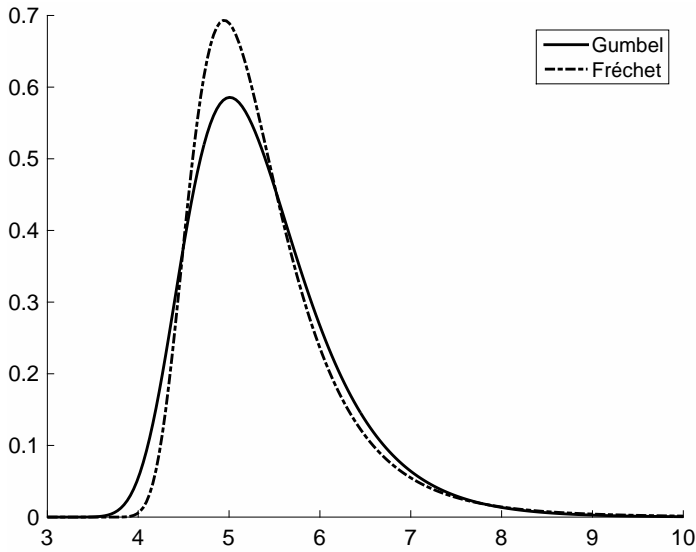


Figura B.8 Comparação das distribuições Gumbel/Fréchet, ambas com $\mu = 5.4$ e $V = 0.15$.

Parâmetros

A distribuição Fréchet apresenta-se tradicionalmente com dois parâmetros, u e k , o primeiro sendo um parâmetro de escala (afeta a média e desvio padrão) e o segundo sendo um parâmetro de forma. Um aumento de u (mantendo k fixo) provoca um aumento na média e desvio padrão na mesma proporção. Um aumento de k (mantendo u fixo) provoca uma alteração na forma da distribuição, afetando também a média e desvio padrão (o coeficiente de variação diminui).

A distribuição Fréchet não possui assim parâmetro de localização, mas é fácil introduzi-lo, cujo efeito é uma translação da FDP para a esquerda ou para a direita. (Naturalmente o valor mínimo deixa de ser 0.)

A média, variância e coeficiente de variação são dados por:

$$\mu_X = u \Gamma \left(1 - \frac{1}{k} \right), \quad (k > 1) \quad (\text{B.63})$$

$$\sigma_X^2 = u^2 \left[\Gamma \left(1 - \frac{2}{k} \right) - \Gamma^2 \left(1 - \frac{1}{k} \right) \right], \quad (k > 2) \quad (\text{B.64})$$

$$V = \sqrt{\frac{\Gamma \left(1 - \frac{2}{k} \right)}{\Gamma^2 \left(1 - \frac{1}{k} \right)} - 1}, \quad (k > 2) \quad (\text{B.65})$$

onde $\Gamma(\cdot)$ é a chamada função Gama, dada por:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt. \quad (x > 0) \quad (\text{B.66})$$

É interessante notar que o coeficiente de variação só depende de k , pelo que este parâmetro determina univocamente V . No entanto, não é possível obter uma fórmula

explícita de k como função de V . O gráfico da Figura B.9 ilustra a variação de k com V , podendo ser usado para realizar uma primeira estimativa de k a partir do coeficiente de variação V referente a uma amostra de uma população em estudo. A Tabela B.1 exemplifica valores de k para diferentes coeficientes de variação.

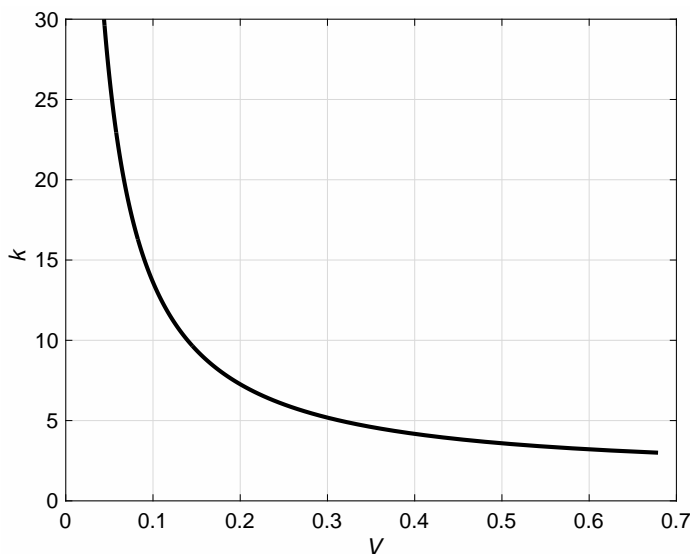


Figura B.9 Relação entre o parâmetro k e o coeficiente de variação V .

Tabela B.1 Valores de k que correspondem a diferentes coeficientes de variação

V	k
0.05	26.41
0.10	13.62
0.15	9.37
0.20	7.26
0.25	6.01
0.30	5.18

Função distribuição

A FDC é dada por:

$$F_X(x | u, k) = \exp \left[- \left(\frac{u}{x} \right)^k \right]. \quad (x \geq 0) \quad (\text{B.67})$$

Função distribuição inversa

A inversa da FDC obtém-se resolvendo a equação $p = F_X(x | u, k)$ em ordem a x , obtendo-se o seguinte resultado:

$$F_X^{-1}(p) = \frac{u}{(-\ln p)^{\frac{1}{k}}}. \quad (\text{B.68})$$

Forma reduzida

Dada uma variável $X \sim \text{Fr}(u, k)$, é fácil verificar que a variável:

$$Z = \frac{X}{u} \quad (\text{B.69})$$

continua com distribuição Fréchet, com parâmetros $u = 1$ e $k = k$, isto é, $Z \sim \text{Fr}(1, k)$. Com efeito,

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \leq z) = P\left(\frac{X}{u} \leq z\right) \\ &= P(X \leq uz) \\ &= F_X(uz) \\ &= \exp \left[- \left(\frac{u}{uz} \right)^k \right] \\ &= \exp \left[- \left(\frac{1}{z} \right)^k \right], \end{aligned}$$

que corresponde a uma distribuição Fréchet com parâmetros $u = 1$ e $k = k$. Diz-se que a variável Z está na forma reduzida. É também fácil verificar que:

$$F_X(x) = F_Z\left(\frac{x}{u}\right). \quad (\text{B.70})$$

Propriedades

Dada uma variável X não limitada à direita, com FDP possuindo cauda direita com decaimento polinomial, verifica-se que os máximos dessa variável convergem em probabilidade para uma distribuição Fréchet. Este resultado torna este modelo uma distribuição candidata sempre que se pretenda modelar máximos de variáveis.

