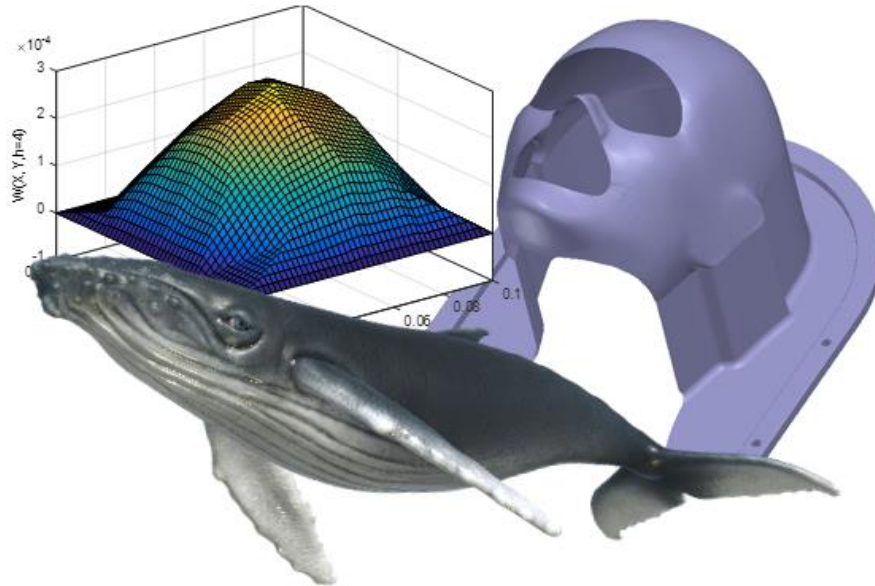




INSTITUTO SUPERIOR DE ENGENHARIA DE LISBOA
Área Departamental de Engenharia Mecânica

ISEL



Engenharia Inversa de Máscaras de Imobilização para Diagnóstico e Terapêutica

DÉBORA ALEXANDRA DOS SANTOS CRAVEIRO
(Licenciada em Engenharia Mecânica)

Trabalho Final de Mestrado para obtenção do grau de Mestre
em Engenharia Mecânica

Orientadoras:

Doutora Maria Amélia Ramos Loja
Doutora Lina da Conceição Capela de Oliveira Vieira

Júri:

Presidente: Doutor Vitor Manuel Rodrigues Anes

Vogais:

Doutor João Filipe de Almeida Milho
Doutora Maria Amélia Ramos Loja

Março de 2019



ISEL

INSTITUTO SUPERIOR DE ENGENHARIA DE LISBOA
Área Departamental de Engenharia Mecânica

Engenharia Inversa de Máscaras de Imobilização para Diagnóstico e Terapêutica

DÉBORA ALEXANDRA DOS SANTOS CRAVEIRO
(Licenciada em Engenharia Mecânica)

Trabalho Final de Mestrado para obtenção do grau de Mestre
em Engenharia Mecânica

Orientadoras:

Doutora Maria Amélia Ramos Loja
Doutora Lina da Conceição Capela de Oliveira Vieira

Júri:

Presidente: Doutor Vitor Manuel Rodrigues Anes

Vogais:

Doutor João Filipe de Almeida Milho
Doutora Maria Amélia Ramos Loja

Março de 2019

AGRADECIMENTOS

Quero começar por agradecer aos meus pais por todo o apoio, amor e carinho que me deram durante todo o meu percurso académico, desde a licenciatura até ao fim do mestrado, e toda a vida. O meu eterno Obrigada.

Queria também deixar um agradecimento muito sentido à minha família mais próxima, avós e tios, que estiveram e estarão sempre presentes.

Gostaria de deixar um agradecimento especial ao meu namorado, que esteve sempre presente e me apoiou em tudo, quer na minha vida pessoal, quer académica.

Não posso deixar de agradecer aos meus amigos que me ajudaram durante o meu percurso académico, mas também pelas risadas que me ajudaram a descontrair dos problemas.

Quero agradecer a todos os Professores que contribuíram para a minha formação, e principalmente, aos que de algum modo contribuíram no desenvolvimento da minha Dissertação de Mestrado.

Não me poderia esquecer das minhas Orientadoras da Dissertação que se mostraram sempre disponíveis para me ajudar, em especial a Professora Maria Amélia Loja, que me permitiu sair da minha zona de conforto, e que sem ela não tinha conseguido chegar até aqui. Foi um privilégio muito grande trabalhar com elas. Muito Obrigada!

Gostaria de deixar também um agradecimento aos Projectos IPL/2016/Softimob/ISEL e LAETA – UID/EMS/50022/2019 pelo apoio. E agradeço também à Fundação Champalimaud pela possibilidade da aquisição das imagens TC, indispensáveis para desenvolvimento da Dissertação.

RESUMO

O presente trabalho visa a modelação e optimização de dispositivos de imobilização para diagnóstico e terapêutica com o objectivo da produção dos mesmos através da impressão 3D. Estes são indispensáveis no âmbito de tratamentos de radioterapia, e desejavelmente poderão vir a constituir um auxiliar preciso no diagnóstico no contexto da Medicina Nuclear.

Para isso são abordados temas como a Engenharia Inversa para a reconstrução de um modelo da cabeça e a modelação geométrica assistida por um *software Computer Aided Design* (CAD) utilizando esta superfície. O presente trabalho aborda também temáticas como a simulação e a modelação de elementos finitos para uma análise cuidada da eficácia da imobilização do paciente.

Modelos simples de placa foram utilizados para verificação de modelos mais complexos. Utilizando o método dos elementos finitos (MEF) com uma Teoria de Placa de Ordem Superior (*High Order Shear Deformation Theory*, HSDT), o Método de Navier e a aproximação de uma placa fina por metamodelação utilizando dados da HSDT. A metodologia foi posteriormente aplicada aos dispositivos de imobilização, de modo a possibilitar a obtenção de soluções óptimas.

Nesta dissertação também são consideradas diferentes técnicas de optimização, entre as quais se destacam os algoritmos meta-heurísticos, Optimização por Enxame de Partículas (*Particle Swarm Optimization*, PSO) e o Algoritmo de Optimização da Baleia (*Whale Optimization Algorithm*, WOA). Estas temáticas foram implementadas para a optimização da placa fina enquanto estudo de verificação, e posteriormente, na optimização de metamodelos do deslocamento máximo das máscaras.

Os modelos de dispositivos de imobilização concebidos foram finalmente produzidos por impressão 3D.

Palavras-chave: Engenharia Inversa, Simulação, Método de Navier, Método dos Elementos Finitos, Optimização, Optimização por Enxame de Partículas, Algoritmo de Optimização da Baleia, Metamodelação, Impressão 3D, Kriging.

ABSTRACT

The present work aims the 3D modelling and optimization of immobilization devices for diagnosis and therapeutic medical applications with the aim of their production using 3D printing. These are imperative in radiotherapy treatments scope, and hopefully they might become a needed help in diagnosis in the Nuclear Medicine context.

For that, there are addressed themes like Reverse Engineering for a head model reconstruction and the 3D geometric modelling using this surface with a CAD software. The present work also addresses thematic like simulation and finite element modelling for a meticulous analysis of the patient immobilization.

Simple plate models were used as verification of more complex models. Using the finite element method (FEM) with a High-order Shear Deformation Theory (HSDT), the Navier Method and a thin plate approximation by metamodeling using the HSDT data. The methodology was after applied to the immobilization devices in order to enable the achievement of optimal solutions.

In this thesis there are also considered different optimization techniques, including the meta-heuristic algorithms, Particle Swarm Optimization (PSO) and the Whale Optimization Algorithm (WOA). These thematic were implemented for the thin plate optimization as a verification study and after in the maximum displacement metamodels optimization.

The models of the designed immobilization masks were finally produced by 3D printing.

Keywords: Reverse Engineering, Simulation, Navier Method, Finite Element Method, Optimization, Particle Swarm Optimization, Whale Optimization Algorithm, Metamodeling, 3D Printing, Kriging.

LISTA DE ABREVIATURAS

LISTA DE ACRÓNIMOS

1D	Unidimensional
2D	Bidimensional
3D	Tridimensional
3DLS	<i>3D Laser Scanning</i>
AAA	<i>Artificial Algae Algorithm</i>
ABS	Acrilonitrilo-butadieno-estireno
CAD	<i>Computer-aided Design</i>
CNC	<i>Computer Numeric Control</i>
COM	<i>Component Object Model</i>
EI	Engenharia Inversa
ESA	<i>Elephant Search Algorithm</i>
FDM	<i>Fuse Deposition Modelling</i>
FFF	<i>Fused Filament Fabrication</i>
GLSA	<i>Gravitational Local Search</i>
GRP	<i>Gaussian Regression Process</i>
GSO	<i>Galactic Swarm Optimization</i>
HSDT	<i>High-order Shear Deformation Theory</i>
M1	Máscara 1
M2	Máscara 2
M3	Máscara 3
MEF	Método dos Elementos Finitos
microTC	micro-Tomografia Computorizada
MSE	<i>Mean Squared Error</i>
PLA	Poliácido láctico
PMMA	Polimetilmetacrilato
PSO	<i>Particle Swarm Optimization</i>
RBF	<i>Radial Basis Functions</i>
SA	<i>Simulated Annealing</i>
SLA	Estereolitografia

SLS	<i>Selective Laser Sintering</i>
SPECT	<i>Single Photon Emission Computed Tomography</i>
TC	Tomografia Computorizada
TCRT	<i>Template-Based CAD Reconstruction Tool</i>
VM	on Mises
WOA	<i>Whale Optimization Algorithm</i>

LISTA DE SÍMBOLOS: ALFABETO ROMANO

(x,y,z)	Coordenadas Cartesianas
(X_{med}^*, Y_{med}^*)	Localização média da deformada máxima da placa entre espessuras
$(X_{med}^*, Y_{med}^*, Z_{med}^*)$	Localização média da deformada máxima da máscara entre espessuras
A	Área
a, b, c, d, e	Constantes do polinómio interpolado (Método dos mínimos quadrados)
a, r, A, C	Vectores de coeficientes (WOA)
B	Matriz de deformação
b	Parâmetro de forma da espiral (WOA)
$B_{c0}^{(e)}$	Matriz de deformação de corte de um elemento e
$B_{c2}^{(e)}$	Matriz de deformação de corte de ordem superior de um elemento e
$B_f^{(e)}$	Matriz de deformação de flexão de 1ª ordem de um elemento e
$B_{fs}^{(e)}$	Matriz de deformação de flexão de ordem superior de um elemento e
$B_m^{(e)}$	Matriz de deformação de membrana de um elemento e
C	Matriz de elasticidade à flexão (Kant)
c_1, c_2	Coefficientes de aceleração (PSO)
C_c	Matriz de elasticidade ao corte (Kant)
CCCC	Placa com todos os bordos encastrados
D	Coefficiente de rigidez de flexão
d	nº de variáveis de projecto (PSO)

D', D	Distância entre a melhor solução provisória e o agente i (WOA)
E	Módulo de Young
f	Vector de forças generalizadas
$f(x)$	Função genérica
$F(X^*)$	Mínimo global alcançado com os algoritmos (PSO e WOA)
F_{min}	Mínimo global conhecido de uma dada $f(x)$
h	Espessura
h	Distância Euclidiana (Kriging)
H	Vector de espessuras
I	2º Momento de área
$i1, i2, i3, i4$	Conectividades de um elemento e (Kant)
J	Matriz Jacobiana
K	Matriz de rigidez global
$K^{(e)}$	Matriz de rigidez de um dado elemento e
$K_{c2c2}^{(e)}$	Matriz de rigidez de corte de ordem superior de um dado elemento e
$K_{cc}^{(e)}$	Matriz de rigidez de corte de 1ª ordem de um dado elemento e
$K_{cc2}^{(e)}$ e $K_{c2c}^{(e)}$	Matriz de rigidez com termos de acoplamentos de corte de um dado elemento e
$K_{f*f}^{(e)}$	Matriz de rigidez de flexão de ordem superior de um dado elemento e
$K_{ff}^{(e)}$	Matriz de rigidez de flexão de 1ª ordem de um dado elemento e
$K_{mm}^{(e)}$	Matriz de rigidez de membrana de um dado elemento e
l	Parâmetro de aleatório da espiral (WOA)
L	Constante das funções de covariância (Kriging)
Lx, a	Largura da placa segundo x
Ly, b	Largura da placa segundo y
M_x, M_y, M_{xy}	Momentos na placa
N	Vector de funções de forma
P	Carga transversal aplicada [N]

p	Constante aleatória (WOA)
$p(x,y)$	Carregamento da placa (método de Navier)
P_0	Carga transversal aplicada [Pa]
p_g	Melhor posição global provisória (PSO)
p_i	Melhor posição do agente i (PSO)
p_i	Valores da amostra (Kriging)
P_{mn}, a_{mn}	Coefficientes das séries duplas de Fourier (método de Navier)
q	Vector de graus de liberdade generalizados
r_j	Valor da amostra no ponto j (Kriging)
SSSS	Placa com todos os bordos simplesmente apoiados
Std	Desvio-padrão
T1	Polimetilmetacrilato
T2	Sulfeto de Polifenileno
T3	Policarbonato
T4	Acrilonitrilo-butadieno-estireno
T5	Ácido Polilático
U	Energia elástica de deformação
u, v, w	Campos de deslocamentos
u^0, v^0, w^0	Deslocamentos do plano médio
V	Potencial de forças externas
V	Volume
v_i	Vector de velocidades (PSO)
v_{min}, v_{max}	limites laterais do domínio da velocidade (PSO)
V_{min}, V_{max}	Limites laterais do domínio da velocidade de uma dada $f(x)$ (PSO)
w	Peso da inércia (PSO)
$w(x,y)$	Deformada transversal da placa (método de Navier)
$W(x,y,h)$	Função metamodelo da deformada da placa
W^*	Valor mínimo da deformada máxima
$W_h(x,y)$	Função metamodelo da deformada para uma espessura h
W_{max}	Deformada máxima

$W_{max_minimize}$	Deformada máxima obtida com a biblioteca de otimização do Maple
W_{SW}	Valor da deformada no <i>SolidWorks</i>
wt	Peso de Gauss
$W_{X^*,Y^*}(h), W_{X^*,Y^*,Z^*}(h)$	Polinómio metamodelo da deformada máxima
X	Posição do agente i (WOA)
X^*	Melhor solução provisória (WOA)
X^*	Valor da variável de projecto no mínimo global de uma função
x_i	Vector de posições (PSO)
x_{min}, x_{max}	limites laterais do domínio da posição (PSO)
X_{rand}	Posição de um agente aleatório (WOA)
z_j	Valor estimado no ponto j (Kriging)

LISTA DE SÍMBOLOS: ALFABETO GREGO

(ξ, η)	Coordenadas naturais de um elemento e
α_j	Vector do semi-variograma entre z_j e p_i (Kriging)
γ	Funções de covariância (Kriging)
Γ	Matriz de covariância (Kriging)
$\gamma_{xz}^0, \gamma_{yz}^0$	Deformações: componente de corte
$\gamma_{xz}^2, \gamma_{yz}^2$	Deformações: componente de corte de ordem superior
Δ_x, Δ_y	Largura do elemento quadrilátero de Lagrange (Kant)
$\varepsilon_{xx}^*, \varepsilon_{yy}^*, \gamma_{xy}^*$	Deformações: componente de flexão de ordem superior
$\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	Campo de deformações
$\varepsilon_{xx}^f, \varepsilon_{yy}^f, \gamma_{xy}^f$	Deformações: componente de flexão
$\varepsilon_{xx}^m, \varepsilon_{yy}^m, \gamma_{xy}^m$	Deformações: componente de membrana
θ_x^*, θ_y^*	Rotações de ordem superior
θ_x, θ_y	Rotações de 1ª ordem
$\lambda, \lambda_x, \lambda_y$	Parâmetros adicionais das formulações do Kriging Comum e Universal
ν	Coefficiente de Poisson
Π	Energia potencial total
ρ	Massa volúmica

σ^2	Variância (Kriging)
$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$	Estado de tensão
σ_{ys}	Tensão de cedência
$\chi, \kappa, \varphi, \varphi_a, \varphi_b$	Coefficientes de restrição (PSO)
Ω_j	Vector dos pesos (Kriging)
ω_{ji}	Pesos (Kriging)

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1. Dispositivos de imobilização actualmente utilizados (Fisher et al. 2014), (D. S. Craveiro et al. 2017).....	6
Figura 2.2. Diferenças entre a superfície do fãntoma e a superfície interna da máscara (adaptado de (Fisher et al. 2014)).....	6
Figura 2.3. a) Aspecto da máscara impressa encaixada no fãntoma b) TC do encaixe (adaptado de (Fisher et al. 2014)).....	7
Figura 2.4. À esquerda: malha poligonal; à direita: máscara impressa (S. Chen et al. 2016).....	7
Figura 2.5. Diferentes formas de digitalização 3D de objectos (Geng and Bidanda 2017).....	9
Figura 2.6. Etapas da engenharia inversa: da digitalização ao CAD (Buonamici et al. 2017).....	10
Figura 2.7. Exemplos de técnicas de impressão 3D. À esq.: FDM; no meio: SLS; à dir.: SLA (Balletti, Ballarin, and Guerra 2017).....	14
Figura 3.1. Esquema da TC. a) Tomografia reconstrutiva b) e c) forma de aquisição mais comum (adaptado de (Brooks and Di Chiro 1975)).....	19
Figura 3.2. Funcionamento do 3DLS (Milroy et al. 1996).....	20
Figura 3.3. Esquema de uma placa rectangular e sistema de coordenadas.....	21
Figura 3.4. Elemento quadrilátero bi-linear: A) sistema de coordenadas cartesianas; B) sistema de coordenadas naturais.....	25
Figura 3.5. Esquema representativo do PSO.....	29
Figura 3.6. Esquema do movimento descrito na caça com rede de bolhas (Mirjalili and Lewis 2016).....	32
Figura 3.7. Vectors posição 2D e 3D e possíveis actualizações destes vectors (Mirjalili and Lewis 2016).....	33
Figura 3.8. Implementação da pesquisa por rede de bolhas (Mirjalili and Lewis 2016).....	34
Figura 3.9. Procura da presa com um agente de pesquisa aleatório (Mirjalili and Lewis 2016).....	35
Figura 4.1. Passagem da malha .stl ao sólido: 3DLS.....	42
Figura 4.2. Passagem da malha .stl para sólido: TC.....	43
Figura 4.3. Modelo da cabeça encaixado no suporte.....	43
Figura 4.4. Templates para as geometrias das máscaras.....	44

Figura 4.5. Geometrias M1, M2 e M3 do 3DLS.....	45
Figura 4.6. Geometrias M1, M2 e M3 da TC	45
Figura 4.7. Casos de carregamento considerados: a) flexão lateral esquerda do pescoço b) flexão do pescoço (MAR Loja et al. 2018)	48
Figura 4.8. Diagramas de corpo livre da flexão lateral esquerda do pescoço.....	48
Figura 4.9. Diagramas de corpo livre da flexão do pescoço.....	49
Figura 4.10. Malha MEF do <i>SolidWorks</i> seleccionada. a) Aspecto da malha; b) Relação de aspecto dos elementos; c) Parametrização da malha.	50
Figura 4.11. Esquema de construção da malha rectangular de elementos finitos	51
Figura 4.12. Plot da aplicação MEF da placa quadrada.....	52
Figura 4.13. Representações gráficas 2D e 3D da função <i>sphere</i>	56
Figura 4.14. Representações gráficas 2D e 3D da função de Griewank.....	57
Figura 4.15. Representações gráficas 2D e 3D da função de Schwefel.....	57
Figura 4.16. Representações gráficas 2D e 3D da função de Rastrigin.....	58
Figura 4.17. Variação da forma da espiral logarítmica para $b=0,125$ e $b=1,25$	59
Figura 4.18. Ambiente do <i>Design Study</i> do <i>SolidWorks</i>	60
Figura 5.1. Gráfico de convergência da tensão máxima equivalente de VM da TC	61
Figura 5.2. Gráfico de convergência do deslocamento máximo da TC.....	62
Figura 5.3. Distribuição de tensões e deslocamentos na M1_TC.....	63
Figura 5.4. Distribuição de tensões e deslocamentos na M2_TC.....	63
Figura 5.5. Distribuição de tensões e deslocamentos na M3_TC.....	64
Figura 5.6. Gráfico de convergência da tensão máxima equivalente de VM do 3DLS	65
Figura 5.7. Gráfico de convergência do deslocamento máximo do 3DLS	65
Figura 5.8. Distribuição de tensões e deslocamentos na M1_3DLS	66
Figura 5.9. Distribuição de tensões e deslocamentos na M2_3DLS	66
Figura 5.10. Distribuição de tensões e deslocamentos na M3_3DLS	67
Figura 5.11. FS e Desl.Máx. em função da espessura para a M1_TC.....	68
Figura 5.12. FS e Desl.Máx. em função da espessura para a M2_TC.....	68
Figura 5.13. FS. e Desl.Máx. em função da espessura para a M3_TC.....	69
Figura 5.14. FS. e Desl.Máx. em função da espessura para a M1_3DLS	69
Figura 5.15. FS. e Desl.Máx. em função da espessura para a M2_3DLS	69
Figura 5.16. FS. e Desl.Máx. em função da espessura para a M3_3DLS	70

Figura 5.17. Flexão lateral esquerda: distribuição de deslocamentos e tensões para a M2_TC para a espessura de 5,2mm.....	71
Figura 5.18. Flexão: distribuição de deslocamentos e tensões para a M2_TC para a espessura de 2.6mm.....	72
Figura 5.19. Representação da remoção do <i>raft</i> e dos apoios da impressão da M2 .	74
Figura 5.20. Resultados da impressão da geometria M1	74
Figura 5.21. Resultados da impressão da geometria M2	75
Figura 5.22. Resultados da impressão da geometria M3	75
Figura 5.23. Resultados da tensão equivalente de von Mises na placa fina	77
Figura 5.24. Resultados deformação total na placa fina	78
Figura 5.25. Linha de tendência do estudo de convergência ao nº de termos do método de Navier.....	79
Figura 5.26. Representação gráfica de $p(x,y)$ utilizando $m,n=1..5$ e $m,n=1..11$	79
Figura 5.27. Representação gráfica de $W(x,y)$ utilizando $m,n=1..11$	80
Figura 5.28. Representação gráfica do estudo de convergência à malha a utilizar na placa de Kant	80
Figura 5.29. Aspecto da deformada de cada um dos nós com a malha 20x20	81
Figura 5.30. Gráficos do teste ao PSO com a função <i>sphere</i>	82
Figura 5.31. Gráficos do teste ao PSO standard com a função de Griewank	83
Figura 5.32. Gráficos do teste ao PSO standard com a função de Schwefel	83
Figura 5.33. Gráficos do teste ao PSO standard com a função de Rastrigin	84
Figura 5.34. Gráficos do teste ao PSO restringido com a função <i>sphere</i>	85
Figura 5.35. Gráficos do teste ao PSO restringido com a função de Griewank	85
Figura 5.36. Gráficos do teste ao PSO restringido com a função de Schwefel	86
Figura 5.37. Gráficos do teste ao PSO restringido com a função de Rastrigin	86
Figura 5.38. Gráficos do teste ao WOA com a função <i>sphere</i>	87
Figura 5.39. Gráficos do teste ao WOA com a função de Griewank	88
Figura 5.40. Gráficos do teste ao WOA com a função de Schwefel	88
Figura 5.41. Gráficos do teste ao WOA com a função de Rastrigin.....	89
Figura 5.42. Representação gráfica da superfície da deformada, Kriging com 441 pontos ($L=75$)	90
Figura 5.43. Representação gráfica da superfície da deformada, Kriging com 441 pontos ($L=25$)	91

Figura 5.44. Representação gráfica da superfície da deformada, Kriging com 260 pontos ($L=50,02$)	92
Figura 5.45. Deformada máxima da placa depois da otimização do <i>SolidWorks</i> ...	94
Figura 5.46. Distribuição de tensões na placa fina depois da otimização do <i>SolidWorks</i>	94
Figura 5.47. Otimização da placa fina (Navier) PSO: À esq.) $F(X^*)$ e desvio-padrão em função do nº das iterações; à dir.) Dispersão da população na última iteração.	95
Figura 5.48. Otimização da placa fina (Navier) WOA: À esq.) $F(X^*)$ e desvio-padrão em função do nº das iterações; à dir.) Dispersão da população na última iteração.	95
Figura 5.49. Otimização da placa de Kant com PSO: À esq.) $F(X^*)$ e desvio-padrão em função do nº das iterações; à dir.) Dispersão da população na última iteração.	97
Figura 5.50. Otimização da placa de Kant com WOA: À esq.) $F(X^*)$ e desvio-padrão em função do nº das iterações; à dir.) Dispersão da população na última iteração.	97
Figura 5.51. Superfície da $W(x,y,h=2)$ metamodelada	98
Figura 5.52. Curva da regressão polinomial de 4º grau da $W_{max}(h)$	100
Figura 5.53. Otimização da função $W_{max}(h)$ do metamodelo com PSO: À esq.) $F(X^*)$ e desvio-padrão em função do nº das iterações; à dir.) Dispersão da população na última iteração.	101
Figura 5.54. Otimização da função $W_{max}(h)$ do metamodelo com WOA: À esq.) $F(X^*)$ e desvio-padrão em função do nº das iterações; à dir.) Dispersão da população na última iteração.	101
Figura 5.55. Sobreposição dos pontos utilizados no método dos Mínimos Quadrados com a função metamodelo obtida.....	104
Figura 5.56. Otimização da função $W_{max}(h)$ do polinómio metamodelo com WOA: À esq.) $F(X^*)$ e desvio-padrão em função do nº das iterações; à dir.) Dispersão da população na última iteração.	105
Figura 5.57.a) Zona assinalada a azul da qual foram retirados valores de deslocamento dos nós; b) Volume considerado no o estudo de optimização.....	112
Figura 5.58. Sobreposição dos pontos utilizados no método dos Mínimos Quadrados com a função metamodelo obtida.....	115
Figura 5.59. Otimização da função $W_{max}(h)$ do polinómio metamodelo: À esq.) $F(X^*)$ e desvio-padrão em função do nº das iterações; à dir.) Dispersão da população na última iteração.	115
Figura 5.60.a) Zona assinalada a azul da qual foram retirados valores de deslocamento dos nós; b) Volume considerado no o estudo de optimização.....	116

Figura 5.61. Sobreposição dos pontos utilizados no método dos Mínimos Quadrados com a função metamodelo obtida.....	118
Figura 5.62. Optimização da função $W_{max}(h)$ do polinómio metamodelo: À esq.) $F(X^*)$ e desvio-padrão em função do nº das iterações; à dir.) Dispersão da população na última iteração.	119
Figura 5.63. a) Zona assinalada a azul da qual foram retirados valores de deslocamento dos nós; b) Volume considerado no o estudo de optimização.....	119
Figura 5.64. Sobreposição dos pontos utilizados no método dos Mínimos Quadrados com a função metamodelo obtida.....	121
Figura 5.65. Optimização da função $W_{max}(h)$ do polinómio metamodelo: À esq.) $F(X^*)$ e desvio-padrão em função do nº das iterações; à dir.) Dispersão da população na última iteração.	122
Figura 5.66. a) Zona assinalada a azul da qual foram retirados valores de deslocamento dos nós; b) Volume considerado no o estudo de optimização.....	122
Figura 5.67. Sobreposição dos pontos utilizados no método dos Mínimos Quadrados com a função metamodelo obtida.....	124
Figura 5.68. Optimização da função $W_{max}(h)$ do polinómio metamodelo: À esq.) $F(X^*)$ e desvio-padrão em função do nº das iterações; à dir.) Dispersão da população na última iteração.	125
Figura 5.69. Gráfico representativo do polinómio metamodelo da massa da M2_TC e dos pontos que lhe deram origem, caso de flexão lateral esquerda do pescoço.	128
Figura 5.70. Variação da deformada máxima e do desvio-padrão ao longo das iterações na M2_TC caso de flexão lateral do pescoço (à esq.:50% redução; à dir.:55% redução)	129
Figura 5.71. Variação da deformada máxima e da massa ao longo das iterações na M2_TC caso de flexão lateral do pescoço sob a forma adimensionalizada (à esq.:50% redução; à dir.:55% redução).....	129
Figura 5.72. Dispersão de resultados da última geração na M2_TC caso de flexão lateral do pescoço (à esq.:50% redução; à dir.:55% redução).	130
Figura 5.73. Gráfico representativo do polinómio metamodelo da massa da M2_3DLS e dos pontos que lhe deram origem, caso de flexão lateral esquerda do pescoço.	131
Figura 5.74. Variação da deformada máxima e do desvio-padrão ao longo das iterações na M2_3DLS caso de flexão lateral do pescoço (à esq.:45% redução; à dir.:50% redução)	132
Figura 5.75. Variação da deformada máxima e da massa ao longo das iterações na M2_3DLS caso de flexão lateral do pescoço sob a forma adimensionalizada (à esq.:45% redução; à dir.:50% redução).....	132

Figura 5.76. Dispersão de resultados da última geração na M2_3DLS caso de flexão lateral do pescoço (à esq.:45% redução; à dir.:50% redução).....	133
Figura 5.77. Gráfico representativo do polinómio metamodelo da massa da M2_TC e dos pontos que lhe deram origem, caso de flexão do pescoço.	134
Figura 5.78. Variação da deformada máxima e do desvio-padrão ao longo das iterações na M2_TC caso de flexão do pescoço (à esq.:25% redução; à dir.:30% redução)	135
Figura 5.79. Variação da deformada máxima e da massa ao longo das iterações na M2_TC caso de flexão do pescoço sob a forma adimensionalizada (à esq.:25% redução; à dir.:30% redução).....	135
Figura 5.80. Dispersão de resultados da última geração na M2_TC caso de flexão do pescoço (à esq.:25% redução; à dir.:30% redução).....	136
Figura 5.81. Gráfico representativo do polinómio metamodelo da massa da M2_3DLS e dos pontos que lhe deram origem, caso de flexão do pescoço.	137
Figura 5.82. Variação da deformada máxima e do desvio-padrão ao longo das iterações na M2_3DLS caso de flexão do pescoço (à esq.:20% redução; à dir.:25% redução).	138
Figura 5.83. Variação da deformada máxima e da massa ao longo das iterações na M2_3DLS caso de flexão do pescoço sob a forma adimensionalizada (à esq.:20% redução; à dir.:25% redução).....	138
Figura 5.84. Dispersão de resultados da última geração na M2_3DLS caso de flexão do pescoço (à esq.:20% redução; à dir.:25% redução).....	139
Figura 5.85. Resultados SW do deslocamento resultante na M2_TC caso de flexão lateral esquerda do pescoço (à esq.: h=5,25 mm; à dir.: h=5,23 mm).....	141
Figura 5.86. Resultados SW do deslocamento resultante na M2_3DLS caso de flexão lateral esquerda do pescoço (à esq.: h=5,25 mm; à dir.: h=5,28 mm).....	141
Figura 5.87. Resultados SW do deslocamento resultante na M2_TC caso de flexão do pescoço (à esq.: h=2,58 mm; à dir.: h=2,55 mm).	142
Figura 5.88. Resultados SW do deslocamento resultante na M2_3DLS caso de flexão do pescoço (à esq.: h=2,6 mm; à dir.: h=2,58 mm).	143

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1. Lista de funções de covariância (Fazio and Roisenberg 2013),(Rasmussen et al. 2006),(Silva 2015)	37
Tabela 4.1. Propriedades dos materiais selecionados (“Material Property Data - MATWEB” 2017),(Health 2011),(Torres et al. 2015)	46
Tabela 4.2. Características da Placa (método de Navier)	55
Tabela 4.3. Definição da função <i>sphere</i>	56
Tabela 4.4. Definição da função de Griewank.....	56
Tabela 4.5. Definição da função de Schwefel	57
Tabela 4.6. Definição da função de Rastrigin.....	58
Tabela 5.1. Resultados do estudo de convergência da M1_TC	62
Tabela 5.2. Resultados do estudo de convergência da M2_TC	63
Tabela 5.3. Resultados do Estudo de Convergência M3_TC	64
Tabela 5.4. Resultados do estudo de convergência da M1_3DLS.....	65
Tabela 5.5. Resultados do estudo de convergência da M2_3DLS.....	66
Tabela 5.6. Resultados do estudo de convergência da M3_3DLS.....	67
Tabela 5.7. Resultados para o critério do desl. máximo: flexão lateral do pescoço .	71
Tabela 5.8. Resultados para o critério do desl. máximo: flexão do pescoço	71
Tabela 5.9. Resultados do valor normalizado da massa de cada máscara da simulação da impressão 3D para cada uma das máscaras	73
Tabela 5.10. Resultados do valor normalizado do tempo de impressão da simulação da impressão 3D para cada uma das máscaras	73
Tabela 5.11. Resultados da deformada máxima normalizada de uma placa quadrada sujeita a um carregamento uniforme	76
Tabela 5.12. Características da placa fina.....	77
Tabela 5.13. Resultados do estudo de convêrgencia ao nº de termos do método de Navier	78
Tabela 5.14. Resultados do estudo de convergência à malha a utilizar na placa de Kant	81
Tabela 5.15. Resultados do teste $L=75$ para 441 pontos.....	90
Tabela 5.16. Resultados do teste $L=25$ para 441 pontos.....	91
Tabela 5.17. Resultados do teste $L=50,02$ para 260 pontos.....	91
Tabela 5.18. Resultados da otimização da placa fina no SolidWorks	93

Tabela 5.19. Resultados obtidos para o estudo de otimização da função da deformada utilizando o método de Navier	95
Tabela 5.20. Resultados do estudo de otimização da placa de Kant	96
Tabela 5.21. Resultados da regressão polinomial de 4º de $W_{max}(h)$	99
Tabela 5.22. Resultados do estudo de otimização da função $W_{max}(h)$ da placa metamodelada.....	100
Tabela 5.23. Resultados da otimização da 1ª etapa da metamodelação com Kriging utilizando o PSO (em [mm])	102
Tabela 5.24. Resultados da otimização da 1ª etapa da metamodelação com Kriging utilizando o WOA (em [mm])	103
Tabela 5.25. Valores obtidos para as constantes do polinómio metamodelo e respectivos desvios nos pontos conhecidos	104
Tabela 5.26. Resultados do estudo de otimização com o WOA ao polinómio metamodelo obtido com o método dos Mínimos Quadrados.....	105
Tabela 5.27. Comparação dos resultados obtidos nos estudos de otimização da placa fina.....	106
Tabela 5.28. Resultados do estudo de otimização da M2_TC caso de flexão lateral do pescoço	107
Tabela 5.29. Resultados do estudo de otimização da M2_3DLS caso de flexão lateral esquerda do pescoço	108
Tabela 5.30. Resultados do estudo de otimização da M2_TC caso de flexão do pescoço.	109
Tabela 5.31. Resultados do estudo de otimização da M2_3DLS caso de flexão do pescoço.	110
Tabela 5.32. Resultado do valor L mais promissor para o caso dos 510 pontos	112
Tabela 5.33. Resultado do valor L mais promissor para o caso dos 123 pontos	113
Tabela 5.34. Resultados da otimização da 1ª etapa da metamodelação com Kriging (em [mm]).....	113
Tabela 5.35. Valores obtidos para as constantes do polinómio metamodelo e respectivos desvios nos pontos conhecidos	114
Tabela 5.36. Resultados do estudo de otimização ao polinómio obtido pelo método dos Mínimos Quadrados.....	115
Tabela 5.37. Resultado do valor L mais promissor com 90 pontos.....	117
Tabela 5.38. Resultados da otimização da 1ª etapa da metamodelação com Kriging (em [mm]).....	117

Tabela 5.39. Valores obtidos para as constantes do polinómio metamodelo e respectivos desvios nos pontos conhecidos	117
Tabela 5.40. Resultados do estudo de optimização ao polinómio obtido pelo método dos Mínimos Quadrados.....	118
Tabela 5.41. Resultado do valor L mais promissor para 95 pontos	120
Tabela 5.42. Melhor resultado da optimização da localização da deformada máxima da M2_TC caso de flexão do pescoço	120
Tabela 5.43. Valores obtidos para as constantes do polinómio metamodelo e respectivos desvios nos pontos conhecidos	121
Tabela 5.44. Resultados do estudo de optimização ao polinómio obtido pelo método dos Mínimos Quadrados.....	121
Tabela 5.45. Resultado do valor L mais promissor para 223 pontos	123
Tabela 5.46. Melhor resultado da optimização da localização da deformada máxima da M2_3DLS caso de flexão do pescoço (em [mm])	123
Tabela 5.47. Valores obtidos para as constantes do polinómio metamodelo e respectivos desvios nos pontos conhecidos	124
Tabela 5.48. Resultados do estudo de optimização ao polinómio obtido pelo método dos Mínimos Quadrados.....	124
Tabela 5.49. Resultados do estudo do número de gerações a utilizar no estudo de optimização com restrição de massa	127
Tabela 5.50. Resultados da geração do polinómio metamodelo da M2_TC caso de flexão lateral do pescoço	127
Tabela 5.51. Resultados do estudo de optimização do deslocamento máximo da M2_TC com restrição de massa caso de flexão lateral do pescoço.....	128
Tabela 5.52. Resultados da geração do polinómio metamodelo da M2_3DLS caso de flexão lateral do pescoço	130
Tabela 5.53. Resultados do estudo de optimização do deslocamento máximo da M2_3DLS com restrição de massa caso de flexão lateral do pescoço	131
Tabela 5.54. Resultados da geração do polinómio metamodelo da M2_TC caso de flexão do pescoço.	133
Tabela 5.55. Resultados do estudo de optimização do deslocamento máximo da M2_TC com restrição de massa caso de flexão do pescoço.....	134
Tabela 5.56. Resultados da geração do polinómio metamodelo da M2_3DLS caso de flexão do pescoço.	136
Tabela 5.57. Resultados do estudo de optimização do deslocamento máximo da M2_3DLS com restrição de massa caso de flexão do pescoço.	137

Tabela 5.58. Comparação dos resultados de otimização das máscaras para o caso de carga da flexão lateral esquerda do pescoço.....	139
Tabela 5.59. Comparação dos resultados de otimização das máscaras para o caso de carga de flexão do pescoço.....	140
Tabela 5.60. Comparação de resultados do deslocamento máximo obtido com metamodelação e com o <i>SolidWorks</i> para a M2_TC caso de flexão lateral esquerda do pescoço.	140
Tabela 5.61. Comparação de resultados do deslocamento máximo obtido com metamodelação e com o <i>SolidWorks</i> para a M2_3DLS caso de flexão lateral esquerda do pescoço.	141
Tabela 5.62. Comparação de resultados do deslocamento máximo obtido com metamodelação e com o <i>SolidWorks</i> para a M2_TC caso de flexão do pescoço.....	142
Tabela 5.63. Comparação de resultados do deslocamento máximo obtido com metamodelação e com o <i>SolidWorks</i> para a M2_3DLS caso de flexão do pescoço. ...	142

LISTA DE PSEUDOCÓDIGOS

Pseudocódigo 3.1. Implementação do algoritmo PSO (Dai and Chen 2018).....	30
Pseudocódigo 3.2. Implementação do algoritmo PSO restrigido (Clerc and Kennedy 2002).....	31
Pseudocódigo 3.3. Implementação do algoritmo WOA adaptado de (Mirjalili and Lewis 2016).....	36
Pseudocódigo 3.4. Implementação do método de interpolação Kriging	38
Pseudocódigo 3.5. Implementação do Kriging Comum	39
Pseudocódigo 3.6. Implementação do Kriging Universal	40
Pseudocódigo 4.1. Implementação da função Malha Rectangular	51
Pseudocódigo 4.2. Implementação FEM placa quadrada - Parte I.....	53
Pseudocódigo 4.3. Implementação FEM placa quadrada - Parte II.....	54
Pseudocódigo 5.1. Passos para obtenção da deformada máxima em função de (x,y) e espessura.....	99
Pseudocódigo 5.2. Aplicação do método dos Mínimos Quadrados na aproximação da função $W_{X*,Y*}(h)$	103
Pseudocódigo 5.3. Condição de actualização do melhor agente de pesquisa do WOA no caso de restrição de massa.....	126

ÍNDICE

1	Introdução	1
1.1	Motivação.....	1
1.2	Objectivos.....	1
1.3	Estrutura da Dissertação.....	3
2	Revisão Bibliográfica	5
2.1	Dispositivos de Imobilização para Diagnóstico e Terapêutica	5
2.2	Engenharia Inversa.....	8
2.2.1	Aquisição da informação 3D	9
2.2.2	Reconstrução CAD	10
2.3	Impressão 3D.....	12
2.4	Algoritmos de Optimização Meta-Heurísticos.....	15
2.5	Aplicação de Metamodelos em problemas de Optimização	17
3	Fundamentos Teóricos	19
3.1	Dispositivos de Imobilização com Aplicação Médica	19
3.1.1	Métodos de Aquisição	19
3.2	Análise Estática de Placas	20
3.2.1	Método dos Elementos Finitos	21
3.2.1.1	Teoria de Kant.....	21
3.2.2	Método de Navier	27
3.3	Optimização através de algoritmos meta-heurísticos.....	28
3.3.1	Optimização por Enxame de Partículas	28
3.3.1.1	Modelo Matemático do PSO.....	29
3.3.1.2	Modelo matemático do PSO restringido.....	30
3.3.2	Algoritmo de Optimização da Baleia.....	31
3.3.2.1	Modelo matemático do WOA.....	32
3.4	Interpolação pelo método Kriging.....	36
3.4.1	Modelo matemático do método Kriging.....	37
3.4.1.1	Kriging Comum	38
3.4.1.2	Kriging Universal.....	39

4	Metodologia	41
4.1	Modelação das Máscaras de Imobilização	41
4.1.1	Extracção de informação geométrica.....	41
4.1.1.1	Tomografia Computorizada	41
4.1.1.2	Varrimento Laser 3D	41
4.1.2	Modelação Geométrica	42
4.1.2.1	Reconstrução da superfície da cabeça.....	42
4.1.2.2	Construção de um suporte para a cabeça	43
4.1.2.3	Modelação das diferentes geometrias para os dispositivos de imobilização.....	44
4.1.3	Seleccção de materiais	45
4.2	Simulação das máscaras em <i>SolidWorks</i>	47
4.2.1	Definição do carregamento a aplicar	47
4.2.2	Escolha do tipo de elemento e da parametrização do SW a utilizar	49
4.3	Análise Estática de Placas	50
4.3.1	Teoria de Kant	50
4.3.2	Análise de placas finas pelo método de Navier	54
4.4	Optimização	55
4.4.1	Testes aos algoritmos meta-heurísticos	55
4.4.1.1	Aplicação de funções de teste	55
4.4.1.2	Testes ao parâmetro b do WOA.....	58
4.4.2	Optimização em ambiente <i>SolidWorks</i>	60
5	Discussão de Resultados	61
5.1	Estudos de convergência.....	61
5.2	Seleccção do material.....	67
5.2.1	Máscaras TC	68
5.2.2	Máscaras 3DLS.....	69
5.3	Critério de Rigidez	70
5.4	Impressão 3D das Máscaras de Imobilização	72
5.5	Estudos preparatórios para o processo de optimização	75
5.5.1	Modelo de placa de Kant (<i>Matlab</i>)	76
5.5.2	Análise estática de uma placa fina	77

5.5.2.1	Análise da placa no <i>SolidWorks</i>	77
5.5.2.2	Convergência e análise estática da placa pelo método de Navier....	78
5.5.2.3	Convergência e análise estática da placa de Kant.....	80
5.5.3	Funções de teste aos algoritmos meta-heurísticos	81
5.5.3.1	PSO	82
5.5.3.2	PSO Restringido.....	84
5.5.3.3	Algoritmo de Otimização da Baleia.....	87
5.5.4	Parametrização para o método Kriging.....	89
5.5.4.1	Parâmetro L com 441 pontos	90
5.5.4.2	Parâmetro L com 260 pontos	91
5.6	Otimização	92
5.6.1	Otimização da Deformada Transversal de uma Placa Fina	92
5.6.1.1	Otimização da deformada da placa em <i>SolidWorks</i>	93
5.6.1.2	Otimização da deformada da placa: Método de Navier.....	94
5.6.1.3	Otimização da deformada da placa: formulação de Kant	96
5.6.1.4	Otimização do metamodelo da deformada da placa fina	97
5.6.1.5	Otimização por metamodelação da deformada da placa fina com Kriging.....	101
5.6.1.6	Comparação dos resultados obtidos na otimização da deformada da placa fina.....	105
5.6.2	Otimização do Deslocamento Resultante nas Máscaras	106
5.6.2.1	Otimização em <i>SolidWorks</i>	107
5.6.2.2	Otimização dos metamodelos do deslocamento resultante.....	111
5.6.2.3	Otimização dos metamodelos do deslocamento resultante com constringimento de massa	125
5.6.2.4	Comparação dos resultados obtidos na otimização do deslocamento resultante nas máscaras.....	139
6	Conclusões	145
6.1	Análise Global dos Resultados Obtidos	145
6.2	Desenvolvimentos Futuros	145

1 INTRODUÇÃO

Este capítulo tem como objectivo introduzir o tema da Dissertação, explicando as motivações que levaram à escolha do tema, objectivos que se pretendem atingir e estrutura adoptada para melhor compreensão do tema desenvolvido.

1.1 MOTIVAÇÃO

A escolha deste tema da Dissertação foi motivada, numa abordagem mais imediata, pela necessidade de encontrar uma solução alternativa viável para a imobilização eficaz de pacientes que necessitem de tratamentos por radioterapia com necessidade de imobilização. Actualmente, estas máscaras de material termoplástico são contruídas a partir da moldação à cabeça de uma placa desse material previamente aquecido a 70°C numa tina de água quente. Essa placa é retirada da tina e imediatamente colocada sobre a face do paciente e moldada à sua cabeça. Assim é fundamental minimizar o desconforto e dor que os pacientes sentem no processo de fabrico dos actuais dispositivos de imobilização, bem como melhorar a experiência de utilização dos mesmos em pacientes com problemas de claustrofobia e garantir o sucesso dos tratamentos através de uma imobilização adequada.

Foi também motivada pelo gosto pelo trabalho de investigação e projecto no âmbito da engenharia. Escolher este tema foi uma forma de aprofundar conhecimentos nas áreas da engenharia inversa, simulação e no método dos elementos finitos, que hoje em dia são fundamentais em engenharia mecânica. Foi também uma oportunidade de adquirir novos conhecimentos como a optimização através de algoritmos meta-heurísticos que estão em ascensão na sua utilização em na área da engenharia, bem como o recurso à metamodelação em problemas de mais elevada complexidade.

1.2 OBJECTIVOS

Com esta Dissertação pretende-se encontrar uma solução viável para imobilização de pacientes em tratamentos de radioterapia em casos de tumores cerebrais, evitando os problemas associados ao seu método de fabrico, utilização e má imobilização que se traduzem em maior ineficácia do tratamento médico e degradação de tecidos saudáveis. Adicionalmente, a metodologia que este trabalho propõe, poderá vir a constituir um incentivo à utilização destes dispositivos de imobilização como um auxiliar fundamental em exames de diagnóstico, no âmbito da Medicina Nuclear.

Para estes objectivos, recorre-se à engenharia inversa que através da aquisição de imagem por Tomografia Computorizada e nuvens de pontos por 3D Laser Scanning permite a reconstrução da superfície da cabeça. Com essa superfície será então possível proceder à modelação geométrica dos dispositivos.

Tendo em conta as condições de funcionamento a que estas máscaras de imobilização irão ficar submetidas, designadamente no que se refere à radiação gama, é crucial considerar a sua fabricação com materiais que sejam radiotransparentes, para que não atenuem a radiação ou pelo menos para que a atenuação seja mínima. Por outro lado, deverão possuir uma temperatura de fusão que permita viabilizar a produção das máscaras por impressão 3D. É, portanto, fundamental uma adequada selecção de materiais.

Para a concepção destes dispositivos é fundamental o desenvolvimento de modelos geométricos que permitam obter os objectivos ergonómicos já mencionados, sem prejuízo de um adequado comportamento mecânico. Para este efeito, foram desenvolvidos estudos utilizando o Método dos Elementos Finitos, onde se analisaram diferentes modelos de máscaras.

Em simultâneo e com vista a definir uma metodologia conducente à optimização dessas máscaras foram implementados códigos computacionais para análise de placas, designadamente um código para análise de placas finas pelo Método de Navier, e um código de elementos finitos baseado na teoria de deformação de corte de ordem superior de Kant. Foram também utilizadas aplicações comerciais de análise por elementos finitos.

Estas abordagens foram subsequentemente integradas com técnicas de optimização meta-heurísticas, igualmente objecto de implementação computacional neste trabalho. Neste contexto, foram consideradas técnicas de optimização baseadas em enxames de partículas e no comportamento predatório de baleias-jubarte.

Considerado o esforço computacional envolvido, e no sentido de permitir uma optimização das máscaras de imobilização com um carácter mais expedito, foi ainda considerada a utilização de metamodelos.

Em conclusão, a presente dissertação pretende contribuir para dar resposta a um problema real, apresentando soluções que poderão produzir um impacto significativo na terapêutica por Radioterapia, de um número muito elevado de pacientes com tumores cerebrais. Estas soluções poderão ainda contribuir para viabilizar a realização de exames de diagnóstico, mais precisos em Medicina Nuclear, através da imobilização dos pacientes.

1.3 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

Esta dissertação está dividida em seis capítulos, em que o primeiro pretende introduzir e contextualizar o leitor relativamente ao conjunto de assuntos que irão ser estudados ao longo do documento.

No segundo capítulo efectua-se uma revisão bibliográfica sobre os principais temas abordados, a que se segue no terceiro capítulo a apresentação dos conceitos teóricos fundamentais indispensáveis ao desenvolvimento do presente trabalho.

O quarto capítulo apresenta as metodologias utilizadas na modelação e simulação das máscaras de imobilização, na análise de placas finas e nos respectivos estudos de optimização, e cujos resultados são apresentados no capítulo seguinte.

No quinto capítulo são então apresentados os resultados obtidos nos diferentes estudos quer no âmbito da análise quer no âmbito da optimização com e sem utilização de modelos alternativos.

Finalmente o sexto capítulo resume as conclusões extraídas ao longo do desenvolvimento do presente trabalho, projectando possíveis desenvolvimentos futuros relacionados com este tema.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo é desenvolvida uma revisão bibliográfica com o objectivo de introduzir e também de sumariar alguns dos temas e técnicas que são abordados nesta nesta Dissertação, destacando o rigor científico e actualidade dos mesmos.

2.1 DISPOSITIVOS DE IMOBILIZAÇÃO PARA DIAGNÓSTICO E TERAPÊUTICA

A engenharia inversa já revelou ser muito útil em aplicações médicas, sendo o exemplo mais conhecido o da produção de próteses. São vários os estudos exemplificativos disso, como por exemplo, a modelação 3D de uma prótese de uma rótula do joelho (Khan and Mumtaz 2014), um protocolo para produção de próteses dentárias (Solaberrieta et al. 2014), comparação entre o método de produção convencional e por impressão 3D de uma prótese para amputação transtibial (Jaimes et al. 2018). Contudo existem mais aplicações médicas onde a engenharia inversa pode intervir, como a imobilização de pacientes.

A imobilização de pacientes e um correcto posicionamento de diferentes zonas anatómicas dos seus corpos são factores reconhecidos como determinantes para o sucesso do tratamento por radioterapia, na medida em que permite simultaneamente uma maior precisão na zona a irradiar e minimizar a absorção de radiação por tecidos saudáveis, daí decorrendo um maior sucesso no tratamento de tumores (Patients 1995),(D. Craveiro et al. 2018).

Os dispositivos de imobilização da cabeça e do pescoço são vulgarmente utilizados para esta finalidade, contudo o seu actual processo de fabrico é descrito como um processo muito desconfortável e até doloroso para o paciente, especialmente para pacientes com problemas de claustrofobia (Fisher et al. 2014), (D. S. Craveiro et al. 2017)¹, (S. Chen et al. 2016), (D. Craveiro et al. 2017)². Também não é de desprezar alguma deficiência no processo de moldação o que poderá vir a causar eventuais folgas entre os dispositivos e o paciente que possam comprometer a sua função de imobilização (D. Craveiro et al. 2018).

¹ “Immobilization Devices For Diagnosis and Therapeutic Medical Applications” in *XIII CIBEM*

² “Imobilização da Região da Cabeça por Prototipagem Rápida Para Fins de Diagnóstico e Terapêutica”, Poster in *XVI Congresso Nacional de Medicina Nuclear*



Figura 2.1. Dispositivos de imobilização actualmente utilizados (Fisher et al. 2014), (D. S. Craveiro et al. 2017)

A produção destas máscaras dura cerca de meia hora (Figura 2.1), e envolve a moldação de uma placa termoplástica a 70°C ao perfil do paciente, o que para além dos custos associados ao material e equipamento necessário requerem pessoal especializado (duas pessoas). Refira-se que, durante o processo de tratamento por radioterapia é frequente ser necessário fazer mais do que uma máscara devido às oscilações de peso que os pacientes sofrem. Face às características do processo de produção, ao tempo e pessoal especializado necessário a esse processo e à necessidade de replicar estas máscaras face às variações anatómicas que os pacientes vão sofrendo, faz sentido ponderar alternativas que possam ser vantajosas em todos os aspectos (D. S. Craveiro et al. 2017).

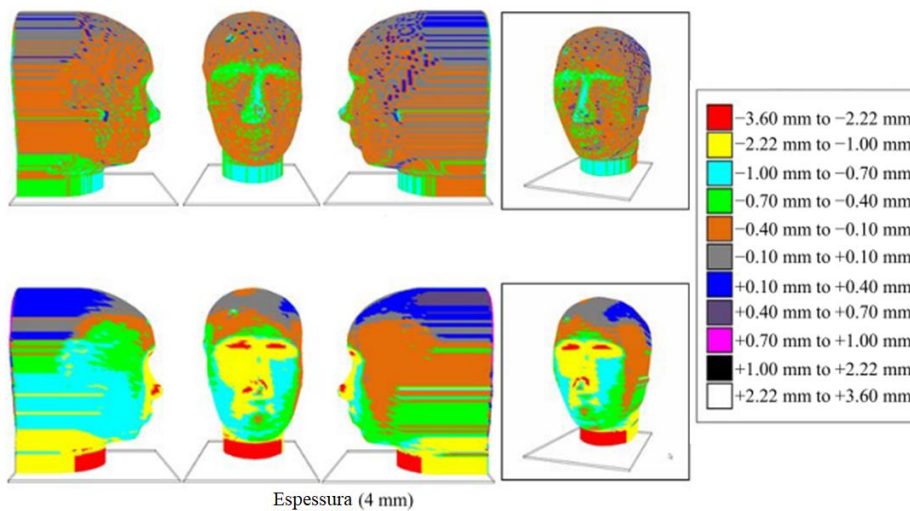


Figura 2.2. Diferenças entre a superfície do fãntoma e a superfície interna da máscara (adaptado de (Fisher et al. 2014))

Nos anos mais recentes, outros investigadores realizaram estudos baseados na aquisição de imagem de Tomografia Computorizada (TC), exames comuns em doentes oncológicos na fase de diagnóstico, em que utilizaram estas imagens recolhidas para produzirem máscaras de imobilização fabricadas por impressão 3D. É o caso do estudo feito por Fisher et al (Fisher et al. 2014) que faz uma abordagem inicial à impressão 3D

deste tipo de dispositivos, contudo os resultados não foram os mais satisfatórios já que encontraram diferenças entre a superfície do fãntoma e a superfície interna da máscara da ordem dos 3-4mm (Figura 2.2). Este estudo concluiu que se deveria apostar noutras técnicas de aquisição de imagem para diminuir estas diferenças.

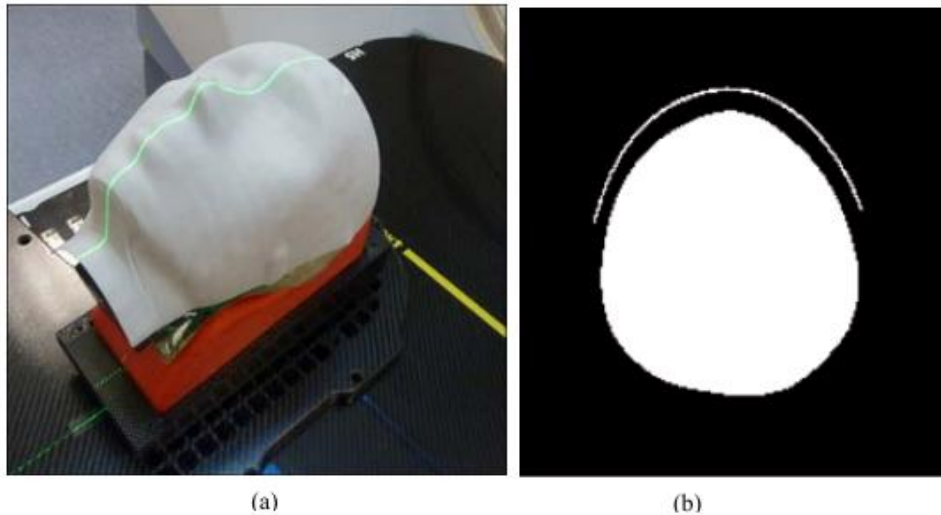


Figura 2.3. a) Aspecto da máscara impressa encaixada no fãntoma b) TC do encaixe (adaptado de (Fisher et al. 2014))

Num outro estudo, desenvolvido por Chen et al (S. Chen et al. 2016) é proposta a produção automatizada destes dispositivos de imobilização utilizando também imagens TC. A Figura 2.4 à esquerda, mostra a malha poligonal (formato .stl) gerada automaticamente, e a sua respectiva impressão à direita. De acordo com os autores, os resultados obtidos, demonstraram robustez no processo e demonstram cumprir o objectivo de poupança de tempo.

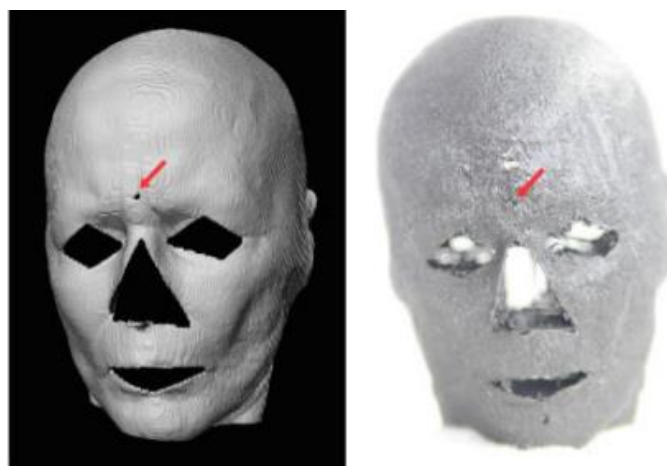


Figura 2.4. À esquerda: malha poligonal; à direita: máscara impressa (S. Chen et al. 2016)

Outro estudo que demonstra bons resultados na reconstrução da superfície 3D da cabeça de um fãntoma, em que também foram usadas imagens de TC foi apresentado por Sousa et al (Sousa et al. 2017). Nesse trabalho, os autores concluíram com base em estudos estatísticos, a não existência de diferenças significativas entre a utilização da TC

ou do varrimento laser 3D (*3D Laser Scanning*, 3DLS) na reconstrução e caracterização antropométrica da cabeça do fãntoma.

Um outro estudo recente levado a cabo por Pham et al. (Pham et al. 2018) propõe a moldação dos dispositivos de imobilização que são actualmente utilizados a um modelo da cabeça impresso em 3D. É feito o processo de reconstrução da superfície da cabeça, parte do pescoço e suporte de cabeça-pescoço recolhidos das imagens TC, que é posteriormente impresso e o termoplástico moldado a esta superfície. Para comprovar a aplicabilidade da técnica, realizaram uma TC à máscara e ao modelo da cabeça impressos e compararam com as imagens da TC inicial, com isto conseguiram concluir que os resultados são satisfatórios e o método tem aplicabilidade prática.

Dispositivos de imobilização podem ser também aplicados a animais, como demonstra o estudo de Zarghami et al. (Zarghami et al. 2015) que testou a utilização de dispositivos de imobilização de cabeça impressos em 3D em ratos. Este dispositivo de imobilização foi desenhado em CAD e impresso num material acrílico com a finalidade de ser utilizado numa micro-Tomografia Computorizada (microTC). Apenas metade do cérebro dos ratos foi exposto à radiação e para avaliar a precisão do feixe os ratos foram sacrificados 30 minutos depois da exposição. Conseguiram concluir que o feixe teve uma boa precisão no tecido pretendido e não haviam sinais de traumatismos induzidos pelo dispositivo de imobilização utilizado.

Num estudo levado a cabo por Machado et al. (Machado et al. 2015), foi testado o impacto da imobilização dos pés e tornozelo na realização de exames tipo SPECT/TC (*Single Photon Emission Computed Tomography*, SPECT). Utilizaram uma amostra de 20 pacientes com e sem imobilização. O desalinhamento entre as imagens SPECT e TC foi medido manualmente em 14 pontos anatómicos visíveis. Concluíram que utilizando a imobilização dos pés a precisão do exame aumentava em 20%.

2.2 ENGENHARIA INVERSA

A Engenharia Inversa (EI) é uma técnica que tem como objectivo a reconstrução de modelos CAD a partir superfícies 3D obtidas a partir de modelos matemáticos e de características geométricas que representam um modelo físico real. Tem múltiplas aplicações em engenharia como o controlo de qualidade, re-engenharia e o projecto de objectos personalizados.

Muitas vezes, estes modelos CAD não estão disponíveis, e isto pode dever-se a múltiplas razões como por exemplo um objecto que foi construído há muito tempo e não existe o seu modelo digital nem o seu desenho 2D. Quando isto acontece e o modelo físico existe, então uma abordagem possível é a utilização de EI. Este processo pode ser dividido em dois passos fundamentais: a aquisição da informação 3D do objecto e a utilização desta informação para a construção do modelo CAD (Buonamici et al. 2017).

2.2.1 AQUISIÇÃO DA INFORMAÇÃO 3D

A aquisição desta informação 3D é no fundo uma digitalização do objecto, contudo existem diferentes formas de o fazer. Estas técnicas estão divididas em três grandes grupos: métodos com contacto, métodos sem contacto e métodos híbridos que combinam mais do que uma técnica (Geng and Bidanda 2017).

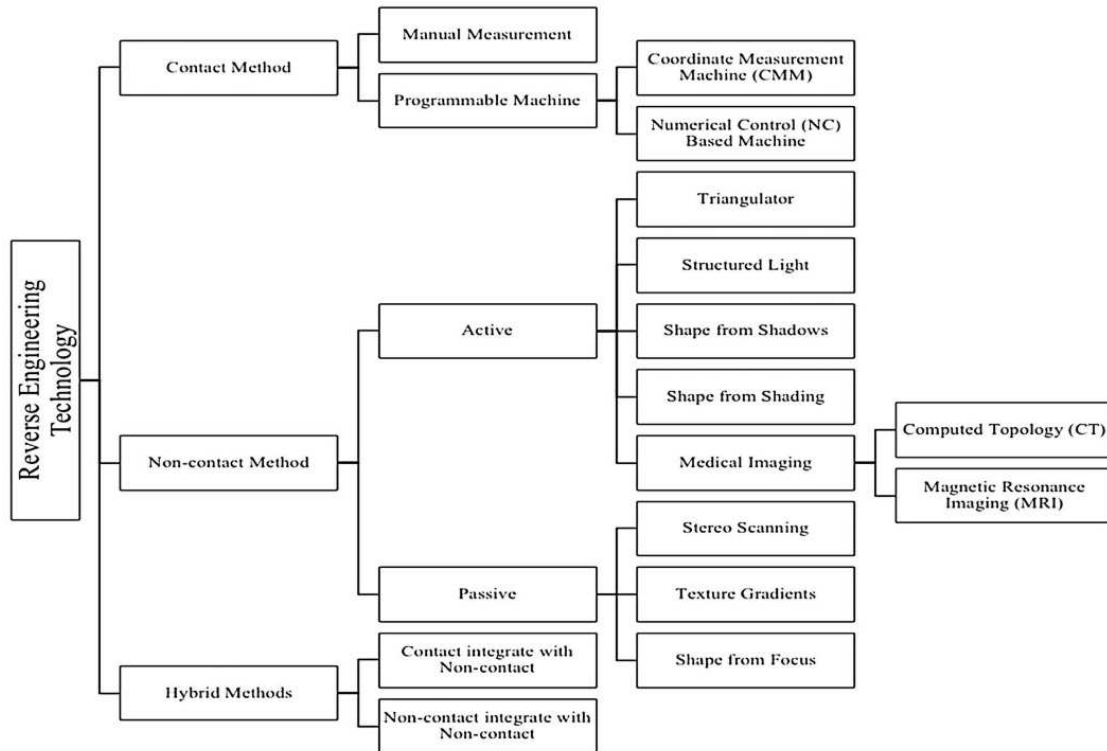


Figura 2.5. Diferentes formas de digitalização 3D de objectos (Geng and Bidanda 2017)

Os métodos de contacto requerem, como o nome indica, contacto mecânico com o objecto nas superfícies de interesse. Incorporam um dispositivo de medição que vai retirando informação em vários pontos do objecto ou superfície. Esta técnica produz resultados de elevada qualidade, porém é um pouco demorada.

Os métodos sem contacto não requerem contacto mecânico, e tipicamente utilizam como fonte de informação a luz, o laser, o som, campos magnéticos ou raio-X. Esta técnica pode ser subdividida em dois sub-grupos: técnicas activas ou passivas. Comparando com os métodos de contacto, de uma maneira geral, são técnicas mais rápidas, porém pequenos detalhes ou materiais transparentes não podem ser digitalizados por estas técnicas (Geng and Bidanda 2017).

- Sistemas activos: operam através da projecção de uma fonte de energia no objecto e seleccionam a energia emitida ou reflectida e convertem-na em informação geométrica;
- Sistemas passivos: podem ser de três tipos:
 - *Stereo scanning*: Aquisição de informação geométrica através de fotografias tiradas por uma ou mais máquinas fotográficas de diferentes ângulos. Requer

a participação humana e elevados recursos computacionais para encontrar referências entre fotografias;

- *Texture gradients*: Baseia-se no princípio de que quanto mais longe o objecto está, menos rugoso aparenta ser, e vice-versa, e também em determinados elementos com textura que se relacionam com a orientação das superfícies.
- *Shape-from-focus*: Esta técnica utiliza como princípio um sensor de profundidade baseado nas propriedades de focagem da lente. A lente tem que ajustar a sua focagem dependendo da distância a que se encontra do objecto.

Os métodos híbridos com duas ou mais técnicas de digitalização, fazem diminuir o tempo de aquisição da informação ao mesmo tempo que melhora a qualidade da mesma, estes métodos são cada vez mais utilizados em EI (Geng and Bidanda 2017).

Bures e Polcar (Bures and Polcar 2016) compararam a utilização do 3D *scanning* e a modelação 3D para avaliar a ergonomia de um dado espaço de trabalho. A informação do espaço de trabalho foi recolhida por 3D *scanning* (nuvem de pontos) e também através da medição do espaço (modelação do geométrica do espaço em *software* CAD). Comparando as duas técnicas para avaliar a ergonomia do espaço, conseguiram concluir que a metodologia do 3D *scanning* é em média quatro vezes mais rápida que a técnica tradicional de modelação 3D e ainda mais precisa. Contudo, a modelação geométrica oferece uma aparência mais apelativa do espaço de trabalho em estudo.

2.2.2 RECONSTRUÇÃO CAD

Após a obtenção de informação, é gerado o modelo CAD, no qual é necessário tratar-se devidamente toda a informação recolhida para obter um modelo sólido ou de superfície que represente o objecto inicial da forma mais fiel possível.

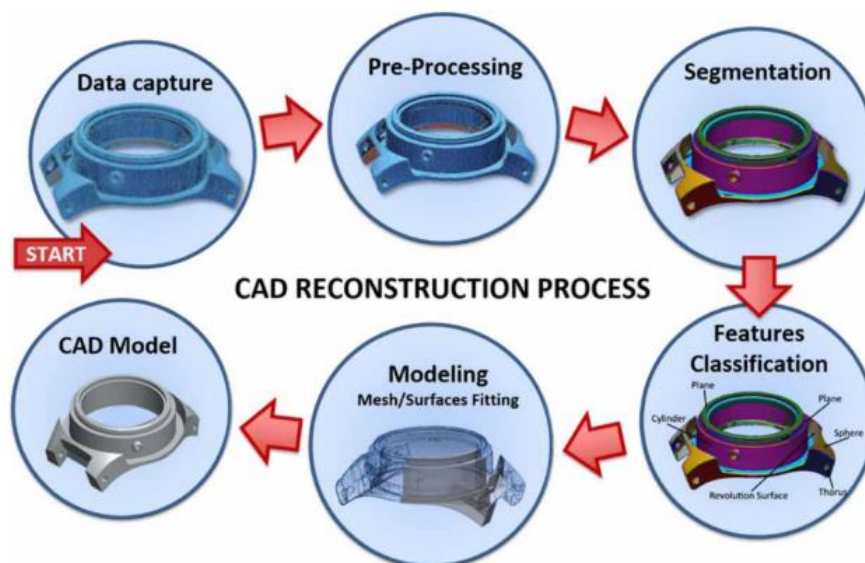


Figura 2.6. Etapas da engenharia inversa: da digitalização ao CAD (Buonamici et al. 2017).

Este processo é geralmente dividido em cinco etapas (Figura 2.6), porém dependendo do *software* utilizado neste processo de reconstrução algumas destas etapas podem ser suprimidas, já que alguns *softwares* possuem um processo de reconstrução mais automatizado. Estas etapas são:

- Pre-processamento: que prepara a informação recolhida para as etapas seguintes da reconstrução. Operações como reduzir o número total de pontos de uma nuvem ou remoção de ruído externo do objecto entram nesta fase;
- Segmentação: nesta fase o modelo representado pela nuvem de pontos é dividido em sub-seções de acordo com um critério geométrico adaptado ao caso, o objectivo é separar o objecto em diferentes estruturas para que se possam identificar mais facilmente as suas características geométricas;
- Classificação das características geométricas: após a subdivisão do objecto por características geométricas estas são interpretadas e devidamente classificadas;
- Modelação de superfícies de ajuste: esta etapa é a mais importante de todo o processo, já que o resultado final vai depender muito da estratégia escolhida para a realização desta tarefa. Deve ser tido em consideração o tipo do objecto final (objecto mecânico ou orgânico), constrangimentos geométricos, tempo necessário para a modelação, etc.;
- Geração do modelo CAD: o último passo na reconstrução, tipicamente requer operações como união de superfícies, geração de boleados ou chanfros e imposição de constrangimentos geométricos. Por vezes este passo é feito juntamente com a modelação de superfícies de ajuste.

As malhas poligonais entram neste processo de reconstrução em diferentes etapas dependendo do *software* utilizado, pode ser logo na fase de pré-processamento como na fase de segmentação (Buonamici et al. 2017).

A abordagem acima descrita está de acordo com aquilo que é possível fazer com os *softwares* comerciais de reconstrução e modelação geométrica. Contudo existe uma abordagem mais recente proposta por Buonamici et al. (Buonamici et al. 2018) designada por TCRT (*Template-Based CAD Reconstruction Tool*, TCRT), que interliga um *software* de reconstrução e modelação geométrica (*Siemens NX*) e um *software* de programação (*Matlab*) através de uma interface COM (*Component Object Model*, COM). Este estudo utiliza um modelo CAD existente do modelo em malha poligonal .stl a reconstruir e utiliza-o como referência. Através da minimização da distância Euclidiana entres os modelos CAD e a malha poligonal obtém-se um modelo final. Este estudo sugere que este método TCRT pode ser aplicado de duas formas.

Uma primeira em que é feita a reconstrução do modelo CAD com o método “tradicional”, e adicionalmente pode-se utilizar uma abordagem TCRT utilizando este mesmo modelo como referência, e deste modo, o erro global final do modelo CAD é minimizado, com a possibilidade de este processo ser automatizado sem ser necessário

envolvimento do utilizador. Note-se também que este modelo CAD de referência já é muito próximo da malha poligonal que lhe dá origem, reduzindo desta forma a capacidade computacional necessária na fase de minimização da distância Euclidiana para obtenção do modelo final.

A segunda forma de utilização proposta neste estudo, é utilizando como modelo CAD de referência, modelos já conhecidos. Neste caso as proporções entre a malha poligonal e o CAD podem variar como foi demonstrado. Como consequência, a capacidade computacional e o tempo exigido para a solução deste problema de optimização podem também aumentar significativamente.

Em ambos os casos onde é possível utilizar uma abordagem TCRT, existem vantagens no que respeita à qualidade do resultado final da reconstrução e em termos de trabalho exigido ao utilizador que efectua a reconstrução (Buonamici et al. 2018).

Estas técnicas de reconstrução CAD, seja a “tradicional”, seja a TCRT, podem ser aplicadas às mais diversas áreas da engenharia.

Recentemente podem ser citados alguns autores que desenvolveram trabalho nesta área como, por exemplo, é o caso de Paulic et al. (Paulic et al. 2014) que se socorreu de uma nuvem de pontos obtida por *3D Laser Scanning* para reconstruir um botão de um rádio cujo modelo CAD não estava disponível. Este estudo mostra detalhadamente o processo de reconstrução da superfície e a passagem para o modelo CAD utilizando o *SolidWorks*.

O trabalho publicado por Chougule et al. (Chougule, Mulay, and Ahuja 2014) propõe que, a partir de imagens de TC e de um algoritmo desenvolvido em *Matlab*, seja possível fazer o reconhecimento do contorno da superfície a reconstruir dados os diferentes coeficientes de atenuação dos diferentes ossos/tecidos, e estes contornos são transformados em nuvens de pontos que podem ser exportadas para qualquer *software* CAD que possua a funcionalidade de reconstrução de superfícies, para se efectuar a reconstrução da respectiva superfície. Este algoritmo foi utilizado para reconstrução de uma vértebra numa cirurgia de uma criança de cinco anos e confirmada a sua aplicabilidade.

2.3 IMPRESSÃO 3D

A impressão 3D é uma técnica cada vez mais utilizada hoje em dia, devido a conseguir produzir muito rapidamente e a baixo custo um protótipo, por exemplo, com uma elevada complexidade geométrica.

Nos últimos anos, a impressão 3D tem evoluído muito devido ao mercado das impressoras 3D de secretária que já se encontram a um preço acessível e têm dimensões mais pequenas. Estas impressoras de uma maneira geral utilizam a tecnologia FDM (*Fuse Deposition Modelling*), que é um método de produção aditivo por adição de várias

camadas de material (Balletti, Ballarin, and Guerra 2017). Hoje em dia é já muito comum estas impressoras serem adquiridas a nível particular com fins recreativos e não lucrativos.

Estas impressoras funcionam com *G-code* que é a linguagem de programação de máquinas por controlo numérico (*Computer Numeric Control*, CNC). As impressoras 3D também se podem considerar máquinas CNC, a grande diferença entre uma impressora 3D e uma máquina CNC é que ao invés de retirar material, a impressora adiciona-o camada a camada (Balletti, Ballarin, and Guerra 2017). Para que esta sobreposição do material seja feita o objecto a imprimir tem que ser “fatiado” em muitas camadas por um software específico chamado *slicer* e depois os comandos de *G-code* são gerados e interpretados pela máquina.

Existem várias técnicas diferentes de impressão 3D, as mais utilizadas são as seguintes e ilustradas por um exemplo na Figura 2.7:

- FDM ou FFF (*Fused Filament Fabrication*): baseia-se num princípio aditivo, que a cada camada depositada, segue-se uma outra, o que pode gerar uma maior rugosidade dependendo do material, do diâmetro do material fundido e do bico extrusor. O funcionamento do FDM é simples: o bico extrusor é aquecido até uma temperatura capaz de fundir o material, a bobine do filamento é desenrolada e o filamento é puxado pela cabeça extrusora para o bico para ser aquecido e o filamento funde. Os graus de liberdade das impressoras FDM são os três eixos coordenados (x,y,z), porém dependendo das marcas, pode ser só a cabeça extrusora que se move ou uma combinação da cabeça extrusora e da base.

As impressoras FDM mais comuns imprimem PLA (ácido poliláctico) ou ABS (acrilonitrilo butadieno estireno) com resoluções que usualmente variam entre 0,1mm e os 0,3mm.

Esta técnica necessita da utilização de suportes durante a impressão que são utilizados quando existem espaços vazios ou que não oferecem suporte à colocação de uma nova camada. Estes suportes não fazem parte do objecto e podem ser facilmente retirados no fim da impressão (Balletti, Ballarin, and Guerra 2017).

- SLS (*Selective Laser Sintering*): é uma técnica que utiliza a sinterização por laser. Este método pode sinterizar termoplásticos, poeiras cerâmicas ou metálicas cobertas por resinas termoplásticas que se misturam quando sujeitas ao calor do laser. O laser move-se no espaço 3D que define o objecto para criar a estrutura sólida que define o objecto.

Esta técnica possui um acabamento muito bom comparativamente à FDM, não necessita de suportes porque as próprias poeiras sustentam o material e estas poeiras não sinterizadas podem ser parcialmente reaproveitadas (Balletti, Ballarin, and Guerra 2017).

- *Stereolithography Apparatus* (SLA) (em português - Estereolitografia): utiliza um tanque cheio com uma resina líquida capaz de curar se exposta à luz. É projectado um laser através de um sistema de espelhos que digitalizam a superfície, o tanque desce através da acção de um êmbolo para as digitalizações seguintes. No fim do processo o objecto é retirado do tanque e exposto à luz ultra-violeta para terminar o processo de cura. Tal como para o FDM é necessário retirar suportes no fim da FDM e os materiais possíveis de serem utilizados também são limitados (Balletti, Ballarin, and Guerra 2017).

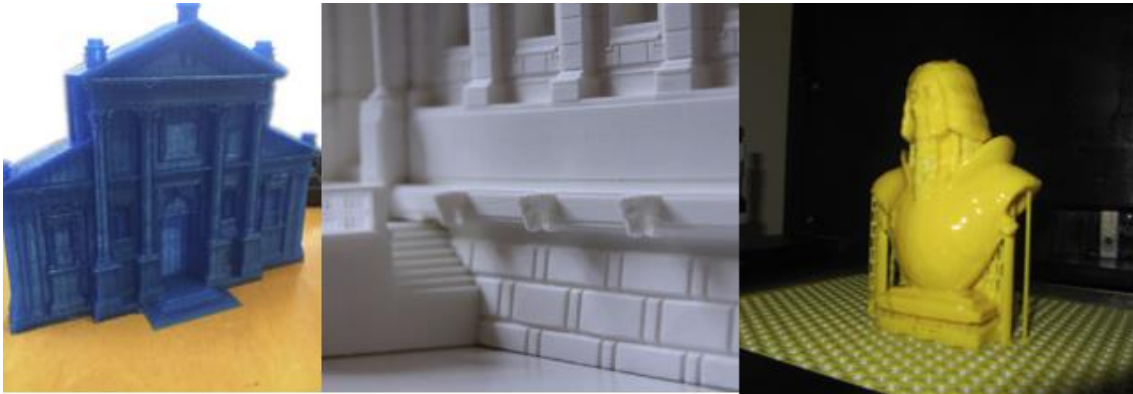


Figura 2.7. Exemplos de técnicas de impressão 3D. À esq.: FDM; no meio: SLS; à dir.: SLA (Balletti, Ballarin, and Guerra 2017)

Recentemente Chen et al. (Y.-Y. Chen et al. 2018) estudaram a utilização pré-operatória da impressão 3D em casos de estabilização de costelas fraturadas. Esta utilização consiste em adquirir imagens CT da zona torácica e reconstruir as costelas danificadas e imprimir estes modelos. Utilizando as impressões pretende-se prever qual o tamanho das incisões que são necessárias fazer ao paciente, bem como prever o tamanho correcto e curvatura das placas de titânio a utilizar, medição da espessura das costelas, localização exacta das fraturas e qual a profundidade dos parafusos a utilizar. Compararam dois grupos de indivíduos, em que um grupo teve o auxílio pré-operatório da impressão 3D e o outro grupo não. Conseguiram concluir que o grupo de pacientes em que a técnica foi utilizada teve um tempo de operação mais curto, bem como que as incisões feitas aos pacientes foram mais pequenas.

Um outro estudo que envolve a utilização da impressão 3D foi levado a cabo por Sittiwanchai et al. (Sittiwanchai et al. 2014), no qual foi desenvolvida uma prótese do antebraço. Esta prótese foi modelada num software CAD e produzida por impressão 3D em ABS (Acrilonitrilo-butadieno-estireno), e possui cinco motores que permitem a mobilidade em quatro graus de liberdade como o antebraço humano. Os motores são actuados pela contracção dos bíceps e dos tríceps. Concluíram que necessita de melhoramentos futuros para que tenha uma utilidade prática.

Nagrath et al. (Nagrath et al. 2018) propôs a utilização de uma prótese dentária antifúngica produzida por impressão 3D. O estudo propõe a utilização de um filamento personalizado de polimetilmetacrilato com micro-esferas de policaprolactona que

continham anfotericina-B como terapia antifúngica que pode ser impressa como uma prótese dentária. Os resultados demonstraram que a superfície que foi produzida neste material era capaz de fazer uma libertação do princípio activo durante períodos de tempo controlados e reduziu a colonização de *Candida albicans* num ensaio em biomassa.

2.4 ALGORITMOS DE OPTIMIZAÇÃO META-HEURÍSTICOS

Os algoritmos de optimização meta-heurísticos estão a tornar-se cada vez mais populares nas áreas relacionadas com a engenharia. Estes algoritmos são bio-inspirados, baseados em conceitos simples e são de fácil implementação. Adicionalmente, não necessitam de informação em termos de gradientes, o que os torna particularmente interessantes em situações em que as técnicas de optimização tradicionais falham, podendo ser utilizados numa grande variedade de aplicações que abrangem diferentes áreas, em problemas de natureza discreta ou contínua (Rajakumar, Dhavachelvan, and Vengattaraman 2016),(Mirjalili and Lewis 2016).

Tal como se mencionou, este tipo de algoritmos são inspirados na natureza, e podem ser enquadrados em três grandes grupos (Boussaïd, Lepagnot, and Siarry 2013),(Mirjalili and Lewis 2016),(Rajakumar, Dhavachelvan, and Vengattaraman 2016):

- Métodos baseados na evolução natural: estes algoritmos são baseados na evolução de acordo com as leis da natureza. O processo de busca pela solução óptima começa com uma população gerada aleatoriamente e vai evoluindo ao longo das subseqüentes gerações. Dentro deste método da teoria evolutiva, os algoritmos mais conhecidos são os Algoritmos Genéticos, que simulam a teoria evolutiva de Darwin;
- Métodos baseados nas leis da física: exemplo desta abordagem são entre outros os algoritmos do Recozimento Simulado (*Simulated Annealing*, SA), da Busca Local Gravitacional (*Gravitational Local Search*, GLSA), do *Big-Bang Big-Crunch*, entre outros;
- O terceiro grupo de algoritmos meta-heurísticos é baseado no comportamento de populações animais. O mais popular é o algoritmo de Optimização de Enxame de Partículas (*Particle Swarm Optimization*, PSO), que foi primeiramente desenvolvido por Kennedy e Eberhart (Kennedy and Eberhart 1995), este algoritmo tem muitas versões recentemente uma delas é a Optimização de Enxames Galácticos (*Galactic Swarm Optimization*, GSO) que se inspira no movimento relativo das estrelas dentro de uma galáxia e no movimento das galáxias entre si (Muthiah-Nakarajan and Noel 2016). Um outro algoritmo muito popular neste grupo de algoritmos de optimização é o Algoritmo da Colónia de Formigas (*Ant Colony Optimization*), proposto inicialmente por Dorigo et al (Dorigo, Maniezzo, and Colorni 1996). Este algoritmo é inspirado no comportamento social das formigas em colónia, e retrata a inteligência social das formigas na função de encontrar o caminho mais próximo do ninho até uma fonte de comida. Para isso utiliza uma matriz de feromonas no decorrer das iterações

através das soluções candidatas. Outros algoritmos do mesmo grupo são, por exemplo, algoritmo artificial das algas (*Artificial Algae Algorithm*, AAA) que se baseia no estilo de vida e comportamento de microalgas ou o algoritmo de pesquisa dos elefantes (*Elephant Search Algorithm*, ESA) que se inspira no modo como um grupo de elefantes se subdivide em busca de um determinado objectivo (Darwish 2018). O algoritmo de optimização das baleias (*Whale Optimization Algorithm*, WOA) que se inspira no comportamento predatório das baleias-jubarte (Mirjalili and Lewis 2016).

De um modo geral, os algoritmos de optimização meta-heurísticos baseados em populações têm algumas vantagens sobre os algoritmos de optimização baseados em teorias evolutivas. Por exemplo, os algoritmos baseados em populações preservam o espaço de pesquisa pela solução óptima desde primeira à última iteração, como é o caso do PSO (Kennedy and Eberhart 1995). Enquanto que os algoritmos baseados em teorias evolutivas descartam todas as informações assim que uma nova população é formada. Também possuem menos operações quando comparados com os algoritmos baseados em teorias evolutivas, que podem incluir selecções, cruzamentos, mutações e elitismo, como por exemplo, os Algoritmos Genéticos (Kar 2016). Fazendo das primeiras uma opção de mais simples implementação (Mirjalili and Lewis 2016).

Os algoritmos de optimização meta-heurísticos partilham entre si uma característica em comum independentemente da sua natureza. O processo de pesquisa da solução óptima pode ser dividido em duas fases que evoluem iterativamente:

1. *Exploration* - Uma primeira fase de procura no espaço de pesquisa (conjunto de todas as soluções possíveis) que deve incluir operadores capazes de o abranger globalmente, como movimentos (perturbações das variáveis de projecto) que devem ser gerados tanto mais aleatoriamente quanto possível;
2. *Exploitation* - Segunda fase de pesquisa que consiste em procurar e investigar com maior detalhe as áreas promissoras do espaço de pesquisa. Estas áreas promissoras são obtidas na primeira fase e analisadas nesta segunda (Rajakumar, Dhavachelvan, and Vengattaraman 2016),(Mirjalili and Lewis 2016).

Alguns estudos recentes socorrem-se da utilização deste tipo de algoritmos, alguns desses estudos estão citados abaixo a título de exemplo.

O estudo já citado nesta dissertação de Buonamici et al. (Buonamici et al. 2018) no ponto 2.2.2 propõe uma abordagem alternativa e personalizada da reconstrução de objectos CAD a partir de malhas poligonais. Para minimizar a distância entre a malha e o objecto CAD de referência, o algoritmo escolhido foi o PSO e, considerando os resultados deste estudo, concluíram que foi uma escolha adequada.

Huang et al. (Huang et al. 2017) propuseram a utilização do WOA para optimizar o desempenho de um motor de um avião. O objectivo era maximizar o potencial de

aceleração do motor no mínimo intervalo de tempo e conseqüentemente melhorar o desempenho do avião. Concluíram que para este caso foi uma abordagem de otimização adequada e eficaz, e que o algoritmo de otimização WOA tem um bom comportamento de pesquisa junto aos constrangimentos laterais do problema, assim sendo, é um algoritmo com potencial para aplicações em engenharia.

Os algoritmos meta-heurísticos selecionados para o presente estudo foram a Otimização por Enxame de Partículas e o Algoritmo de Otimização da Baleia.

2.5 APLICAÇÃO DE METAMODELOS EM PROBLEMAS DE OPTIMIZAÇÃO

Quando um problema de otimização é muito complexo e com muitas variáveis de projecto envolvidas, o tempo e capacidade computacional envolvidos podem ser muito grandes. Uma solução possível para este tipo de problemas é a utilização da metamodelação.

Um dos métodos mais comuns de metamodelar é através de processos de Gauss, um destes processos é o Kriging estocástico Xie e Chen (Xie and Chen 2017) compara a utilização do Kriging estocástico com outro processo t-Student na metamodelação de um modelo M/M/1 de filas de espera para a gestão de um inventário a otimizar. A distribuição que modela a taxa de chegadas do modelo M/M/1 é a distribuição de Poisson, e a distribuição que modela a taxa de saídas é a exponencial. Este modelo conta apenas com um servidor. Com este estudo concluíram que para grandes volumes de dados o processo t-Student tem um melhor desempenho do que o processo de Gauss na metamodelação do problema.

Um estudo feito por Okobiah et al (Okobiah, Mohanty, and Kougianos 2014) utiliza a metamodelação com o método de Kriging para solução de um problema de otimização. O método de Kriging tem em consideração as correlações entre as diferentes variáveis de projecto, e é por isso adequado para a solução de problemas de elevada complexidade. Este estudo utiliza como algoritmo de otimização, o algoritmo do Reconhecimento Simulado. Concluíram que com esta abordagem o nano-circuito estudado diminuiu o tempo de pré-carga em 61,54%, enquanto que o projecto foi feito 390 vezes mais rapidamente (Okobiah, Mohanty, and Kougianos 2014).

Um outro estudo levado a cabo por Clees et al. (Clees et al. 2014) mostra o planeamento da terapia por ultrassons baseada em simulações numéricas que incluem uma otimização dos valores da frequência (parâmetro importante em terapia por ultrassons) e da velocidade inicial de partícula que é proporcional à intensidade acústica emitida pelo transdutor, e uma análise estocástica dos resultados. Para metamodelar os resultados da simulação e proceder à sua otimização foram escolhidas funções do tipo RBF (*Radial Basis Functions*, RBF). As incertezas desta metamodelação foram estimadas

e podem ser reduzidas aumentando o número de observações que aproximam o metamodelo. A aplicação dos resultados da otimização num caso real, conseguiu compensar o efeito da respiração e aumentar a precisão da terapia.

3 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Neste capítulo são efectuadas introduções de carácter teórico relacionadas com os diferentes temas que são de relevância para o desenvolvimento desta Dissertação.

3.1 DISPOSITIVOS DE IMOBILIZAÇÃO COM APLICAÇÃO MÉDICA

3.1.1 MÉTODOS DE AQUISIÇÃO

Para a constituição do modelo computacional da superfície 3D da cabeça do fântoma PIXI, foram consideradas duas fontes de informação: uma associada à realização de tomografias computadorizadas (TC) e outra associada ao seu varrimento laser 3D (3DLS).

A TC é uma técnica de aquisição de imagem que pode ser vista como seccionando um dado objecto em fatias e captando a “fotografia” de cada uma dessas fatias utilizando Raio-X. Para cada secção, a radiação X penetra o objecto, projectando apenas a secção desejada. Para reconstruir todo o objecto é necessário fazer esta aquisição a várias secções (fatias) e com a utilização de *software* vocacionado para o efeito é efectuado um ajuste às várias camadas até se obter um objecto 3D (Brooks and Di Chiro 1975).

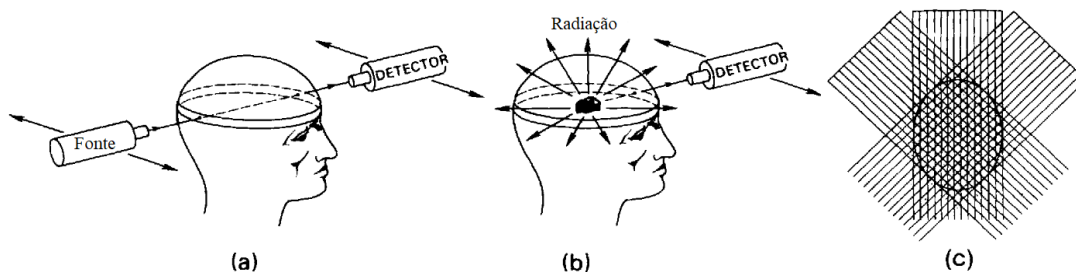


Figura 3.1. Esquema da TC. a) Tomografia reconstitutiva b) e c) forma de aquisição mais comum (adaptado de (Brooks and Di Chiro 1975))

Com o 3DLS são adquiridas nuvens de pontos e eventualmente cores e texturas do objecto pretendido. Estas nuvens de pontos não são mais do que uma colecção de pontos caracterizados através das suas coordenadas no espaço cartesiano 3D. Esta constituição é aliás visível quando se abre um ficheiro numa nuvem de pontos, habitualmente em formato de texto.

O varrimento laser pode classificar-se quanto ao princípio de funcionamento e quanto à distância ao objecto a adquirir. No caso presente tinha-se uma situação em que o objecto estava próximo e o sistema de varrimento utilizado se baseava num princípio de triangulação.

De acordo com o sistema utilizado pode referir-se que há lugar à emissão de um feixe laser dirigido a um ponto da superfície do objecto cuja geometria se pretende adquirir, através de um espelho de dois lados, e que é gravado num *array* fotossensível. O ângulo entre o espelho de dois lados e o ponto guardado no array fotossensível é guardado numa base de dados que servirá para calcular um intervalo de valores. Este intervalo de valores quando conjugado com a informação da posição dada por um sistema de medição de coordenadas gera uma nuvem de pontos 3D (Milroy et al. 1996).