Considere-se agora a variável $X_{\max,1} \sim \text{Fr}(u_1, k_1)$ referente aos máximos de uma variável em 1 unidade de tempo (1 dia, 1 mês, 1 ano, 1 período de 50 anos). Seja $X_{\max,n} \sim \text{Fr}(u_n, k_n)$ os máximos da mesma variável, mas referentes a n unidades de tempo. Verifica-se que esta variável continua a ter distribuição Fréchet. Verifica-se

também que os parâmetros das variáveis $X_{\max,1}$ e $X_{\max,n}$ relacionam-se entre si pelas expressões:

$$u_n = n^{(1/k_1)} \cdot u_1, \quad (\text{B.71})$$

$$k_n = k_1. \quad (\text{B.72})$$

Conforme se observa, o parâmetro de k é invariante com o período a que se refere a distribuição de máximos, o mesmo sucedendo com o coeficiente de variação.

Nota Demonstremos o resultado acabado de enunciar. Uma vez que $X_{\max,1} \sim \text{Fr}(u_1, k_1)$, segue que:

$$F_{X_{\max,1}}(x) = \exp \left[- \left(\frac{u_1}{x} \right)^{k_1} \right]. \quad (\text{B.73})$$

Por outro lado, sabemos que $F_{X_{\max,n}}(x) = [F_{X_{\min,1}}(x)]^n$, donde:

$$\begin{aligned} F_{X_{\max,n}}(x) &= \exp \left[-n \left(\frac{u_1}{x} \right)^{k_1} \right] \\ &= \exp \left[- \left(\frac{n^{(1/k_1)} u_1}{x} \right)^{k_1} \right], \end{aligned}$$

que corresponde a uma distribuição Fréchet com parâmetros $u_n = n^{(1/k_1)} u_1$ e $k_n = k_1$, como se pretendia demonstrar. ■

Uma outra propriedade interessante é a seguinte. Se uma variável X possuir uma distribuição Gumbel, então a variável $Y = \exp(X)$ possui distribuição Fréchet, e vice versa. Em símbolos:

$$X \sim \text{Gb}(u, \alpha) \quad \Leftrightarrow \quad (Y = \exp(X)) \sim \text{Fr}(v, k). \quad (\text{B.74})$$

Verifica-se assim que a distribuição Fréchet está para a distribuição Gumbel, assim como a distribuição Lognormal está para a distribuição Normal.

Aplicações

A distribuição Fréchet tem sido utilizada na modelação de velocidades máximas anuais do vento, e ainda na modelação de fenómenos hidrológicos e meteorológicos extremos (Benjamin e Cornell, 1970).

B.7 Distribuição Weibull (ou tipo III de mínimos)

Definição

Uma variável X tem distribuição Weibull com parâmetros ϵ , u e k , quando a sua FDP for da forma:

$$f_X(x | \epsilon, u, k) = \frac{k}{u - \epsilon} \left(\frac{x - \epsilon}{u - \epsilon} \right)^{k-1} \exp \left[- \left(\frac{x - \epsilon}{u - \epsilon} \right)^k \right]. \quad (x \geq \epsilon) \quad (\text{B.75})$$

Para indicar que uma variável X tem distribuição Weibull com parâmetros ϵ , u e k usaremos a notação $X \sim \text{Wb}(\epsilon, u, k)$. Estes parâmetros devem respeitar as seguintes

relações: $u > \epsilon$, $k > 0$. A Figura B.10 mostra diferentes FDP pertencentes à família Weibull. Para $k \approx 3.45$ a distribuição Weibull é praticamente simétrica. Abaixo desse valor a distribuição é assimétrica à direita (cauda direita mais pesada) e acima desse valor é assimétrica à esquerda (cauda esquerda é mais pesada). À medida que k aumenta, verifica-se que a assimetria aumenta.

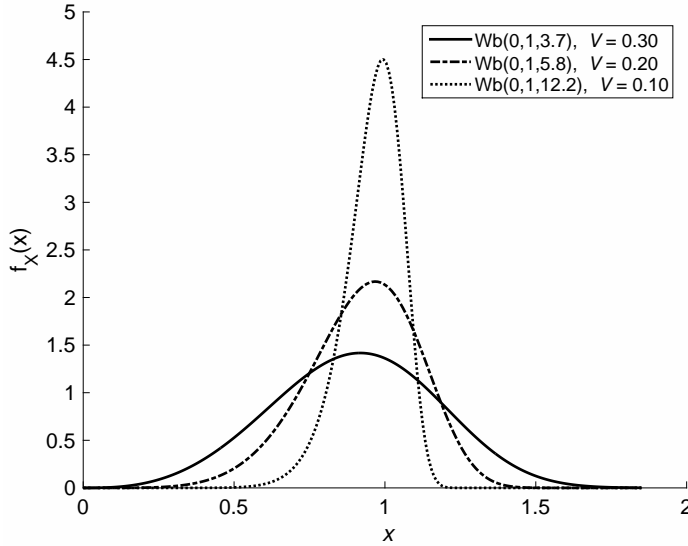


Figura B.10 Distribuições pertencentes à família Weibull.

Parâmetros

O parâmetro ϵ é um parâmetro de localização, isto é, qualquer modificação no parâmetro produz apenas uma translação na FDP. Este parâmetro define o valor mínimo da variável X , tomando-se frequentemente $\epsilon = 0$. A diferença $(u - \epsilon)$ corresponde a um parâmetro de escala, isto é, um aumento do seu valor provoca um esticamento na horizontal e um encolhimento na vertical na FDP (para além de alterar a posição desta). Finalmente, k é um parâmetro de forma, pelo que qualquer alteração no seu valor provoca uma alteração substancial na FDP. A existência de um parâmetro de forma torna a distribuição Weibull relativamente maleável e ajustável a diferentes histogramas.

A média e variância são dadas por:

$$\mu_X = \epsilon + (u - \epsilon) \cdot \Gamma(1 + 1/k) \quad (\text{B.76})$$

$$\sigma_X^2 = (u - \epsilon)^2 \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{k}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{k}\right) \right], \quad (\text{B.77})$$

onde $\Gamma(\cdot)$ é a chamada função Gama, dada por:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt. \quad (x > 0) \quad (\text{B.78})$$

Um caso muito comum da família Weibull corresponde a $\epsilon = 0$. Para este caso, o coeficiente de variação só depende de k :

$$\epsilon = 0 \Rightarrow V = \sqrt{\frac{\Gamma(1 + \frac{2}{k})}{\Gamma^2(1 + \frac{1}{k})}} - 1. \quad (\text{B.79})$$

Verifica-se assim que, para este caso, o parâmetro k determina univocamente o coeficiente de variação V . Por outras palavras, se conhecermos o coeficiente de variação de uma população Weibull (com $\epsilon = 0$), o parâmetro k fica automaticamente definido. O gráfico da Figura B.11 mostra valores de k em função de V . Este gráfico pode ser usado para realizar uma estimativa de k a partir do coeficiente de variação V . A Tabela B.2 exemplifica valores de k para diferentes coeficientes de variação.

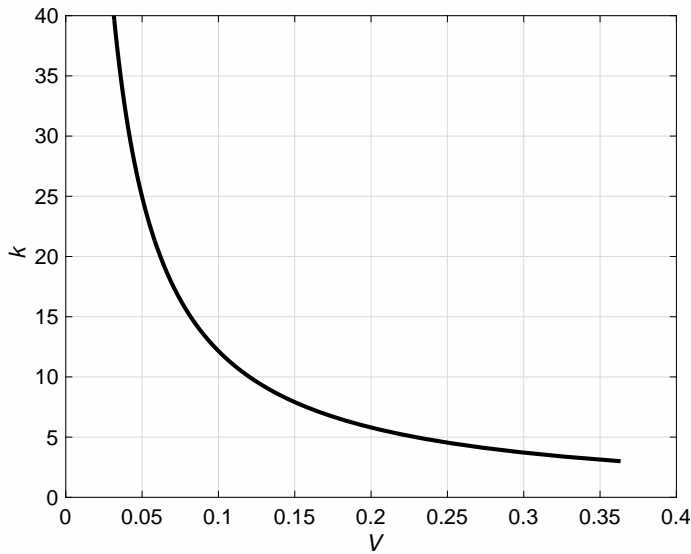


Figura B.11 Relação entre o parâmetro k e o coeficiente de variação V .

Tabela B.2 Valores de k para diferentes coeficientes de variação. (Distribuição Weibull com $\epsilon = 0$)

V	k
0.05	24.95
0.10	12.15
0.15	7.91
0.20	5.80
0.25	4.54
0.30	3.71

Função distribuição

A FDC é dada por:

$$F_X(x | \epsilon, u, k) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{x - \epsilon}{u - \epsilon} \right)^k \right]. \quad (x \geq \epsilon) \quad (\text{B.80})$$

Função distribuição inversa

A inversa da FDC obtém-se resolvendo a equação $p = F_X(x | \epsilon, u, k)$ em ordem a x . Obtém-se:

$$F_X^{-1}(p) = \epsilon + (u - \epsilon) \left[-\ln(1 - p) \right]^{\frac{1}{k}}. \quad (\text{B.81})$$

Forma reduzida

Dada uma variável $X \sim \text{Wb}(\epsilon, u, k)$, é fácil verificar que a variável:

$$Z = \frac{X - \epsilon}{u - \epsilon} \quad (\text{B.82})$$

continua com distribuição Weibull com parâmetros $\epsilon = 0$, $u = 1$ e $k = k$, isto é, $Z \sim \text{Wb}(0, 1, k)$. Diz-se que a variável Z encontra-se na forma reduzida. Vejamos como se chega a esse resultado:

$$\begin{aligned} F_Z(z) = P(Z \leq z) &= P\left(\frac{X - \epsilon}{u - \epsilon} \leq z\right) \\ &= P(X \leq \epsilon + (u - \epsilon)z) \\ &= F_X(\epsilon + (u - \epsilon)z) \\ &= 1 - \exp \left[- \left(\frac{\epsilon + (u - \epsilon)z - \epsilon}{u - \epsilon} \right)^k \right] \\ &= 1 - \exp[-z^k], \end{aligned}$$

que corresponde a uma distribuição Weibull com parâmetros $\epsilon = 0$, $u = 1$ e $k = k$.

É também imediato verificar que:

$$F_X(x) = F_Z\left(\frac{x - \epsilon}{u - \epsilon}\right). \quad (\text{B.83})$$

Propriedades

Seja X uma variável limitada à esquerda, com FDP possuindo cauda esquerda com decaimento polinomial. Seja $\{X_1, \dots, X_n\}$ uma amostra aleatória dessa variável. Então, para n grande, verifica-se que a variável $X_{\min, n} = \min\{X_1, \dots, X_n\}$ aproxima-se de uma distribuição Weibull. Este resultado torna a distribuição Weibull importante na modelação de mínimos. Note-se que o resultado é independente da forma global da distribuição de X , dependendo apenas da forma como a cauda esquerda dessa distribuição decai.