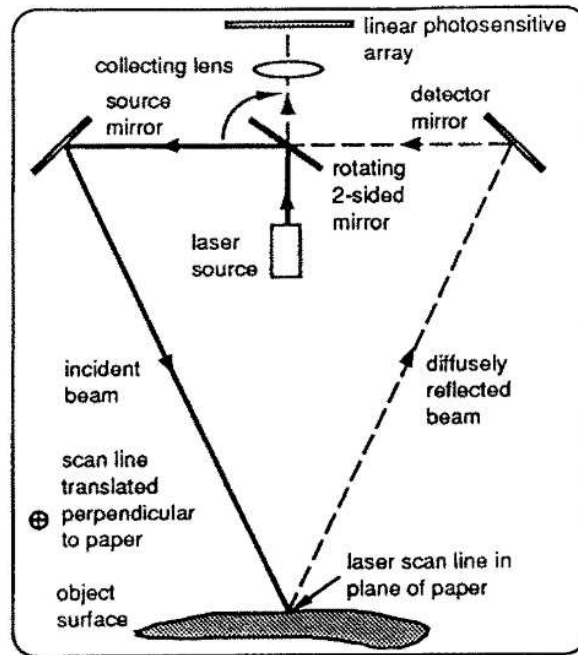


Figura 3.2. Funcionamento do 3DLS (Milroy et al. 1996)

3.2 ANÁLISE ESTÁTICA DE PLACAS

Nesta secção são abordadas duas metodologias que foram implementadas para se proceder à análise estática de placas. Uma baseada no Método dos Elementos Finitos (MEF) usando a teoria de Kant (teoria de deformação de corte de ordem superior) e o método de Navier, método analítico vocacionado para a análise de placas finas simplesmente apoiadas. Para um melhor enquadramento, a Figura 3.3 apresenta a representação esquemática da placa e respectivo sistema de coordenadas cartesianas.

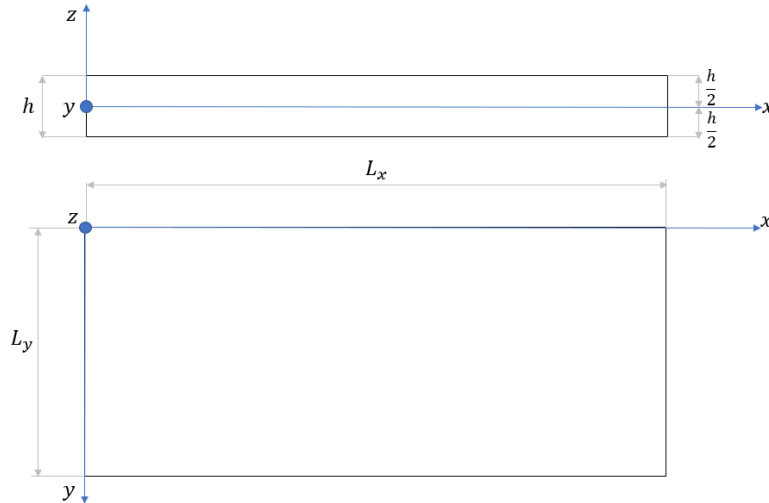


Figura 3.3. Esquema de uma placa rectangular e sistema de coordenadas.

As placas analisadas ao longo da Dissertação, têm a configuração da apresentada na Figura 3.3, e a sua caracterização geométrica e de comportamento estático tem por base o referencial apresentado.

3.2.1 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O MEF baseia-se na discretização de um dado domínio contínuo num domínio discreto, e ao invés da utilização de um modelo matemático mais complexo baseado em equações diferenciais que governam um determinado fenómeno, é possível constituir um sistema de equações algébricas alternativo e assim determinar soluções para este problema recorrendo a métodos numéricos.

3.2.1.1 TEORIA DE KANT

O campo de deslocamentos associado à teoria de deformação de corte de ordem superior que se implementou, é devida a Kant (Ferreira 2010), e tem a seguinte constituição:

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0(x, y) + z\theta_x(x, y) + z^3\theta_x^*(x, y) \\ v(x, y, z) = v_0(x, y) + z\theta_y(x, y) + z^3\theta_y^*(x, y) \\ w(x, y, z) = w_0(x, y) \end{cases} \quad (3.1)$$

Como é possível observar, o deslocamento transversal w é constante ao longo da espessura, coincidindo com o valor apresentado na superfície média da placa, w_0 . Os graus de liberdade u_0 e v_0 representam os deslocamentos nas direcções que constituem a placa, reportadas ao seu plano médio; θ_x e θ_y representam as rotações dessa superfície respectivamente em torno de y e de x , e θ_x^* e θ_y^* representam as rotações de ordem superior, neste caso de terceira ordem. É de realçar que a dependência da coordenada

espessura z permite conferir aos deslocamentos no plano da placa um carácter não linear bem como garantir o carácter parabólico das deformações de corte transversais.

Em consequência, e considerando as relações cinemáticas da Teoria da Elasticidade para pequenas deformações, teremos para o campo de deformações:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^m + z\epsilon_{xx}^f + z^3\epsilon_{xx}^{f*} \\ \epsilon_{yy}^m + z\epsilon_{yy}^f + z^3\epsilon_{yy}^{f*} \\ \gamma_{xy}^m + z\gamma_{xy}^f + z^3\gamma_{xy}^{f*} \\ \gamma_{xz}^{(0)} + 3z^3\gamma_{xz}^{(2)} \\ \gamma_{yz}^{(0)} + 3z^3\gamma_{yz}^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

Estas deformações podem ser expressas em função dos graus de liberdade. Assim para as componentes de deformação de membrana e de flexão temos:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^m \\ \epsilon_{yy}^m \\ \gamma_{xy}^m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^f \\ \epsilon_{yy}^f \\ \gamma_{xy}^f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \end{Bmatrix}; \quad (3.3)$$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^{f*} \\ \epsilon_{yy}^{f*} \\ \gamma_{xy}^{f*} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_x^*}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y^*}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_x^*}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y^*}{\partial x} \end{Bmatrix}$$

e para as componentes de deformação de corte:

$$\gamma_0 = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^{(0)} \\ \gamma_{yx}^{(0)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial x} + \theta_x \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} + \theta_y \end{Bmatrix}; \quad \gamma_2 = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^{(2)} \\ \gamma_{yx}^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \theta_x^* \\ \theta_y^* \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

Tendo em consideração que os materiais que irão ser utilizados no contexto deste trabalho podem ser considerados como isotrópicos e homogéneos, e tendo em consideração a teoria de Kant, a relação constitutiva que nos permite relacionar o estado de tensão com o estado de deformação é dado por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \nu \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ \nu \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{2(1+\nu)} & 0 \\ 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}$$

Recorrendo ao princípio da Energia Potencial Mínima, sabemos que é dada da seguinte forma, em que U representa a energia elástica de deformação e V o potencial de forças externas (Kant and Pandya 1988):

$$\Pi = U - V \Leftrightarrow \Pi = \frac{1}{2} \int_V \epsilon^T \sigma dV - \int_A u^T F dA \quad (3.6)$$

E considerando que a energia elástica de deformação é genericamente dada por:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \epsilon^T \sigma + \gamma^T \tau dV \quad (3.7)$$

No caso da presente teoria, teremos:

$$U = \frac{1}{2} \int_V [\epsilon^m + z\epsilon^f + z^3\epsilon^{f*}]^T D [\epsilon^m + z\epsilon^f + z^3\epsilon^{f*}] + [\gamma^{(0)} + 3z^3\gamma^{(2)}]^T D_c [\gamma^{(0)} + 3z^3\gamma^{(2)}] dV \quad (3.8)$$

Do que resulta para a matriz de rigidez elástica de um elemento genérico $K^{(e)}$:

$$K^{(e)} = K_{mm}^{(e)} + K_{ff}^{(e)} + K_{f^*f^*}^{(e)} + K_{cc}^{(e)} + K_{c2c2}^{(e)} + K_{cc2}^{(e)} + K_{c2c}^{(e)} \quad (3.9)$$

Em que $K_{mm}^{(e)}$ é a matriz de rigidez de membrana, $K_{ff}^{(e)}$ é a matriz de rigidez de flexão com termos de primeira ordem, $K_{f^*f^*}^{(e)}$ é a matriz de rigidez de flexão com termos de ordem superior, $K_{cc}^{(e)}$ é a matriz de rigidez de corte, $K_{c2c2}^{(e)}$ é a matriz de rigidez de corte com termos de ordem superior e $K_{cc2}^{(e)}$ e $K_{c2c}^{(e)}$ são matrizes de rigidez em que os seus termos representam acoplamentos de corte (Ferreira 2010).

As equações seguintes representam o cálculo individual de cada um dos termos da matriz de rigidez:

$$\begin{aligned}
K_{mm}^{(e)} &= \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \epsilon_m^T \sigma dz dA = \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \epsilon_m^T D \epsilon_m dz dA \\
&= h \int_A \epsilon_m^T D \epsilon_m dA
\end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}
K_{ff}^{(e)} &= \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \epsilon_f^T \sigma dz dA = \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 \epsilon_f^T D \epsilon_f dz dA \\
&= \frac{h^3}{12} \int_A \epsilon_f^T D \epsilon_f dA
\end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}
K_{f^*f^*}^{(e)} &= \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^3 \epsilon_{f^*}^T \sigma dz dA = \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^6 \epsilon_{f^*}^T D \epsilon_{f^*} dz dA \\
&= \frac{h^7}{448} \int_A \epsilon_{f^*}^T D \epsilon_{f^*} dA
\end{aligned} \tag{3.12}$$

$$K_{cc}^{(e)} = \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \gamma_0^T D_c \gamma_0 dz dA = h \int_A \gamma_0^T D_c \gamma_0 dA \tag{3.13}$$

$$K_{c2c2}^{(e)} = \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} 3z^2 \gamma_2^T D_c 3z^2 \gamma_2 dz dA = 9 \frac{h^5}{80} \int_A \gamma_2^T D_c \gamma_2 dA \tag{3.14}$$

$$K_{cc2}^{(e)} = \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \gamma_0^T D_c 3z^2 \gamma_2 dz dA = 3 \frac{h^3}{12} \int_A \gamma_0^T D_c \gamma_2 dA \tag{3.15}$$

$$K_{c2c}^{(e)} = \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} 3z^2 \gamma_2^T D_c \gamma_0 dz dA = 3 \frac{h^3}{12} \int_A \gamma_2^T D_c \gamma_0 dA \tag{3.16}$$

Numa perspectiva da implementação do MEF através de um elemento quadrilátero bi-linear de Lagrange, qualquer grau de liberdade será escrito à custa de uma combinação linear dos correspondentes graus de liberdade nodais de acordo com:

$$u = \sum_{i=1}^4 N_i u_i \tag{3.17}$$

Este elemento finito, bem como a sua relação com os sistemas de coordenadas cartesianas ou naturais é apresentado na Figura 3.4.

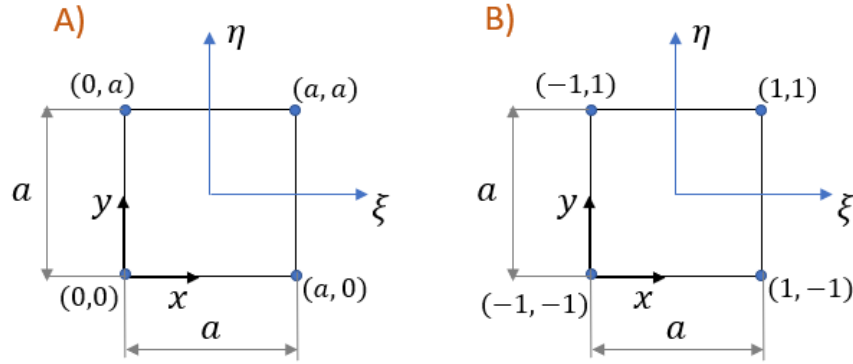


Figura 3.4. Elemento quadrilátero bi-linear: A) sistema de coordenadas cartesianas; B) sistema de coordenadas naturais

As funções interpoladoras para este elemento, N_i são dadas por:

$$\begin{cases} N_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \\ N_2 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \\ N_3 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \\ N_4 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \end{cases} \quad (3.18)$$

Sabendo que as deformações se relacionam com os deslocamentos conforme ficou expresso nas equações 3.2 a 3.4, havendo a necessidade de encontrar as derivadas $\frac{\partial}{\partial x}$ e $\frac{\partial}{\partial y}$, utiliza-se o método de derivação em cadeia, $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}$ (e o mesmo para a variável y), conseguindo-se com isto, obter a matriz Jacobiana:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \xi} = J \frac{\partial}{\partial x} \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x} = J^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (3.19)$$

Considerando que a organização dos graus de liberdade foi feita do seguinte modo, em que, i representa o número de um dado nó:

$$u_i^T = [w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}, \theta_{xi}^*, \theta_{yi}^*, u_i, v_i] \quad (3.20)$$

Assim, as matrizes que relacionam deformações com deslocamentos serão escritas de forma condensada por (Ferreira 2010).

$$\epsilon = Bu \quad (3.21)$$

E mais detalhadamente, para o presente estudo e de acordo com a teoria de Kant, ter-se-á:

- Componente de membrana:

$$B_m^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial N}{\partial y} & \frac{\partial N}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

- Componente de flexão de primeira ordem:

$$B_f^{(e)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N}{\partial y} & \frac{\partial N}{\partial x} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

- Componente de flexão de terceira ordem:

$$B_{f^*}^{(e)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N}{\partial y} & \frac{\partial N}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

- Componente de corte:

$$B_{c0}^{(e)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial N}{\partial x} & N & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N}{\partial y} & 0 & N & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

- Componente de corte de ordem superior:

$$B_{c2}^{(e)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial N}{\partial x} & 0 & 0 & N & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & N \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Após a montagem das matrizes dos elementos e dos vectores de forças distribuídas, são impostas as restrições aos graus de liberdade que descrevem as condições de fronteira existentes. Neste caso, a solução são os deslocamentos generalizados nos nós da placa, que são obtidos pela resolução da equação de equilíbrio obtida pela minimização da energia potencial da placa.

$$K \cdot u = f \quad (3.27)$$

Em que K é a matriz de rigidez global, q é o vector de graus de liberdade generalizados (a determinar) e f é o vector das forças generalizadas aplicadas à placa que, para o caso em estudo, é dado por (Kant and Pandya 1988):

$$f = N.P.\det(J) \cdot wt \quad (3.28)$$

Em que N é o vector das funções de forma nas coordenadas naturais do elemento, P é a carga transversal aplicada, $\det(J)$ é o determinante da matriz Jacobiana e wt é o peso de Gauss.

3.2.2 MÉTODO DE NAVIER

O método de Navier permite obter uma solução analítica para o problema da flexão de placas finas, rectangulares, simplesmente apoiadas nos bordos, que obedece à equação de equilíbrio (Si-ming 1985):

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -p(x, y) \quad (3.29)$$

em que os momentos M_x , M_{xy} e M_y são dados por:

$$\begin{cases} M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ M_{xy} = -D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad (3.30)$$

No caso da placa a analisar ser construída com um material isotrópico e homogéneo, como é o caso, D é o coeficiente de rigidez à flexão da placa e é dado por:

$$D = \frac{E \cdot h^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (3.31)$$

A equação de equilíbrio da placa pode então ser re-escrita como uma equação diferencial de quarta ordem em função da deformada transversal w :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x, y)}{D} \quad (3.32)$$

A deformada w da placa e o seu carregamento são modelados através de séries duplas de Fourier de acordo com:

$$\begin{cases} w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ p(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \end{cases} \quad (3.33)$$

Em que os coeficientes P_{mn} e a_{mn} são dados por:

$$\begin{cases} P_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a p(x, y) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dx dy \\ a_{mn} = \frac{1}{\pi^4 D} \frac{P_{mn}}{\left(\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right)^2} \end{cases} \quad (3.34)$$

sendo a e b as dimensões da aresta da placa. Resolvendo o sistema de equações 3.33 obtém-se uma solução aproximada para a deformada da placa $w(x, y)$ (Si-ming 1985), não sem ter o necessário cuidado da elaboração de estudos de convergência para garantir a qualidade da solução.

Refira-se que este é um procedimento transversal aos diferentes métodos considerados no estudo.

3.3 OPTIMIZAÇÃO ATRAVÉS DE ALGORITMOS META-HEURÍSTICOS

3.3.1 OPTIMIZAÇÃO POR ENXAME DE PARTÍCULAS

A Optimização por Enxame de Partículas (PSO) é um algoritmo inspirado na forma coreográfica do voo de pássaros em bando. Isto é, a forma como um bando de pássaros muito grande muda de direcção muito rapidamente, se dispersa e se volta a reagrupar. Este algoritmo traduz a imprevisibilidade da dinâmica de grupo, bem como a sincronia do voo em bando para a qual tem que haver um esforço para que mantenham uma distância óptima uns dos outros (Kennedy and Eberhart 1995).

Este método requer apenas operadores básicos da matemática, o que se traduz em menos recursos a nível computacional (Kennedy and Eberhart 1995). O PSO é um algoritmo estocástico com o qual se consegue obter resultados muito estáveis em estudos de convergência em pouco tempo de simulação quando comparado com outros do mesmo tipo (Hughes et al. 2018). Este algoritmo é muito utilizado para optimização de funções, treino de redes neuronais, optimização de parâmetros em sistemas fuzzy e controlo de sistemas (Dai and Chen 2018).

3.3.1.1 MODELO MATEMÁTICO DO PSO

No PSO original, qualquer partícula (agente) representa uma potencial solução no espaço de pesquisa. Todos os agentes num determinado espaço de pesquisa de dimensão N possuem uma posição $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, \dots, x_{iN})$ e uma velocidade $v_i = (v_{i1}, v_{i2}, v_{i3}, \dots, v_{iN})$. O algoritmo inicializa com valores aleatórios limitados pelo espaço de pesquisa as posições de todas as partículas, e a zero as respectivas velocidades (Kennedy and Eberhart 1995).

As posições e velocidades são actualizadas no decorrer das iterações (número de gerações) do algoritmo de acordo com o sistema de equações 3.35, em que t representa a iteração actual, i representa o agente de pesquisa, w representa o peso da inércia no movimento dos agentes, c_1 e c_2 são duas constantes que representam coeficientes de aceleração que influenciam os pesos de p_i e de p_g que representam respectivamente a melhor posição do agente e a melhor posição global de toda a população até à iteração t . Os parâmetros r_1 e r_2 são dois valores gerados aleatoriamente segundo uma distribuição uniforme no intervalo $[0,1]$.

$$\begin{cases} v_i(t+1) = wv_i(t) + c_1r_1(p_i - x_i(t)) + c_2r_2(p_g - x_i(t)) \\ x_i(t+1) = x_i(t) + v_i(t+1) \end{cases} \quad (3.35)$$

Este comportamento do PSO está representado esquematicamente na Figura 3.5.

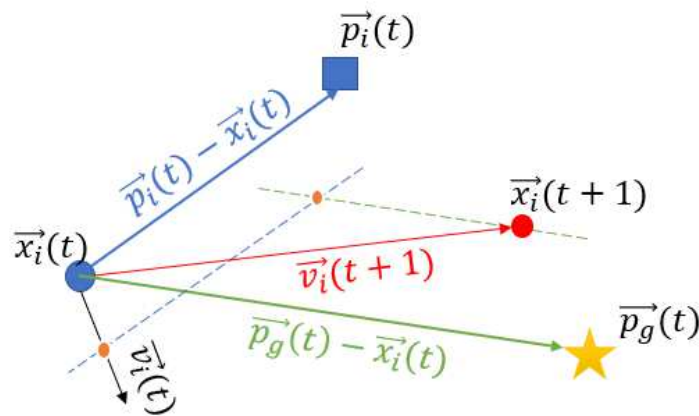


Figura 3.5. Esquema representativo do PSO

Este algoritmo pode ser descrito pelo pseudocódigo que foi adaptado de Dai e Chen (Dai and Chen 2018) e que se apresenta no Pseudocódigo 3.1.

```

Iniciar a população
Para t=1 até nº máximo de gerações
  Para i=1 até dimensão da população
    Se  $f(x_{i,d}(t)) < f(p_i(t))$  então  $p_i(t) = x_{i,d}(t)$ 
     $f(p_g(t)) = \min_i(f(p_i(t)))$ 
  Fim
  Para d=1 até ao nº de variáveis de projecto
     $v_{i,d}(t+1) = wv_{i,d}(t) + c_1r_1(p_i - x_{i,d}(t)) + c_2r_2(p_g - x_{i,d}(t))$ 
     $x_{i,d}(t+1) = x_{i,d}(t) + v_{i,d}(t+1)$ 
    Se  $v_{i,d}(t+1) > v_{max}$  então  $v_{i,d}(t+1) = v_{max}$ 
    Senão  $v_{i,d}(t+1) < v_{min}$  então  $v_{i,d}(t+1) = v_{min}$ 
  Fim
  Se  $x_{i,d}(t+1) > x_{max}$  então  $x_{i,d}(t+1) = x_{max}$ 
  Senão  $x_{i,d}(t+1) < x_{min}$  então  $x_{i,d}(t+1) = x_{min}$ 
Fim
Fim
Fim

```

Pseudocódigo 3.1. Implementação do algoritmo PSO (Dai and Chen 2018)

3.3.1.2 MODELO MATEMÁTICO DO PSO RESTRINGIDO

A versão original do algoritmo PSO tem demonstrado conter alguns problemas relacionados com as características dinâmicas das partículas, isto é, essas velocidades necessitavam de ser limitadas para se conseguir controlar as trajetórias descritas pelos agentes (Clerc and Kennedy 2002).

O PSO restringido tem por base a formulação do PSO original apenas com a variante de possuir alguns coeficientes que controlam a convergência do sistema. De uma maneira geral esta abordagem passa a ser descrita por:

$$\begin{cases} v_i(t+1) = v_i(t) + \varphi_a(p_i - x_i(t)) + \varphi_b(p_g - x_i(t)) \\ x_i(t+1) = x_i(t) + v_i(t+1) \end{cases} \quad (3.36)$$

Em que φ_a e φ_b são duas constantes que dão origem à expressão da equação 3.37, que por sua vez, em conjunto com a equação 3.38 dão origem a uma nova formulação do PSO.

$$\varphi = \varphi_a + \varphi_b \quad (3.37)$$

$$\chi = \frac{\kappa}{\left|1 - \frac{\varphi}{2} - \frac{\sqrt{\varphi(\varphi - 4)}}{2}\right|} = \frac{2\kappa}{\left|2 - \varphi - \sqrt{\varphi(\varphi - 4)}\right|} \quad (3.38)$$

$$= \frac{2\kappa}{\left|2 - \varphi_a - \varphi_b - \sqrt{(\varphi_a + \varphi_b)(\varphi_a + \varphi_b - 4)}\right|}, \text{ se } \varphi_a + \varphi_b > 4$$

Caso contrário $\chi = \kappa$, em que $\kappa \in [0,1]$. Actualizando a expressão do PSO vem então:

$$\begin{cases} v_i(t+1) = v_i(t) + \varphi_a(p_i - x_i(t)) + \varphi_b(p_g - x_i(t)) \\ x_i(t+1) = \chi v_i(t+1) + \chi x_i(t) + (1 - \chi) \frac{\varphi_a p_i + \varphi_b p_g}{\varphi_a + \varphi_b} \end{cases} \quad (3.39)$$

O coeficiente de restrição pode ser visto como algo que leva cada agente de pesquisa a agir mais devagar (Clerc and Kennedy 2002), e assim contribui para uma pesquisa mais “fina” do espaço de soluções.

Este PSO restringido pode ser descrito no pseudocódigo adaptado de Clerc e Kennedy (Clerc and Kennedy 2002).

```

Calcular  $\chi$ 
Iniciar população
Fazer
  Para i=1 até à dimensão da população
    se  $f(\vec{x}_i) < f(\vec{p}_i)$  então  $\vec{p}_i = \vec{x}_i$ 
     $\vec{p}_g = \min(\vec{p}_{vizinhança})$ 
    Para d=1 até ao n° de variáveis de projecto
       $v_{i,d} = \chi(v_{i,d} + \varphi_a(p_{i,d} - x_{i,d}) + \varphi_b(p_{g,d} - x_{i,d}))$ 
       $x_{i,d} = x_{i,d} + v_{i,d}$ 
    Próximo d
  Próximo i
Até que o critério de paragem seja satisfeito

```

Pseudocódigo 3.2. Implementação do algoritmo PSO restringido (Clerc and Kennedy 2002)

3.3.2 ALGORITMO DE OPTIMIZAÇÃO DA BALEIA

Este algoritmo é inspirado numa técnica de caça das baleias-jubarte (*Megaptera novaeangliae*) (Mirjalili and Lewis 2016). A baleia-jubarte alimenta-se essencialmente de *krill* (invertebrados semelhantes ao camarão) e de cardumes de pequenos peixes. Mas o mais interessante na sua alimentação é a técnica especial de caça que é chamada de rede de bolhas (*bubble-net feeding*) onde se alimentam de *krill* ou de peixe junto à superfície. Foi observado que esta forma de se alimentarem é feita criando uma rede de bolhas de ar

de forma circular ou em forma de “9” no decorrer do percurso até à superfície, imitando uma espiral ascendente, como se pode observar na Figura 3.6.

Este método de caça só pode ser observado nas baleias-jubarte. Esta técnica de caça foi modelada matematicamente para a resolução de problemas de otimização (Mirjalili and Lewis 2016).

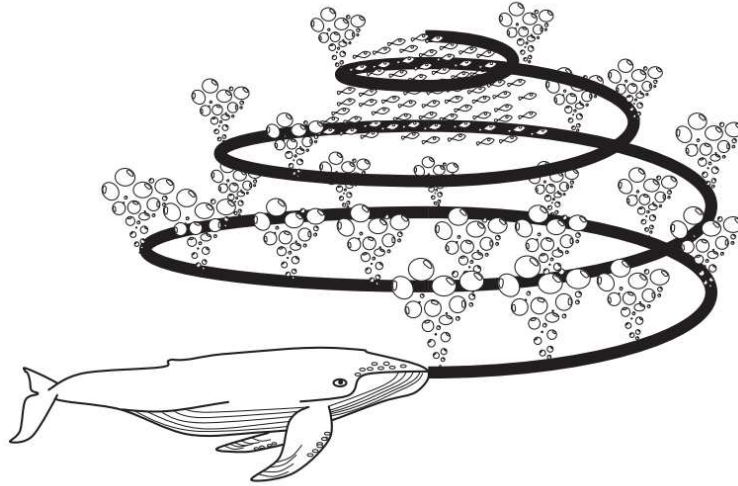


Figura 3.6. Esquema do movimento descrito na caça com rede de bolhas (Mirjalili and Lewis 2016)

3.3.2.1 MODELO MATEMÁTICO DO WOA

O modelo matemático deste método pode ser descrito através de um conjunto de etapas que se apresenta de seguida.

- Cercar a presa:

As baleias-jubarte podem identificar a localização das presas e cercá-las. Sabendo que a localização da solução óptima é desconhecida *a priori*, o algoritmo WOA assume que o melhor candidato à solução óptima é o agente mais próximo da localização da presa ou pelo menos está mais perto da solução óptima. Define-se como o melhor agente de pesquisa (uma baleia que integre a população) a baleia que assuma a melhor solução provisória, e os outros agentes de pesquisa actualizam as suas posições de acordo com as seguintes expressões (Mirjalili and Lewis 2016):

$$\vec{D} = |\vec{C} \cdot \vec{X}^*(t) - \vec{X}(t)| \quad (3.40)$$

$$\vec{X}(t + 1) = \vec{X}^*(t) - \vec{A} \cdot \vec{D} \quad (3.41)$$

O valor de t indica a iteração actual (geração da população), \vec{A} e \vec{C} são vectores de coeficientes, \vec{X}^* é o vector posição da melhor solução obtida até ao momento e \vec{X} é o vector posição, o cálculo de \vec{D} é feito em valor absoluto e ‘ \cdot ’ refere-se a uma multiplicação elemento a elemento (Mirjalili and Lewis 2016).

O valor de \vec{X}^* deve ser actualizado a cada iteração caso tenha sido encontrada uma melhor solução. Os vectores \vec{A} e \vec{C} são avaliados de acordo com a expressão:

$$\begin{cases} \vec{A} = 2\vec{a} \cdot \vec{r} - \vec{a} \\ \vec{C} = 2 \cdot \vec{r} \end{cases} \quad (3.42)$$

Em que o vector \vec{a} assume valores que decrescem de 2 até 0 no decorrer das iterações e \vec{r} é um vector aleatório que assume valores no intervalo $[0,1]$. Os vectores \vec{A} e \vec{C} assumem valores de constantes, já que \vec{a} e \vec{r} também (Mirjalili and Lewis 2016).

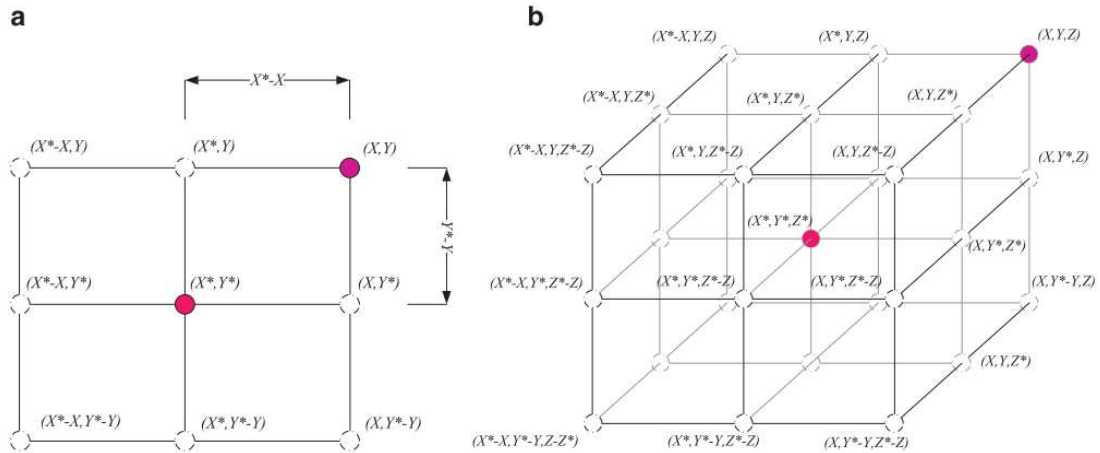


Figura 3.7. Vectores posição 2D e 3D e possíveis actualizações destes vectores (Mirjalili and Lewis 2016)

A Figura 3.7 ilustra o que acontece função da equação 3.41. Para um problema 2D (Figura 3.7.a) a posição (\vec{X}, \vec{Y}) de um dado agente de pesquisa pode ser actualizada de acordo com a melhor solução provisória (\vec{X}^*, \vec{Y}^*) . Todas as soluções possíveis em redor do melhor agente de pesquisa podem ser alcançadas ajustando os valores de \vec{A} e \vec{C} , e isto é possível devido ao vector \vec{r} que é gerado aleatoriamente, simulando assim o efeito de cercar a presa (Mirjalili and Lewis 2016).

Este conceito pode ser extrapolado para um espaço de pesquisa com mais dimensões, como é o caso da Figura 3.7.b que mostra o que acontece para um problema 3D, mas é possível utilizar este método para n dimensões, em que os agentes de pesquisa se movem em hipercubos ao redor da melhor solução obtida até ao momento (Mirjalili and Lewis 2016).

- Caça com rede de bolhas:
 - Mecanismo de aperto do cerco: Este comportamento é conseguido pelo decrescer do valor de \vec{a} , que se traduz numa redução do intervalo em que \vec{A} se pode inserir. \vec{A} é um vector que pode assumir valores no intervalo $[-\vec{a}, \vec{a}]$ e \vec{a} decresce de 2 até 0 ao longo das iterações.
 - Ao definir um valor aleatório de \vec{A} no intervalo $[-1,1]$, garante que a nova posição de um dado agente de pesquisa será definida em qualquer lugar entre a posição

original e a melhor solução encontrada até ao momento. A Figura 3.8.a ilustra as possíveis novas posições que podem ser alcançadas por um dado agente de pesquisa quando \vec{A} varia entre 0 e 1 para um problema 2D (Mirjalili and Lewis 2016).

- Actualização da posição por espiral: Este mecanismo está representado na Figura 3.8.b. Este método começa por calcular a distância entre a baleia situada em (\vec{X}, \vec{Y}) e a baleia situada em (\vec{X}^*, \vec{Y}^*) . Depois é determinada a equação de uma espiral entre a posição da baleia em (\vec{X}, \vec{Y}) e a presa de modo a imitar o movimento em hélice das baleias-jubarte quando cercam as presas. Esta equação é dada por (Mirjalili and Lewis 2016):

$$\begin{cases} \vec{X}(t+1) = \vec{D}' \cdot e^{bl} \cdot \cos(2\pi l) + \vec{X}^*(t) \\ \vec{D}' = |\vec{X}^*(t) - \vec{X}(t)| \end{cases} \quad (3.43)$$

A segunda expressão do sistema de equações 3.43 indica a distância de uma dada baleia à presa (melhor solução obtida até ao momento, b é uma constante para definir a forma da espiral logarítmica, l é um valor aleatório entre $[-1,1]$ e mais uma vez ‘.’ representa uma multiplicação elemento a elemento.

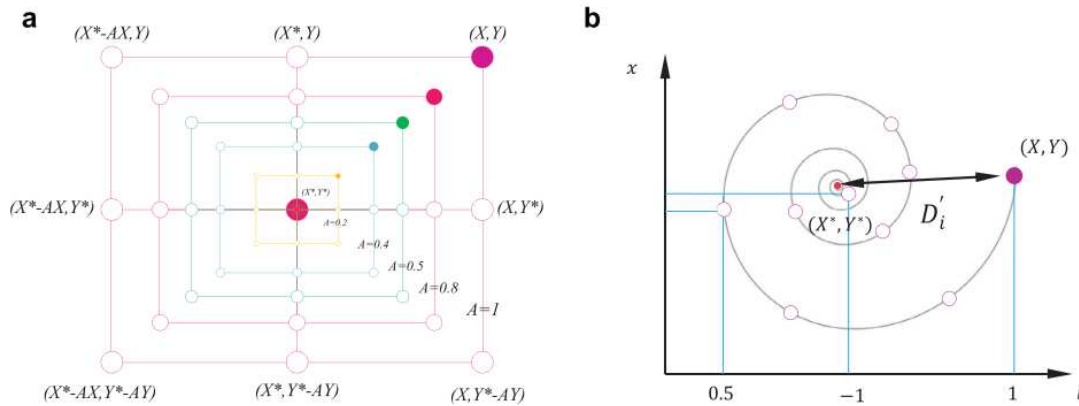


Figura 3.8. Implementação da pesquisa por rede de bolhas (Mirjalili and Lewis 2016)

De ressaltar que as baleias-jubarte nadam em torno da presa num movimento que é descrito por um círculo que vai reduzindo o seu diâmetro e por uma espiral ascendente ao mesmo tempo.

Para obter este comportamento, no algoritmo assume-se que há uma probabilidade de 50% de escolher um dos mecanismos para actualizar as posições das baleias durante a optimização, para isso estabeleceu-se que:

$$\vec{X}(t+1) = \begin{cases} \vec{X}^*(t) - \vec{A} \cdot \vec{D} & \text{se } p < 0.5 \\ \vec{D}' \cdot e^{bl} \cdot \cos(2\pi l) + \vec{X}^*(t) & \text{se } p \geq 0.5 \end{cases} \quad (3.44)$$

- Busca pela presa:

A variação do vector \vec{A} também pode ser utilizada para procurar a presa. As baleias-jubarte procuram aleatoriamente de acordo com as posições de cada uma. Então para esta modelação, se $|\vec{A}| > 1$, força-se um determinado agente de pesquisa a procurar longe da melhor solução encontrada até ao momento. O que faz com que o algoritmo tenha uma componente de pesquisa mais global (Mirjalili and Lewis 2016). Este comportamento é traduzido pelo sistema de equações 3.45.

$$\begin{cases} \vec{D} = |\vec{C} \cdot \overrightarrow{X_{rand}} - \vec{X}| \\ \vec{X}(t+1) = \overrightarrow{X_{rand}} - \vec{A} \cdot \vec{D} \end{cases} \quad (3.45)$$

Em que $\overrightarrow{X_{rand}}$ é a posição de uma baleia da população escolhida aleatoriamente. A Figura 3.9 mostra o conjunto das soluções possíveis para um problema 2D utilizando esta abordagem, o que comparativamente com a Figura 3.8.a, evidencia um conjunto das soluções possíveis, muito mais alargado.

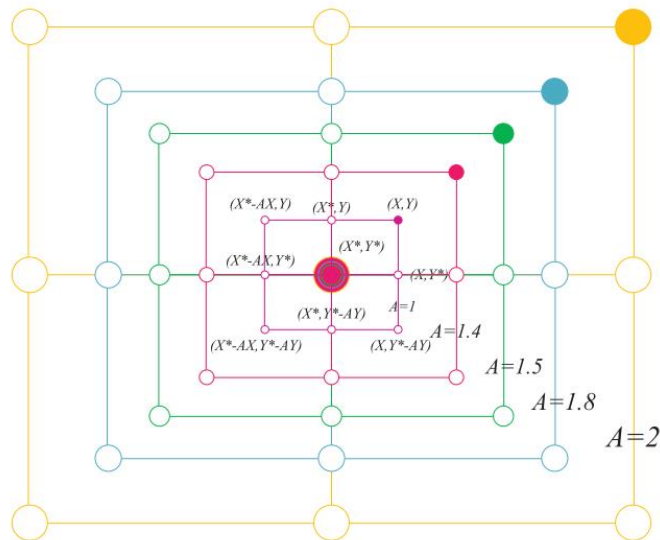


Figura 3.9. Procura da presa com um agente de pesquisa aleatório (Mirjalili and Lewis 2016)

Esta modelação matemática para efeitos de programação pode ser traduzida no Pseudocódigo 3, adaptado de Mirjalili e Lewis (Mirjalili and Lewis 2016):

```

Iniciar população de baleias  $X_i$  ( $i=1,2, \dots, n$ )
Calcular o valor da função objectivo para cada  $X_i$ 
 $X^*$ =melhor agente de pesquisa
  Enquanto ( $t < n^\circ$  máximo de gerações)
    Para cada agente de pesquisa
      Actualizar  $a, A, C, l$  e  $p$ 
      Se ( $p < 0.5$ )
        Se ( $|A| < 1$ )
          Actualizar a posição do actual agente de pesquisa segundo a eq. 3.41
        Senão ( $|A| \geq 1$ )
          Seleccionar um agente de pesquisa aleatório ( $X_{rand}$ )
          Actualizar a posição do actual agente de pesquisa segundo a eq. 3.45
        Fim do Se
      Senão ( $p \geq 0.5$ )
        Actualizar a posição do actual agente de pesquisa segundo a eq. 3.43
      Fim do Se
    Fim do Para
    Verificar se algum dos agentes de pesquisa sai do espaço de pesquisa e corrigir
    Calcular o valor da função objectivo para cada agente de pesquisa
    Actualizar  $X^*$  se houver uma melhor solução
     $t=t+1$ 
  Fim do Enquanto
Devolver  $X^*$ 

```

Pseudocódigo 3.3. Implementação do algoritmo WOA adaptado de (Mirjalili and Lewis 2016)

3.4 INTERPOLAÇÃO PELO MÉTODO KRIGING

Um método muito popular de interpolação espacial é o método Kriging que se baseia no pressuposto que pontos mais próximos têm comportamentos semelhantes. A grande desvantagem deste método é o tempo de resolução para uma grande quantidade de dados (Fazio and Roisenberg 2013).

Este método é um processo de regressão de Gauss, muito utilizado em geoestatística, foi descrito pela primeira vez por Georges Matheron que se baseou na tese de Mestrado de Daniel Krige, daí o nome de Kriging para o método.

O processo de regressão de Gauss (*Gaussian Regression Process*, GRP) é um processo estocástico, ou seja, a recolha dos dados a analisar é feita de forma aleatória (Rasmussen et al. 2006).

3.4.1 MODELO MATEMÁTICO DO MÉTODO KRIGING

O método Kriging utiliza semi-variogramas para o processo de interpolação. Um semi-variograma é uma função de distância entre dois pontos. Algumas das funções mais utilizadas para o cálculo do semi-variograma são:

Tabela 3.1. Lista de funções de covariância (Fazio and Roisenberg 2013),(Rasmussen et al. 2006),(Silva 2015)

Nome da função	Expressão
Exponencial quadrada	$\gamma(h) = \begin{cases} 0 & \text{se } h = 0 \\ \exp\left(-\frac{h^2}{2L^2}\right) & \text{se } h \neq 0 \end{cases}$
Ornstein-Uhlenbeck	$\gamma(h) = \begin{cases} 0 & \text{se } h = 0 \\ \exp\left(-\sum_i \frac{ h_i }{L_i}\right) & \text{se } h \neq 0 \end{cases}$
Periódica	$\gamma(h) = \begin{cases} 0 & \text{se } h = 0 \\ \exp\left(-\frac{2\left(\sin\left(\frac{h}{2}\right)\right)^2}{L^2}\right) & \text{se } h \neq 0 \end{cases}$
Quadrática racional	$\gamma(h) = \begin{cases} 0 & \text{se } h = 0 \\ (1 + h ^2)^{-\alpha}, \alpha \geq 0, & \text{se } h \neq 0 \end{cases}$

O método Kriging tem como objectivo minimizar o valor da variância σ^2 , que também é chamada de variância de Kriging ou de erro de Kriging, que é dado por:

$$\sigma^2 = \sum_j (z_j - r_j)^2 \quad (3.46)$$

Em que z_j é o valor estimado para o ponto j e r_j é o respectivo valor real. Sabendo que o Kriging considera que pontos próximos têm comportamentos semelhantes, z_j é calculado da seguinte forma:

$$z_j = \sum_i \omega_{ji} p_i \quad (3.47)$$

Que se traduz numa média ponderada pelos pesos ω_{ji} para cada um dos pontos i da amostra recolhida de valores de uma função p_i . Para calcular os pesos ω_{ji} é necessário calcular a matriz de covariância que relaciona os diferentes pontos da amostra, é dada a partir das equações dos semi-variogramas.

$$\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{n1} & \cdots & \gamma_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{j1} \\ \vdots \\ \omega_{jn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{j1} \\ \vdots \\ \gamma_{jn} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \Gamma \cdot \Omega_j = \alpha_j \quad (3.48)$$

Em que $\gamma_{ab} = \gamma(\text{distância}(a, b))$ é, por exemplo, a distância Euclidiana. Resolvendo a equação $\Omega_j = \Gamma^{-1} \cdot \alpha_j$, obtêm-se os pesos ω_{ji} , que finalmente dão origem à solução estimada z_j no ponto j (Fazio and Roisenberg 2013).

O Pseudocódigo 3.4 transcreve a implementação deste método, designado por método Kriging Simples.

```

Determinar matriz de Covariância:
  Para i=1 até n°pontos
    Para j=1 até ao n°pontos
      Calcular h(i,j)=distância(i,j);
      Se h(i,j)=0 então
         $\gamma(i, j) = 0$ 
      Caso contrário
        Calcular  $\gamma(i, j)$ 
      Fim Se
    Fim
  Fim
Determinar pesos  $\Omega_j$ :
  Para i=1 até n° pontos
    Calcular  $\gamma_j$ 
  Fim
Calcular  $\Omega_j = \Gamma^{-1} \cdot \alpha_j$ 
Calcular  $z_j = \sum_i \omega_{ji} \cdot p_i$ 
  
```

Pseudocódigo 3.4.Implementação do método de interpolação Kriging

Contudo, esta abordagem por vezes demonstra-se insuficiente, pelo que existem outras variantes para este método com o objectivo de melhorar os resultados das aproximações.

Com o objectivo de obter a melhor versão do método Kriging, utilizaram-se também as suas versões modificadas Kriging Comum e Kriging Universal.

3.4.1.1 KRIGING COMUM

O Kriging Comum conta com a adição de um parâmetro λ no vector dos pesos a determinar Ω_j . A formulação matemática do Kriging Comum é a seguinte:

$$\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1n} & 1 \\ \cdots & \ddots & \cdots & 1 \\ \gamma_{nn} & \cdots & \gamma_{nn} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{j1} \\ \vdots \\ \omega_{jn} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{j1} \\ \vdots \\ \gamma_{jn} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

Para determinar z_j através do Kriging comum o processo é igual ao Kriging Simples à exceção do cálculo da matriz de covariância e dos pesos Ω_j . O algoritmo utilizado para a aproximação de z_j foi o apresentado no Pseudocódigo 3.5.

```

Determinar matriz de Covariância:
  Para i=1 até n°pontos
    Para j=1 até ao n°pontos
      Calcular h(i,j)=distância(i,j);
      Se h(i,j)=0 então
         $\gamma(i,j) = 0$ 
      Caso contrário
        Calcular  $\gamma(i,j)$ 
      Fim Se
    Fim
  Fim
Covariância(n+1, 1 ..n)=1;
Covariância(1..n, n+1)=1;
Covariância(n+1, n+1)=0;
Determinar pesos  $\alpha_j$ :
  Para i=1 até n
    Calcular  $\gamma_j$ 
  Fim
   $\alpha_j(n+1)=1$ 
Calcular  $\Omega_j = \Gamma^{-1} \cdot \alpha_j$ 
Calcular  $z_j = \sum_i \omega_{ji} \cdot p_i$ 

```

Pseudocódigo 3.5. Implementação do Kriging Comum

Como se pode observar, a implementação desta versão do método Kriging é muito semelhante ao Kriging Simples.

3.4.1.2 KRIGING UNIVERSAL

Uma outra abordagem do método Kriging é o Kriging Universal que, para além do parâmetro λ no vector de pesos, conta também com os valores dos vectores de variáveis na matriz de covariância e também com um peso λ_x associado a cada coordenada, apresentado a seguinte formulação:

$$\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1n} & 1 & x_1 & y_1 \\ \cdots & \ddots & \cdots & 1 & \vdots & \vdots \\ \gamma_{nn} & \cdots & \gamma_{nn} & 1 & x_n & y_n \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & \cdots & x_n & 0 & 0 & 0 \\ y_1 & \cdots & y_n & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{j1} \\ \vdots \\ \omega_{jn} \\ \lambda \\ \lambda_x \\ \lambda_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{j1} \\ \vdots \\ \gamma_{jn} \\ 1 \\ y \\ x \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

O mesmo raciocínio é utilizado para o cálculo da função que interpola as diferentes variáveis. O Pseudocódigo 3.6 ilustra o cálculo de todas as etapas.

```

Determinar matriz de Covariância:
  Para i=1 até n°pontos
    Para j=1 até ao n°pontos
      Calcular h(i,j)=distância(i,j);
      Se h(i,j)=0 então
         $\gamma(i,j) = 0$ 
      Caso contrário
        Calcular  $\gamma(i,j)$ 
      Fim Se
    Fim
  Fim
Covariância(n+1, 1..n)=1;
Covariância[n+2, 1..n]=X;
Covariância[n+3, 1..1]=Y;
Covariância(1..n, n+1)=1;
Covariância(1..n, n+2)=X;
Covariância(1..n, n+3)=Y;
Covariância(n+1..n+3, n+1..n+3)=0;
Determinar pesos  $\alpha_j$ :
  Para i=1 até n
    Calcular  $\gamma_j$ 
  Fim
 $\alpha_j(n+1)=1$ ;
 $\alpha_j(n+2)=x$ ;
 $\alpha_j(n+3)=y$ ;
Calcular  $\Omega_j = \Gamma^{-1} \cdot \alpha_j$ 
Calcular  $z_j = \sum_i \omega_{ji} \cdot p_i$ 

```

Pseudocódigo 3.6. Implementação do Kriging Universal

Também no caso do Kriging Universal a implementação (Pseudocódigo 3.6) apresenta, como seria expectável, semelhanças com as versões anteriores do Kriging Simples e do Kriging Comum.

4 METODOLOGIA

Este capítulo é dedicado ao desenvolvimento da metodologia de trabalho adoptada nesta Dissertação, tendo em vista a apresentação dos respectivos resultados no capítulo seguinte.

4.1 MODELAÇÃO DAS MÁSCARAS DE IMOBILIZAÇÃO

Nesta primeira secção do quarto capítulo será descrito o processo de modelação geométrica das máscaras de imobilização da cabeça e quais foram os critérios para a selecção dos possíveis materiais a serem utilizados (MAR Loja et al. 2018).

4.1.1 EXTRACÇÃO DE INFORMAÇÃO GEOMÉTRICA

4.1.1.1 TOMOGRAFIA COMPUTORIZADA

As tomografias computadorizadas foram realizadas num sistema *Philips Gemini TF 16* com duas espessuras de “fatias” (1mm e 2mm), mantendo constantes outros parâmetros associados ao protocolo de aquisição: 20 mAs, 120kVp, *pitch* de 0,938, matriz de pixéis de 512x512 e 0,5s por rotação.

Conforme se referiu nos fundamentos teóricos, a informação de uma TC encontra-se sob a forma de uma sequência de imagens (formato DICOM) associadas às múltiplas secções que foram consideradas no contexto do protocolo definido para esse tipo de exame. Estas imagens foram de seguida utilizadas para a reconstrução da superfície da cabeça, utilizando um *software freeware ImageJ* (Zain et al. 2017),(Andrey and Boudier 2018). Neste caso a superfície 3D foi obtida através de um *plug-in* para o *ImageJ 3D Viewer* desenvolvido por Benjamin Schmid, que é baseado no algoritmo de reconstrução *marching-cubes*, Loja et al (MA Loja et al. 2018).

Na sequência da reconstrução do modelo 3D da cabeça do fântoma PIXI, essa superfície foi exportada para o *SolidWorks*, para posterior processamento.

4.1.1.2 VARRIMENTO LASER 3D

O outro método de aquisição utilizado foi o varrimento laser 3D (3DLS). Para esse efeito foi utilizado um sistema baseado no princípio de funcionamento por triangulação com uma precisão de 0,127 mm. Este sistema (NextEngine HD) foi parametrizado para utilizar 10 sectores durante a rotação de 360°, com uma densidade de 132 pontos por centímetro quadrado e uma distância focal de médio alcance.

De modo a ter um varrimento que garantisse a aquisição de todas as zonas da cabeça, foram realizados dois processos de aquisição 3D em que se variou a orientação da cabeça no dispositivo de rotação do sistema. As vinte nuvens de pontos decorrentes deste processo foram então alinhadas com vista à obtenção da nuvem final, e da subsequente malha poligonal final. Este processo foi realizado através do *software* específico do sistema *NextEngine*, o *ScanStudio*, Loja et al. (MA Loja et al. 2018).

Na sequência da obtenção desta malha poligonal 3D, a referida superfície foi exportada para o *SolidWorks*.

4.1.2 MODELAÇÃO GEOMÉTRICA

A modelação geométrica das máscaras de imobilização passou essencialmente por três grandes etapas:

- Reconstrução das superfícies da cabeça para os métodos de aquisição por Varrimento Laser 3D e por Tomografia Computorizada;
- Construção de um suporte para a cabeça (reproduzindo uma situação real) de modo a garantir algum conforto ao paciente;
- Modelação de três geometrias diferentes para os modelos obtidos através de ambos os métodos, 3DLS e TC.

4.1.2.1 RECONSTRUÇÃO DA SUPERFÍCIE DA CABEÇA

Para fazer a reconstrução da superfície sólida da cabeça utilizaram-se as funcionalidades *ScanTo3D* do *SolidWorks* em que se recorreu às malhas poligonais obtidas por Loja et al (MA Loja et al. 2018), quer para o caso do 3DLS quer para a TC. Importaram-se as malhas poligonais (formato *.stl*) do 3DLS e da TC para o *SolidWorks* (SW) e utilizaram-se o *MeshPrepWizard* e o *SurfaceWizard* para obter os modelos sólidos das cabeças.

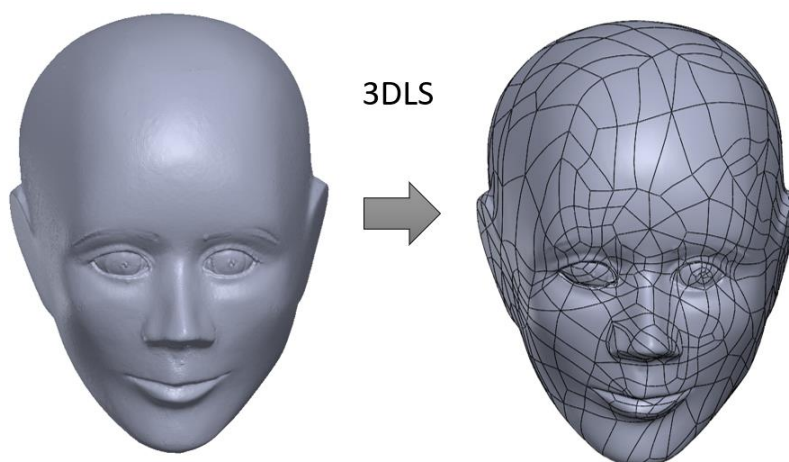


Figura 4.1. Passagem da malha *.stl* ao sólido: 3DLS

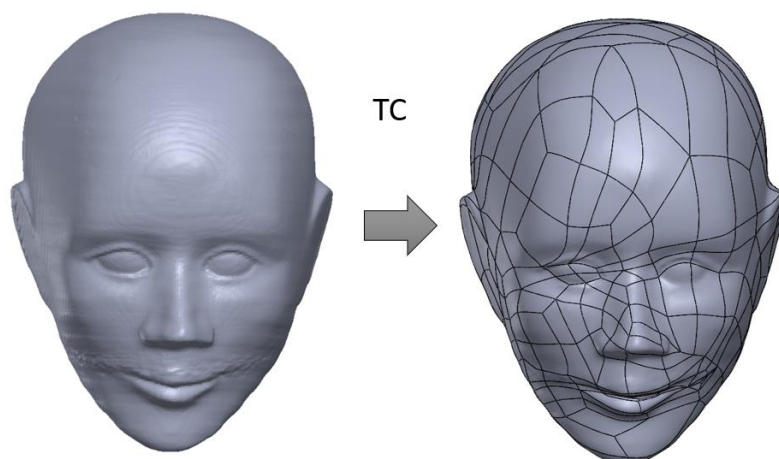


Figura 4.2. Passagem da malha .stl para sólido: TC

Conforme se pode observar nas figuras acima, o detalhe conseguido na superfície reconstruída a partir da nuvem de pontos obtida por varrimento laser 3D é superior ao da superfície obtida a partir das imagens da TC com fatias de 1mm de espessura.

4.1.2.2 CONSTRUÇÃO DE UM SUPORTE PARA A CABEÇA

Numa perspectiva de trazer um melhor conforto ao paciente e também um melhor desempenho das máscaras de imobilização da cabeça, modelou-se um suporte para a cabeça.

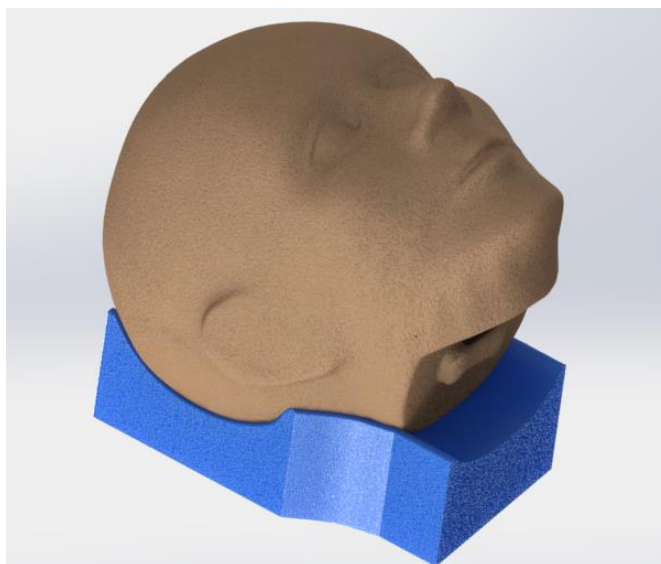


Figura 4.3. Modelo da cabeça encaixado no suporte

O suporte modelado é adequado quer para o ficheiro da TC quer do 3DLS, já que não existem diferenças geométricas significativas nestes dois modelos, como já tinha sido concluído através de estudos estatísticos por Sousa et al (Sousa et al. 2017).

A construção do suporte da cabeça encontra-se descrita com maior detalhe no Apêndice I.

4.1.2.3 MODELAÇÃO DAS DIFERENTES GEOMETRIAS PARA OS DISPOSITIVOS DE IMOBILIZAÇÃO

Para a modelação das máscaras de imobilização começou-se por obter um desenho de base para as três geometrias. Este desenho base foi feito com o mesmo método quer para o modelo computacional da cabeça obtido por 3DLS quer o obtido a partir da TC. Estas geometrias de base estão representadas na Figura 4.4, tendo sido usado um conjunto de funcionalidades que se indicam de modo sumário, quer para a superfície quer para os furos da fixação à mesa de radioterapia.

- Para a superfície: utilizaram-se os comandos de *Intersection Curve (Projection)* para delimitar a área do sólido a utilizar, *Surface Knit* para selecionar as superfícies, *Surface Extrude* para extrudir as superfícies, o comando *Surface Trim* para criar a abertura abaixo do queixo, *Planar Surface* para gerar a base horizontal que conecta com a fixação, *Fillet (Surface)* para o boleado entre a superfície extrudida na vertical e a superfície horizontal da base, e *Delete Face* e *Surface Fill* para reduzir algumas das superfícies excessivamente pequenas;
- Para a fixação: utilizaram-se os comandos *Sweep Boss/Base* para gerar o sólido da fixação e o comando *Hole Wizard* para os furos.

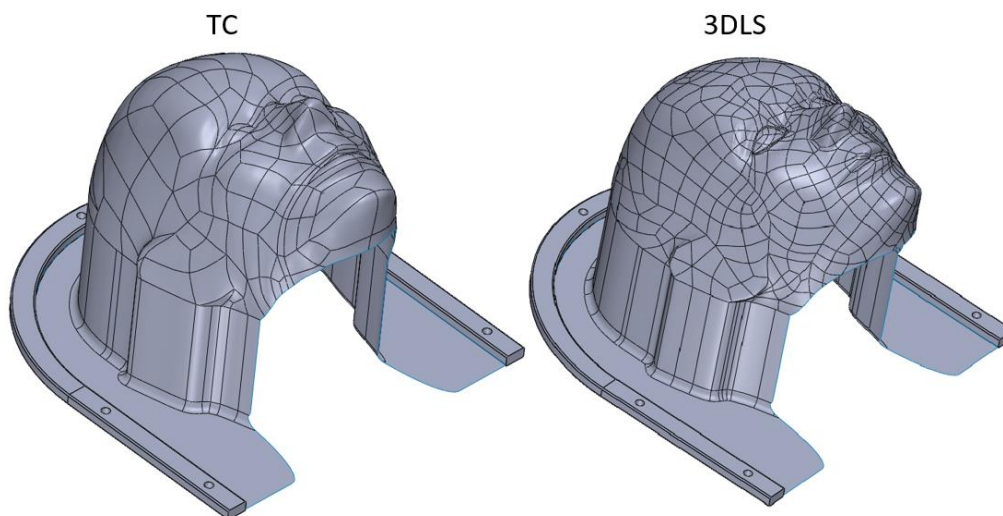


Figura 4.4. Templates para as geometrias das máscaras

Para as geometrias das máscaras utilizou-se apenas o comando *Surface Trim* para dar a forma desejada. As três geometrias estão representadas no caso do Varrimento Laser 3D na Figura 4.5 e no caso da Tomografia Computorizada na Figura 4.6.

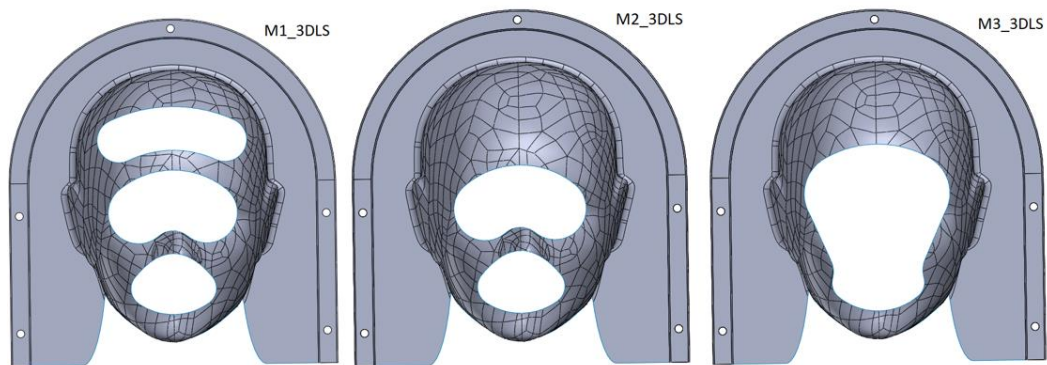


Figura 4.5. Geometrias M1, M2 e M3 do 3DLS

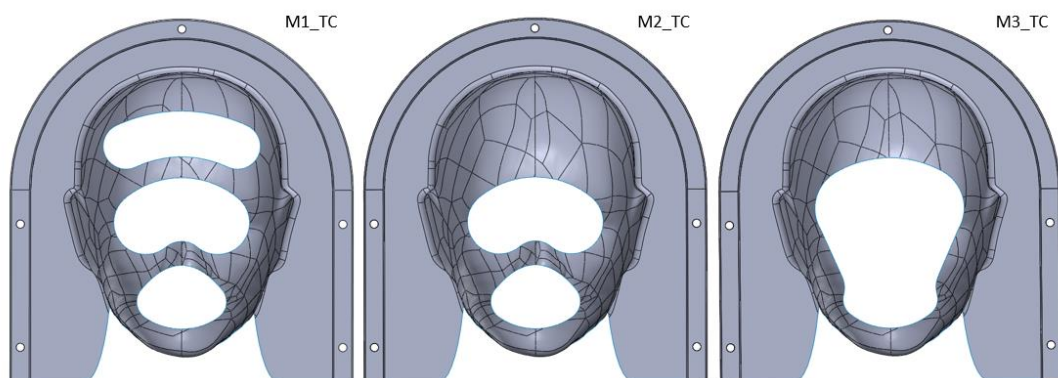


Figura 4.6. Geometrias M1, M2 e M3 da TC

De referir que a selecção destas geometrias teve como duplo objectivo a redução da sensação de claustrofobia sem perda da função de imobilização. A remoção de material, tendo como ponto de partida uma máscara sem qualquer abertura (como acontece actualmente num número significativo de situações) visou retirar material em zonas onde pudesse facilitar a respiração e a manutenção dos olhos abertos se o paciente assim o desejar.

A modelação das máscaras de imobilização encontra-se descrita com maior detalhe no Apêndice I.

4.1.3 SELECÇÃO DE MATERIAIS

Definidas as geometrias das máscaras para futura análise, tornava-se fundamental a definição dos materiais que fossem viáveis para o efeito. Assim, a selecção dos materiais foi feita tendo em consideração três factores principais:

- O ponto de fusão do material deve permitir a sua utilização num processo de impressão 3D;
- O coeficiente de atenuação de radiação deve ser o mais baixo possível. O ideal será um material o mais transparente quanto possível à radiação, devido às condições de

serviço das máscaras em terapêutica por radioterapia, e desejavelmente para diagnóstico em medicina nuclear;

- As propriedades mecânicas do material devem garantir a necessária rigidez e resistência para garantir a imobilização sem exceder valores limite de deformação e de tensão, prevenindo de igual modo a eventualidade de uma rotura frágil.

Face a estes requisitos, foram seleccionados cinco materiais, todos eles termoplásticos, passíveis de serem impressos por uma impressora 3D, com um coeficiente de atenuação de radiação favorável e com características mecânicas consideradas adequadas para a aplicação.

Os materiais escolhidos foram:

- Polimetilmetacrilato (PMMA) – T1;
- Sulfeto de Polifenileno – T2;
- Policarbonato – T3;
- Acrilonitrilo-butadieno-estireno – T4;
- Poliacido láctico (PLA) – T5.

As propriedades destes materiais apresentam-se na Tabela 4.1, onde se evidenciam propriedades mecânicas como o módulo de Young, o coeficiente de Poisson e a tensão de cedência, propriedades relacionadas com a impressão do material como a temperatura de fusão e o nível de tolerância à radiação que garante a permeabilidade do material à radiação. A temperatura de moldação é indicada por uma questão de comparação ao processo de fabrico que hoje em dia é utilizado na fabricação dos dispositivos de imobilização e a massa volúmica para a realização de um estudo de optimização da deformada máxima com um constrangimento de massa.

De notar que a escolha do material T5 é fundamental, já que é o material disponível para a impressão dos protótipos das máscaras de imobilização.

Tabela 4.1. Propriedades dos materiais seleccionados (“Material Property Data - MATWEB” 2017),(Health 2011),(Torres et al. 2015)

Propriedades	ID do Material				
	T1	T2	T3	T4	T5
Módulo de Young, E (GPa)	3,3	4,33	2,36	2,1	3,5
Coeficiente de Poisson, ν	0,43	0,4	0,33	0,35	0,36
Tensão de cedência, σ_{ys} (MPa)	86	122	63,3	40,7	70
Temperatura de fusão (°C)	218	282	302	221	190
Temperatura de moldação (°C)	64,5	135	84,5	59,7	53,8
Massa volúmica, ρ (g/cm ³)	1,19	1,37	1,2	1,05	1,24
Nível de tolerância à radiação, kGy	100	1000	1000	1000	100

Para uma abordagem mais próxima da realidade, para cada um dos materiais foram selecionadas propriedades mecânicas relativas aos materiais extrudidos, já que a impressão 3D comum se trata de um processo de extrusão (“Material Property Data - MATWEB” 2017),(Health 2011),(Torres et al. 2015).

4.2 SIMULAÇÃO DAS MÁSCARAS EM *SOLIDWORKS*

De forma a garantir uma imobilização adequada do paciente bem como a garantir que o desempenho e a integridade das máscaras não seriam comprometidos, foi necessário definir qual o carregamento a utilizar e numa perspectiva de modelação por elementos finitos definir o tipo de elemento a utilizar nas análises a realizar.

4.2.1 DEFINIÇÃO DO CARREGAMENTO A APLICAR

Para a escolha das situações de carga a aplicar recorreu-se ao estudo feito por Almosnino et al. (Almosnino, Pelland, and Stevenson 2010) que indica qual a força máxima exercida pelo pescoço em condições de esforço isométrico (estático) em 5 situações de carregamento diferentes: extensão, flexão, protração, flexão lateral esquerda e flexão lateral direita. Este estudo foi realizado em atletas de competição, pelo que é razoável concluir que se estará a considerar uma situação de sobredimensionamento já que estes atletas eram pessoas fortes e saudáveis.

O movimento de extensão do pescoço não foi considerado neste estudo, já que o sentido deste movimento é o contrário ao da máscara, ou seja, é na direcção da mesa. Os restantes quatro movimentos foram analisados e concluiu-se que o movimento que induz maiores deformações nas máscaras de imobilização da cabeça é a flexão lateral esquerda, sendo assim uma situação de carregamento relevante. Os resultados deste estudo podem ser consultados no Apêndice II.

O outro caso de carregamento selecionado foi o de flexão do pescoço, já que numa situação de agonia é um movimento mais natural para fuga. Os casos de carga estão ilustrados na Figura 4.7 que mostra o movimento relativo da cabeça em relação à base do pescoço.

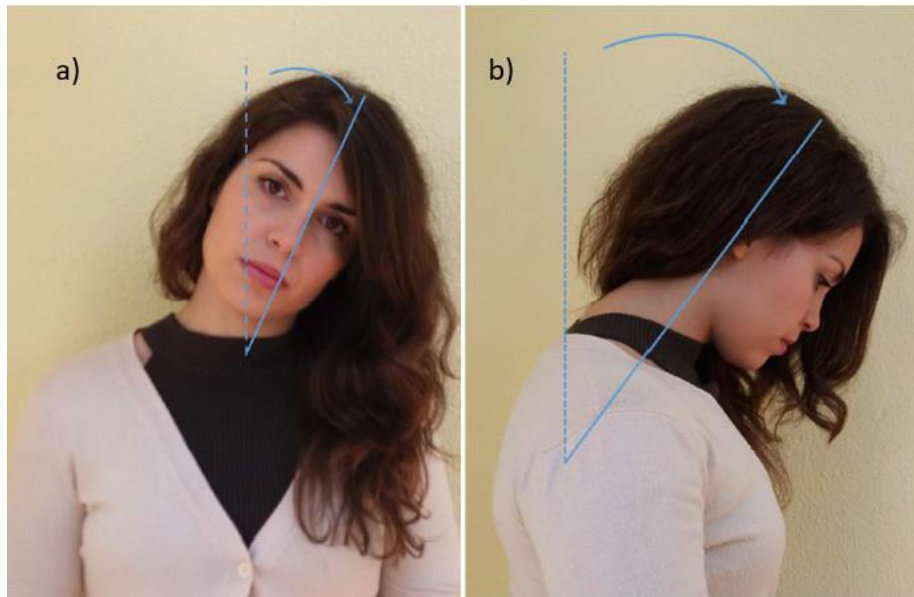


Figura 4.7. Casos de carregamento considerados: a) flexão lateral esquerda do pescoço b) flexão do pescoço (MAR Loja et al. 2018)

No caso da flexão lateral esquerda do pescoço a força aplicada do lado esquerdo da máscara foi de 158,1 N e no caso da flexão do pescoço a força aplicada na frente da máscara foi de 152 N, lembrando que estes valores têm por base o estudo (Almosnino, Pelland, and Stevenson 2010). Para simular o esforço real exercido na máscara, estas forças foram aplicadas sob a forma de carga distribuída com uma variação linear desde o topo da cabeça até ao queixo dos modelos sólidos da cabeça.

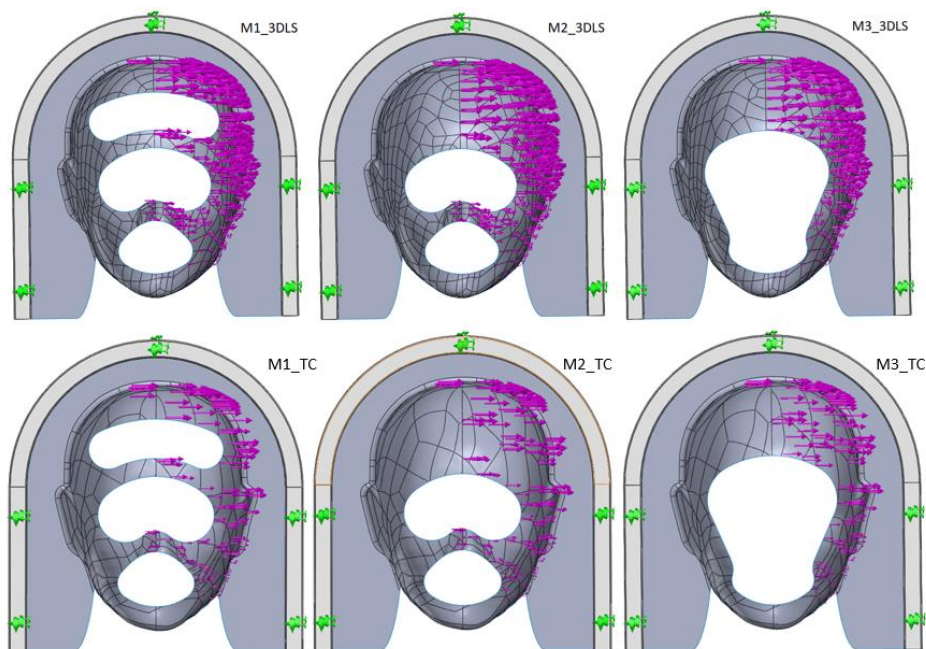


Figura 4.8. Diagramas de corpo livre da flexão lateral esquerda do pescoço

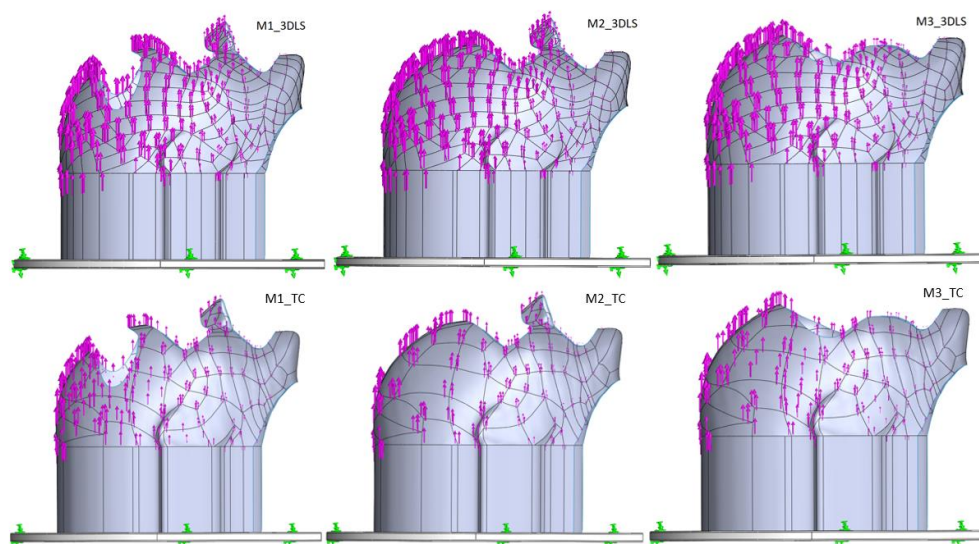


Figura 4.9. Diagramas de corpo livre da flexão do pescoço

Em termos de constrangimentos, os furos da fixação foram considerados como encastramentos. A ligação entre a fixação e a base da máscara foi considerada como uma soldadura, já que no processo de fabrico por impressão 3D existe continuidade do material. A Figura 4.8 e a Figura 4.9 mostram os diagramas de corpo livre para os dois casos de carga, a flexão lateral esquerda do pescoço e a flexão do pescoço, respectivamente.

4.2.2 ESCOLHA DO TIPO DE ELEMENTO E DA PARAMETRIZAÇÃO DO SW A UTILIZAR

Quanto aos tipos de elemento finito, o *SolidWorks* tem elementos 1D tipo viga, 2D tipo casca e 3D tipo sólido. O elemento 1D é um elemento de apenas uma dimensão, o elemento 2D é do tipo triangular e o elemento 3D é tetraédrico, e para todos estes elementos o *SolidWorks* permite que estes elementos sejam lineares ou quadráticos em termos dos polinómios das suas funções de forma (Systemes 2018). No que respeita à teoria utilizada para resolução dos problemas de elementos finitos o *SolidWorks* utiliza a teoria clássica de Kirchhoff, já que para problemas 2D assume apenas três deformações (Akin 2009).

Tendo em conta que as máscaras de imobilização têm tanto elementos do tipo casca (a máscara) como do tipo sólido (a fixação), o *SolidWorks* nestes casos faz com que no limite de contacto entre os dois tipos de elementos diferentes os nós sejam coincidentes (Systemes 2018). Assim sendo os tipos de elementos utilizados nas máscaras foram de casca triangular e sólido tetraédrico, ambos quadráticos.

Para determinar qual a parametrização mais indicada a utilizar fez-se um estudo de convergência para apenas uma das geometrias, de modo a perceber qual seria o mais adequado para este caso de estudo.

Os resultados dos estudos de convergência para uma máscara utilizando diferentes parametrizações encontram-se no Apêndice III. A parametrização escolhida para simulação no *SolidWorks* foi o *Standard* com a opção *Curvature-Based Mesh* que faz um melhor ajuste do tamanho dos elementos de acordo com os raios de curvatura do objecto a estudar.

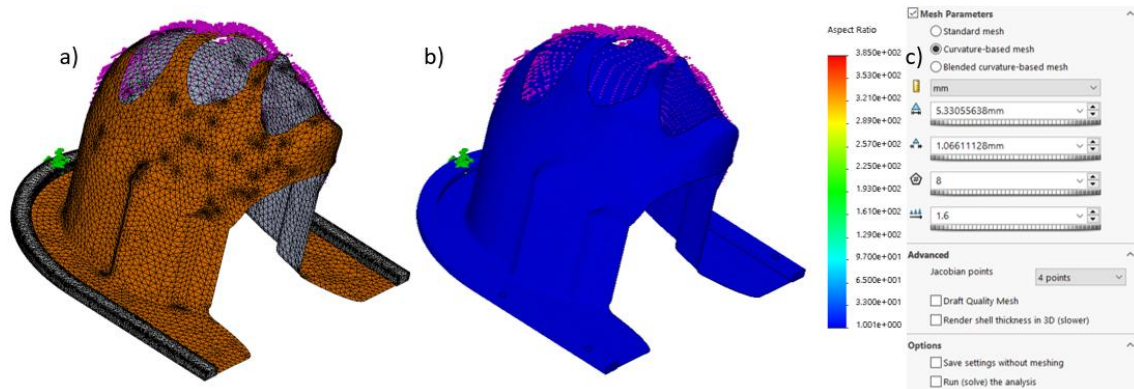


Figura 4.10. Malha MEF do *SolidWorks* seleccionada. a) Aspecto da malha; b) Relação de aspecto dos elementos; c) Parametrização da malha.

Esta malha (Figura 4.10) assume 4 pontos na matriz Jacobiana, um rácio de crescimento entre elementos adjacentes de 1,6 e a uma relação de aspecto constante em quase toda a malha, à excepção de uma zona em que, não se verificam valores nem de tensão nem de deslocamentos máximos.

4.3 ANÁLISE ESTÁTICA DE PLACAS

4.3.1 TEORIA DE KANT

Para proceder à análise linear estática de placas cujo objectivo nesta dissertação é o de contribuir para a verificação da validade e subsequente implementação de uma metodologia, foi desenvolvida uma aplicação de elementos finitos em *Matlab*, para análise de placas quadradas com malhas rectangulares baseada na teoria de deformação de corte de ordem superior (*High-order Shear Deformation Theory*, HSDT) devida a Kant (Ferreira 2010). Esta aplicação permite avaliar os deslocamentos em cada um dos nós da placa discretizada bem como avaliar as suas tensões.

De modo a ilustrar a estrutura da aplicação apresentam-se os dois pseudocódigos que descrevem de forma sistemática e tão sintética quanto possível, a construção da malha rectangular e a análise de elementos finitos.

Função [nó, elemento]=MalhaRectangular(Lx, Ly, n°elemX, n°elemY)

Calcular:

$\Delta x, \Delta y, N^\circ$ nós X, N° nós Y

Para j=1 até N° nós Y

Para i=1 até N° nós X

Calcular coordenadas (x,y) do nó

nó = [nó; x y]

Fim

Fim

Para j=1 até n°elemY

Para i=1 até n°elemX

Calcular as conectividades:

$i1 = i + (j - 1) \cdot N^\circ$ nósX

$i2 = i1 + 1$

$i3 = i2 + N^\circ$ nósX

$i4 = i1 + N^\circ$ nósX

elemento=[elemento; i1 i2 i3 i4]

Fim

Fim

Fim

Pseudocódigo 4.1. Implementação da função Malha Rectangular

A construção desta malha de elementos finitos rectangular pode ser ilustrada, a título exemplificativo, pela Figura 4.11 que representa uma malha com 4 elementos segundo o eixo X e 4 elementos segundo o eixo Y.

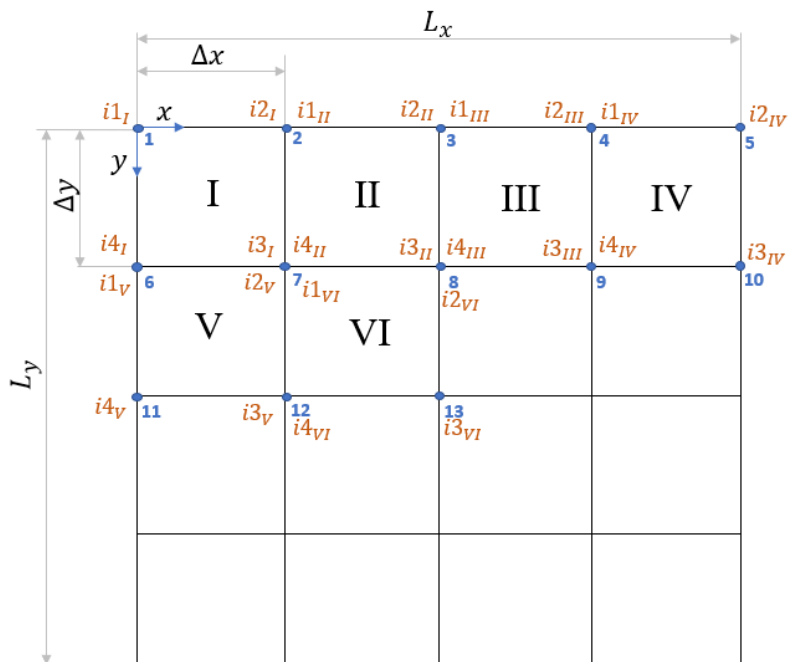


Figura 4.11. Esquema de construção da malha rectangular de elementos finitos

Apresentado o Pseudocódigo 4.1, que descreve a função que define a criação da malha rectangular apresenta-se a seguir o pseudocódigo que define a resolução do problema de elementos finitos.

Para maior facilidade na apresentação deste pseudocódigo, optou-se por subdividi-lo. A parte I (Pseudocódigo 4.2) do pseudocódigo reflete o cálculo da matriz de rigidez elástica de membrana e flexão. Já a parte II (Pseudocódigo 4.3) reflete o cálculo da matriz de rigidez elástica de corte e a matriz de rigidez total, a imposição das condições de fronteira e a solução do problema.

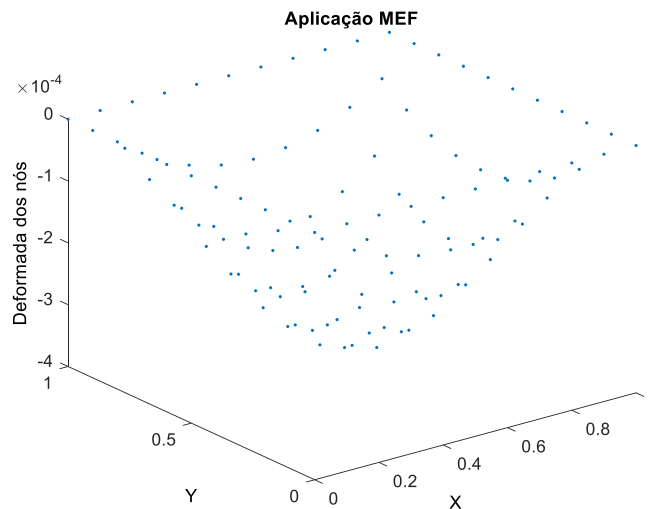


Figura 4.12. Plot da aplicação MEF da placa quadrada

No final de uma corrida, esta aplicação devolve um gráfico onde para cada nó do domínio discretizado, se faz corresponder a respectiva deformada transversal, como se pode ver na Figura 4.12.

Definir as variáveis P, E, ν , ρ , $L_x=L_y=L$, h, I, n°elemX, n°elemY, C (matriz de elasticidade à flexão), C_c (matriz de elasticidade ao corte)

[nó, elemento]=MalhaRectangular($L_x, L_y, n^\circ\text{elemX}, n^\circ\text{elemY}$)

Definir vectores de coordenadas xx, yy

Inicialização:

Vectores: n°nós, n°elementos, f e U

Matrizes: K e M

Q=Quadratura com dois pontos de Gauss

W=[1,1,1,1]

Para e=1 até n°elementos (ciclo para K de flexão)

ind=índice dos nós do elemento e

indB=índice dos gdl's de e

nn=n°nós de e

Para q=1 até dimensão(W,1) (ciclo de quadratura)

pt é o vector do ponto de Gauss

wt é o peso de Gauss

$\xi = pt(1)$ e $\eta = pt(2)$ (coordenadas naturais)

N e $\frac{\partial N}{\partial \xi}$ (funções de forma e derivadas)

J=Cálculo da matriz Jacobiana

invJ=Cálculo do inverso da matriz Jacobiana

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial \xi} \cdot invJ$$

Cálculo de Bf (flexão de 1ª ordem)

Cálculo de Bf* (flexão de 3ª ordem)

Cálculo de Bm (membrana)

Cálculo da matriz de rigidez K (parte de flexão)

$$K(indB, indB) = (Bf^T \cdot I \cdot Bf + Bf^T \cdot h^{\frac{5}{80}} \cdot Bf^* + Bf^{*T} \cdot h^{\frac{5}{80}} \cdot Bf + Bf^{*T} \cdot h^{\frac{7}{448}} \cdot Bf^* + Bm^T \cdot h \cdot Bm) \cdot C \cdot W(q) \cdot \det(J)$$

Vector de carga no ponto de quadratura

$$f(ind)=f(ind)+N.P.\det(J).wt$$

Fim

Fim

Bloco A

Matriz Kc com quadratura de 1 ponto

Q=[0 0];W[4];

Para e=1 até n°elementos

ind=índice dos nós do elemento e

indB=índice dos gdl's de e

nn=n° de nós de e

Para q=1 até dimensão(W)

Bloco A

Bc corte de 1ª ordem

Bc* corte de ordem superior

Cálculo da matriz de rigidez K (flexão+corte)

$$K(indB, indB) = K(indB, indB) + (Bc^T \cdot h \cdot Bc + Bc^T \cdot 3 \cdot I \cdot Bc^* + Bc^{*T} \cdot 3 \cdot I \cdot Bc + Bc^{*T} \cdot 9 \cdot h^{\frac{5}{80}} \cdot Bc^*) \cdot Cc \cdot W(q) \cdot det(J)$$

Fim

Fim

Imposição das condições de fronteira (p.ex. placa encastrada)

fixw = encontrar nós(xx é 0, xx é Lx, yy é 0 e yy é Ly)

fixθx = fixθy = fixθx = fixθy* = fixu = fixv = fixw*

DofCf = [fixw; fixθx+n°nós; fixθy+2n° nós; fixθx*+3n°nós; fixθy*+4n°nós; fixu+5n°nós; fixv+6n°nós]

DofActivos = Sequencia 1 até n°nós – DofCf

Solução:

$$U = \frac{K(DofActivos, DofActivos)}{f(DofActivos)}$$

U*=zeros(n°nós,1);

U*(DofActivos)=U

Plot deformada

ws=sequencia 1 até n° nós

Calcular D

$$def = \frac{U^*(ws) \cdot D}{L^4}$$

Plot3D(xx,yy,def)

Pseudocódigo 4.3. Implementação FEM placa quadrada - Parte II

Para concluir esta sub-secção, é de notar que os resultados da deformada transversal são apresentados de forma adimensionalizada, através da utilização do multiplicador

$def = \frac{U^*(ws) \cdot D}{L^4}$ que querendo pode ser eliminado.

4.3.2 ANÁLISE DE PLACAS FINAS PELO MÉTODO DE NAVIER

O método de Navier foi também utilizado para a obter a equação da deformada transversal de uma placa fina bem como o seu valor máximo em função da espessura da

referida placa. Esta equação foi utilizada directamente nos algoritmos de optimização, enquanto função objectivo, sendo a espessura a variável de projecto.

As características da placa são:

Tabela 4.2. Características da Placa (método de Navier)

Características da Placa	
Aresta a	100 mm
Aresta b	100 mm
Carregamento P	200 N
Material	T2

Para a determinação desta função a minimizar, fez-se um estudo de convergência ao n° de termos a utilizar nas séries duplas de Fourier que garantissem um carregamento transversal que se possa assumir como uniforme.

4.4 OPTIMIZAÇÃO

Esta sub-secção do quarto capítulo destina-se à descrição das metodologias adoptadas nos estudos de optimização efectuados ao longo desta Dissertação.

4.4.1 TESTES AOS ALGORITMOS META-HEURÍSTICOS

Nesta subsecção encontram-se alguns dos testes que foram feitos aos algoritmos meta-heurísticos de modo a ser possível tirar o máximo proveito de cada um deles.

4.4.1.1 APLICAÇÃO DE FUNÇÕES DE TESTE

Para a verificação do bom funcionamento de cada um dos algoritmos de optimização meta-heurísticos considerou-se um conjunto de diferentes funções de teste, relativamente às quais se pretendeu determinar o respectivo mínimo global.

As funções de teste escolhidas foram as funções *sphere*, de Griewank, de Schwefel e de Rastrigin apresentadas da Tabela 4.3 à Tabela 4.6 onde estão indicadas as suas expressões, o espaço de pesquisa de cada uma (domínio da função), a velocidade máxima e mínima (para os casos do PSO e PSO restringido) e o valor do mínimo global.

Para a apresentação dos gráficos das funções fez-se a adaptação de um código m-file. disponibilizado em (Alroomi 2015).

Tabela 4.3. Definição da função *sphere*

Nome da função	<i>sphere</i>
Função	$f(x) = \sum_{i=1}^D x_i^2$
Espaço de pesquisa	$[-100, \dots, 100]^D$
[Vmin, Vmax]	$[-100, \dots, 100]$
Fmin	0
X^*	$[0, \dots, 0]$

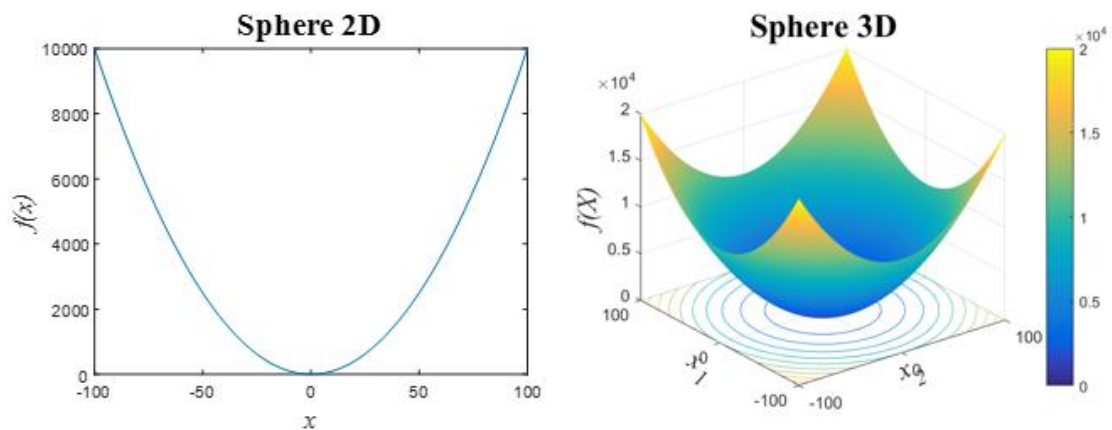


Figura 4.13. Representações gráficas 2D e 3D da função *sphere*

A função *sphere* é uma função unimodal, não apresentando mínimos locais como é possível ver na representação gráfica da Figura 4.13.

Tabela 4.4. Definição da função de Griewank

Nome da função	Griewank
Função	$f(x) = \frac{1}{4000} \sum_{i=1}^D x_i^2 - \prod_{i=1}^D \cos\left(\frac{x_i}{\sqrt{i}}\right) + 1$
Espaço de pesquisa	$[-600, \dots, 600]^D$
[Vmin, Vmax]	$[-600, \dots, 600]$
Fmin	0
X^*	$[0, \dots, 0]$

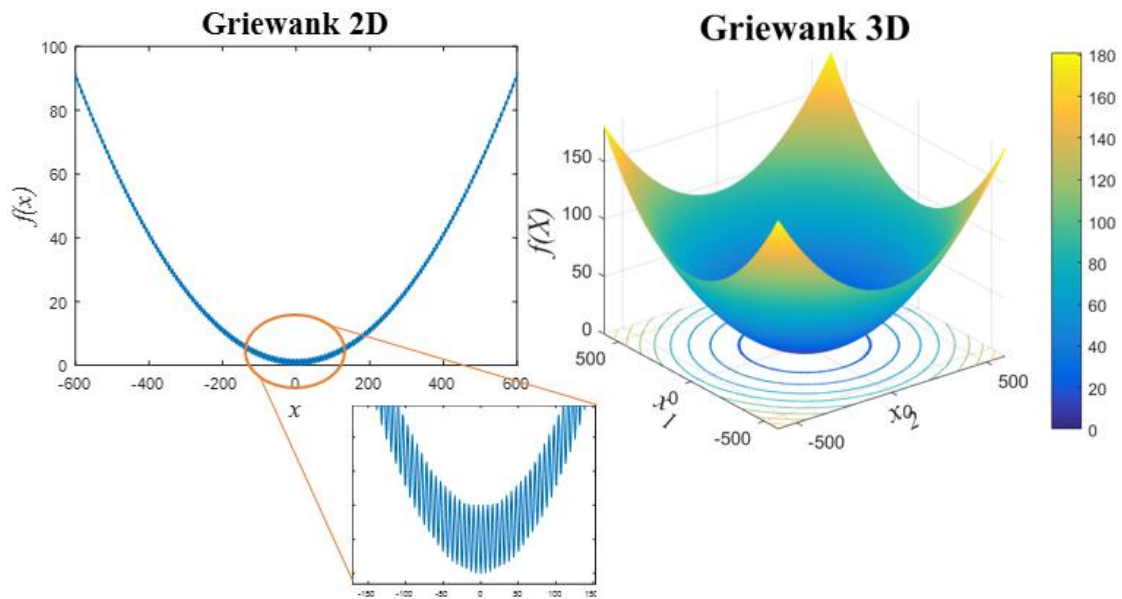


Figura 4.14. Representações gráficas 2D e 3D da função de Griewank

Como se pode observar na Figura 4.14, a função de Griewank 2D é uma função contínua, porém possui vários mínimos locais como é possível observar em zoom, ao contrário da da função *sphere*, para além do seu mínimo global.