Seja $X_{\min, 1} \sim \text{Wb}(\epsilon_1, u_1, k_1)$ uma variável Weibull correspondente aos mínimos observados em uma unidade de tempo. Seja $X_{\min, n} \sim \text{Wb}(\epsilon_n, u_n, k_n)$ a distribuição

correspondente dos mínimos em n unidades de tempo. Verifica-se que a variável $X_{\min,n}$ continua a ter distribuição de Weibull. Em símbolos:

$$X_{\min,1} \sim \text{Wb}(\epsilon_1, u_1, k_1) \quad \Rightarrow \quad X_{\min,n} \sim \text{Wb}(\epsilon_n, u_n, k_n).$$

Verifica-se também que os parâmetros das variáveis $X_{\min,1}$ e $X_{\min,n}$ relaciona-se entre si pelas expressões:

$$\epsilon_n = \epsilon_1, \quad (\text{B.84})$$

$$u_n = \epsilon_1 + \frac{u_1 - \epsilon_1}{n^{1/k_1}}, \quad (\text{B.85})$$

$$k_n = k_1. \quad (\text{B.86})$$

Ou seja, os parâmetros ϵ e k mantêm-se invariantes com o período de referência. O facto de k permanecer invariante com o período de referência, faz com que o coeficiente de variação também permaneça no caso muito comum de uma distribuição Weibull com $\epsilon = 0$ (já que, nestas circunstâncias, o coeficiente de variação só depende de k).

Nota Segue uma breve demonstração do resultado que acabámos de enunciar. Um vez que $X_{\min,1} \sim \text{Wb}(\epsilon_1, u_1, k_1)$, então:

$$F_{X_{\min,1}}(x) = 1 - \exp \left[\left(\frac{x - \epsilon_1}{u_1 - \epsilon_1} \right)^{k_1} \right].$$

Por outro lado, sabemos que $F_{X_{\min,n}}(x) = 1 - [1 - F_{X_{\min,1}}(x)]^n$, donde:

$$\begin{aligned} F_{X_{\min,n}}(x) &= 1 - \left[1 - \left[1 - \exp \left[\left(\frac{x - \epsilon_1}{u_1 - \epsilon_1} \right)^{k_1} \right] \right] \right]^n \\ &= 1 - \left[\exp \left[\left(\frac{x - \epsilon_1}{u_1 - \epsilon_1} \right)^{k_1} \right] \right]^n \\ &= 1 - \exp \left[n \left(\frac{x - \epsilon_1}{u_1 - \epsilon_1} \right)^{k_1} \right] \\ &= 1 - \exp \left[\left(n^{1/k_1} \frac{x - \epsilon_1}{u_1 - \epsilon_1} \right)^{k_1} \right] \\ &= 1 - \exp \left[\left(\frac{x - \epsilon_1}{\frac{u_1 - \epsilon_1}{n^{1/k_1}}} \right)^{k_1} \right]. \end{aligned}$$

Ou seja, a variável $X_{\min,n}$ continua a ter distribuição Weibull, com parâmetros:

$$\begin{aligned} \epsilon_n &= \epsilon_1, \\ u_n - \epsilon_n &= \frac{u_1 - \epsilon_1}{n^{1/k_1}} \quad \Leftrightarrow \quad u_n = \epsilon_1 + \frac{u_1 - \epsilon_1}{n^{1/k_1}}, \\ k_n &= k_1, \end{aligned}$$

conforme se pretendia demonstrar. ■

Aplicações

A distribuição Weibull é adequada na modelação de mínimos (durante um determinado intervalo de tempo) em uma grande variedade de situações de interesse. Por exemplo, nível mínimo de armazenamento de uma dada albufeira nos próximos 50 anos.

É também um modelo adequado para modelar resistências de elementos constituídos por várias componentes e cuja resistência dependa fortemente da componente com menor resistência (associação em série).

É ainda um modelo adequado na modelação da resistência de materiais com comportamento frágil (para os quais a resistência é determinada pela rotura da parte do material menos resistente). Weibull usou a distribuição que leva o seu nome na modelação da resistência à fratura.

Tem sido também extensivamente empregue na modelação da duração de vida de equipamentos mecânicos e elétricos.

Anexo C

Modelo de regressão linear simples

A regressão linear é uma técnica estatística que permite estabelecer relações probabilísticas entre uma variável de interesse e uma ou mais variáveis que com ela tenham algum grau de dependência. Considere-se duas variáveis aleatórias, X e Y , e admita-se que se dispõe de uma amostra de cada variável, respetivamente $\{x_1, \dots, x_n\}$ e $\{y_1, \dots, y_n\}$. Se desejarmos verificar se há alguma dependência estatística entre as duas variáveis, uma forma qualitativa de o fazer consiste em observar o diagrama de dispersão do conjunto de pontos $\{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$. Observe-se a Figura C.1 (a).

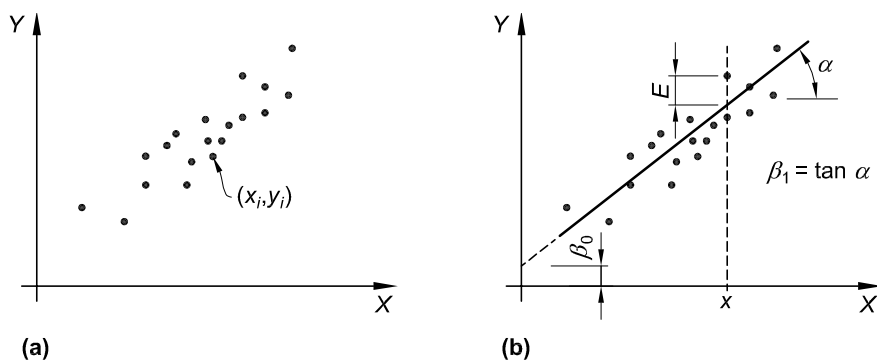


Figura C.1 (a) Diagrama de dispersão de pontos (x_i, y_i) e (b) parâmetros de regressão.