Tabela 4.5. Definição da função de Schwefel

Nome da função	Schwefel
Função	$f(x) = \sum_{i=1}^D [-x_i \cdot \sin(\sqrt{ x_i })]$
Espaço de pesquisa	$[-300, \dots, 500]^D$
[Vmin, Vmax]	$[-300, \dots, 500]$
Fmin	0
X^*	$[420.9687, \dots, 420.9687]$

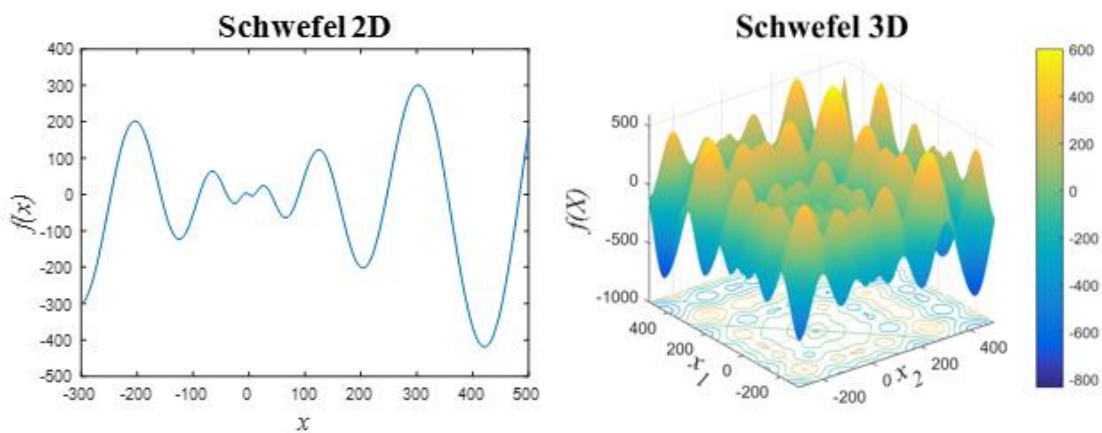


Figura 4.15. Representações gráficas 2D e 3D da função de Schwefel

A função de Schwefel apresenta vários mínimos locais como se pode observar nas representações gráficas da Figura 4.15.

Tabela 4.6. Definição da função de Rastrigin

Nome da função	Rastrigin
Função	$f(x) = \sum_{i=1}^D (x_i^2 - 10 \cos(2\pi x_i) + 10)$
Espaço de pesquisa	$[-5.12, \dots, 5.12]^D$
[Vmin, Vmax]	$[-5.12, \dots, 5.12]$
Fmin	0
X^*	$[0, \dots, 0]$

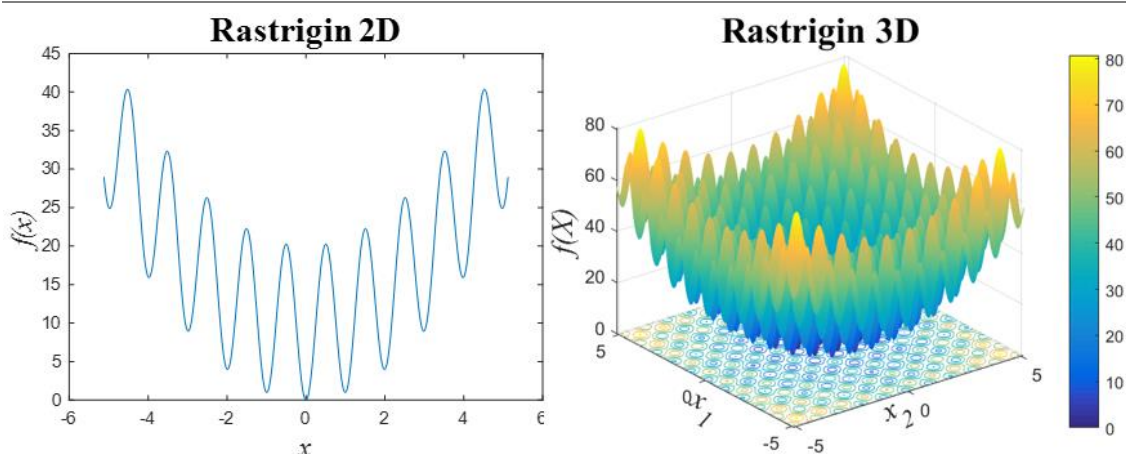


Figura 4.16. Representações gráficas 2D e 3D da função de Rastrigin

Tal como as funções de Griewank e de Schwefel, a função de Rastrigin também apresenta mínimos locais como se pode ver na Figura 4.16.

A utilização de funções de teste multimodais é fundamental para se poder tirar conclusões acerca dos algoritmos de optimização implementados, e perceber se a aplicação dos mesmos à resolução do problema de optimização é aplicável em cada caso.

4.4.1.2 TESTES AO PARÂMETRO B DO WOA

O parâmetro b do sistema de equações 3.43 define a forma da espiral ascendente gerada pelas baleias-jubarte, isto é, se num sistema de coordenadas (x,y,z) se se aumentar o valor de z (diminuir a profundidade) o raio da espiral é reduzido com maior ou menor intensidade.

Este parâmetro regula a velocidade com que este algoritmo vai convergir, mas é necessário encontrar um equilíbrio para não se incorrer numa situação de convergência precoce e assim “ficar preso” a um mínimo local, em vez de se detectar o pretendido mínimo global de uma dada função objectivo. Um raciocínio análogo é aplicável caso o problema de optimização seja um problema de maximização.

Por não existir indicação relativamente aos valores a utilizar, fez-se um estudo preliminar onde se variou o parâmetro no conjunto de valores $b=\{0.125, 0.25, 0.5, 0.75,$

1, 1.25}. Para este efeito, utilizou-se a função de Schwefel, já que foi a função para a qual o desvio-padrão sofreu menos alterações nos testes ao algoritmo, revelando ser uma função que apresenta uma convergência mais lenta e uma maior dispersão de valores. Considerou-se assim que esta função seria a mais indicada para este estudo em que se pretende averiguar qual o valor de b que garantirá uma boa exploração do espaço de pesquisa sem comprometer a velocidade da convergência. A Figura 4.17 apresenta as representações gráficas da espiral logarítmica quando b assume o valor inferior e superior do conjunto de valores atrás referido.

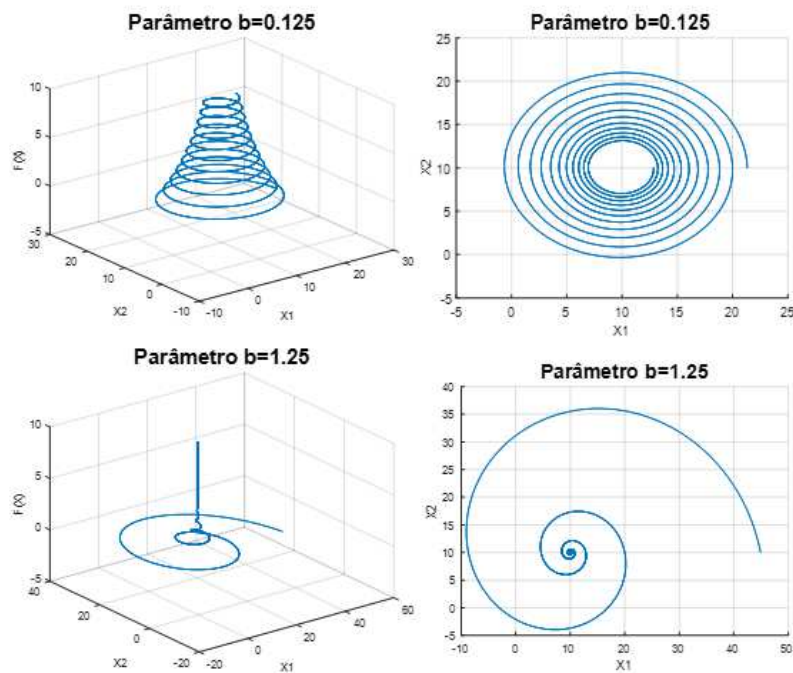


Figura 4.17. Variação da forma da espiral logarítmica para $b=0,125$ e $b=1,25$

Os testes feitos ao parâmetro b encontram-se no Apêndice VI. Cada valor de b foi testado em 10 corridas com 150 iterações. Nestes testes feitos ao algoritmo foi possível identificar que os gráficos da dispersão dos elementos da última população apresentavam uma menor dispersão de resultados de $F(X^*)$ e um menor desvio-padrão no final de cada corrida, utilizando o conjunto de valores $b=\{0.125,0.25,0.5\}$, tendo estes valores de b sido estudados com mais detalhe.

Para decidir com mais segurança, fizeram-se 5 corridas da função de Schwefel para cada um destes valores de b com 300 iterações. Os resultados demonstraram-se inconclusivos, tendo então sido escolhido o valor de $b=0.25$ que é o valor central do intervalo de valores $[0.125,0.5]$.

4.4.2 OPTIMIZAÇÃO EM AMBIENTE *SOLIDWORKS*

O software *SolidWorks* possui uma opção de simulação designada por *Design Study* que permite fazer estudos de optimização utilizando variáveis discretas. Isto porque o *Design Study* considera que as variáveis de projecto assumem valores discretos dentro dos respectivos domínios.

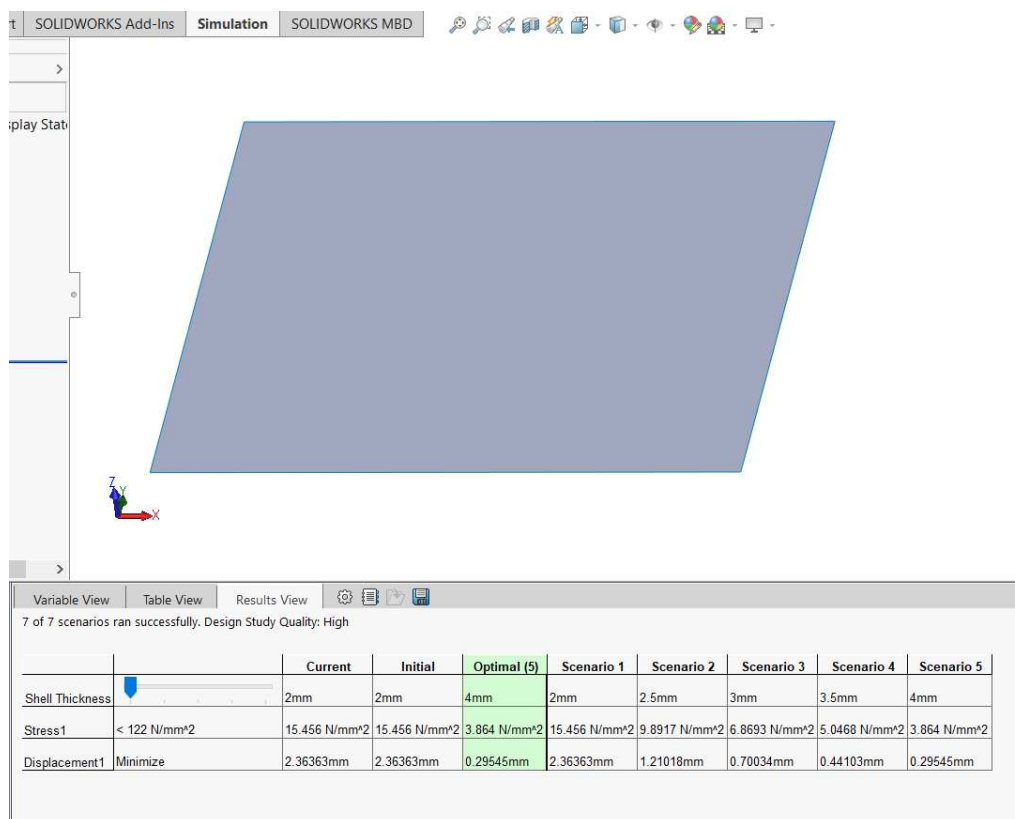


Figura 4.18. Ambiente do *Design Study* do *SolidWorks*

Para os casos que foram objecto de estudo, pretendeu-se minimizar o deslocamento máximo ocorrido, em função da espessura, considerando para além dos constrangimentos laterais associados aos domínios do espaço de variáveis, um constrangimento comportamental relacionado com a tensão de cedência do material. A Figura 4.18 mostra o ambiente do *Design Study* do *SolidWorks*.

5 DISCUSSÃO DE RESULTADOS

Estabelecida a metodologia, foram recolhidos resultados associados às diferentes etapas em que este trabalho se estruturou. Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos nos diferentes estudos e a sua respectiva discussão.

5.1 ESTUDOS DE CONVERGÊNCIA

Com os modelos geométricos das diferentes máscaras de imobilização gerados no *SolidWorks* procedeu-se na fase seguinte à geração das respectivas malhas de elementos finitos. Em qualquer dos casos e de modo a garantir a qualidade dos resultados começaram por ser realizados estudos de convergência.

Estes estudos visaram garantir que as malhas de elementos finitos geradas pelo *SolidWorks* para análise de cada uma das máscaras, assegurassem a inexistência de singularidades geométricas, o que comprometeria os resultados a obter. Para este efeito foi utilizado o material T1 que possui uma tensão de cedência de 86 MPa, e considerada uma espessura de 4 mm, em cada uma das máscaras para evitar problemas de grandes deformações. A situação de carga considerada foi a de flexão lateral esquerda do pescoço. Os parâmetros analisados foram o valor máximo da tensão equivalente de von Mises e o deslocamento máximo.

Como é possível observar pela Figura 5.1 e pela Figura 5.2, os três modelos referentes às geometrias obtidas por TC convergiram quer em termos de tensões máximas equivalentes quer em termos de deslocamento máximo. Os valores obtidos para cada malha podem ser observados na Tabela 5.1 para a M1_TC, na Tabela 5.2 para a M2_TC e na Tabela 5.3 para a M3_TC.

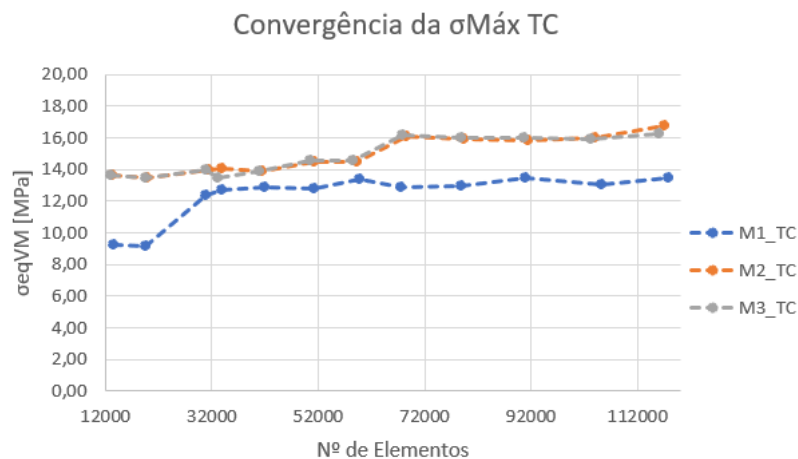


Figura 5.1. Gráfico de convergência da tensão máxima equivalente de VM da TC

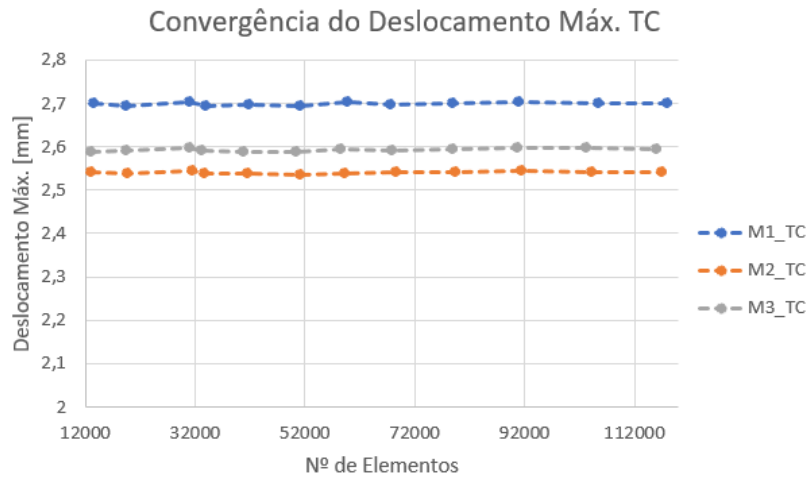


Figura 5.2. Gráfico de convergência do deslocamento máximo da TC

Para complementar os resultados do estudo de convergência, e para ilustrar as distribuições de tensões e de deformações para a última malha de elementos finitos selecionada para cada uma das máscaras, apresentam-se de igual modo as correspondentes figuras (extraídas de *plots* do SW).

Tabela 5.1. Resultados do estudo de convergência da M1_TC

Nº de Elementos	M1_TC	
	σ_{eqVM} [MPa]	Deslocamento Máx. [mm]
13439	9,25	2,699
19466	9,18	2,695
30963	12,38	2,704
33998	12,69	2,694
41842	12,86	2,698
51264	12,77	2,695
59789	13,37	2,702
67636	12,90	2,698
78933	12,97	2,699
90933	13,43	2,703
105376	13,08	2,699
117953	13,49	2,699

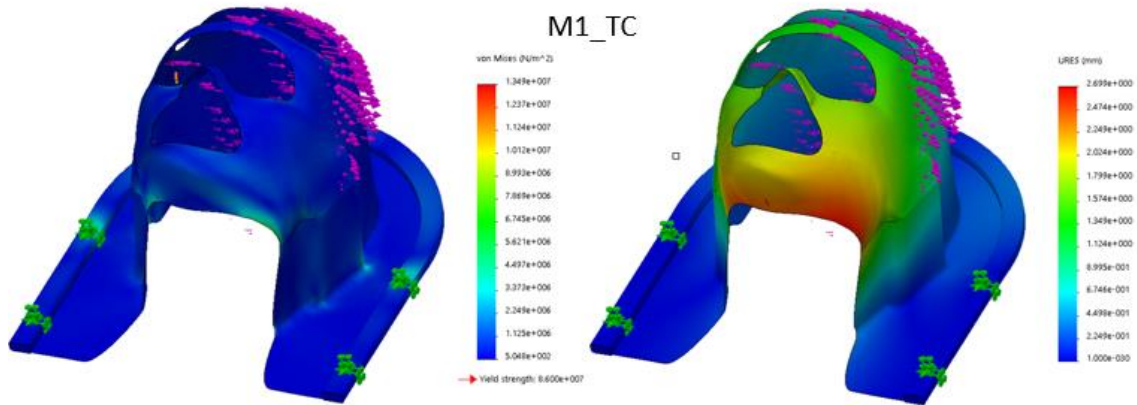


Figura 5.3. Distribuição de tensões e deslocamentos na M1_TC

Tabela 5.2. Resultados do estudo de convergência da M2_TC

Nº de Elementos	M2_TC	
	σ_{eqVM} [MPa]	Deslocamento Máx. [mm]
13181	13,65	2,541
19763	13,50	2,537
31386	13,97	2,546
33777	14,03	2,538
41482	13,93	2,538
51113	14,48	2,536
59180	14,49	2,539
68603	16,06	2,540
79501	15,90	2,541
91577	15,87	2,543
104142	16,00	2,540
117120	16,79	2,540

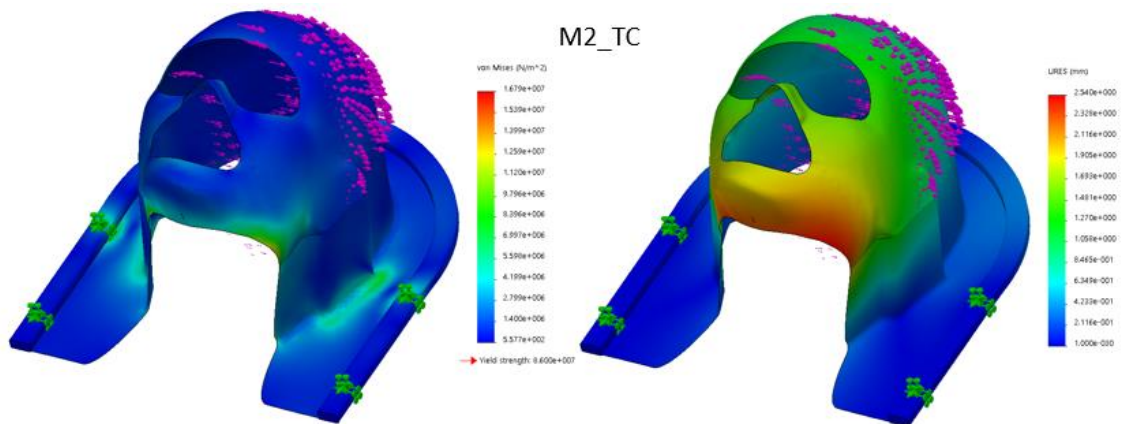


Figura 5.4. Distribuição de tensões e deslocamentos na M2_TC

Tabela 5.3. Resultados do Estudo de Convergência M3_TC

Nº de Elementos	M3_TC	
	σ_{eqVM} [MPa]	Deslocamento Máx. [mm]
12959	13,62	2,589
19442	13,51	2,590
30894	14,01	2,597
33211	13,47	2,591
40852	13,86	2,589
50528	14,54	2,589
58561	14,56	2,594
67849	16,21	2,590
78819	16,03	2,593
90612	16,04	2,597
103318	15,92	2,596
116043	16,24	2,593

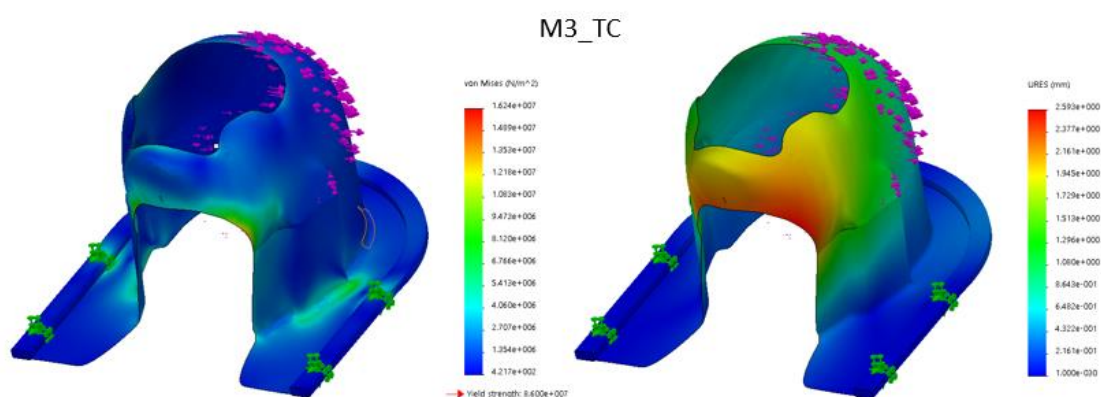


Figura 5.5. Distribuição de tensões e deslocamentos na M3_TC

Para o caso das máscaras obtidas com a superfície do 3DLS, a convergência também se verificou nos dois critérios. A Figura 5.6 representa a convergência das máscaras do 3DLS para o critério de resistência mecânica (considerando a tensão equivalente máxima) e a Figura 5.7 a convergência para o critério de rigidez.

À semelhança do que foi efectuado relativamente aos valores respeitantes às máscaras TC, também para as máscaras 3DLS se apresentam os respectivos valores sob a forma tabular. Assim a Tabela 5.4 está associada à máscara M1_3DLS, a Tabela 5.5 à M2_3DLS e a Tabela 5.6 à máscara M3_3DLS, acompanhadas de igual modo pelas respectivas representações gráficas das distribuições da tensão equivalente de von Mises e dos deslocamentos resultantes.

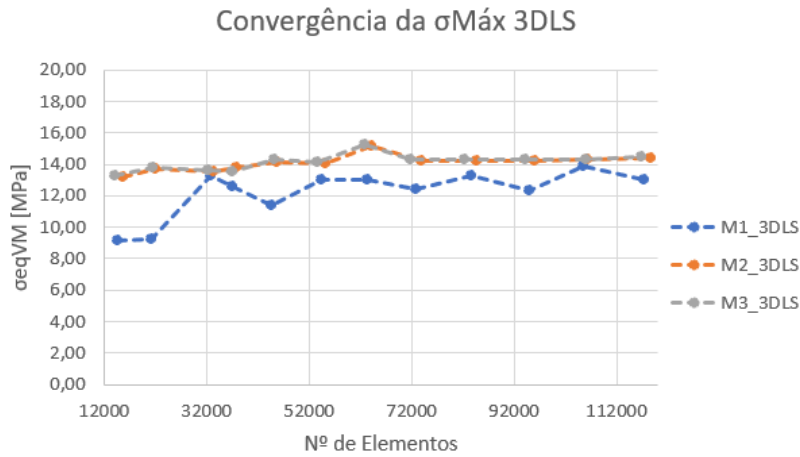


Figura 5.6. Gráfico de convergência da tensão máxima equivalente de VM do 3DLS

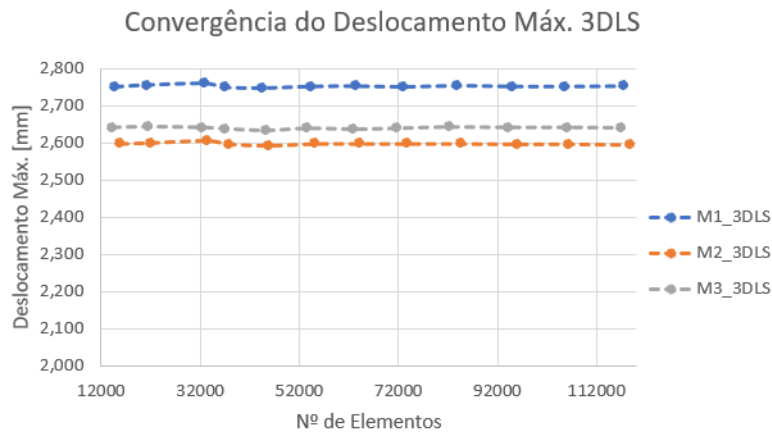


Figura 5.7. Gráfico de convergência do deslocamento máximo do 3DLS

Tabela 5.4. Resultados do estudo de convergência da M1_3DLS

Nº de Elementos	M1_3DLS	
	σ_{eqVM} [MPa]	Deslocamento Máx. [mm]
14760	9,14	2,750
21259	9,25	2,755
32852	13,24	2,759
37122	12,61	2,749
44603	11,35	2,747
54417	13,04	2,751
63299	13,06	2,752
72981	12,42	2,750
83768	13,29	2,753
95064	12,32	2,751
105540	13,84	2,751
117520	13,03	2,752

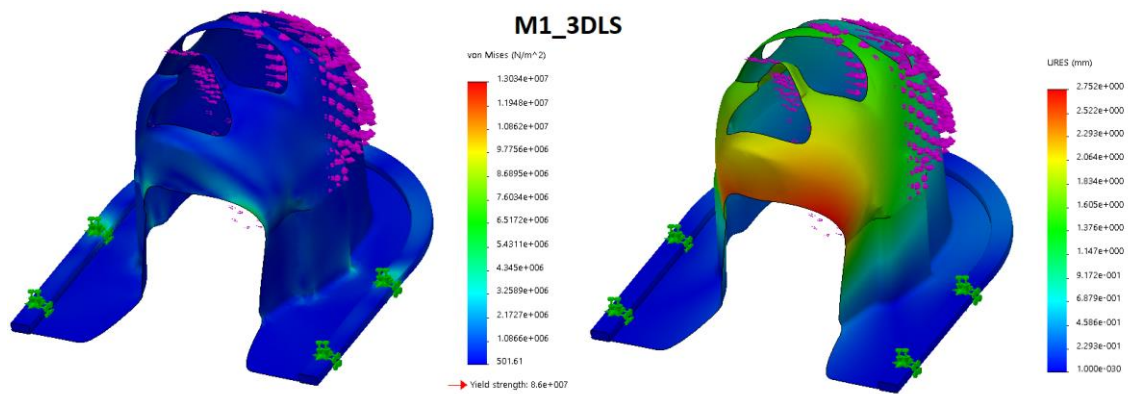


Figura 5.8. Distribuição de tensões e deslocamentos na M1_3DLS

Tabela 5.5. Resultados do estudo de convergência da M2_3DLS

Nº de Elementos	M2_3DLS	
	σ_{eqVM} [MPa]	Deslocamento Máx. [mm]
15674	13,22	2,597
21895	13,67	2,600
33282	13,55	2,606
37774	13,79	2,596
45832	14,15	2,592
55235	14,09	2,597
64085	15,20	2,597
73822	14,26	2,597
84713	14,20	2,597
95956	14,26	2,596
106417	14,33	2,596
118774	14,36	2,594

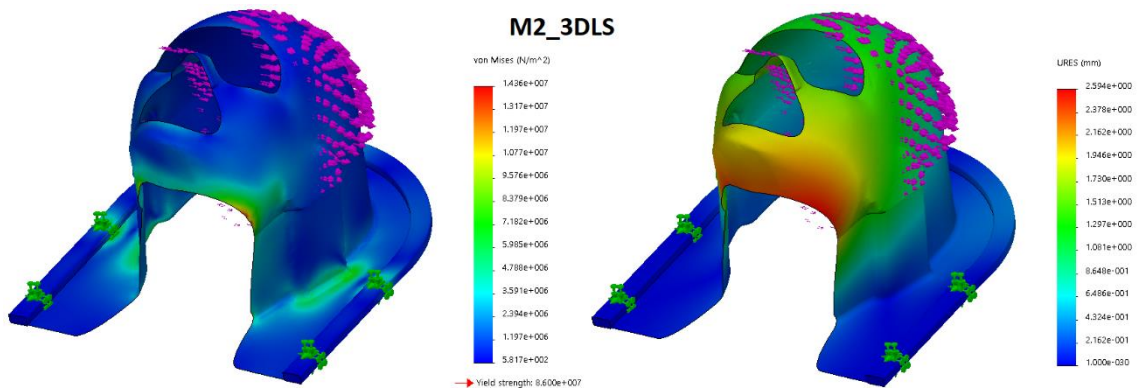


Figura 5.9. Distribuição de tensões e deslocamentos na M2_3DLS

Tabela 5.6. Resultados do estudo de convergência da M3_3DLS

Nº de Elementos	M3_3DLS	
	σ_{eqVM} [MPa]	Deslocamento Máx. [mm]
14131	13,32	2,641
21559	13,80	2,643
32392	13,58	2,641
36992	13,54	2,638
45213	14,29	2,634
53624	14,13	2,639
62973	15,26	2,637
71734	14,27	2,639
82257	14,32	2,642
94224	14,31	2,641
106064	14,33	2,641
116971	14,52	2,640

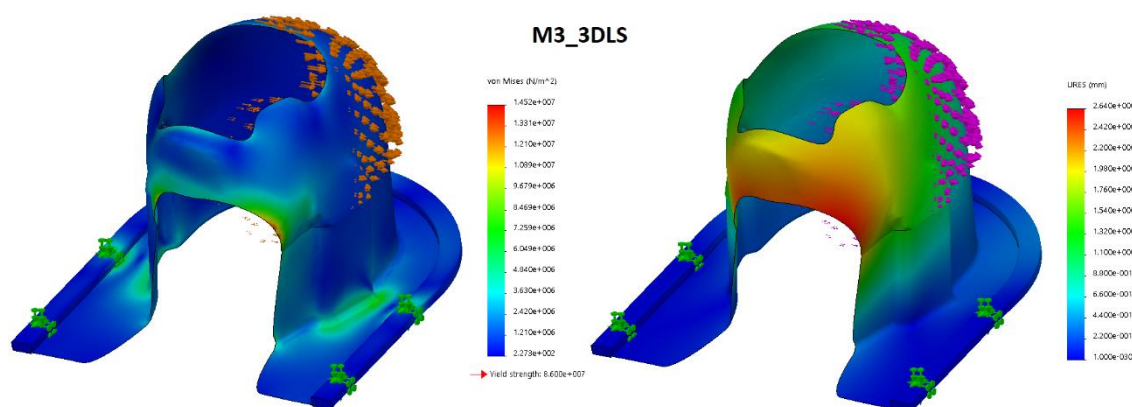


Figura 5.10. Distribuição de tensões e deslocamentos na M3_3DLS

Os resultados deste estudo são apresentados com maior detalhe no Apêndice IV onde para além do nº de elementos associados a cada malha de elementos finitos usado no processo de refinação, também se apresenta a dimensão máxima e mínima de cada elemento da malha.

5.2 SELECÇÃO DO MATERIAL

A utilização do material mais adequado, tendo em conta as características necessárias em termos de resistência mecânica, atenuação de radiação e temperatura de fusão, é, conforme já referido na Metodologia 4, um aspecto crucial.

Assim, para determinar qual o material que conseguindo garantir estes requisitos, apresentará um maior factor de segurança de projecto, foi realizado um estudo tendo em consideração o critério de resistência mecânica e o critério de rigidez. Para esse efeito foi considerada a avaliação da máxima tensão equivalente de von Mises e do deslocamento

resultante máximo para uma gama de espessuras h , que se considerou poder assumir os valores do seguinte conjunto $h \in \{2, 3, 4, 5\}$ mm. Este estudo foi feito para o caso de carga mais crítico que é a flexão lateral esquerda do pescoço.

Neste contexto, o material que apresenta um maior factor de segurança e um menor deslocamento máximo resultante é considerado como o que, de forma mais adequada, garantirá a melhor imobilização do paciente. Os resultados encontram-se detalhados no Apêndice V.

5.2.1 MÁSCARAS TC

Nesta sub-secção apresentam-se sob a forma gráfica os resultados obtidos para as diferentes geometrias construídas com os diferentes materiais, no caso em que a superfície da cabeça foi obtida a partir da TC com fatias de 1mm de espessura.

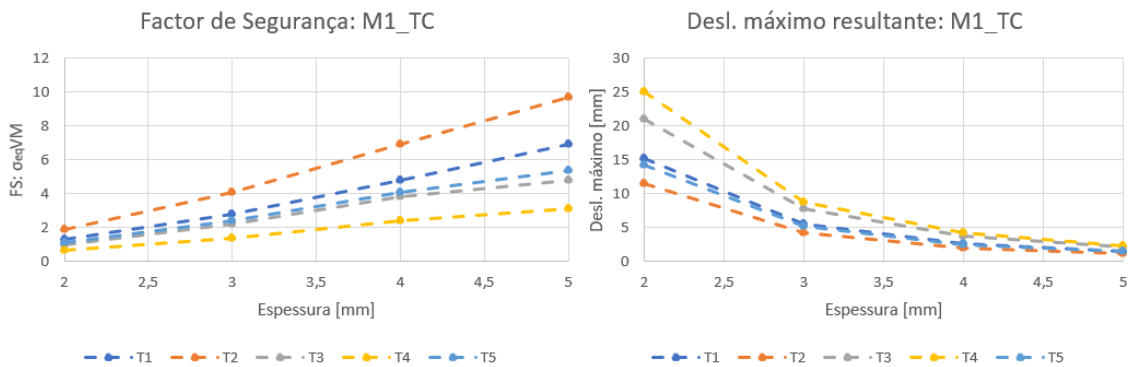


Figura 5.11. FS e Desl.Máx. em função da espessura para a M1_TC

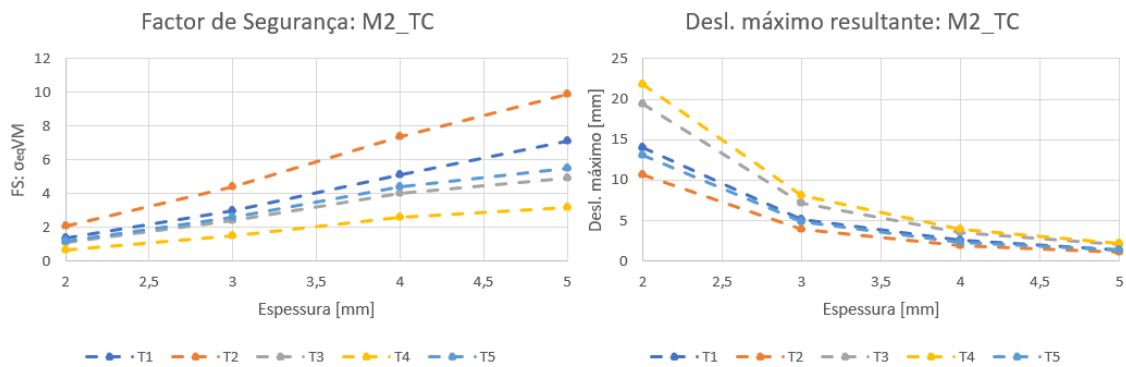


Figura 5.12. FS e Desl.Máx. em função da espessura para a M2_TC

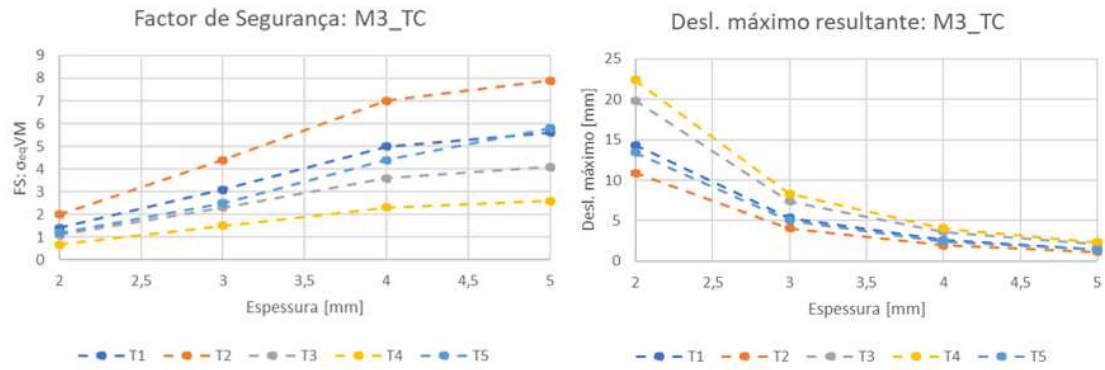


Figura 5.13. FS. e Desl.Máx. em função da espessura para a M3_TC

Das Figuras 5.11 a 5.13, pode concluir-se que o material que apresentou melhor desempenho nas referidas condições, foi o material T2.

5.2.2 MÁSCARAS 3DLS

Um estudo análogo foi realizado para as máscaras, em que a superfície da cabeça foi obtida a partir de varrimento laser 3D (3DLS). Os resultados obtidos apresentam-se nas Figuras 5.14 a 5.16.

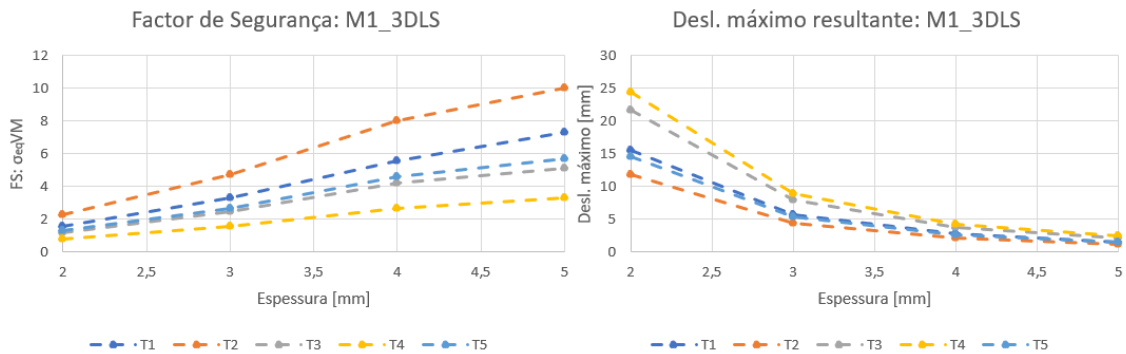


Figura 5.14. FS. e Desl.Máx. em função da espessura para a M1_3DLS

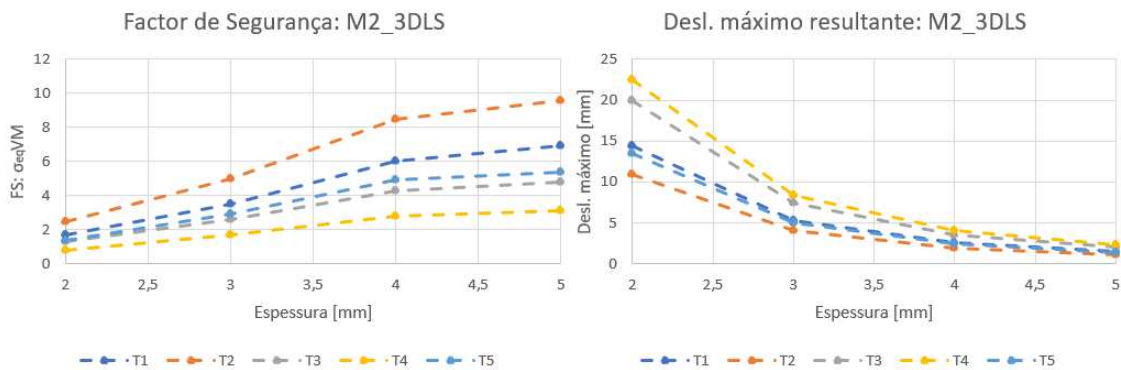


Figura 5.15. FS. e Desl.Máx. em função da espessura para a M2_3DLS

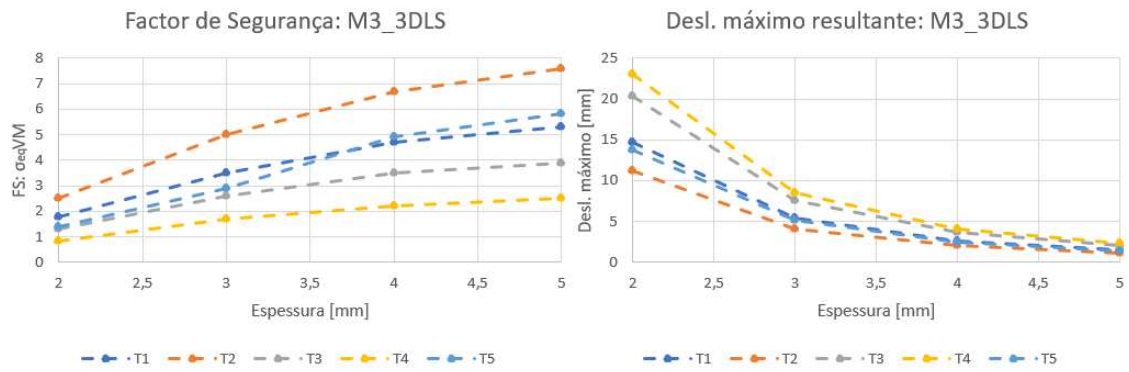


Figura 5.16. FS. e Desl.Máx. em função da espessura para a M3_3DLS

Tal como para as máscaras obtidas a partir da TC, o material T2 também apresenta melhor desempenho no caso das máscaras 3DLS, sendo por isso o material seleccionado para as máscaras de imobilização.

5.3 CRITÉRIO DE RIGIDEZ

No futuro, para promover o sucesso dos tratamentos de Radioterapia e dos exames de Medicina Nuclear é crucial garantir uma adequada imobilização da região anatómica em causa, neste caso concreto, da cabeça. Assim considerou-se, de acordo com a opinião de profissionais da área, que o valor de deslocamento máximo poderia ter como valor limite admissível 1 mm (valor empírico).

Nestas condições, foram simuladas diversas espessuras considerando incrementos de espessura de 0.1mm, que é a resolução máxima de uma impressora 3D comum (do tipo FDM), até encontrar uma espessura que satisfizesse o critério.

Tendo em consideração a conclusão do estudo anterior reportado à selecção do material, neste estudo foi utilizado o material T2, dado que o mesmo revelou proporcionar um melhor desempenho mecânico, garantindo a necessária propriedade de baixa atenuação à radiação.

Este processo foi repetido nas seis máscaras (TC e 3DLS com 3 geometrias cada) e foram considerados os dois casos de carga já mencionados:

- O considerado mais crítico: flexão lateral esquerda do pescoço;
- O considerado como um movimento natural de fuga: flexão do pescoço.

Tabela 5.7. Resultados para o critério do desl. máximo: flexão lateral do pescoço

Flexão Lateral do Pescoço	Deslocamento Máximo [mm]					
	Espe- sura [mm]	M1_TC	M2_TC	M3_TC	M1_3DLS	M2_3DLS
5	1,1640	1,1000	1,1210	1,1850	1,1210	1,1390
5,1	1,1070	1,0460	1,0660	1,1260	1,0660	1,0830
5,2	1,0530	0,9959	1,0150	1,0710	1,0150	1,0300
5,3	1,0030		0,9667	1,0210	0,9668	0,9815
5,4	0,9568			0,9729		

A Tabela 5.7 apresenta os resultados do caso de carga da flexão lateral esquerda do pescoço, em que se pode observar que a geometria M1 apresenta piores resultados em termos de imobilização e que a máscara M2_TC (Figura 5.17) foi a que apresentou melhores resultados.

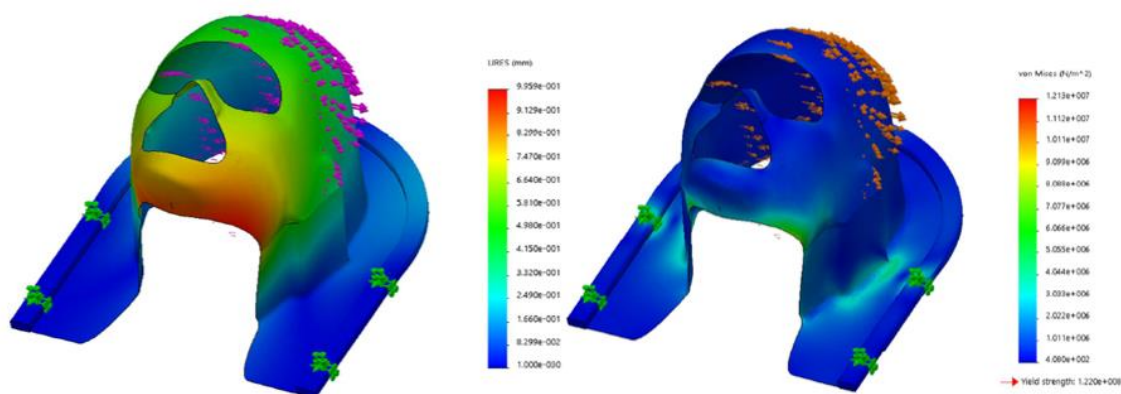


Figura 5.17. Flexão lateral esquerda: distribuição de deslocamentos e tensões para a M2_TC para a espessura de 5,2mm.

Tabela 5.8. Resultados para o critério do desl. máximo: flexão do pescoço

Flexão do Pescoço	Deslocamento Máximo [mm]					
	Espe- sura [mm]	M1_TC	M2_TC	M3_TC	M1_3DLS	M2_3DLS
2	2,0500	1,8580	2,0710	2,1200	1,9250	2,1280
2,1	1,8090	1,6390	1,8240	1,8690	1,6970	1,8740
2,2	1,6070	1,4560	1,6180	1,6600	1,5070	1,6610
2,3	1,4360	1,3010	1,4440	1,4830	1,3460	1,4820
2,4	1,2910	1,1700	1,2960	1,3340	1,2100	1,3300
2,5	1,1670	1,0580	1,1700	1,2060	1,0940	1,2000
2,6	1,0600	0,9609	1,0610	1,0960	0,9934	1,0880
2,7	0,9677		0,9661	0,9996		0,9910

Da Tabela 5.8 pode-se concluir que para o caso de carga da flexão do pescoço, a geometria M2 é a que apresenta melhores resultados de imobilização, em que a M2_TC (Figura 5.18) apresenta melhores resultados relativamente à M2_3DLS.

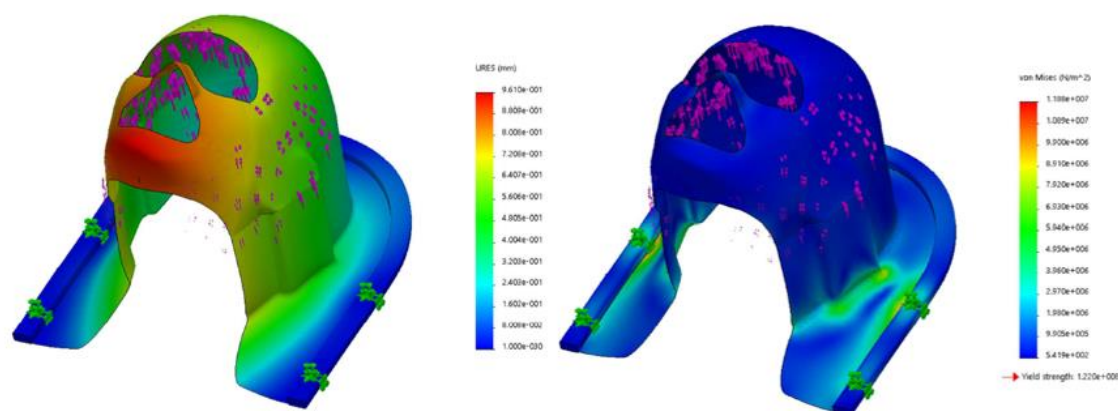


Figura 5.18. Flexão: distribuição de deslocamentos e tensões para a M2_TC para a espessura de 2.6mm.

Todas as outras máscaras satisfazem o critério de rigidez (reportado ao deslocamento resultante máximo) para uma espessura de 2.7mm.

5.4 IMPRESSÃO 3D DAS MÁSCARAS DE IMOBILIZAÇÃO

Tendo em conta que um dos objectivos intermédios deste trabalho estava relacionado com a produção das máscaras de imobilização por impressão 3D, considerou-se importante efectuar um estudo comparativo para as diferentes geometrias concebidas, M1, M2 e M3, em que fossem analisados o tempo de impressão e a quantidade de material necessário, em função de diferentes percentagens e tipos de enchimento. Este estudo foi realizado para uma impressão à escala de $\frac{1}{2}$.

O conjunto de percentagens de enchimentos simuladas foram {10, 15, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100}, para enchimentos do tipo linear (sequência de linhas paralelas que garantem a integridade estrutural do objecto) e do tipo hexagonal (sequência de hexágonos tipo ninho de abelha que garantem a integridade estrutural do objecto). Note-se que para 0% de enchimento o objecto assume-se como oco e para 100% de enchimento o objecto é maciço, estando desta forma os valores normalizados.

Na Tabela 5.9 e na Tabela 5.10 a coluna mais à esquerda refere-se às percentagens de enchimento. Os valores apresentados têm como referência a impressão do objecto maciço, já que as massas e os tempos de impressão para cada percentagem de enchimento dependem da impressora e da sua parametrização (MAR Loja et al. 2018).

Tabela 5.9. Resultados do valor normalizado da massa de cada máscara da simulação da impressão 3D para cada uma das máscaras

Enchimento (%)	M1		M2		M3	
	Hexagonal	Linear	Hexagonal	Linear	Hexagonal	Linear
10	94,85	94,88	96,22	95,87	95,26	94,86
15	95,49	94,76	96,26	96,13	95,37	95,15
20	95,06	95,40	96,48	96,41	95,49	95,45
30	95,47	95,98	96,58	96,43	95,95	96,05
40	96,12	96,47	96,87	97,48	95,97	96,33
50	96,12	97,08	97,25	98,07	96,39	96,98
60	96,92	97,77	97,13	97,87	96,69	97,58
70	97,23	98,28	97,44	98,38	97,01	98,12
80	97,49	98,84	97,72	98,94	97,28	98,72
90	97,79	99,37	97,79	99,37	97,60	99,32
100	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00

Tabela 5.10. Resultados do valor normalizado do tempo de impressão da simulação da impressão 3D para cada uma das máscaras

Enchimento (%)	M1		M2		M3	
	Hexagonal	Linear	Hexagonal	Linear	Hexagonal	Linear
10	96,32	96,32	95,96	95,96	96,88	96,48
15	95,99	96,32	96,30	95,96	96,88	96,88
20	96,32	96,66	96,30	96,30	96,88	96,88
30	96,66	97,32	96,63	96,97	97,27	97,27
40	97,32	97,66	96,63	96,63	97,27	97,66
50	97,32	97,99	96,97	97,64	97,66	98,05
60	97,99	98,66	97,64	98,32	98,05	98,44
70	98,33	99,00	97,98	98,32	98,05	98,83
80	98,33	99,33	98,32	98,99	98,44	99,22
90	98,66	99,67	98,32	99,33	98,44	99,61
100	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00

Posteriormente e para efeitos ilustrativos, foi feita a respectiva impressão das três geometrias utilizando PLA com uma percentagem de enchimento de 15%, hexagonal. A sequência de fotografias mostradas na Figura 5.19 representa as etapas de remoção do *raft* (primeiras camadas em esboço) e dos apoios (filamento impresso para sustentação da peça) para a máscara M2. Este procedimento foi repetido para as três geometrias diferentes.

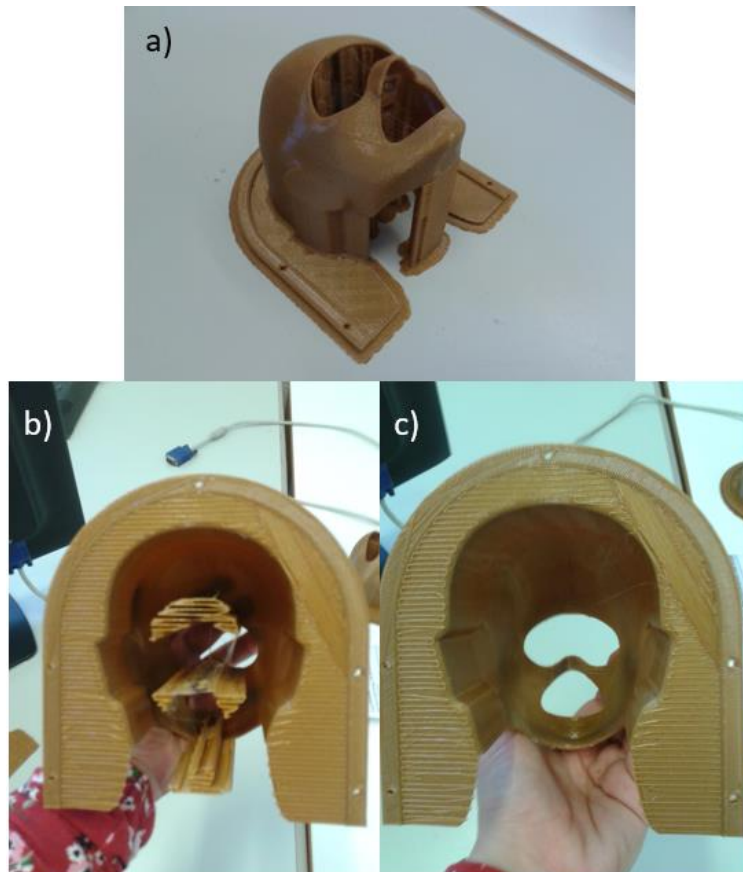


Figura 5.19. Representação da remoção do *raft* e dos apoios da impressão da M2

As Figuras 5.20 a 5.22 apresentam os resultados obtidos na impressão de cada uma das geometrias consideradas.



Figura 5.20. Resultados da impressão da geometria M1



Figura 5.21. Resultados da impressão da geometria M2



Figura 5.22. Resultados da impressão da geometria M3

Apesar da impressão ter sido feita na opção de menor resolução da impressora FDM, o acabamento conseguido com esta resolução tem uma rugosidade que não é desconfortável ao toque, podendo indicar que é adequada para a aplicação final. Note-se que esta rugosidade poderia ser melhorada através da utilização de uma tecnologia de impressão mais avançada.

Refira-se ainda que, poderia ter sido efectuada uma impressão das máscaras após os estudos de optimização referidos na secção 5.6.2, contudo do ponto de vista qualitativo as conclusões seriam semelhantes.

5.5 ESTUDOS PREPARATÓRIOS PARA O PROCESSO DE OPTIMIZAÇÃO

Nesta secção apresentam-se os resultados dos estudos preliminares necessários para a aplicação da metodologia de optimização que foi utilizada nesta dissertação.

5.5.1 MODELO DE PLACA DE KANT (*MATLAB*)

Para verificar o modelo da placa modelada em *Matlab* segundo a teoria de placa de ordem superior fez-se uma comparação dos valores indicados no livro (Ferreira 2010) com os valores obtidos através do código implementado.

Os valores foram verificados para um carregamento uniforme para dois tipos de condições de fronteira: placa simplesmente apoiada (SSSS) e placa encastrada (CCCC).

Tabela 5.11. Resultados da deformada máxima normalizada de uma placa quadrada sujeita a um carregamento uniforme

a/h	Malha	Placa SSSS		Placa CCCC	
		W _{max}	W _{max} (Ferreira 2010)	W _{max}	W _{max} (Ferreira 2010)
4	4x4	0,005455	0,005454	0,002732	0,002732
	10x10	0,005382	0,005382	0,002630	0,002630
	20x20	0,005376	0,005376	0,002625	0,002625
	30x30	0,005375	0,005374	0,002624	0,002623
	Solução Kant		0,005230		0,002610
10	4x4	0,004207	0,004207	0,001468	0,001467
	10x10	0,004263	0,004263	0,001495	0,001494
	20x20	0,004270	0,004270	0,001500	0,001500
	30x30	0,004272	0,004271	0,001501	0,001501
	Solução exacta		0,004270		0,001520
100	4x4	0,003971	0,003971	0,001214	0,001214
	10x10	0,004051	0,004051	0,001259	0,001258
	20x20	0,004061	0,004061	0,001266	0,001265
	30x30	0,004063	0,004063	0,001267	0,001267
	Solução Kant		0,004070		0,001280
10000	4x4	0,003969	0,003968	0,001211	0,001211
	10x10	0,004049	0,004049	0,001256	0,001256
	20x20	0,004059	0,004059	0,001263	0,001263
	30x30	0,004061	0,004060	0,001264	0,001264
	Solução exacta		0,004060		0,001260

Dos valores da Tabela 5.11 é possível concluir que, para este caso, as diferenças de valores da deformada não são significativas. De notar que os valores presentes na tabela se encontram normalizados, utilizando o multiplicador referido na secção 4.3.1.

5.5.2 ANÁLISE ESTÁTICA DE UMA PLACA FINA

Nesta subsecção são feitas várias análises estáticas a uma placa fina utilizando diferentes métodos em que as características geométricas da placa, o carregamento, o material e os constrangimentos se mantêm constantes.

Tabela 5.12. Características da placa fina

Características e carregamento	
$a = b$	100 mm
h	2 mm
P_0	0,02 MPa
Material	T2
Constrangimentos	SSSS

Para o estudo estático da placa começou-se por definir as características geométricas, material e carregamento da placa. Em que o valor da relação de aspecto é de 50 para que não se incorra no erro de a placa não poder ser considerada como fina, e como tal, a comparação entre as diferentes abordagens carecer da desejável consistência. A Tabela 5.12 contém as características da placa utilizadas nos três estudos seguintes.

5.5.2.1 ANÁLISE DA PLACA NO *SOLIDWORKS*

No software *SolidWorks* definiram-se as características da placa descritas na Tabela 5.12 e uma malha de elementos finitos do tipo casca com 1202 elementos triangulares quadráticos e um número de nós igual a 2505.

Fez-se a simulação estática e os resultados obtidos para a tensão equivalente de von Mises foram:

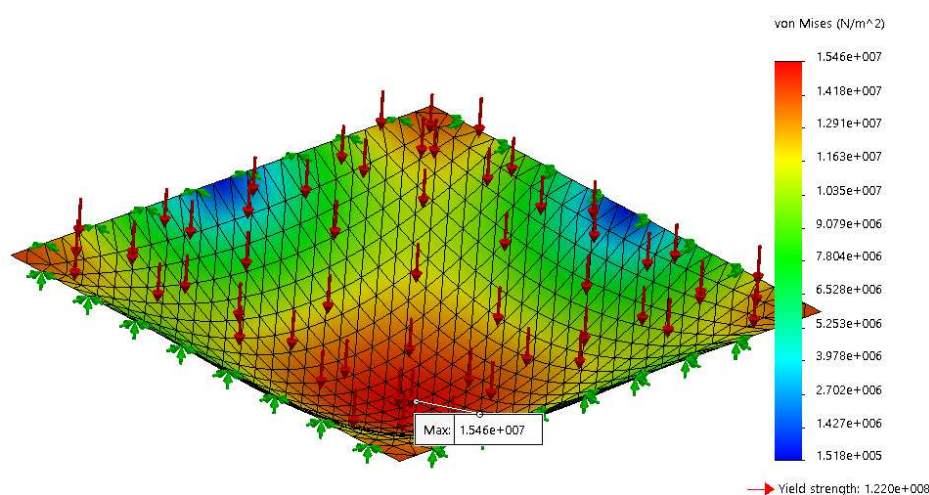


Figura 5.23. Resultados da tensão equivalente de von Mises na placa fina

Podemos observar na Figura 5.23 que a tensão máxima na placa de 15,46 MPa está muito abaixo da sua tensão de cedência de 122 MPa para o material T2. Estando assim dentro das condições de resistência mecânica do material.

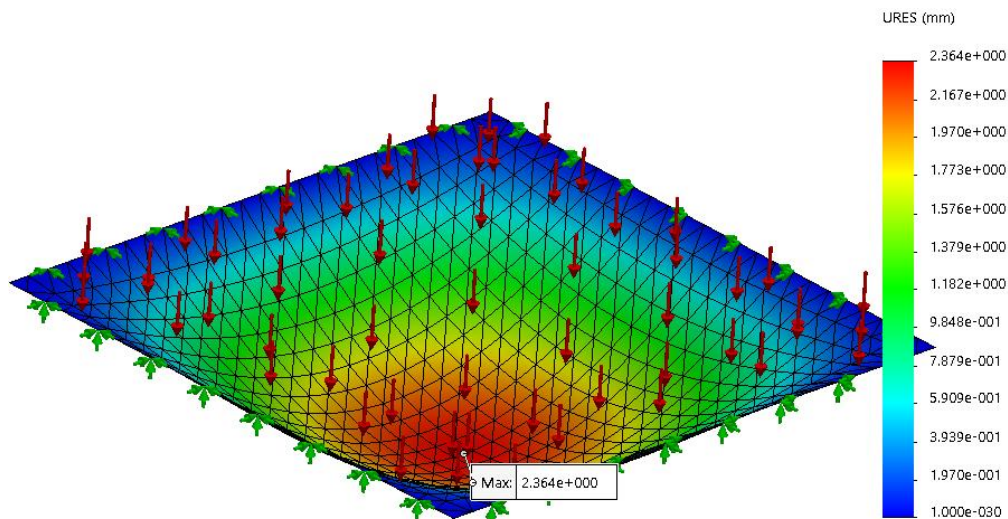


Figura 5.24. Resultados deformação total na placa fina

Para este carregamento e espessura, podemos observar na anotação da Figura 5.24 que a deformada máxima da placa é de 2,364 mm.

5.5.2.2 CONVERGÊNCIA E ANÁLISE ESTÁTICA DA PLACA PELO MÉTODO DE NAVIER

Antes de se fazer a análise estática da placa utilizando o método de Navier, decidiu-se fazer um estudo ao número de termos a utilizar nas séries duplas de Fourier, isto porque, apesar de que quando se utiliza um número reduzido de termos, os resultados da deformada máxima serem muito próximos dos já alcançados com o estudo pelo método de elementos finitos utilizando o *software* comercial *SolidWorks*, a série dupla que define o carregamento está muito longe de aproximar de forma desejável a um carregamento constante. Gráficos adicionais deste estudo encontram-se no Apêndice IV.

Tabela 5.13. Resultados do estudo de convergência ao nº de termos do método de Navier

Nº termos	Wmax [mm]	Wmax_minimize [mm]
m=1, n=1	-2,4214	-2,4214
m=1..3, n=1..3	-2,3535	-2,3535
m=1..5, n=1..5	-2,3650	-2,3650
m=1..7, n=1..7	-2,3640	-2,3640
m=1..9, n=1..9	-2,3643	-2,3643
m=1..11, n=1..11	-2,3642	-2,3642

Como é possível observar pela Tabela 5.13 e pela Figura 5.25 o valor da deformada máxima converge muito rapidamente para cerca de -2,364 mm. A coluna que explicita Wmax refere-se ao cálculo da deformada máxima substituindo as coordenadas (x,y) pelos valores do centro da placa $x = y = \frac{a}{2}$, e Wmax_minimize refere-se à opção de otimização do *Maple* com a função *Minimize*, já que o valor é negativo.

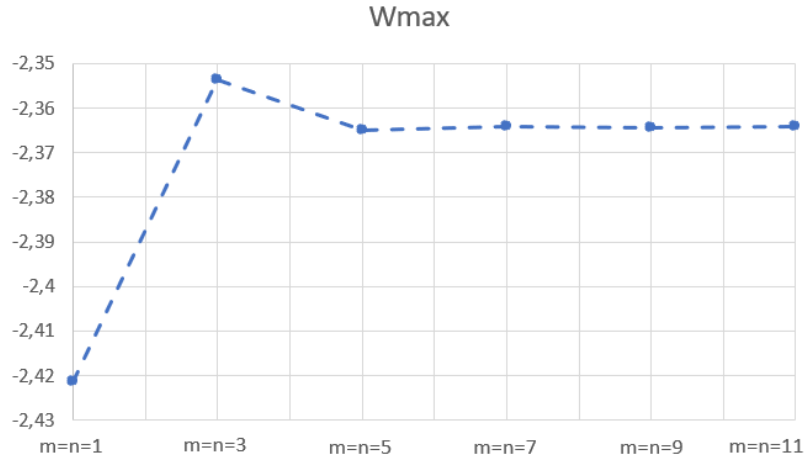


Figura 5.25. Linha de tendência do estudo de convergência ao nº de termos do método de Navier

Contudo podemos ver na Figura 5.26 que a diferença do carregamento $p(x,y)$ utilizando 5 termos em cada uma das direcções ($m=1..5$, $n=1..5$) para o carregamento utilizando 11 termos em cada uma das direcções ($m=1..11$, $n=1..11$) é graficamente evidente, sendo que o último caso aproxima melhor uma situação de carregamento uniforme. Assim sendo, o número de termos escolhido foi 11 em cada uma das direcções.

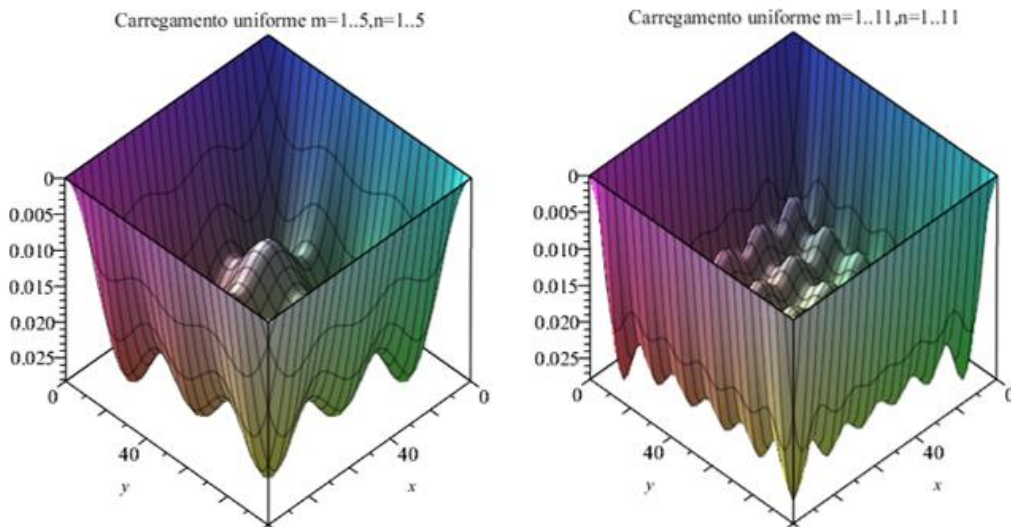


Figura 5.26. Representação gráfica de $p(x,y)$ utilizando $m,n=1..5$ e $m,n=1..11$

Feito este estudo prévio procede-se então ao cálculo da deformada da placa $W(x,y)$ e à respectiva representação gráfica (Figura 5.27).

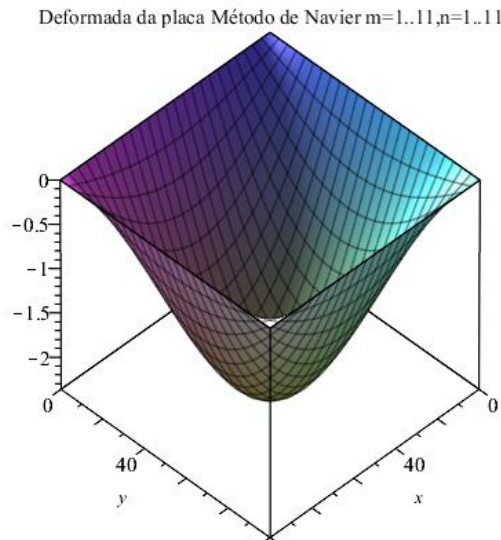


Figura 5.27. Representação gráfica de $W(x,y)$ utilizando $m,n=1..11$

A deformada máxima da placa utilizando o método de Navier tem o valor de -2,3642 mm e difere 0,008% do valor calculado pelo método MEF no *SolidWorks*, esta diferença foi calculada através da expressão 5.1:

$$Dif(\%) = \frac{|W(x,y) - W_{SW}|}{W_{SW}} \cdot 100 \quad (5.1)$$

5.5.2.3 CONVERGÊNCIA E ANÁLISE ESTÁTICA DA PLACA DE KANT

Apesar de no estudo que faz a validação dos resultados da placa de Kant se demonstrar que há convergência em função do número de elementos, este estudo tem como objectivo determinar a malha com o mínimo número elementos finitos a utilizar que garante que a variação do valor da deformada é desprezável para este caso em que a placa não está normalizada. Ou seja, que ao aumentar o número de elementos da malha o ganho na exactidão no valor da deformada máxima não justifica os recursos computacionais exigidos para tal.

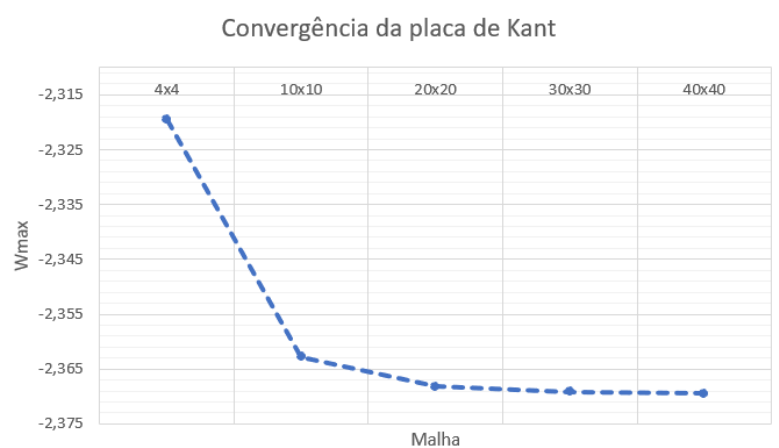


Figura 5.28. Representação gráfica do estudo de convergência à malha a utilizar na placa de Kant

Tabela 5.14. Resultados do estudo de convergência à malha a utilizar na placa de Kant

Resultados da convergência	
Malha	Wmax [mm]
4x4	-2,320
10x10	-2,363
20x20	-2,368
30x30	-2,369
40x40	-2,370

A Figura 5.28 e a Tabela 5.14 mostram os resultados deste estudo de convergência, em que poderia ser utilizada uma malha de até 40x40 elementos, mas por limitação de recursos a nível computacional para a resolução dos problemas de otimização optou-se pela malha de 20x20 para a qual os resultados já são satisfatórios para este caso de estudo. O valor do desvio da deformada máxima obtida no SolidWorks e com esta malha da placa definida com a formulação HSDT é de 0,169%.

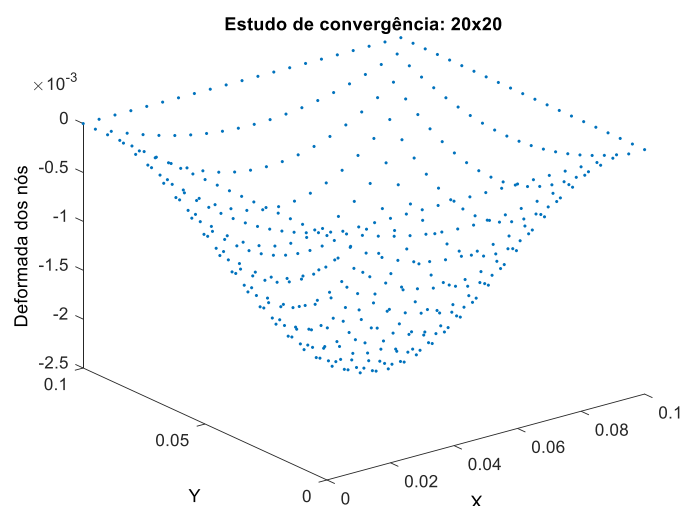


Figura 5.29. Aspecto da deformada de cada um dos nós com a malha 20x20

O aspecto da distribuição dos nós da malha 20x20 pode ser visto na Figura 5.29, o qual já define muito bem os contornos da placa tendo em conta a precisão exigida.

Em termos mais globais é importante realçar a excelente concordância observada entre as diferentes abordagens para o problema selecionado, e assim a sua verificação.

5.5.3 FUNÇÕES DE TESTE AOS ALGORITMOS META-HEURÍSTICOS

Estes testes foram feitos utilizando um número máximo de 500 iterações e cada uma das populações é constituída por 30 indivíduos, esta última escolha teve a ver com a Teoria do Limite Central, que diz que para uma amostra desta ou de maior dimensão, um dado fenómeno pode ser aproximado a uma distribuição normal (Montgomery and Runger 2013).

Os resultados apresentados para os três algoritmos estão sob a forma de gráficos em que estes representam a evolução do desvio-padrão e da solução ótima de cada iteração, e sob um gráfico de dispersão para os elementos da última população simulada.

Para cada um destes testes foram feitas 10 corridas e selecionado o melhor resultado. Os resultados destes testes encontram-se tabelados acompanhados pelos respectivos gráficos no Apêndice VI.

5.5.3.1 PSO

Os resultados obtidos nos gráficos das figuras abaixo demonstram que o algoritmo PSO, apesar de convergir para o valor ótimo para um elemento da última geração, não faz convergir para zero o valor do desvio-padrão, apresenta por isso uma grande dispersão de resultados dos restantes elementos da população.

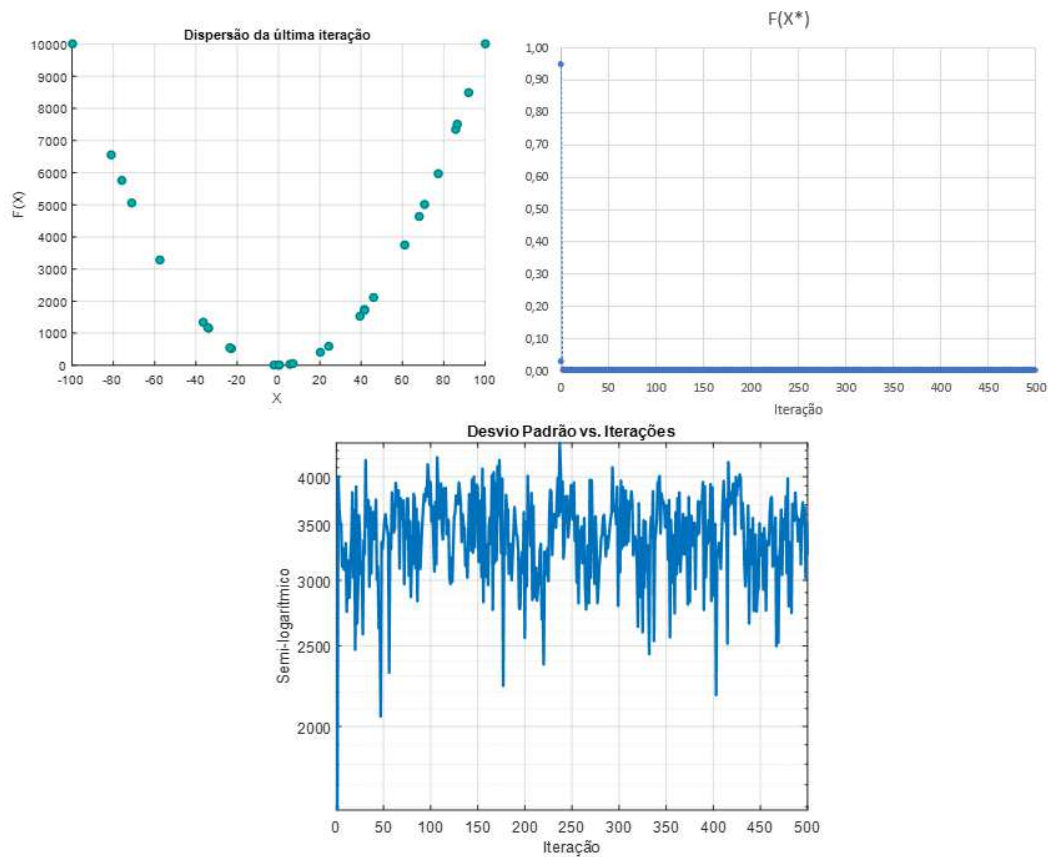


Figura 5.30. Gráficos do teste ao PSO com a função *sphere*

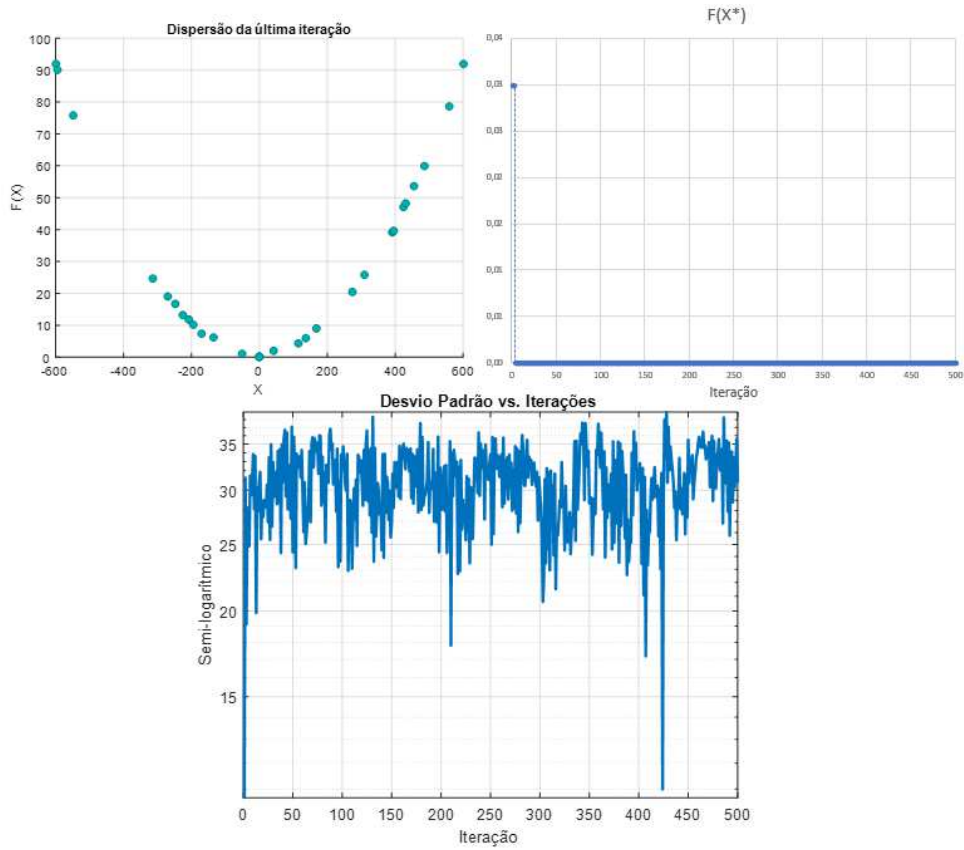


Figura 5.31. Gráficos do teste ao PSO standard com a função de Griewank

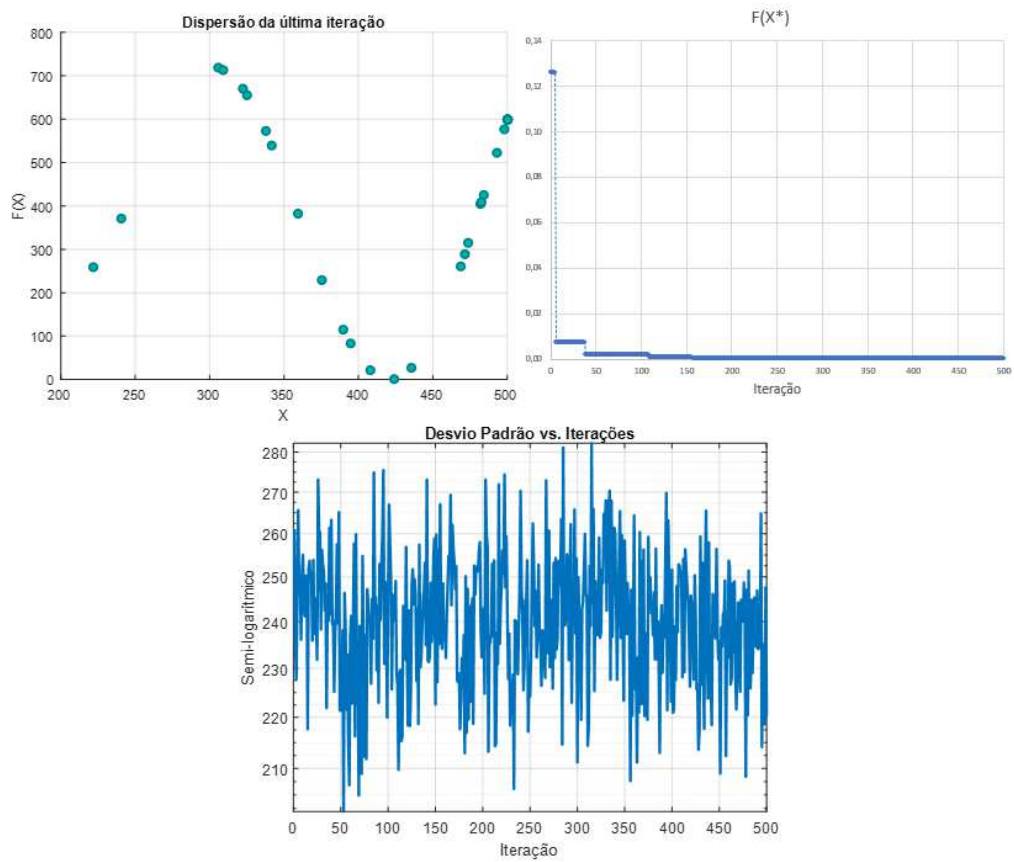


Figura 5.32. Gráficos do teste ao PSO standard com a função de Schwefel

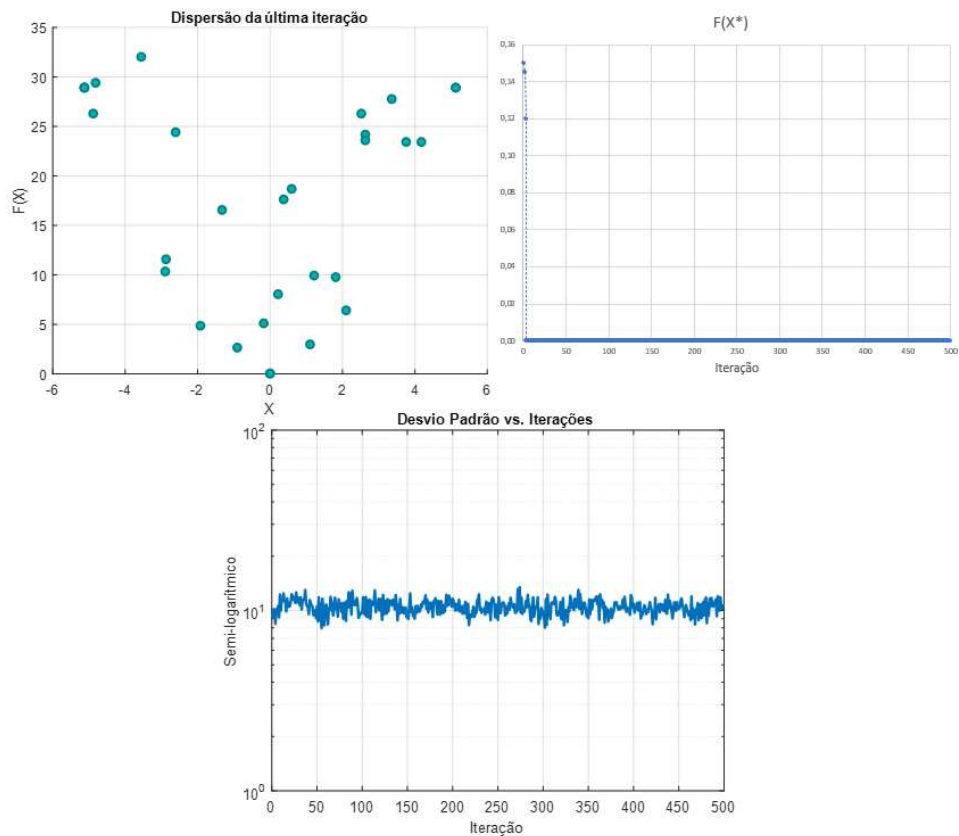


Figura 5.33. Gráficos do teste ao PSO standard com a função de Rastrigin

Como já tinha sido referido, o PSO original tem alguns problemas na sua dinâmica evolutiva. Apesar de se poder observar que o algoritmo converge muito rapidamente para o mínimo global, contudo na última iteração seria de esperar que no gráfico de dispersão (que representa $F(X)$ em função de X para cada agente da última geração) todos os agentes se encontrassem mais próximos da solução óptima, encontram-se dispersos num conjunto de soluções possíveis.

5.5.3.2 PSO RESTRINGIDO

Ao contrário do PSO original, o PSO restringido apresenta uma convergência do desvio-padrão para o valor zero, bem como uma dispersão muito menor na última geração, encontrando para todas as funções de teste o valor óptimo, foi por isso, a versão escolhida do PSO.

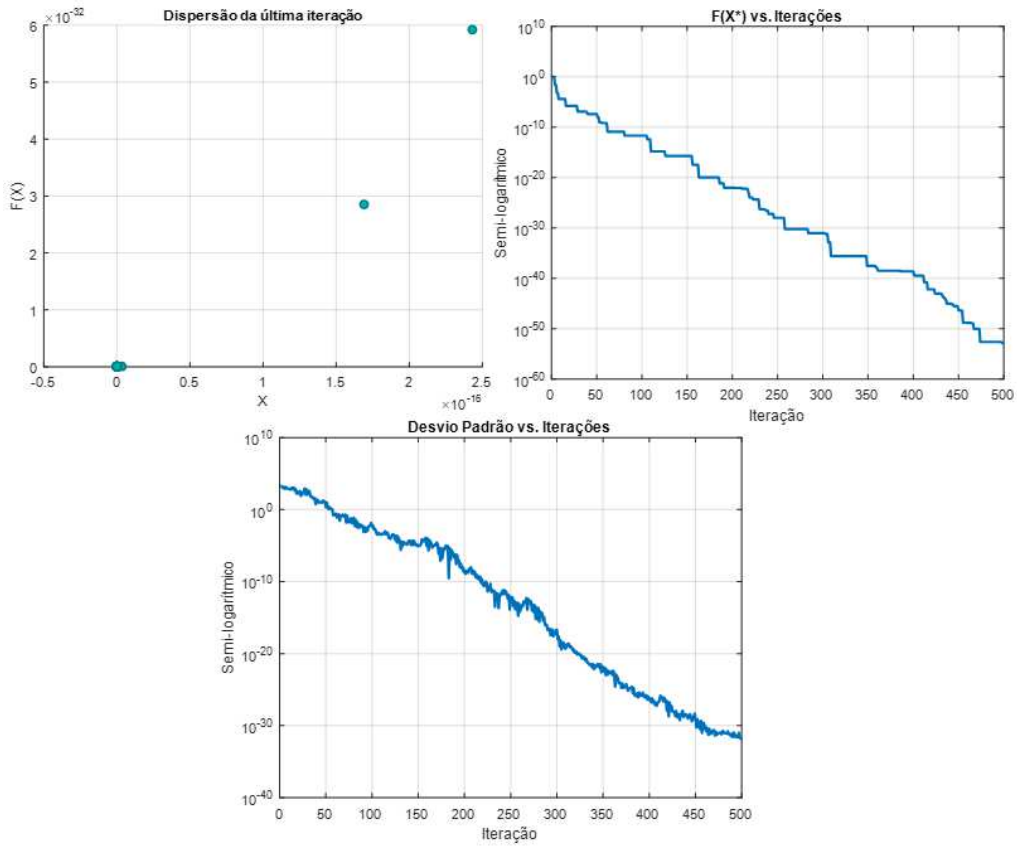


Figura 5.34. Gráficos do teste ao PSO restringido com a função *sphere*

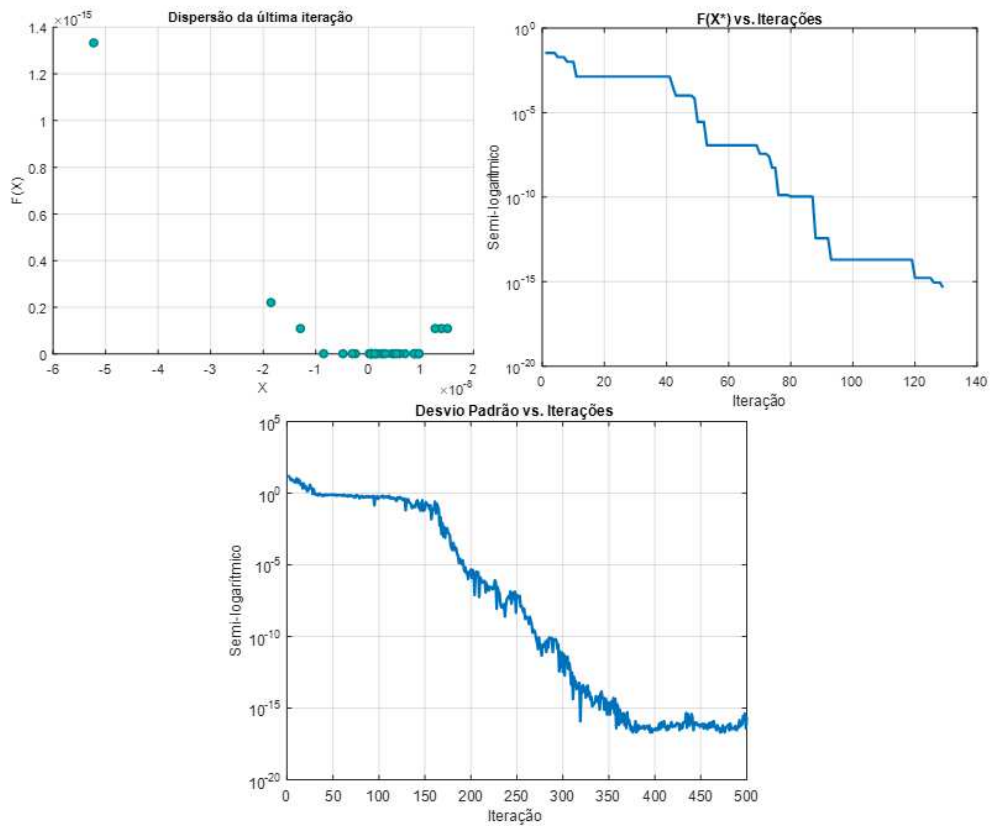


Figura 5.35. Gráficos do teste ao PSO restringido com a função de Griewank

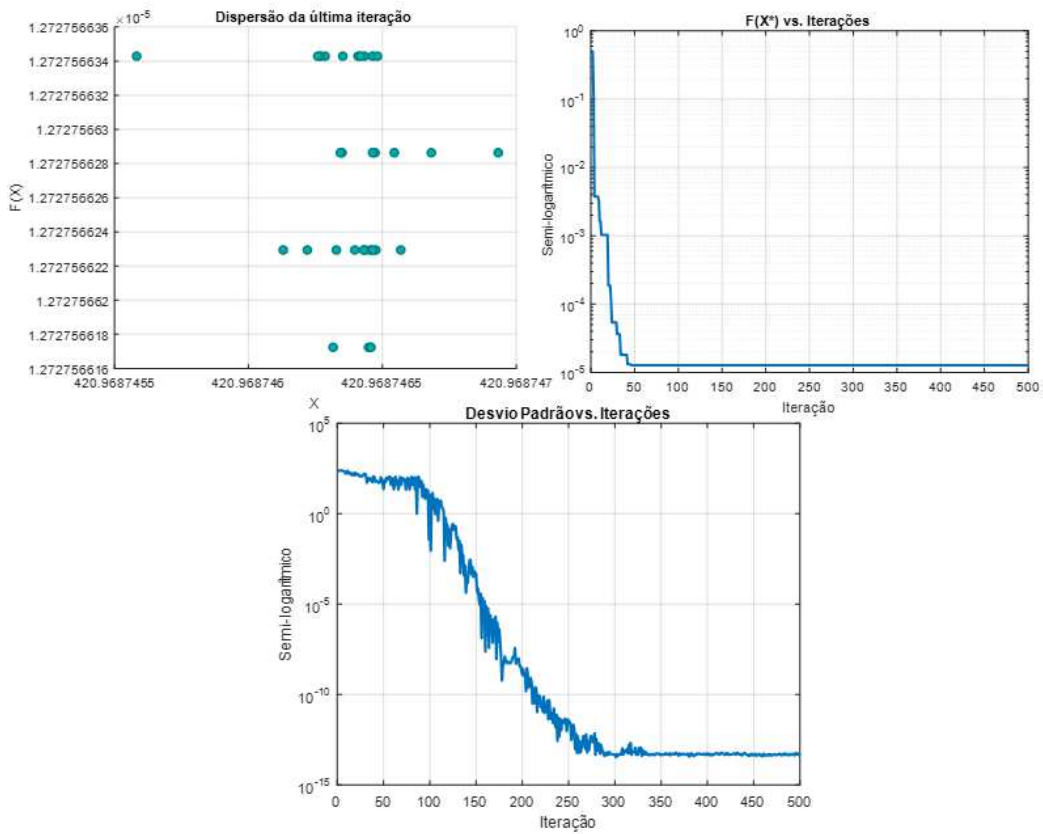


Figura 5.36. Gráficos do teste ao PSO restrigido com a função de Schwefel

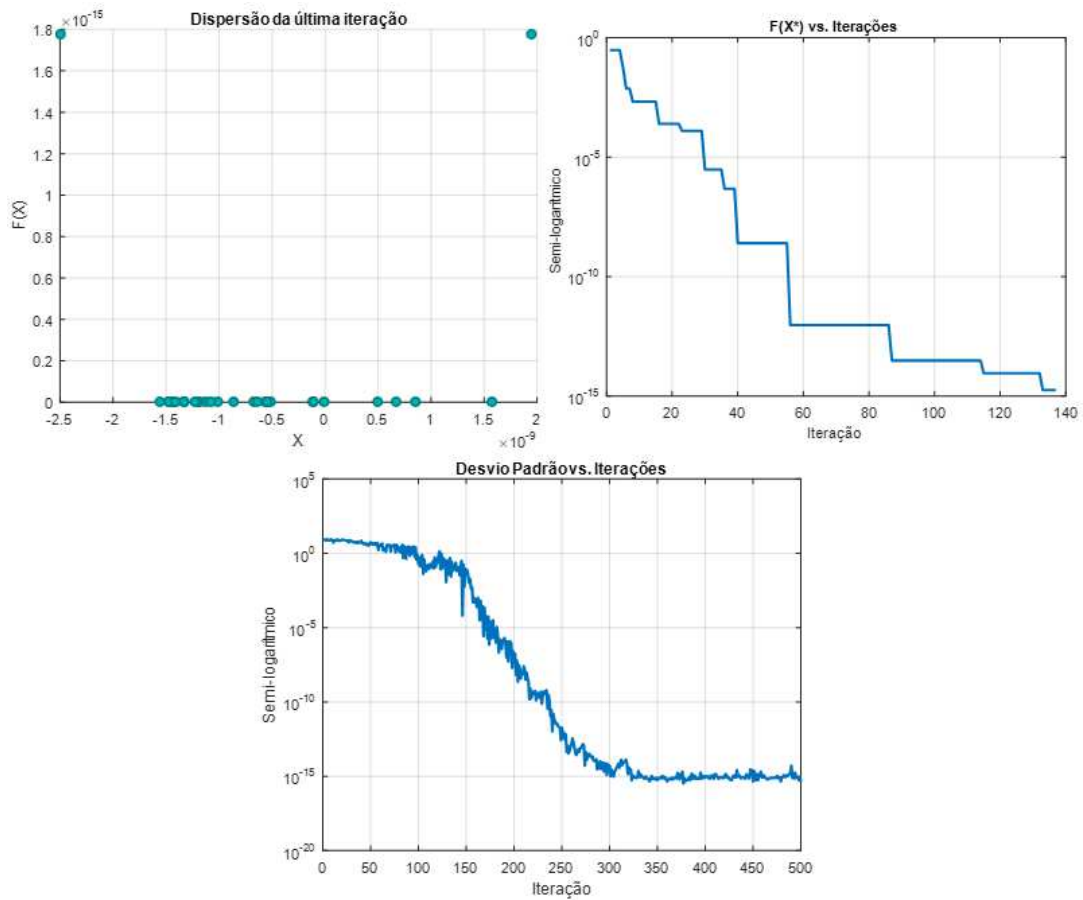


Figura 5.37. Gráficos do teste ao PSO restrigido com a função de Rastrigin

Esta versão do PSO possui um melhor comportamento do ponto de vista da convergência para o mínimo global, contudo por fazer convergir muito rapidamente o seu desvio-padrão pode mais facilmente ficar retido num mínimo local do que o PSO original.