O gráfico sugere a existência de uma correlação entre X e Y : como se observa, Y tende a aumentar com X segundo um modelo com a forma:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + E, \quad (\text{C.1})$$

onde β_0 e β_1 definem a equação de uma reta (respetivamente, cota na origem e inclinação) e E representa uma variável aleatória, designada *erro* ou *resíduo* (Figura

C.1 (b)). A teoria da regressão linear ocupa-se de modelos com essa forma geral. A variável X diz-se variável independente e a variável Y diz-se variável dependente.

O modelo acima diz-se *modelo de regressão linear simples* quando a variável E possuir:

1. valor esperado nulo;
2. variância constante, que não depende de X ;
3. distribuição Normal.

O requisito de que a variância não deve depender de X é conhecido como requisito da homocedasticidade. Em termos gráficos este requisito traduz-se numa banda de pontos (x_i, y_i) com largura aproximadamente constante.

Designando por σ o desvio padrão de E e dado que $E \sim N(0, \sigma)$, podemos escrever $E = \sigma Z$, onde Z é uma variável com distribuição Normal reduzida, isto é, $Z \sim N(0, 1)$. Para um valor particular de X , digamos $X = x$, o modelo de regressão expressa-se da seguinte forma:

$$Y | x = \beta_0 + \beta_1 x + \sigma Z. \quad (\text{C.2})$$

O valor esperado e variância de $Y | x$ são naturalmente dados por:

$$\begin{aligned} E(Y | x) &= \beta_0 + \beta_1 x, \\ \text{Var}(Y | x) &= \sigma^2. \end{aligned}$$

Por outro lado a variável $Y | x$ tem distribuição Normal, podendo então escrever-se:

$$Y | x \sim N(\beta_0 + \beta_1 x, \sigma). \quad (\text{C.3})$$

A Figura C.2 representa graficamente o modelo de regressão linear acabado de descrever.

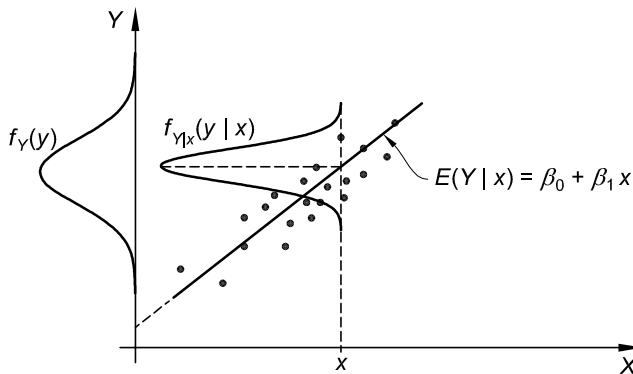


Figura C.2 Representação gráfica do modelo de Regressão linear simples.

O objetivo da regressão consiste em, partindo de um conjunto de n pontos (x_i, y_i) , estimar os parâmetros β_0 , β_1 e σ , designados parâmetros de regressão. As estimativas desses parâmetros representam-se habitualmente por $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$ e $\hat{\sigma}$.

Recorda-se de seguida as *estimativas de mínimos quadrados* dos parâmetros de regressão, as quais garantem que a média dos resíduos é nula:

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_0 &= \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}, \\ \hat{\beta}_1 &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2}, \\ \hat{\sigma} &= \sqrt{\frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i)^2}.\end{aligned}$$

Embora não seja o único método que permite estimar os parâmetros de regressão, o método dos mínimos quadrados é um dos mais utilizados, não só porque proporciona estimadores não enviesados, mas também porque são os de variância mínima entre os estimadores lineares.

O coeficiente de determinação, R^2 , que, recorde-se, constitui uma medida do grau de relação linear entre X e Y , é dado por:

$$R^2 = \frac{\left(\sum_{i=1}^n (x_i y_i) - n \bar{x} \bar{y} \right)^2}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2 \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 - n \bar{y}^2 \right)} \quad (\text{C.4})$$

O coeficiente de determinação tem a propriedade: $0 \leq R^2 \leq 1$. O caso $R^2 = 1$ ocorre quando os resíduos são todos nulos, isto é, a variável X explica completamente a variável Y (modelo determinístico). O caso $R^2 = 0$ ocorre quando a reta de regressão é horizontal, isto é, quando o modelo não tem qualquer utilidade na estimação de Y a partir do conhecimento de X (as variáveis são independentes). Constata-se que o coeficiente de determinação R^2 é o quadrado do coeficiente de correlação ρ_{XY} , definido no Capítulo 4.

Voltando às estimativas dos parâmetros de regressão, deve-se ter presente que, ao se substituir na Eq. (C.3) β_0 , β_1 e σ pelas suas estimativas, $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$ e $\hat{\sigma}$, está a introduzir-se um erro, pois as estimativas dificilmente coincidirão com os verdadeiros valores. Esse erro origina incerteza, chamada, recorde-se, *incerteza estatística*. Esta incerteza é tida devidamente em conta através do *modelo preditivo*, que no caso do modelo de regressão linear traduz-se na modelação de $Y | x$ por meio de uma distribuição t-Student de 3 parâmetros, a saber¹:

$$Y | x \sim \text{St}(a, b, \nu), \quad (\text{C.5})$$

onde

$$\begin{aligned}a &= \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x, \\ b &= \hat{\sigma} \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x - \bar{x})^2}{S_{xx}}}, \\ \nu &= n - 2.\end{aligned}$$

¹Este resultado pode ser obtido via Estatística Clássica (Pedrosa e Gama, 2016) ou via Estatística Bayesiana (Bernardo e Smith, 1994).

O parâmetro S_{xx} é dado por:

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

Note-se que quando $n \rightarrow \infty$ o modelo preditivo expresso na Eq. (C.5) converge para o modelo expresso na Eq. (C.3), que corresponde à não existência de incerteza estatística na estimação dos parâmetros β_0 , β_1 e σ .