5.5.3.3 ALGORITMO DE OPTIMIZAÇÃO DA BALEIA

Tal como o algoritmo PSO restringido, o WOA também apresenta baixos valores de dispersão para todas as funções, convergência do desvio-padrão para zero e solução óptima encontrada para todas as funções de teste utilizadas. Por estas razões foi também utilizado este algoritmo nos estudos de otimização.

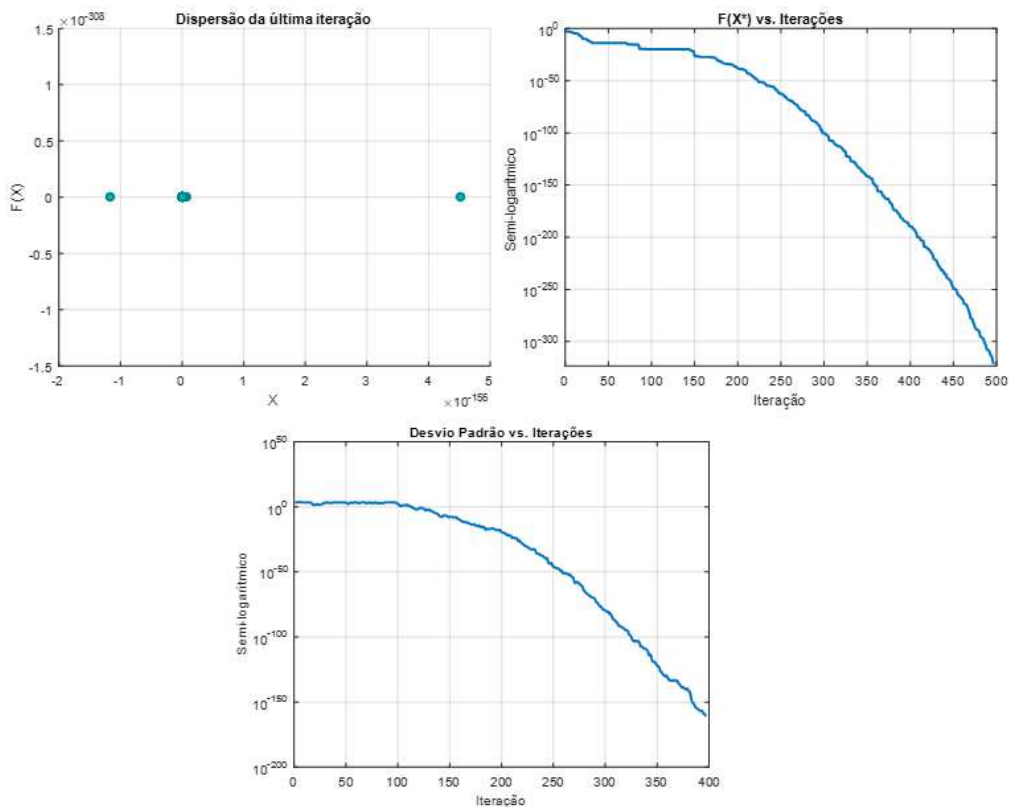


Figura 5.38. Gráficos do teste ao WOA com a função *sphere*

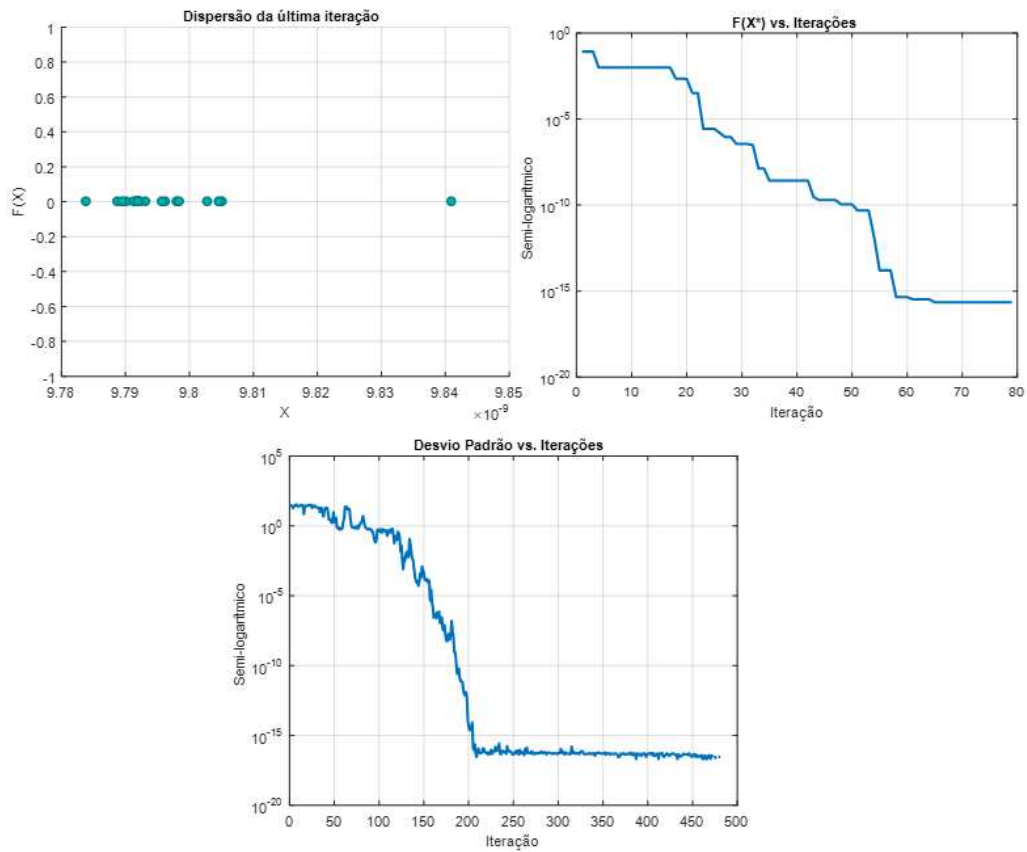


Figura 5.39. Gráficos do teste ao WOA com a função de Griewank

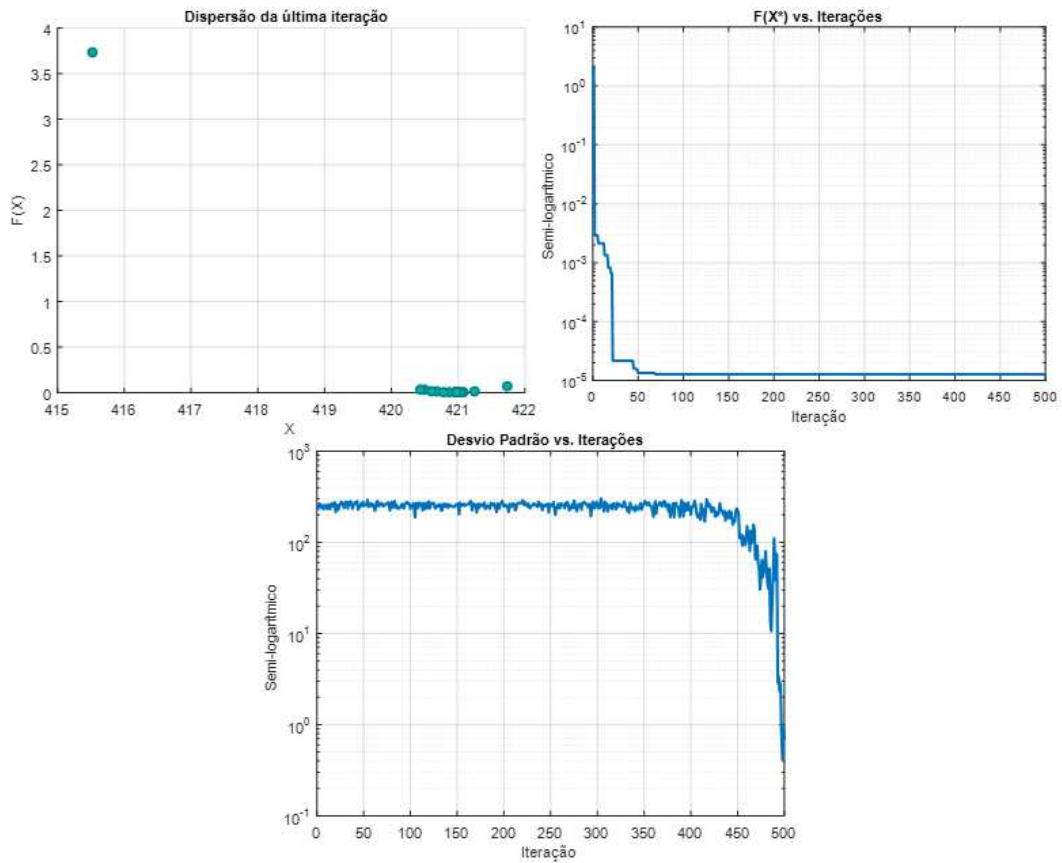


Figura 5.40. Gráficos do teste ao WOA com a função de Schwefel

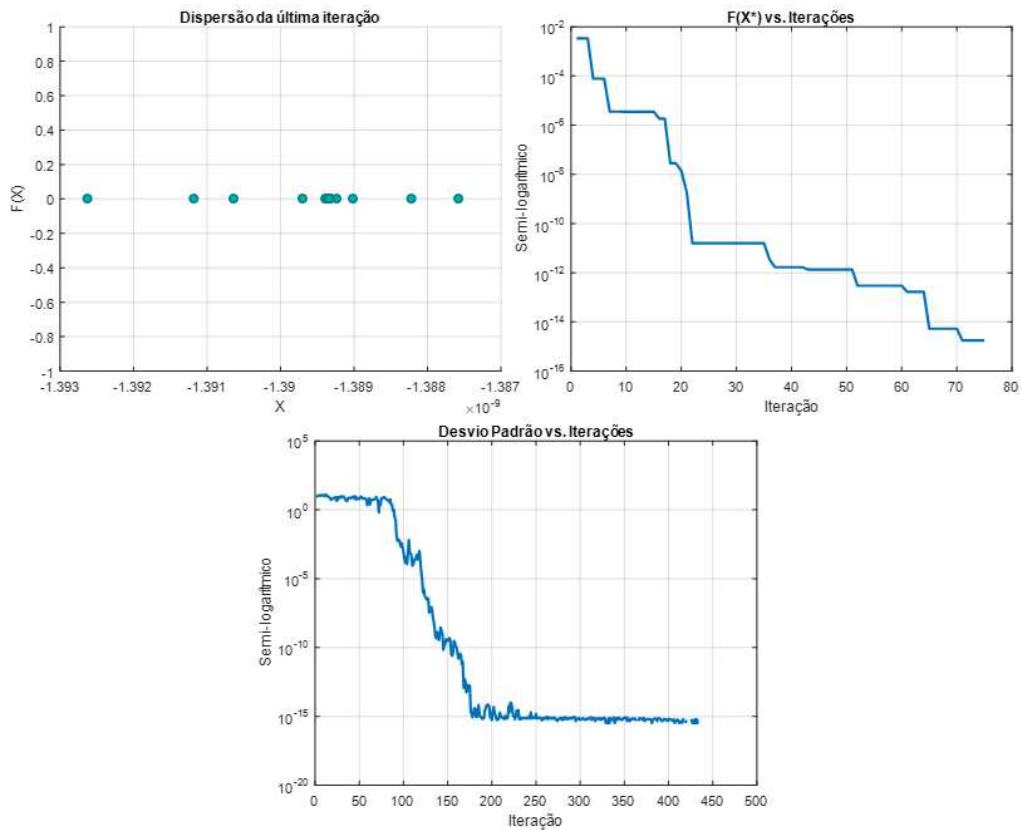


Figura 5.41. Gráficos do teste ao WOA com a função de Rastrigin

O algoritmo WOA converge para o mínimo global mais lentamente que o PSO restrigido, porém mais rapidamente que o PSO original. Devido à convergência do valor do desvio-padrão, o WOA consegue abranger melhor o espaço de pesquisa (conjunto das soluções possíveis) sem comprometer a convergência final para a solução ótima.

5.5.4 PARAMETRIZAÇÃO PARA O MÉTODO KRIGING

No contexto da utilização de metamodelos no processo de otimização, a função considerada para o cálculo da matriz de covariância do método Kriging foi a exponencial quadrada. Esta função apresenta um parâmetro L que é uma constante e deve ser tida em conta dependendo da aproximação que se pretende fazer.

Para a metamodelação da placa fina foram então feitos alguns estudos do parâmetro L . Fazendo variar o valor de L no metamodelo da deformada da placa com Kriging e comparando o seu valor máximo com o valor máximo obtido com FEM na placa de Kant.

Este estudo foi feito para dois casos:

- Com todos os pontos da malha 20x20 da placa de Kant;
- Com todos os pontos do bordo, 50% dos nós do interior da placa e o nó da deformada máxima.

Com a segunda abordagem o número de pontos de treino foi então reduzido de 441 para 260.

Foi calculado o desvio percentual da deformada máxima do metamodelo em relação à deformada máxima obtida com a placa de Kant. Adicionalmente calculou-se também a média dos desvios quadráticos (*Mean Squared Error*, MSE) com o intuito de perceber se o metamodelo é representativo da deformada da placa em pontos distantes do ponto de deformada máxima. Para o caso de todos os pontos, todos eles foram utilizados no cálculo do MSE. Já para o caso dos 260 pontos, calculou-se o MSE utilizando os 441 pontos, em que 181 não fizeram parte do cálculo do metamodelo, e também se calculou o MSE utilizando apenas os 260 pontos, como comparação com o caso anterior.

Este metamodelo representa $W(x,y)$, ou seja, a superfície da deformada da placa em função das coordenadas (x,y) . Para determinar o parâmetro L , a espessura considerada foi de $h=2\text{mm}$.

Todos os resultados deste estudo são apresentados no Apêndice VII.

5.5.4.1 PARÂMETRO L COM 441 PONTOS

Para o caso do metamodelo criado a partir de todos os nós da malha da placa de Kant, o valor de L mais promissor foi o valor de 75, utilizando Kriging Comum ou Universal.

Tabela 5.15. Resultados do teste $L=75$ para 441 pontos

Nº pontos no bordo = todos								
Nº pontos no interior = todos								
$L=75$	Wmax	Xmax	Ymax	Wmin	Xmin	Ymin	Dif(%)	MSE
Simples	2,630	50	50	x	x	x	11,059	0,129
Comum	2,367	50	50	x	x	x	-0,041	0,072
Universal	2,367	50	50	x	x	x	-0,041	0,072

Obs:

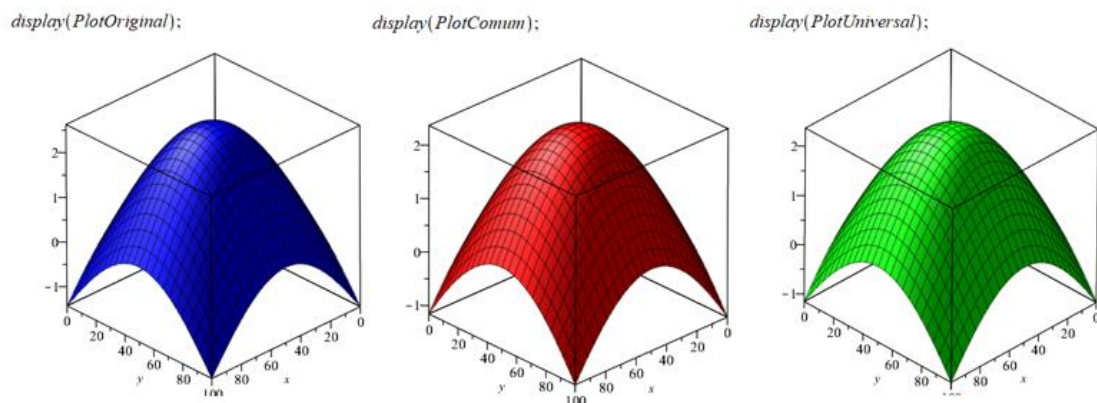


Figura 5.42. Representação gráfica da superfície da deformada, Kriging com 441 pontos ($L=75$)

Como é possível ver na Tabela 5.15, o valor do desvio entre a deformada máxima obtida com Kant e com os metamodelos utilizando Kriging Comum e Universal é muito baixo, assumindo um valor de $-0,041\%$. O valor do MSE de $0,072$ assegura que este metamodelo representa a superfície da deformada com algum rigor fora das coordenadas do ponto da deformada máxima.

De qualquer modo, se o objectivo fosse representar com maior exactidão a superfície da deformada e não a deformada máxima, o valor de $L=25$ assegura com melhor essa aproximação.

Tabela 5.16. Resultados do teste $L=25$ para 441 pontos

Nº pontos no bordo = todos								
Nº pontos no interior = todos								
L=25	Wmax	Xmax	Ymax	Wmin	Xmin	Ymin	Dif(%)	MSE
Simple	2,390	50	50	x	x	x	0,939	0,017
Comum	2,418	50	50	x	x	x	2,119	0,017
Universal	2,418	50	50	x	x	x	2,119	0,017

Obs:

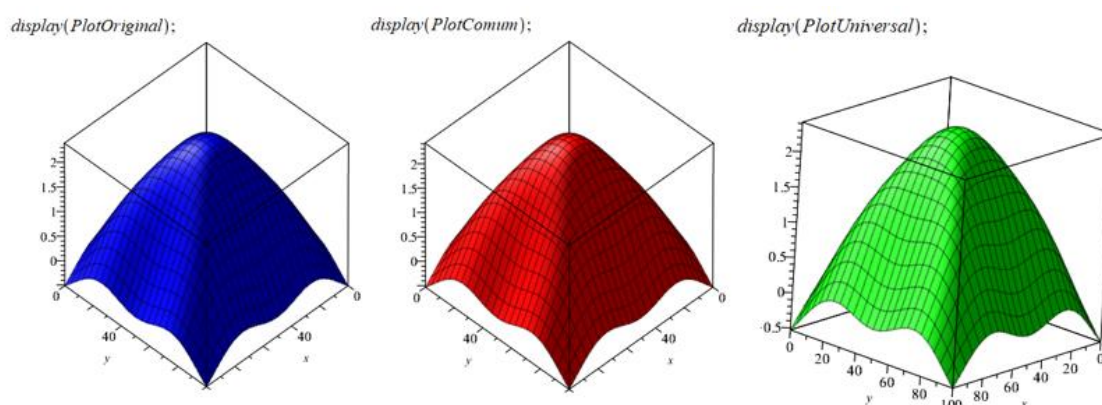


Figura 5.43. Representação gráfica da superfície da deformada, Kriging com 441 pontos ($L=25$)

Como é possível observar pela Figura 5.43 a representação dos bordos está mais assegurada que no caso de $L=75$. E comparando os valores do MSE da Tabela 5.16 com o valor da Tabela 5.15 para a aproximação com Kriging Simple, o primeiro caso é menor, o que nos indica que este metamodelo possui uma melhor conformação à superfície a modelar.

5.5.4.2 PARÂMETRO L COM 260 PONTOS

O teste ao parâmetro L do metamodelo da superfície da deformada da placa utilizando apenas 260 pontos apresenta os seguintes resultados:

Tabela 5.17. Resultados do teste $L=50,02$ para 260 pontos

Nº pontos no bordo = todos									
Nº pontos no interior = 181+1									
L=50,02	Wmax	Xmax	Ymax	Wmin	Xmin	Ymin	Dif(%)	MSE 100%	MSE 50%
Simple	2,352	50,247	50,132	-0,916	0	0	-0,677	0,066	0,087
Comum	2,238	50,279	50,149	-0,947	0	0	-5,458	0,070	0,093
Universal	2,246	47,617	48,639	-0,908	100	100	-5,132	0,074	0,097

Obs: L é média de (x,y)

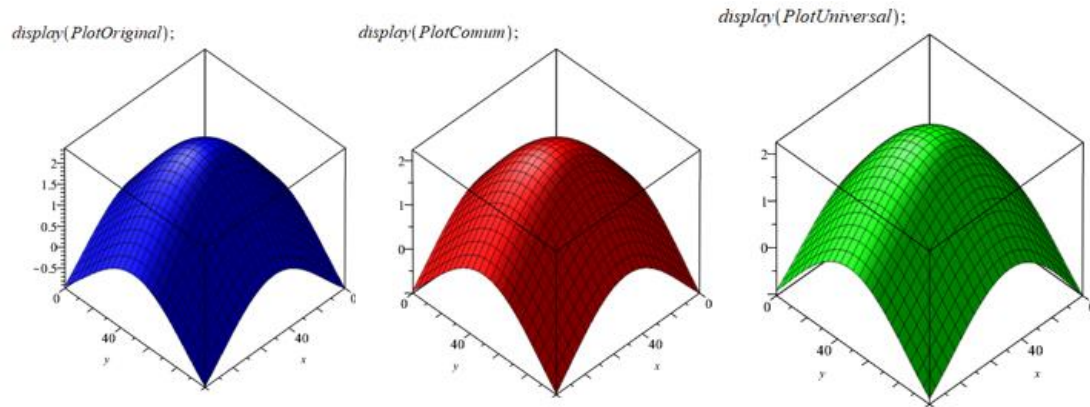


Figura 5.44. Representação gráfica da superfície da deformada, Kriging com 260 pontos ($L=50,02$)

A Tabela 5.17 e a Figura 5.44 mostram os resultados obtidos para a metamodelação com Kriging com o valor de L que demonstra melhores resultados utilizando 260 pontos. Este $L=50,02$ é a média dos valores das coordenadas (x,y) dos pontos utilizados na interpolação.

O Kriging mais promissor neste caso foi o Kriging Simples, que apresenta um desvio de apenas $-0,677\%$ entre os valores da deformada máxima da placa obtida com Kriging e com a placa de Kant. O valor do MSE para este metamodelo é de $0,087$ utilizando 260 pontos no seu cálculo e para 441 pontos o MSE assume um valor de $0,066$. O que mais uma vez nos indica que fora das coordenadas da deformada máxima o modelo da deformada da placa é bastante aproximado.

Para a aproximação com 260 pontos não foi possível encontrar um valor de L que garantisse um desvio nos valores da deformada máxima inferior a 1% e que ao mesmo tempo representasse uma boa modelação do bordo da placa, como foi possível encontrar para o caso dos 441 pontos.

Apesar de este caso apresentar um desvio ligeiramente superior ao caso anterior, optou-se por esta metamodelação já que a redução de 441 para 260 pontos reduz o tempo de simulação consideravelmente e que o ponto de deformada máxima tem um baixo desvio, tendo em conta que a cada geração nos algoritmos de optimização meta-heurísticos esta função metamodelo é recalculada.

5.6 OPTIMIZAÇÃO

Nesta sub-secção serão abordados todos os estudos relativos à optimização dos diferentes modelos utilizados.

5.6.1 OPTIMIZAÇÃO DA DEFORMADA TRANSVERSAL DE UMA PLACA FINA

Em todos os estudos de optimização feitos aos modelos de placa fina, as características da placa são as mesmas da placa definida na sub-secção 5.5.2, em que a

variável de projecto é a espessura da placa que varia no intervalo de valores $h = [2, 4]$ mm e o objectivo dos estudos de optimização é minimizar a deformada da placa.

Os resultados referentes a estes estudos de optimização encontram-se no Apêndice VIII.

5.6.1.1 OPTIMIZAÇÃO DA DEFORMADA DA PLACA EM *SOLIDWORKS*

Como já foi descrito na sub-secção 4.4.2, o *SolidWorks* tem uma opção para optimização utilizando variáveis discretas. Para optimizar a placa fina fez-se variar a variável de projecto nos valores de 2 mm e 4 mm, fizeram-se várias simulações no conjunto de valores assumidos para o passo de {0.1, 0.25, 0.5, 0.75, 1} mm. As características da placa são iguais às da optimização utilizando a o PSO e o WOA.

A placa foi optimizada considerando como objectivo a minimização da deformada transversal máxima, com o constrangimento associado da tensão de cedência do material T2 que não poderia ser excedida.

Tabela 5.18. Resultados da optimização da placa fina no SolidWorks

Passo: 1 mm			
	Valor Actual	Valor Inicial	Valor Óptimo
h [mm]	2	2	4
σ_{\max} [MPa]	15.456	15.456	3.864
Desl. Máx. [mm]	2.36363	2.36363	0.29545
Passo: 0,75 mm			
	Valor Actual	Valor Inicial	Valor Óptimo
h [mm]	2	2	4
σ_{\max} [MPa]	15.456	15.456	3.864
Desl. Máx. [mm]	2.36363	2.36363	0.29545
Passo: 0,5mm			
	Valor Actual	Valor Inicial	Valor Óptimo
h [mm]	2	2	4
σ_{\max} [MPa]	15.456	15.456	3.864
Desl. Máx. [mm]	2.36363	2.36363	0.29545
Passo: 0,25mm			
	Valor Actual	Valor Inicial	Valor Óptimo
h [mm]	2	2	4
σ_{\max} [MPa]	15.456	15.456	3.864
Desl. Máx. [mm]	2.36363	2.36363	0.29545
Passo: 0,1mm			
	Valor Actual	Valor Inicial	Valor Óptimo
h [mm]	2	2	4
σ_{\max} [MPa]	15.456	15.456	3.864
Desl. Máx. [mm]	2.36363	2.36363	0.29545

Pode-se concluir pela Tabela 5.18 que para qualquer passo, o resultado é sempre o valor máximo do intervalo da variável de projecto, como era expectável já que quanto maior for a espessura da placa maior é o seu coeficiente de rigidez à flexão.

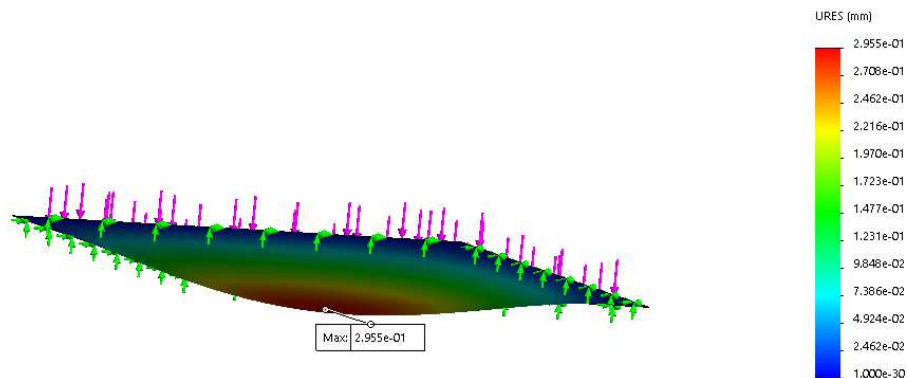


Figura 5.45. Deformada máxima da placa depois da otimização do *SolidWorks*

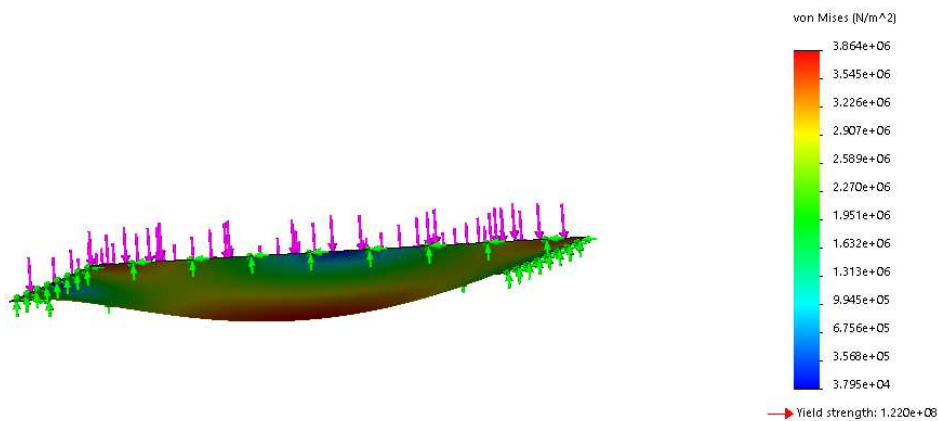


Figura 5.46. Distribuição de tensões na placa fina depois da otimização do *SolidWorks*

A Figura 5.45 mostra a deformada da placa com uma anotação da deformada máxima e a Figura 5.46 mostra a distribuição de tensões na placa. Como era objectivo do estudo minimizar a deformada, esta passou de 2,364 mm com $h=2\text{mm}$ para 0,296 mm com $h=4\text{mm}$.

5.6.1.2 OPTIMIZAÇÃO DA DEFORMADA DA PLACA: MÉTODO DE NAVIER

Utilizando o método de Navier foi possível determinar a equação que atribui um valor máximo à deformada da placa em função da espessura. Sabendo que a deformada máxima ocorre em $x = \frac{a}{2}$ e $y = \frac{b}{2}$ quando a placa está sujeita a um carregamento uniforme, e utilizando os parâmetros $a = b = 100\text{mm}$, $Po = 0,02\text{ MPa}$ e as características do material T2, a equação que define a deformada máxima é:

$$W_{max} = \frac{18,91365096}{t^3} - \frac{2,097455325 \cdot 10^{-10}}{t^6} \quad (5.2)$$

Esta função foi definida como função objectivo a minimizar utilizando os algoritmos PSO restringido e o WOA. Fizeram-se cinco corridas para os dois algoritmos, utilizando um número de 50 iterações com uma população igual a 30 para cada.

Os resultados em termos de minimização foram iguais para os dois algoritmos (Tabela 5.19), contudo o algoritmo WOA apresenta um desvio-padrão ligeiramente superior ao PSO, o que seria de esperar já que o WOA tem como característica uma menor velocidade de convergência para garantir uma melhor cobertura do espaço de pesquisa. Estas diferenças podem ser observadas na Figura 5.47 que representa o comportamento do PSO e na Figura 5.48 que representa o comportamento do WOA.

Tabela 5.19. Resultados obtidos para o estudo de optimização da função da deformada utilizando o método de Navier

Iteração=50	Resultados obtidos [mm]	
	PSO	WOA
F(X*)	0,29553	0,29553
X*	4	4
Desvio-padrão	2,26E-16	4,19E-04
Média de F(X*)	0,29553	0,29560

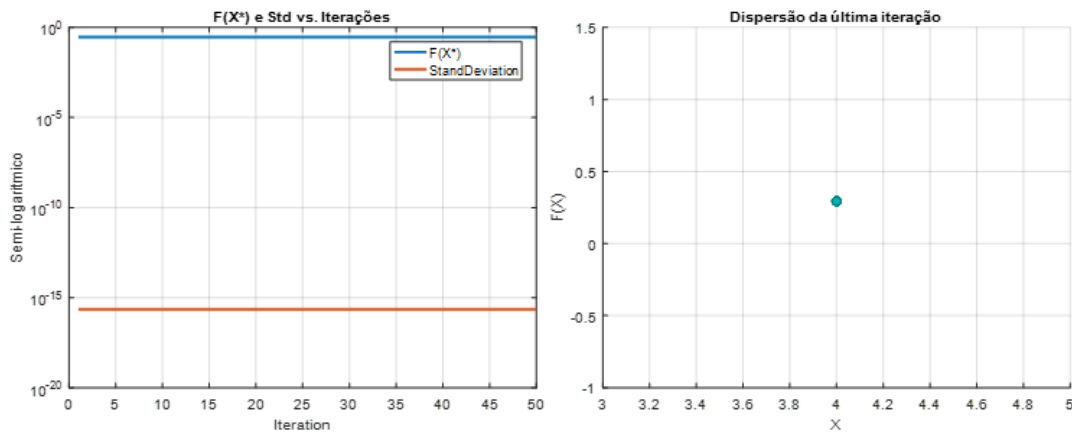


Figura 5.47. Optimização da placa fina (Navier) PSO: À esq.) F(X*) e desvio-padrão em função do nº das iterações; à dir.) Dispersão da população na última iteração.

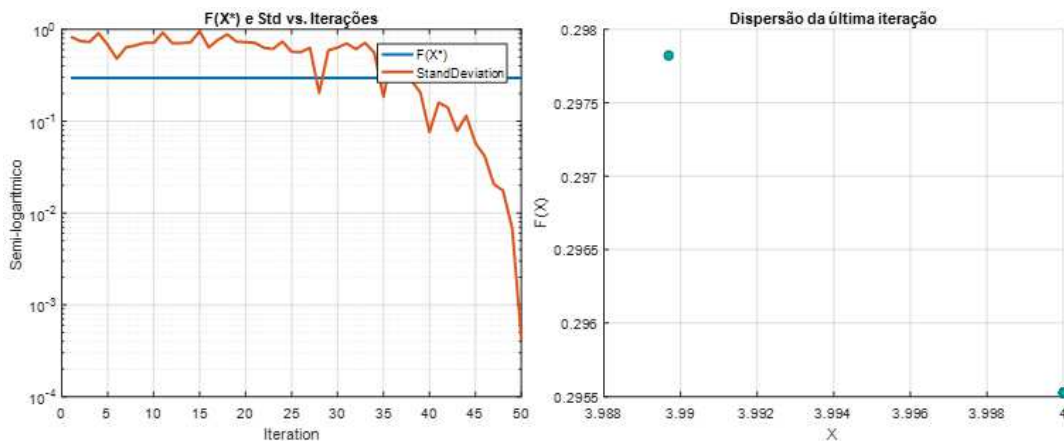


Figura 5.48. Optimização da placa fina (Navier) WOA: À esq.) F(X*) e desvio-padrão em função do nº das iterações; à dir.) Dispersão da população na última iteração.

Para ambos os algoritmos, a espessura foi maximizada como era expectável que acontecesse, já que no intervalo $h = [2,4] \text{ mm}$ a placa não excede a tensão de cedência e aumentando a espessura da placa aumenta-se a sua rigidez à flexão.

5.6.1.3 OPTIMIZAÇÃO DA DEFORMADA DA PLACA: FORMULAÇÃO DE KANT

A análise de elementos finitos foi codificada através de uma função em *Matlab* que tem como *input* a espessura da placa, e *output* a deformada nos nós. Desta forma pode ser utilizada como uma função $f(x)$ passível de ser otimizada num dado domínio, pelos algoritmos meta-heurísticos em estudo.

As características definidas para o modelo da placa foram as mesmas que para o modelo MEF da placa em *SolidWorks* e para o modelo analítico da placa pelo método de Navier, então $a = b = 100 \text{ mm}$, $P_0 = 0.02 \text{ MPa}$, utilizando as características do material T2 e 20 elementos na direcção x e na direcção y . Contudo as unidades utilizadas no modelo de Kant são unidades SI, ou seja, os valores estão apresentados em metros. A optimização deste problema foi feita no nó central da placa, já que para uma placa simplesmente apoiada com um carregamento uniforme, a deformada máxima ocorre no centro da placa.

Fizeram-se cinco corridas para cada um dos algoritmos, o PSO restringido e o WOA, com apenas 25 iterações cada corrida (por limitações de capacidade computacional), com 30 elementos por população.

Para este caso, os resultados da minimização da deformada da placa em função da espessura foram idênticos para os dois algoritmos de optimização. Ambos atingiram o mesmo valor óptimo e a mesma espessura óptima. Relembrando que os resultados são apresentados em metros quer para o valor óptimo da deformada máxima ($F(X^*)$), quer para o valor da espessura que lhe corresponde (X^*), quer o desvio-padrão e a média dos resultados da última população.

Apesar de a espessura ter sido maximizada em ambos os casos, existem diferenças que se prendem com o comportamento dos dois algoritmos como se pode ver na Figura 5.49 e na Figura 5.50.

Tabela 5.20. Resultados do estudo de optimização da placa de Kant

Iteração = 25	Resultados Obtidos [m]	
	PSO	WOA
$F(X^*)$	0,000298	0,000298
X^*	0,004	0,004
Desvio-Padrão	2,21E-19	6,70E-06
Média	0,000298	0,000300

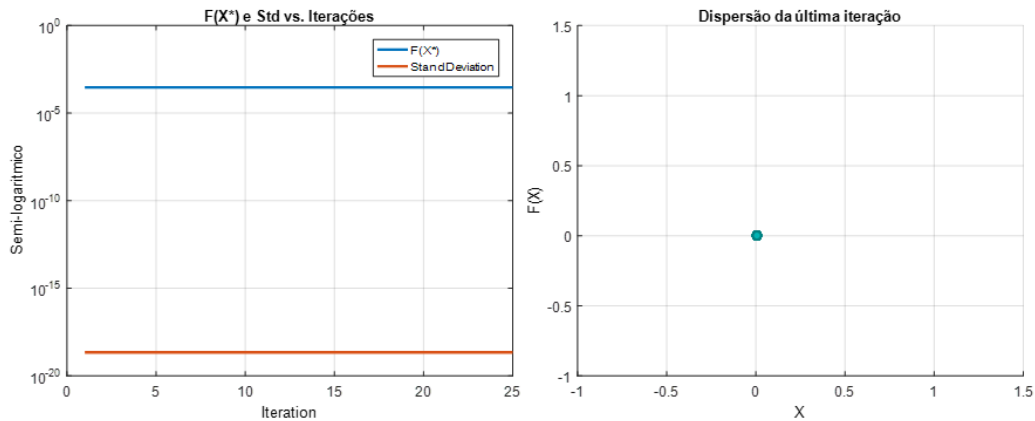


Figura 5.49. Optimização da placa de Kant com PSO: À esq.) $F(X^*)$ e desvio-padrão em função do nº das iterações; à dir.) Dispersão da população na última iteração.

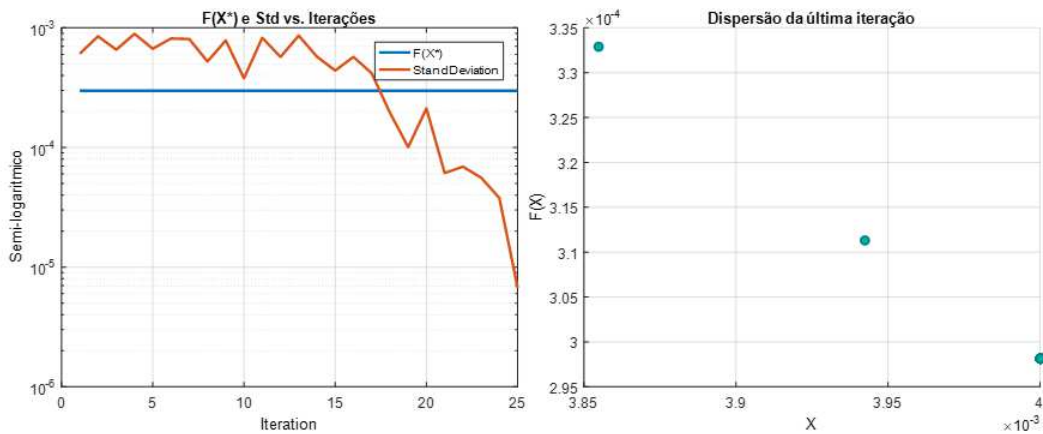


Figura 5.50. Optimização da placa de Kant com WOA: À esq.) $F(X^*)$ e desvio-padrão em função do nº das iterações; à dir.) Dispersão da população na última iteração.

O algoritmo PSO restringido tem uma velocidade de convergência muito rápida, já que o seu valor óptimo estabiliza logo em 0.004 m desde a primeira iteração como se pode ver na Figura 5.49. Já o algoritmo WOA tem uma velocidade de convergência mais lenta (Figura 5.50), o que também garante uma melhor cobertura do espaço de pesquisa na existência de mínimos locais, mas nas últimas iterações o valor do desvio-padrão também assume o valor de zero, como já tinha sido constatado para as funções de teste e optimização da placa fina definida pelo método de Navier.

5.6.1.4 OPTIMIZAÇÃO DO METAMODELO DA DEFORMADA DA PLACA FINA

Para introduzir a utilização da metamodelação a modelos mais complexos começou-se por definir a deformada transversal de uma placa fina como um metamodelo. Para isso utilizaram-se os nós da placa de Kant como base para o modelo, isto é, para a malha 20x20 da placa de Kant foi retirada a informação de 30 nós aleatórios no interior da placa e de 17 nós que foram escolhidos estrategicamente, 16 nós dos bordos e 1 do centro da

placa. A informação recolhida em cada nó refere-se às coordenadas (x,y) e à respectiva deformada de cada nó.

Sabendo que o objectivo do estudo de optimização é minimizar a deformada em função da espessura, estas matrizes de valores (x,y,W) foram então obtidas para $h = \{2, 2.25, 2.5, 2.75, 3, 3.25, 3.5, 3.75, 4\} \text{ mm}$ para que se conseguisse modelar um metamodelo da deformada da placa em função da espessura.

O objectivo seria então conseguir interpolar cada superfície da deformada da placa $W_h(x, y)$ e posteriormente interpolar as várias superfícies da deformada de modo a obter o metamodelo da deformada da placa $W(x, y, h)$ em função das coordenadas (x,y) e da espessura h .

O *software* utilizado na metamodelação foi o *Matlab* e a função que interpola $W_h(x, y)$ foi a função *fit* da *toolbox Curve Fitting* com a opção de interpolação linear, para garantir a passagem desta superfície por todos os pontos. A superfície da deformada da placa metamodelada para $h=2 \text{ mm}$, $W_{h=2}(x, y)$ está representada na Figura 5.51, em que é visível a passagem pelos pontos aleatorizados no interior da placa.

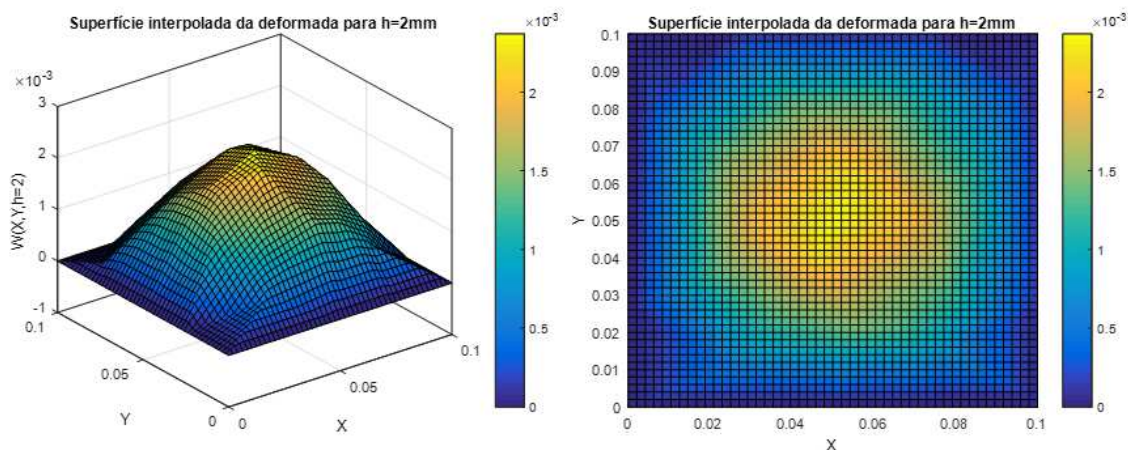


Figura 5.51. Superfície da $W(x,y,h=2)$ metamodelada

Infelizmente, o *Matlab* não permite utilizar cada uma destas funções interpoladas para interpolar uma nova função $W(x, y, h)$. Como tal codificou-se uma rotina simples para identificar a deformada máxima em cada superfície interpolada e a coordenada (x,y) que lhe corresponde (Pseudocódigo 5.1).

```

Interpolar linearmente superfície  $fH = ([X, Y], W_h)$ 
Inicializar  $W_{max}(x, y, h), [x_{W_{max}}, y_{W_{max}}], \vec{x}, \vec{y}$ 
  Para  $i=1$  até à dimensão  $(\vec{x})+1$ 
    Para  $j=1$  até à dimensão  $(\vec{y})+1$ 
       $W_h(i, j) = fH(x_i, y_j)$ 
      Se  $W_h(i, j) > W_{max}(x, y, h)$ 
         $W_{max}(x, y, h) = W_h(i, j)$ 
         $[x_{W_{max}}, y_{W_{max}}] = [x_i, y_i]$ 
      Fim
    Fim
  Fim

```

Pseudocódigo 5.1. Passos para obtenção da deformada máxima em função de (x, y) e espessura

Verificando que para estas superfícies interpoladas, as coordenadas (x, y) que correspondem ao valor máximo da deformada não variam, fez-se então, a interpolação do conjunto de valores $[W_{max}] = f([h])$.

Uma vez mais foram utilizadas as funcionalidades do *Curve Fitting* do *Matlab*, mas desta vez fazendo uma interpolação polinomial de 4º grau em duas dimensões. Em que os resultados obtidos foram:

$$W_{max}(h) = p_1 h^4 + p_2 h^3 + p_3 h^2 + p_4 h + p_5 \quad (5.3)$$

Tabela 5.21. Resultados da regressão polinomial de 4º de $W_{max}(h)$

Resultados da regressão polinomial de 4º grau			
p_1	$1.804 \cdot 10^8$	R^2	1
p_2	$-2.522 \cdot 10^6$	R^2 ajustado	0.9999
p_3	$1.34 \cdot 10^4$		
p_4	-32.48	σ^2	$1.479 \cdot 10^{-10}$
p_5	0.03101		

Os resultados da regressão podem ser consultados na Tabela 5.21, bem como a representação gráfica pode ser vista na Figura 5.52 onde os pontos das diferentes superfícies (que deram origem ao polinómio interpolado) se ajustam à curva.

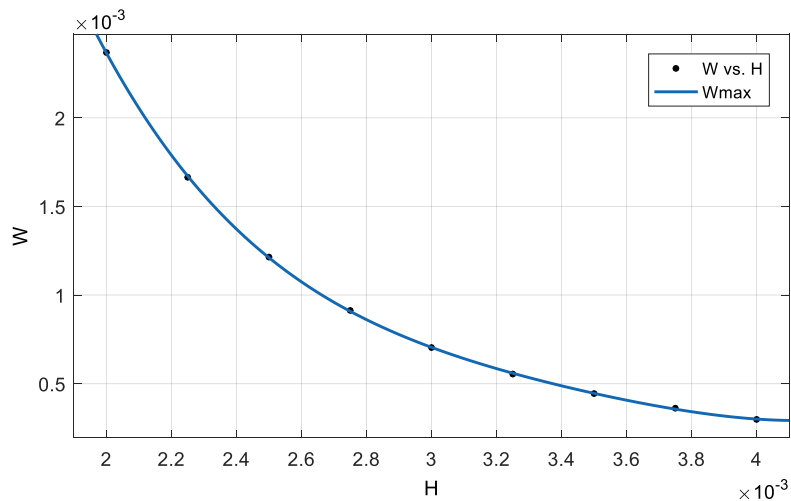


Figura 5.52. Curva da regressão polinomial de 4º grau da Wmax(h)

Esta função foi otimizada utilizando os algoritmos PSO restringido e o WOA, tal como foi feito para a equação da deformada máxima obtida utilizando o método de Navier, também aqui se utilizaram 50 iterações com uma população de 30 indivíduos, já que a questão da limitação de capacidade de processamento computacional não se colocou.

Relembrando que os resultados estão em metros, já que a função foi gerada com os resultados da placa de Kant que está definida em unidades (SI).

Tabela 5.22. Resultados do estudo de otimização da função Wmax(h) da placa metamodelada

Iteração = 50	Resultados da otimização	
	PSO	WOA
F(X*)	0,0002644	0,0002644
X*	0,004	0,004
Desvio-padrão	0	2,98E-07
Média	0,0002644	0,00026445

Mais uma vez os resultados do estudo de otimização assemelham-se, como se pode ver na Tabela 5.22, se se comparar os valores obtidos com os dois algoritmos em termos de valor ótimo F(X*). O comportamento dos dois algoritmos também é semelhante àquilo que já tinha sido observado nos outros dois estudos de otimização (função Wmax de Navier e Wmax da placa de Kant) em que o algoritmo PSO converge muito rapidamente para o F(X*) e o WOA converge mais lentamente cobrindo contudo melhor o espaço de pesquisa (Figura 5.53 e Figura 5.54).

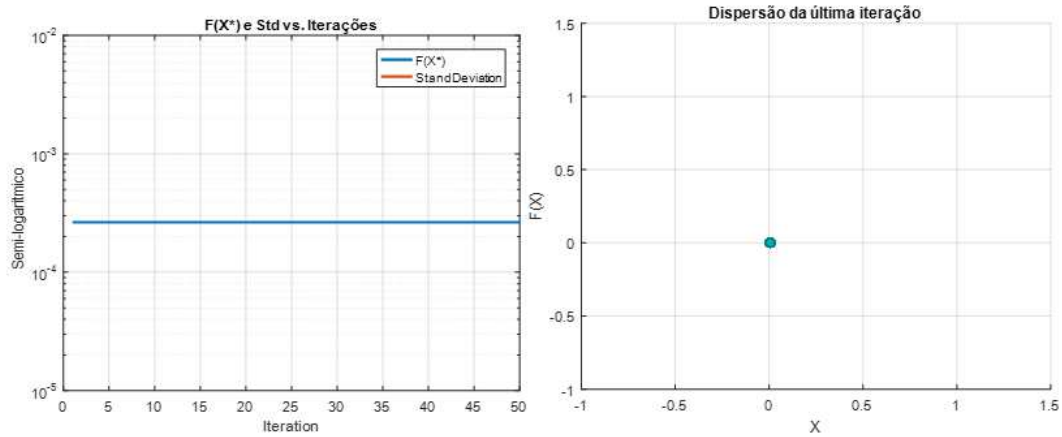


Figura 5.53. Optimização da função $W_{max}(h)$ do metamodelo com PSO: À esq.) $F(X^*)$ e desvio-padrão em função do nº das iterações; à dir.) Dispersão da população na última iteração.

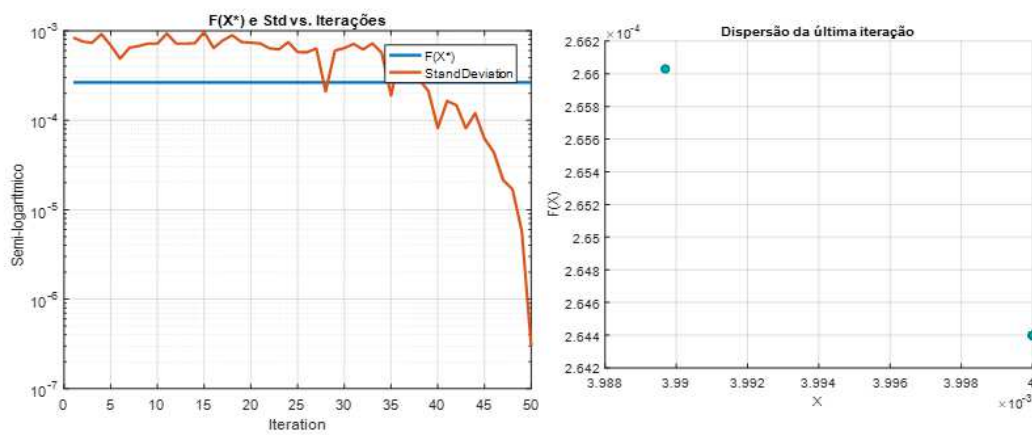


Figura 5.54. Optimização da função $W_{max}(h)$ do metamodelo com WOA: À esq.) $F(X^*)$ e desvio-padrão em função do nº das iterações; à dir.) Dispersão da população na última iteração.

A deformada foi minimizada à custa da maximização da espessura, tal como era esperado.

5.6.1.5 OPTIMIZAÇÃO POR METAMODELAÇÃO DA DEFORMADA DA PLACA FINA COM KRIGING

Com o objectivo de se encontrar uma função capaz de metamodelar a deformada da placa em função das coordenadas (x,y) e da espessura h , utilizou-se o método Kriging que através da relação da distância Euclidiana entre os diferentes pontos da amostra é capaz de aproximar o valor da deformada para um domínio contínuo.

Para otimizar a deformada da placa em função da espessura é necessário dividir o problema em duas etapas, em que a primeira etapa se trata de um problema de maximização da deformada e a segunda etapa da minimização da deformada máxima.

Na primeira etapa metamodelaram-se cinco espessuras da placa, $h=\{2, 2.5, 3, 3.5, 4\}$ mm, com o método Kriging Simples, utilizando 260 pontos na aproximação e $L=50,02$

(ver 5.5.4.2). Utilizando os algoritmos meta-heurísticos PSO restringido e WOA de minimização, procedeu-se à optimização do problema dual, em que se encontrou $W_{max}(x,y)$ e as correspondentes coordenadas (x,y) para cada uma das espessuras.

Para cada algoritmo de optimização efectuaram-se cinco corridas, em que cada corrida conta com a optimização de cinco espessuras, cada espessura é optimizada no decorrer de 150 gerações e cada população tem 30 indivíduos. O número reduzido de corridas justifica-se com a semelhança de resultados entre corridas (Apêndice VIII) e o tempo e recursos computacionais que cada corrida exige.

Considerando que os pontos utilizados na construção do metamodelo não estão dispostos simetricamente, o W_{max} não se situa exactamente no centro da placa, mas muito próximo (ver 5.5.4.2). Assim sendo também os resultados obtidos com os algoritmos meta-heurísticos são influenciados por este factor. De modo a perceber quão diferentes eram os resultados da optimização entre as diferentes espessuras, calculou-se o valor médio das coordenadas (x,y) de W_{max} entre os valores obtidos para cada espessura, e para perceber se este valor se desviava muito entre espessuras, os respectivos desvios-padrão. O valor óptimo considerado em cada um dos algoritmos corresponde ao valor de W_{max} mínimo (problema dual) obtido nas cinco corridas, e os valores de x e y médios e os respectivos desvios-padrão foram utilizados como indicadores para validação dos resultados obtidos.

Os resultados apresentados na Tabela 5.23 e na Tabela 5.24, referem-se à optimização da primeira etapa com o PSO e o WOA, respectivamente.

Tabela 5.23. Resultados da optimização da 1ª etapa da metamodelação com Kriging utilizando o PSO (em [mm])

5ª Corrida: PSO				
W*	X*_{med}	53,036	W(X*,Y*)	H
	Y*_{med}	51,394	-2,352	2
	Std(X*)	3,661	-1,206	2,5
-2,352	Std(Y*)	2,348	-0,681	3
			-0,432	3,5
			-0,295	4

Tabela 5.24. Resultados da otimização da 1ª etapa da metamodelação com Kriging utilizando o WOA (em [mm])

5ª Corrida: WOA				
W*	X* _{med}	50,342	W(X*,Y*)	H
-2,3522	Y* _{med}	50,034	-2,352	2
	Std(X*)	0,233	-1,206	2,5
	Std(Y*)	0,235	-0,699	3
			-0,441	3,5
			-0,296	4

O PSO não demonstrou bons resultados ao nível da convergência para o mínimo global, sendo os seus resultados descartados para a segunda etapa da optimização. Já o WOA demonstrou entre corridas uma boa convergência para o mínimo global.

No caso do WOA, a decisão entre a 4ª e a 5ª corrida, que apresentam o mesmo valor para o mínimo global, foi feita através valores dos desvios-padrão das coordenadas x e y do mínimo em cada espessura, optou-se então pelos valores da 5ª corrida em que estes valores são mais baixos.

A segunda etapa da optimização contou com a construção de uma função metamodelada com o método dos Mínimos Quadrados utilizando os melhores resultados obtidos na optimização do $W_{max}(x,y)$ com o WOA. Ou seja, a construção de um polinómio que representa a evolução da deformada máxima através da espessura no ponto (X^*,Y^*) , que neste caso é o ponto (X^*_{med},Y^*_{med}) , tendo em conta que se verificou que este ponto está muito próximo do centro da placa e que os desvios-padrão de X^* e Y^* são muito baixos.

Os valores considerados nos vectores para aproximar $W_{X^*,Y^*}(h)$ são os valores apresentados nas colunas $W(X^*,Y^*)$ e H da Tabela 5.24. A descrição do método da aproximação encontra-se detalhada no Pseudocódigo 5.2. O grau utilizado no polinómio é o grau 4, já que deve ser no máximo uma unidade inferior ao número de pontos utilizados, que são cinco.

Definição dos vectores W_{max} e H

Aplicação dos Mínimos Quadrados:

$$MinQuad = \sum_{i=1}^5 (W_{max_i} - (aH_i^4 + bH_i^3 + cH_i^2 + dH_i + e))^2$$

Solução do sistema de equações em ordem a a,b,c,d,e :

$$\begin{cases} \frac{\partial MinQuad}{\partial a} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial MinQuad}{\partial e} = 0 \end{cases}$$

$$W_{X^*,Y^*}(h) = aH_i^4 + bH_i^3 + cH_i^2 + dH_i + e$$

Pseudocódigo 5.2. Aplicação do método dos Mínimos Quadrados na aproximação da função $W_{X^*,Y^*}(h)$

A Tabela 5.25 apresenta os valores calculados para as constantes do polinómio metamodelo de $W_{X^*,Y^*}(h)$, os valores obtidos para a deformada nos pontos utilizados para a aproximação e o respectivo desvio percentual para o valor o de W_{max} obtido para cada uma das espessuras com o WOA. Os desvios calculados estão muito próximos de zero, tratando-se assim de uma boa aproximação.

Tabela 5.25. Valores obtidos para as constantes do polinómio metamodelo e respectivos desvios nos pontos conhecidos

Resultados obtidos com o método dos Mínimos Quadrados					
a	0,170	H [mm]	W(X*,Y*) [mm]	W _{X*,Y*(h)} [mm]	Desvio (%)
b	-2,394	2	2,3522	2,3522	-5,95E-05
c	12,808	2,5	1,2059	1,2059	4,72E-04
d	-31,271	3	0,6992	0,6992	-1,21E-03
e	30,092	3,5	0,4412	0,4412	1,30E-03
		4	0,2963	0,2963	-4,45E-04

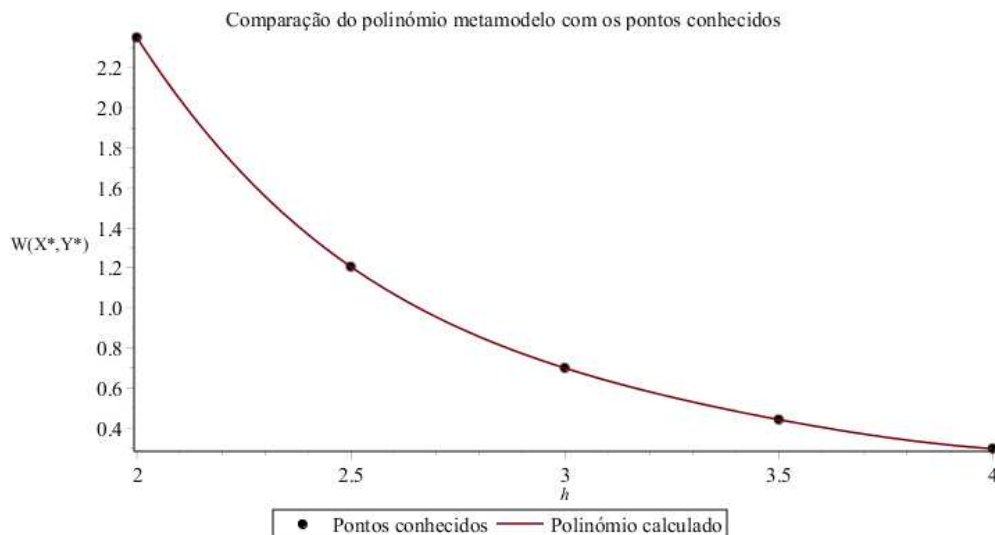


Figura 5.55. Sobreposição dos pontos utilizados no método dos Mínimos Quadrados com a função metamodelo obtida.

Na Figura 5.55 está representado o ajuste do polinómio de grau 4 calculado com os pontos que lhe deram origem, e conforme se observa os pontos são coincidentes com o polinómio, tal como era de esperar considerando os resultados da Tabela 5.25 em que os desvios obtidos estão muito próximos de zero.

Este polinómio apenas garante uma boa aproximação da evolução da deformada da placa no domínio que lhe deu origem, ou seja, entre $h=[2,4]$ mm.

Considerando que do ponto de vista da maximização da deformada da placa (metamodelo da superfície da deformada da placa com Kriging), o algoritmo PSO não demonstrou um bom desempenho em termos de convergência para o mínimo global, na

otimização do polinómio que representa a deformada máxima da placa em função da espessura, foi apenas utilizado o algoritmo WOA.

Tabela 5.26. Resultados do estudo de optimização com o WOA ao polinómio metamodelo obtido com o método dos Mínimos Quadrados.

Iteração = 50	Resultados da optimização [mm]
$F(X^*)$	0,2963
X^*	4
Desvio-padrão	0,0003
Média	0,2964

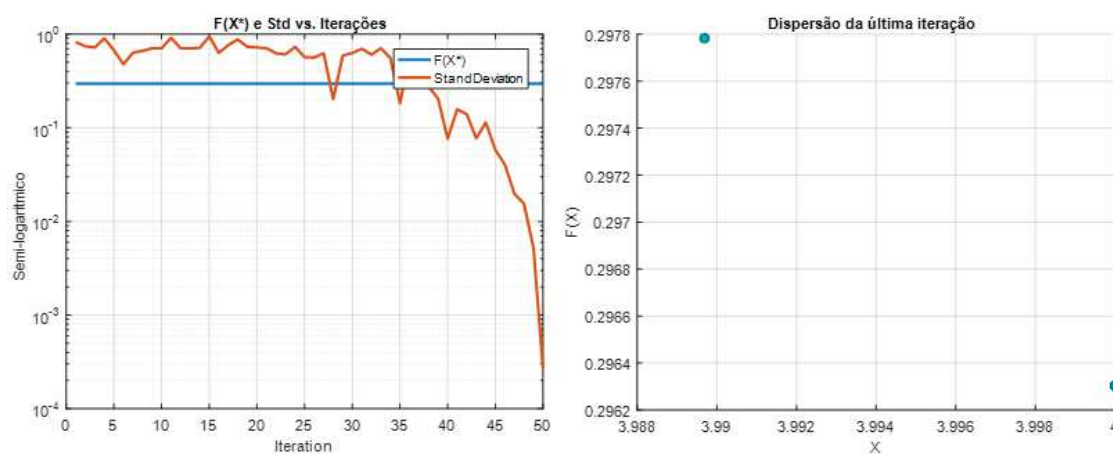


Figura 5.56. Optimização da função $W_{max}(h)$ do polinómio metamodelo com WOA: À esq.) $F(X^*)$ e desvio-padrão em função do nº das iterações; à dir.) Dispersão da população na última iteração.

No estudo de optimização da função $W_{max}(h)$ obtida com o método dos Mínimos Quadrados fizeram-se 5 corridas com algoritmo WOA, em que cada corrida conta com 150 gerações e cada geração tem uma população de 30 indivíduos. A evolução do WOA decorreu de acordo com o esperado nos testes feitos ao algoritmo, em que, o mínimo global é alcançado muito rapidamente e a convergência dos restantes membros da população é feita mais lentamente no decorrer das gerações.

Como seria de esperar a espessura foi maximizada de forma a diminuir a deformada máxima obtida (Tabela 5.26 e Figura 5.56).

5.6.1.6 COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS OBTIDOS NA OPTIMIZAÇÃO DA DEFORMADA DA PLACA FINA

Com o objectivo de comparar os diferentes métodos de optimização utilizados na placa fina, utilizou-se como valor de referência o valor da deformada máxima obtida no estudo de optimização utilizando o *Design Study* no cálculo de uma diferença percentual entre este método e os outros estudados. Para o cálculo desta diferença utilizou-se a formulação da equação 5.1.

Tabela 5.27. Comparação dos resultados obtidos nos estudos de otimização da placa fina

Método de otimização		h [mm]	Wmax(h) [mm]	Desvio (%)
Placa fina: <i>Design Study</i>		4	0,295	-
Placa fina: Método de Navier	PSO	4	0,296	0,027
	WOA	4	0,296	0,027
Placa fina: formulação de Kant	PSO	4	0,298	0,863
	WOA	4	0,298	0,863
Metamodelo da deformada da placa fina	PSO	4	0,264	-10,509
	WOA	4	0,264	-10,509
Metamodelo da deformada da placa fina com Kriging (WOA)		4	0,296	0,288

Pode-se observar pela Tabela 5.27 que em relação à otimização do *Design Study*, apenas a otimização feita com o metamodelo em que se utilizou a *toolbox Curve Fitting* do *Matlab* para definir a deformada máxima da placa de Kant apresenta uma diferença maior, da ordem dos 10,5%. Todos os outros valores ficam abaixo de 1%, indicando assim que todas estas técnicas à exceção da descrita anteriormente são adequadas para resolver este tipo de problema de otimização.

5.6.2 OPTIMIZAÇÃO DO DESLOCAMENTO RESULTANTE NAS MÁSCARAS

Nesta sub-secção pretendia-se mostrar todos os estudos de otimização relacionados com a máscara de imobilização com melhor desempenho ao nível da imobilização, ou seja, a máscara que garantiu o critério de rigidez com a menor espessura que foi a máscara M2_TC.

Contudo, um dos objectivos desta dissertação é avaliar as diferenças obtidas utilizando o método TC e o 3DLS. Portanto, foi também feita a otimização para a máscara M2_3DLS que tem a mesma geometria que a anterior, mas o método de aquisição da superfície foi diferente, havendo por isso pequenas diferenças ao nível geométrico entre as máscaras.

A espessura das máscaras foi otimizada para os dois casos de carga considerados: a flexão lateral esquerda e a flexão do pescoço. Os intervalos em que se fez variar o valor da espessura da máscara foram escolhidos tendo em conta os resultados obtidos no estudo do critério de rigidez das máscaras no ponto 5.3. Todos os resultados relacionados com os estudos de otimização das máscaras de imobilização encontram-se no Apêndice IX.

5.6.2.1 OPTIMIZAÇÃO EM *SOLIDWORKS*

O método utilizado nesta otimização das máscaras foi idêntico ao utilizado para a placa no ponto 5.6.1.1. A ferramenta utilizada em cada um destes estudos foi o *Design Study*. Note-se que nestes estudos foi feita uma monitorização da tensão equivalente de von Mises máxima de forma a garantir que esta não ultrapassaria a tensão de cedência do material T2, que constituía o constrangimento de comportamento mecânico já mencionado.

5.6.2.1.1 FLEXÃO LATERAL ESQUERDA DO PESCOÇO COM M2_TC

Para o caso de flexão lateral do pescoço utilizou-se o mesmo o intervalo de espessuras que foi utilizado no estudo de otimização utilizando a metamodelação.

Tabela 5.28. Resultados do estudo de otimização da M2_TC caso de flexão lateral do pescoço

Passo: 0,1 mm			
	Valor Actual	Valor Inicial	Valor Ótimo
h [mm]	5	5	5.5
σ_{\max} [MPa]	12.355	12.355	11.796
Desl. Máx. [mm]	1.09996	1.09996	0.86382
Passo: 0,125 mm			
	Valor Actual	Valor Inicial	Valor Ótimo
h [mm]	5	5	5.5
σ_{\max} [MPa]	12.355	12.355	11.796
Desl. Máx. [mm]	1.09996	1.09996	0.86382
Passo: 0,15 mm			
	Valor Actual	Valor Inicial	Valor Ótimo
h [mm]	5	5	5.5
σ_{\max} [MPa]	12.355	12.355	11.796
Desl. Máx. [mm]	1.09996	1.09996	0.86382
Passo: 0,175 mm			
	Valor Actual	Valor Inicial	Valor Ótimo
h [mm]	5	5	5.5
σ_{\max} [MPa]	12.355	12.355	11.796
Desl. Máx. [mm]	1.09996	1.09996	0.86382
Passo: 0,2 mm			
	Valor Actual	Valor Inicial	Valor Ótimo
h [mm]	5	5	5.5
σ_{\max} [MPa]	12.355	12.355	11.796
Desl. Máx. [mm]	1.09996	1.09996	0.86382

Tal como se esperava deste estudo a espessura foi maximizada com o objectivo de minimizar o deslocamento resultante (Tabela 5.28).

5.6.2.1.2 FLEXÃO LATERAL ESQUERDA DO PESCOÇO COM M2_3DLS

Tal como para a máscara M2_TC, para o caso de carga de flexão lateral esquerda do pescoço, foi também considerado o mesmo intervalo de espessuras em estudo, já que, no estudo do critério de rigidez (ponto 5.3) estas duas máscaras demonstram comportamentos muito semelhantes.

Tabela 5.29. Resultados do estudo de optimização da M2_3DLS caso de flexão lateral esquerda do pescoço

Passo: 0,1 mm			
	Valor Actual	Valor Inicial	Valor Óptimo
h [mm]	5	5	5.5
σ_{\max} [MPa]	12.692	12.692	12.025
Desl. Máx. [mm]	1.12118	1.12118	0.8798
Passo: 0,125 mm			
	Valor Actual	Valor Inicial	Valor Óptimo
h [mm]	5	5	5.5
σ_{\max} [MPa]	12.692	12.692	12.025
Desl. Máx. [mm]	1.12118	1.12118	0.8798
Passo: 0,15 mm			
	Valor Actual	Valor Inicial	Valor Óptimo
h [mm]	5	5	5.5
σ_{\max} [MPa]	12.692	12.692	12.025
Desl. Máx. [mm]	1.12118	1.12118	0.8798
Passo: 0,175 mm			
	Valor Actual	Valor Inicial	Valor Óptimo
h [mm]	5	5	5.5
σ_{\max} [MPa]	12.692	12.692	12.025
Desl. Máx. [mm]	1.12118	1.12118	0.8798
Passo: 0,2 mm			
	Valor Actual	Valor Inicial	Valor Óptimo
h [mm]	5	5	5.5
σ_{\max} [MPa]	12.692	12.692	12.025
Desl. Máx. [mm]	1.12118	1.12118	0.8798

Os resultados obtidos mostrados na Tabela 5.29 estão de acordo com o esperado, já que à máxima espessura corresponde o valor mínimo de deslocamento, que era o objectivo deste estudo de optimização.

5.6.2.1.3 FLEXÃO DO PESCOÇO COM M2_TC

Neste estudo de optimização com o *Design Study* fez-se variar a espessura da máscara de imobilização no intervalo $h=[2.2, 2.7]$ mm, tendo como referência os resultados obtidos no ponto 5.3.

Tabela 5.30. Resultados do estudo de optimização da M2_TC caso de flexão do pescoço.

Passo: 0,1 mm			
	Valor Actual	Valor Inicial	Valor Óptimo
h [mm]	2.2	2.2	2.7
σ_{\max} [MPa]	15.12	15.12	11.24
Desl. Máx. [mm]	1.4559	1.4559	0.87696
Passo: 0,125 mm			
	Valor Actual	Valor Inicial	Valor Óptimo
h [mm]	2.2	2.2	2.7
σ_{\max} [MPa]	15.12	15.12	11.24
Desl. Máx. [mm]	1.4559	1.4559	0.87696
Passo: 0,15 mm			
	Valor Actual	Valor Inicial	Valor Óptimo
h [mm]	2.2	2.2	2.7
σ_{\max} [MPa]	15.12	15.12	11.24
Desl. Máx. [mm]	1.4559	1.4559	0.87696
Passo: 0,175 mm			
	Valor Actual	Valor Inicial	Valor Óptimo
h [mm]	2.2	2.2	2.7
σ_{\max} [MPa]	15.12	15.12	11.24
Desl. Máx. [mm]	1.4559	1.4559	0.87696
Passo: 0,2 mm			
	Valor Actual	Valor Inicial	Valor Óptimo
h [mm]	2.2	2.2	2.7
σ_{\max} [MPa]	15.12	15.12	11.24
Desl. Máx. [mm]	1.4559	1.4559	0.87696

Os resultados obtidos na Tabela 5.30 estão de acordo com o esperado já que à máxima espessura do intervalo em estudo corresponde o mínimo deslocamento.

5.6.2.1.4 FLEXÃO DO PESCOÇO COM M2_3DLS

O intervalo em que se fez variar o valor da espessura da máscara M2_3DLS no estudo de otimização com *Design Study* para o caso de carga de flexão do pescoço foi o mesmo que foi utilizado na M2_TC para este caso de carga, dadas as semelhanças de resultados no ponto 5.3.

Tabela 5.31. Resultados do estudo de otimização da M2_3DLS caso de flexão do pescoço.

Passo: 0,1 mm			
	Valor Actual	Valor Inicial	Valor Óptimo
h [mm]	2.2	2.2	2.7
σ_{\max} [MPa]	15.178	15.178	11.231
Desl. Máx. [mm]	1.50686	1.50686	0.90611
Passo: 0,125 mm			
	Valor Actual	Valor Inicial	Valor Óptimo
h [mm]	2.2	2.2	2.7
σ_{\max} [MPa]	15.178	15.178	11.231
Desl. Máx. [mm]	1.50686	1.50686	0.90611
Passo: 0,15 mm			
	Valor Actual	Valor Inicial	Valor Óptimo
h [mm]	2.2	2.2	2.7
σ_{\max} [MPa]	15.178	15.178	11.231
Desl. Máx. [mm]	1.50686	1.50686	0.90611
Passo: 0,175 mm			
	Valor Actual	Valor Inicial	Valor Óptimo
h [mm]	2.2	2.2	2.7
σ_{\max} [MPa]	15.178	15.178	11.231
Desl. Máx. [mm]	1.50686	1.50686	0.90611
Passo: 0,2 mm			
	Valor Actual	Valor Inicial	Valor Óptimo
h [mm]	2.2	2.2	2.7
σ_{\max} [MPa]	15.178	15.178	11.231
Desl. Máx. [mm]	1.50686	1.50686	0.90611

Os resultados do estudo de otimização com o *Design Study* neste caso de carga foram os esperados, já que à máxima espessura corresponde o mínimo deslocamento (Tabela 5.31).

5.6.2.2 OPTIMIZAÇÃO DOS METAMODELOS DO DESLOCAMENTO RESULTANTE

Considerando os resultados obtidos com a metamodelação deformada da placa de Kant e a sua respectiva optimização com o algoritmo WOA (ponto 5.6.1.5), aplicou-se a mesma metodologia de metamodelação e optimização às máscaras de imobilização.

Tal como para o caso da placa fina, na optimização dos metamodelos do deslocamento resultante das máscaras também foi necessário dividir o estudo em duas etapas: a determinação do valor máximo do deslocamento resultante e posteriormente a minimização do deslocamento resultante máximo. Sabendo que o algoritmo de optimização mais promissor no caso da optimização da função metamodelo foi o WOA, para os estudos de optimização das máscaras foi este o algoritmo escolhido.

Todos os resultados obtidos referentes aos testes ao parâmetro L encontram-se no Apêndice VII, os testes realizados ao parâmetro foram feitos com a função interpolada e a biblioteca de optimização do *Maple*. Todos os resultados dos estudos de optimização encontram-se no Apêndice IX.

5.6.2.2.1 FLEXÃO LATERAL ESQUERDA DO PESCOÇO COM M2_TC

Para o caso do carregamento da flexão lateral esquerda do pescoço, foi isolada a zona da máscara M2_TC de maior deslocamento (Figura 5.57.a), desta zona foram retirados os valores de deslocamento diferentes de zero, as respectivas coordenadas (x,y,z) e a espessura correspondente.

Neste caso a determinação da localização do valor do deslocamento resultante máximo é feita no espaço 3D, e não no plano, como foi feito no caso da placa. Foram então, consideradas duas abordagens possíveis numa perspectiva inicial e exploratória do problema.

A primeira abordagem refere-se à utilização dos nós da superfície da máscara e de pontos dispersos no volume representado na Figura 5.57.b, em que os nós da máscara assumem um deslocamento diferente de zero, e os pontos dispersos no volume têm uma deformada igual a zero, já que não existe material.

A segunda abordagem considera apenas os nós da superfície da máscara com deslocamentos resultantes diferentes de zero.

Todos os nós da Figura 5.57.a que não pertenciam ao volume definido na Figura 5.57.b foram excluídos da análise, com o objectivo de delimitar o domínio da metamodelação. Assim sendo, na etapa de maximização da deformada da máscara os constrangimentos laterais deste problema de optimização são definidos pelas faces deste paralelepípedo.

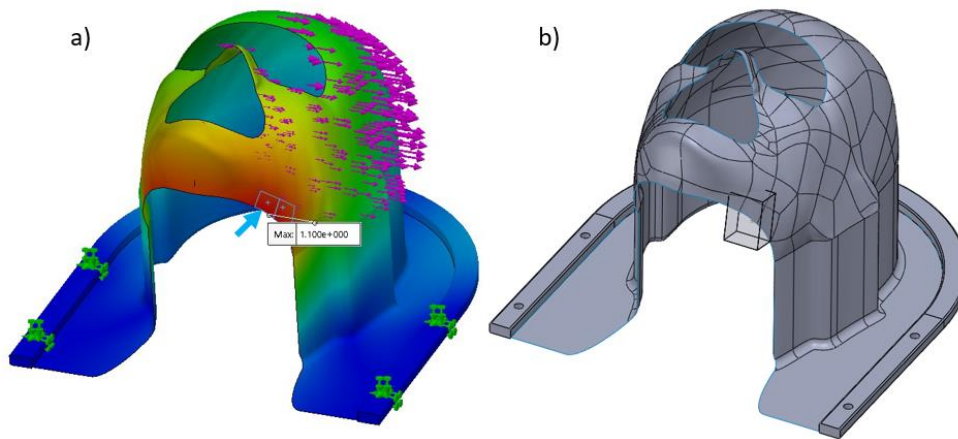


Figura 5.57.a) Zona assinalada a azul da qual foram retirados valores de deslocamento dos nós; b) Volume considerado no o estudo de otimização.

Foi considerado um conjunto de cinco espessuras, tal como para o caso da placa fina, com $h=\{5, 5.125, 5.25, 5.375, 5.5\}$ mm e os valores do deslocamento em cada nó foi retirado para cada espessura.

Para criar o metamodelo da deformada desta zona do queixo foram consideradas as duas abordagens já mencionadas:

- Os pontos da superfície com valores de deformada diferentes de zero e os pontos do volume que não pertencem à superfície com valor igual a zero (total de 510 pontos);
- Somente os pontos da superfície com deformada diferente de zero (123 pontos).

Para cada uma destas abordagens foi necessário testar o parâmetro L da função exponencial quadrática a utilizar no método Kriging. Uma vez mais, o valor de L a considerar seria o que fornecesse o resultado mais promissor no que respeita ao desvio de $W_{max}(x,y,z)$ quer ao desvio das coordenadas (x,y,z) que lhe correspondem e ainda ao MSE. Os testes realizados ao parâmetro L foram feitos com a espessura $h=5$ mm.

Tabela 5.32. Resultado do valor L mais promissor para o caso dos 510 pontos

	L=50	Simples	Comum	Universal
Desvios	Wmax (%)	0,257	-1,526	5,160
	X (%)	37,651	32,606	58,419
	Y (%)	26,834	26,834	26,834
	Z (%)	-21,410	-21,410	-21,410
MSE	0,159	0,160	0,160	0,162

A Tabela 5.32 mostra os resultados mais promissores do estudo do parâmetro L utilizando 510 pontos na aproximação com o método Kriging, em que neste caso particular é o Kriging Simples que apresenta melhores resultados.

Tabela 5.33. Resultado do valor L mais promissor para o caso dos 123 pontos

	L=12,5	Simples	Comum	Universal
Desvios	Wmax (%)	25,018	1,624	7,070
	X (%)	20,071	-1,661	-16,651
	Y (%)	-4,707	-1,436	-16,996
	Z (%)	-14,059	2,387	11,335
	MSE	0,037	0,000	0,000

A Tabela 5.33 mostra os resultados mais promissores do estudo do parâmetro L utilizando 123 pontos na aproximação com o método Kriging, em que os melhores resultados foram alcançados com o Kriging Comum.

Analisando as duas tabelas acima referidas, podemos observar que com o caso em que se utilizam todos os pontos em estudo consegue-se alcançar um desvio mais baixo no que respeita ao deslocamento máximo, contudo os desvios às coordenadas que lhe corresponde ficam comprometidos (Tabela 5.32). Já para o caso da aproximação apenas com os pontos da superfície da máscara M2_TC, apesar de o desvio da deformada máxima ser ligeiramente superior, os desvios dos valores das coordenadas do metamodelo que lhe correspondem são muito inferiores, indicando uma maior proximidade com o que é obtido com o MEF em *SolidWorks* (Tabela 5.33). Assim sendo, optou-se por utilizar o metamodelo construído apenas com os 123 pontos da superfície da máscara M2_TC.

Tal como para o caso da placa fina de Kant, este estudo de optimização teve que ser dividido em duas etapas. A primeira é referente à determinação da deformada máxima da máscara para todas as cinco espessuras, e a segunda que se refere à minimização da deformada máxima no intervalo de espessuras considerado.

Na primeira parte do estudo de optimização efectuaram-se 10 corridas ao algoritmo de optimização WOA, em que cada corrida optimiza as funções metamodelo das cinco espessuras em estudo com 150 gerações cada e 30 baleias por cada geração. O resultado mais promissor foi o obtido na 2ª corrida (Tabela 5.34).

Tabela 5.34. Resultados da optimização da 1ª etapa da metamodelação com Kriging (em [mm])

2ª Corrida				
W*	X*_{med}	-40,054	W(X*,Y*,Z*)	H
	Y*_{med}	-75,300	-1,1178	5
	Z*_{med}	65,665	-1,0507	5,125
-1,1178	Std(X*)	0,740	-0,9898	5,25
	Std(Y*)	0,364	-0,9335	5,375
	Std(Z*)	0,424	-0,8818	5,5

Note-se que esta primeira etapa da otimização foi resolvida como um problema dual, já que se trata de uma maximização, tal como para o caso da função metamodelo da placa de Kant.

Os resultados obtidos na Tabela 5.34 estão de acordo com o esperado já que o valor do deslocamento aumenta com o aumento da espessura (problema dual). Estes valores de deslocamento foram então convertidos no seu simétrico para a resolução da segunda etapa do problema de otimização.

Para a segunda etapa da otimização construiu-se a função metamodelo que representa a deformada máxima em função da espessura com o Método dos Mínimos Quadrados. Os pontos utilizados para o efeito são os $W(X^*, Y^*, Z^*)$ e H da Tabela 5.34. Sabendo que a aproximação é feita com cinco pontos, o grau máximo possível para polinómio metamodelo é quatro, sendo este o grau escolhido.

O modo de executar esta aproximação foi idêntico ao utilizado no caso da placa de Kant no ponto 5.6.1.5 ilustrado pelo Pseudocódigo 5.2.

$$W_{X^*, Y^*, Z^*}(h) = a \cdot h^4 + b \cdot h^3 + c \cdot h^2 + d \cdot h + e \quad (5.4)$$

Os resultados apresentados pela função metamodelo ilustrada na equação 5.4 encontram-se na Tabela 5.35 e na Figura 5.58. Quer os valores das diferenças percentuais entre os valores de deformada obtidos na primeira etapa de otimização em relação ao valor que lhe corresponde calculado pelo polinómio interpolado, quer a representação gráfica dos pontos conhecidos sobrepostos no polinómio, permitem concluir que a aproximação é adequada para o intervalo de espessuras em estudo.

Tabela 5.35. Valores obtidos para as constantes do polinómio metamodelo e respectivos desvios nos pontos conhecidos

Resultados obtidos com o Método dos Mínimos Quadrados					
a	-0,003	h [mm]	W(X*,Y*,Z*) [mm]	W(h) [mm]	Diferença (%)
b	0,040	5	1,1178	1,1177	-0,011
c	0,045	5,125	1,0507	1,0510	0,028
d	-2,458	5,25	0,9898	0,9897	-0,014
e	9,213	5,375	0,9335	0,9334	-0,012
		5,5	0,8818	0,8819	0,008

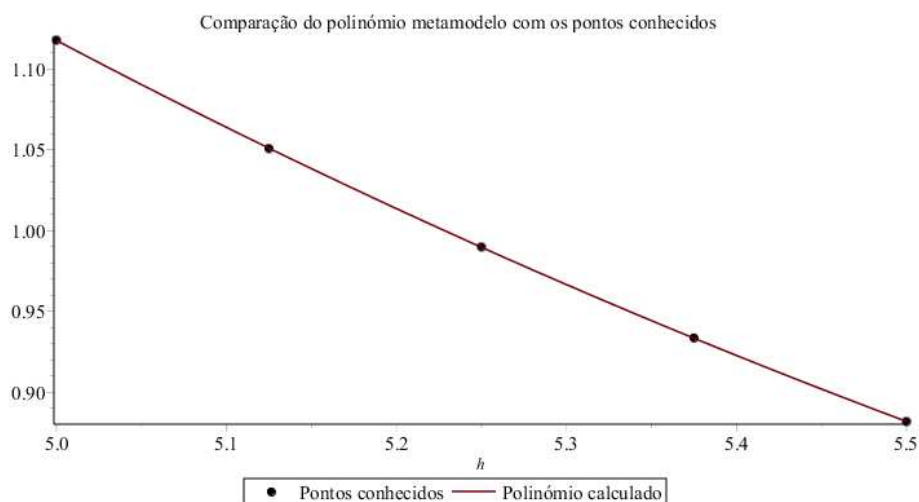


Figura 5.58. Sobreposição dos pontos utilizados no método dos Mínimos Quadrados com a função metamodelo obtida

Este polinómio interpolado pelo método dos Mínimos Quadrados foi otimizado com o WOA, tal como foi feito para a placa fina de Kant.

Tabela 5.36. Resultados do estudo de optimização ao polinómio obtido pelo método dos Mínimos Quadrados

Iteração	50
F(X*)	0,8819
X*	5,5
Desvio-padrão	0,0000
Média	0,8819

A Tabela 5.36 mostra os resultados obtido na optimização do polinómio metamodelo que representa a deformada máxima em função da espessura para o caso de carga da flexão lateral esquerda do pescoço. Os resultados estão de acordo com o que é esperado já que a espessura é maximizada com o objectivo de minimizar o deslocamento.

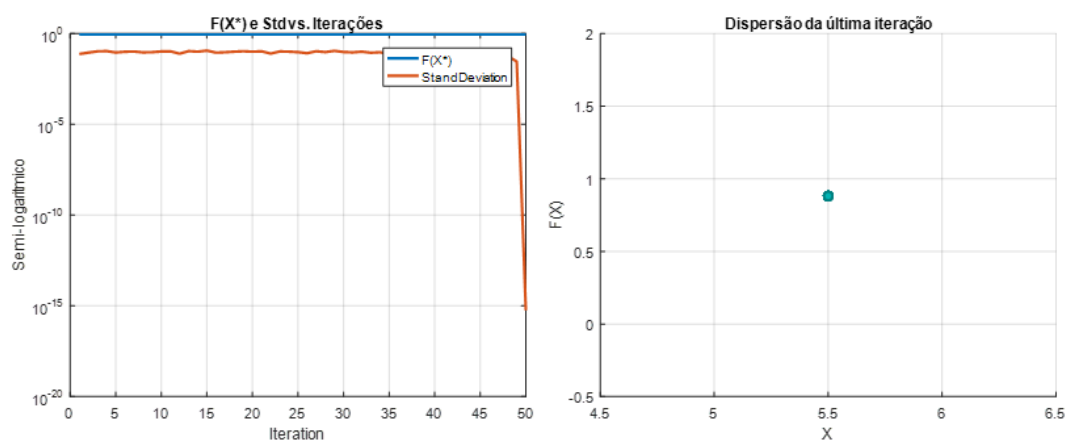


Figura 5.59. Optimização da função $W_{max}(h)$ do polinómio metamodelo: À esq.) $F(X^*)$ e desvio-padrão em função do nº das iterações; à dir.) Dispersão da população na última iteração.

É possível observar na Figura 5.59 o comportamento do WOA na otimização da função metamodelo, que como esperado, o WOA obtém o mínimo global muito rapidamente, contudo a convergência dos restantes indivíduos para o mínimo acontece mais lentamente, mas convergindo na última geração (D. S. Craveiro et al. 2019).

Para os seguintes casos em estudo (flexão lateral esquerda do pescoço com a M2_3DLS e a flexão do pescoço com a M2_TC e a M2_3DLS) o método de otimização utilizado foi o mesmo, sendo que apenas será apresentada a informação essencial a cada um dos estudos evitando a repetição do método aqui descrito.

5.6.2.2.2 FLEXÃO LATERAL ESQUERDA DO PESCOÇO COM M2_3DLS

A Figura 5.60.a) representa os nós que foram retirados da máscara M2_3DLS para serem utilizados para o cálculo da função metamodelo que representa a deformada em função das coordenadas (x,y,z) para uma dada espessura. A Figura 5.60.b) representa o domínio das coordenadas considerado, sendo todos os pontos fora deste domínio excluídos. Após a retirada dos pontos que não pertenciam ao domínio, o número de nós considerados foi de 90.

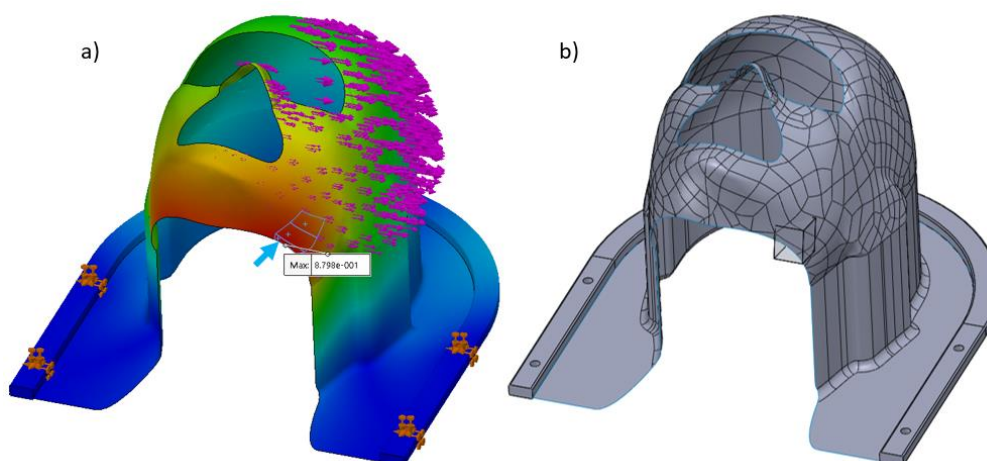


Figura 5.60.a) Zona assinalada a azul da qual foram retirados valores de deslocamento dos nós; b) Volume considerado no o estudo de otimização.

Para este caso de carga da M2_3DLS foram consideradas as mesmas espessuras que no ponto 5.6.2.2.1, dado a proximidade de resultados no estudo do critério de rigidez (5.3). Tal como foi feito no ponto anterior, para calcular a função metamodelo que define $W_h(x,y,z)$, foi necessário iterar o valor do parâmetro L , para o qual se conseguiu um bom compromisso entre desvios e MSE. Este compromisso foi conseguido para $L=5$ (Tabela 5.37), utilizando o método Kriging Comum.