Uma forma alternativa de apresentar o modelo preditivo expresso na Eq. (C.5) consiste em escrever $Y | x = a + bT_{n-2}$, onde T_{n-2} representa uma variável t-Student reduzida com $\nu = n - 2$ graus de liberdade. Substituindo os valores a e b pelas expressões acima, tem-se:

$$Y | x = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x + \hat{\sigma} \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x - \bar{x})^2}{S_{xx}}} T_{n-2}. \quad (\text{C.6})$$

O quantil p de $Y | x$ é então determinado pela expressão:

$$(Y | x)_p = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x + \hat{\sigma} \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x - \bar{x})^2}{S_{xx}}} t_{p,n-2}, \quad (\text{C.7})$$

onde $t_{p,n-2} = F_{T_{n-2}}^{-1}(p)$.

Bibliografia

- Andrzej S. Nowak, K. C. (2013). *Reliability of Structures*. CRC Press, Taylor & Francis Group.
- Ang, A. e Tang, W. (1984). *Probability Concepts in Engineering Planning and Design, Vol. 2: Decision, Risk, and Reliability*, volume 2. John Wiley & Sons.
- Ang, A. e Tang, W. (2007). *Probability Concepts in Engineering: Emphasis on Applications to Civil and Environmental Engineering*. John Wiley & Sons.
- Baptista, A. M. e Filipe, J. (2016). Tensão de cedência dos aços de varões para betão armado. análise da sua distribuição estatística nas duas últimas décadas. In *Encontro Nacional de Betão Estrutural (BE2016)*, Coimbra, Portugal.
- Benjamin, J. R. e Cornell, C. A. (1970). *Probability, statistics and decision for civil engineers*. McGraw-Hill, New York.
- Bernardo, J. M. e Smith, A. F. M. (1994). *Bayesian Theory*. John Wiley & Sons, New York.
- Borges, J. e Castanheta, M. (1985). *Structural Safety: Course 101*. Laboratório Nacional de Engenharia Civil (LNEC), Lisbon, Portugal.
- Cremona, C. (2011). *Structural Performance: Probability-Based Assessment*. ISTE Ltd and John Wiley & Sons, Inc.
- Ditlevsen, O. e Madsen, H. (1996). *Structural Reliability Methods*. Wiley.
- EN 1990 (2002). Eurocode – Bases of structural design. Norma europeia, Comité Européen de Normalization (CEN), Bruxelas.
- EN 1991-1-7 (2006). Eurocode 1 – Actions on structures – Part 1-7: General actions – Accidental actions. Norma europeia, Comité Européen de Normalization (CEN), Bruxelas.
- fib bulletin 80 (2016). *Partial factor methods for existing concrete structures*. Bulletin (Fédération internationale du béton). Fédération internationale du béton (fib). Recommendation, fib Task Group 3.1.
- Gumbel, E. (1958). *Statistics of Extremes*. Dover books on mathematics. Dover Publications.

- Hahn, G. e Shapiro, S. (1994). *Statistical Models in Engineering*. Wiley Classics Library. Wiley.
- Holický, M. (2013). Optimisation of the target reliability for temporary structures. *Civil Engineering and Environmental Systems*, 30(2):87–96.
- ISO 13822 (2010). Bases for design of structures — assessment of existing structures. Standard, International Organization for Standardization, Genève, Switzerland.
- ISO 13824 (2009). Bases for design of structures — general principles on risk assessment of systems involving structures. Standard, International Organization for Standardization, Genève, Switzerland.
- ISO 2394 (1998). General principles on reliability for structures. Standard, International Organization for Standardization, Genève, Switzerland.
- ISO 2394 (2015). General principles on reliability for structures. Standard, International Organization for Standardization, Genève, Switzerland.
- ISO 31000 (2009). Risk management — principles and guidelines. Standard, International Organization for Standardization, Genève, Switzerland.
- Jacinto, L. e Santos, L. O. (2021). Ação do vento e ação sísmica para situações de projeto transitórias. In *Reabilitar & Betão Estrutural (RBE2020)*, Lisboa, Portugal.
- JCSS (2001). *Probabilistic Model Code*. Joint Committee on Structural Safety (JCSS). Publication available from www.jcss.byg.dtu.dk/Publications/Probabilistic_Model_Code.aspx.
- Kiureghian, A. D. e Ditlevsen, O. (2009). Aleatory or epistemic? does it matter? *Structural Safety*, 31(2):105 – 112.
- Lauridsen, J., Jensen, J. S., e Enevoldsen, I. B. (2007). Bridge owner's benefits from probabilistic approaches. *Structure and Infrastructure Engineering*, 3(4):281–302.
- Law, A. (2007). *Simulation Modeling and Analysis*. McGraw-Hill series in industrial engineering and management science. McGraw-Hill.
- Madsen, H. O., Krenk, S., e Lind, N. C. (2006). *Methods of structural safety*. Dover Publications.
- Melchers, R. (1999). *Structural reliability: analysis and prediction*. Wiley, 2nd edition.
- Monteiro, A. e Gonçalves, A. (2008). Avaliação da resistência à compressão do betão nas estruturas com base em ensaios esclerométricos. In *Encontro Nacional de Betão Estrutural (BE2008)*, Guimarães, Portugal.
- Montgomery, D. e Runger, G. (2007). *Applied Statistics and Probability for Engineers*. John Wiley & Sons, 4th edition.
- NP EN 13791 (2008). Avaliação da resistência à compressão do betão nas estruturas e em produtos pré-fabricados. Norma portuguesa, Instituto Português da Qualidade (IPQ), Caparica, Portugal.

- Paulino, C. D., Turkman, M. A., e Murteira, B. (2003). *Estatística Bayesiana*. Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa.
- Pedrosa, A. C. e Gama, S. M. A. (2016). *Introdução Computacional à Probabilidade e Estatística*. Porto Editora.
- RSA (1983). Regulamento de segurança e acções para estruturas de edifícios e pontes (RSA). Decreto-lei n.º 235/83, de 31 de maio, Imprensa Nacional, Casa da Moeda, Lisboa, Portugal.
- Rubinstein, R. (1981). *Simulation and the Monte Carlo Method*. Wiley Series in Probability and Statistics. Wiley.
- Schneider, J. (2006). *Introduction to Safety and Reliability of Structures*. IABSE, Zurich, 2nd edition.
- Thoft-Christensen, P. e Baker, M. J. (1982). *Structural Reliability Theory and Its Applications*. Springer-Verlag.
- Vrouwenvelder, T. (2010). Assessment criteria for existing structures. *Structural Engineering International*, 17:62–65.