Tabela 5.37. Resultado do valor L mais promissor com 90 pontos

	L=5	Simplex	Comum	Universal
Desvios	Wmax (%)	204,542	1,421	31,143
	X (%)	13,330	-0,030	29,755
	Y (%)	1,873	1,584	-9,347
	Z (%)	-5,368	0,210	6,460
	MSE	0,002	0,000	0,000

Para terminar a primeira etapa do processo de otimização da deformada máxima da placa obtiveram-se os seguintes resultados na 3ª de dez corridas do algoritmo WOA apresentados na Tabela 5.38.

Tabela 5.38. Resultados da otimização da 1ª etapa da metamodelação com Kriging (em [mm])

3ª Corrida: WOA				
W*	X*_{med}	-40,668	W(X*,Y*,Z*)	h
-1,1369	Y*_{med}	-75,572	-1,1369	5
	Z*_{med}	64,580	-1,0678	5,125
	Std(X*)	0,557	-1,0032	5,25
	Std(Y*)	0,345	-0,9459	5,375
	Std(Z*)	0,069	-0,8924	5,5

Com os resultados obtidos na primeira etapa de otimização, calculou-se então um polinómio metamodelo que representa a deformada máxima da máscara em função da espessura com a metodologia indicada no Pseudocódigo 5.2. O polinómio metamodelo (equação 5.4) obtido tem as suas constantes representadas na Tabela 5.39. Calcularam-se também as diferenças entre os valores das deformadas nos pontos conhecidos, que como se pode observar, são relativamente baixas.

Tabela 5.39. Valores obtidos para as constantes do polinómio metamodelo e respectivos desvios nos pontos conhecidos

Resultados obtidos com o Método dos Mínimos Quadrados					
a	0,002	h [mm]	W(X*,Y*,Z*) [mm]	W(h) [mm]	Diferença (%)
b	0,027	5	1,1369	1,1369	0,003
c	0,006	5,125	1,0678	1,0676	-0,027
d	-1,885	5,25	1,0032	1,0037	0,052
e	8,016	5,375	0,9459	0,9454	-0,053
		5,5	0,8924	0,8925	0,018

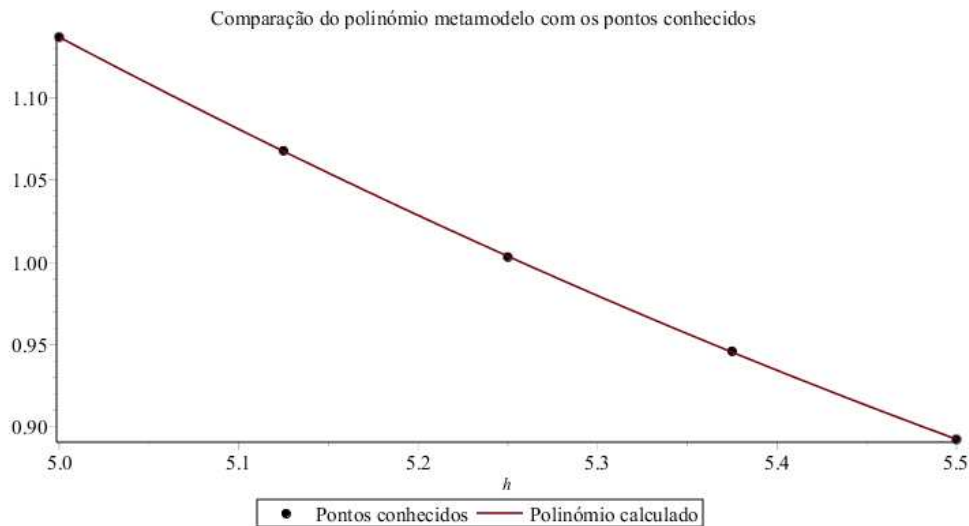


Figura 5.61. Sobreposição dos pontos utilizados no método dos Mínimos Quadrados com a função metamodelo obtida

O polinômio metamodelo encontra-se representado na Figura 5.61 com a sobreposição dos pontos conhecidos que lhe deram origem, que como se pode observar sobrepõem-se graficamente.

A segunda etapa da otimização da deformada máxima da M2_3DLS para este caso de carga foi concluída otimizando o polinômio metamodelo acima descrito, utilizando o algoritmo WOA ao longo de cinco corridas em que o melhor resultado foi conseguido na 1ª corrida (Tabela 5.40).

O comportamento do WOA foi o esperado, apresentando uma convergência lenta nas primeiras iterações e convergindo para o mínimo global nas últimas gerações (Figura 5.62), em que se pode ver que na última iteração o desvio-padrão se pode considerar igual a zero.

Tabela 5.40. Resultados do estudo de otimização ao polinômio obtido pelo método dos Mínimos Quadrados

Iteração	50
F(X*)	0,8925
X*	5,5
Desvio-padrão	0,0000
Média	0,8926

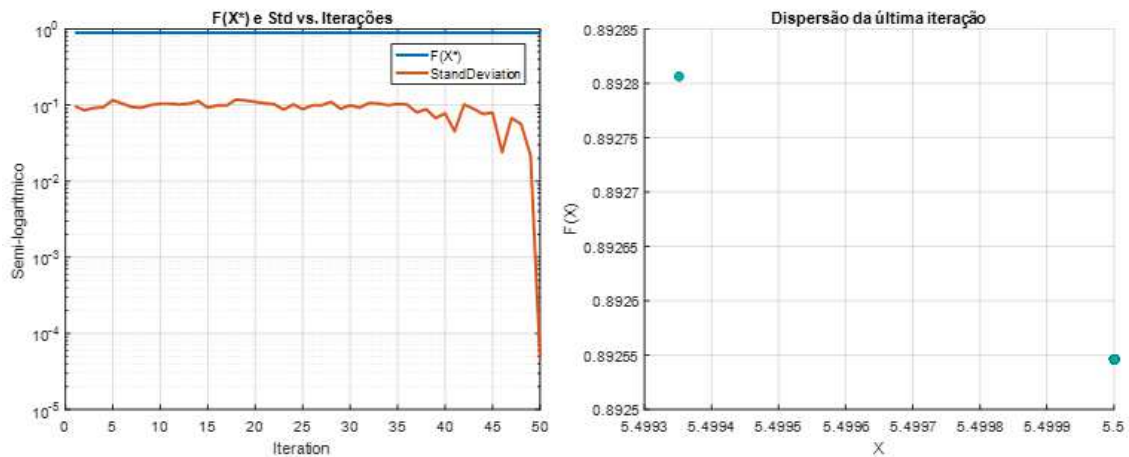


Figura 5.62. Otimização da função $W_{max}(h)$ do polinômio metamodelo: À esq.) $F(X^*)$ e desvio-padrão em função do nº das iterações; à dir.) Dispersão da população na última iteração.

Os resultados obtidos neste estudo de otimização foram os esperados já que a espessura foi maximizada para garantir um mínimo deslocamento da máscara M2_3DLS.

5.6.2.2.3 FLEXÃO DO PESCOÇO COM M2_TC

Considerando os resultados obtidos para a metamodelação com Kriging utilizando a abordagem que utiliza apenas os pontos da máscara no ponto 5.6.2.2.1, para este caso de carga da flexão do pescoço da M2_TC foi utilizada uma abordagem semelhante.

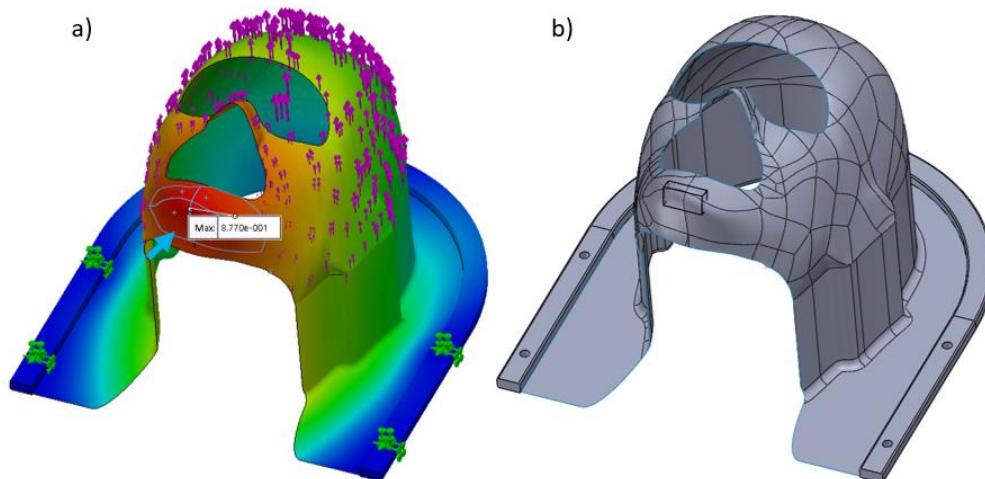


Figura 5.63. a) Zona assinalada a azul da qual foram retirados valores de deslocamento dos nós; b) Volume considerado no o estudo de otimização.

A Figura 5.63.a) representa a zona da qual foram retirados os nós da malha para serem utilizados na construção da função metamodelo que define a deformada em função das coordenadas (x,y,z) . Já a Figura 5.63.b) representa o volume que define os valores mínimos e máximos que estas coordenadas (x,y,z) podem assumir, em que todos os nós

fora deste domínio foram descartados, o que fez um total de 95 pontos a utilizar na aproximação.

As espessuras consideradas pertencem ao conjunto $h=\{2.2, 2.325, 2.45, 2.575, 2.7\}$ mm que foram escolhidas dado os resultados obtidos no estudo do critério de rigidez no ponto 5.3 para o caso de carga de flexão do pescoço da M2_TC.

A etapa seguinte para encontrar a função metamodelo consistiu em testar o valor do parâmetro L , ao qual se conseguiu um melhor compromisso entre os valores dos desvios do valor da deformada máxima obtida e das coordenadas e o valor do MSE, para um parâmetro L igual a 15,5 (Tabela 5.41) utilizando o método Kriging Comum.

Tabela 5.41. Resultado do valor L mais promissor para 95 pontos

	L=15.5	Simples	Comum	Universal
Desvios	Wmax (%)	69,303	0,595	1,023
	X (%)	11,810	-0,059	11,810
	Y (%)	-1,263	-1,436	3,757
	Z (%)	-5,878	0,172	0,172
	MSE	0,143	0,000	0,000

Esta função metamodelo que representa $W_h(x,y,z)$ foi otimizada ao longo de 10 corridas do algoritmo WOA, em que o melhor resultado se conseguiu na nona corrida (Tabela 5.42). Foram então utilizados estes resultados para a etapa seguinte da metamodulação que representa a deformada máxima em função da espessura.

Tabela 5.42. Melhor resultado da otimização da localização da deformada máxima da M2_TC caso de flexão do pescoço

9ª Corrida: WOA				
W*	X*_{med}	Y*_{med}	Z*_{med}	h
-1,466306		-0,0004		W(X*,Y*,Z*)
			-126,7836	
			96,2990	
		Std(X*)	0,0127	
		Std(Y*)	0,3124	
		Std(Z*)	0,0000	

Utilizando os vectores definidos com $W(X^*,Y^*,Z^*)$ e h (espessura) e o método dos mínimos quadrados com a metodologia apresentada no Pseudocódigo 5.2, obteve-se um polinómio de 4º grau como mostra a equação 5.4 com os valores das constantes apresentados na Tabela 5.43.

Tabela 5.43. Valores obtidos para as constantes do polinómio metamodelo e respectivos desvios nos pontos conhecidos

Resultados obtidos com o Método dos Mínimos Quadrados					
a	-0,196	h [mm]	W(X*,Y*,Z*) [mm]	W(h) [mm]	Diferença (%)
b	1,325	2,2	1,4663	1,4663	0,002
c	-1,799	2,325	1,2757	1,2758	-0,012
d	-4,666	2,45	1,1199	1,1196	0,025
e	10,914	2,575	0,9911	0,9913	-0,018
		2,7	0,8834	0,8833	0,005

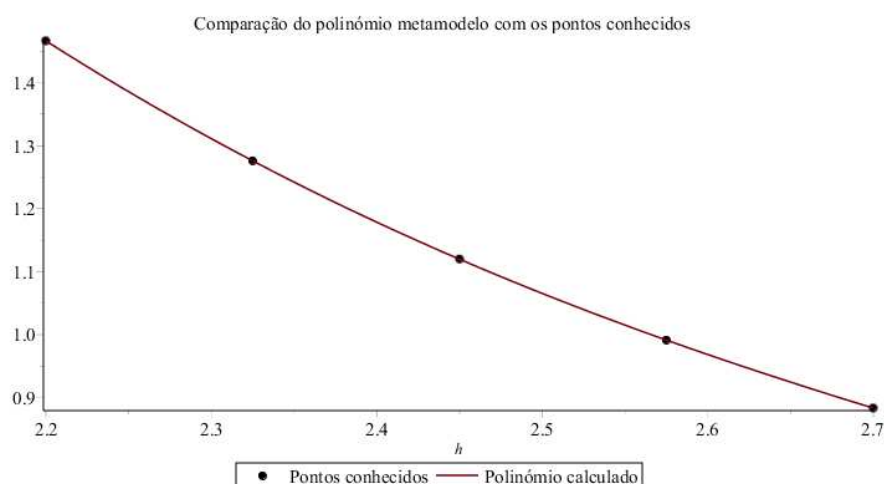


Figura 5.64. Sobreposição dos pontos utilizados no método dos Mínimos Quadrados com a função metamodelo obtida

Para este polinómio metamodelo calculou-se o valor da deformada nos pontos conhecidos do domínio e calculou-se o respectivo desvio em relação ao valor conhecido. Como se pode ver na Tabela 5.43 e na Figura 5.64, estes desvios são muito baixos.

Este polinómio metamodelo foi então otimizado com o WOA ao longo de cinco corridas em que o melhor resultado foi obtido na 3ª corrida (Tabela 5.44).

Tabela 5.44. Resultados do estudo de otimização ao polinómio obtido pelo método dos Mínimos Quadrados

Iteração	50
F(X*)	0,8833
X*	2,7
Desvio-padrão	0,0000
Média	0,8833

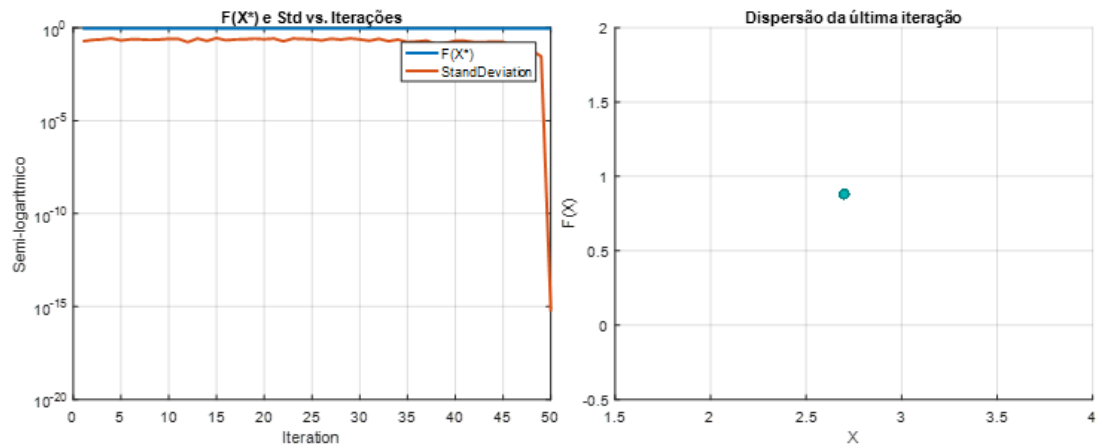


Figura 5.65. Otimização da função $W_{max}(h)$ do polinómio metamodelo: À esq.) $F(X^*)$ e desvio-padrão em função do nº das iterações; à dir.) Dispersão da população na última iteração.

Uma vez mais, o WOA demonstrou o seu comportamento habitual com uma convergência mais lenta nas primeiras iterações da corrida, mas conseguiu garantir um desvio-padrão igual a zero na última geração em relação do mínimo global (Figura 5.65).

A função foi otimizada com sucesso já que a espessura foi maximizada para garantir o mínimo deslocamento, como era expectável.

5.6.2.2.4 FLEXÃO DO PESCOÇO COM M2_3DLS

Para o estudo de optimização da deformada máxima da M2_3DLS no caso de carga de flexão do pescoço foram consideradas as espessuras $h = \{2.2, 2.325, 2.45, 2.575, 2.7\}$ mm, tendo em consideração os resultados obtidos no estudo do critério de rigidez do ponto 5.3 e similarmente ao que foi feito para esta geometria no caso da TC.

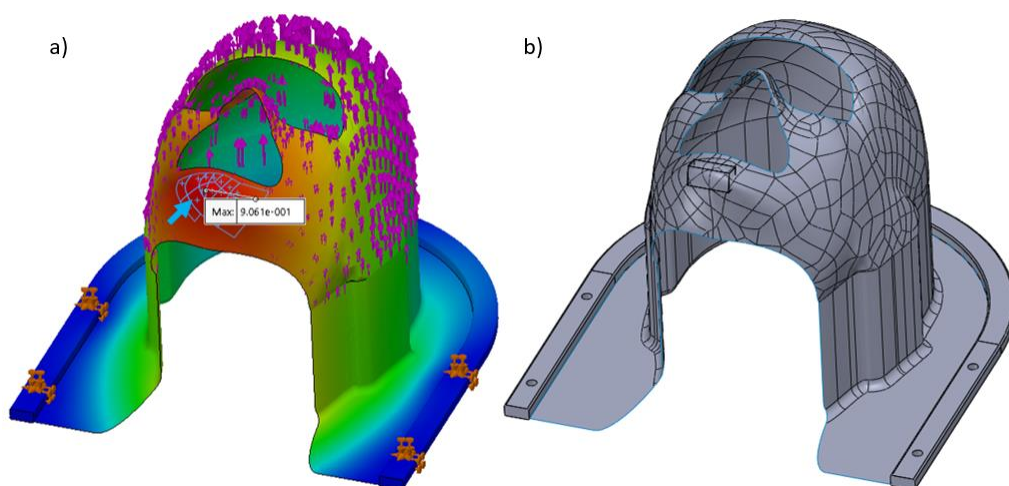


Figura 5.66. a) Zona assinalada a azul da qual foram retirados valores de deslocamento dos nós; b) Volume considerado no o estudo de optimização.

A Figura 5.66.a) representa os nós retirados do SolidWorks para o cálculo da função $W_h(x,y,z)$ e a Figura 5.66.b) o domínio das coordenadas (x,y,z) considerado no estudo de

otimização. Todos os nós retirados que não pertenciam ao domínio foram retirados, ficando-se com um total de 223 pontos para a aproximação com Kriging.

Tal como foi feito para os casos anteriores, iterou-se o valor do parâmetro L para as três formulações de Kriging estudadas, e o melhor resultado obtido foi para $L=4,9$ utilizando o método Kriging Comum (Tabela 5.45), em que a escolha teve por base o valor dos desvios entre os valores obtidos com a aproximação de Kriging e os valores do nó da deformada máxima, e adicionalmente, o MSE.

Tabela 5.45. Resultado do valor L mais promissor para 223 pontos

	L=4,9	Simples	Comum	Universal
Desvios	Wmax (%)	21,651	0,388	1,187
	X (%)	-94,204	2,118	344,263
	Y (%)	-1,032	0,315	3,282
	Z (%)	-1,801	0,292	1,061
	MSE	0,031	0,000	0,000

Para concluir a primeira etapa do processo de optimização da deformada máxima deste caso de carga da M2_3DLS, fizeram-se as dez corridas do algoritmo WOA, em que o melhor resultado foi obtido na 6ª corrida (Tabela 5.46). Estes valores de $W(X^*, Y^*, Z^*)$ e de h foram utilizados para o cálculo da segunda etapa da optimização da deformada máxima da máscara.

Tabela 5.46. Melhor resultado da optimização da localização da deformada máxima da M2_3DLS caso de flexão do pescoço (em [mm])

6ª Corrida: WOA				
W*	X*_{med}	2,855	W(X*,Y*,Z*)	h
	Y*_{med}	-131,211	-1,5129	2,2
	Z*_{med}	94,349	-1,3148	2,325
-1,5129	Std(X*)	0,015	-1,1542	2,45
	Std(Y*)	0,042	-1,0210	2,575
	Std(Z*)	0,039	-0,9093	2,7

Utilizando a metodologia indicada no Pseudocódigo 5.2, calculou-se o polinómio de 4º grau que aproxima a deformada máxima da máscara em função da espessura (equação 5.4), em que as constantes que o definem estão representadas na Tabela 5.47. Calcularam-se as diferenças entre os valores da deformada nos valores de espessura conhecidos e os respectivos obtidos com o polinómio calculado pelo método dos mínimos quadrados, que como se pode ver na tabela são muito baixas.

Também a Figura 5.67 representa a precisão do polinómio metamodelo, em que, sobrepondo os pontos conhecidos com o gráfico definido pelo polinómio se observa que são praticamente coincidentes.

Tabela 5.47. Valores obtidos para as constantes do polinómio metamodelo e respectivos desvios nos pontos conhecidos

Resultados obtidos com o Método dos Mínimos Quadrados					
a	-0,191	h [mm]	W(X*,Y*,Z*) [mm]	W(h) [mm]	Diferença (%)
b	1,179	2,2	1,5129	1,5128	-0,004
c	-0,879	2,325	1,3148	1,3153	0,040
d	-6,876	2,45	1,1542	1,1540	-0,013
e	12,806	2,575	1,0210	1,0215	0,057
		2,7	0,9093	0,9092	-0,016

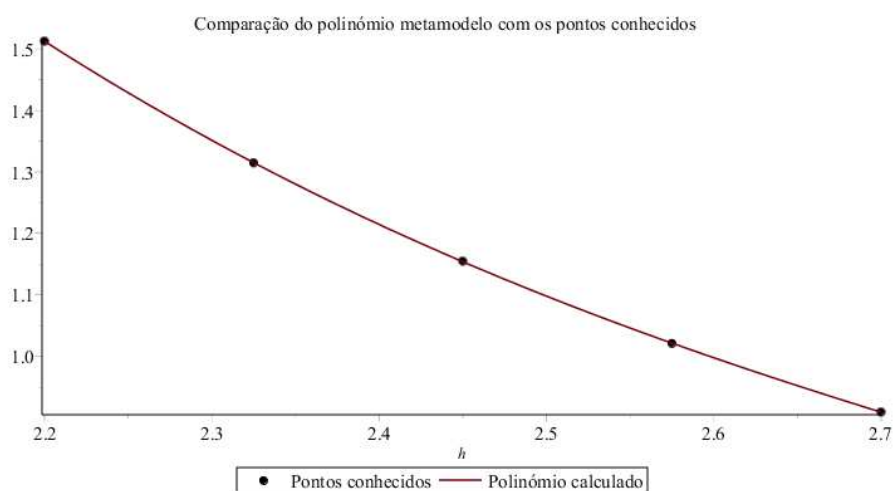


Figura 5.67. Sobreposição dos pontos utilizados no método dos Mínimos Quadrados com a função metamodelo obtida

Para terminar a optimização da deformada máxima da M2_3DLS no caso de flexão do pescoço, optimizou-se o polinómio metamodelo correndo cinco vezes o algoritmo WOA em que o melhor resultado foi obtido na 3ª corrida (Tabela 5.48), na qual o WOA demonstrou mais uma vez uma convergência mais lenta nas primeiras gerações e convergindo para o mínimo global na última geração, em que se conseguiu que o desvio-padrão igualasse o valor zero na última geração (Figura 5.68).

Tabela 5.48. Resultados do estudo de optimização ao polinómio obtido pelo método dos Mínimos Quadrados

Iteração	50
F(X*)	0,9092
X*	2,7
Desvio-padrão	0,0000
Média	0,9092

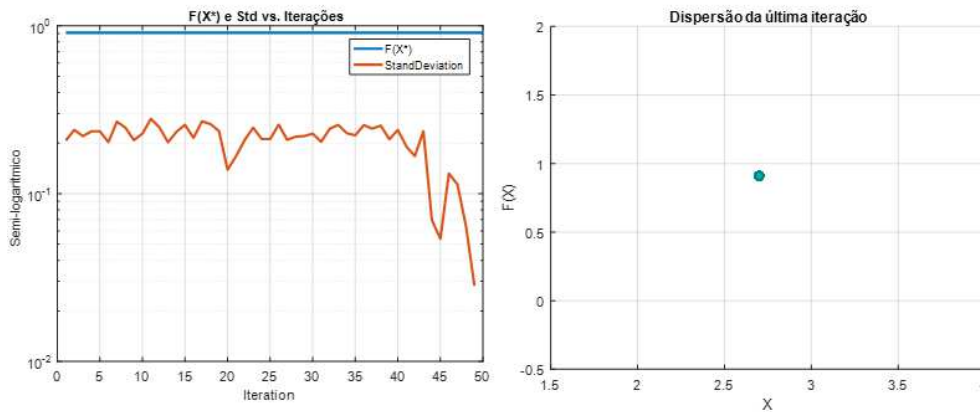


Figura 5.68. Optimização da função Wmax(h) do polinómio metamodelo: À esq.) F(X*) e desvio-padrão em função do nº das iterações; à dir.) Dispersão da população na última iteração.

O resultado obtido foi o esperado, em que a espessura foi maximizada para diminuir a deformada da máscara M2_3DLS para o caso de flexão do pescoço.

5.6.2.3 OPTIMIZAÇÃO DOS METAMODELOS DO DESLOCAMENTO RESULTANTE COM CONSTRANGIMENTO DE MASSA

De modo a evitar o sobredimensionamento das máscaras de imobilização em relação ao critério de rigidez e também do ponto de vista económico e de atenuação da radiação, foi feito um estudo de optimização utilizando as funções metamodelos do deslocamento das máscaras e o algoritmo WOA. Para isso foram criadas quatro funções metamodelo que representassem a massa das máscaras em função da espessura para cada um dos casos de carga.

Para avaliar a massa de cada uma das máscaras foi necessário fazer uma separação das geometrias da fixação e das superfícies das máscaras M2_TC e M2_3DLS. Converteu-se a fixação num ficheiro em formato .stl e para as máscaras M2_TC e M2_3DLS foram criados ficheiros .stl para cada conjunto de espessuras em estudo. Para a flexão do pescoço corresponde $h = \{2.2, 2.325, 2.45, 2.575, 2.7\}$ mm e para a flexão lateral esquerda do pescoço corresponde $h = \{5, 5.125, 5.25, 5.375, 5.5\}$ mm.

Calcularam-se o volume da fixação e volume das máscaras através dos ficheiros .stl separadamente através de uma *webpage* que possibilita o cálculo (“Think3D” 2019). O cálculo da massa de cada máscara foi feito somando o volume da fixação ao volume da máscara (para cada espessura) e posteriormente multiplicando pela massa específica do material T2, como ilustrado na equação 5.5.

$$\begin{cases} V_{total} = V_{fixação} + V_h \\ M_h = V_{total} \cdot \rho_{T2} \end{cases} \quad (5.5)$$

Obtiveram-se então quatro vectores que representam o valor da massa para os dois conjuntos de espessuras já mencionados e casos de carga. Utilizando cada um destes vectores de massa e o respectivo vector de espessuras que lhe corresponde, foi criado um

polinómio metamodelo para cada máscara e caso de carga utilizando o método dos mínimos quadrados já descrito no Pseudocódigo 5.2.

Este polinómio metamodelo foi utilizado na actualização do melhor agente de pesquisa do algoritmo WOA, quer na fase de inicialização da população quer na actualização de resultados no decorrer das gerações. Foram avaliados os resultados dos valores das funções metamodelo da deformada máxima das máscaras e os valores das funções metamodelo da massa das máscaras de acordo com o Pseudocódigo 5.3.

Se $F(X_i(t)) < F(X^*(t)) \wedge M(X_i(t)) \leq M_{max}$
 $F(X^*(t)) = F(X_i(t))$
 $X^*(t) = X_i(t)$
 Fim

Pseudocódigo 5.3. Condição de actualização do melhor agente de pesquisa do WOA no caso de restrição de massa

Em que $F(X_i(t))$ representa o valor da função objectivo (deformada máxima da placa) para o agente i da geração t , $F(X^*(t))$ representa o valor da deformada máxima para o melhor valor da variável de projecto $X^*(t)$ da geração t . $M(X_i(t))$ o valor da massa da máscara, i e t representam o agente e a geração respectivamente, como já foi referido, e M_{max} é o valor máximo que a massa da máscara pode assumir.

O valor de M_{max} foi definido tendo em conta o intervalo de variação da massa da máscara para o caso de carga em estudo. Sabendo que à mínima espessura do domínio corresponde o valor mínimo de massa e à máxima espessura do domínio corresponde o maior valor de massa. Este cálculo foi feito de acordo com a equação 5.6, no qual é mostrado, a título de exemplo, uma redução de 50% do intervalo de variação de massa considerado.

$$M_{max} = M_{hmax} - ((M_{hmax} - M_{hmin}) \cdot 0.5) \quad (5.6)$$

Tendo como o objectivo garantir um deslocamento máximo de 1 mm para cada máscara e caso de carga, foram iterados valores de redução do intervalo de variação do valor da massa a variar de 20 em 20%, 10 em 10% e 5 em 5%, dependendo da evolução dos resultados. Para os quatro casos foram seleccionadas as reduções que garantiam deslocamentos menores que 1 mm e ligeiramente superiores a 1 mm. Foram seleccionados estes dois valores porque idealmente se pretende que o deslocamento não seja superior a 1 mm, mas como não se trata de uma aplicação com uma imobilização completamente rígida, do ponto de vista económico e de atenuação de radiação pode ser interessante avaliar se as reduções que garantem deslocamentos ligeiramente superiores a 1 mm podem ser viáveis, assim sendo é necessário ponderar as duas soluções.

Inicialmente começou-se por utilizar 50 gerações com populações de 30 indivíduos, como tinha sido feito no ponto 5.6.2.2, mas verificou-se que ao adicionar o

constrangimento da massa através de uma conjunção para a actualização do melhor agente de pesquisa (Pseudocódigo 5.3), a convergência do algoritmo WOA era mais lenta que no estudo anterior, bem como o valor final do desvio-padrão ser maior. Por este motivo, foram testadas as utilizações de 50 e 100 gerações, com cinco corridas para cada caso e decidindo com o resultado mais promissor. Neste teste foi utilizado o caso de carga de flexão lateral esquerda do pescoço com uma redução 95% do intervalo de espessuras em estudo, apenas a título de teste.

Tabela 5.49. Resultados do estudo do número de gerações a utilizar no estudo de optimização com restrição de massa

Iteração	50	100
F(X*)	1,105	1,104
Massa(X*)	861,260	861,466
X*	5,024	5,025
Desvio-padrão	0,007	0,005
Média	1,105	1,104

Optou-se por utilizar 100 gerações nos restantes estudos por ter demonstrado melhores resultados (Tabela 5.49). Os resultados deste estudo e dos estudos de optimização das máscaras com um constrangimento de massa encontram-se mais detalhados no Apêndice IX.

Os resultados referentes a este estudo de optimização para cada máscara e caso de carga encontram-se nas sub-secções 5.6.2.3.1 a 5.6.2.3.4, bem como os resultados da criação dos polinómios metamodelo para avaliação do valor das massas em cada caso.

5.6.2.3.1 FLEXÃO LATERAL ESQUERDA DO PESCOÇO COM M2_TC

O polinómio metamodelo interpolado com o método dos mínimos quadrados tem como resultados o apresentado na Tabela 5.50, em que os pontos que lhe dão origem têm como origem o valor da espessura e o valor da massa em gramas. Do polinómio resultante calculou-se o valor da função para as espessuras conhecidas e o desvio entre os valores das massas, que como é possível observar na tabela, são aproximadamente zero.

Tabela 5.50. Resultados da geração do polinómio metamodelo da M2_TC caso de flexão lateral do pescoço

	h [mm]	Volume [mm³]	Massa [g]	M(h) [g]	Desvio (%)	
a	0,150	5	625983,117	857,597	857,599	0,000
b	-4,083	5,125	640092,519	876,927	876,922	-0,001
c	39,967	5,25	654214,176	896,273	896,274	0,000
d	-14,195	5,375	668348,083	915,637	915,641	0,000
e	345,772	5,5	682494,260	935,017	935,015	0,000

A sobreposição destes valores pode ser visualizada sob a forma de gráfico na Figura 5.69, que como se pode observar têm uma aparência coincidente.

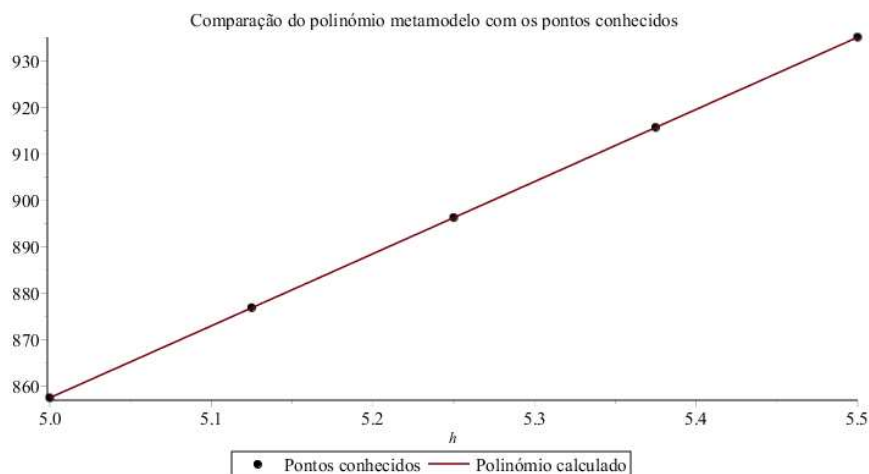


Figura 5.69. Gráfico representativo do polinómio metamodelo da massa da M2_TC e dos pontos que lhe deram origem, caso de flexão lateral esquerda do pescoço.

Utilizando este polinómio metamodelo para modelar o constrangimento de massa, e portanto considerando uma conjunção para actualização do melhor agente de pesquisa em cada iteração e inicialização da população, como está indicado no Pseudocódigo 5.3, os resultados obtidos no estudo de optimização apresentam-se na Tabela 5.51.

Tabela 5.51. Resultados do estudo de optimização do deslocamento máximo da M2_TC com restrição de massa caso de flexão lateral do pescoço

	50%	55%	Diferença
F(X*) [mm]	0,990	1,001	
Massa(X*) [g]	896,307	892,436	3,871
X* [mm]	5,250	5,225	0,025
Desvio-padrão [mm]	0,012	0,008	
Média [mm]	0,994	1,001	

Como se pode observar, utilizando uma redução de 50% do valor do intervalo de variação da massa da máscara consegue-se garantir um deslocamento inferior a 1 mm. Já utilizando 55% de redução, o valor da deformada máxima é ligeiramente superior, contudo, caso haja uma preocupação do ponto de vista económico, a redução de 3,9 g por máscara aproximadamente poderia fazer uma diferença significativa na impressão de muitas máscaras, bem como a redução de 0,025 mm de espessura do ponto de vista de uma menor atenuação da radiação.

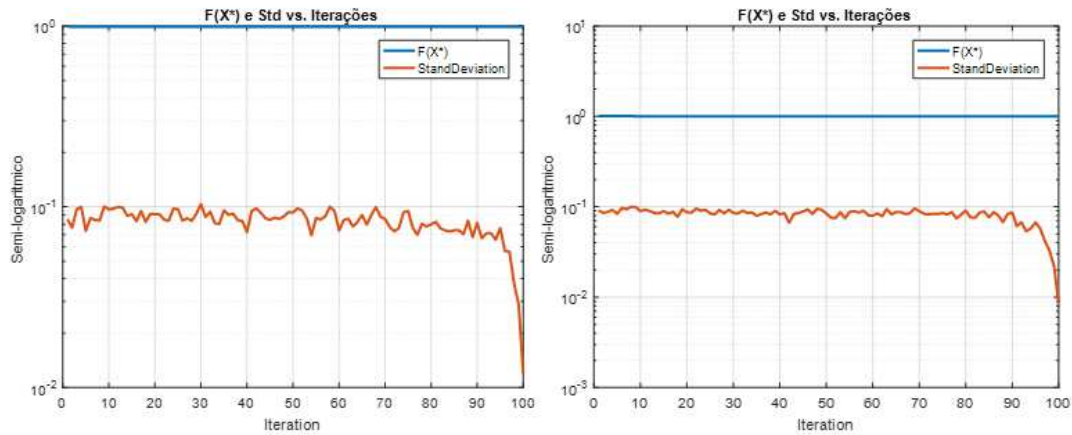


Figura 5.70. Variação da deformada máxima e do desvio-padrão ao longo das iterações na M2_TC caso de flexão lateral do pescoço (à esq.:50% redução; à dir.:55% redução)

Como já tinha sido referido no ponto 5.6.2.3, o desempenho do algoritmo de optimização WOA neste estudo demonstra não ser tão boa do ponto de vista da rapidez de convergência, comparativamente aos estudos sem restrição de massa. A Figura 5.70 representa a variação da solução óptima para a deformada máxima, bem como a evolução do desvio-padrão ao longo das iterações.

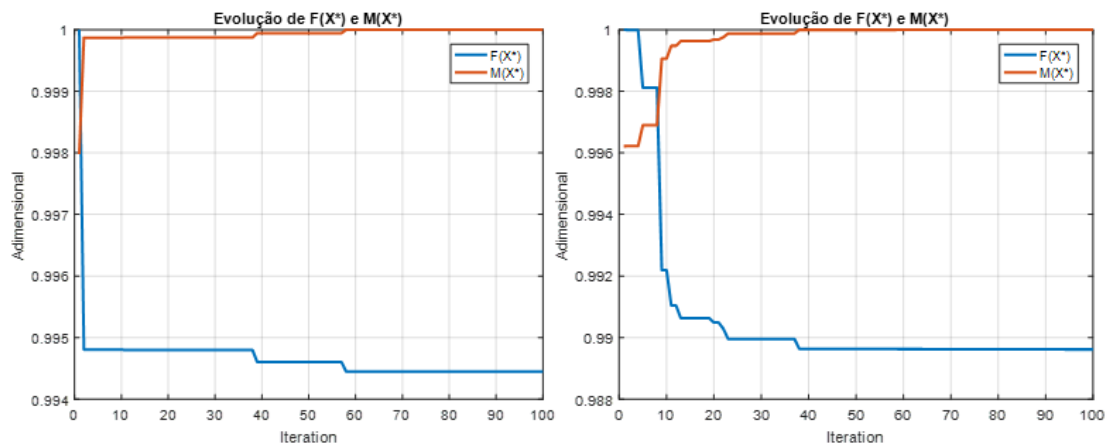


Figura 5.71. Variação da deformada máxima e da massa ao longo das iterações na M2_TC caso de flexão lateral do pescoço sob a forma adimensionalizada (à esq.:50% redução; à dir.:55% redução).

A Figura 5.71 mostra a evolução da deformada máxima e da massa da máscara em função da espessura ao longo das iterações, que tal como era expectável à medida que a deformada máxima vai diminuindo, o valor da massa da máscara vai aumentando.

Estes resultados encontram-se na forma adimensionalizada, em que para a massa se dividiu o valor de cada iteração pelo valor máximo de massa calculado em todas as iterações, e para o caso da deformada máxima o método foi similar. Assim sendo, é expectável que todos os valores se encontrem no intervalo [0, 1].

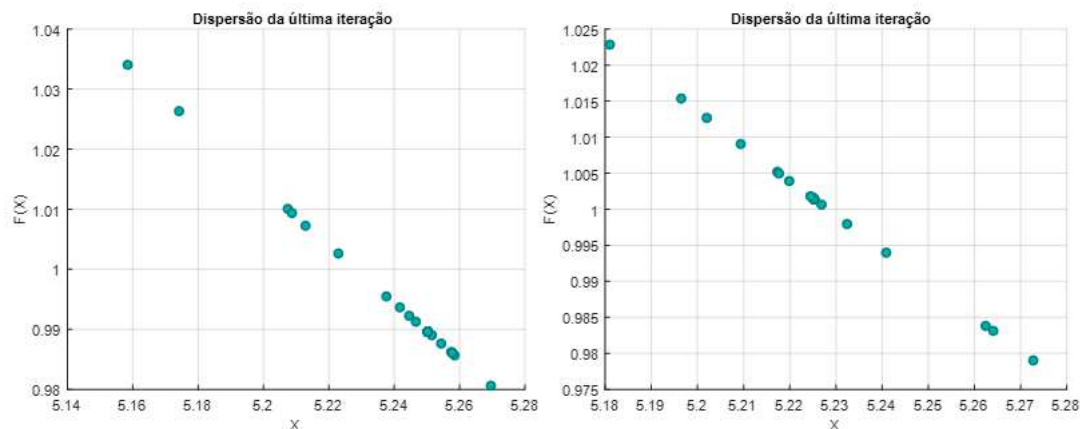


Figura 5.72. Dispersão de resultados da última geração na M2_TC caso de flexão lateral do pescoço (à esq.:50% redução; à dir.:55% redução).

Finalmente a Figura 5.72 é a representação mais clara da menor convergência de todos os elementos da população na última iteração neste caso de estudo, já que comparativamente aos estudos já feitos com o algoritmo este apresenta uma dispersão de valores da função objectivo muito maior. Ainda assim este algoritmo apresenta bons resultados do ponto de vista da aquisição do mínimo global neste problema com restrição de massa.

5.6.2.3.2 FLEXÃO LATERAL ESQUERDA DO PESCOÇO COM M2_3DLS

Tal como para o caso anterior, foi interpolado um polinómio de grau quatro (cinco pontos utilizados) para definir a massa em função da espessura. Os coeficientes que dão origem a este polinómio metamodelo estão na Tabela 5.52, bem como os valores de massa obtidos com o polinómio nos pontos conhecidos e os respectivos desvios para o valor original. Como se pode ver na tabela acima citada, este valor de desvio é aproximadamente zero.

Esta relação de proximidade entre a função metamodelo e os pontos que lhe dão origem pode também ser observada na Figura 5.73, em que é possível ver os pontos sobreporem-se com a curva representativa do polinómio.

Tabela 5.52. Resultados da geração do polinómio metamodelo da M2_3DLS caso de flexão lateral do pescoço

	h [mm]	Volume [mm³]	Massa [g]	M(h) [g]	Desvio (%)	
a	-0,210	5	634106,737	868,726	868,727	0,000
b	4,186	5,125	648422,612	888,339	888,338	0,000
c	-30,670	5,25	662750,920	907,969	907,969	0,000
d	254,493	5,375	677091,673	927,616	927,617	0,000
e	-29,063	5,5	691444,879	947,279	947,279	0,000

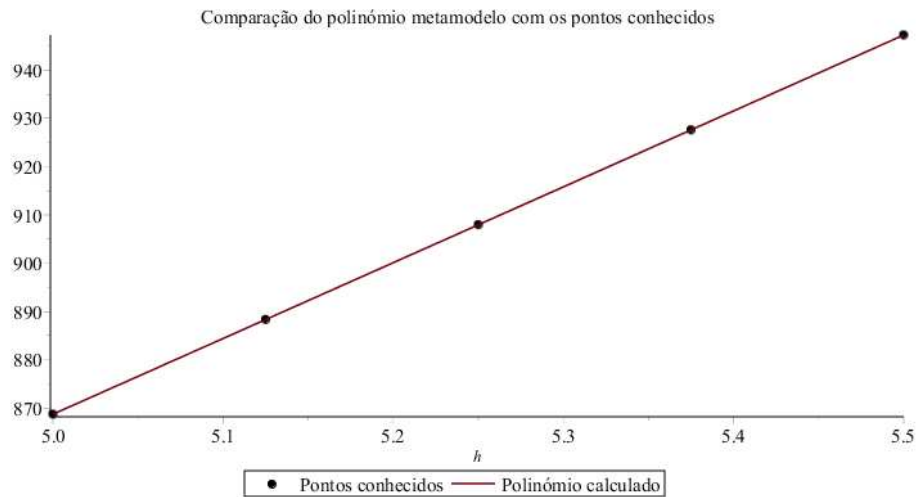


Figura 5.73. Gráfico representativo do polinómio metamodelo da massa da M2_3DLS e dos pontos que lhe deram origem, caso de flexão lateral esquerda do pescoço.

No estudo de optimização com o WOA, obtiveram-se duas soluções (Tabela 5.53). A primeira solução com redução de 45% do intervalo de massa, que garante um deslocamento inferior a 1 mm, esta é a solução mais conservativa. E a segunda com 50% do intervalo de massa que resulta num deslocamento ligeiramente superior a 1 mm, que é uma solução potencialmente mais apelativa do ponto de vista económico e de atenuação de radiação.

Tabela 5.53. Resultados do estudo de optimização do deslocamento máximo da M2_3DLS com restrição de massa caso de flexão lateral do pescoço

	45%	50%	Diferença
F(X*) [mm]	0,992	1,004	
Massa(X*) [g]	911,930	908,002	3,928
X* [mm]	5,275	5,250	0,025
Desvio-padrão [mm]	0,016	0,016	
Média [mm]	0,990	1,005	

Do ponto de vista económico poder-se-ia poupar cerca de 3,9 g de material T2 e do ponto de vista da espessura reduzir-se-ia 0,025 mm da M2_3DLS ao utilizar a redução de 50%.

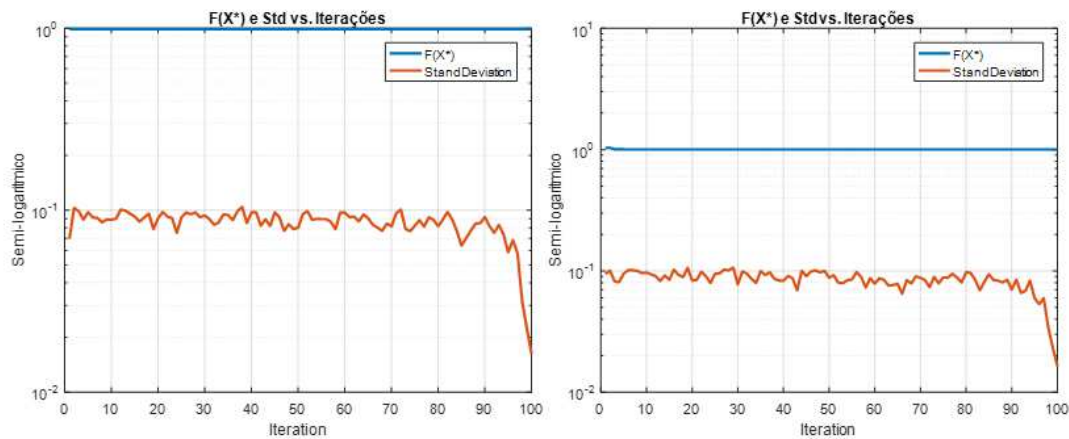


Figura 5.74. Variação da deformada máxima e do desvio-padrão ao longo das iterações na M2_3DLS caso de flexão lateral do pescoço (à esq.:45% redução; à dir.:50% redução)

No que respeita ao desempenho do WOA, mais uma vez pode-se observar na Figura 5.74, que o valor óptimo da função objectivo é atingido muito rapidamente, contudo o valor do desvio-padrão relativo a todos os elementos da população ao longo de todas as iterações converge mais lentamente que nos outros estudos de optimização efectuados sem restrição de massa.

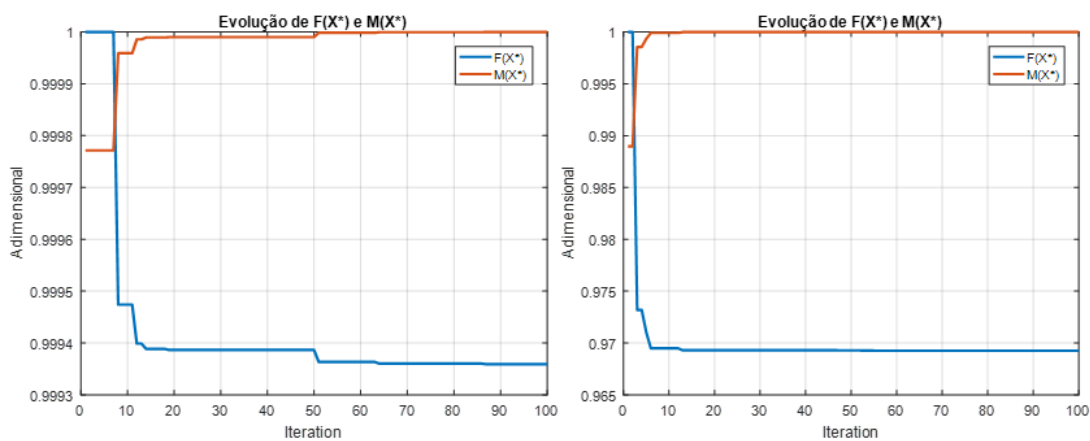


Figura 5.75. Variação da deformada máxima e da massa ao longo das iterações na M2_3DLS caso de flexão lateral do pescoço sob a forma adimensionalizada (à esq.:45% redução; à dir.:50% redução).

A Figura 5.75 mostra a variação do valor da função objectivo e do valor da massa no decorrer das iterações do estudo de optimização, estes valores encontram-se adimensionalizados pelo mesmo método utilizado no ponto 5.6.2.3.1. Como era expectável com a diminuição do valor do deslocamento máximo, o valor da massa da M2_3DLS aumenta.

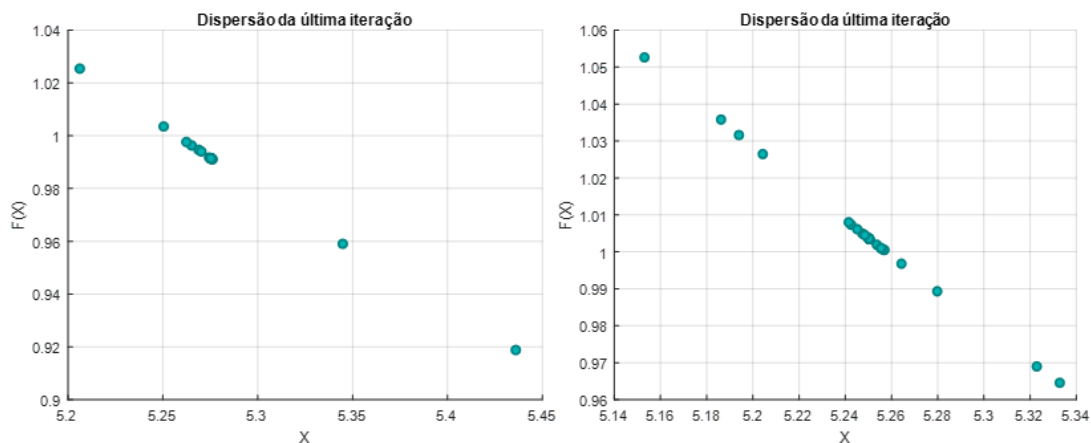


Figura 5.76. Dispersão de resultados da última geração na M2_3DLS caso de flexão lateral do pescoço (à esq.:45% redução; à dir.:50% redução).

O gráfico de dispersão de valores da população da última geração do estudo de otimização (Figura 5.76) mostra-nos que para esta adaptação do algoritmo WOA, tem um desempenho ao nível da convergência inferior aos estudos sem restrição de massa, ainda assim ao nível do mínimo global apresenta bons resultados.

5.6.2.3.3 FLEXÃO DO PESCOÇO COM M2_TC

Os resultados do polinómio metamodelo que foi interpolado encontram-se na Tabela 5.54. Foram calculados os valores do polinómio nos cinco pontos conhecidos que lhe dão origem e comparados os resultados sob a forma de desvio, que como se pode observar na tabela são aproximadamente zero.

Esta diferença mínima pode também ser observada na Figura 5.77, onde os pontos conhecidos estão sobrepostos à curva do polinómio determinado através do método dos mínimos quadrados.

Tabela 5.54. Resultados da geração do polinómio metamodelo da M2_TC caso de flexão do pescoço.

	h [mm]	Volume [mm³]	Massa [g]	M(h) [g]	Desvio (%)	
a	-8,864	2,2	313118,365	428,972	428,971	0,000
b	87,008	2,325	326956,356	447,930	447,934	0,001
c	-319,140	2,45	340806,343	466,905	466,900	-0,001
d	670,251	2,575	354668,346	485,896	485,898	0,000
e	-219,764	2,7	368542,369	504,903	504,903	0,000

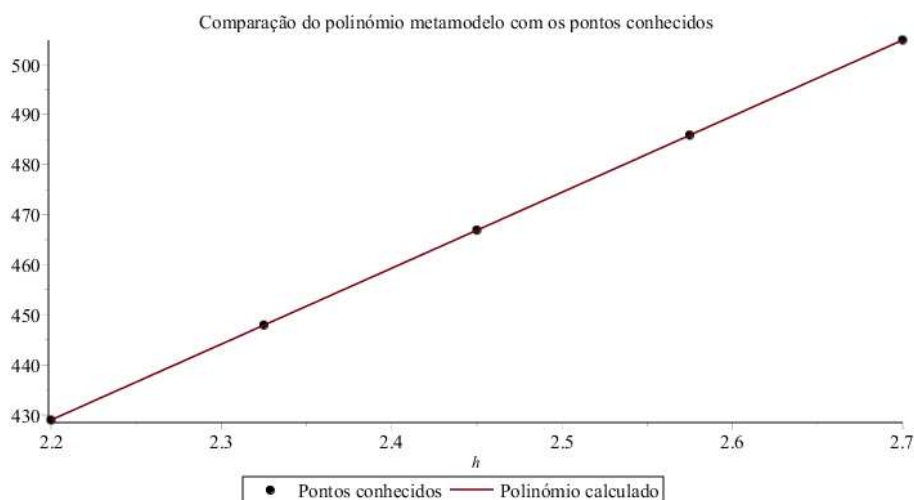


Figura 5.77. Gráfico representativo do polinômio metamodelo da massa da M2_TC e dos pontos que lhe deram origem, caso de flexão do pescoço.

No estudo de otimização do metamodelo do deslocamento resultante com restrição de massa, utilizando o algoritmo WOA obtiveram-se duas soluções. Uma que garante um deslocamento máximo inferior a 1 mm (mais conservativa), que corresponde a uma redução do intervalo de massa de 25%, e uma outra solução que corresponde a um deslocamento máximo ligeiramente superior a 1 mm com uma redução de 30% do intervalo de massa (menos conservativa).

Tabela 5.55. Resultados do estudo de otimização do deslocamento máximo da M2_TC com restrição de massa caso de flexão do pescoço.

	25%	30%	Diferença
F(X*) [mm]	0,991	1,015	
Massa(X*) [g]	485,920	482,123	3,797
X* [mm]	2,575	2,550	0,025
Desvio-padrão [mm]	0,014	0,021	
Média [mm]	0,989	1,014	

Como já foi referido para os dois casos anteriores, do ponto de vista económico e de atenuação de radiação pode ser positivo beneficiar de uma redução de aproximadamente 3,8 g e 0,025 mm de espessura de material. Contudo, se se pretender garantir 1 mm de deslocamento máximo, a redução de 25% é a que cumpre o critério de rigidez.

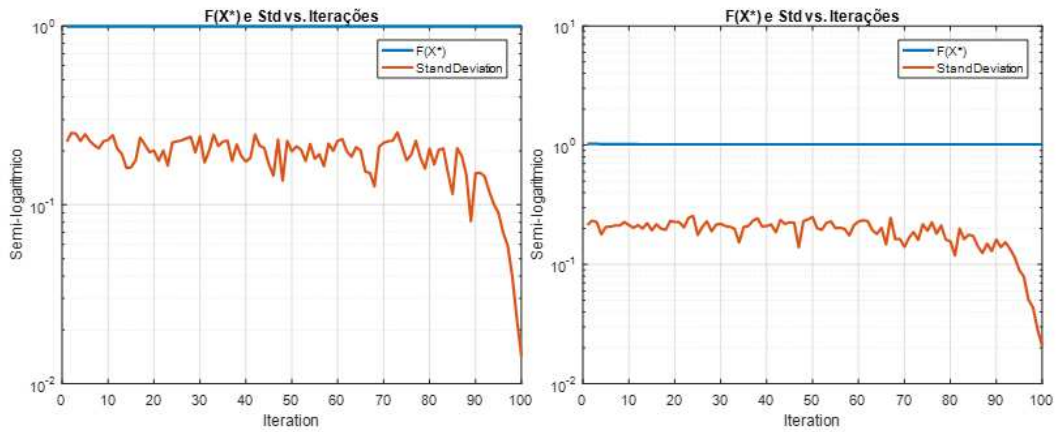


Figura 5.78. Variação da deformada máxima e do desvio-padrão ao longo das iterações na M2_TC caso de flexão do pescoço (à esq.:25% redução; à dir.:30% redução)

Em relação à evolução do algoritmo WOA ao longo das iterações, pode-se observar na Figura 5.78 que o valor óptimo da função objectivo é alcançado muito rapidamente, contudo a convergência do algoritmo não é tão rápida como nos estudos sem restrição de massa.

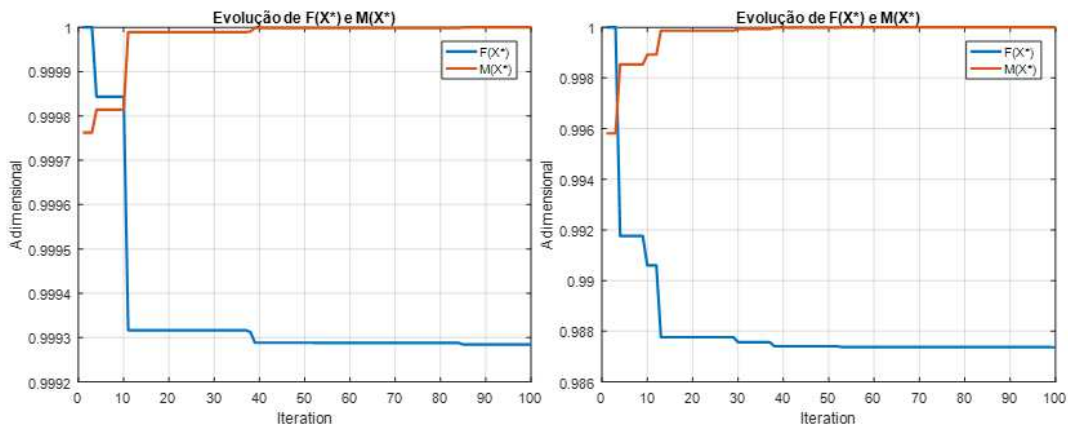


Figura 5.79. Variação da deformada máxima e da massa ao longo das iterações na M2_TC caso de flexão do pescoço sob a forma adimensionalizada (à esq.:25% redução; à dir.:30% redução).

Na Figura 5.79 pode observar-se a evolução do valor da função objectivo e da massa da M2_TC no decorrer das iterações. Os valores encontram-se adimensionalizados à semelhança dos estudos 5.6.2.3.1 e 5.6.2.3.2. Como era expectável o valor da massa aumenta à medida que o deslocamento máximo da máscara é optimizado.

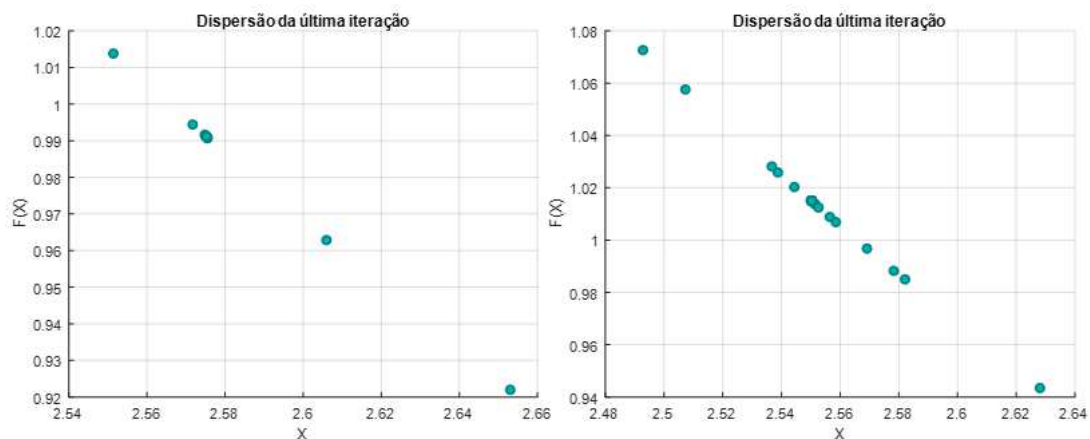


Figura 5.80. Dispersão de resultados da última geração na M2_TC caso de flexão do pescoço (à esq.:25% redução; à dir.:30% redução).

Os gráficos de dispersão da população da última geração (Figura 5.80), mostram visualmente o pior desempenho do algoritmo WOA, no que respeita à convergência para o mínimo global de todos os indivíduos, em comparação com os outros estudos de otimização sem restrição de massa (sub-seção 5.6.2.2), ainda que demonstre um bom desempenho pela busca da solução ótima (Figura 5.78).

5.6.2.3.4 FLEXÃO DO PESCOÇO COM M2_3DLS

Os resultados da interpolação do polinómio metamodelo da M2_3DLS caso de flexão do pescoço encontram-se na Tabela 5.56. Foram calculados os valores desta função que correspondem aos pontos que lhe dão origem e cálculos dos respectivos desvios, que se são todos aproximadamente zero.

Mais uma vez, a Figura 5.81 representa a proximidade entre valores e curva metamodelo, que em conjunto com os valores do desvio apresentados na Tabela 5.56, indicam uma boa aproximação.

Tabela 5.56. Resultados da geração do polinómio metamodelo da M2_3DLS caso de flexão do pescoço.

	h [mm]	Volume [mm³]	Massa [g]	M(h) [g]	Desvio (%)	
a	-0,801	2,2	316666,681	433,833	433,833	0,000
b	8,013	2,325	330706,869	453,068	453,069	0,000
c	-29,448	2,45	344759,251	472,320	472,320	0,000
d	201,206	2,575	358823,837	491,589	491,588	0,000
e	67,154	2,7	372900,636	510,874	510,874	0,000

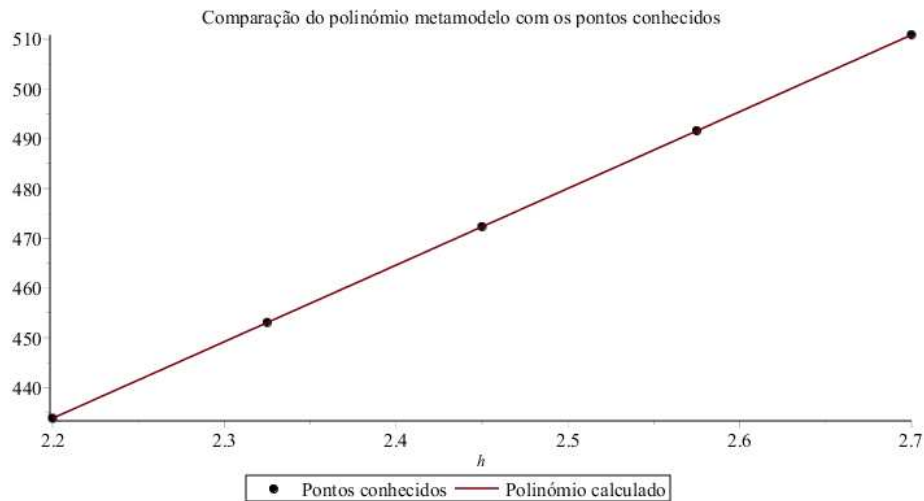


Figura 5.81. Gráfico representativo do polinómio metamodelo da massa da M2_3DLS e dos pontos que lhe deram origem, caso de flexão do pescoço.

Obtiveram-se duas soluções neste estudo de optimização (Tabela 5.57). Para 20% de redução do intervalo de massa consegue-se garantir um deslocamento resultante inferior a 1 mm, e para 25% de redução do intervalo de massa garante-se um deslocamento máximo ligeiramente superior a 1 mm.

Tabela 5.57. Resultados do estudo de optimização do deslocamento máximo da M2_3DLS com restrição de massa caso de flexão do pescoço.

	20%	25%	Diferença
F(X*) [mm]	0,997	1,021	
Massa(X*) [g]	495,466	491,614	3,852
X* [mm]	2,600	2,575	0,025
Desvio-padrão [mm]	0,014	0,023	
Média [mm]	1,000	1,027	

À semelhança do que já foi mencionado, esta diferença de aproximadamente 3,9 g em massa e 0,025 mm de espessura pode fazer diferença do ponto de vista económico e de atenuação de radiação, sendo por isso uma hipótese a considerar. Se o objectivo for garantir que o deslocamento não ultrapassa 1 mm de deslocamento, a decisão mais acertada recai sobre os 20% de redução do intervalo de massa.

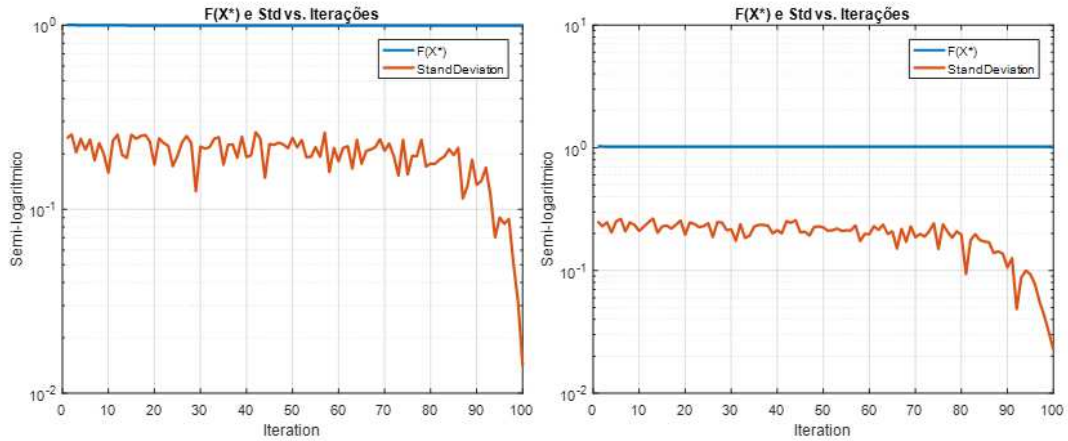


Figura 5.82. Variação da deformada máxima e do desvio-padrão ao longo das iterações na M2_3DLS caso de flexão do pescoço (à esq.:20% redução; à dir.:25% redução).

Do ponto de vista de convergência do algoritmo, é possível observar na Figura 5.82 que o valor da função objectivo converge muito rapidamente para o mínimo global, contudo o valor do desvio-padrão tem uma convergência mais lenta como é característico do WOA, garantindo uma boa cobertura do espaço de pesquisa.

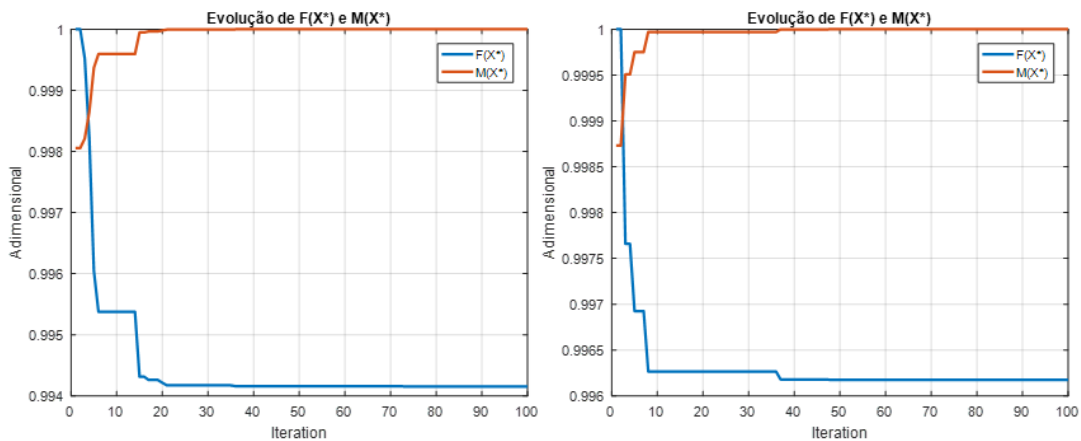


Figura 5.83. Variação da deformada máxima e da massa ao longo das iterações na M2_3DLS caso de flexão do pescoço sob a forma adimensionalizada (à esq.:20% redução; à dir.:25% redução).

Na Figura 5.83 é possível observar a evolução do valor do deslocamento máximo e da massa da M2_3DLS que lhe corresponde ao longo das iterações. Estes valores encontram-se adimensionalizados, tal como nos estudos 5.6.2.3.1 a 5.6.2.3.3. Como seria expectável que acontecesse, o valor da massa aumentou com o diminuir do deslocamento ao longo das iterações.

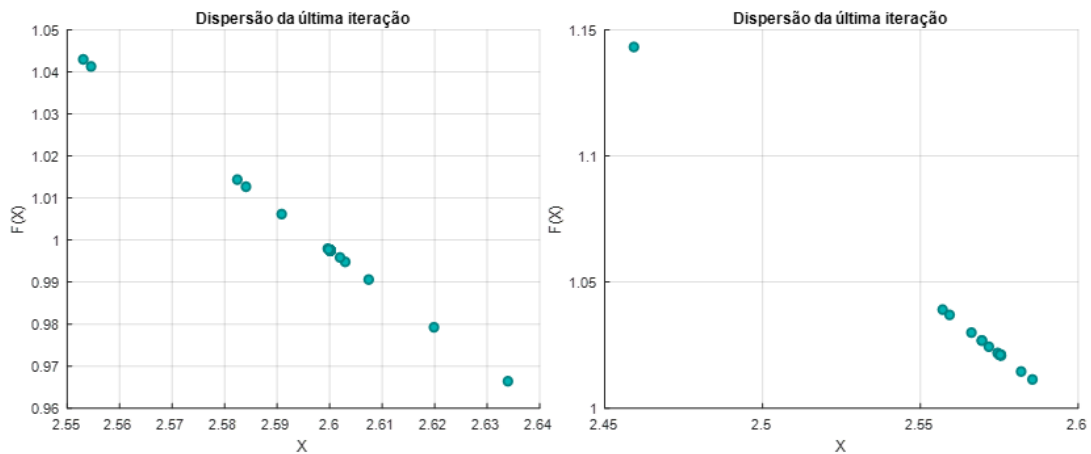


Figura 5.84. Dispersão de resultados da última geração na M2_3DLS caso de flexão do pescoço (à esq.:20% redução; à dir.:25% redução).

Nos gráficos da Figura 5.84 é possível observar a convergência mais lenta de resultados da população da última geração no WOA comparativamente aos resultados obtidos sem restrição de massa. Apesar disto, tal como nos estudos anteriores, o valor do mínimo global não ficou comprometido.

5.6.2.4 COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS OBTIDOS NA OPTIMIZAÇÃO DO DESLOCAMENTO RESULTANTE NAS MÁSCARAS

Nesta sub-secção comparam-se os resultados dos estudos de optimização utilizando o algoritmo meta-heurístico WOA e a metamodelação com os resultados obtidos no *software* comercial *SolidWorks*.

5.6.2.4.1 OPTIMIZAÇÃO DA DEFORMADA DAS MÁSCARAS DE IMOBILIZAÇÃO SEM RESTRIÇÃO DE MASSA

Para efeitos de comparação dos dois métodos de optimização em estudo foi utilizado o método do *Design Study* como referência, tal como foi feito no ponto 5.6.1.6, para efeitos de comparação dos desvios entre os métodos, tendo este cálculo sido feito com base no que é apresentado na equação 5.1.

Tabela 5.58. Comparação dos resultados de optimização das máscaras para o caso de carga da flexão lateral esquerda do pescoço

M2_TC			
Método de optimização	h [mm]	Def. Máx. [mm]	Desvio (%)
<i>Design Study</i>	5,5	0,864	2,093
Metamodelo com Kriging (WOA)	5,5	0,882	
M2_3DLS			
<i>Design Study</i>	5,5	0,880	1,444
Metamodelo com Kriging (WOA)	5,5	0,893	

Tabela 5.59. Comparação dos resultados de otimização das máscaras para o caso de carga de flexão do pescoço

M2_TC			
Método de otimização	h [mm]	Def. Máx. [mm]	Desvio (%)
<i>Design Study</i>	2,7	0,877	0,723
Metamodelo com Kriging (WOA)	2,7	0,883	
M2_3DLS			
<i>Design Study</i>	2,7	0,906	0,341
Metamodelo com Kriging (WOA)	2,7	0,909	

Como se pode observar pelas tabelas acima, os desvios obtidos para os quatro estudos de otimização feitos são todos muito baixos, sendo isto um indicador de que, para além de serem métodos de otimização adequados, a técnica de metamodelação utilizada para este tipo de estudo apresenta bons resultados.

5.6.2.4.2 OPTIMIZAÇÃO DA DEFORMADA DAS MÁSCARAS DE IMOBILIZAÇÃO COM RESTRIÇÃO DE MASSA

Para cada caso de carga e para cada máscara foram selecionadas duas possíveis espessuras como solução para o problema de otimização no ponto 5.6.2.3. No *SolidWorks* simulou-se cada uma dessas espessuras para o respectivo caso de carga e máscara com o fim de comparar os resultados obtidos.

No *SolidWorks* o valor de espessura utilizado teve a precisão da ordem das centésimas de milímetro, sendo esta uma precisão elevada para a aplicação, e inclusivamente, cerca de 10 vezes superior à resolução de uma impressora tipo FDM comum.

Começando pela ordem de apresentação das máscaras e situação de carga apresentadas nos pontos 5.6.2.1 a 5.6.2.3.4, tem-se a máscara M2_TC, e o caso de carga da flexão lateral esquerda do pescoço.

Tabela 5.60. Comparação de resultados do deslocamento máximo obtido com metamodelação e com o *SolidWorks* para a M2_TC caso de flexão lateral esquerda do pescoço.

	F(X*) [mm]	<i>SolidWorks</i> [mm]	Desvio (%)
h = 5,25 mm	0,990	0,972	1,807
h = 5,23 mm	1,001	0,982	2,029

O valor que foi considerado como a referência foi o obtido no *SolidWorks* e o cálculo do desvio apresentado na Tabela 5.60 foi feito com recurso à equação 5.1.

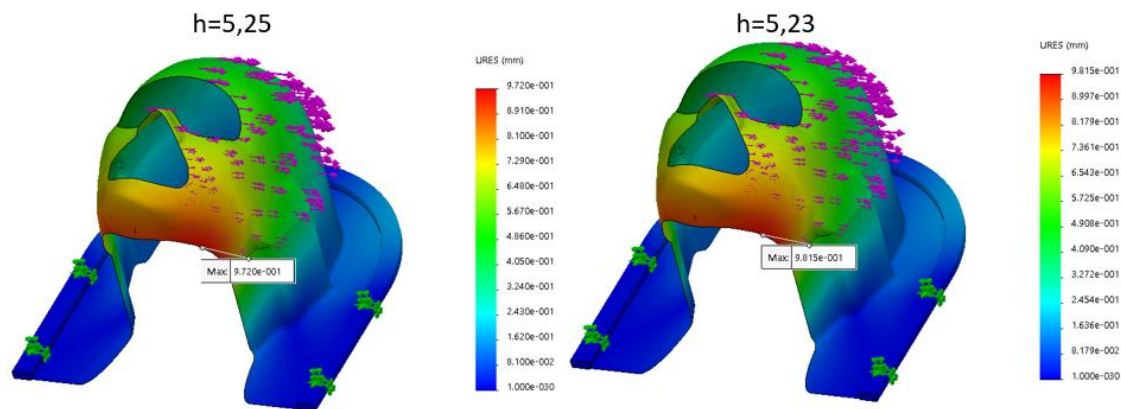


Figura 5.85. Resultados SW do deslocamento resultante na M2_TC caso de flexão lateral esquerda do pescoço (à esq.: h=5,25 mm; à dir.: h=5,23 mm).

Os resultados obtidos para o deslocamento resultante da M2_TC deste caso de carga encontram-se representados na Figura 5.85. Cruzando estes resultados com os da Tabela 5.60, pode-se observar que os valores do desvio entre os resultados são relativamente baixos, indicando mais uma vez que a metamodelação feita ao deslocamento máximo da máscara teve uma abordagem adequada.

Passando à máscara M2_3DLS com o mesmo caso de carga, os resultados apresentam-se na Tabela 5.61 e na Figura 5.86. Tal como no caso anterior, o valor tido como referência é o resultado do deslocamento máximo obtido em SW.

Tabela 5.61. Comparação de resultados do deslocamento máximo obtido com metamodelação e com o *SolidWorks* para a M2_3DLS caso de flexão lateral esquerda do pescoço.

	F(X*) [mm]	SolidWorks [mm]	Desvio (%)
h = 5,28 mm	0,992	0,976	1,571
h = 5,25 mm	1,004	0,990	1,337

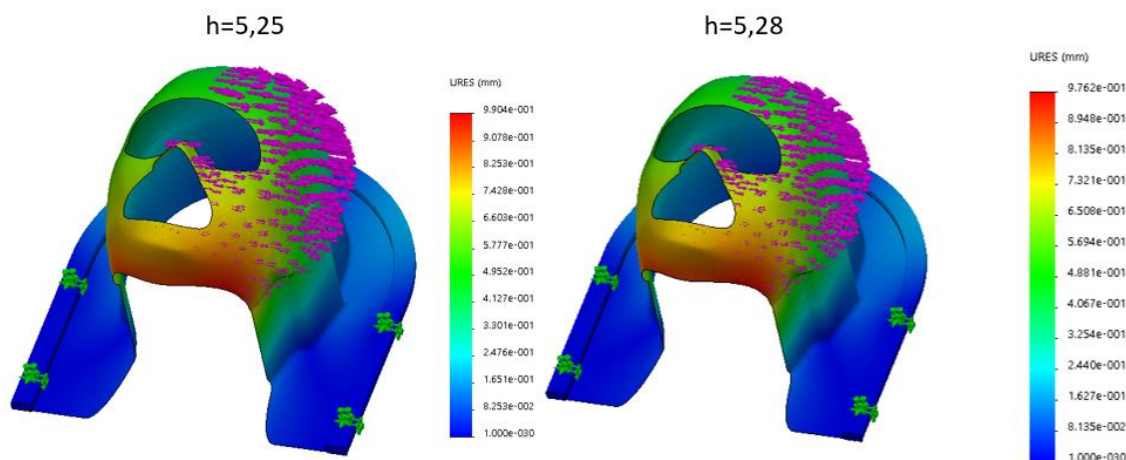


Figura 5.86. Resultados SW do deslocamento resultante na M2_3DLS caso de flexão lateral esquerda do pescoço (à esq.: h=5,25 mm; à dir.: h=5,28 mm).

Uma vez mais, podemos observar que os valores do desvio entre os dois métodos são baixos, apesar de não serem aproximadamente zero. Também indicando que neste caso a metamodelação feita em duas fases com Kriging e o método dos mínimos quadrados se trata de uma boa aproximação para descrever o deslocamento resultante na máscara em função das coordenadas e da espessura.

Passando ao caso de carga de flexão do pescoço e para a máscara M2_TC, os resultados obtidos encontram-se na Tabela 5.62 e na Figura 5.87

Tabela 5.62. Comparação de resultados do deslocamento máximo obtido com metamodelação e com o *SolidWorks* para a M2_TC caso de flexão do pescoço.

	F(X*) [mm]	SolidWorks [mm]	Desvio (%)
h = 2,58 mm	0,991	0,979	1,212
h =2,55 mm	1,015	1,008	0,686

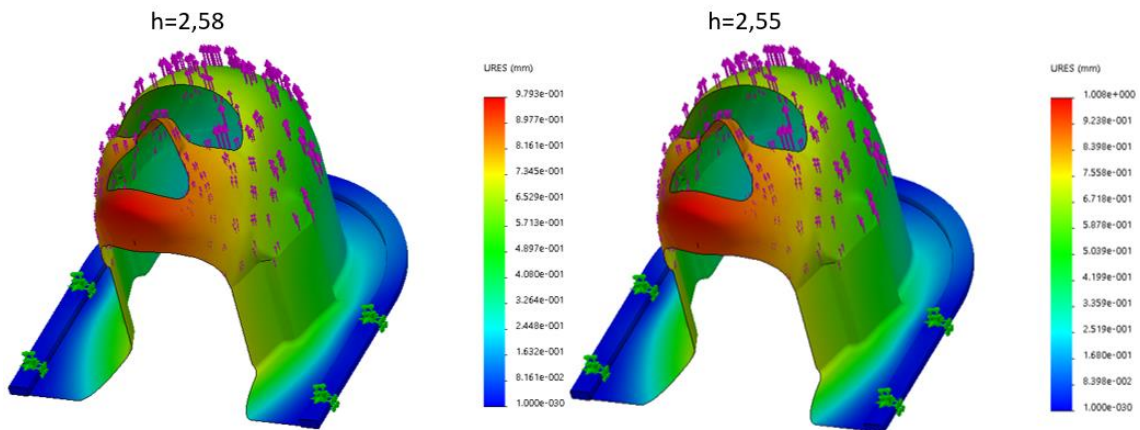


Figura 5.87. Resultados SW do deslocamento resultante na M2_TC caso de flexão do pescoço (à esq.: h=2,58 mm; à dir.: h=2,55 mm).

Por fim e para a máscara M2_3DLS no caso de carga da flexão do pescoço, os resultados podem ser consultados na Tabela 5.63 e na Figura 5.88.

Tabela 5.63. Comparação de resultados do deslocamento máximo obtido com metamodelação e com o *SolidWorks* para a M2_3DLS caso de flexão do pescoço.

	F(X*) [mm]	SolidWorks [mm]	Desvio (%)
h = 2,6 mm	0,997	0,994	0,398
h = 2,58 mm	1,021	1,012	0,906

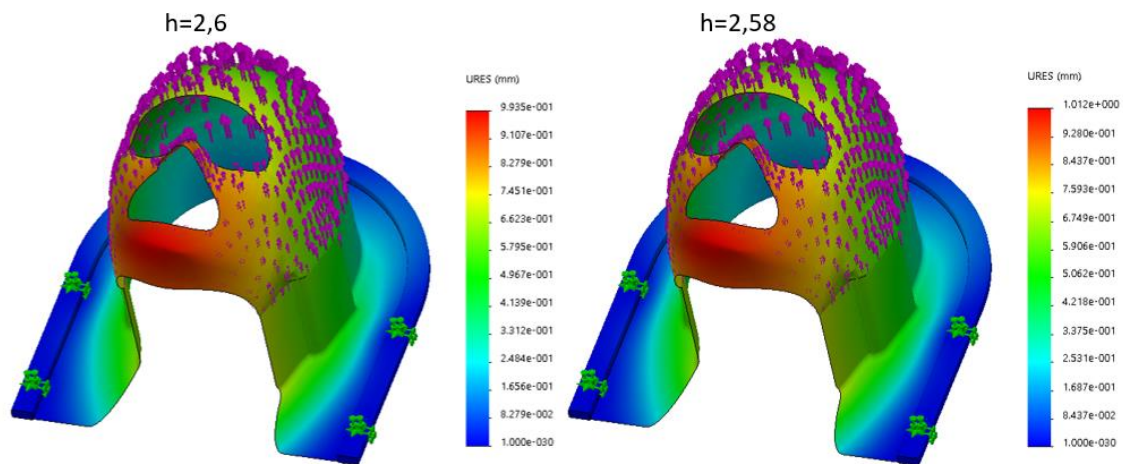


Figura 5.88. Resultados SW do deslocamento resultante na M2_3DLS caso de flexão do pescoço (à esq.: h=2,6 mm; à dir.: h=2,58 mm).

Tal como em casos anteriores os valores do desvio para a M2_3DLS, numa situação de carga de flexão do pescoço são baixos.

Note-se que para os quatro casos analisados, para simular as máscaras no *SolidWorks* foi feita uma redução das casas decimais da variável espessura às centésimas de milímetro, o que poderá contribuir para que os desvios calculados sejam ligeiramente superiores aos dos estudos de optimização onde não havia restrição de massa (secção 5.6.2.2).

6 CONCLUSÕES

6.1 ANÁLISE GLOBAL DOS RESULTADOS OBTIDOS

De um modo geral pode-se concluir que com este trabalho foram modelados com sucesso três geometrias diferentes para as máscaras de imobilização para diagnóstico e terapêutica, utilizando a Tomografia Computorizada e o Varrimento Laser 3D. Estes dispositivos apesar de terem sido modelados com base num fântoma, por motivos relacionados com a protecção de dados dos pacientes, são transponíveis para um ser humano.

Das três geometrias de máscaras modeladas e analisadas, foi possível concluir que a geometria M2 garantia a melhor solução de imobilização, quer no caso da superfície da máscara obtida por Tomografia Computorizada, quer por Varrimento Laser 3D.

Dos estudos de optimização realizados foi possível concluir que tanto os algoritmos PSO restringido como o WOA são eficazes na obtenção do valor óptimo de uma dada função. Pode ainda afirmar-se que para os casos considerados, o algoritmo PSO restringido é mais rápido no processo de convergência, porém o WOA garante uma melhor cobertura do espaço de pesquisa sem comprometer a busca pela solução óptima.

A utilização de técnicas de optimização com recurso a metamodelação para obter num curto período de tempo, a configuração óptima destas máscaras no que respeita à espessura indispensável à correcta imobilização, é igualmente um ponto a salientar no contexto deste trabalho. Em termos de resultados, foi possível concluir, que para este caso, a aplicação do Kriging Simple na metamodelação da deformada transversal da placa era a versão mais adequada do método Kriging a utilizar. Já para o caso do deslocamento resultante nas máscaras de imobilização a versão Kriging Comum demonstrou melhores resultados.

Adicionalmente, e constituindo um resultado de bastante relevância, foi estabelecida uma metodologia de aquisição-modelação-análise-produção de máscaras de imobilização que se constituiu como uma inovação promissora quer sob a perspectiva da qualidade das mesmas, quer na perspectiva da eliminação/minimização dos aspectos negativos relatados pelos pacientes relativamente às máscaras tradicionais.

6.2 DESENVOLVIMENTOS FUTUROS

Sem prejuízo de outras possibilidades considera-se que seria interessante e importante continuar esta linha de investigação no sentido de desenvolver:

- Geometrias alternativas para as máscaras, bem como outras técnicas de fixação com capacidade de garantir a requerida imobilização.
- Um metamodelo 3D de toda a máscara, para cada uma das máscaras de imobilização ao qual estivessem associadas as suas características geométricas, tensões e deformações em função da sua espessura, ao invés de apenas a zona de maiores deslocamentos resultantes.
- Uma interface entre o *Matlab* e o *SolidWorks* que permitisse a utilização dos algoritmos de optimização programados em *Matlab* para resolver problemas de optimização de estruturas modeladas em *SolidWorks*.
- Realizar estudos de atenuação à radiação para diferentes geometrias de máscaras, diferentes materiais e diferentes parâmetros de impressão 3D.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Akin, J Ed. 2009. *Finite Element Analysis Concepts via SolidWorks*. World Scientific.
- Almosnino, Sivan, Lucie Pelland, and Joan M. Stevenson. 2010. “Retest Reliability of Force-Time Variables of Neck Muscles under Isometric Conditions.” *Journal of Athletic Training* 45 (5): 453–58. <https://doi.org/10.4085/1062-6050-45.5.453>.
- Alroomi, Ali R. 2015. “Electric Power Systems Analysis & Nature-Inspired Optimizations Algorithms.” 2015. <http://al-roomi.org/benchmarks/unconstrained/n-dimensions>.
- Andrey, P, and T Boudier. 2018. “3D Processing and Analysis with ImageJ.” 2018. <https://pdfs.semanticscholar.org/858c/f348b692a34b2075cc1ef577be08c2344ea1.pdf>.
- Balletti, Caterina, Martina Ballarin, and Francesco Guerra. 2017. “3D Printing: State of the Art and Future Perspectives.” *Journal of Cultural Heritage* 26: 172–82. <https://doi.org/10.1016/j.culher.2017.02.010>.
- Boussaïd, Ilhem, Julien Lepagnot, and Patrick Siarry. 2013. “A Survey on Optimization Metaheuristics.” *Information Sciences* 237: 82–117. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2013.02.041>.
- Brooks, Rodney A., and Giovanni Di Chiro. 1975. “Theory of Image Reconstruction in Computed Tomography.” *Radiology* 117 (3): 561–72. <https://doi.org/10.1148/117.3.561>.
- Buonamici, Francesco, Monica Carfagni, Rocco Furferi, Lapo Governi, Alessandro Lapini, and Yary Volpe. 2018. “Reverse Engineering of Mechanical Parts: A Template-Based Approach.” *Journal of Computational Design and Engineering* 5 (2): 145–59. <https://doi.org/10.1016/j.jcde.2017.11.009>.
- Buonamici, Francesco, Monica Carfagni, Rocco Furferi, Lapo Governi, Alessandro Lapini, Yary Volpe, Francesco Buonamici, and Lapo Governi. 2017. “Reverse Engineering Modeling Methods and Tools : A Survey Reverse Engineering Modeling Methods and Tools : A Survey” 4360 (November). <https://doi.org/10.1080/16864360.2017.1397894>.
- Bures, M, and J Polcar. 2016. “Comparison of 3D Scanning and 3D Modelling of a Workplace from Various Aspects.” *2016 IEEE International Conference on Industrial Engineering and Engineering Management (IEEM)*, 306–10. <https://doi.org/10.1109/IEEM.2016.7797886>.
- Chen, Shuqing, Yanye Lu, Christian Hopfgartner, Michael Sühling, and Stefan Steidl. 2016. “3-D PRINTING BASED PRODUCTION OF HEAD AND NECK MASKS FOR RADIATION THERAPY USING CT VOLUME DATA : A FULLY AUTOMATIC FRAMEWORK Pattern Recognition Lab , Department of Computer Science , Research & Development , Computed Tomography & Radiation Oncology , Im” D: 403–6.
- Chen, Ying-Yi, Kuan-hsun Lin, Hsu-kai Huang, Hung Chang, and Shih-chun Lee. 2018. “The Beneficial Application of Preoperative 3D Printing for Surgical Stabilization of Rib Fractures.” *PLOS ONE*, 1–10. <https://doi.org/https://doi.org/10.1371/journal.pone.0204652>.
- Chougule, V N, A V Mulay, and B B Ahuja. 2014. “Development of Patient Specific Implants for Minimum Invasive Spine Surgeries (MISS) from Non-Invasive Imaging Techniques by Reverse Engineering and Additive Manufacturing Techniques.” *Procedia Engineering* 97: 212–19. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2014.12.244>.
- Clees, T., N. Hornung, I. Nikitin, L. Nikitina, D. Steffes-lai, and S. Klimenko. 2014. “Focused Ultrasonic Therapy Planning: Metamodeling, Optimization, Visualization.” *Journal of Computational Science* 5 (6): 891–97. <https://doi.org/10.1016/j.jocs.2014.06.003>.
- Clerc, Maurice, and James Kennedy. 2002. “The Particle Swarm - Explosion, Stability, and Convergence in a Multidimensional Complex Space.” *IEEE Transactions on Evolutionary Computation* 6 (1): 58–73.
- Craveiro, D.S., R.S.B. Rosa, M.A.R. Loja, L. Vieira, E. Sousa, D. Costa, R. Parafita, and J.A.