Índice remissivo

A

- Ação variável base, 21
- Ações
 - acompanhantes, 21
 - de acidente, 17
 - definição, 17
 - estabilizantes, 15
 - instabilizantes, 15
 - permanentes, 17, 18
 - sísmica, 18
 - variáveis, 17, 19
- Acontecimentos
 - dijuntos, 29
 - independentes, 33
 - intersecção, 29
 - reunião, 29
- Ajustamento, 87
 - testes de, 87
- Amostra aleatória, 73
- Análise plástica probabilística, 175
- Análise de sensibilidade
 - de funções de variável aleatória, 70
 - recorrendo ao método de MC, 110, 146
- Avaliação de risco, 147

C

- Calibração de coeficientes parciais de segurança, 205
 - ações permanente, 210
 - ações variáveis, 211
 - resistências, 214
- Coefficiente de assimetria, 41, 74
- Coefficiente de correlação, 62

- Coefficiente de curtose, 42, 74
- Coefficiente de determinação, 251
- Coefficiente de sensibilidade, 70, 110, 146, 157
- Coefficiente de variação, 40, 74
- Coefficientes parciais de segurança, 20, 145
 - calibração, 205
 - definição, 10
- Combinação de ações
 - acidental, 21
 - característica, 24
 - frequente, 24
 - fundamental, 21
 - para estados limites de utilização, 24
 - para estados limites últimos, 20
 - quase permanente, 24
 - regras gerais, 20
 - sísmica, 22
- Condição de segurança, 8, 11, 13, 14
- Covariância, 61
- Custo generalizado, 147, 180
- Custo marginal de segurança, 180
- Custo total, *ver* custo generalizado

D

- Desvio padrão
 - amostral, 74
 - definição, 39
 - estimativa recorrendo ao método de MC, 98
- Distribuição
 - condicionada, 60
 - de máximos, 49

de mínimos, 51
 marginal, 59
 Distribuição Binomial, 220
 Distribuição de Bernoulli, 219
 Distribuição de extremos
 assintótica, 49, 53
 do tipo I, 53
 do tipo II, 53
 do tipo III, 53
 exata, 49
 Distribuição de Gauss, *ver*
 distribuição Normal
 Distribuição de Poisson, 221
 Distribuição Fréchet, 53, 238
 Distribuição geométrica, 220
 Distribuição Gumbel, 53, 198
 definição, propriedades e
 aplicações, 235
 Distribuição Lognormal, 48, 55
 definição, propriedades e
 aplicações, 228
 Estimativa de quantis, 81
 Distribuição Normal, 44, 55
 bi-dimensional, 64
 definição, propriedades e
 aplicações, 225
 Estimativa de quantis, 78
 Distribuição t-Student, 232
 Distribuição uniforme, 223
 Distribuição Weibull, 53, 242
 Durabilidade, 6, 24

E

Ensaio indiretos, 82
 Erro aleatório, 118
 Erro padrão, 74
 Erro sistemático, 118
 Esclerómetro, 82, 84
 Espaço amostral, *ver* espaço de
 resultados
 Espaço de resultados, 29, 34
 Estado da natureza, 30
 Estados limites
 de utilização, 7, 9, 16
 definição, 7
 relevantes, 9
 últimos, 7, 16
 Estatística, *ver* Estimador
 Estimador

centrado, 74
 conceito, 74
 enviesado, 74
 Estruturas existentes, 3, 16, 46, 145,
 181, 186
 Eurocódigos Estruturais, 4, 5, 25

F

Fiabilidade, 5, 8, 125, 130
 Fiabilidade de sistemas
 sistemas em paralelo, 172
 sistemas em série, 170
 sistemas mistos, 174
 FORM
 coeficiente de sensibilidade, 157
 coeficiente de sensibilidade,
 valores padrão, 162
 descrição do método, 151
 ponto de dimensionamento, 153
 valor de dimensionamento, 161
 Formatos de fiabilidade
 de nível I, 137
 de nível II, 140
 de nível III, 142
 de nível IV, 146
 Frequência
 absoluta, 88
 relativa, 27, 88
 Frequência de colapsos, 125
 Função densidade de probabilidade,
 36
 conjunta, 57
 Função desempenho, *ver* função
 estado limite
 Função distribuição cumulativa, 35,
 36
 Função distribuição empírica, 77, 89
 Função distribuição inversa, 54
 Função estado limite, 113
 Função indicadora, 102
 Função massa de probabilidade, 35
 conjunta, 58
 Função quantil, *ver* Função
 distribuição inversa

H

Histograma, 87, 99
 homocedasticidade, 250

I

- Incerteza aleatória, 125
- Incerteza epistêmica, 125
- Incerteza estatística, 78
- Incerteza intrínseca, 125
- Independência estatística, 33, 61
- Índice de fiabilidade
 - conversão entre diferentes períodos de referência, 134
 - de Cornell, 128, 140
 - definição, 125
 - limites mínimos, 183
 - otimização económica, 180
 - valor ótimo, 180
 - valor-alvo, 179
 - valor-alvo, estruturas existentes, 186
 - valor-alvo, estruturas novas, 184

M

- Margem de segurança, 113, 126
- Matriz de risco, 149
- Média
 - amostral, 74
 - definição, 37
 - determinação aproximada, 67
 - estimativa recorrendo ao método de MC, 98
 - propriedades, 38
- Mediana, 38
- Método da máxima verossimilhança, 76
- Método da transformação inversa, 105
- Método de Monte Carlo
 - avaliação da probabilidade de falha, 122
 - como método de fiabilidade de nível III, 143
 - conceito, 97
 - geração de amostras com dist. Gumbel, 105
 - geração de amostras de máximos, 108
- Método dos coeficientes parciais de segurança, 10, 137
- Método dos estados limites, 6, 8
- Método dos momentos, 75
- Moda, 38
- Modelo de ações, 114