- Rodrigues. 2017. "IMMOBILIZATION DEVICES FOR DIAGNOSIS AND THERAPEUTIC MEDICAL APPLICATIONS." In *XIII CIBEM - 2017 Lisboa*, 1–11.
- Craveiro, D S, M A R Loja, L Vieira, and M Vinyas. 2019. "An Optimization Strategy for Customized Radiotherapy Head Immobilization Masks (Aceite)." In *ENBENG 2019*.
- Craveiro, DS, MAR Loja, L Vieira, E Sousa, D Costa, R Parafita, and JA Rodrigues. 2017. "Imobilização Da Região Da Cabeça Por Prototipagem Rápida Para Fins de Diagnóstico e Terapêutica." In *Poster in - XVI Congresso Nacional de Medicina Nuclear*.
- Craveiro, DS, RSB Rosa, MAR Loja, L Vieira, E Sousa, and JA Rodrigues. 2018. "Prototype Modelling of Medical Devices for Improved Quality Immobilization in Diagnosis and Therapeutic (Aceite)." *TQM - Techniques, Methodologies and Quality*.
- Dai, Hou-ping, and Dong-dong Chen. 2018. "Effects of Random Values for Particle Swarm Optimization Algorithm." <https://doi.org/10.3390/a11020023>.
- Darwish, Ashraf. 2018. "Bio-Inspired Computing: Algorithms Review, Deep Analysis, and the Scope of Applications." *Future Computing and Informatics Journal*. <https://doi.org/10.1016/j.fcij.2018.06.001>.
- Dorigo, Marco, Vittorio Maniezzo, and Albert Coloni. 1996. "Ant System : Optimization by a Colony of Cooperating Agents" 26 (1).
- Fazio, Vinicius Sousa, and Mauro Roisenberg. 2013. "Spatial Interpolation: An Analytical Comparison Between Kriging and RBF Networks." *Proceedings of the 28th Annual ACM Symposium on Applied Computing* 2 (1): 2–7. <https://doi.org/10.1145/2480362.2480364>.
- Ferreira, A.J.M. 2010. *Problemas de Elementos Finitos Em MATLAB*. Fundação Calouste Gulbenkian.
- Fisher, Mark, Christopher Applegate, Mohammad Ryalat, Stephen Laycock, Mark Hulse, Daniel Emmens, and Duncan Bell. 2014. "Evaluation of 3-D Printed Immobilisation Shells for Head and Neck IMRT," no. December: 322–28.
- Geng, Zhaohui, and Bopaya Bidanda. 2017. "Review of Reverse Engineering Systems – Current State of the Art." *Virtual and Physical Prototyping* 0 (0): 1–12. <https://doi.org/10.1080/17452759.2017.1302787>.
- Health, Nordion - Science Advancing. 2011. "Gamma Compatible Materials." 2011. <http://www.nordion.com>.
- Huang, Xinge, Rui Wang, Xudong Zhao, and Kaijian Hu. 2017. "Aero-Engine Performance Optimization Based on Whale Optimization Algorithm." In *36th Chinese Control Conference*.
- Hughes, Jake Edmond, Yeesock Kim, Jo Woon Chong, and Changwon Kim. 2018. "Particle Swarm Optimization for Active Structural Control of Highway Bridges Subjected to Impact Loading" 2018.
- Jaimes, E Salamanca, G C Prada Botía, P H Rodrigues G Reis, J C Campos Rubio, and M R Volpini Lana. 2018. "Comparison of a Transtibial Socket Design Obtained by Additive Manufacturing and Reverse Engineering and a Traditional Model Comparison of a Transtibial Socket Design Obtained by Additive Manufacturing and Reverse Engineering and a Traditional Model." In *Journal of Physics: Conference Series*.
- Kant, T., and B. N. Pandya. 1988. "A Simple Finite Element Formulation of a Higher-Order Theory for Unsymmetrically Laminated Composite Plates." *Composite Structures* 9 (3): 215–46. [https://doi.org/10.1016/0263-8223\(88\)90015-3](https://doi.org/10.1016/0263-8223(88)90015-3).
- Kar, Arpan Kumar. 2016. "Bio Inspired Computing - A Review of Algorithms and Scope of Applications." *Expert Systems With Applications*. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2016.04.018>.
- Kennedy, James, and Russell Eberhart. 1995. "Particle Swarm Optimization," 1942–48.
- Khan, Muhammad Ahmed, and Tahira Mumtaz. 2014. "Application of Assembly and

- Manufacturing Technology Three Dimensional Solid Modeling of Prosthetic Knee Joint.” In *20th International Symposium for Design and Technology in Electronic Packaging (SIITME)*, 75–78.
- Loja, MA, E Sousa, L Vieira, D Costa, D Craveiro, R Parafita, and D Costa. 2018. “Using 3D Anthropometric Data for the Modelling of Customized Head Immobilization Masks (Aceite).” *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering: Imaging & Visualization*.
- Loja, MAR, DS Craveiro, L Vieira, E Sousa, JA Rodrigues, and R Portal. 2018. “RADIOTHERAPY CUSTOMIZED HEAD IMMOBILIZATION MASKS: FROM THE MODELLING AND ANALYSIS TO 3D PRINTING (Submetido).” *Nuclear Science and Techniques*.
- Machado, J. d. M. F., M. S. Monteiro, V. F. Vieira, J.-A. Collinot, J. O. Prior, L. Vieira, and J. A. Pires-Jorge. 2015. “Value of a Lower-Limb Immobilization Device for Optimization of SPECT/CT Image Fusion.” *Journal of Nuclear Medicine Technology* 43 (2): 98–102. <https://doi.org/10.2967/jnmt.114.145771>.
- “Material Property Data - MATWEB.” 2017. 2017. <http://www.matweb.com/index.aspx>.
- Milroy, M J, D J Weir, C Bradley, and G W Vickers. 1996. “Reverse Engineering Employing a 3D Laser Scanner: A Case Study.” *International Journal of Advance Manufacturing Technology* 12: 111–21. <https://doi.org/10.1007/BF01178951>.
- Mirjalili, Seyedali, and Andrew Lewis. 2016. “The Whale Optimization Algorithm.” *Advances in Engineering Software* 95: 51–67. <https://doi.org/10.1016/j.advengsoft.2016.01.008>.
- Montgomery, Douglas C, and George C Runger. 2013. *Applied Statistics and Probability for Engineers*. 6th Editio.
- Muthiah-Nakarajan, Venkataraman, and Mathew Mithra Noel. 2016. “Galactic Swarm Optimization: A New Global Optimization Metaheuristic Inspired by Galactic Motion.” *Applied Soft Computing Journal* 38: 771–87. <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2015.10.034>.
- Nagrath, Malvika, Alexander Sikora, Jacob Graca, Jennifer L Chinnici, Saeed Ur Rahman, G Sharaschandra, Sasikumar Ponnusamy, Abhiram Maddi, and R Praveen. 2018. “Functionalized Prosthetic Interfaces Using 3D Printing: Generating Infection-Neutralizing Prosthesis in Dentistry.” *Materials Today Communications*. <https://doi.org/10.1016/j.mtcomm.2018.02.016>.
- Okobiah, Oghenekarho, Saraju Mohanty, and Elias Kougiannos. 2014. “Fast Design Optimization through Simple Kriging Metamodeling: A Sense Amplifier Case Study.” *IEEE Transactions on Very Large Scale Integration (VLSI) Systems* 22 (4): 932–37. <https://doi.org/10.1109/TVLSI.2013.2256436>.
- Patients, Positioning. 1995. “Immobilizing and Positioning Patients for Radiotherapy” 5 (2): 100–114.
- Paulic, Matej, Tomaz Irgolic, Joze Balic, Franc Cus, Andrej Cupar, Tomaz Brajljih, and Igor Drstvensek. 2014. “Reverse Engineering of Parts with Optical Scanning and Additive Manufacturing.” *Procedia Engineering* 69: 795–803. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2014.03.056>.
- Pham, Vincent, Annie-pier Lavall, Alexandru Foias, David Roberge, Ellis Mitrou, and Philip Wong. 2018. “Radiotherapy Immobilization Mask Molding Through the Use of 3D-Printed Head Models” 17: 1–8. <https://doi.org/10.1177/1533033818809051>.
- Rajakumar, R, P Dhavachelvan, and T Vengattaraman. 2016. “A Survey on Nature Inspired Meta-Heuristic Algorithms with Its Domain Specifications.” In *2016 International Conference on Communication and Electronic Systems (ICCES)*.
- Rasmussen, C E, C K I Williams, Gaussian Processes, M I T Press, and Michael I Jordan. 2006. *Rasmussen and Williams - Gaussian Processes for Machine Learning*. <https://doi.org/10.1142/S0129065704001899>.

- Si-ming, Yin. 1985. "NAVIER SOLUTION FOR THE ELASTIC EQUILIBRIUM PROBLEMS OF RECTANGULAR THIN PLATES WITH VARIABLE THICKNESS IN LINEAR AND NONLINEAR THEORIES." *Applied Mathematics and Mechanics* 6 (6).
- Silva, Sérgio Miguel Duarte da. 2015. "Otimização de Placas Compósitas Laminadas Utilizando Redes Neurais e Enxames de Partículas." Instituto Superior de Engenharia de Lisboa.
- Sittiwanchai, Teppakorn, Ippei Nakayama, Shinichi Inoue, and Jun Kobayashi. 2014. "Transhumeral Prosthesis Prototype with 3D Printing and SEMG-Based Elbow Joint Control Method." In *International Conference on Advanced Mechatronic Systems*, 227–31.
- Solaberrieta, E, R Minguez, L Barrenetxea, E Sierra, and O Etxaniz. 2014. "Computer-Aided Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering." *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*. <https://doi.org/10.1080/10255842.2012.745859>.
- Sousa, E., L. Vieira, D.M.S. Costa, D.C. Costa, R. Parafita, and M.A.R. Loja. 2017. "Comparison between 3D Laser Scanning and Computed Tomography on the Modelling of Head Surface." In *SYMCOMP 2017 - 3rd International Conference on Numerical and Symbolic Computation: Developments and Applications, Proceedings*, 6–7.
- Systemes, Dassault. 2018. "SolidWorks Help." 2018. http://help.solidworks.com/2018/english/solidworks/cworks/c_element_types.htm.
- "Think3D." 2019. 2019. <https://www.think3d.in/landing-pages/3d-model-price-calculator/>.
- Torres, Jonathan, José Coteló, Justin Karl, and Ali P. Gordon. 2015. "Mechanical Property Optimization of FDM PLA in Shear with Multiple Objectives." *Jom* 67 (5): 1183–93. <https://doi.org/10.1007/s11837-015-1367-y>.
- Xie, Guangrui, and Xi Chen. 2017. "A Heteroscedastic T-Process Simulation Metamodeling Approach and Its Application in Inventory Control and Optimization." In *Proceedings of the 2017 Winter Simulation Conference*.
- Zain, RM, AM Razali, KAM Salleh, and R Yahya. 2017. "Image Reconstruction of X-Ray Tomography by Using Image J Platform." In *AIP Conference Proceedings 1799*.
- Zarghami, Niloufar, Michael D Jensen, Paula J Foster, Ann F Chambers, Frederick A Dick, and Eugene Wong. 2015. "Technical Note : Immunohistochemical Evaluation of Mouse Brain Irradiation Targeting Accuracy with 3D-Printed Immobilization Device" 42 (November): 6507–14.

APÊNDICES

I.	Modelação Geométrica das Máscaras	I.1
A.	Tomografia Computorizada:	I.1
B.	3D Laser Scanning:	I.6
C.	Suporte de cabeça.....	I.12
II.	Seleccção da Situação de Carga Crítica	II.14
A.	Máscaras TC.....	II.14
B.	Máscaras 3DLS	II.14
III.	Parametrização do <i>SolidWorks</i>	III.16
IV.	Estudos de Convergência	IV.20
A.	Máscaras de Imobilização	IV.20
1.	Tomografia Computorizada.....	IV.20
2.	3D Laser Scanning	IV.23
B.	Placa fina	IV.26
1.	Número de termos das séries duplas de Fourier	IV.26
2.	Malha da placa com formulação de Kant	IV.29
V.	Seleccção do Material a Utilizar	V.32
A.	Máscaras TC.....	V.32
B.	Máscaras 3DLS	V.34
VI.	Testes aos Algoritmos de Optimização	VI.38
A.	Funções de teste	VI.38
1.	PSO.....	VI.38
2.	PSO restringido	VI.46
3.	WOA	VI.54
B.	Parâmetro de forma da espiral do WOA.....	VI.62
VII.	Parametrização da Metamodelação (Método Kriging).....	VII.79
A.	Placa fina	VII.79
1.	100% dos pontos	VII.79
2.	50% dos pontos do interior da placa	VII.83
B.	Metamodelos do deslocamento resultante nas máscaras	VII.87

1.	M2_TC: Flexão lateral esquerda do Pescoço	VII.87
2.	M2_3DLS: Flexão lateral esquerda do pescoço	VII.90
3.	M2_TC: Flexão do pescoço	VII.92
4.	M2_3DLS: Flexão do pescoço	VII.94
VIII.	Estudos de Optimização da Deformada da Placa Fina	VIII.96
A.	Optimização da placa com o <i>Design Study</i>	VIII.96
B.	Método de Navier (PSO e WOA)	VIII.97
1.	PSO restringido	VIII.97
2.	WOA	VIII.98
C.	Deformada máxima da placa fina com formulação de Kant (PSO e WOA) VIII.100	
1.	PSO restringido	VIII.100
2.	WOA	VIII.101
D.	Metamodelação da deformada da placa fina	VIII.103
1.	PSO restringido	VIII.103
2.	WOA	VIII.104
E.	Optimização do metamodelo da deformada da placa fina com Kriging VIII.106	
1.	PSO restringido	VIII.106
2.	WOA	VIII.107
3.	Optimização do Metamodelo $W_{X^*,Y^*}(h)$	VIII.108
IX.	Estudos de Optimização do Deslocamento Resultante das Máscaras	IX.110
A.	Optimização com o <i>Design Study</i>	IX.110
1.	M2_TC: Flexão lateral esquerda do pescoço	IX.110
2.	M2_3DLS: Flexão lateral esquerda do pescoço	IX.111
3.	M2_TC: Flexão do pescoço	IX.111
4.	M2_3DLS: Flexão do pescoço	IX.112
B.	Optimização dos metamodelos do deslocamento resultante	IX.113
1.	M2_TC: Flexão lateral esquerda do pescoço	IX.113
2.	M2_3DLS: Flexão lateral esquerda do pescoço	IX.116
3.	M2_TC: Flexão do pescoço	IX.119
4.	M2_3DLS: Flexão do pescoço	IX.121

C. Otimização dos metamodelos do deslocamento resultante com constrangimento de massa	IX.124
1. Número de gerações a utilizar	IX.124
2. M2_TC: Flexão lateral esquerda do pescoço	IX.127
3. M2_3DLS: Flexão lateral esquerda do pescoço	IX.129
4. M2_TC: Flexão do pescoço	IX.132
5. M2_3DLS: Flexão do pescoço	IX.135

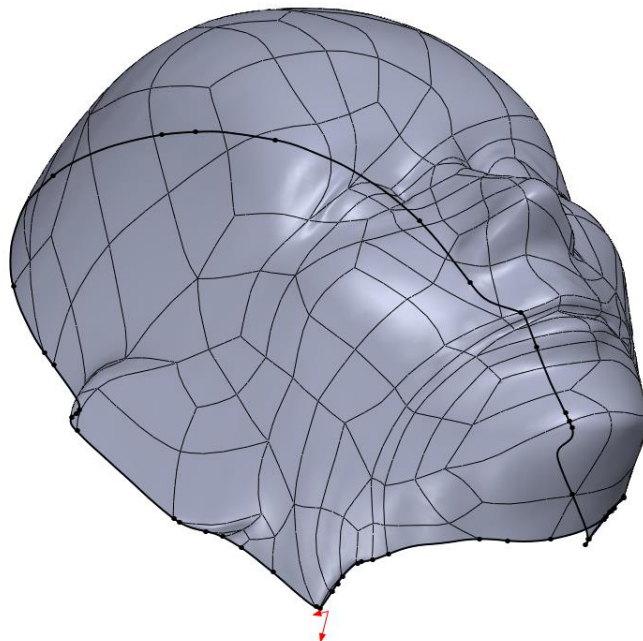
I. MODELAÇÃO GEOMÉTRICA DAS MÁSCARAS

Este apêndice descreve brevemente as etapas que foram seguidas na modelação geométrica das máscaras de imobilização.

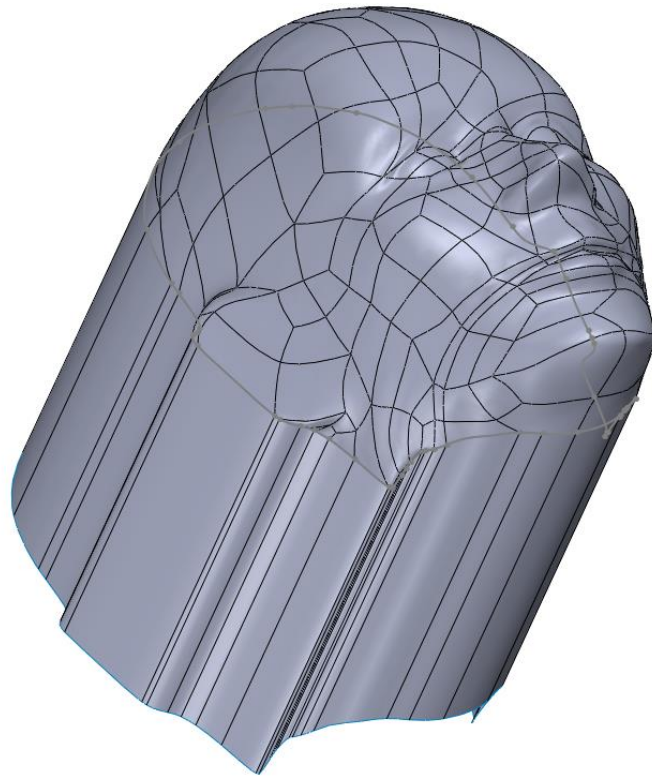
A. TOMOGRAFIA COMPUTORIZADA:

Superfície base:

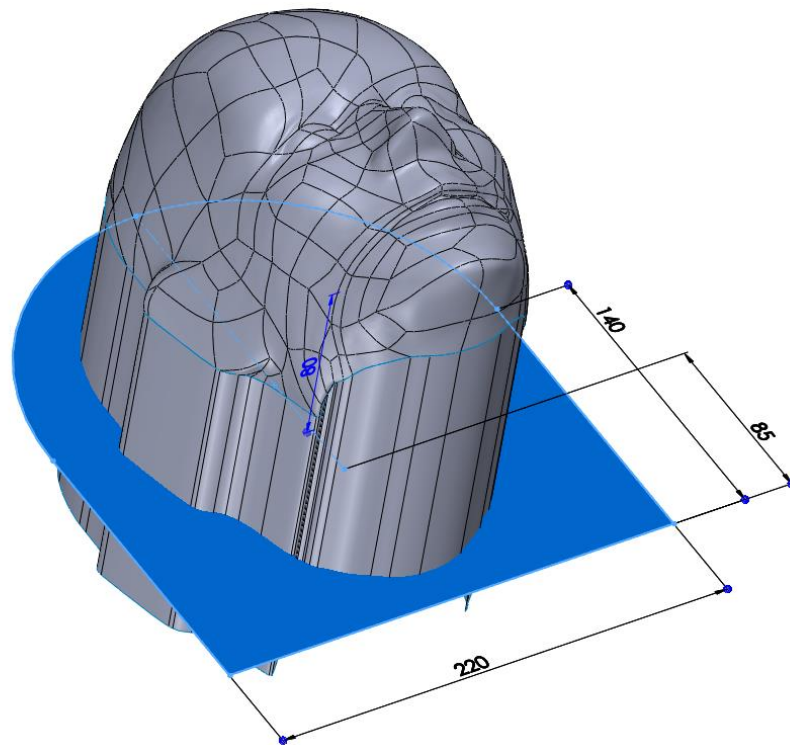
Superfícies retiradas do ficheiro CT sólido, usando a função surface knit. As superfícies retiradas terminam junto da orelha em que o limite das superfícies fazem um ângulo de 11.79° que foi retirado a partir da modelação do suporte de cabeça.



Extrusão dos limites a 180mm, que corresponde à elevação estimada para a cabeça utilizando o suporte.

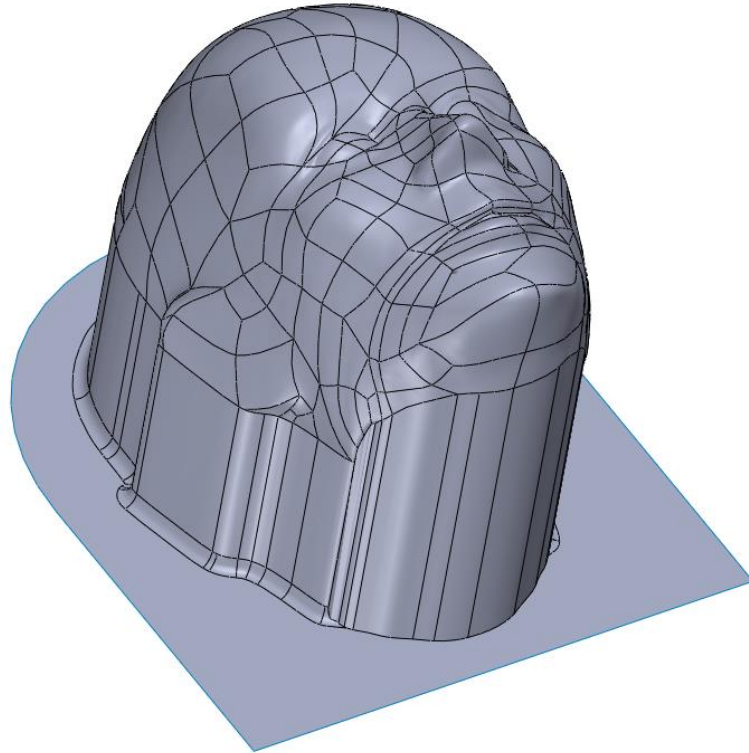


Construção da base de fixação a 80mm dos limites da superfície que corresponde à zona do rosto, segundo as cotas indicadas abaixo e operação de corte das superfícies que não interessam.

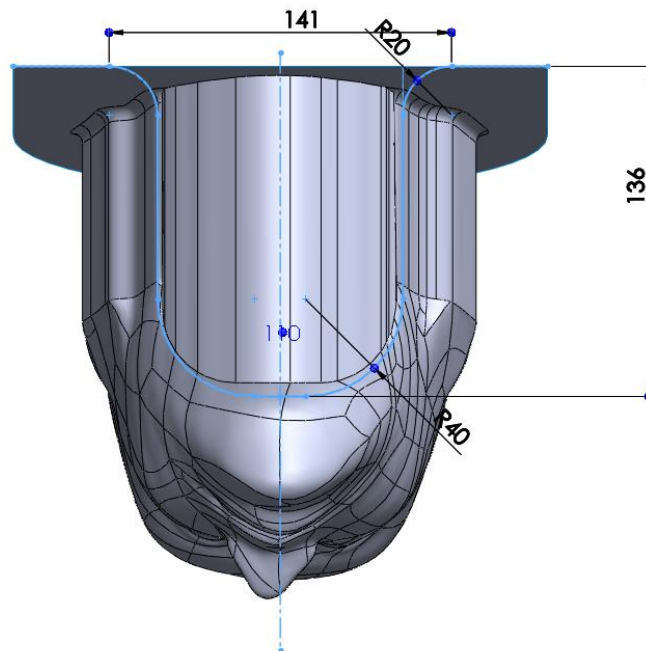


Remoção de superfícies demasiado pequenas e triangulares. União das falhas geradas por essas superfícies por preenchimento, tendo em conta a tangência com as superfícies da fronteira.

Fillet de 5mm entre a superfície horizontal da fixação e a zona vertical de interligação à superfície do rosto.

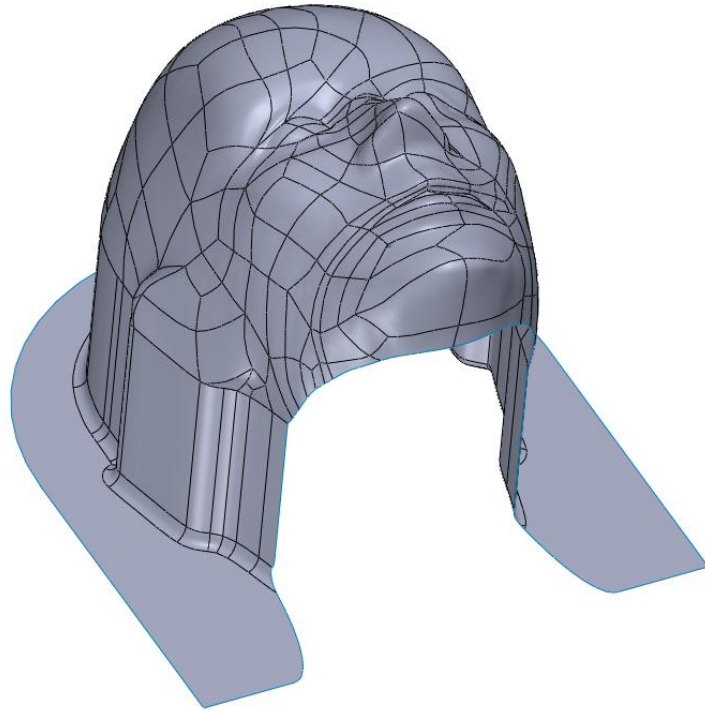


Remoção das superfícies demasiado pequenas e triangulares geradas no fillet. Correção pelo mesmo método utilizado anteriormente.



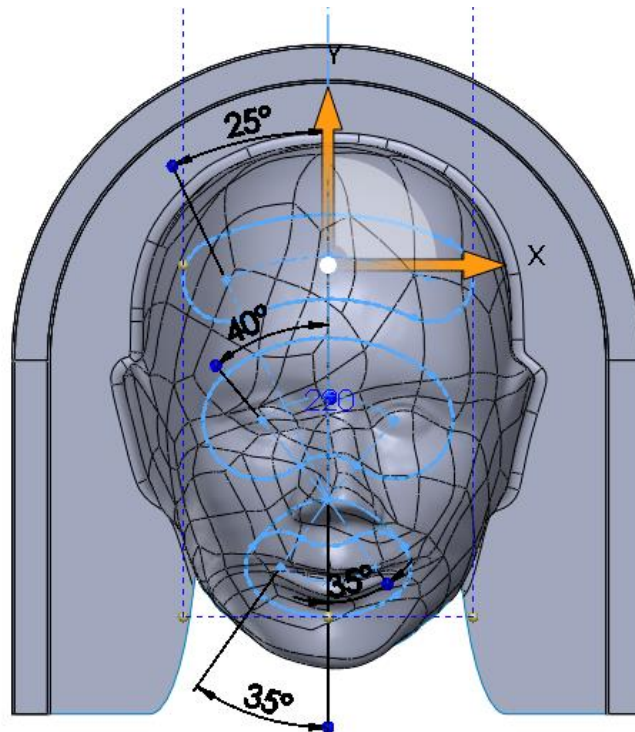
Sketch para abertura abaixo do queixo, desenhado num plano paralelo ao plano de frente.

Resultado da máscara base da superfície obtida por TC:

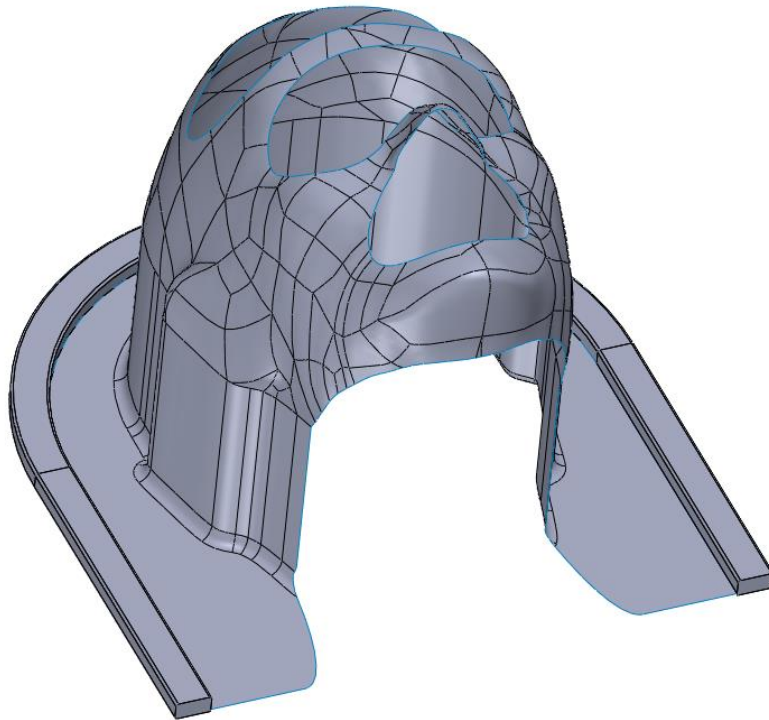


Geometria 1:

Para a geometria M1 da TC foi desenhado o sketch seguinte, e logo após foi extrudido na direcção vertical sob a forma de três superfícies a utilizar como ferramenta de corte da superfície da máscara.

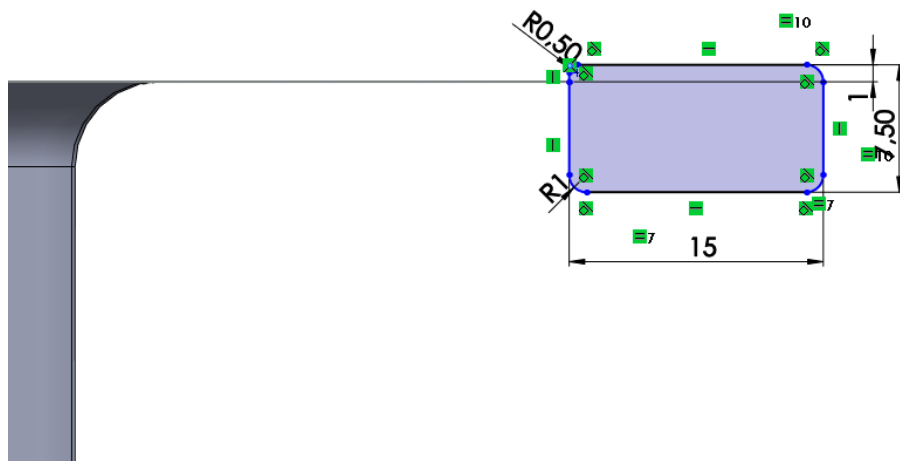


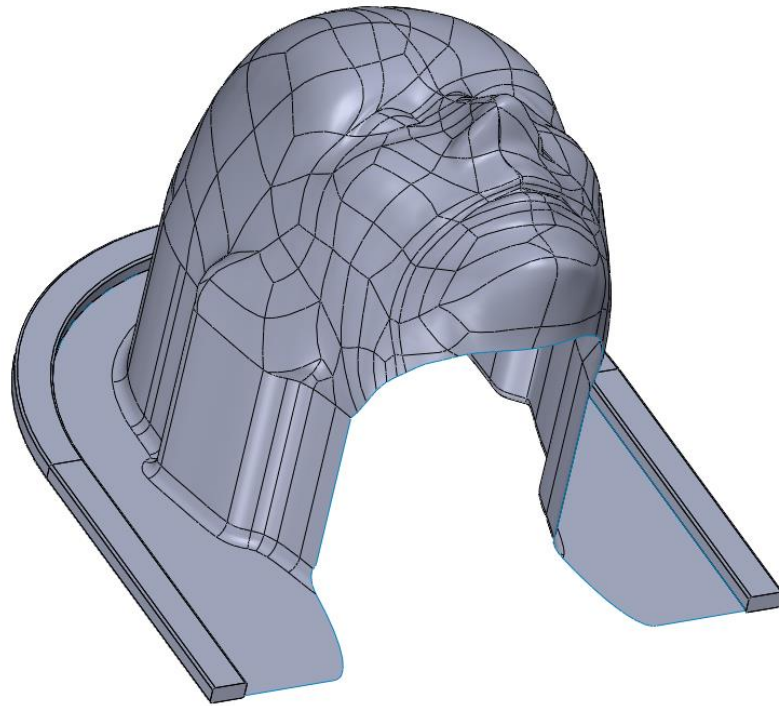
O resultado final das aberturas foi o seguinte:



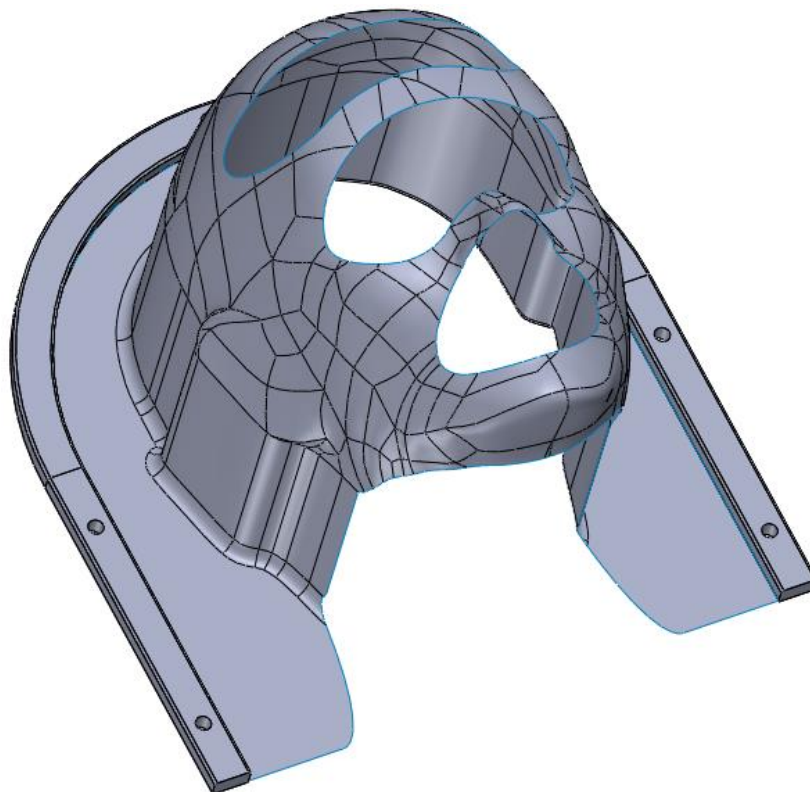
Fixação:

Para a construção do modelo sólido da fixação desenhou-se o seguinte sketch e utilizou-se a opção Sweep Boss/Base.





A última etapa para finalizar a modelação geométrica da máscara foi a construção dos furos na fixação. Esta operação foi feita recorrendo à ferramenta HoleWizard:

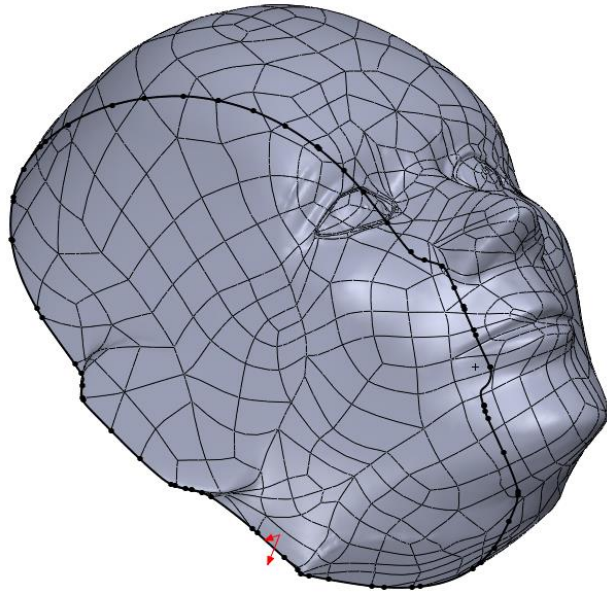


B. 3D LASER SCANNING:

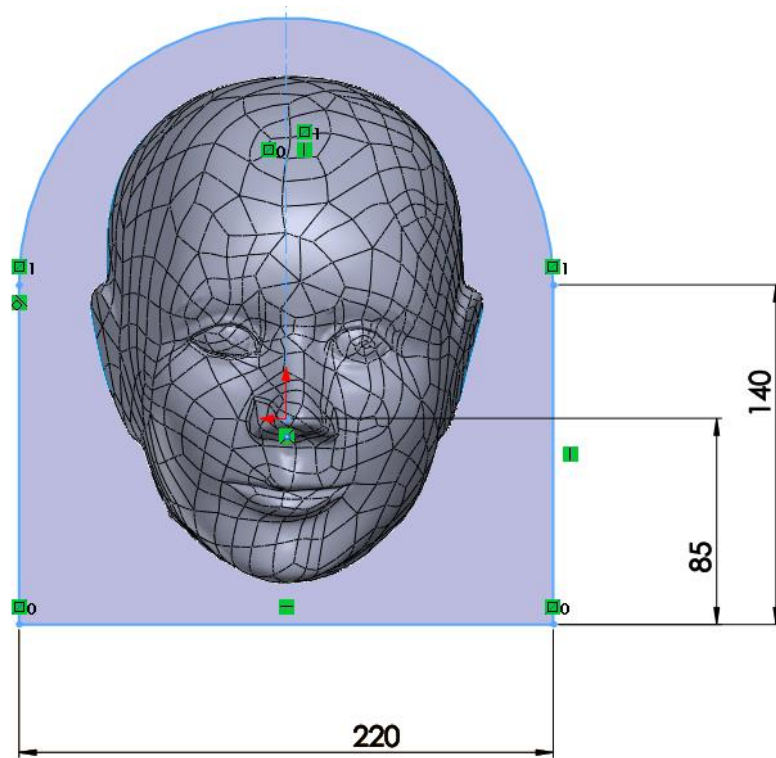
O método para a modelação das máscaras com a superfície obtida com 3D Laser Scanning foi o mesmo que o utilizado para a TC.

Superfície base:

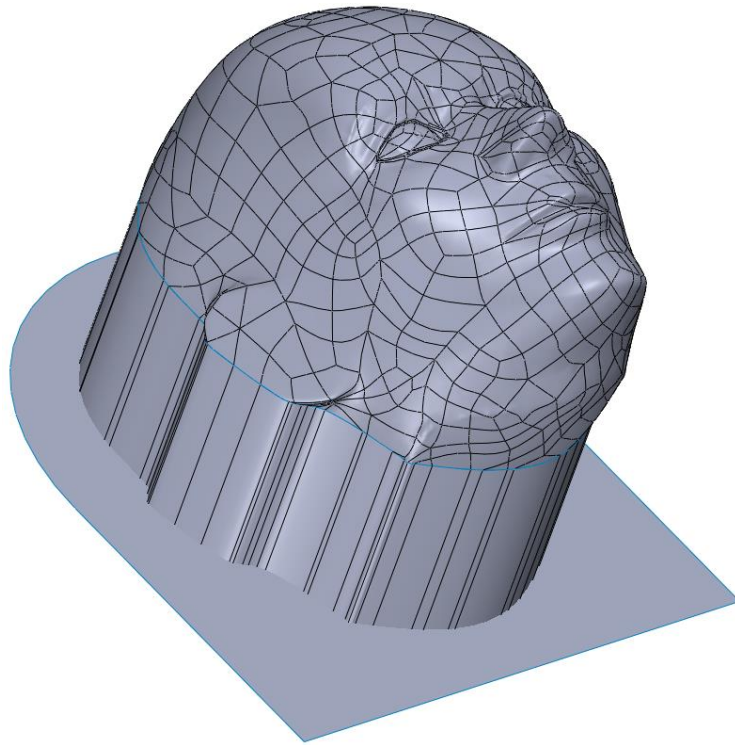
Limites da superfície a extrudir na vertical:



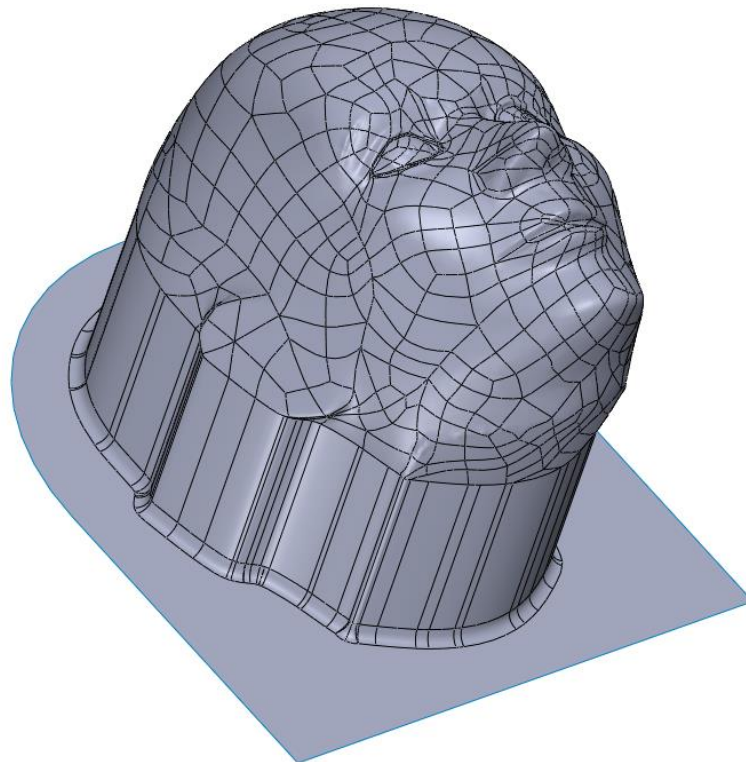
Modelação da superfície da fixação:



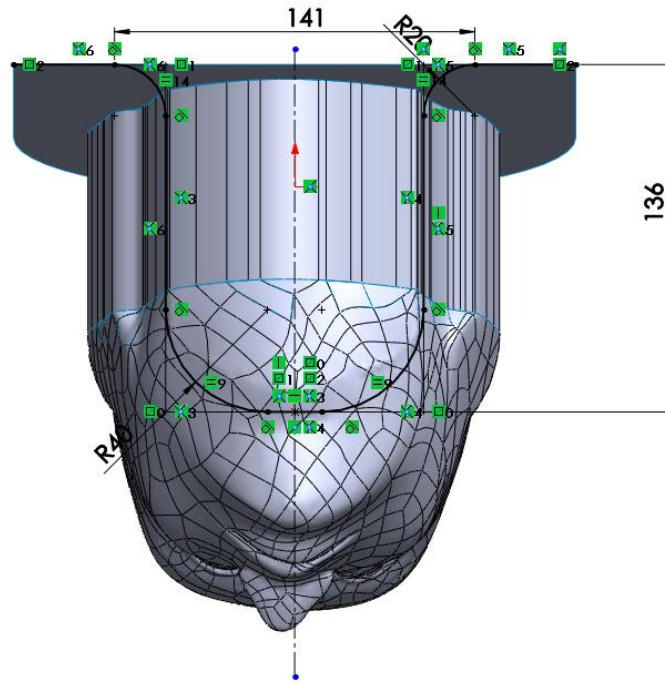
Superfície da fixação e corte da superfície vertical das superfícies:



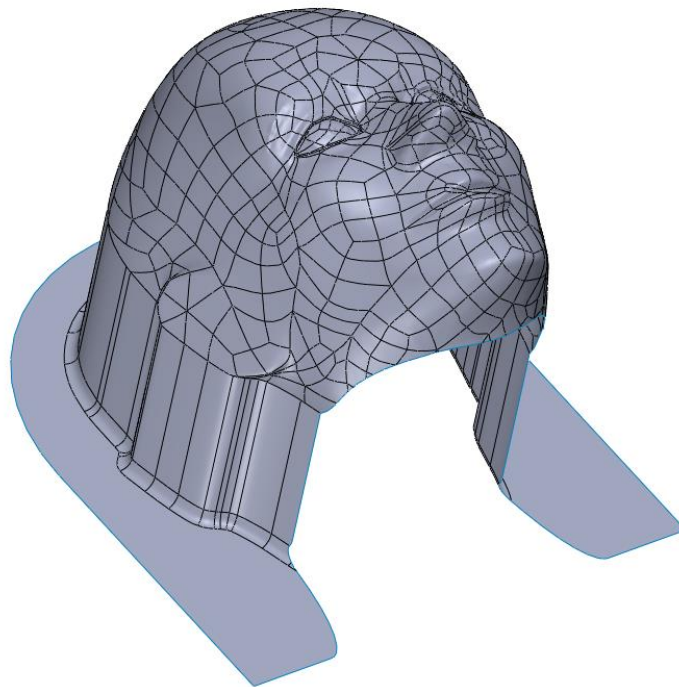
União e fillet das superfícies verticais e horizontal:



Sketch para modelação da superfície/ferramenta de corte para abertura da zona do pescoço:

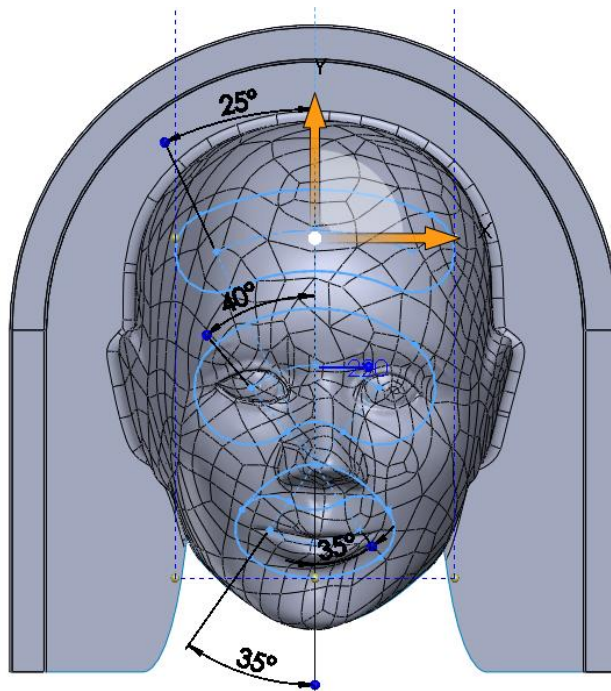


Superfície base resultante:

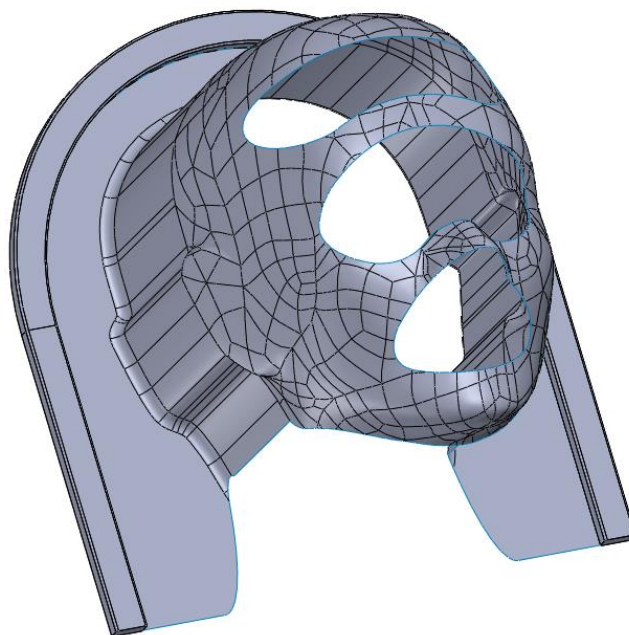


Geometria 1:

Sketch para modelação das superfícies/ferramentas de corte das aberturas da máscara:

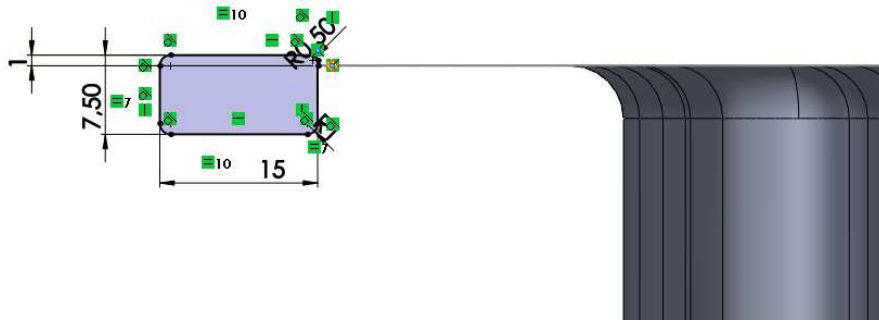


Máscara com aberturas:

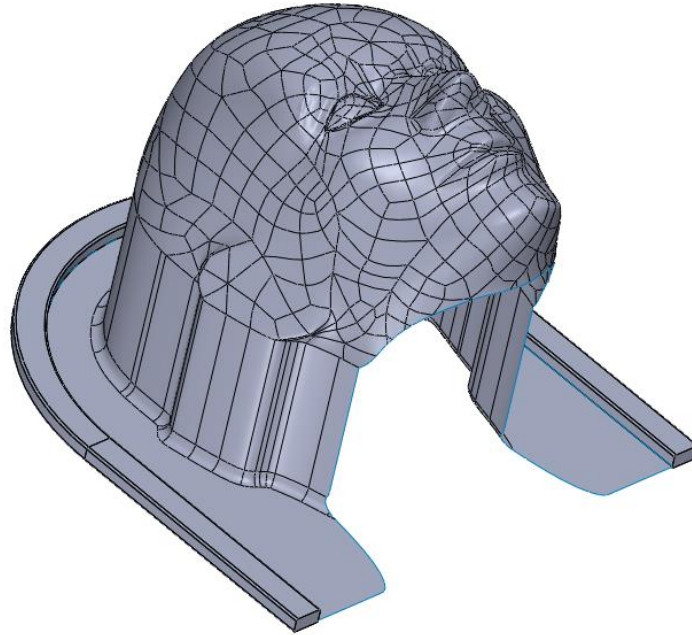


Fixação:

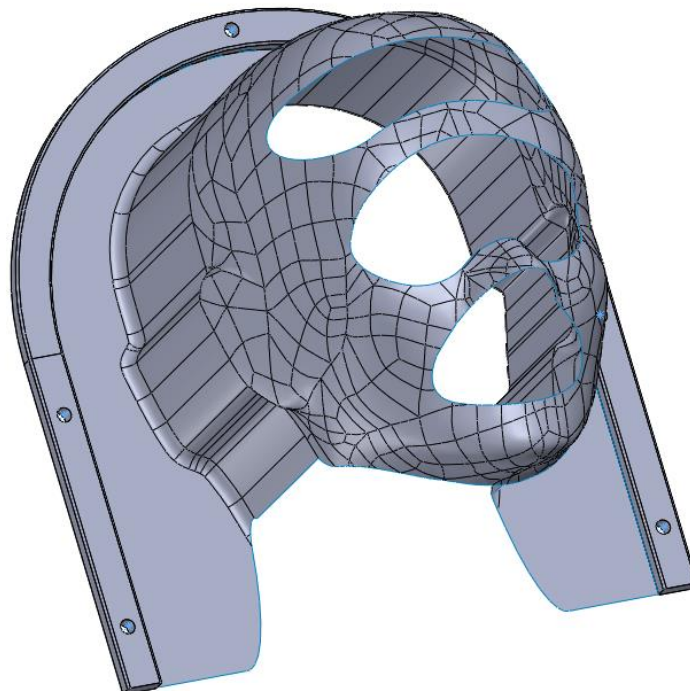
Sketch para modelação do modelo sólido da fixação:



Superfície base com fixação:

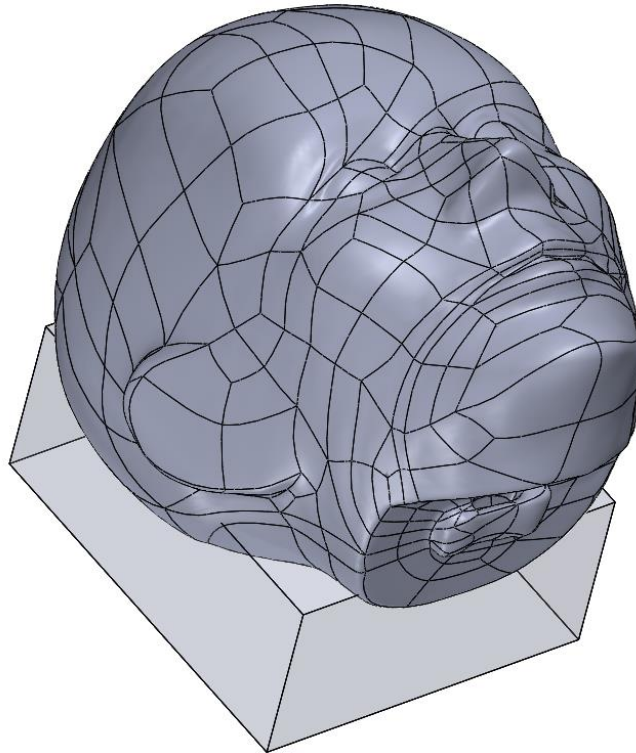


Abertura de furos no sólido da fixação:

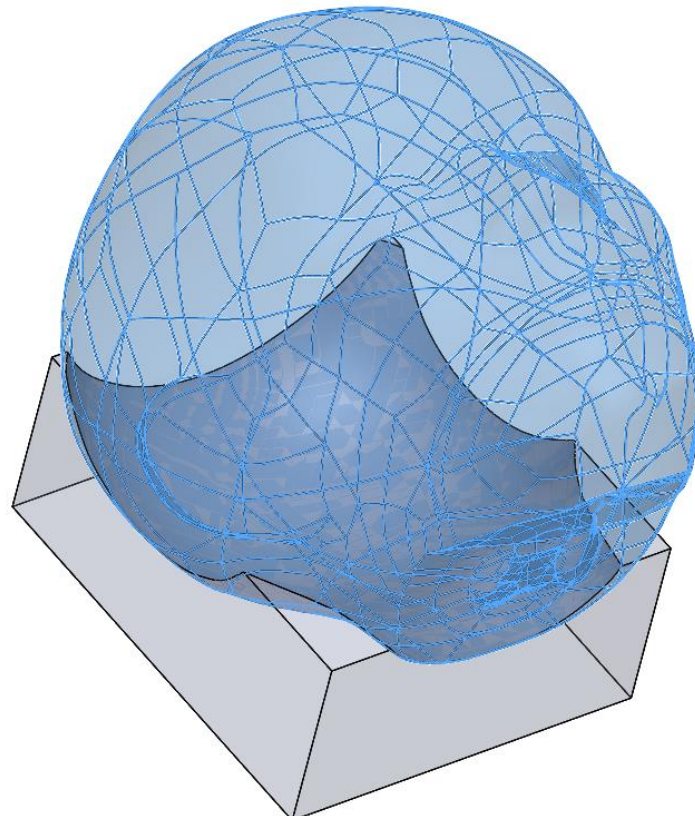


C. SUPORTE DE CABEÇA

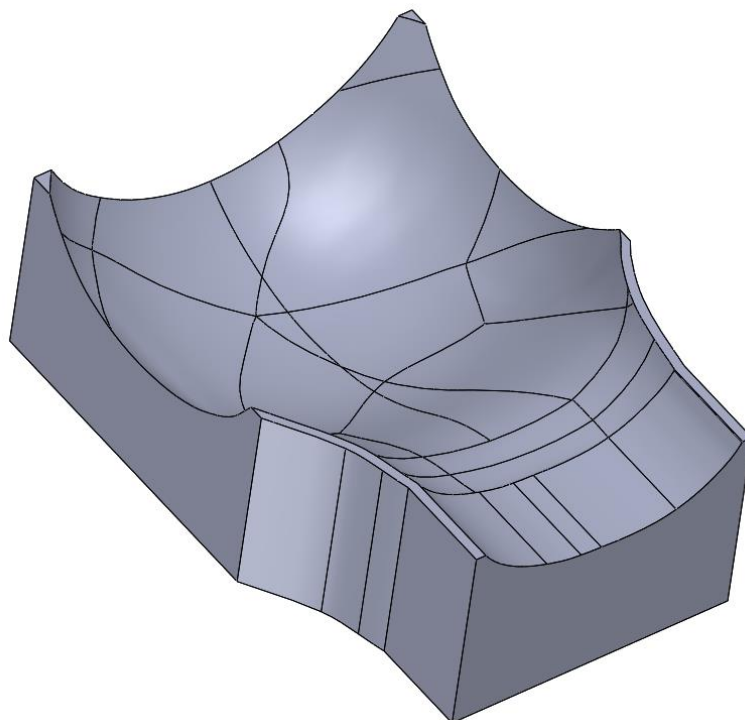
Para a modelação do suporte da cabeça utilizou-se a própria superfície da cabeça para criar o encosto.



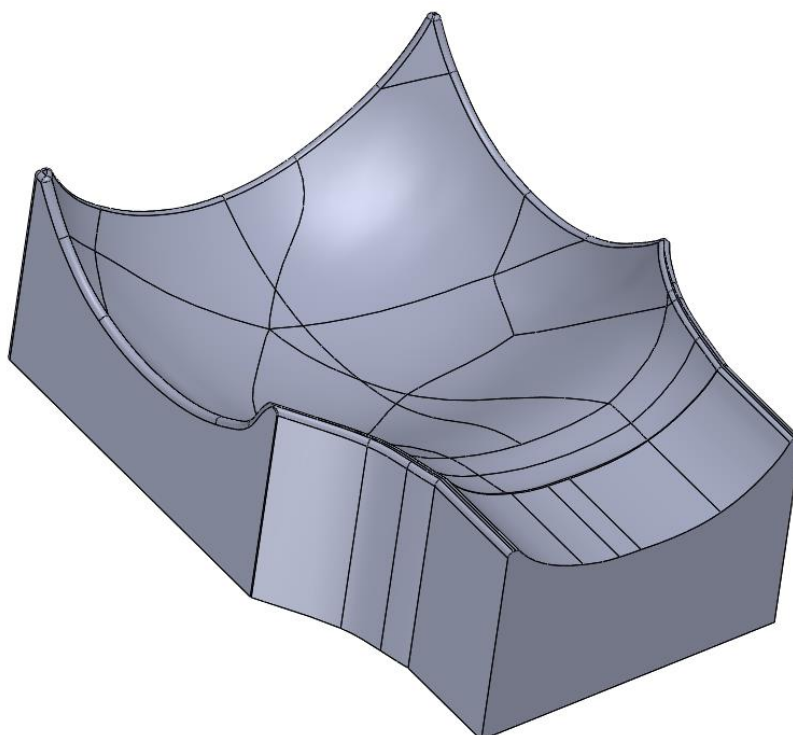
Utilização da ferramenta SurfaceCut:



Prolongamento da zona do comprimento do pescoço e encurtamento das laterais (com Extruded Boss/Base e Extruded-Cut):



Fillets nas arestas do suporte para maior conforto do paciente:



II. SELECÇÃO DA SITUAÇÃO DE CARGA CRÍTICA

Neste apêndice apresentam-se os resultados das simulações teste feitos às três geometrias das máscaras com 4 casos de carga do pescoço em esforço isométrico diferentes, com o fim de determinar qual a mais crítica.

A. MÁSCARAS TC

Geometria 1_CT		
Situação de Carga	σ_{\max} [Mpa]	ΔS_{\max} [mm]
Flexão	0,72	2,52
Flexão Lat. Dir.	22,84	15,09
Flexão Lat. Esq.	31,64	15,06
Protração	0,75	2,65

Geometria 2_CT		
Situação de Carga	σ_{\max} [Mpa]	ΔS_{\max} [mm]
Flexão	17,03	2,28
Flexão Lat. Dir.	44,66	13,83
Flexão Lat. Esq.	54,00	13,86
Protração	17,82	2,40

Geometria 3_CT		
Situação de Carga	σ_{\max} [Mpa]	ΔS_{\max} [mm]
Flexão	16,47	2,56
Flexão Lat. Dir.	46,13	14,48
Flexão Lat. Esq.	54,30	14,18
Protração	17,15	2,70

B. MÁSCARAS 3DLS

Geometria 1_3DLS		
Situação de Carga	σ_{\max} [Mpa]	ΔS_{\max} [mm]
Flexão	7,93	2,61
Flexão Lat. Dir.	21,28	15,13
Flexão Lat. Esq.	18,124	15,51
Protração	8,24	2,72

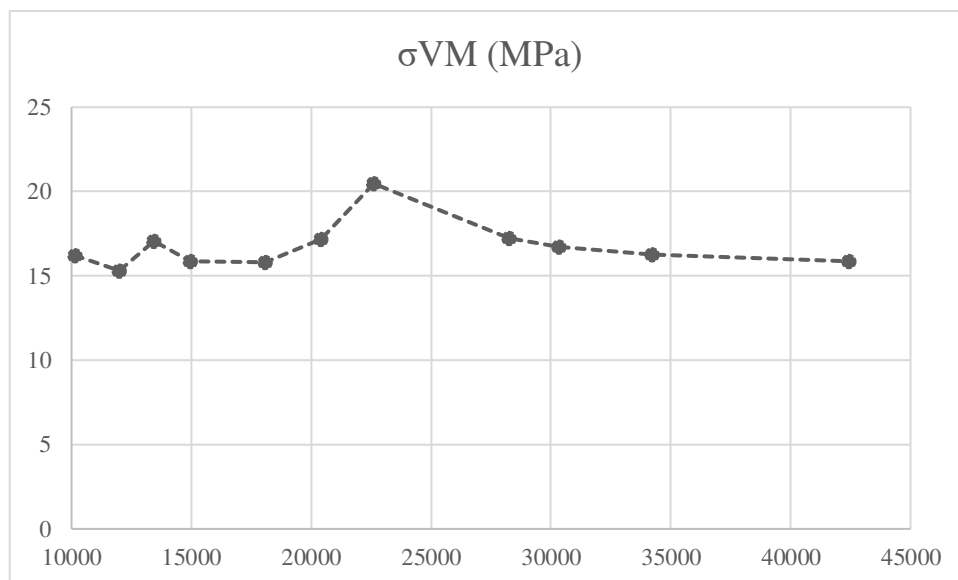
Geometria 2_3DLS		
Situação de Carga	σ_{\max} [Mpa]	ΔS_{\max} [mm]
Flexão	17,80	2,38
Flexão Lat. Dir.	43,86	13,90

Flexão Lat. Esq.	45,12	14,33
Protração	18,49	2,48

Geometria 3_3DLS		
Situação de Carga	σ_{max} [Mpa]	ΔS_{max} [mm]
Flexão	18,05	2,65
Flexão Lat. Dir.	45,56	14,60
Flexão Lat. Esq.	45,44	14,62
Protração	18,76	2,76

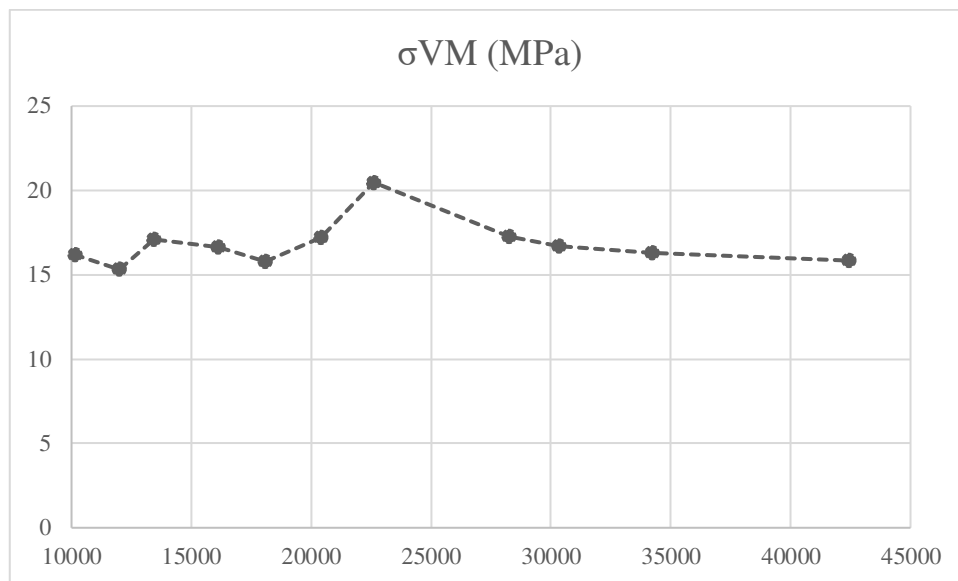
III. PARAMETRIZAÇÃO DO *SOLIDWORKS*

Curvature-Based Mesh: 16 Jacobian					
Ite r	n° of elements	max. Element size(mm)	min. element size (mm)	σVM (Mpa)	MaxDisp. (mm)
1	10146	31,4566	6,2913	16,18	2,689
2	12016	28,3109	5,6622	15,31	2,702
3	13447	25,4798	5,0960	17,08	2,710
4	14953	22,9318	4,5864	15,84	2,708
5	18093	20,6386	4,1277	15,80	2,703
6	20392	18,5748	3,7150	17,20	2,709
7	22626	16,7173	3,3435	20,47	2,708
8	28263	15,0456	3,0091	17,25	2,711
9	30323	13,5410	2,7082	16,70	2,714
10	34239	12,1869	2,4374	16,27	2,707
11	42426	10,9682	2,1936	15,86	2,706

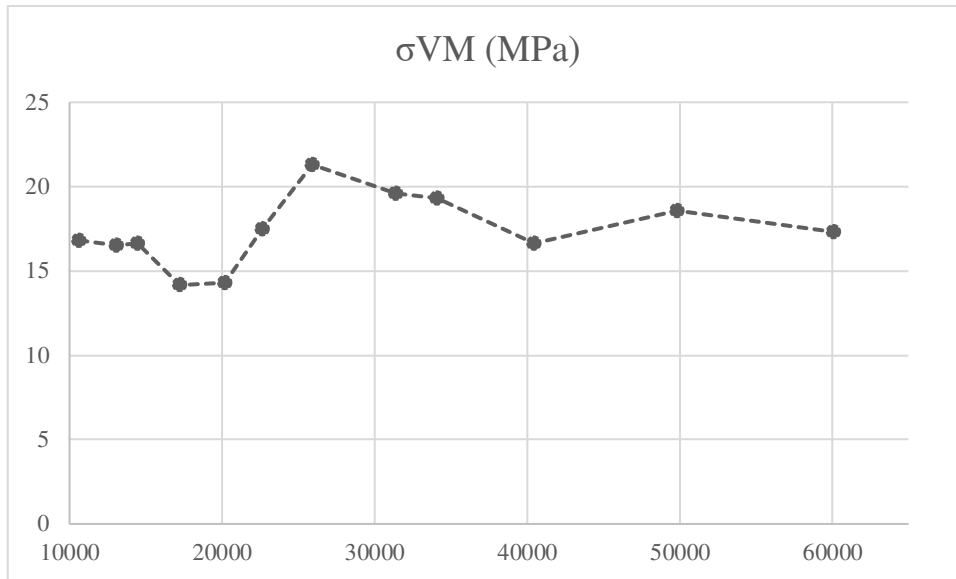


Curvature-Based Mesh: Node Jacobian					
Ite r	n° of elements	max. Element size(mm)	min. element size (mm)	σVM (Mpa)	MaxDisp. (mm)
1	10146	31,4566	6,2913	16,18	2,689
2	12016	28,3109	5,6622	15,31	2,702
3	13447	25,4798	5,0960	17,08	2,710
4	16136	22,9318	4,5864	16,63	2,709
5	18093	20,6386	4,1277	15,80	2,703
6	20392	18,5748	3,7150	17,20	2,709
7	22626	16,7173	3,3435	20,47	2,708
8	28263	15,0456	3,0091	17,25	2,711
9	30323	13,5410	2,7082	16,70	2,714

10	34239	12,1869	2,4374	16,27	2,707
11	42426	10,9682	2,1936	15,86	2,706

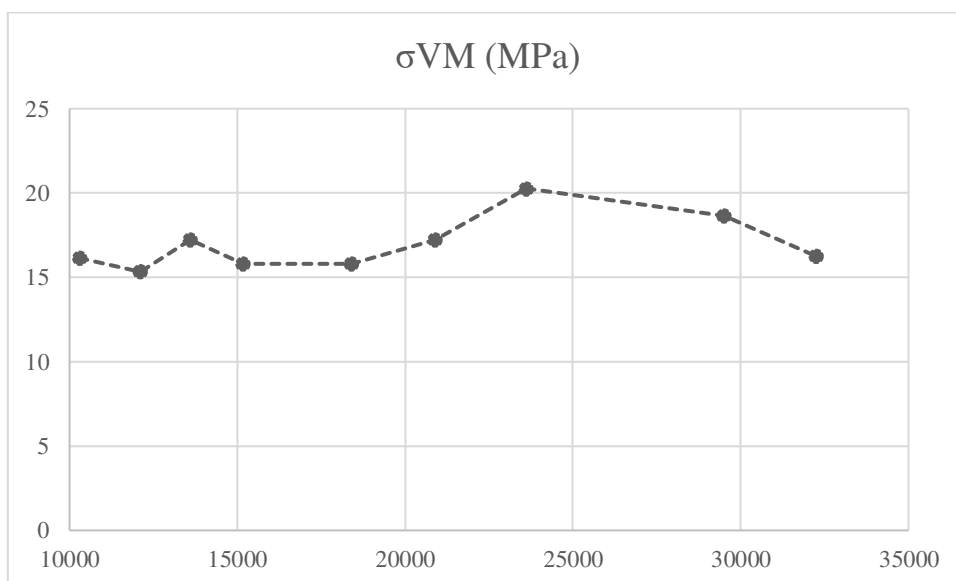


Curvature-Based Mesh: 1.4 ratio					
Ite	n° of elements	max. Element size(mm)	min. element size (mm)	σ_{VM} (Mpa)	MaxDisp. (mm)
1	10650	31,4566	6,2913	16,83	2,703
2	13098	28,3109	5,6622	16,50	2,703
3	14487	25,4798	5,0960	16,64	2,708
4	17254	22,9318	4,5864	14,16	2,709
5	20218	20,6386	4,1277	14,33	2,706
6	22656	18,5748	3,7150	17,50	2,705
7	25903	16,7173	3,3435	21,30	2,709
8	31380	15,0456	3,0091	19,59	2,710
9	34103	13,5410	2,7082	19,33	2,712
10	40433	12,1869	2,4374	16,61	2,710
11	49846	10,9682	2,1936	18,58	2,712
12	60061	9,8714	1,9743	17,30	2,712

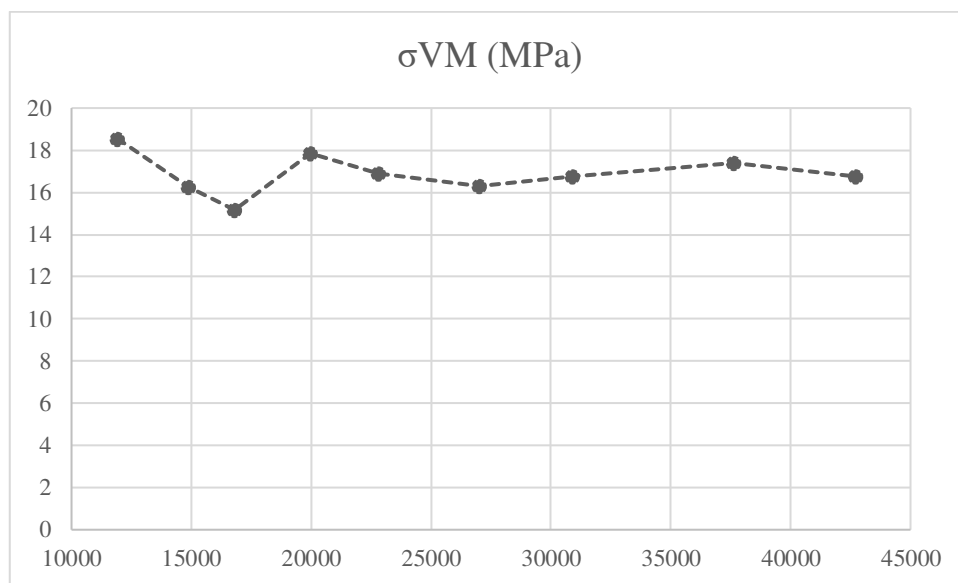


Curvature-Based Mesh: 10 elements in a circle

Ite r	n° of elements	max. Element size(mm)	min. element size (mm)	σVM (Mpa)	MaxDisp. (mm)
1	10297	31,4566	6,2913	16,13	2,695
2	12108	28,3109	5,6622	15,33	2,706
3	13602	25,4798	5,0960	17,22	2,712
4	15185	22,9318	4,5864	15,83	2,707
5	18405	20,6386	4,1277	15,81	2,705
6	20905	18,5748	3,7150	17,24	2,705
7	23628	16,7173	3,3435	20,27	2,701
8	29519	15,0456	3,0091	18,65	2,705
9	32243	13,5410	2,7082	16,27	2,706



Curvature-Based Mesh: 1.2 ratio					
Iter	n° of elements	max. Element size(mm)	min. element size (mm)	σ_{VM} (Mpa)	MaxDisp. (mm)
1	11928	31,4566	6,2913	18,54	2,707
2	14892	28,3109	5,6622	16,25	2,710
3	16808	25,4798	5,0960	15,17	2,718
4	19964	22,9318	4,5864	17,86	2,712
5	22829	20,6386	4,1277	16,87	2,710
6	27016	18,5748	3,7150	16,28	2,711
7	30887	16,7173	3,3435	16,76	2,712
8	37624	15,0456	3,0091	17,40	2,712
9	42714	13,5410	2,7082	16,74	2,714



IV. ESTUDOS DE CONVERGÊNCIA

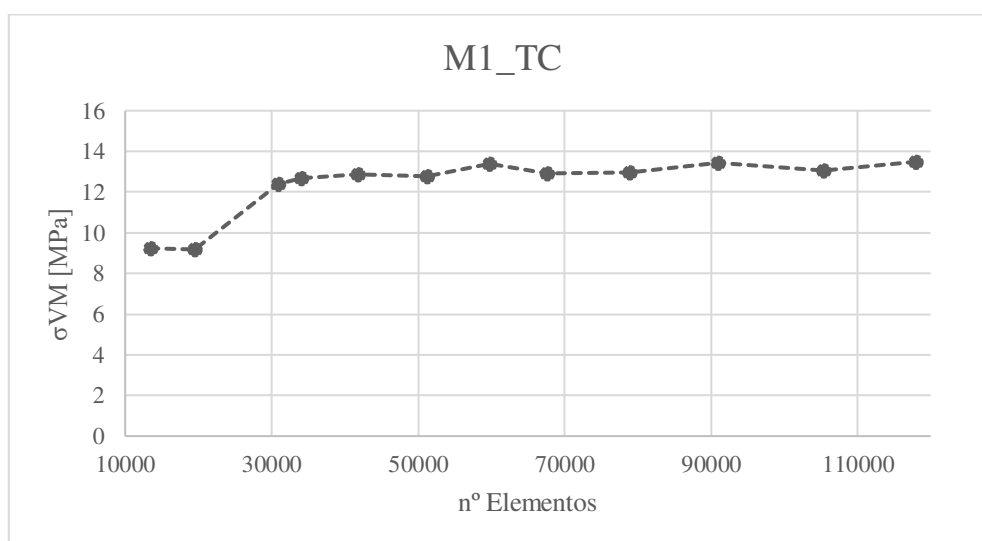
Nesta secção dos apêndices mostram-se os resultados de todos os estudos de convergência feitos ao longo desta Dissertação.

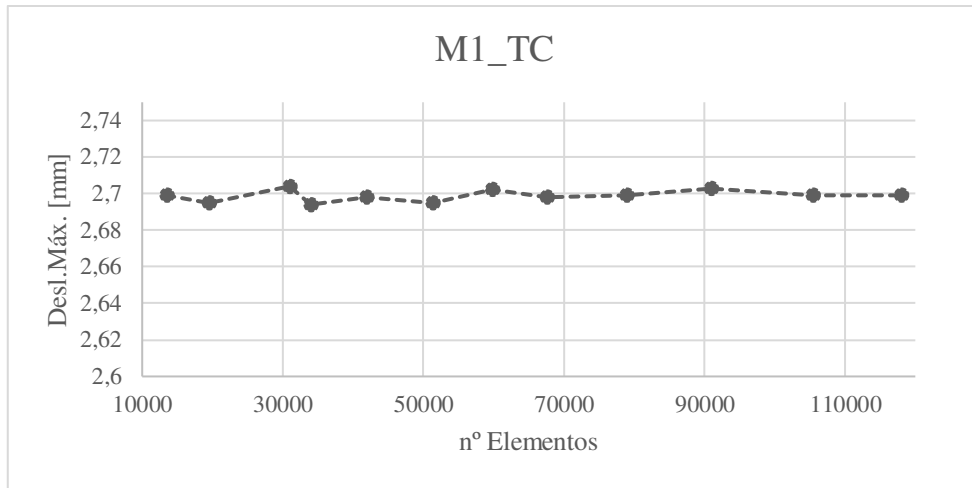
A. MÁSCARAS DE IMOBILIZAÇÃO

Relativamente às máscaras de imobilização, nesta sub-secção do Apêndice IV apresentam-se os resultados do estudo de convergência da tensão equivalente de Von Mises máxima e do deslocamento máximo em função do número de elementos das malhas das máscaras.

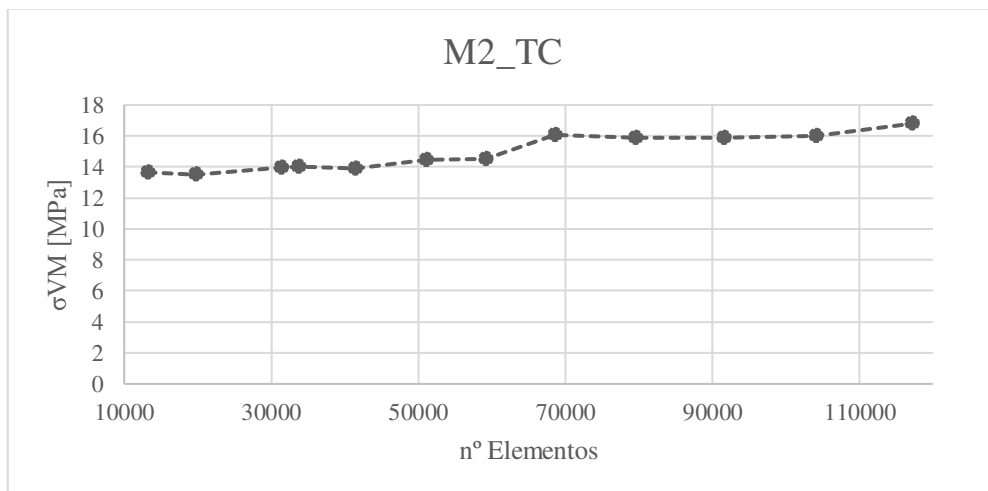
1. TOMOGRAFIA COMPUTORIZADA

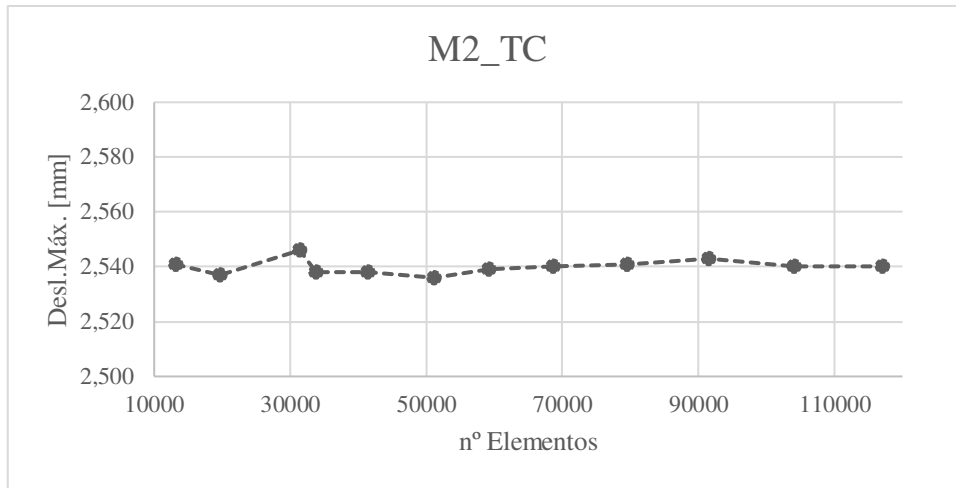
M1_TC					
Ite r	n° of elements	max. Element size(mm)	min. element size (mm)	σ VM (Mpa)	MaxDisp. (mm)
1	13439	25,4798	5,0960	9,25	2,699
2	19466	18,5748	3,7150	9,18	2,695
3	30963	13,5410	2,7082	12,38	2,704
4	33998	12,1869	2,4374	12,69	2,694
5	41842	10,9682	2,1936	12,86	2,698
6	51264	9,8714	1,9743	12,77	2,695
7	59789	8,8843	1,7769	13,37	2,702
8	67636	7,9603	1,5921	12,90	2,698
9	78933	7,1074	1,4215	12,97	2,699
10	90933	6,2545	1,2509	13,43	2,703
11	105376	5,6859	1,1372	13,08	2,699
12	117953	5,3306	1,0661	13,49	2,699





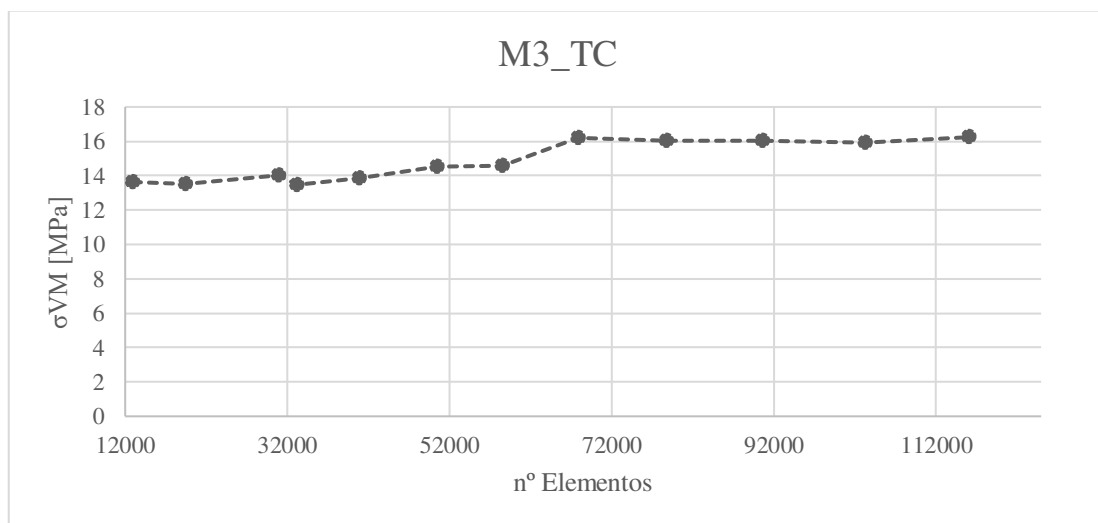
M2_TC					
Iteratio n	n° of elements	max. Element size(mm)	min. Element size (mm)	σ_{VM} (MPa)	MaxDisp. (mm)
1	13181	25,480	5,096	13,650	2,541
2	19763	18,575	3,715	13,500	2,537
3	31386	13,541	2,708	13,970	2,546
4	33777	12,187	2,437	14,030	2,538
5	41482	10,968	2,194	13,930	2,538
6	51113	9,871	1,974	14,480	2,536
7	59180	8,884	1,777	14,490	2,539
8	68603	7,960	1,592	16,060	2,540
9	79501	7,107	1,421	15,900	2,541
10	91577	6,255	1,251	15,870	2,543
11	104142	5,686	1,137	16,000	2,540
12	117120	5,331	1,066	16,790	2,540

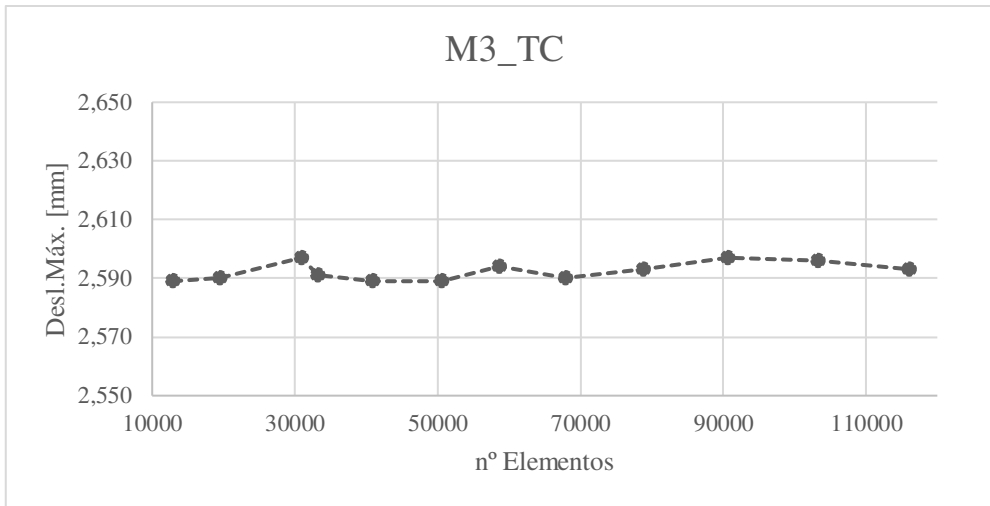




M3_TC

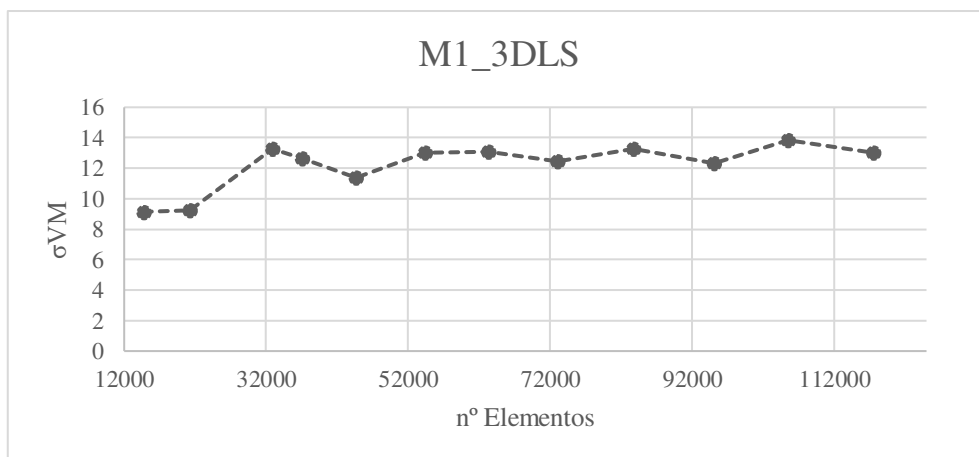
Iteratio n	n° of elements	max. Element size(mm)	min. Element size (mm)	σ_{VM} (MPa)	MaxDisp. (mm)
1	12959	25,480	5,096	13,620	2,589
2	19442	18,575	3,715	13,510	2,590
3	30894	13,541	2,708	14,010	2,597
4	33211	12,187	2,437	13,470	2,591
5	40852	10,968	2,194	13,860	2,589
6	50528	9,871	1,974	14,540	2,589
7	58561	8,884	1,777	14,560	2,594
8	67849	7,960	1,592	16,210	2,590
9	78819	7,107	1,421	16,030	2,593
10	90612	6,255	1,251	16,040	2,597
11	103318	5,686	1,137	15,920	2,596
12	116043	5,331	1,066	16,240	2,593

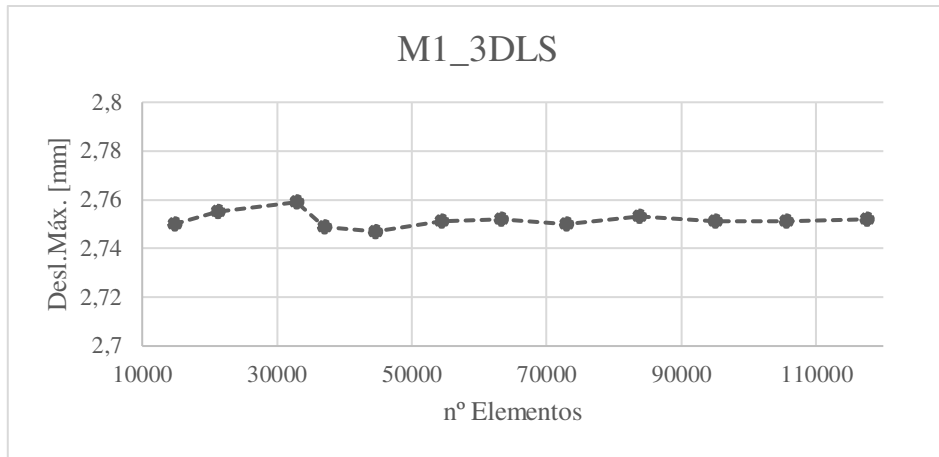




2. 3D LASER SCANNING

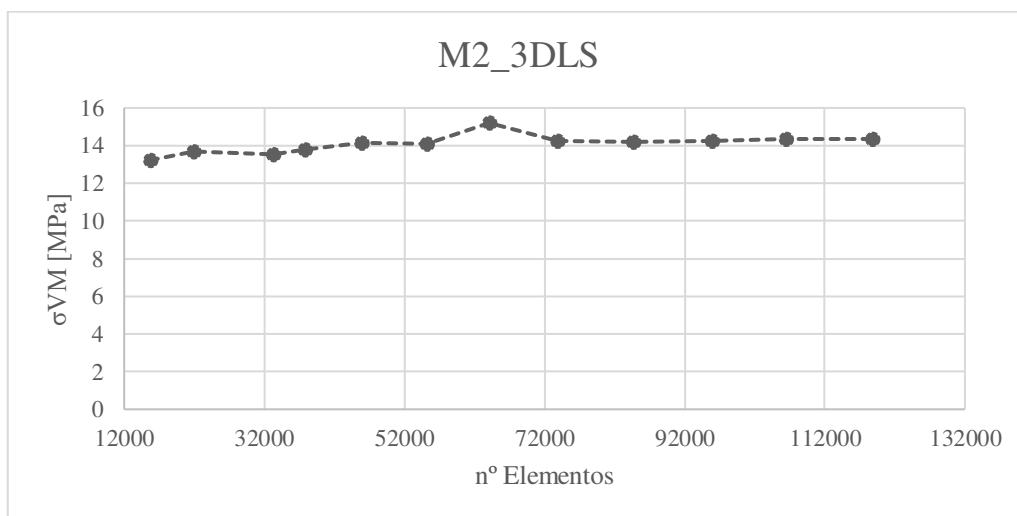
M1_3DLS					
Ite r	n° of elements	max. Element size(mm)	min. element size (mm)	σ VM (Mpa)	MaxDisp. (mm)
1	14760	25,4798	5,0960	9,14	2,750
2	21259	18,5748	3,7150	9,25	2,755
3	32852	13,5410	2,7082	13,24	2,759
4	37122	12,1869	2,4374	12,61	2,749
5	44603	10,9682	2,1936	11,35	2,747
6	54417	9,8714	1,9743	13,04	2,751
7	63299	8,8843	1,7769	13,06	2,752
8	72981	7,9603	1,5921	12,42	2,750
9	83768	7,1074	1,4215	13,29	2,753
10	95064	6,2545	1,2509	12,32	2,751
11	105540	5,6859	1,1372	13,84	2,751
12	117520	5,3306	1,0661	13,03	2,752

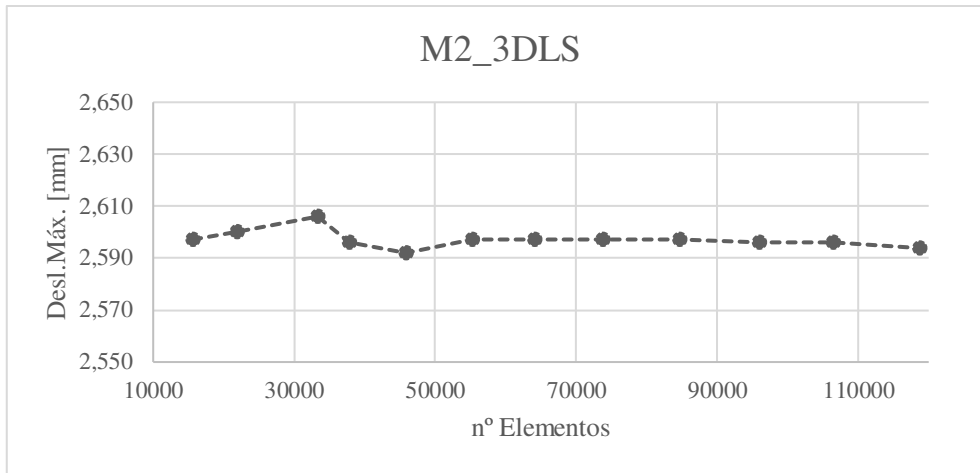




M2_3DLS

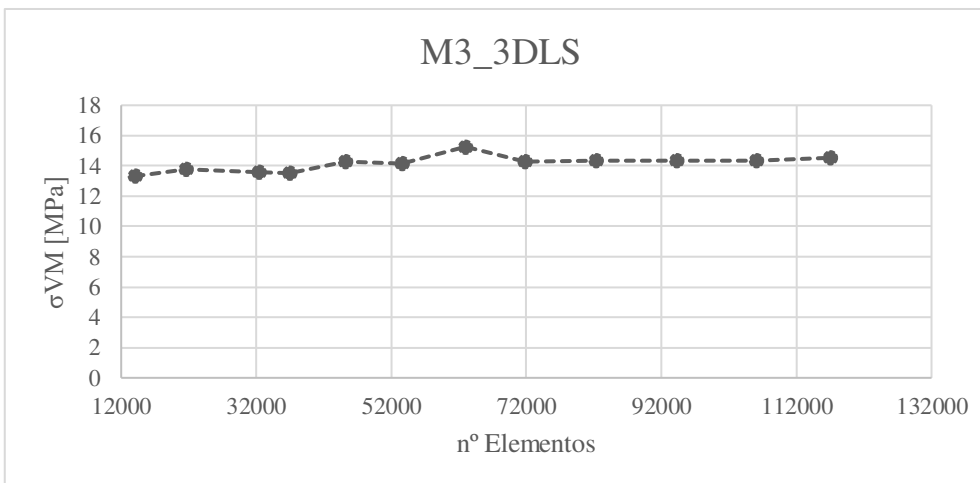
Iteratio n	n° of elements	max. Element size(mm)	min. element size (mm)	σ_{VM} (MPa)	MaxDisp. (mm)
1	15674	25,480	5,096	13,220	2,597
2	21895	18,575	3,715	13,670	2,600
3	33282	13,541	2,708	13,550	2,606
4	37774	12,187	2,437	13,790	2,596
5	45832	10,968	2,194	14,150	2,592
6	55235	9,871	1,974	14,090	2,597
7	64085	8,884	1,777	15,200	2,597
8	73822	7,960	1,592	14,260	2,597
9	84713	7,107	1,421	14,200	2,597
10	95956	6,255	1,251	14,260	2,596
11	106417	5,686	1,137	14,330	2,596
12	118774	5,331	1,066	14,360	2,594

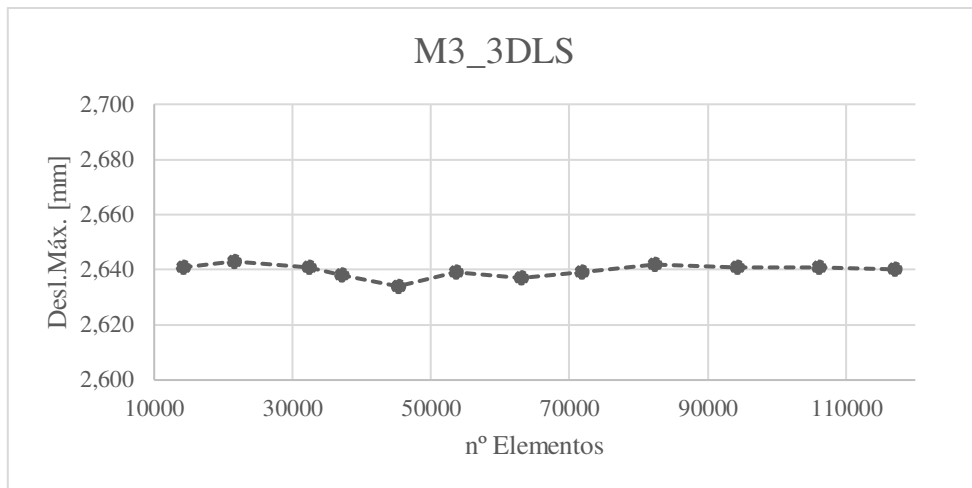




M3_3DLS

Iteratio n	n° of elements	max. Element size(mm)	min. Element size (mm)	σ_{VM} (MPa)	MaxDisp. (mm)
1	14131	25,480	5,096	13,320	2,641
2	21559	18,575	3,715	13,800	2,643
3	32392	13,541	2,708	13,580	2,641
4	36992	12,187	2,437	13,540	2,638
5	45213	10,968	2,194	14,290	2,634
6	53624	9,871	1,974	14,130	2,639
7	62973	8,884	1,777	15,260	2,637
8	71734	7,960	1,592	14,270	2,639
9	82257	7,107	1,421	14,320	2,642
10	94224	6,255	1,251	14,310	2,641
11	106064	5,686	1,137	14,330	2,641
12	116971	5,331	1,066	14,520	2,640





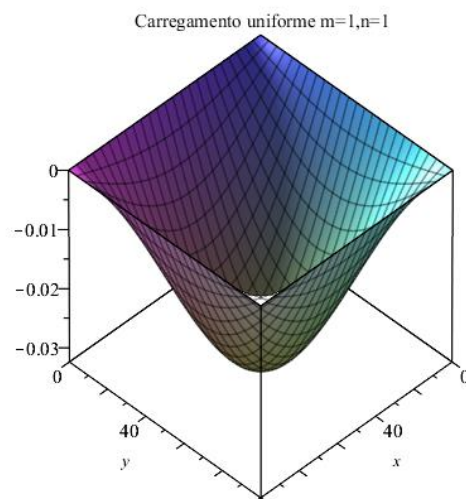
B. PLACA FINA

Nesta sub-seção apresentam-se os resultados referentes a todos os estudos de convergência feitos na placa fina.

1. NÚMERO DE TERMOS DAS SÉRIES DUPLAS DE FOURIER

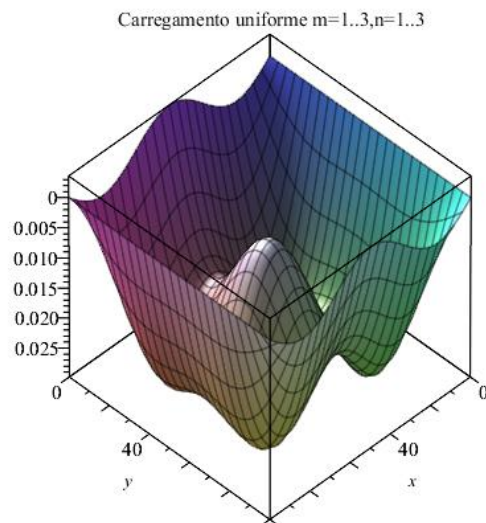
Carregamento $p(x,y)$ com $m=1, n=1$:

DefMax := [-2.42143825399999990, [x = 49.9999999979561, y = 49.9999999979561]]



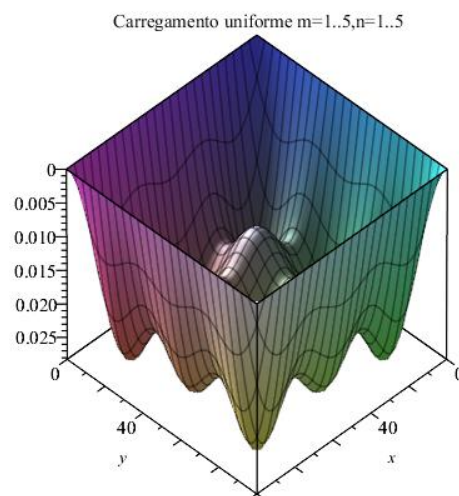
Carregamento $p(x,y)$ com $m=1..3, n=1..3$:

$DefMax := [-2.3535449783760007, [x = 49.999999982538, y = 49.999999982286]]$



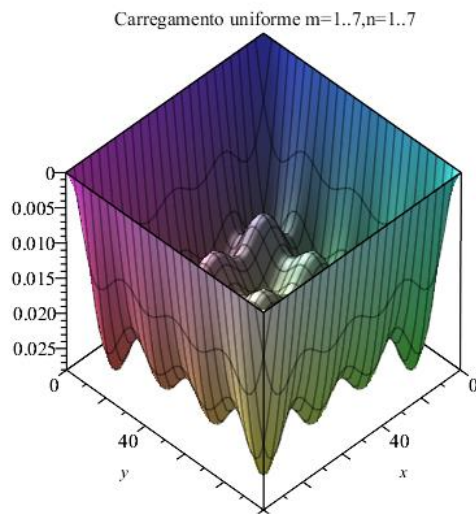
Carregamento $p(x,y)$ com $m=1..5, n=1..5$:

$DefMax := [-2.36495718566330027, [x = 49.999999981532, y = 49.999999981532]]$



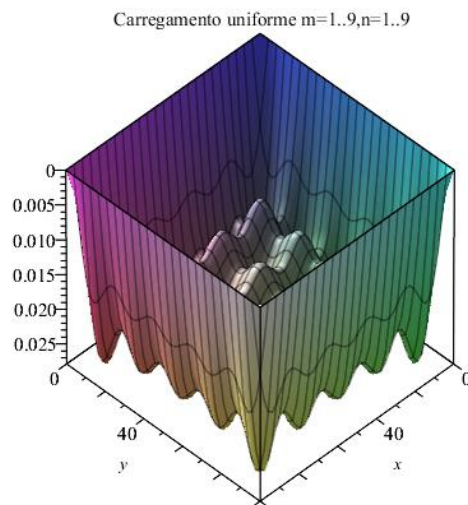
Carregamento $p(x,y)$ com $m=1..7, n=1..7$:

$DefMax := [-2.36404396514495962, [x = 49.9999999981850, y = 49.9999999981850]]$



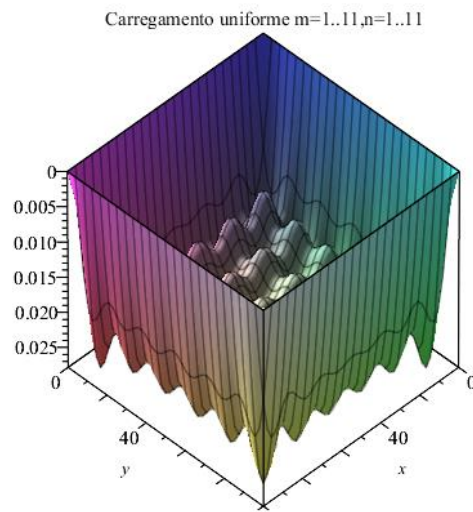
Carregamento $p(x,y)$ com $m=1..9, n=1..9$:

$DefMax := [-2.36430016938062204, [x = 49.9999999981669, y = 49.9999999981669]]$



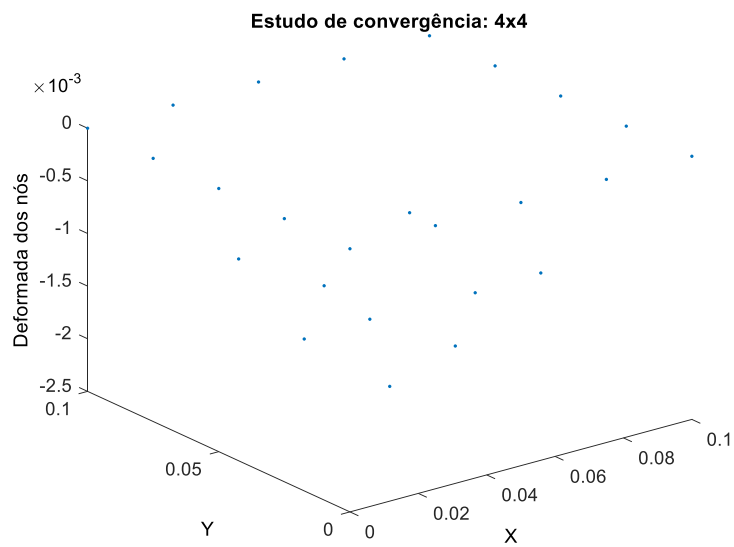
Carregamento $p(x,y)$ com $m=1..11, n=1..11$:

$DefMax := [-2.36420637014556823, [x = 49.9999999981676, y = 49.9999999981672]]$

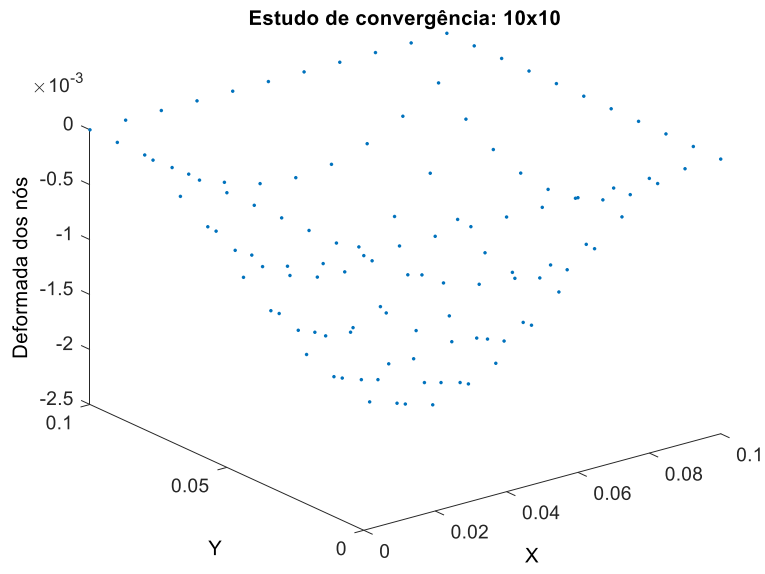


2. MALHA DA PLACA COM FORMULAÇÃO DE KANT

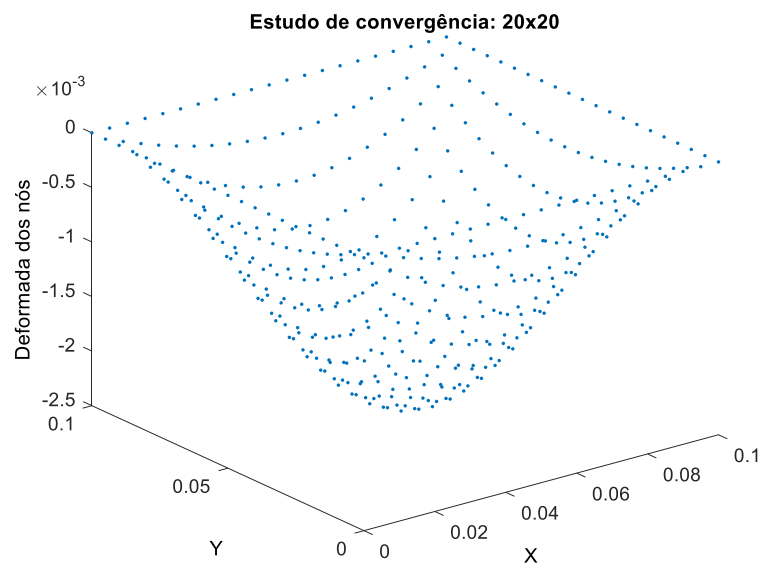
Deformada dos nós da malha 4x4:



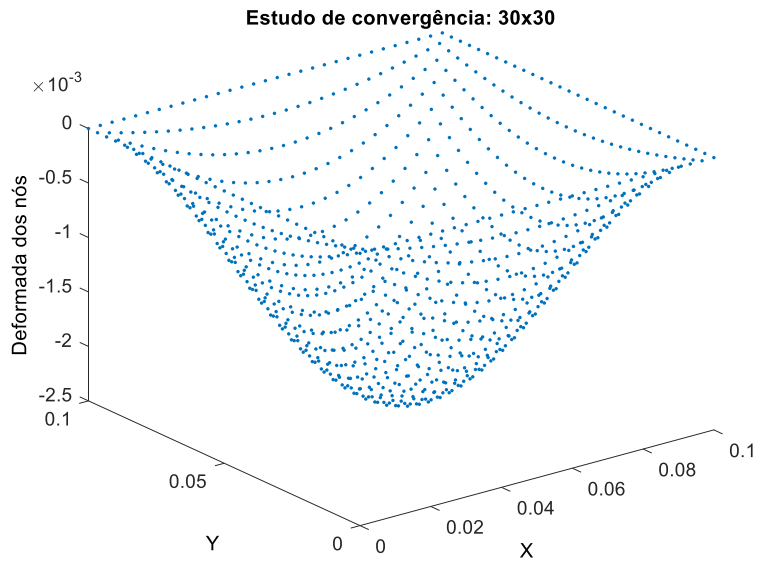
Deformada dos nós da malha 10x10:



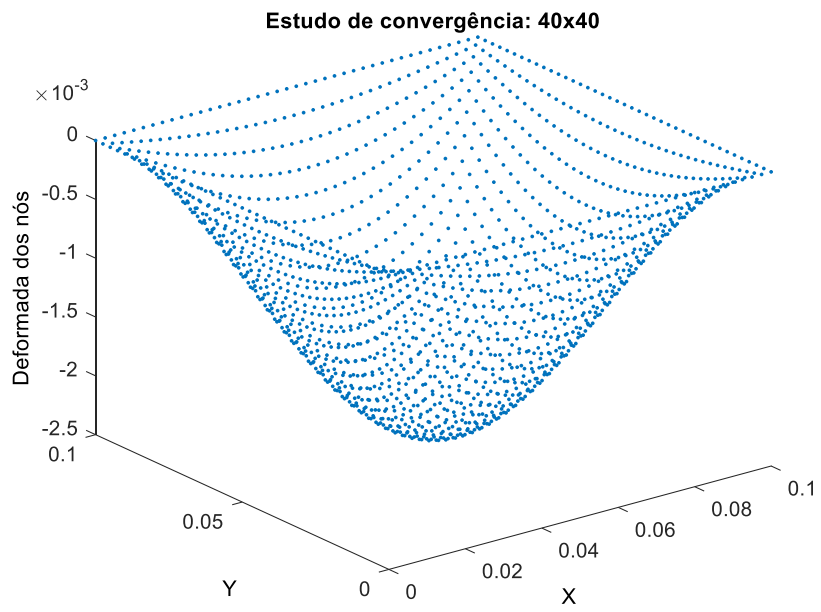
Deformada dos nós da malha 20x20:



Deformada dos nós da malha 30x30:



Deformada dos nós da malha 40x40:



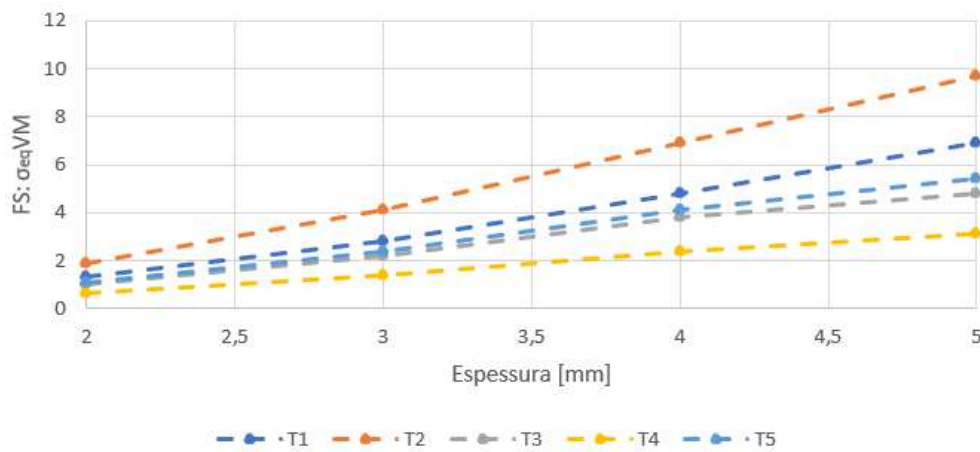
V. SELECÇÃO DO MATERIAL A UTILIZAR

Neste apêndice apresentam-se os resultados das simulações feitas no SolidWorks com os diferentes materiais selecionados.

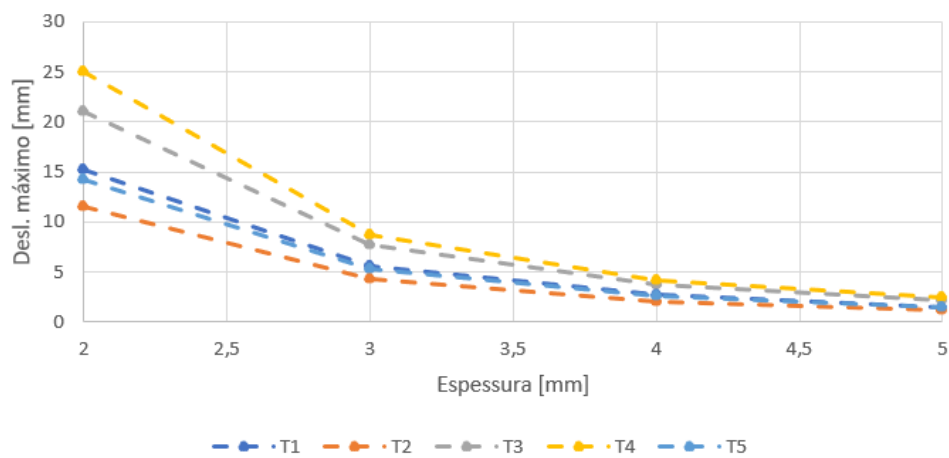
A. MÁSCARAS TC

M1_TC										
Espessura	FOS					Desl. Máx [mm]				
	T1	T2	T3	T4	T5	T1	T2	T3	T4	T5
2	1,3	1,9	1	0,64	1,1	15,18	11,55	21,03	24,99	14,23
3	2,8	4,1	2,2	1,4	2,4	5,575	4,242	7,728	8,707	5,23
4	4,8	6,9	3,8	2,4	4,1	2,699	2,055	3,748	4,221	2,535
5	6,9	9,7	4,8	3,1	5,4	1,528	1,164	2,127	2,394	1,437

Factor de Segurança: M1_TC



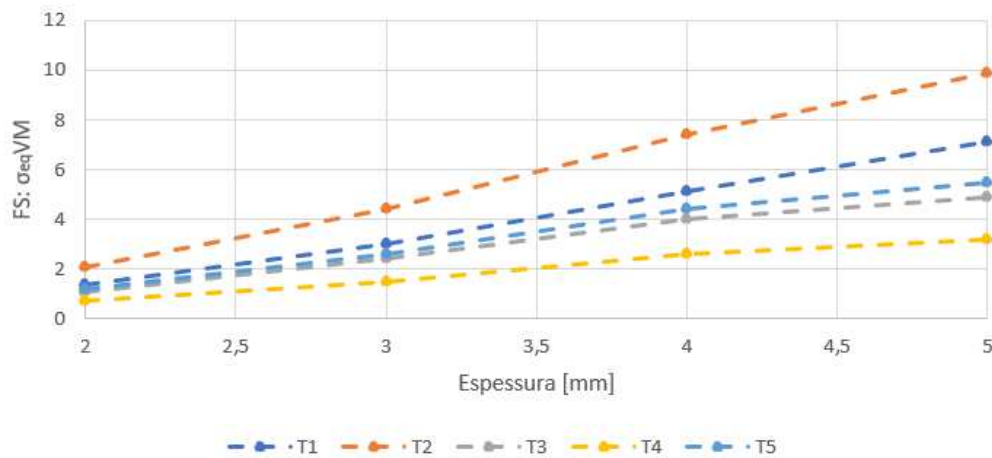
Desl. máximo resultante: M1_TC



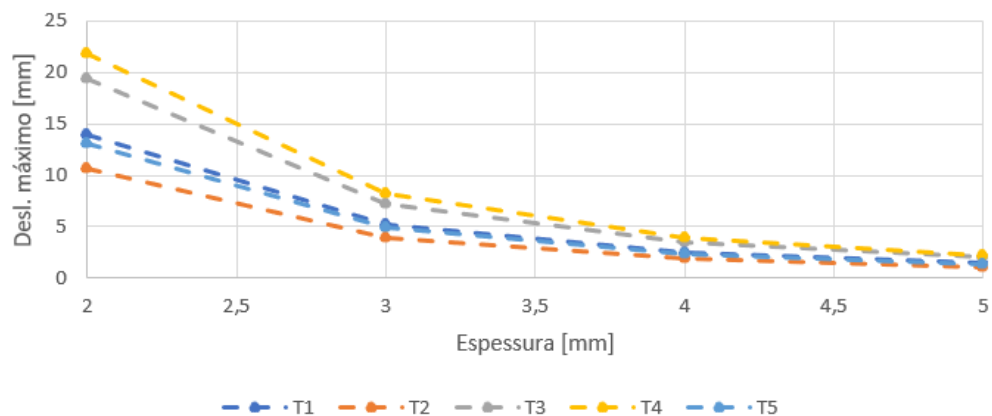
M2_TC

Espessura	FOS					Desl. Máx [mm]				
	T1	T2	T3	T4	T5	T1	T2	T3	T4	T5
2	1,40	2,10	1,10	0,70	1,20	13,98	10,64	19,39	21,84	13,12
3	3,00	4,40	2,40	1,50	2,60	5,21	3,97	7,24	8,15	4,90
4	5,10	7,40	4,00	2,60	4,40	2,54	1,93	3,53	3,98	2,39
5	7,10	9,90	4,90	3,20	5,50	1,44	1,10	2,01	2,26	1,36

Factor de Segurança: M2_TC



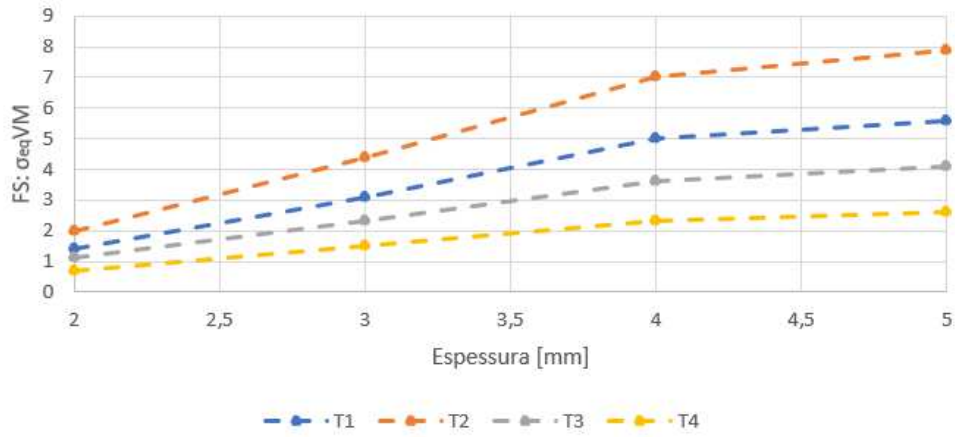
Desl. máximo resultante: M2_TC



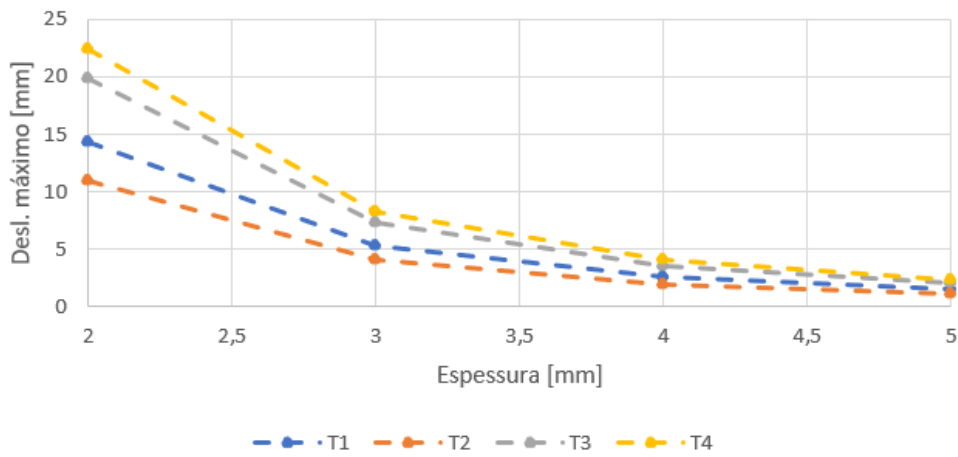
M3_TC

Espessura	FOS					Desl. Máx [mm]				
	T1	T2	T3	T4	T5	T1	T2	T3	T4	T5
2	1,40	2,00	1,10	0,68	1,20	14,32	10,90	19,85	22,37	13,43
3	3,10	4,40	2,30	1,50	2,50	5,33	4,05	7,39	8,32	5,00
4	5,00	7,00	3,60	2,30	4,40	2,59	1,98	3,60	4,06	2,44
5	5,60	7,90	4,10	2,60	5,80	1,47	1,12	2,05	2,31	1,39

Factor de Segurança: M3_TC



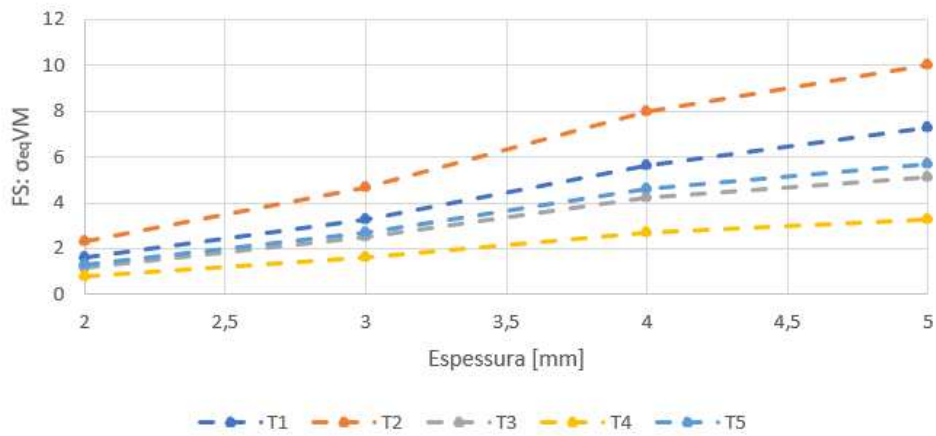
Desl. máximo resultante: M3_TC



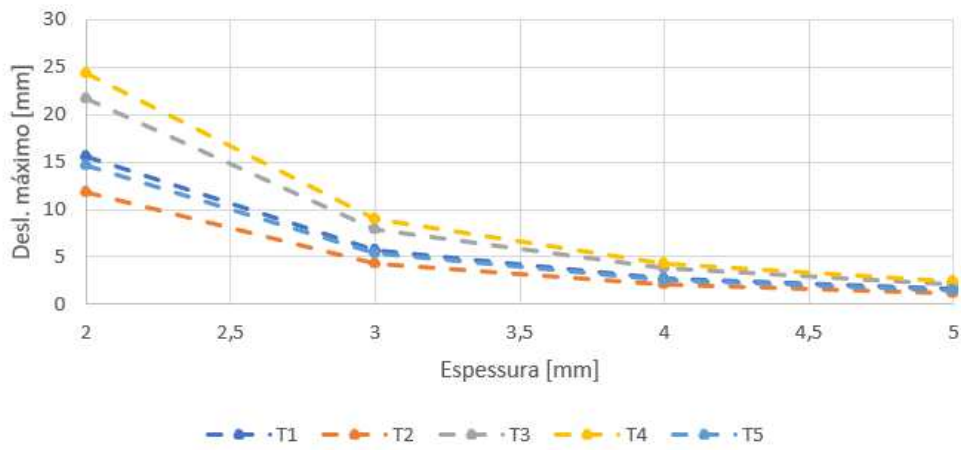
B. MÁSCARAS 3DLS

M1_3DLS										
Espessura	FOS					Desl. Máx [mm]				
	T1	T2	T3	T4	T5	T1	T2	T3	T4	T5
2	1,60	2,30	1,20	0,77	1,30	15,59	11,87	21,62	24,36	14,63
3	3,30	4,70	2,50	1,60	2,70	5,71	4,34	7,92	8,92	5,36
4	5,60	8,00	4,20	2,70	4,60	2,75	2,10	3,82	4,31	2,59
5	7,30	10,00	5,10	3,30	5,70	1,56	1,19	2,16	2,44	1,46

Factor de Segurança: M1_3DLS



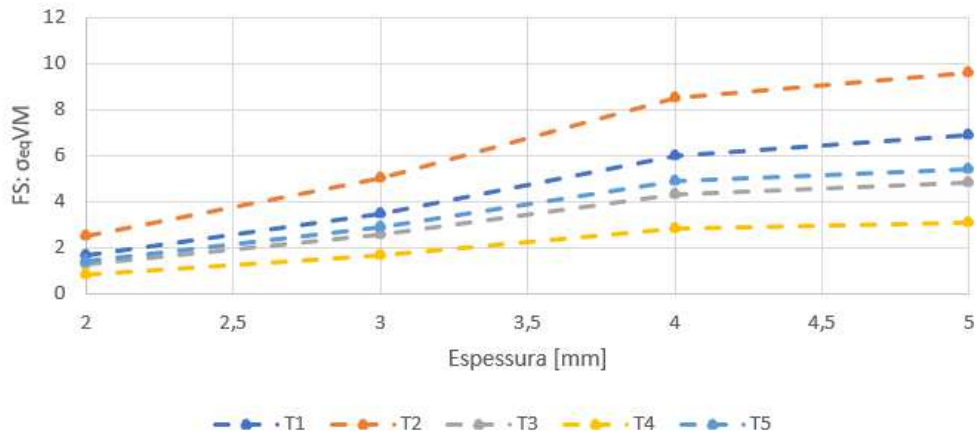
Desl. máximo resultante: M1_3DLS



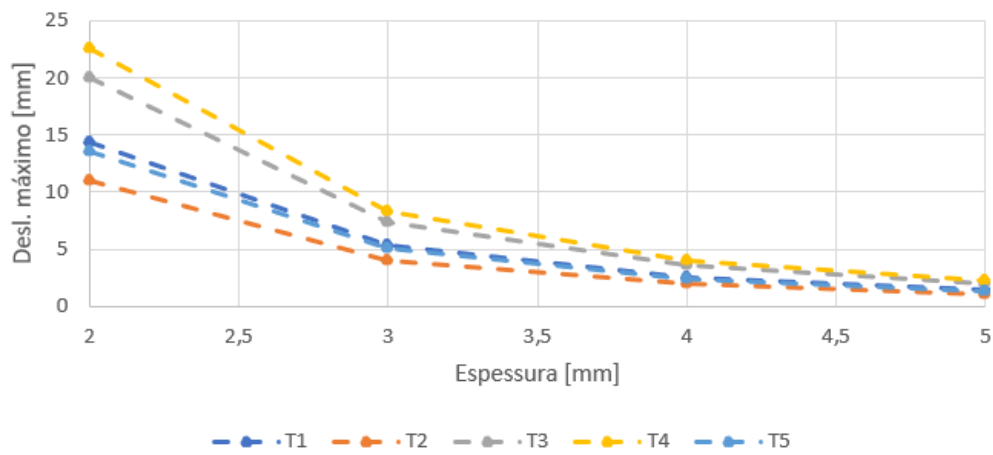
M2_3DLS

Espessura	FOS					Desl. Máx [mm]				
	T1	T2	T3	T4	T5	T1	T2	T3	T4	T5
2	1,70	2,50	1,30	0,83	1,40	14,40	10,96	19,99	22,52	13,52
3	3,50	5,00	2,60	1,70	2,90	5,35	4,07	7,42	8,36	5,02
4	6,00	8,50	4,30	2,80	4,90	2,59	1,98	3,61	4,06	2,44
5	6,90	9,60	4,80	3,10	5,40	1,47	1,12	2,05	2,31	1,39

Factor de Segurança: M2_3DLS



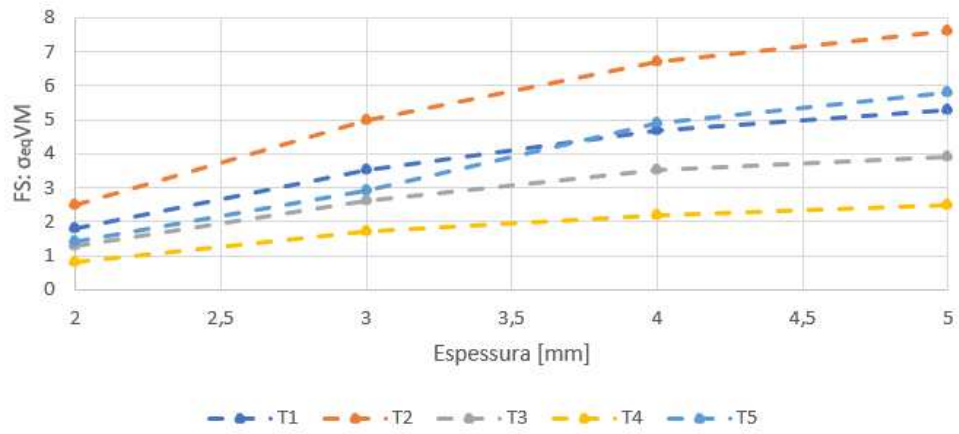
Desl. máximo resultante: M2_3DLS



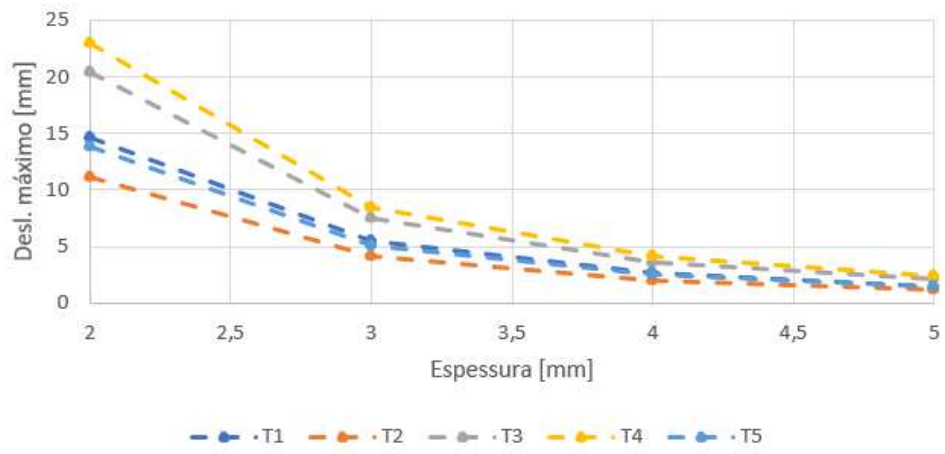
M3_3DLS

Espessura	FOS					Desl. Máx [mm]				
	T1	T2	T3	T4	T5	T1	T2	T3	T4	T5
2	1,80	2,50	1,30	0,83	1,40	14,69	11,18	20,39	22,97	13,79
3	3,50	5,00	2,60	1,70	2,90	5,44	4,14	7,56	8,51	5,11
4	4,70	6,70	3,50	2,20	4,90	2,64	2,01	3,67	4,13	2,48
5	5,30	7,60	3,90	2,50	5,80	1,50	1,14	2,08	2,34	1,41

Factor de Segurança: M3_3DLS



Desl. máximo resultante: M3_3DLS



VI. TESTES AOS ALGORITMOS DE OPTIMIZAÇÃO

Neste apêndice encontram-se todos os resultados referentes aos testes feitos aos algoritmos de otimização meta-heurísticos.

A. FUNÇÕES DE TESTE

Nesta sub-secção do Apêndice VI encontram-se os resultados das corridas feitas com as funções de teste aos algoritmos.

1. PSO

Sphere				
Iteração	F(X*)	X*	StdDev	Média
1	0,94	0,97	1585,56	762,33
2	0,03	0,16	4003,78	4291,32
3	0,00	0,00	3666,06	2316,63
4	0,00	0,00	3517,66	2753,51
5	0,00	0,00	3512,39	2422,50
6	0,00	0,00	3118,03	2346,96
7	0,00	0,00	3276,66	2406,64
8	0,00	0,00	3090,12	2844,10
9	0,00	0,00	3131,07	1989,92
10	0,00	0,00	3325,31	3266,82
11	0,00	0,00	2748,45	1972,17
12	0,00	0,00	3168,82	2511,32
13	0,00	0,00	2856,31	2298,74
14	0,00	0,00	2859,22	2455,70
15	0,00	0,00	3203,08	2440,86
16	0,00	0,00	3380,94	2777,16
17	0,00	0,00	3828,39	2826,27
18	0,00	0,00	3024,39	2297,57
19	0,00	0,00	3646,80	2615,59
20	0,00	0,00	2473,83	1545,99
21	0,00	0,00	3889,76	3277,30
22	0,00	0,00	2661,40	2000,80
23	0,00	0,00	2943,74	2207,57
24	0,00	0,00	3592,63	3126,97
25	0,00	0,00	3402,53	2342,54
26	0,00	0,00	3052,64	2645,15
27	0,00	0,00	3148,29	2188,57
28	0,00	0,00	2582,98	2529,43
29	0,00	0,00	3351,20	2327,32

30	0,00	0,00	3223,70	2862,72
31	0,00	0,00	4186,50	3832,62
32	0,00	0,00	3480,40	2788,31
33	0,00	0,00	3617,54	2708,98
34	0,00	0,00	3747,02	3917,84
35	0,00	0,00	2947,64	1659,60
36	0,00	0,00	3675,75	3751,36
37	0,00	0,00	3055,83	2121,55
38	0,00	0,00	3603,04	3638,87
.			.	
.			.	
.			.	
456	0,00	0,00	2758,26	2772,69
457	0,00	0,00	3344,93	3031,80
458	0,00	0,00	3319,65	3027,45
459	0,00	0,00	3307,78	2672,36
460	0,00	0,00	3616,98	2713,61
461	0,00	0,00	3758,71	3571,69
462	0,00	0,00	3777,98	2984,43
463	0,00	0,00	3116,95	3118,55
464	0,00	0,00	3149,42	2612,89
465	0,00	0,00	3335,02	3078,24
466	0,00	0,00	3570,21	3243,32
467	0,00	0,00	2498,31	2277,72
468	0,00	0,00	3198,41	2886,90
469	0,00	0,00	2522,77	1941,99
470	0,00	0,00	3183,28	3214,94
471	0,00	0,00	3299,05	2628,75
472	0,00	0,00	3650,26	3312,99
473	0,00	0,00	3045,76	2108,72
474	0,00	0,00	3554,85	3334,34
475	0,00	0,00	3476,09	2572,63
476	0,00	0,00	3361,13	3367,94
477	0,00	0,00	3786,34	3615,78
478	0,00	0,00	3059,06	2094,87
479	0,00	0,00	3978,42	4033,10
480	0,00	0,00	2790,97	2262,84
481	0,00	0,00	3335,25	2597,99
482	0,00	0,00	3316,45	3348,02
483	0,00	0,00	2739,80	2284,13
484	0,00	0,00	3709,88	4487,79
485	0,00	0,00	3705,34	2612,83
486	0,00	0,00	3537,44	4330,38
487	0,00	0,00	3826,21	3589,81
488	0,00	0,00	3588,25	3533,25
489	0,00	0,00	3582,42	3508,20

490	0,00	0,00	3340,81	2444,62
491	0,00	0,00	3515,79	3687,51
492	0,00	0,00	3556,48	3563,80
493	0,00	0,00	3134,81	3593,98
494	0,00	0,00	3613,31	3187,62
495	0,00	0,00	3723,12	3924,72
496	0,00	0,00	3520,91	3164,14
497	0,00	0,00	3676,37	3609,77
498	0,00	0,00	3019,39	2508,86
499	0,00	0,00	3526,14	3675,54
500	0,00	0,00	3219,59	3210,56

Griewank

Iteração	F(X*)	X*	StdDev	Média
1	0,03	-6,48	10,69	4,78
2	0,03	-6,48	31,27	29,15
3	0,03	-6,48	19,12	12,62
4	0,00	0,00	27,40	24,25
5	0,00	0,00	28,30	20,97
6	0,00	0,00	24,86	17,81
7	0,00	0,00	31,48	26,40
8	0,00	0,00	29,51	20,73
9	0,00	0,00	31,22	27,23
10	0,00	0,00	33,84	25,96
11	0,00	0,00	28,14	21,70
12	0,00	0,00	33,63	29,02
13	0,00	0,00	19,86	12,34
14	0,00	0,00	30,26	25,25
15	0,00	0,00	27,95	22,64
16	0,00	0,00	30,85	22,76
17	0,00	0,00	31,88	23,49
18	0,00	0,00	25,45	19,71
19	0,00	0,00	28,93	23,14
20	0,00	0,00	27,41	24,28
21	0,00	0,00	29,02	22,37
22	0,00	0,00	28,32	22,91
23	0,00	0,00	28,53	20,38
24	0,00	0,00	30,55	25,34
25	0,00	0,00	26,93	20,31
26	0,00	0,00	33,46	29,43
27	0,00	0,00	25,39	18,10
28	0,00	0,00	34,97	31,84
29	0,00	0,00	26,55	17,17
30	0,00	0,00	32,94	31,13
31	0,00	0,00	29,34	22,48

32	0,00	0,00	31,45	27,50
33	0,00	0,00	31,86	22,61
34	0,00	0,00	28,61	25,16
35	0,00	0,00	34,22	28,26
36	0,00	0,00	28,83	20,57
37	0,00	0,00	34,40	30,62
38	0,00	0,00	24,29	20,99
39	0,00	0,00	34,97	31,22
.				
.				
.				
457	0,00	0,00	31,87	27,68
458	0,00	0,00	33,39	25,73
459	0,00	0,00	33,92	27,26
460	0,00	0,00	35,15	32,90
461	0,00	0,00	35,86	37,45
462	0,00	0,00	35,02	31,69
463	0,00	0,00	34,59	36,08
464	0,00	0,00	34,85	35,36
465	0,00	0,00	36,51	36,35
466	0,00	0,00	34,57	37,62
467	0,00	0,00	34,80	27,79
468	0,00	0,00	33,27	31,20
469	0,00	0,00	34,46	32,94
470	0,00	0,00	34,01	28,20
471	0,00	0,00	35,22	43,39
472	0,00	0,00	30,29	25,30
473	0,00	0,00	32,70	32,01
474	0,00	0,00	35,99	32,53
475	0,00	0,00	28,92	24,39
476	0,00	0,00	35,35	35,56
477	0,00	0,00	31,71	29,37
478	0,00	0,00	30,18	29,02
479	0,00	0,00	33,71	30,69
480	0,00	0,00	34,04	28,91
481	0,00	0,00	35,60	36,61
482	0,00	0,00	32,20	33,46
483	0,00	0,00	31,98	28,65
484	0,00	0,00	34,42	38,01
485	0,00	0,00	26,83	22,75
486	0,00	0,00	38,27	41,48
487	0,00	0,00	30,69	26,16
488	0,00	0,00	33,36	30,73
489	0,00	0,00	35,41	33,48
490	0,00	0,00	27,91	25,73
491	0,00	0,00	35,18	33,19

492	0,00	0,00	25,75	22,66
493	0,00	0,00	32,66	31,39
494	0,00	0,00	34,14	34,95
495	0,00	0,00	28,79	24,04
496	0,00	0,00	33,47	37,72
497	0,00	0,00	30,28	26,57
498	0,00	0,00	32,24	35,40
499	0,00	0,00	35,63	32,43
500	0,00	0,00	30,76	29,78

Schwefel

Iteração	F(X*)	X*	StdDev	Média
1	0,13	419,97	261,08	307,05
2	0,13	419,97	235,77	436,28
3	0,13	419,97	227,65	359,55
4	0,13	419,97	243,85	364,61
5	0,13	419,97	265,62	364,90
6	0,01	421,21	247,07	286,45
7	0,01	421,21	249,26	367,89
8	0,01	421,21	236,09	325,18
9	0,01	421,21	251,04	334,31
10	0,01	421,21	255,04	401,61
11	0,01	421,21	242,96	345,33
12	0,01	421,21	241,16	358,31
13	0,01	421,21	250,29	351,01
14	0,01	421,21	249,97	405,28
15	0,01	421,21	217,65	283,57
16	0,01	421,21	252,03	338,13
17	0,01	421,21	253,65	313,35
18	0,01	421,21	249,67	274,38
19	0,01	421,21	250,94	356,61
20	0,01	421,21	235,90	422,74
21	0,01	421,21	253,85	369,10
22	0,01	421,21	237,33	355,67
23	0,01	421,21	245,12	288,46
24	0,01	421,21	240,20	388,43
25	0,01	421,21	231,82	270,52
26	0,01	421,21	273,11	328,14
27	0,01	421,21	260,65	327,70
28	0,01	421,21	260,30	329,05
29	0,01	421,21	238,29	332,52
30	0,01	421,21	256,23	316,75
31	0,01	421,21	252,85	345,04
32	0,01	421,21	251,48	349,09
33	0,01	421,21	242,48	380,22

34	0,01	421,21	248,49	341,27
35	0,01	421,21	221,87	386,13
36	0,01	421,21	245,65	386,33
37	0,01	421,21	240,25	431,76
38	0,01	421,21	261,39	402,03
39	0,00	421,10	241,62	353,44
.				
.				
.				
457	0,00	420,93	212,38	372,90
458	0,00	420,93	232,78	392,96
459	0,00	420,93	232,29	348,58
460	0,00	420,93	253,68	377,90
461	0,00	420,93	251,95	391,35
462	0,00	420,93	226,68	362,86
463	0,00	420,93	227,99	446,39
464	0,00	420,93	248,48	398,90
465	0,00	420,93	233,37	394,07
466	0,00	420,93	248,96	371,14
467	0,00	420,93	228,92	405,87
468	0,00	420,93	221,60	410,17
469	0,00	420,93	232,35	373,20
470	0,00	420,93	244,22	386,99
471	0,00	420,93	230,09	400,35
472	0,00	420,93	225,18	365,48
473	0,00	420,93	244,84	328,83
474	0,00	420,93	240,88	370,00
475	0,00	420,93	240,05	362,11
476	0,00	420,93	248,72	356,77
477	0,00	420,93	239,44	368,66
478	0,00	420,93	208,42	408,10
479	0,00	420,93	247,04	379,09
480	0,00	420,93	220,42	334,70
481	0,00	420,93	251,44	383,48
482	0,00	420,93	226,06	326,87
483	0,00	420,93	225,88	333,20
484	0,00	420,93	244,82	332,65
485	0,00	420,93	229,02	421,57
486	0,00	420,93	237,19	285,54
487	0,00	420,93	245,32	360,40
488	0,00	420,93	240,82	322,90
489	0,00	420,93	234,54	292,89
490	0,00	420,93	246,93	279,06
491	0,00	420,93	234,10	324,21
492	0,00	420,93	242,03	310,75
493	0,00	420,93	234,40	374,70

494	0,00	420,94	264,82	303,67
495	0,00	420,94	214,12	343,75
496	0,00	420,94	235,18	321,83
497	0,00	420,94	229,88	312,79
498	0,00	420,94	218,57	382,38
499	0,00	420,94	247,59	316,36
500	0,00	420,94	220,23	425,18

Rastringin

Iteração	F(X*)	X*	StdDev	Média
1	0,15	-0,03	9,08	10,46
2	0,15	-0,03	10,16	14,86
3	0,12	-0,02	9,86	12,40
4	0,00	0,00	8,43	10,47
5	0,00	0,00	10,21	14,19
6	0,00	0,00	9,61	13,99
7	0,00	0,00	10,60	13,06
8	0,00	0,00	9,16	12,54
9	0,00	0,00	12,25	15,31
10	0,00	0,00	9,98	13,48
11	0,00	0,00	11,41	15,30
12	0,00	0,00	11,33	13,40
13	0,00	0,00	12,42	14,70
14	0,00	0,00	11,20	13,32
15	0,00	0,00	11,29	15,66
16	0,00	0,00	9,86	16,11
17	0,00	0,00	11,66	13,60
18	0,00	0,00	10,63	15,82
19	0,00	0,00	10,48	15,99
20	0,00	0,00	10,59	12,93
21	0,00	0,00	11,21	14,61
22	0,00	0,00	12,32	14,89
23	0,00	0,00	12,03	15,26
24	0,00	0,00	11,45	14,63
25	0,00	0,00	11,84	13,13
26	0,00	0,00	11,00	16,93
27	0,00	0,00	12,60	17,80
28	0,00	0,00	11,08	14,72
29	0,00	0,00	11,82	17,64
30	0,00	0,00	11,61	14,44
31	0,00	0,00	10,69	13,29
32	0,00	0,00	11,82	15,69
33	0,00	0,00	10,12	14,22
34	0,00	0,00	11,28	14,27
35	0,00	0,00	11,46	16,67

36	0,00	0,00	11,51	12,99
37	0,00	0,00	13,00	15,96
38	0,00	0,00	10,84	15,75
39	0,00	0,00	10,63	15,01
.				
.				
.				
457	0,00	0,00	9,70	17,68
458	0,00	0,00	10,73	18,32
459	0,00	0,00	10,07	17,21
460	0,00	0,00	9,95	16,98
461	0,00	0,00	9,38	14,93
462	0,00	0,00	9,75	15,09
463	0,00	0,00	8,84	19,66
464	0,00	0,00	11,98	17,73
465	0,00	0,00	9,05	17,79
466	0,00	0,00	10,23	16,07
467	0,00	0,00	9,74	16,43
468	0,00	0,00	8,36	16,12
469	0,00	0,00	10,10	13,66
470	0,00	0,00	10,23	17,37
471	0,00	0,00	11,01	16,86
472	0,00	0,00	8,83	16,99
473	0,00	0,00	10,48	15,23
474	0,00	0,00	10,82	14,96
475	0,00	0,00	9,06	15,23
476	0,00	0,00	9,78	15,65
477	0,00	0,00	11,14	15,03
478	0,00	0,00	9,38	17,72
479	0,00	0,00	11,49	15,11
480	0,00	0,00	11,81	14,78
481	0,00	0,00	8,50	17,56
482	0,00	0,00	10,98	16,15
483	0,00	0,00	9,34	19,92
484	0,00	0,00	11,63	12,23
485	0,00	0,00	10,48	17,57
486	0,00	0,00	11,75	13,57
487	0,00	0,00	11,12	18,81
488	0,00	0,00	10,49	15,20
489	0,00	0,00	10,90	17,06
490	0,00	0,00	11,14	17,43
491	0,00	0,00	11,53	14,95
492	0,00	0,00	9,29	18,92
493	0,00	0,00	11,99	18,13
494	0,00	0,00	11,60	18,66
495	0,00	0,00	9,98	20,74

496	0,00	0,00	11,84	15,20
497	0,00	0,00	10,41	19,44
498	0,00	0,00	10,21	14,18
499	0,00	0,00	10,67	18,31
500	0,00	0,00	10,57	17,66

2. PSO RESTRINGIDO

Sphere				
Iteração	F(X*)	X*	StdDev	Média
1	1,11	1,05	1977,02	1012,23
2	1,11	1,05	2010,10	1746,79
3	0,50	0,71	1095,48	929,63
4	0,02	0,15	1003,03	754,71
5	0,02	0,15	1487,21	978,22
6	0,00	-0,02	730,48	431,74
7	0,00	-0,02	1411,05	1016,99
8	0,00	-0,01	978,41	577,09
9	0,00	-0,01	852,40	493,64
10	0,00	-0,01	678,76	406,19
11	0,00	-0,01	712,23	436,72
12	0,00	-0,01	593,47	375,30
13	0,00	-0,01	1114,31	531,74
14	0,00	-0,01	680,24	275,07
15	0,00	-0,01	1194,88	454,67
16	0,00	0,00	526,91	183,38
17	0,00	0,00	827,92	302,59
18	0,00	0,00	176,69	80,88
19	0,00	0,00	347,99	136,42
20	0,00	0,00	157,82	77,92
21	0,00	0,00	198,25	75,62
22	0,00	0,00	385,43	113,23
23	0,00	0,00	78,67	40,30
24	0,00	0,00	112,80	40,64
25	0,00	0,00	259,56	79,14
26	0,00	0,00	275,46	66,36
27	0,00	0,00	845,99	177,60
28	0,00	0,00	120,46	33,57
29	0,00	0,00	673,43	148,29
30	0,00	0,00	117,03	31,50
31	0,00	0,00	324,69	76,92
32	0,00	0,00	407,21	82,74
33	0,00	0,00	124,94	40,05
34	0,00	0,00	52,46	14,82

35	0,00	0,00	64,94	19,91
36	0,00	0,00	42,46	13,74
37	0,00	0,00	28,21	9,94
38	0,00	0,00	41,61	10,59
.			.	
.			.	
.			.	
456	0,00	0,00	0,00	0,00
457	0,00	0,00	0,00	0,00
458	0,00	0,00	0,00	0,00
459	0,00	0,00	0,00	0,00
460	0,00	0,00	0,00	0,00
461	0,00	0,00	0,00	0,00
462	0,00	0,00	0,00	0,00
463	0,00	0,00	0,00	0,00
464	0,00	0,00	0,00	0,00
465	0,00	0,00	0,00	0,00
466	0,00	0,00	0,00	0,00
467	0,00	0,00	0,00	0,00
468	0,00	0,00	0,00	0,00
469	0,00	0,00	0,00	0,00
470	0,00	0,00	0,00	0,00
471	0,00	0,00	0,00	0,00
472	0,00	0,00	0,00	0,00
473	0,00	0,00	0,00	0,00
474	0,00	0,00	0,00	0,00
475	0,00	0,00	0,00	0,00
476	0,00	0,00	0,00	0,00
477	0,00	0,00	0,00	0,00
478	0,00	0,00	0,00	0,00
479	0,00	0,00	0,00	0,00
480	0,00	0,00	0,00	0,00
481	0,00	0,00	0,00	0,00
482	0,00	0,00	0,00	0,00
483	0,00	0,00	0,00	0,00
484	0,00	0,00	0,00	0,00
485	0,00	0,00	0,00	0,00
486	0,00	0,00	0,00	0,00
487	0,00	0,00	0,00	0,00
488	0,00	0,00	0,00	0,00
489	0,00	0,00	0,00	0,00
490	0,00	0,00	0,00	0,00
491	0,00	0,00	0,00	0,00
492	0,00	0,00	0,00	0,00
493	0,00	0,00	0,00	0,00
494	0,00	0,00	0,00	0,00

495	0,00	0,00	0,00	0,00
496	0,00	0,00	0,00	0,00
497	0,00	0,00	0,00	0,00
498	0,00	0,00	0,00	0,00
499	0,00	0,00	0,00	0,00
500	0,00	0,00	0,00	0,00

Griewank

Iteração	F(X*)	X*	StdDev	Média
1	0,03	-6,06	16,65	9,95
2	0,03	-6,06	16,08	11,87
3	0,03	-6,06	12,20	8,64
4	0,03	-6,06	8,28	7,96
5	0,02	6,14	9,56	6,81
6	0,02	6,14	8,80	6,01
7	0,02	6,14	6,60	5,37
8	0,01	-6,31	7,80	4,36
9	0,01	-6,31	5,43	4,35
10	0,01	-6,31	9,91	5,99
11	0,00	0,05	11,13	5,65
12	0,00	0,05	5,13	3,10
13	0,00	0,05	8,72	3,97
14	0,00	0,05	7,10	3,77
15	0,00	0,05	3,81	2,27
16	0,00	0,05	4,71	2,85
17	0,00	0,05	2,13	2,09
18	0,00	0,05	4,89	3,26
19	0,00	0,05	2,29	2,11
20	0,00	0,05	3,33	1,99
21	0,00	0,05	2,17	1,86
22	0,00	0,05	1,33	1,79
23	0,00	0,05	1,56	1,64
24	0,00	0,05	2,39	1,82
25	0,00	0,05	3,94	2,48
26	0,00	0,05	2,20	1,23
27	0,00	0,05	2,23	1,76
28	0,00	0,05	0,87	1,20
29	0,00	0,05	1,99	2,01
30	0,00	0,05	1,06	1,01
31	0,00	0,05	0,79	0,96
32	0,00	0,05	0,89	1,04
33	0,00	0,05	0,73	0,97
34	0,00	0,05	0,69	1,03
35	0,00	0,05	0,99	1,10
36	0,00	0,05	0,81	1,15

37	0,00	0,05	0,77	1,03
38	0,00	0,05	0,69	0,74
39	0,00	0,05	0,62	0,74
.			.	
.			.	
.			.	
457	0,00	0,00	0,00	0,00
458	0,00	0,00	0,00	0,00
459	0,00	0,00	0,00	0,00
460	0,00	0,00	0,00	0,00
461	0,00	0,00	0,00	0,00
462	0,00	0,00	0,00	0,00
463	0,00	0,00	0,00	0,00
464	0,00	0,00	0,00	0,00
465	0,00	0,00	0,00	0,00
466	0,00	0,00	0,00	0,00
467	0,00	0,00	0,00	0,00
468	0,00	0,00	0,00	0,00
469	0,00	0,00	0,00	0,00
470	0,00	0,00	0,00	0,00
471	0,00	0,00	0,00	0,00
472	0,00	0,00	0,00	0,00
473	0,00	0,00	0,00	0,00
474	0,00	0,00	0,00	0,00
475	0,00	0,00	0,00	0,00
476	0,00	0,00	0,00	0,00
477	0,00	0,00	0,00	0,00
478	0,00	0,00	0,00	0,00
479	0,00	0,00	0,00	0,00
480	0,00	0,00	0,00	0,00
481	0,00	0,00	0,00	0,00
482	0,00	0,00	0,00	0,00
483	0,00	0,00	0,00	0,00
484	0,00	0,00	0,00	0,00
485	0,00	0,00	0,00	0,00
486	0,00	0,00	0,00	0,00
487	0,00	0,00	0,00	0,00
488	0,00	0,00	0,00	0,00
489	0,00	0,00	0,00	0,00
490	0,00	0,00	0,00	0,00
491	0,00	0,00	0,00	0,00
492	0,00	0,00	0,00	0,00
493	0,00	0,00	0,00	0,00
494	0,00	0,00	0,00	0,00
495	0,00	0,00	0,00	0,00
496	0,00	0,00	0,00	0,00

497	0,00	0,00	0,00	0,00
498	0,00	0,00	0,00	0,00
499	0,00	0,00	0,00	0,00
500	0,00	0,00	0,00	0,00

Schwefel

Iteração	F(X*)	X*	StdDev	Média
1	0,50	418,98	230,53	391,72
2	0,50	418,98	231,70	442,36
3	0,13	419,96	257,20	375,15
4	0,00	421,14	246,78	319,51
5	0,00	421,14	237,33	333,34
6	0,00	421,14	235,90	263,01
7	0,00	421,14	229,64	278,93
8	0,00	421,14	220,45	262,29
9	0,00	421,13	164,88	154,55
10	0,00	420,86	173,00	157,20
11	0,00	420,86	239,21	186,56
12	0,00	420,88	213,21	159,85
13	0,00	420,88	159,27	109,39
14	0,00	420,88	176,24	96,99
15	0,00	420,88	180,57	105,09
16	0,00	420,88	133,58	81,98
17	0,00	420,88	171,33	91,84
18	0,00	420,88	133,20	61,45
19	0,00	420,88	186,48	84,67
20	0,00	421,01	138,18	65,48
21	0,00	421,01	160,47	73,79
22	0,00	421,01	157,29	72,12
23	0,00	420,94	136,80	61,66
24	0,00	420,95	118,23	52,67
25	0,00	420,95	127,93	59,38
26	0,00	420,95	114,12	54,45
27	0,00	420,95	125,56	55,68
28	0,00	420,95	131,73	52,07
29	0,00	420,95	164,03	68,75
30	0,00	420,96	162,82	58,81
31	0,00	420,96	127,22	56,12
32	0,00	420,96	51,45	20,72
33	0,00	420,96	94,32	34,66
34	0,00	420,98	67,28	18,62
35	0,00	420,98	87,57	27,50
36	0,00	420,98	92,67	25,49
37	0,00	420,98	67,13	21,05
38	0,00	420,98	55,72	16,10

39	0,00	420,98	115,62	25,40
.			.	
.			.	
.			.	
457	0,00	420,97	0,00	0,00
458	0,00	420,97	0,00	0,00
459	0,00	420,97	0,00	0,00
460	0,00	420,97	0,00	0,00
461	0,00	420,97	0,00	0,00
462	0,00	420,97	0,00	0,00
463	0,00	420,97	0,00	0,00
464	0,00	420,97	0,00	0,00
465	0,00	420,97	0,00	0,00
466	0,00	420,97	0,00	0,00
467	0,00	420,97	0,00	0,00
468	0,00	420,97	0,00	0,00
469	0,00	420,97	0,00	0,00
470	0,00	420,97	0,00	0,00
471	0,00	420,97	0,00	0,00
472	0,00	420,97	0,00	0,00
473	0,00	420,97	0,00	0,00
474	0,00	420,97	0,00	0,00
475	0,00	420,97	0,00	0,00
476	0,00	420,97	0,00	0,00
477	0,00	420,97	0,00	0,00
478	0,00	420,97	0,00	0,00
479	0,00	420,97	0,00	0,00
480	0,00	420,97	0,00	0,00
481	0,00	420,97	0,00	0,00
482	0,00	420,97	0,00	0,00
483	0,00	420,97	0,00	0,00
484	0,00	420,97	0,00	0,00
485	0,00	420,97	0,00	0,00
486	0,00	420,97	0,00	0,00
487	0,00	420,97	0,00	0,00
488	0,00	420,97	0,00	0,00
489	0,00	420,97	0,00	0,00
490	0,00	420,97	0,00	0,00
491	0,00	420,97	0,00	0,00
492	0,00	420,97	0,00	0,00
493	0,00	420,97	0,00	0,00
494	0,00	420,97	0,00	0,00
495	0,00	420,97	0,00	0,00
496	0,00	420,97	0,00	0,00
497	0,00	420,97	0,00	0,00
498	0,00	420,97	0,00	0,00

499	0,00	420,97	0,00	0,00
500	0,00	420,97	0,00	0,00

Rastringin

Iteração	F(X*)	X*	StdDev	Média
1	0,30	0,04	9,85	13,73
2	0,30	0,04	7,95	12,32
3	0,30	0,04	7,17	10,24
4	0,30	0,04	8,46	13,50
5	0,06	0,02	8,90	10,37
6	0,01	0,01	7,32	9,66
7	0,01	0,01	7,17	12,19
8	0,00	0,00	7,76	11,23
9	0,00	0,00	8,76	11,86
10	0,00	0,00	7,80	9,25
11	0,00	0,00	5,21	7,51
12	0,00	0,00	7,12	8,65
13	0,00	0,00	7,92	9,71
14	0,00	0,00	6,99	9,33
15	0,00	0,00	7,79	9,14
16	0,00	0,00	8,40	9,39
17	0,00	0,00	7,00	8,08
18	0,00	0,00	7,33	6,57
19	0,00	0,00	7,05	7,60
20	0,00	0,00	8,42	8,70
21	0,00	0,00	8,00	8,98
22	0,00	0,00	8,06	6,26
23	0,00	0,00	7,75	7,38
24	0,00	0,00	7,16	5,20
25	0,00	0,00	7,45	5,82
26	0,00	0,00	6,43	4,91
27	0,00	0,00	5,44	3,97
28	0,00	0,00	7,91	5,75
29	0,00	0,00	6,38	4,46
30	0,00	0,00	6,92	4,86
31	0,00	0,00	5,96	4,44
32	0,00	0,00	5,68	3,23
33	0,00	0,00	5,18	3,59
34	0,00	0,00	5,93	3,98
35	0,00	0,00	4,93	2,79
36	0,00	0,00	6,22	3,71
37	0,00	0,00	4,88	2,51
38	0,00	0,00	5,51	3,35
39	0,00	0,00	5,67	3,35

·			·	
·			·	
·			·	
457	0,00	0,00	0,00	0,00
458	0,00	0,00	0,00	0,00
459	0,00	0,00	0,00	0,00
460	0,00	0,00	0,00	0,00
461	0,00	0,00	0,00	0,00
462	0,00	0,00	0,00	0,00
463	0,00	0,00	0,00	0,00
464	0,00	0,00	0,00	0,00
465	0,00	0,00	0,00	0,00
466	0,00	0,00	0,00	0,00
467	0,00	0,00	0,00	0,00
468	0,00	0,00	0,00	0,00
469	0,00	0,00	0,00	0,00
470	0,00	0,00	0,00	0,00
471	0,00	0,00	0,00	0,00
472	0,00	0,00	0,00	0,00
473	0,00	0,00	0,00	0,00
474	0,00	0,00	0,00	0,00
475	0,00	0,00	0,00	0,00
476	0,00	0,00	0,00	0,00
477	0,00	0,00	0,00	0,00
478	0,00	0,00	0,00	0,00
479	0,00	0,00	0,00	0,00
480	0,00	0,00	0,00	0,00
481	0,00	0,00	0,00	0,00
482	0,00	0,00	0,00	0,00
483	0,00	0,00	0,00	0,00
484	0,00	0,00	0,00	0,00
485	0,00	0,00	0,00	0,00
486	0,00	0,00	0,00	0,00
487	0,00	0,00	0,00	0,00
488	0,00	0,00	0,00	0,00
489	0,00	0,00	0,00	0,00
490	0,00	0,00	0,00	0,00
491	0,00	0,00	0,00	0,00
492	0,00	0,00	0,00	0,00
493	0,00	0,00	0,00	0,00
494	0,00	0,00	0,00	0,00
495	0,00	0,00	0,00	0,00
496	0,00	0,00	0,00	0,00
497	0,00	0,00	0,00	0,00
498	0,00	0,00	0,00	0,00
499	0,00	0,00	0,00	0,00

500	0,00	0,00	0,00	0,00
------------	------	------	------	------

3. WOA

Sphere				
Iteração	F(X*)	X*	StdDev	Média
1	0,03	-0,17	3482,09	2540,54
2	0,00	-0,05	2878,17	1739,71
3	0,00	-0,03	2822,78	1431,87
4	0,00	-0,03	3705,28	2292,90
5	0,00	-0,03	3898,02	2446,50
6	0,00	-0,03	4425,86	3260,13
7	0,00	-0,02	3237,93	2018,62
8	0,00	-0,02	3141,33	1736,18
9	0,00	-0,02	2140,60	1163,44
10	0,00	0,00	2485,83	1172,94
11	0,00	0,00	2596,46	1170,95
12	0,00	0,00	2005,60	855,42
13	0,00	0,00	2487,08	1122,96
14	0,00	0,00	2342,84	730,83
15	0,00	0,00	2343,96	754,40
16	0,00	0,00	2220,42	696,69
17	0,00	0,00	577,67	141,11
18	0,00	0,00	49,40	21,41
19	0,00	0,00	22,23	8,90
20	0,00	0,00	30,69	9,33
21	0,00	0,00	53,13	16,52
22	0,00	0,00	170,48	49,66
23	0,00	0,00	37,40	13,19
24	0,00	0,00	49,24	18,52
25	0,00	0,00	38,14	11,16
26	0,00	0,00	124,88	33,64
27	0,00	0,00	120,01	25,88
28	0,00	0,00	348,00	67,47
29	0,00	0,00	1015,91	209,57
30	0,00	0,00	1823,42	351,86
31	0,00	0,00	2215,71	593,82
32	0,00	0,00	2011,85	542,41
33	0,00	0,00	2741,62	1149,02
34	0,00	0,00	1394,63	675,34
35	0,00	0,00	759,74	392,82
36	0,00	0,00	750,60	349,30
37	0,00	0,00	1968,51	678,92
38	0,00	0,00	2961,74	1228,13

·				
·				
·				
456	0,00	0,00	0,00	0,00
457	0,00	0,00	0,00	0,00
458	0,00	0,00	0,00	0,00
459	0,00	0,00	0,00	0,00
460	0,00	0,00	0,00	0,00
461	0,00	0,00	0,00	0,00
462	0,00	0,00	0,00	0,00
463	0,00	0,00	0,00	0,00
464	0,00	0,00	0,00	0,00
465	0,00	0,00	0,00	0,00
466	0,00	0,00	0,00	0,00
467	0,00	0,00	0,00	0,00
468	0,00	0,00	0,00	0,00
469	0,00	0,00	0,00	0,00
470	0,00	0,00	0,00	0,00
471	0,00	0,00	0,00	0,00
472	0,00	0,00	0,00	0,00
473	0,00	0,00	0,00	0,00
474	0,00	0,00	0,00	0,00
475	0,00	0,00	0,00	0,00
476	0,00	0,00	0,00	0,00
477	0,00	0,00	0,00	0,00
478	0,00	0,00	0,00	0,00
479	0,00	0,00	0,00	0,00
480	0,00	0,00	0,00	0,00
481	0,00	0,00	0,00	0,00
482	0,00	0,00	0,00	0,00
483	0,00	0,00	0,00	0,00
484	0,00	0,00	0,00	0,00
485	0,00	0,00	0,00	0,00
486	0,00	0,00	0,00	0,00
487	0,00	0,00	0,00	0,00
488	0,00	0,00	0,00	0,00
489	0,00	0,00	0,00	0,00
490	0,00	0,00	0,00	0,00
491	0,00	0,00	0,00	0,00
492	3,37683966981500e-311	0,00	0,00	0,00
493	6,70067939330000e-314	0,00	0,00	0,00
494	2,10052712100000e-314	0,00	0,00	0,00
495	7,17304170000000e-317	0,00	0,00	0,00
496	9,86000000000000e-321	0,00	0,00	0,00
497	1,93000000000000e-322	0,00	0,00	0,00
498	0,00	0,00	0,00	0,00

499	0,00	0,00	0,00	5,43271306251750e-311
500	0,00	0,00	0,0000	7,23468613260000e-313

Griewank

Iteração	F(X*)	X*	StdDev	Média
1	0,08	12,86	30,67	22,94
2	0,08	12,86	29,23	16,38
3	0,08	12,86	23,59	10,25
4	0,01	-6,29	18,14	7,82
5	0,01	-6,29	24,68	10,70
6	0,01	-6,29	28,66	15,60
7	0,01	-6,29	32,72	18,89
8	0,01	-6,29	33,21	18,31
9	0,01	-6,27	25,03	13,65
10	0,01	-6,27	23,89	11,07
11	0,01	-6,27	25,29	13,44
12	0,01	-6,27	27,59	12,03
13	0,01	-6,27	31,70	18,25
14	0,01	-6,27	28,66	18,79
15	0,01	-6,27	29,49	18,62
16	0,01	-6,28	6,89	4,27
17	0,01	-6,28	25,93	11,67
18	0,00	-0,07	25,22	10,14
19	0,00	-0,07	28,35	13,48
20	0,00	0,07	25,26	12,58
21	0,00	0,03	29,39	15,29
22	0,00	0,03	31,18	19,48
23	0,00	0,00	31,03	16,22
24	0,00	0,00	31,87	18,34
25	0,00	0,00	19,30	9,36
26	0,00	0,00	19,53	8,70
27	0,00	0,00	28,72	14,54
28	0,00	0,00	27,63	12,47
29	0,00	0,00	22,89	8,76
30	0,00	0,00	20,46	7,72
31	0,00	0,00	21,69	7,71
32	0,00	0,00	19,23	7,50
33	0,00	0,00	19,80	6,82
34	0,00	0,00	9,58	5,19
35	0,00	0,00	20,15	9,03
36	0,00	0,00	17,94	6,53
37	0,00	0,00	8,79	3,49
38	0,00	0,00	4,59	2,79
39	0,00	0,00	13,57	6,06

·				
·				
·				
457	0,00	0,00	0,00	0,00
458	0,00	0,00	0,00	0,00
459	0,00	0,00	0,00	0,00
460	0,00	0,00	0,00	0,00
461	0,00	0,00	0,00	0,00
462	0,00	0,00	0,00	0,00
463	0,00	0,00	0,00	0,00
464	0,00	0,00	0,00	0,00
465	0,00	0,00	0,00	0,00
466	0,00	0,00	0,00	0,00
467	0,00	0,00	0,00	0,00
468	0,00	0,00	0,00	0,00
469	0,00	0,00	0,00	0,00
470	0,00	0,00	0,00	0,00
471	0,00	0,00	0,00	0,00
472	0,00	0,00	0,00	0,00
473	0,00	0,00	0,00	0,00
474	0,00	0,00	0,00	0,00
475	0,00	0,00	0,00	0,00
476	0,00	0,00	0,00	0,00
477	0,00	0,00	0,00	0,00
478	0,00	0,00	0,00	0,00
479	0,00	0,00	0,00	0,00
480	0,00	0,00	0,00	0,00
481	0,00	0,00	0,00	0,00
482	0,00	0,00	0,00	0,00
483	0,00	0,00	0,00	0,00
484	0,00	0,00	0,00	0,00
485	0,00	0,00	0,00	0,00
486	0,00	0,00	0,00	0,00
487	0,00	0,00	0,00	0,00
488	0,00	0,00	0,00	0,00
489	0,00	0,00	0,00	0,00
490	0,00	0,00	0,00	0,00
491	0,00	0,00	0,00	0,00
492	0,00	0,00	0,00	0,00
493	0,00	0,00	0,00	0,00
494	0,00	0,00	0,00	0,00
495	0,00	0,00	0,00	0,00
496	0,00	0,00	0,00	0,00
497	0,00	0,00	0,00	0,00
498	0,00	0,00	0,00	0,00
499	0,00	0,00	0,00	0,00

500	0,00	0,00	0,00	0,00
------------	------	------	------	------

Schwefel

Iteração	F(X*)	X*	StdDev	Média
1	2,25	425,19	226,62	374,61
2	0,00	420,82	261,42	294,90
3	0,00	420,82	266,79	320,72
4	0,00	420,82	259,53	407,04
5	0,00	420,82	238,51	340,66
6	0,00	420,84	251,06	269,61
7	0,00	420,84	232,25	320,77
8	0,00	420,84	256,53	283,72
9	0,00	420,84	255,82	380,35
10	0,00	420,84	245,91	254,38
11	0,00	420,84	232,79	246,88
12	0,00	420,84	260,61	268,77
13	0,00	421,07	247,92	287,06
14	0,00	421,07	229,83	410,19
15	0,00	421,07	260,86	327,11
16	0,00	421,07	268,92	303,35
17	0,00	421,05	248,88	282,66
18	0,00	421,05	259,34	290,94
19	0,00	421,05	275,44	286,30
20	0,00	421,04	215,22	161,96
21	0,00	421,04	258,77	280,44
22	0,00	420,96	250,02	328,03
23	0,00	420,96	228,26	292,90
24	0,00	420,96	259,46	289,17
25	0,00	420,96	258,81	259,22
26	0,00	420,96	280,61	326,61
27	0,00	420,96	271,58	304,11
28	0,00	420,96	256,24	283,22
29	0,00	420,96	238,58	257,68
30	0,00	420,96	270,95	306,63
31	0,00	420,96	279,70	305,19
32	0,00	420,96	259,22	345,29
33	0,00	420,96	236,49	359,00
34	0,00	420,96	278,03	347,02
35	0,00	420,96	260,31	279,56
36	0,00	420,96	282,14	272,98
37	0,00	420,96	262,94	268,79
38	0,00	420,96	234,23	325,77
39	0,00	420,96	256,08	298,53

·			·	
·			·	
·			·	
457	0,00	420,97	106,38	71,62
458	0,00	420,97	93,77	58,90
459	0,00	420,97	101,97	68,74
460	0,00	420,97	151,31	97,07
461	0,00	420,97	121,16	74,42
462	0,00	420,97	129,68	92,63
463	0,00	420,97	80,73	42,17
464	0,00	420,97	134,19	59,50
465	0,00	420,97	98,15	59,49
466	0,00	420,97	119,87	77,04
467	0,00	420,97	156,50	99,20
468	0,00	420,97	138,17	54,39
469	0,00	420,97	65,58	30,66
470	0,00	420,97	81,47	44,11
471	0,00	420,97	91,88	51,97
472	0,00	420,97	58,29	37,59
473	0,00	420,97	52,87	31,28
474	0,00	420,97	30,50	21,44
475	0,00	420,97	39,93	17,43
476	0,00	420,97	64,41	35,44
477	0,00	420,97	41,52	19,56
478	0,00	420,97	49,51	32,20
479	0,00	420,97	55,45	27,06
480	0,00	420,97	79,96	38,31
481	0,00	420,97	50,01	26,64
482	0,00	420,97	35,86	22,50
483	0,00	420,97	31,14	21,31
484	0,00	420,97	51,73	16,09
485	0,00	420,97	13,87	6,42
486	0,00	420,97	10,65	5,48
487	0,00	420,97	21,95	12,07
488	0,00	420,97	46,26	18,09
489	0,00	420,97	110,99	36,15
490	0,00	420,97	64,50	22,14
491	0,00	420,97	38,24	14,27
492	0,00	420,97	74,36	15,20
493	0,00	420,97	2,89	1,67
494	0,00	420,97	3,37	1,89
495	0,00	420,97	2,31	1,66
496	0,00	420,97	2,82	1,19
497	0,00	420,97	0,79	0,44
498	0,00	420,97	0,42	0,31
499	0,00	420,97	0,93	0,24

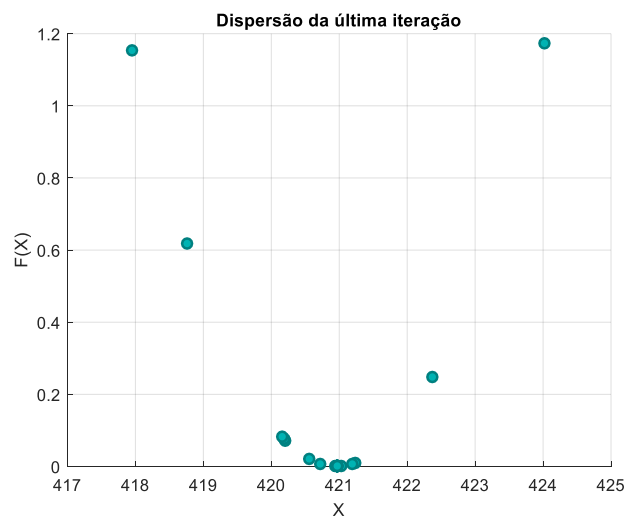
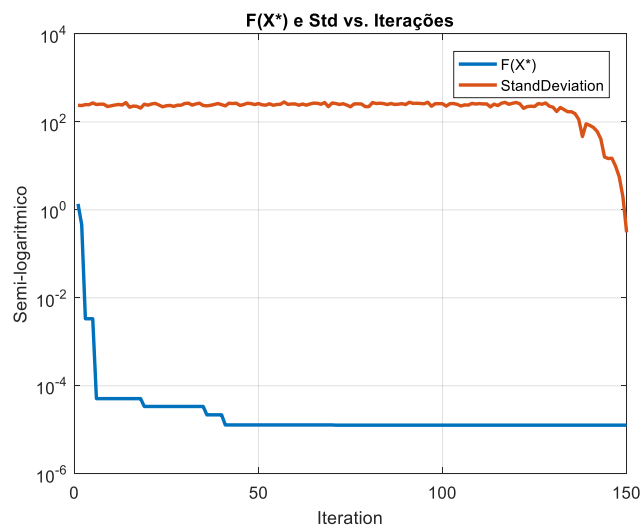
500	0,00	420,97	0,68	0,13
------------	------	--------	------	------

Rastringin

Iteração	F(X*)	X*	StdDev	Média
1	0,00	0,00	9,35	13,66
2	0,00	0,00	9,25	11,34
3	0,00	0,00	10,34	11,28
4	0,00	0,00	11,14	11,82
5	0,00	0,00	10,95	9,85
6	0,00	0,00	10,03	9,48
7	0,00	0,00	11,94	11,21
8	0,00	0,00	11,29	14,43
9	0,00	0,00	11,70	11,79
10	0,00	0,00	9,77	11,32
11	0,00	0,00	10,11	11,40
12	0,00	0,00	13,39	14,67
13	0,00	0,00	10,68	11,60
14	0,00	0,00	9,62	8,88
15	0,00	0,00	9,14	7,17
16	0,00	0,00	7,58	5,32
17	0,00	0,00	7,01	4,09
18	0,00	0,00	5,15	3,56
19	0,00	0,00	5,83	3,26
20	0,00	0,00	6,59	3,49
21	0,00	0,00	7,29	4,01
22	0,00	0,00	7,53	3,07
23	0,00	0,00	8,04	4,00
24	0,00	0,00	4,41	1,95
25	0,00	0,00	8,38	3,84
26	0,00	0,00	5,52	2,41
27	0,00	0,00	8,50	4,22
28	0,00	0,00	7,64	4,28
29	0,00	0,00	9,63	5,69
30	0,00	0,00	7,79	4,29
31	0,00	0,00	8,79	4,40
32	0,00	0,00	9,60	5,41
33	0,00	0,00	7,32	2,63
34	0,00	0,00	6,18	4,49
35	0,00	0,00	4,62	2,75
36	0,00	0,00	4,12	2,57
37	0,00	0,00	6,72	4,54
38	0,00	0,00	7,54	5,17
39	0,00	0,00	6,76	4,05

·			·	
·			·	
·			·	
457	0,00	0,00	0,00	0,00
458	0,00	0,00	0,00	0,00
459	0,00	0,00	0,00	0,00
460	0,00	0,00	0,00	0,00
461	0,00	0,00	0,00	0,00
462	0,00	0,00	0,00	0,00
463	0,00	0,00	0,00	0,00
464	0,00	0,00	0,00	0,00
465	0,00	0,00	0,00	0,00
466	0,00	0,00	0,00	0,00
467	0,00	0,00	0,00	0,00
468	0,00	0,00	0,00	0,00
469	0,00	0,00	0,00	0,00
470	0,00	0,00	0,00	0,00
471	0,00	0,00	0,00	0,00
472	0,00	0,00	0,00	0,00
473	0,00	0,00	0,00	0,00
474	0,00	0,00	0,00	0,00
475	0,00	0,00	0,00	0,00
476	0,00	0,00	0,00	0,00
477	0,00	0,00	0,00	0,00
478	0,00	0,00	0,00	0,00
479	0,00	0,00	0,00	0,00
480	0,00	0,00	0,00	0,00
481	0,00	0,00	0,00	0,00
482	0,00	0,00	0,00	0,00
483	0,00	0,00	0,00	0,00
484	0,00	0,00	0,00	0,00
485	0,00	0,00	0,00	0,00
486	0,00	0,00	0,00	0,00
487	0,00	0,00	0,00	0,00
488	0,00	0,00	0,00	0,00
489	0,00	0,00	0,00	0,00
490	0,00	0,00	0,00	0,00
491	0,00	0,00	0,00	0,00
492	0,00	0,00	0,00	0,00
493	0,00	0,00	0,00	0,00
494	0,00	0,00	0,00	0,00
495	0,00	0,00	0,00	0,00
496	0,00	0,00	0,00	0,00
497	0,00	0,00	0,00	0,00
498	0,00	0,00	0,00	0,00
499	0,00	0,00	0,00	0,00

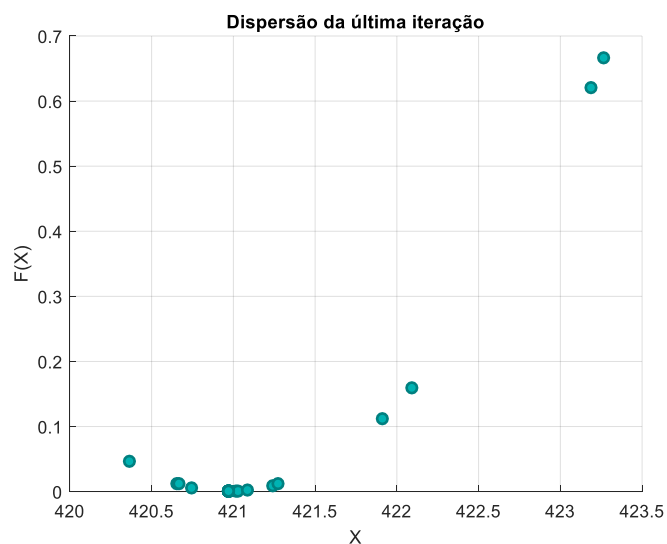
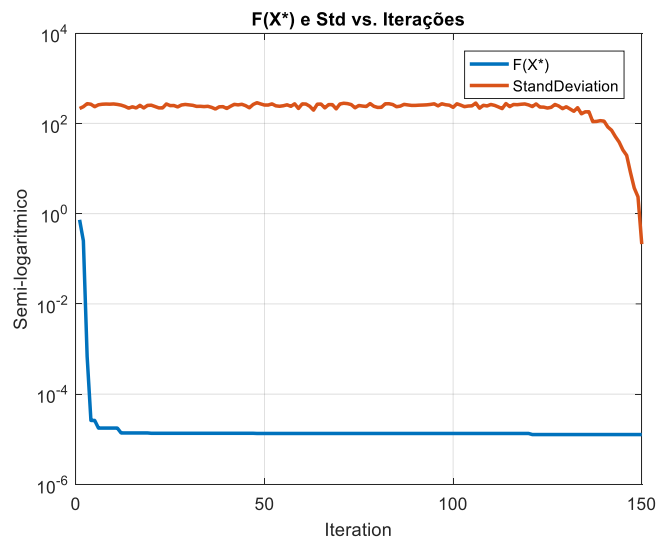
139	1,27E-05	420,9687487	90,6310243	60,47060367
140	1,27E-05	420,9687487	83,44226161	67,43534111
141	1,27E-05	420,9687487	74,68900708	55,5543933
142	1,27E-05	420,9687487	60,8932523	45,25813834
143	1,27E-05	420,9687487	40,9628531	26,43050251
144	1,27E-05	420,9687487	15,90428908	11,08912194
145	1,27E-05	420,9687487	14,69528067	7,783789421
146	1,27E-05	420,9687487	14,96747822	8,033781886
147	1,27E-05	420,9687487	9,885396342	5,883074773
148	1,27E-05	420,9687487	5,622516479	3,598039397
149	1,27E-05	420,9687487	1,961212679	1,045429878
150	1,27E-05	420,9687487	0,308706884	0,115615356



b=0,25

Iteração	F(X*)	X*	StdDev	Média
1	0,72991455	418,5621933	213,6656691	430,2834754
2	0,25003731	419,5606597	234,3070218	288,8994282

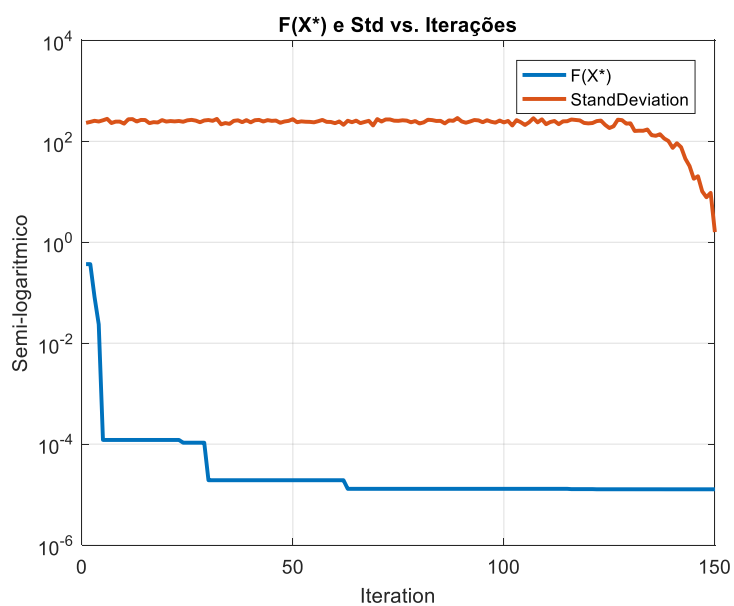
3	0,00068425	421,0416959	273,4534063	271,296947
4	2,61E-05	420,9790575	265,647021	366,4862658
5	2,61E-05	420,9790575	234,1217228	234,2365758
6	1,77E-05	420,9750342	258,3084926	261,5729732
7	1,77E-05	420,9750342	265,634303	349,6748446
8	1,77E-05	420,9750342	268,1056517	308,8244668
9	1,77E-05	420,9750342	266,4680395	372,5911131
10	1,77E-05	420,9750342	269,3206886	296,7415613
11	1,77E-05	420,9750342	263,2710174	240,9839254
12	1,38E-05	420,9716756	253,7367346	323,8512442
13	1,38E-05	420,9716756	238,4201601	257,61451
14	1,38E-05	420,9716756	217,4379588	216,9222637
15	1,38E-05	420,9716756	233,1518331	231,8256614
16	1,38E-05	420,9716756	219,7337907	210,3876218
17	1,38E-05	420,9716756	251,1325731	267,012356
18	1,38E-05	420,9716756	219,3748111	258,3600916
19	1,38E-05	420,9716756	250,2246596	339,1933693
20	1,36E-05	420,9661556	252,8035301	315,7494583
.			.	
.			.	
.			.	
131	1,27E-05	420,9686777	208,2716783	178,0983463
132	1,27E-05	420,9686777	185,3162036	138,2455847
133	1,27E-05	420,9686777	222,7725015	138,5722111
134	1,27E-05	420,9686777	162,8357989	98,62642551
135	1,27E-05	420,9686777	180,1805716	123,8770052
136	1,27E-05	420,9686777	180,8596787	107,0548665
137	1,27E-05	420,9686777	109,5787239	76,67805402
138	1,27E-05	420,9686777	110,5071136	70,12099942
139	1,27E-05	420,9686777	114,7621755	74,75609238
140	1,27E-05	420,9686777	112,2062339	82,6435115
141	1,27E-05	420,9686777	83,23566791	57,02469465
142	1,27E-05	420,9686777	70,38972973	36,26145659
143	1,27E-05	420,9686777	50,96232654	32,39102149
144	1,27E-05	420,9686777	38,50853822	23,6856438
145	1,27E-05	420,9686777	25,72052157	18,04620839
146	1,27E-05	420,9686777	19,52871341	13,27590546
147	1,27E-05	420,9686777	8,195175365	4,122772663
148	1,27E-05	420,9686777	3,701919833	2,751129549
149	1,27E-05	420,9686777	2,358520957	1,031022937
150	1,27E-05	420,9686777	0,211288091	0,040275078

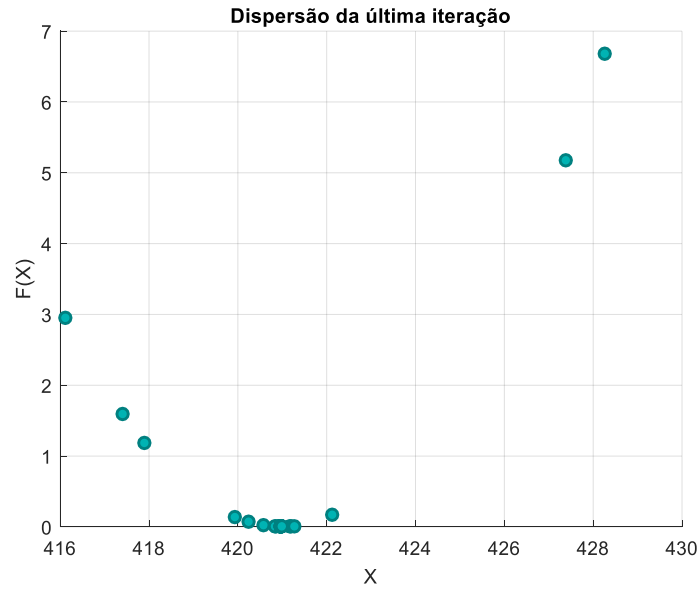


b=0,5

Iteração	F(X*)	X*	StdDev	Média
1	0,368557142	422,6773161	232,217278	333,0421924
2	0,368557142	422,6773161	242,1358104	409,0162573
3	0,082823969	421,7787422	255,0636743	369,0754155
4	0,023547683	421,4005848	246,7637699	347,9939632
5	0,000120983	420,9980365	261,0456816	357,7358714
6	0,000120983	420,9980365	278,7083423	375,6110307
7	0,000120983	420,9980365	230,2461788	279,9676533
8	0,000120983	420,9980365	245,3979053	258,5593487
9	0,000120983	420,9980365	245,7422777	290,425427
10	0,000120983	420,9980365	223,9285098	211,5261009
11	0,000120983	420,9980365	273,2438287	359,4536132
12	1,21E-04	420,9980365	275,4692282	263,7666443
13	1,21E-04	4,21E+02	246,6232508	222,6199796

14	1,21E-04	4,21E+02	265,213008	287,8077829
15	1,21E-04	4,21E+02	264,1485349	348,2672456
16	1,21E-04	4,21E+02	229,0674424	287,6357906
17	1,21E-04	4,21E+02	239,6090871	297,6811188
18	1,21E-04	4,21E+02	236,2306761	280,1235801
19	1,21E-04	4,21E+02	263,5905722	281,9965121
20	1,21E-04	4,21E+02	246,1322442	214,2141736
.			.	
.			.	
.			.	
131	1,27E-05	4,21E+02	1,60E+02	9,04E+01
132	1,27E-05	4,21E+02	1,62E+02	9,01E+01
133	1,27E-05	4,21E+02	1,62E+02	1,05E+02
134	1,27E-05	4,21E+02	1,71E+02	1,34E+02
135	1,27E-05	4,21E+02	132,446706	68,36913524
136	1,27E-05	4,21E+02	128,5933634	55,4790181
137	1,27E-05	4,21E+02	138,181859	67,96526745
138	1,27E-05	4,21E+02	113,4095826	61,51503286
139	1,27E-05	4,21E+02	101,3110023	54,17766666
140	1,27E-05	4,21E+02	74,1141859	37,99024199
141	1,27E-05	4,21E+02	91,63590225	38,56973173
142	1,27E-05	4,21E+02	76,45130312	43,13207499
143	1,27E-05	4,21E+02	45,19696419	25,64170287
144	1,27E-05	4,21E+02	32,32774922	15,82045265
145	1,27E-05	4,21E+02	18,15501153	11,30047688
146	1,27E-05	4,21E+02	20,29385375	11,83871104
147	1,27E-05	4,21E+02	10,19678303	7,23289362
148	1,27E-05	4,21E+02	7,781929044	3,585253642
149	1,27E-05	4,21E+02	9,530066532	2,998336854
150	1,27E-05	4,21E+02	1,590457897	0,600738228