- Modelo de cálculo, *ver* Modelo estrutural
- Modelo de resistência, 114
- Modelo estrutural, 21, 114
- Modelo Normal, *ver* distribuição Normal
- Modelos de transformação
 - conceito, 114
 - exatidão, 118
 - incerteza nos, 118, 145, 207
 - precisão, 118

P

- Papel de probabilidade
 - conceito, 90
 - papel Gumbel, 91
 - papel Normal, 90
- Parâmetro
 - de escala, 43
 - de forma, 43
 - de localização, 43
- Período de referência, 19, 193
- Período de retorno, 19
 - definição, 194
 - para situações de projeto transitórias, 201
- Princípio ALARP, 148
- Princípio da máxima verossimilhança, 89
- Princípio da regularidade estatística, 27
- Princípio da sobreposição dos efeitos, 20
- Probabilidade
 - a posteriori, 31
 - a priori, 31
 - axiomas de Kolmogorov, 28
 - conceito de, 27
 - condicionada, 31
 - interpretação Bayesiana, 28, 30
 - interpretação frequentista, 27
- Probabilidade de excedência, 193
- Probabilidade de falha
 - conversão entre diferentes períodos de referência, 133
 - definição, 15, 120
 - interpretação, 125
 - métodos de avaliação, 121

- relação com o índice de
 - fiabilidade, 125
 - valor alvo, 16
- Processo estocástico, 130
- Q**
- Quantil, 54, 77
 - estimativa recorrendo ao método
 - MC, 101
- R**
- Regressão linear, 249
- Risco, 2, 146, 180
- Robustez, 6, 25
- Rotura
 - dúctil, 25, 44
 - frágil, 25
- S**
- Segurança estrutural, 1, 5, 8
- Situações de projeto
 - acidentais, 19, 21, 25
 - de fadiga, 19
 - definição, 19
 - persistentes, 19, 21
 - sísmica, 19, 22
 - transitórias, 19, 21, 201
- Superfície de falha, 114
- T**
- Tensões admissíveis, 2
 - método das, 10
- Tensões de segurança, *ver* tensões
 - admissíveis
- Teorema da multiplicação de
 - probabilidades, 31, 60
- Teorema da probabilidade total, 32,
 - 60
- Teorema de Bayes, 31, 32
- Teorema do limite central, 44, 48
- Teoria da fiabilidade estrutural, 2, 113
- Teoria da plasticidade estrutural
 - teorema cinemático, 175
 - teorema estático, 175
- V**
- Valor
 - característico, 10, 11, 18, 20, 189
 - característico inferior, 54, 77
 - característico superior, 54, 77
 - característico, função do período
 - de retorno, 196
 - de combinação, 19
 - de dimensionamento, 10, 20
 - de dimensionamento FORM, 161
 - frequente, 19
 - nominal, 13, 19
 - quase permanente, 19
 - reduzido, 19
 - representativo, 10, 18
- Valor esperado, *ver* média
- Variáveis aleatórias
 - conceito, 34
 - contínuas, 34
 - discretas, 34
 - independentes, 61
- Variáveis básicas, 12, 114, 116
- Variância
 - amostral, 74
 - definição, 39
 - determinação aproximada, 67
 - estimativa recorrendo ao método
 - de MC, 98
 - propriedades, 39
- Vetor aleatório, 57
- Vida útil de projeto, 5, 6

As expectativas da sociedade relativamente à segurança das construções são muito elevadas. A ocorrência de colapsos estruturais é em geral muito pouco tolerada, em especial quando estão envolvidas perdas humanas. Por este motivo o tema da segurança estrutural tem merecido a atenção de muitos investigadores ao longo dos tempos. Visto que o problema do dimensionamento e verificação da segurança das estruturas envolve tomar decisões em face de incertezas significativas, tais investigadores têm defendido que a abordagem probabilística do problema é a mais consistente e satisfatória.

Os critérios de segurança definidos nos modernos regulamentos de segurança estrutural, de que são exemplo os Eurocódigos Estruturais, têm por base métodos probabilísticos, ou semi-probabilísticos. A aplicação de métodos probabilísticos, muito encorajada atualmente na área das estruturas existentes, apresenta, porém, alguns desafios. Por um lado, verifica-se uma quase total ausência da teoria da fiabilidade estrutural nos currículos da maioria dos cursos de engenharia civil ministrados no país. Os alunos terminam os seus cursos com pouca formação nessa área, de modo que terão alguma dificuldade caso dela necessitem na sua vida profissional. Por outro lado, trata-se de uma área com muito pouca divulgação na língua portuguesa, e os livros existentes na língua inglesa, apesar de bons, são de um modo geral relativamente complexos. O presente livro procura dar uma resposta positiva a esses desafios.

Luciano Jacinto

Licenciou-se em Engenharia Civil pelo Instituto Superior Técnico em 1990 e ingressou no mesmo ano, ainda estudante finalista, na PROFABRIL SA, onde exerceu atividade de projetista de estruturas até 1994. Presseguiu a sua atividade profissional na JL Cândio Martins, Projeto de Estruturas, tendo participado essencialmente no projeto de pontes, algumas de grande envergadura, como a ponte Salgueiro Maia sobre o Rio Tejo, em Santarém. No início de 2000 aceitou um convite para integrar os quadros da Projecol, Construtora do Tâmega, onde desenvolveu trabalho especializado na área do pré-esforço por pos-tensão. Em 2001 tornou-se docente no ISEL, acumulando a atividade docente com a atividade profissional até finais de 2007, altura em que passou a dedicar-se em exclusividade ao ensino e investigação. Em 2011 doutorou-se em Engenharia Civil, especialidade Estruturas, pela Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa.



**POLITÉCNICO
DE LISBOA**