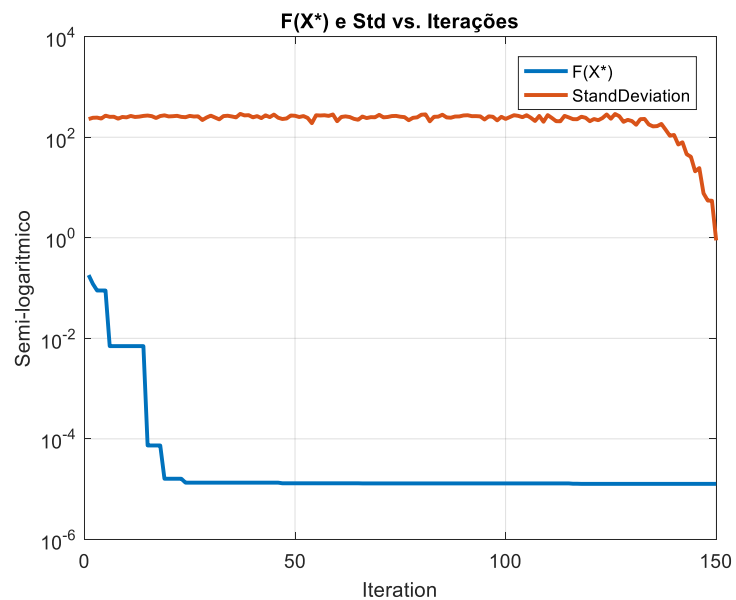


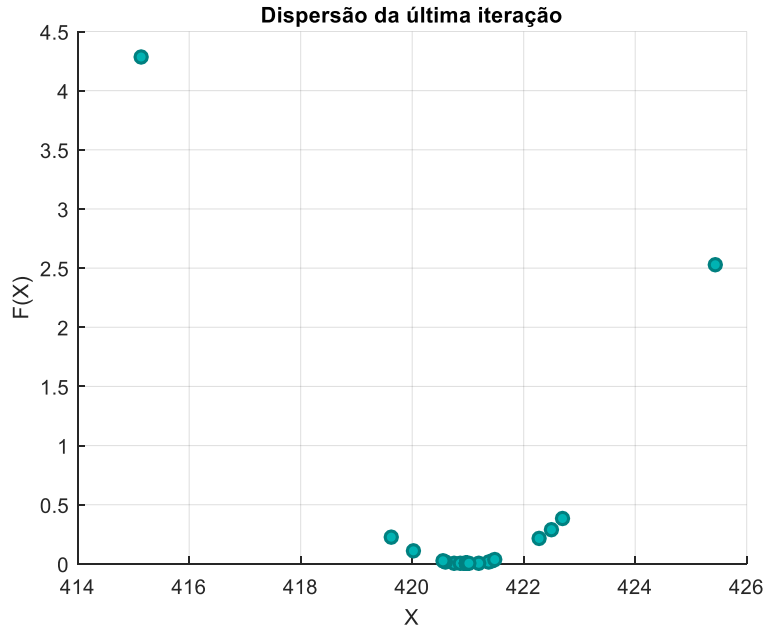


b=0,75

Iteração	F(X*)	X*	StdDev	Média
1	0,181040073	419,7706643	229,7183651	361,0685619
2	0,121122105	419,9888505	243,8122915	345,2734424
3	0,08938251	421,8102024	245,5253616	341,8062542
4	0,08938251	421,8102024	235,180815	273,2095631
5	0,08938251	421,8102024	268,5353731	364,011025
6	0,00699712	420,7334673	254,500851	297,4681883
7	0,00699712	420,7334673	255,4573164	301,7016358
8	0,00699712	420,7334673	233,7403645	246,9935101
9	0,00699712	420,7334673	252,8270256	321,7189773
10	0,00699712	420,7334673	248,4594472	344,0068094
11	0,00699712	420,7334673	264,9417241	293,1199495
12	0,00699712	420,7334673	252,9610483	255,3239223
13	0,00699712	420,7334673	256,6511321	310,6133294
14	0,00699712	420,7334673	265,3550665	387,4871904
15	7,39E-05	420,9467315	269,8811311	251,8901397
16	7,39E-05	420,9467315	262,4474988	333,7327897
17	7,39E-05	420,9467315	241,0584898	265,1961147
18	7,39E-05	420,9467315	263,7562378	257,4069881
19	1,61E-05	420,9739149	272,4690411	316,6418514
20	1,61E-05	420,9739149	259,2652853	293,9662162
:			:	
:			:	
:			:	
131	1,27E-05	420,9686286	176,9218364	108,965107
132	1,27E-05	420,9686286	228,6574737	157,6552142
133	1,27E-05	420,9686286	231,019747	180,3764906
134	1,27E-05	420,9686286	179,3120644	99,46838428

135	1,27E-05	420,9688612	164,3215341	81,28318584
136	1,27E-05	420,9688612	166,563558	107,6213213
137	1,27E-05	420,9688612	183,9239096	121,5233389
138	1,27E-05	420,9688612	141,0727207	97,7853676
139	1,27E-05	420,9688612	107,1997217	84,61469092
140	1,27E-05	420,9688612	110,9741777	84,44230358
141	1,27E-05	420,9688612	71,66736	51,53912277
142	1,27E-05	420,9688612	79,27055389	40,11405283
143	1,27E-05	420,9688612	45,78343181	26,15735157
144	1,27E-05	420,9688612	40,85428894	22,63511735
145	1,27E-05	420,9688612	20,99121246	13,62997583
146	1,27E-05	420,9688612	24,33764936	11,69808914
147	1,27E-05	420,9688612	7,662796701	6,407805147
148	1,27E-05	420,9688612	5,501249763	3,575117608
149	1,27E-05	420,9688612	5,452940274	2,063425291
150	1,27E-05	420,9688612	0,887213033	0,272497225

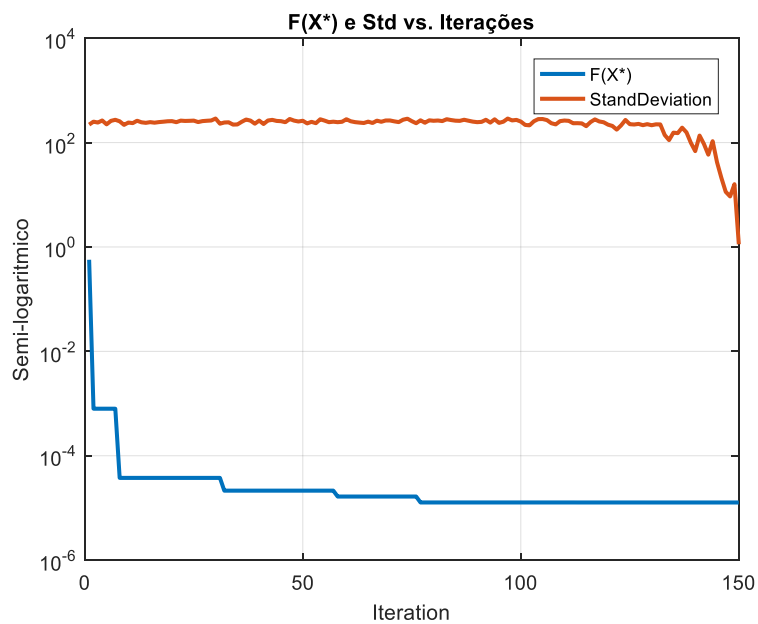


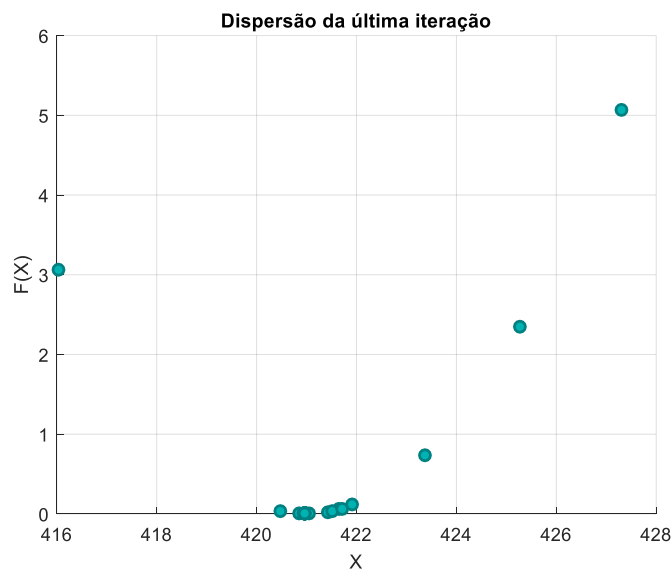


b=1

Iteração	F(X*)	X*	StdDev	Média
1	0,568670878	423,0909944	220,9151197	321,7395697
2	0,000796454	420,8899353	251,718193	300,7875294
3	0,000796454	420,8899353	241,9523529	219,5642983
4	0,000796454	420,8899353	265,0587698	329,1470653
5	0,000796454	420,8899353	223,553155	389,1438941
6	0,000796454	420,8899353	260,5026893	326,5313208
7	0,000796454	420,8899353	273,1523722	378,4452591
8	3,77E-05	420,9546907	255,6405401	308,3821083
9	3,77E-05	420,9546907	218,5543673	406,0852129
10	3,77E-05	420,9546907	242,1085614	335,2459043
11	3,77E-05	420,9546907	235,9513145	235,5567176
12	3,77E-05	420,9546907	262,0415602	358,5863626
13	3,77E-05	420,9546907	244,5473098	234,6392214
14	3,77E-05	420,9546907	238,9497052	190,5026205
15	3,77E-05	420,9546907	246,3001024	259,6275283
16	3,77E-05	420,9546907	240,5271716	270,686417
17	3,77E-05	420,9546907	246,7243383	326,0820444
18	3,77E-05	420,9546907	251,126909	251,6983477
19	3,77E-05	420,9546907	256,0785504	277,7407692
20	3,77E-05	420,9546907	257,4703628	293,4191206
.
.
.
131	1,27E-05	420,9688801	223,7276931	170,8534716
132	1,27E-05	420,9687432	222,5522798	151,8588574
133	1,27E-05	420,9687432	139,8570552	75,01158981

134	1,27E-05	420,9687432	111,6553045	46,58323496
135	1,27E-05	420,9687432	154,9487559	110,1450965
136	1,27E-05	420,9687432	151,7195233	95,50389873
137	1,27E-05	420,9687432	193,0305531	110,4872863
138	1,27E-05	420,9687432	156,6563405	125,8816715
139	1,27E-05	420,9687432	99,10895747	63,20009667
140	1,27E-05	420,9687432	68,5996976	44,16096719
141	1,27E-05	420,9687432	136,1966863	69,57274303
142	1,27E-05	420,9687432	94,1603995	47,47459006
143	1,27E-05	420,9687432	58,70382471	43,65493092
144	1,27E-05	420,9687432	106,2444672	59,4543749
145	1,27E-05	420,9687432	42,08488193	29,28676959
146	1,27E-05	420,9687432	21,11779386	13,24094974
147	1,27E-05	420,9687432	11,38720889	5,795930119
148	1,27E-05	420,9687432	9,292771253	3,834775676
149	1,27E-05	420,9687432	15,95242362	3,993811622
150	1,27E-05	420,9687432	1,125097588	0,384887057

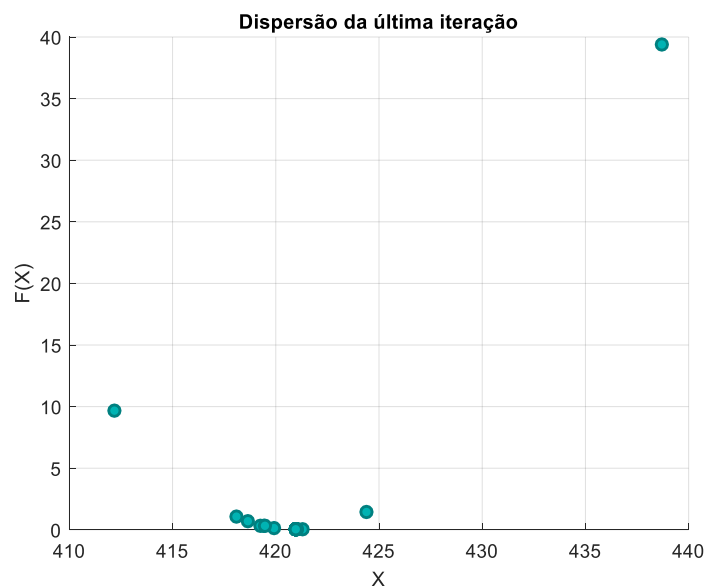
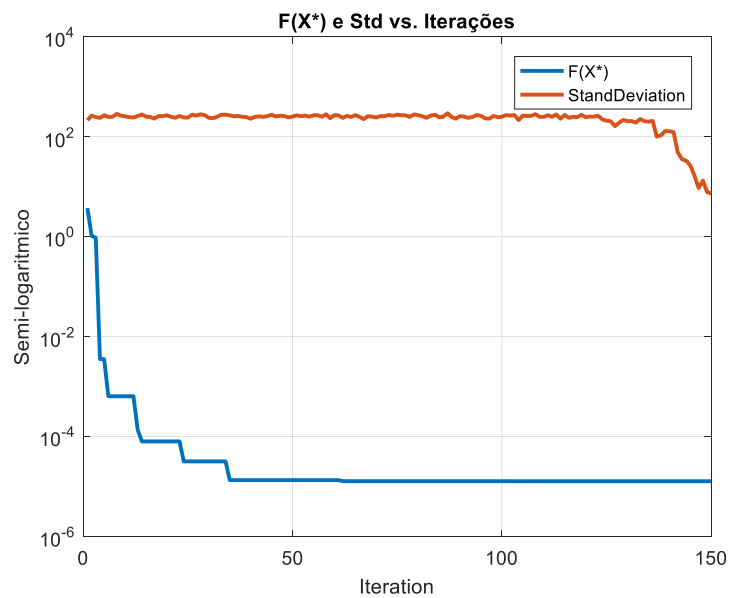




b=1,25

Iteração	F(X*)	X*	StdDev	Média
1	3,725346232	426,4006068	213,240718	402,8264904
2	1,035131166	423,831895	264,0874166	297,1031941
3	0,948958713	418,2244483	245,537231	263,0087073
4	0,003533897	420,8016925	236,5775524	348,5388017
5	0,003533897	420,8016925	267,7062911	336,5486416
6	0,000638399	421,0391615	247,4361536	240,1407784
7	0,000638399	421,0391615	248,5970467	346,3810185
8	0,000638399	421,0391615	285,3977251	289,2309574
9	0,000638399	421,0391615	262,480387	359,2673753
10	0,000638399	421,0391615	255,3498525	334,0226614
11	0,000638399	421,0391615	244,4921957	275,6741124
12	0,000638399	421,0391615	241,2865103	301,7397732
13	0,000137511	420,9372993	257,475766	364,6699846
14	7,97E-05	420,9457023	278,1279697	325,0667056
15	7,97E-05	420,9457023	250,6997008	237,8521803
16	7,97E-05	420,9457023	248,0226463	305,0275165
17	7,97E-05	420,9457023	228,8164732	300,7698243
18	7,97E-05	420,9457023	258,3693256	375,0596437
19	7,97E-05	420,9457023	257,0348592	272,0828651
20	7,97E-05	420,9457023	266,4691366	250,7716256
.		.		
.		.		
.		.		
131	1,27E-05	420,9690447	204,3407758	164,1211298
132	1,27E-05	420,9690447	190,4273673	134,3662748
133	1,27E-05	420,9690447	226,3106496	190,243343
134	1,27E-05	420,9690447	204,4204705	144,5819506
135	1,27E-05	420,9689626	198,8343639	124,6445678

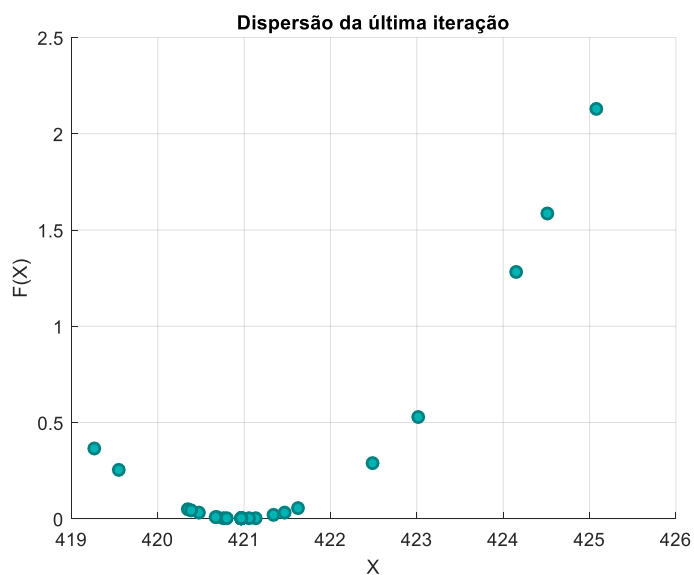
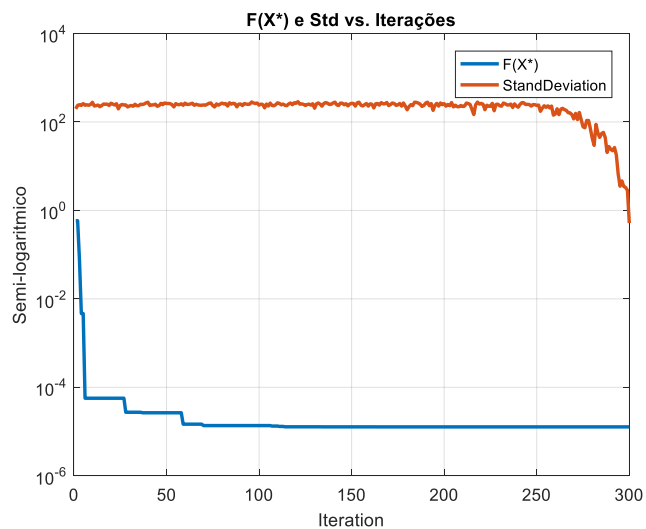
136	1,27E-05	420,9689626	206,9674745	118,9474571
137	1,27E-05	420,9689626	100,3016242	61,11844381
138	1,27E-05	420,9689626	106,1624139	52,15535923
139	1,27E-05	420,9689626	129,4909053	53,1221779
140	1,27E-05	420,9689626	128,3577768	68,28470553
141	1,27E-05	420,9689626	122,9578565	51,08569259
142	1,27E-05	420,9689626	48,55582115	32,33104386
143	1,27E-05	420,9689626	35,356118	21,08131678
144	1,27E-05	420,9689626	33,10972987	17,18132969
145	1,27E-05	420,9689626	26,54994197	13,92425314
146	1,27E-05	420,9689626	16,46693717	8,348653918
147	1,27E-05	420,9689626	9,376049239	6,226892925
148	1,27E-05	420,9689626	13,16715158	4,187878122
149	1,27E-05	420,9689626	7,773533251	2,919850879
150	1,27E-05	420,9689626	7,316508083	1,777933902



Os seguintes resultados apresentados referem-se aos valores $b=\{0.125, 0.25, 0.5\}$ utilizando a função de Schwefel. O número de gerações utilizado foi de 300.

b=0,125				
Iteração	F(X*)	X*	StdDev	Média
1	0,58467339	423,1206427	197,7929974	320,6936388
2	0,58467339	423,1206427	237,4222589	362,3573422
3	0,074163199	421,7352214	245,3510311	321,4793793
4	0,004663259	421,1607168	236,664915	304,7800172
5	0,004663259	421,1607168	260,3426835	312,1748818
6	5,66E-05	420,9873943	238,7714185	338,8957439
7	5,66E-05	420,9873943	244,5002336	310,9900241
8	5,66E-05	420,9873943	238,6895714	264,4689181
9	5,66E-05	420,9873943	248,5076134	299,5547948
10	5,66E-05	420,9873943	278,2414443	317,3281821
11	5,66E-05	420,9873943	229,5183767	318,8786345
12	5,66E-05	420,9873943	234,5423786	236,5948408
13	5,66E-05	420,9873943	240,9998917	261,511667
14	5,66E-05	420,9873943	221,3417323	279,0068873
15	5,66E-05	420,9873943	234,6260277	250,5399088
16	5,66E-05	420,9873943	254,4515767	318,5148456
17	5,66E-05	420,9873943	251,7518941	257,7632709
18	5,66E-05	420,9873943	252,5428935	293,2358293
19	5,66E-05	420,9873943	235,4695545	280,0240125
20	5,66E-05	420,9873943	264,5870132	304,1364622
.
281	1,27E-05	420,968746	29,55101327	15,52774004
282	1,27E-05	420,968746	88,21040374	63,45878215
283	1,27E-05	420,968746	56,86161803	39,99628314
284	1,27E-05	420,968746	44,72677355	24,71230674
285	1,27E-05	420,968746	54,5506915	39,79932974
286	1,27E-05	420,968746	58,10565121	39,03504985
287	1,27E-05	420,968746	44,54702186	33,53859269
288	1,27E-05	420,968746	20,47858825	13,28419141
289	1,27E-05	420,968746	27,75623129	15,0124971
290	1,27E-05	420,968746	24,03920793	12,34101258
291	1,27E-05	420,968746	22,37185943	12,44029027
292	1,27E-05	420,968746	26,476048	16,36937452
293	1,27E-05	420,968746	17,86117714	9,612704651
294	1,27E-05	420,968746	6,633422559	3,672838246
295	1,27E-05	420,968746	3,523996164	1,726471513
296	1,27E-05	420,968746	4,639230774	3,466167979
297	1,27E-05	420,968746	3,475389681	2,255746049

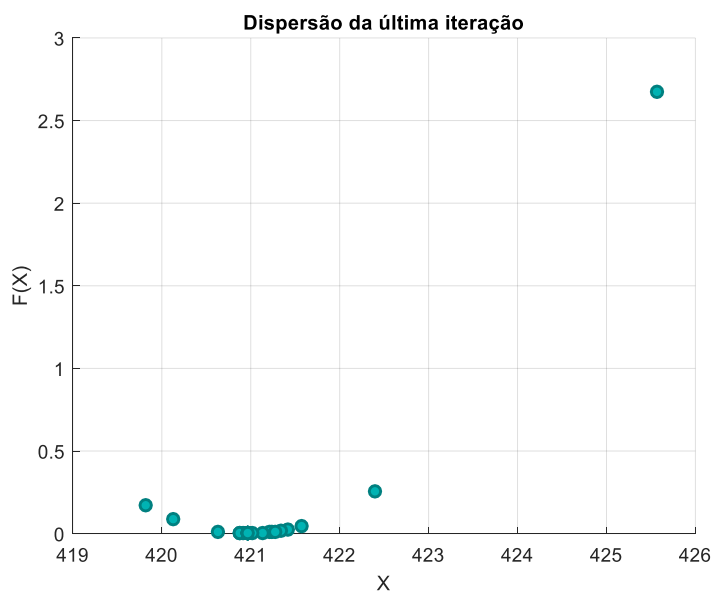
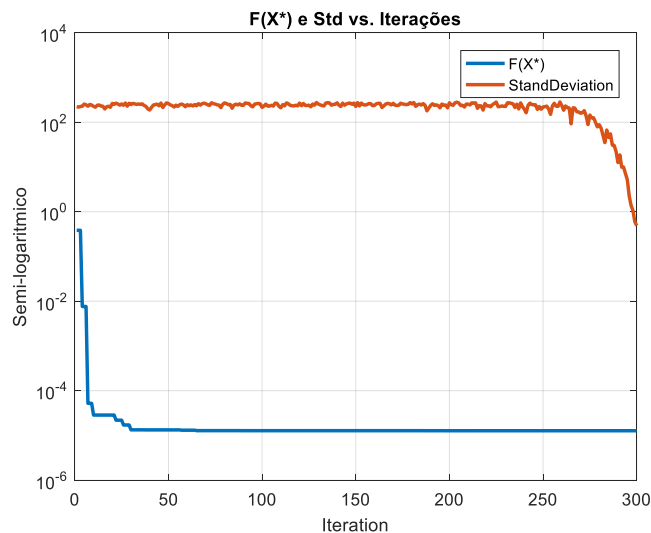
298	1,27E-05	420,968746	3,30213562	1,812522577
299	1,27E-05	420,968746	2,847682676	1,030334726
300	1,27E-05	420,968746	0,517366574	0,2233194



b=0,25

Iteração	F(X*)	X*	StdDev	Média
1	0,383859466	419,2239019	223,2236234	389,450917
2	0,383859466	419,2239019	217,9838957	400,3302264
3	0,383859466	419,2239019	224,6282451	327,4337724
4	0,007608547	420,7233845	226,8745512	293,8534934
5	0,007608547	420,7233845	254,6396976	308,6957995
6	0,007608547	420,7233845	245,3368162	371,8297971
7	5,21E-05	420,9510807	227,9174374	292,5299203
8	5,21E-05	420,9510807	249,7713478	290,2074818
9	5,21E-05	420,9510807	242,1646667	316,7486315

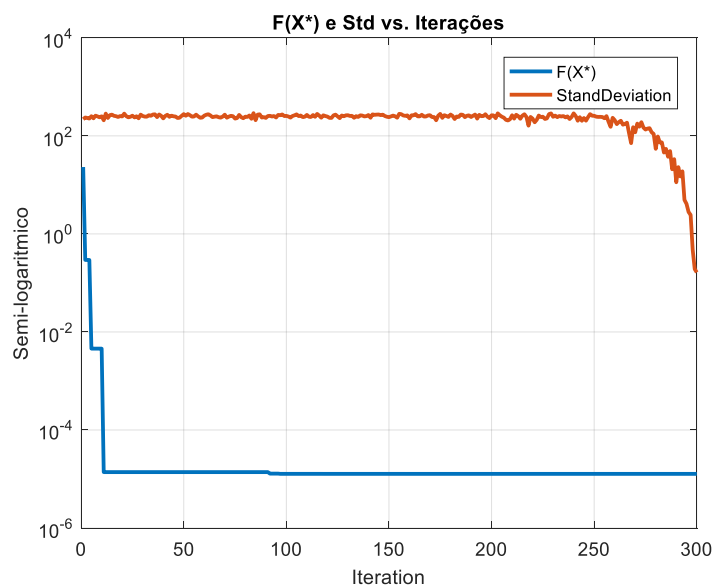
10	2,85E-05	420,9575625	226,5968903	336,8041263
11	2,85E-05	420,9575625	216,5841125	365,583967
12	2,85E-05	420,9575625	239,8889618	380,1719651
13	2,85E-05	420,9575625	242,4531095	341,067106
14	2,85E-05	420,9575625	229,9905382	389,5344142
15	2,85E-05	420,9575625	228,418125	337,8165445
16	2,85E-05	420,9575625	197,8157406	252,7580622
17	2,85E-05	420,9575625	221,0354563	230,9414598
18	2,85E-05	420,9575625	228,184879	320,3910402
19	2,85E-05	420,9575625	215,1789491	286,6466997
20	2,85E-05	420,9575625	263,1200917	285,8939878
.			.	
.			.	
.			.	
281	1,27E-05	420,9687743	73,6210668	41,22177346
282	1,27E-05	420,9687743	51,09626799	29,84607808
283	1,27E-05	420,9687743	35,02514473	23,73433406
284	1,27E-05	420,9687743	66,85146486	40,91376016
285	1,27E-05	420,9687743	45,66307308	29,20906955
286	1,27E-05	420,9687743	54,93214994	34,20093336
287	1,27E-05	420,9687743	30,87527838	20,35992662
288	1,27E-05	420,9687743	30,1498168	18,12211876
289	1,27E-05	420,9687743	22,08022976	14,82377691
290	1,27E-05	420,9687743	12,56317415	6,361804105
291	1,27E-05	420,9687681	18,61605477	9,464333362
292	1,27E-05	420,9687681	9,891680099	5,736893046
293	1,27E-05	420,9687681	9,93416363	5,522820648
294	1,27E-05	420,9687681	7,138603069	4,114808552
295	1,27E-05	420,9687681	5,179568555	3,257286119
296	1,27E-05	420,9687681	2,250976951	1,398813156
297	1,27E-05	420,9687681	1,383577904	1,099697602
298	1,27E-05	420,9687681	1,064114525	0,705524206
299	1,27E-05	420,9687681	0,599255906	0,318426959
300	1,27E-05	420,9687681	0,487434489	0,110883566

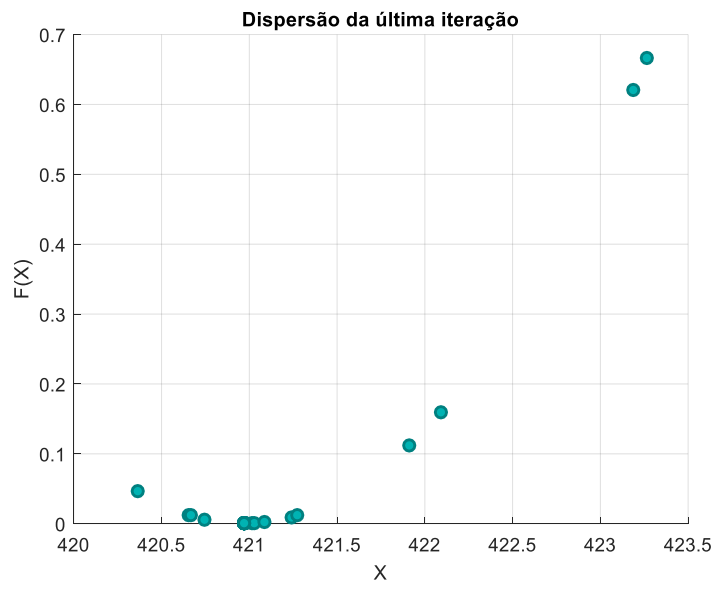


b=0,5

Iteração	F(X*)	X*	StdDev	Média
1	23,10146457	407,3381093	218,6378888	364,6927575
2	0,293856843	419,4421992	236,8919228	381,5463567
3	0,293856843	419,4421992	231,6825179	336,7361394
4	0,293856843	419,4421992	225,5691846	356,6581607
5	0,004564074	421,1586587	251,6708067	363,8523639
6	0,004564074	421,1586587	227,700562	259,2097736
7	4,56E-03	421,1586587	258,0581707	292,6316657
8	4,56E-03	421,1586587	249,1443678	342,1239786
9	4,56E-03	421,1586587	238,5605978	284,089914
10	4,56E-03	421,1586587	250,9241819	313,318738
11	1,38E-05	420,9716893	207,7408301	215,6963275
12	1,38E-05	420,9716893	284,3565622	353,5652643

13	1,38E-05	420,9716893	231,3187681	233,398251
14	1,38E-05	420,9716893	264,7177708	275,1634043
15	1,38E-05	420,9716893	270,9847572	242,9470101
16	1,38E-05	420,9716893	256,3773464	282,0422198
17	1,38E-05	420,9716893	251,7661552	317,4376684
18	1,38E-05	420,9716893	242,6910696	325,3625448
19	1,38E-05	420,9716893	253,3819693	264,5524413
20	1,38E-05	420,9716893	248,8036611	238,7798984
.
.
.
281	1,27E-05	420,9687328	96,95677716	62,19551194
282	1,27E-05	420,9687328	73,34357222	41,48059157
283	1,27E-05	420,9687328	73,38324733	37,71638861
284	1,27E-05	420,9687328	45,65300837	25,56061312
285	1,27E-05	420,9687328	54,29771177	33,81174234
286	1,27E-05	420,9687328	37,44513341	21,08038692
287	1,27E-05	420,9687328	48,82946089	18,98696759
288	1,27E-05	420,9687328	20,82035266	13,23300263
289	1,27E-05	420,9687328	33,44408468	17,62743757
290	1,27E-05	420,9687328	11,30035259	7,438934846
291	1,27E-05	420,9687328	23,00914127	13,06292786
292	1,27E-05	420,9687328	14,85572898	10,58125213
293	1,27E-05	420,9687328	18,90157655	10,69901506
294	1,27E-05	420,9687328	4,937238091	3,323041
295	1,27E-05	420,9687328	4,097763855	2,64540002
296	1,27E-05	420,9687328	2,795611293	1,607048091
297	1,27E-05	420,9687328	2,436898682	1,414183802
298	1,27E-05	420,9687328	0,477095607	0,283152739
299	1,27E-05	420,9687328	0,191671575	0,113201871
300	1,27E-05	420,9687328	0,163911156	0,055312969





VII. PARAMETRIZAÇÃO DA METAMODELAÇÃO (MÉTODO KRIGING)

Neste apêndice encontram-se os resultados feitos ao parâmetro L da função de Gauss utilizada em cada metamodelo estudado nesta Dissertação.

A. PLACA FINA

Os resultados apresentados referem-se à aproximação da função da deformada da placa utilizando o método Kriging para a espessura constante de $h=2\text{mm}$. A os dados de treino utilizados foram obtidos com a aplicação de elementos finitos da placa de Kant.

Notas: Todos os campos identificados com “x” indicam que não foi encontrado um máximo ou um mínimo no domínio ou existem mais do que um.

1. 100% DOS PONTOS

Neste estudo consideraram-se todos os nós da malha 20×20 da placa de Kant.

Nº pontos no bordo = todos								
Nº pontos no interior = todos								
L=50	Wmax	Xmax	Ymax	Wmin	Xmin	Ymin	Dif(%)	MSE
Simples	2,255	50	50	x	x	x	-4,783	0,079
Comum	2,153	50	50	x	x	x	-9,075	0,093
Universal	2,153	50	50	x	x	x	-9,075	0,093

Obs: L é média de (x,y)

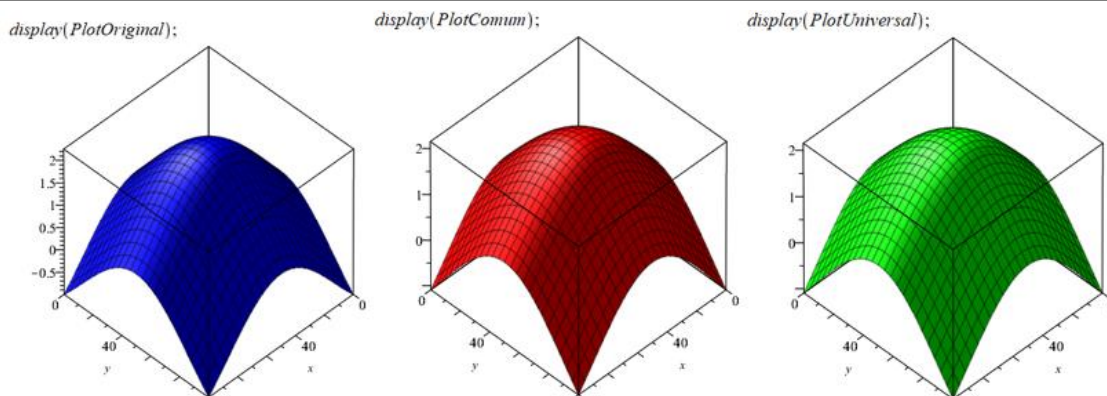


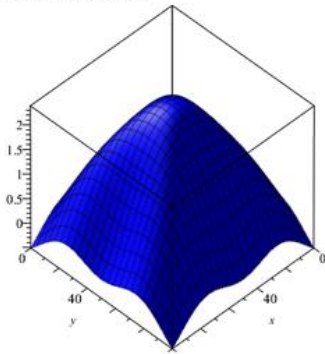
Figura VII.1. $W(100\%)$ com $L=50$: (esq.) Kriging simples, (meio) Kriging comum, (dir.) Kriging Universal

Nº pontos no bordo = todos								
Nº pontos no interior = todos								
L=25	Wmax	Xmax	Ymax	Wmin	Xmin	Ymin	Dif(%)	MSE
Simples	2,390	50	50	x	x	x	0,939	0,017
Comum	2,418	50	50	x	x	x	2,119	0,017

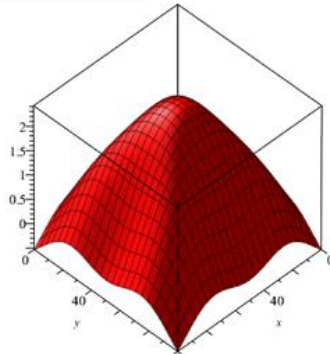
Universal	2,418	50	50	x	x	x	2,119	0,017
-----------	-------	----	----	---	---	---	-------	-------

Obs:

display(PlotOriginal);



display(PlotComum);



display(PlotUniversal);

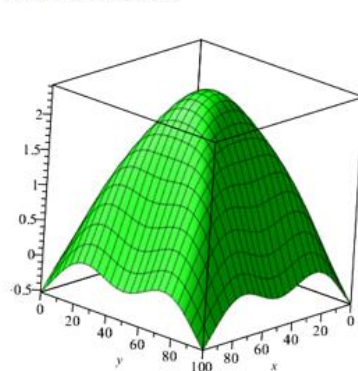


Figura VII.2. W(100%) com L=25: esq.) Kriging simples, meio) Kriging comum, dir.) Kriging Universal

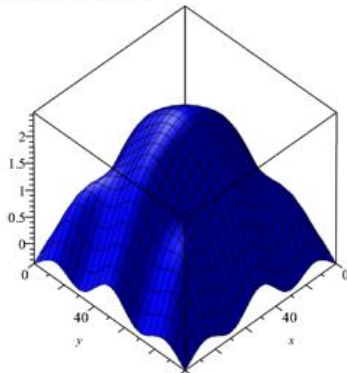
Nº pontos no bordo = todos

Nº pontos no interior = todos

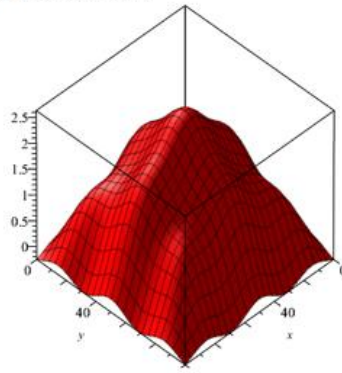
L=15	Wmax	Xmax	Ymax	Wmin	Xmin	Ymin	Dif(%)	MSE
Simples	2,446	50	50	x	x	x	3,272	0,020
Comum	2,633	50	50	x	x	x	11,182	0,018
Universal	2,633	50	50	x	x	x	11,182	0,018

Obs:

display(PlotOriginal);



display(PlotComum);



display(PlotUniversal);

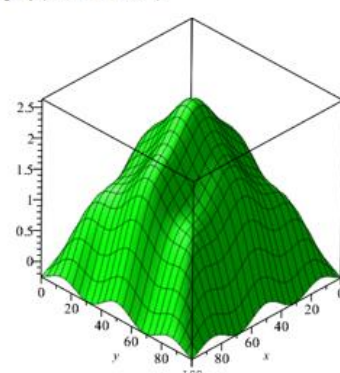


Figura VII.3. W(100%) com L=15: esq.) Kriging simples, meio) Kriging comum, dir.) Kriging Universal

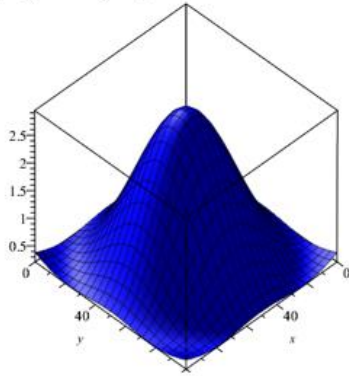
Nº pontos no bordo = todos

Nº pontos no interior = todos

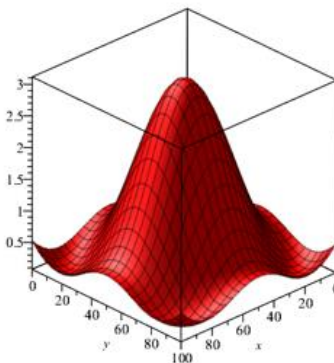
L=35	Wmax	Xmax	Ymax	Wmin	Xmin	Ymin	Dif(%)	MSE
Simples	2,943	50	50	x	x	x	24,263	0,046
Comum	3,117	50	50	x	x	x	31,617	0,098
Universal	3,117	50	50	x	x	x	31,617	0,098

Obs:

`display(PlotOriginal);`



`display(PlotComum);`



`display(PlotUniversal);`

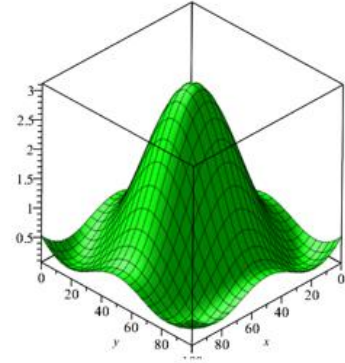
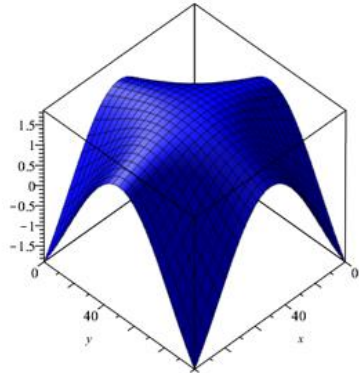


Figura VII.4. W(100%) com L=35: esq.) Kriging simples, meio) Kriging comum, dir.) Kriging Universal

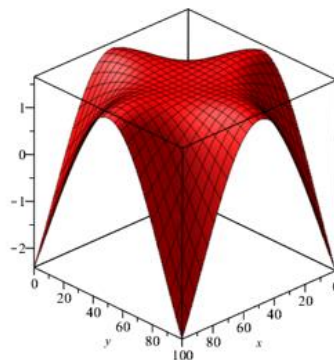
Nº pontos no bordo = todos								
Nº pontos no interior = todos								
L=45	Wmax	Xmax	Ymax	Wmin	Xmin	Ymin	Dif(%)	MSE
Simple	1,858	50	50	x	x	x	-21,555	0,342
Comum	1,551	50	50	x	x	x	-34,490	0,529
Universal	1,551	50	50	x	x	x	-34,490	0,529

Obs:

`display(PlotOriginal);`



`display(PlotComum);`



`display(PlotUniversal);`

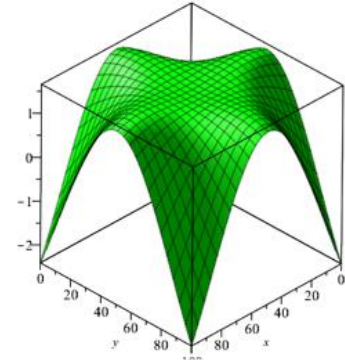


Figura VII.5. W(100%) com L=45: esq.) Kriging simples, meio) Kriging comum, dir.) Kriging Universal

Nº pontos no bordo = todos								
Nº pontos no interior = todos								
L=65	Wmax	Xmax	Ymax	Wmin	Xmin	Ymin	Dif(%)	MSE
Simple	2,433	50	50	x	x	x	2,745	0,067
Comum	2,292	50	50	x	x	x	-3,197	0,057
Universal	2,292	50	50	x	x	x	-3,197	0,057

Obs:

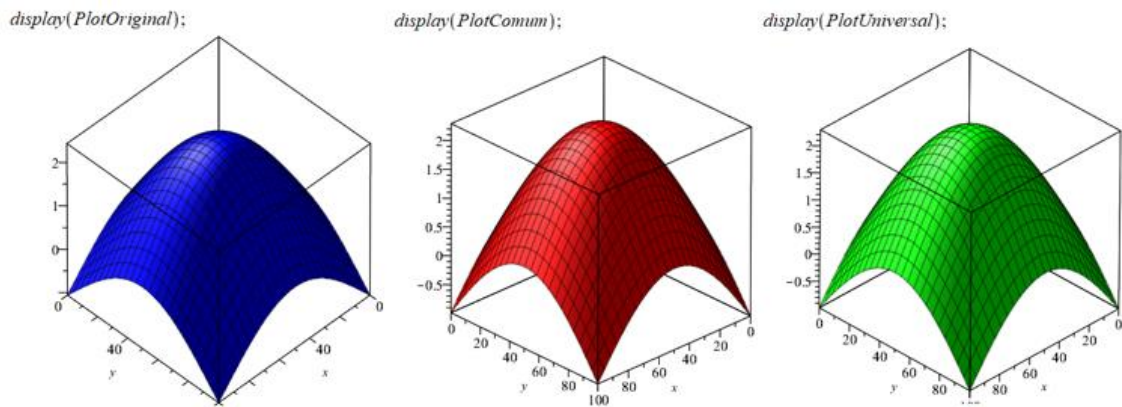


Figura VII.6. W(100%) com L=65: esq.) Kriging simples, meio) Kriging comum, dir.) Kriging Universal

Nº pontos no bordo = todos								
Nº pontos no interior = todos								
L=80	Wmax	Xmax	Ymax	Wmin	Xmin	Ymin	Dif(%)	MSE
Simple	2,811	50	50	x	x	x	18,711	0,213
Comum	2,427	50	50	x	x	x	2,486	0,088
Universal	2,427	50	50	x	x	x	2,486	0,088

Obs:

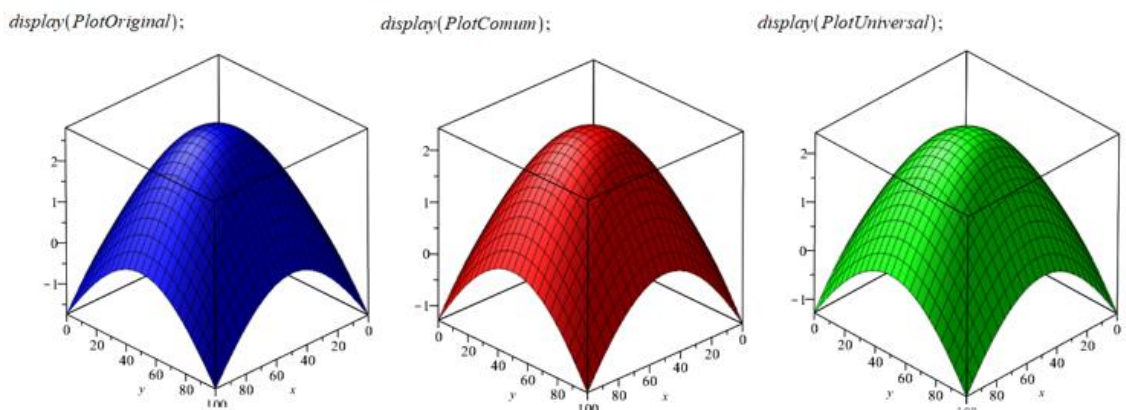
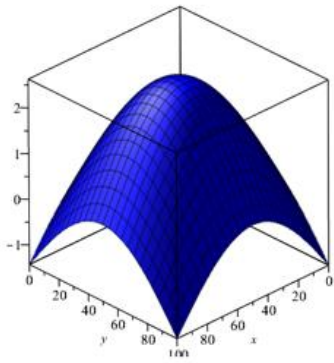


Figura VII.7. W(100%) com L=80: esq.) Kriging simples, meio) Kriging comum, dir.) Kriging Universal

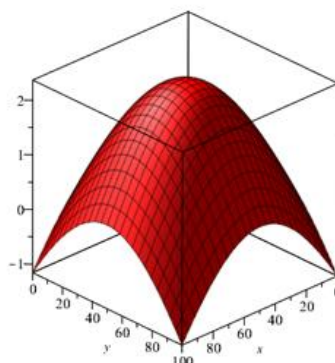
Nº pontos no bordo = todos								
Nº pontos no interior = todos								
L=75	Wmax	Xmax	Ymax	Wmin	Xmin	Ymin	Dif(%)	MSE
Simple	2,630	50	50	x	x	x	11,059	0,129
Comum	2,367	50	50	x	x	x	-0,041	0,072
Universal	2,367	50	50	x	x	x	-0,041	0,072

Obs:

`display(PlotOriginal);`



`display(PlotComum);`



`display(PlotUniversal);`

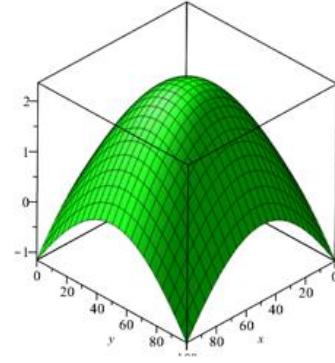


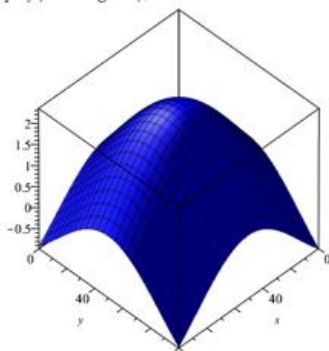
Figura VII.8. W(100%) com L=75: esq.) Kriging simples, meio) Kriging comum, dir.) Kriging Universal

2. 50% DOS PONTOS DO INTERIOR DA PLACA

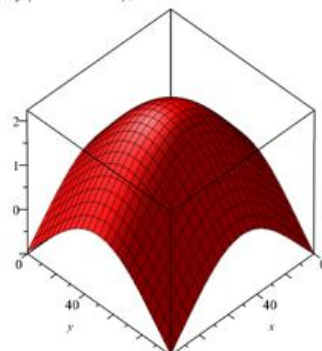
Neste estudo consideraram-se todos os nós do bordo da malha 20x20, 50% dos pontos do interior da placa relativamente ao estudo em 1 e o nó da deformada máxima da placa de Kant.

Nº pontos no bordo = todos									
Nº pontos no interior = 181+1									
L=50,02	Wmax	Xmax	Ymax	Wmin	Xmin	Ymin	Dif(%)	MSE 100%	MSE 50%
Simples	2,352	50,247	50,132	-0,916	0	0	-0,677	0,066	0,087
Comum	2,238	50,279	50,149	-0,947	0	0	-5,458	0,070	0,093
Universal	2,246	47,617	48,639	-0,908	100	100	-5,132	0,074	0,097
Obs:		L é média de (x,y)							

`display(PlotOriginal);`



`display(PlotComum);`



`display(PlotUniversal);`

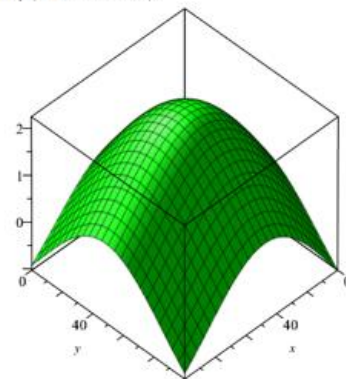


Figura VII.9. W(50%) com L=50,02: esq.) Kriging simples, meio) Kriging comum, dir.) Kriging Universal

Nº pontos no bordo = todos									
Nº pontos no interior = 181+1									
L=25	Wmax	Xmax	Ymax	Wmin	Xmin	Ymin	Dif(%)	MSE 100%	MSE 50%
Simples	2,145	51,436	39,933	-0,440	50,366	100	-9,418	0,047	0,049

Comum	2,203	50,170	43,561	-0,385	50,344	100	-6,972	0,037	0,039
Universal	2,189	50,018	47,741	-0,337	50,271	100	-7,567	0,034	0,036

Obs:

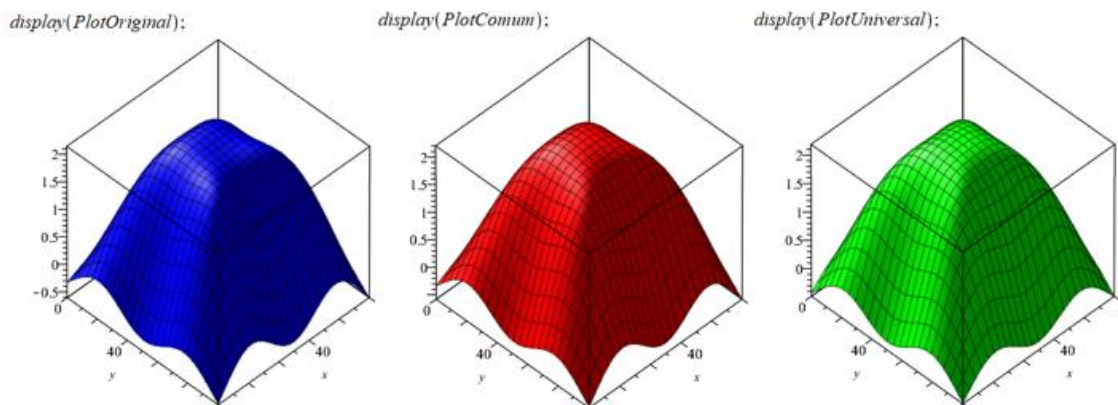


Figura VII.10. W(50%) com L=25: esq.) Kriging simples, meio) Kriging comum, dir.) Kriging Universal

Nº pontos no bordo = todos									
Nº pontos no interior = 181+1									
L=15	Wmax	Xmax	Ymax	Wmin	Xmin	Ymin	Dif(%)	MSE 100%	MSE 50%
Simple	5,899	100	100	-2,767	49,933	49,970	149,108	13,803	13,615
Comum	5,121	49,967	49,982	-2,164	57,354	100	116,253	2,600	2,527
Universal	5,121	49,962	49,981	-2,162	57,350	100	116,252	2,599	2,526

Obs:

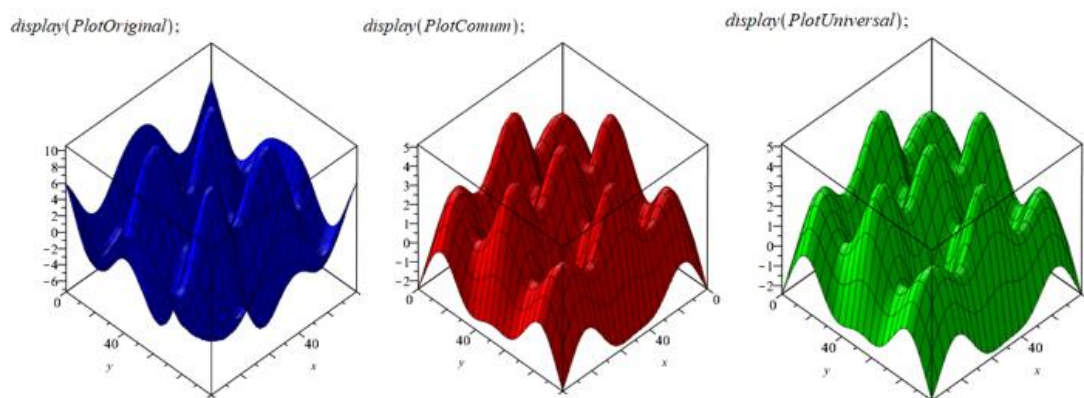


Figura VII.11. W(50%) com L=15: esq.) Kriging simples, meio) Kriging comum, dir.) Kriging Universal

Nº pontos no bordo = todos									
Nº pontos no interior = 181+1									
L=35	Wmax	Xmax	Ymax	Wmin	Xmin	Ymin	Dif(%)	MSE 100%	MSE 50%
Simple	3,030	50,110	49,956	-9,01E-02	0	48,694	27,937	0,052	0,052
Comum	3,079	50,092	49,963	-1,10E-03	0	46,356	30,027	0,059	0,057
Universal	3,079	50,075	49,970	-1,86E-03	0	46,338	30,027	0,059	0,057

Obs:

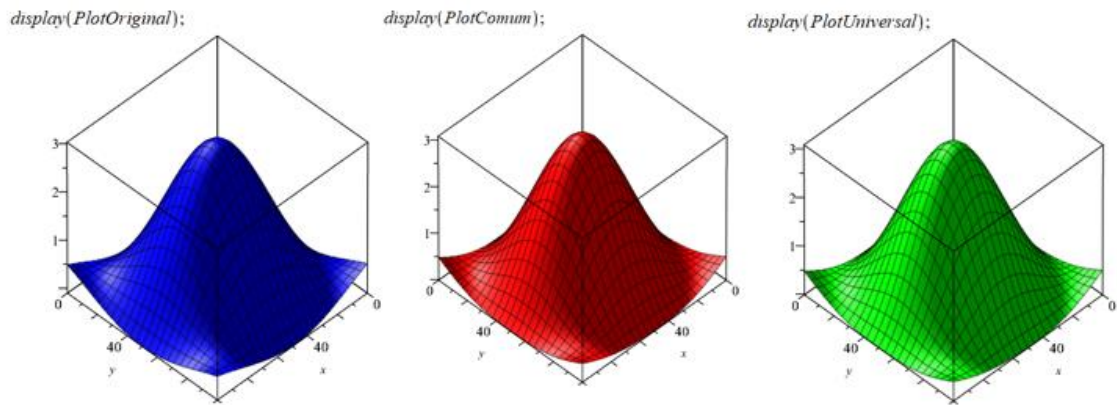


Figura VII.12. W(50%) com L=35: esq.) Kriging simples, meio) Kriging comum, dir.) Kriging Universal

Nº pontos no bordo = todos									
Nº pontos no interior = 181+1									
L=45	Wmax	Xmax	Ymax	Wmin	Xmin	Ymin	Dif(%)	MSE 100%	MSE 50%
Simple	2,568	35,537	52,080	-0,550	92,990	0	8,420	0,280	0,328
Comum	2,504	34,028	52,440	-0,597	95,617	0	5,731	0,319	0,375
Universal	2,044	49,237	50,068	-1,247	100	0	-13,676	0,149	0,195

Obs:

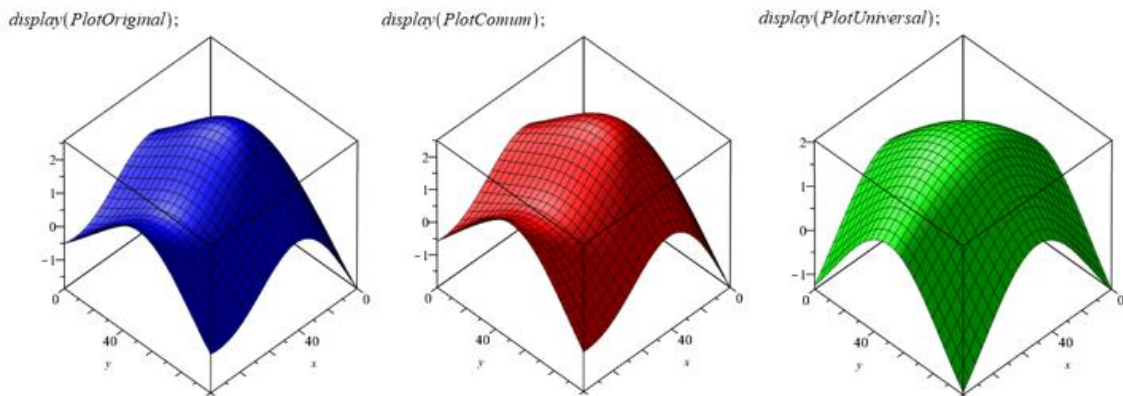


Figura VII.13. W(50%) com L=45: esq.) Kriging simples, meio) Kriging comum, dir.) Kriging Universal

Nº pontos no bordo = todos									
Nº pontos no interior = 181+1									
L=65	Wmax	Xmax	Ymax	Wmin	Xmin	Ymin	Dif(%)	MSE 100%	MSE 50%
Simple	2,643	50,225	49,735	-1,220	0	100	11,610	0,106	0,134
Comum	2,391	50,212	49,751	-1,036	0	100	0,975	0,065	0,087
Universal	2,394	51,328	48,429	-0,860	0	100	1,097	0,068	0,090

Obs:

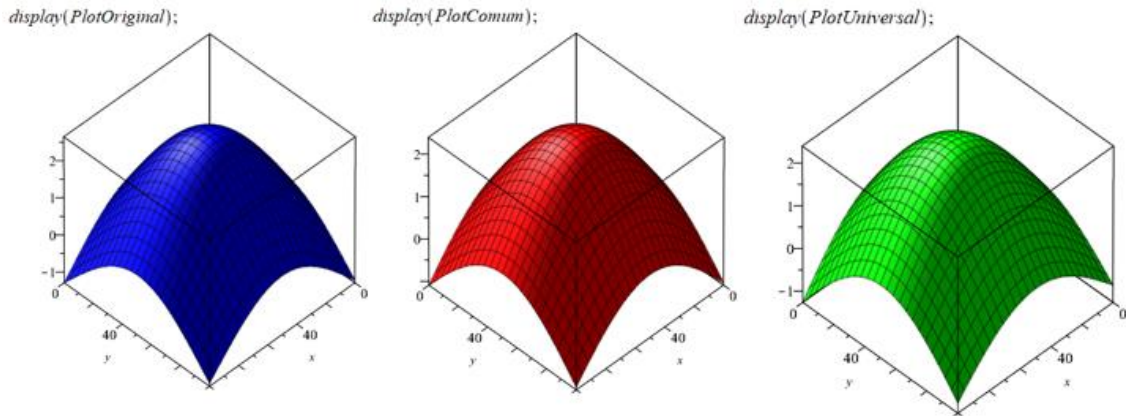


Figura VII.14. W(50%) com L=65: esq.) Kriging simples, meio) Kriging comum, dir.) Kriging Universal

Nº pontos no bordo = todos									
Nº pontos no interior = 181+1									
L=80	Wmax	Xmax	Ymax	Wmin	Xmin	Ymin	Dif(%)	MSE 100%	MSE 50%
Simples	3,780	50,162	49,854	-2,823	0	100	59,622	0,856	0,980
Comum	2,703	50,131	49,882	-1,560	0	100	14,121	0,157	0,195
Universal	2,703	50,189	49,830	-1,554	0	100	14,121	0,157	0,195

Obs:

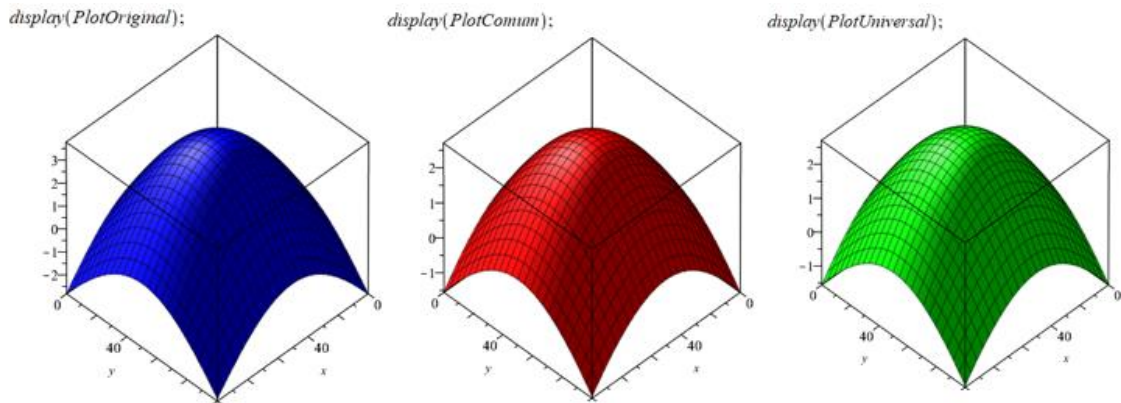


Figura VII.15. W(50%) com L=80: esq.) Kriging simples, meio) Kriging comum, dir.) Kriging Universal

Nº pontos no bordo = todos									
Nº pontos no interior = 181+1									
L=70	Wmax	Xmax	Ymax	Wmin	Xmin	Ymin	Dif(%)	MSE 100%	MSE 50%
Simples	2,839	50,173	49,823	-1,526	0	100	19,887	0,179	0,218
Comum	2,461	50,155	49,842	-1,172	0	100	3,899	0,080	0,105
Universal	2,461	50,358	49,633	-1,145	0	100	3,901	0,080	0,105

Obs:

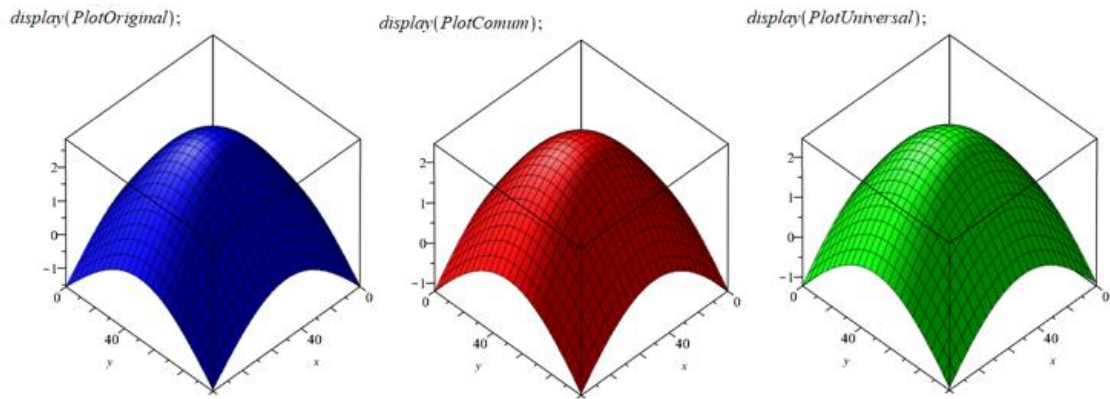


Figura VII.16. W(50%) com L=70: esq.) Kriging simples, meio) Kriging comum, dir.) Kriging Universal

B. METAMODELOS DO DESLOCAMENTO RESULTANTE NAS MÁSCARAS

Nesta sub-seccção do Apêndice VII apresentam-se os resultados obtidos para os testes efectuados ao parâmetro L para as máscaras M2_TC e M2_3DLS, quer para o caso de carregamento da flexão lateral esquerda do pescoço quer para a flexão do pescoço.

1. M2_TC: FLEXÃO LATERAL ESQUERDA DO PESCOÇO

Resultados do estudo do parâmetro L com 510 pontos				
L=19,05		Simples	Comum	Universal
Desvios	Wmax (%)	56,663	56,243	103,984
	X (%)	21,762	23,472	58,419
	Y (%)	-9,606	-11,139	0,267
	Z (%)	-21,410	-21,410	-21,410
MSE		0,172	0,175	0,136
Obs:			L médio	
L=10		Simples	Comum	Universal
Desvios	Wmax (%)	194,500	112,032	-7,867
	X (%)	18,619	18,237	14,140
	Y (%)	19,079	18,320	15,799
	Z (%)	-17,024	-16,743	-7,130
MSE		0,465	0,249	0,249
L=15		Simples	Comum	Universal
Desvios	Wmax (%)	244,029	160,619	503,583
	X (%)	-12,672	-16,085	-30,762
	Y (%)	19,938	22,942	26,834
	Z (%)	-21,410	-21,410	-21,410
MSE		0,266	0,202	0,780
L=20		Simples	Comum	Universal
Desvios	Wmax (%)	170,460	150,151	17,044
	X (%)	-22,602	-16,024	6,490

	Y (%)	11,090	7,086	5,868
	Z (%)	-21,410	-21,410	20,051
	MSE	0,284	0,234	0,169
	L=25	Simples	Comum	Universal
Desvios	Wmax (%)	4,285	23,765	32,983
	X (%)	34,770	46,588	52,224
	Y (%)	6,344	7,120	26,834
	Z (%)	-21,410	-21,410	-21,410
	MSE	0,161	0,145	0,156
	L=30	Simples	Comum	Universal
Desvios	Wmax (%)	186,710	161,777	187,440
	X (%)	58,419	58,419	58,419
	Y (%)	3,547	-1,058	0,107
	Z (%)	-21,410	-21,410	-21,410
	MSE	0,175	0,217	0,238
	L=35	Simples	Comum	Universal
Desvios	Wmax (%)	335,684	341,927	339,967
	X (%)	58,419	58,419	58,419
	Y (%)	-3,786	-0,332	-0,344
	Z (%)	-21,410	-21,410	-21,410
	MSE	1,734	1,153	1,107
	L=40	Simples	Comum	Universal
Desvios	Wmax (%)	107,297	97,382	106,870
	X (%)	58,419	58,419	58,419
	Y (%)	-17,111	-17,111	-17,111
	Z (%)	-7,635	0,167	0,220
	MSE	0,552	0,528	0,563
	L=45	Simples	Comum	Universal
Desvios	Wmax (%)	66,025	145,775	155,471
	X (%)	56,921	58,419	58,419
	Y (%)	26,834	26,834	26,834
	Z (%)	-21,410	-21,410	-21,410
	MSE	0,315	0,336	0,331
	L=50	Simples	Comum	Universal
Desvios	Wmax (%)	0,257	-1,526	5,160
	X (%)	37,651	32,606	58,419
	Y (%)	26,834	26,834	26,834
	Z (%)	-21,410	-21,410	-21,410
	MSE	0,159	0,160	0,162
	L=55	Simples	Comum	Universal
Desvios	Wmax (%)	-9,022	-8,310	-4,256
	X (%)	39,016	42,264	58,419
	Y (%)	26,834	26,834	26,834
	Z (%)	-21,410	-21,410	-21,410
	MSE	0,140	0,140	0,140

Resultados do estudo do parâmetro L com 123 pontos				
L=22,52		Simples	Comum	Universal
Desvios	Wmax (%)	1242,645	11,434	246,376
	X (%)	-6,163	-3,998	-16,651
	Y (%)	-12,989	-9,459	-0,714
	Z (%)	9,952	4,507	-21,410
	MSE	25,534	0,002	0,007
Obs:			L médio	
L=10		Simples	Comum	Universal
Desvios	Wmax (%)	17,906	6,169	1035,090
	X (%)	16,335	-2,394	26,697
	Y (%)	6,254	-8,863	-16,996
	Z (%)	-14,035	1,495	11,335
	MSE	0,040	0,000	0,105
L=11		Simples	Comum	Universal
Desvios	Wmax (%)	530,503	11,702	8,329
	X (%)	3,674	-1,315	26,697
	Y (%)	-16,996	-16,213	-16,996
	Z (%)	-6,377	-0,892	11,335
	MSE	2,397	0,001	0,000
L=12		Simples	Comum	Universal
Desvios	Wmax (%)	649,455	3,828	7,189
	X (%)	-16,651	-6,799	-16,651
	Y (%)	0,692	1,001	-16,996
	Z (%)	11,335	5,731	11,335
	MSE	6,672	0,000	0,000
L=12,5		Simples	Comum	Universal
Desvios	Wmax (%)	25,018	1,624	7,070
	X (%)	20,071	-1,661	-16,651
	Y (%)	-4,707	-1,436	-16,996
	Z (%)	-14,059	2,387	11,335
	MSE	0,037	0,000	0,000
L=13		Simples	Comum	Universal
Desvios	Wmax (%)	14,441	2,259	14,068
	X (%)	22,189	-4,275	-16,651
	Y (%)	-5,773	-2,649	-16,996
	Z (%)	-16,485	3,723	-21,410
	MSE	0,015	0,000	0,000
L=14		Simples	Comum	Universal
Desvios	Wmax (%)	8,652	3,216	9,385
	X (%)	-7,484	-6,926	26,697
	Y (%)	15,867	-4,137	-16,996
	Z (%)	5,816	5,164	11,335
	MSE	0,007	0,000	0,000
L=15		Simples	Comum	Universal

Desvios	Wmax (%)	8,695	4,369	17,035
	X (%)	-10,288	-9,519	-16,651
	Y (%)	15,425	-4,933	-16,996
	Z (%)	7,486	6,734	-21,410
	MSE	0,005	0,000	0,000
	L=16	Simples	Comum	Universal
Desvios	Wmax (%)	12,530	6,646	382,965
	X (%)	-15,050	-13,845	26,697
	Y (%)	14,568	-5,024	-12,346
	Z (%)	10,508	9,456	11,335
	MSE	0,006	0,000	0,008
	L=20	Simples	Comum	Universal
Desvios	Wmax (%)	36,042	5,251	23,563
	X (%)	-14,448	-3,381	-16,651
	Y (%)	22,285	-10,411	-10,761
	Z (%)	10,904	3,642	-21,410
	MSE	0,019	0,000	0,000
	L=25	Simples	Comum	Universal
Desvios	Wmax (%)	27,763	92,639	138,978
	X (%)	-0,455	-16,651	26,697
	Y (%)	-6,416	22,285	-16,996
	Z (%)	1,883	11,335	11,335
	MSE	0,018	0,078	0,002
	L=30	Simples	Comum	Universal
Desvios	Wmax (%)	11,815	5,005	61,289
	X (%)	-2,146	-16,651	26,697
	Y (%)	-6,624	-16,996	-16,996
	Z (%)	1,727	11,335	11,335
	MSE	0,003	0,001	0,000
	L=35	Simples	Comum	Universal
Desvios	Wmax (%)	11,853	9,731	50,190
	X (%)	-6,528	-16,651	26,697
	Y (%)	-9,892	-16,996	-16,996
	Z (%)	4,416	11,335	11,335
	MSE	0,002	0,001	0,000
	L=40	Simples	Comum	Universal
Desvios	Wmax (%)	18,123	16,085	46,145
	X (%)	-12,860	-16,651	26,697
	Y (%)	-15,703	-16,996	-16,996
	Z (%)	8,661	11,335	11,335
	MSE	0,003	0,001	0,000

2. M2_3DLS: FLEXÃO LATERAL ESQUERDA DO PESCOÇO

Resultados do estudo do parâmetro L com 90 pontos

	L=22.29	Simples	Comum	Universal
Desvios	Wmax (%)	6,518	3,487	9,494
	X (%)	10,904	-9,512	29,755
	Y (%)	2,793	-9,347	-9,347
	Z (%)	-6,214	6,460	6,460
	MSE	0,004	0,000	0,000
	L=10	Simples	Comum	Universal
Desvios	Wmax (%)	31,431	1,097	15,718
	X (%)	14,905	2,362	29,755
	Y (%)	-9,347	-2,195	-9,347
	Z (%)	-11,741	-0,920	6,460
	MSE	0,031	0,000	0,000
	L=15	Simples	Comum	Universal
Desvios	Wmax (%)	81,105	3,707	5,532
	X (%)	-9,512	-3,030	-9,512
	Y (%)	7,088	-7,423	-9,347
	Z (%)	6,460	2,583	6,460
	MSE	0,137	0,000	0,000
	L=20	Simples	Comum	Universal
Desvios	Wmax (%)	10,597	2,533	11,923
	X (%)	12,313	9,512	29,755
	Y (%)	3,318	-9,347	-9,347
	Z (%)	-6,673	6,460	6,460
	MSE	0,008	0,000	0,000
	L=25	Simples	Comum	Universal
Desvios	Wmax (%)	4,358	4,548	8,530
	X (%)	9,247	-9,512	29,755
	Y (%)	1,873	-9,347	-9,347
	Z (%)	-5,368	6,460	6,460
	MSE	0,002	0,000	0,000
	L=5	Simples	Comum	Universal
Desvios	Wmax (%)	204,542	1,421	31,143
	X (%)	13,330	-0,030	29,755
	Y (%)	1,873	1,584	-9,347
	Z (%)	-5,368	0,210	6,460
	MSE	0,002	0,000	0,000
	L=14	Simples	Comum	Universal
Desvios	Wmax (%)	23,771	1,323	0,932
	X (%)	0,309	11,189	11,810
	Y (%)	-4,972	3,757	3,757
	Z (%)	0,172	-5,878	0,172
	MSE	0,022	0,000	0,000
	L=30	Simples	Comum	Universal
Desvios	Wmax (%)	23,771	1,323	0,932
	X (%)	0,309	11,189	11,810
	Y (%)	-4,972	3,757	3,757

	Z (%)	0,172	-5,878	0,172
	MSE	0,022	0,000	0,000
	L=35	Simples	Comum	Universal
Desvios	Wmax (%)	4,989	0,420	0,931
	X (%)	0,375	11,810	11,810
	Y (%)	3,757	-4,972	3,757
	Z (%)	-3,803	-5,878	0,172
	MSE	0,002	0,000	0,000
	L=40	Simples	Comum	Universal
Desvios	Wmax (%)	2,725	0,085	0,930
	X (%)	1,104	11,810	11,810
	Y (%)	2,564	-4,972	3,757
	Z (%)	-2,603	-5,878	0,172
	MSE	0,001	0,000	0,000
	L=45	Simples	Comum	Universal
Desvios	Wmax (%)	2,256	0,045	0,930
	X (%)	2,099	11,810	11,810
	Y (%)	1,597	-4,972	3,757
	Z (%)	-2,422	-5,878	0,172
	MSE	0,001	0,000	0,000
	L=16.5	Simples	Comum	Universal
Desvios	Wmax (%)	2,230	0,147	0,930
	X (%)	3,851	11,810	11,810
	Y (%)	1,141	-4,972	3,757
	Z (%)	-2,405	-5,878	0,172
	MSE	0,001	0,000	0,000

3. M2_TC: FLEXÃO DO PESCOÇO

Resultados do estudo do parâmetro L com 95 pontos				
	L=13,11	Simples	Comum	Universal
Desvios	Wmax (%)	22,636	0,502	0,730
	X (%)	11,810	2,215	11,810
	Y (%)	-1,584	-4,972	3,757
	Z (%)	-4,725	-2,438	0,172
	MSE	0,018	0,000	0,000
	L=10	Simples	Comum	Universal
Desvios	Wmax (%)	22,210	2,650	0,861
	X (%)	9,955	-1,460	11,810
	Y (%)	0,737	-4,972	3,757
	Z (%)	-1,490	-5,878	0,172
	MSE	0,026	0,000	0,000
	L=15	Simples	Comum	Universal
Desvios	Wmax (%)	49,088	0,422	1,073
	X (%)	11,810	0,184	11,810

	Y (%)	-1,237	-2,262	3,757
	Z (%)	-5,878	0,172	0,172
	MSE	0,073	0,000	0,000
	L=20	Simples	Comum	Universal
Desvios	Wmax (%)	16,980	2,877	0,946
	X (%)	-0,498	11,810	11,810
	Y (%)	-1,184	3,757	3,757
	Z (%)	0,172	-5,878	0,172
	MSE	0,024	0,001	0,000
	L=25	Simples	Comum	Universal
Desvios	Wmax (%)	9,006	0,473	0,936
	X (%)	-0,103	11,810	11,810
	Y (%)	-3,375	3,757	3,757
	Z (%)	0,172	-5,878	0,172
	MSE	0,004	0,000	0,000
	L=30	Simples	Comum	Universal
Desvios	Wmax (%)	23,771	1,323	0,932
	X (%)	0,309	11,189	11,810
	Y (%)	-4,972	3,757	3,757
	Z (%)	0,172	-5,878	0,172
	MSE	0,022	0,000	0,000
	L=14	Simples	Comum	Universal
Desvios	Wmax (%)	30,292	0,297	5,161
	X (%)	11,810	1,244	11,810
	Y (%)	-1,266	-4,972	3,757
	Z (%)	-5,878	0,172	0,172
	MSE	0,030	0,000	0,000
	L=16	Simples	Comum	Universal
Desvios	Wmax (%)	115,564	0,858	0,997
	X (%)	11,810	-0,221	11,810
	Y (%)	-1,303	-0,893	3,757
	Z (%)	-5,878	0,172	0,172
	MSE	0,394	0,000	0,000
	L=14.5	Simples	Comum	Universal
Desvios	Wmax (%)	37,673	0,320	1,218
	X (%)	11,810	0,597	11,810
	Y (%)	-1,233	-3,539	3,757
	Z (%)	-5,878	0,172	0,172
	MSE	0,044	0,000	0,000
	L=13.5	Simples	Comum	Universal
Desvios	Wmax (%)	25,223	0,358	0,653
	X (%)	11,810	1,705	2,303
	Y (%)	-1,382	-4,972	3,757
	Z (%)	-5,349	-1,126	0,172
	MSE	0,022	0,000	0,000
	L=15.5	Simples	Comum	Universal

Desvios	Wmax (%)	69,303	0,595	1,023
	X (%)	11,810	-0,059	11,810
	Y (%)	-1,263	-1,436	3,757
	Z (%)	-5,878	0,172	0,172
	MSE	0,143	0,000	0,000
	L=16.5	Simples	Comum	Universal
Desvios	Wmax (%)	334,702	1,276	0,982
	X (%)	11,810	-0,347	11,810
	Y (%)	-1,355	-0,531	3,757
	Z (%)	-5,878	0,172	0,172
	MSE	3,297	0,000	0,000

4. M2_3DLS: FLEXÃO DO PESCOÇO

Resultados do estudo do parâmetro L com 223 pontos				
	L=14,13	Simples	Comum	Universal
Desvios	Wmax (%)	62,027	36,355	1,128
	X (%)	331,509	-128,051	344,263
	Y (%)	2,809	-5,531	3,282
	Z (%)	1,061	-8,018	1,061
	MSE	0,097	0,011	0,000
	L=10	Simples	Comum	Universal
Desvios	Wmax (%)	26,354	0,643	1,089
	X (%)	-118,100	-191,217	344,263
	Y (%)	-3,326	0,829	3,282
	Z (%)	-5,747	1,061	1,061
	MSE	0,006	0,000	0,000
	L=15	Simples	Comum	Universal
Desvios	Wmax (%)	13,966	4,907	1,136
	X (%)	344,263	-446,716	344,263
	Y (%)	0,010	-5,531	3,282
	Z (%)	-0,447	1,061	1,061
	MSE	0,008	0,001	0,000
	L=20	Simples	Comum	Universal
Desvios	Wmax (%)	59,236	1,041	1,043
	X (%)	344,263	-106,713	344,263
	Y (%)	-5,351	-4,456	3,282
	Z (%)	-8,018	1,061	1,061
	MSE	0,040	0,000	0,000
	L=25	Simples	Comum	Universal
Desvios	Wmax (%)	19,024	14,122	1,093
	X (%)	-175,127	344,263	344,263
	Y (%)	3,282	-5,531	3,282
	Z (%)	1,061	-8,018	1,061
	MSE	0,016	0,002	0,000

	L=30	Simples	Comum	Universal
Desvios	Wmax (%)	5,803	2,782	1,098
	X (%)	-145,304	344,263	344,263
	Y (%)	-0,180	-5,531	3,282
	Z (%)	1,061	-8,018	1,061
	MSE	0,002	0,000	0,000
	L=5	Simples	Comum	Universal
Desvios	Wmax (%)	23,686	0,879	1,145
	X (%)	-100,821	-16,811	344,263
	Y (%)	-1,410	1,322	3,282
	Z (%)	-1,115	0,437	1,061
	MSE	0,024	0,000	0,000
	L=4,9	Simples	Comum	Universal
Desvios	Wmax (%)	21,651	0,388	1,187
	X (%)	-94,204	2,118	344,263
	Y (%)	-1,032	0,315	3,282
	Z (%)	-1,801	0,292	1,061
	MSE	0,031	0,000	0,000
	L=5,1	Simples	Comum	Universal
Desvios	Wmax (%)	23,945	4,750	1,150
	X (%)	-179,410	-257,300	344,263
	Y (%)	-1,311	1,029	3,282
	Z (%)	-1,234	1,061	1,061
	MSE	0,034	0,001	0,000
	L=4,8	Simples	Comum	Universal
Desvios	Wmax (%)	43,233	0,617	0,903
	X (%)	-139,414	-100,813	-67,418
	Y (%)	-2,051	-3,451	3,282
	Z (%)	0,762	1,061	1,061
	MSE	0,053	0,000	0,000

VIII. ESTUDOS DE OPTIMIZAÇÃO DA DEFORMADA DA PLACA FINA

Neste apêndice constam os resultados dos estudos de otimização referentes à placa fina.

A. OPTIMIZAÇÃO DA PLACA COM O *DESIGN STUDY*

Passo: 1 mm														
	Actual	1 ^a Iter	Óp t.	1 ^o	2 ^o	3 ^o	...							
h [mm]	2	2	4	2	3	4								
σ_{max} [MPa]	15,46	15,46	3,86	15,46	6,87	3,86								
Δs [mm]	2,36	2,36	0,30	2,36	0,70	0,30								
Passo: 0,75 mm														
	Actual	1 ^a Iter	Óp t.											
h [mm]	2	2	4	2	2,75	3,5	4							
σ_{max} [MPa]	15,46	15,46	3,86	15,46	8,18	5,05	3,86							
Δs [mm]	2,36	2,36	0,30	2,36	0,91	0,44	0,30							
Passo: 0,5mm														
	Actual	1 ^a Iter	Óp t.											
h [mm]	2	2	4	2	2,5	3	3,5	4						
σ_{max} [MPa]	15,46	15,46	3,86	15,46	9,89	6,87	5,05	3,86						
Δs [mm]	2,36	2,36	0,30	2,36	1,21	0,70	0,44	0,30						
Passo: 0,25mm														
	Actual	1 ^a Iter	Óp t.											
h [mm]	2	2	4	2	2,25	2,5	2,75	3	3,25	3,5	3,75	4		
σ_{max} [MPa]	15,46	15,46	3,86	15,46	12,21	9,89	8,18	6,87	5,85	5,05	4,40	3,86		
Δs [mm]	2,36	2,36	0,30	2,36	1,66	1,21	0,91	0,70	0,55	0,44	0,30	0,30		
Passo: 0,1mm														
	Actual	1 ^a Iter	Óp t.											
h [mm]	2	2	4	2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3
σ_{max} [MPa]	15,46	15,46	3,86	15,46	14,02	12,77	11,69	10,73	9,89	9,15	8,40	7,89	7,35	6,87
Δs [mm]	2,36	2,36	0,30	2,36	2,04	1,78	1,55	1,37	1,21	1,08	0,91	0,80	0,70	0,70
...														

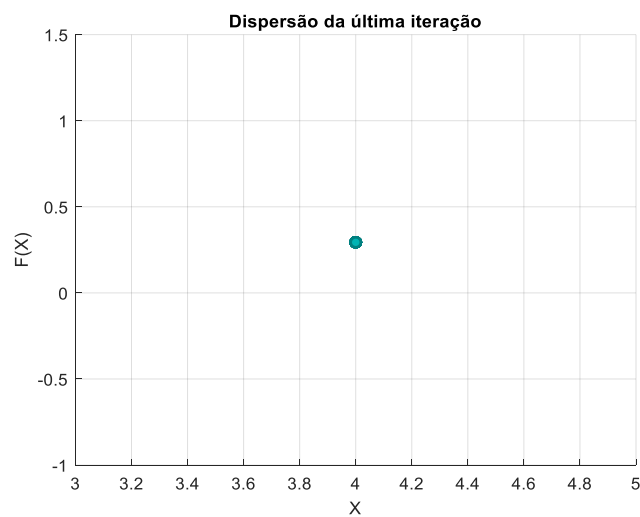
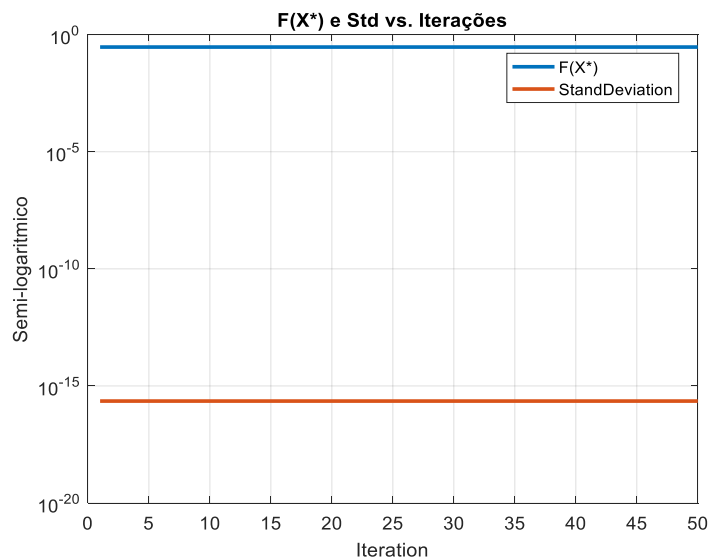
	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4
·	6,4	6,0	5,6	5,3	5,0	4,7	4,5	4,2	4,0	3,8
·	3	4	8	5	5	7	2	8	6	6
·	0,6	0,5	0,5	0,4	0,4	0,4	0,3	0,3	0,3	0,3
	3	8	3	8	4	1	7	4	2	0

B. MÉTODO DE NAVIER (PSO E WOA)

Nesta sub-seccção encontram-se os resultados da optimização da função de deformada obtida pelo método de Navier.

1. PSO RESTRINGIDO

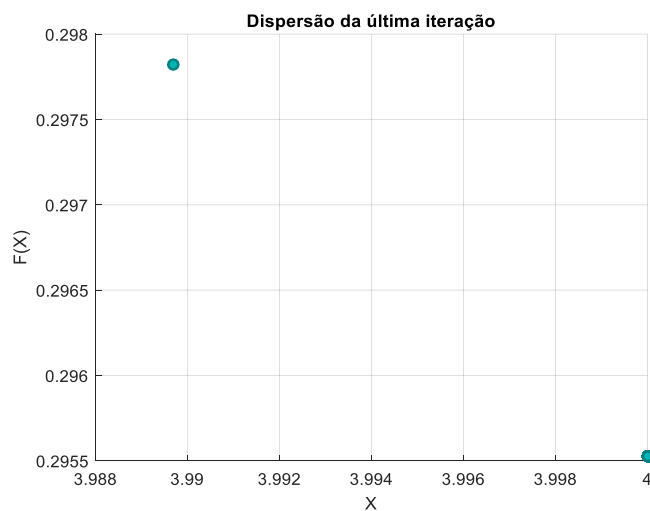
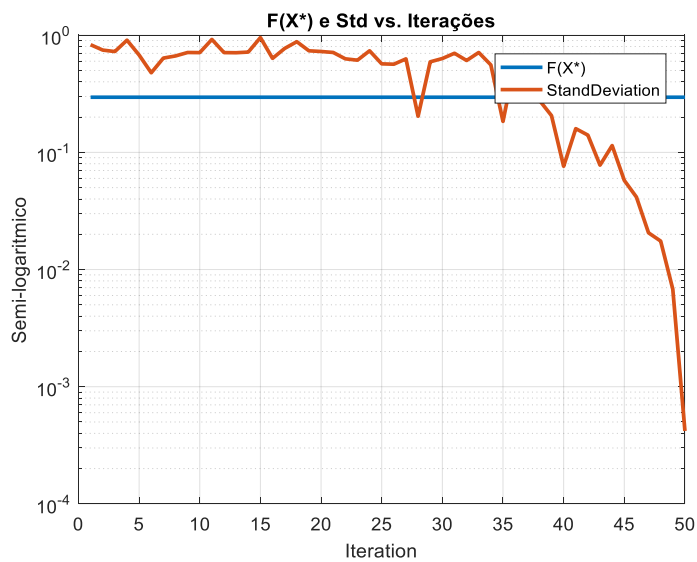
Iteração	PSO			
	F(X*)	X*	StdDev	Média
1	0,295525796	4	2,26E-16	0,295525796
2	0,295525796	4	2,26E-16	0,295525796
3	0,295525796	4	2,26E-16	0,295525796
4	0,295525796	4	2,26E-16	0,295525796
5	0,295525796	4	2,26E-16	0,295525796
6	0,295525796	4	2,26E-16	0,295525796
7	0,295525796	4	2,26E-16	0,295525796
8	0,295525796	4	2,26E-16	0,295525796
9	0,295525796	4	2,26E-16	0,295525796
10	0,295525796	4	2,26E-16	0,295525796
11	0,295525796	4	2,26E-16	0,295525796
12	0,295525796	4	2,26E-16	0,295525796
13	0,295525796	4	2,26E-16	0,295525796
14	0,295525796	4	2,26E-16	0,295525796
15	0,295525796	4	2,26E-16	0,295525796
·			·	
·			·	
·			·	
41	0,295525796	4	2,26E-16	0,295525796
42	0,295525796	4	2,26E-16	0,295525796
43	0,295525796	4	2,26E-16	0,295525796
44	0,295525796	4	2,26E-16	0,295525796
45	0,295525796	4	2,26E-16	0,295525796
46	0,295525796	4	2,26E-16	0,295525796
47	0,295525796	4	2,26E-16	0,295525796
48	0,295525796	4	2,26E-16	0,295525796
49	0,295525796	4	2,26E-16	0,295525796
50	0,295525796	4	2,26E-16	0,295525796



2. WOA

WOA				
Iteração	F(X*)	X*	StdDev	Média
1	0,295525796	4	8,29E-01	0,748373337
2	0,295525796	4	7,46E-01	0,684832658
3	0,295525796	4	7,25E-01	0,641624745
4	0,295525796	4	9,07E-01	0,954931083
5	0,295525796	4	6,77E-01	0,623653527
6	0,295525796	4	4,78E-01	0,480197249
7	0,295525796	4	6,38E-01	0,56306214
8	0,295525796	4	6,65E-01	0,607824718
9	0,295525796	4	7,12E-01	0,621780503
10	0,295525796	4	7,10E-01	0,590189444
11	0,295525796	4	9,20E-01	0,881613397

12	0,295525796	4	7,11E-01	0,619954392
13	0,295525796	4	7,09E-01	0,593560648
14	0,295525796	4	7,18E-01	0,625188445
15	0,295525796	4	9,54E-01	0,958023639
.			.	
.			.	
.			.	
40	0,295525796	4	7,61E-02	0,344819332
41	0,295525796	4	1,59E-01	0,354683104
42	0,295525796	4	1,40E-01	0,370632855
43	0,295525796	4	7,78E-02	0,318836573
44	0,295525796	4	1,14E-01	0,349671248
45	0,295525796	4	5,77E-02	0,315700015
46	0,295525796	4	4,16E-02	0,316565804
47	0,295525796	4	2,06E-02	0,301299607
48	0,295525796	4	1,75E-02	0,302628767
49	0,295525796	4	6,80E-03	0,298581253
50	0,295525796	4	4,19E-04	0,295602334

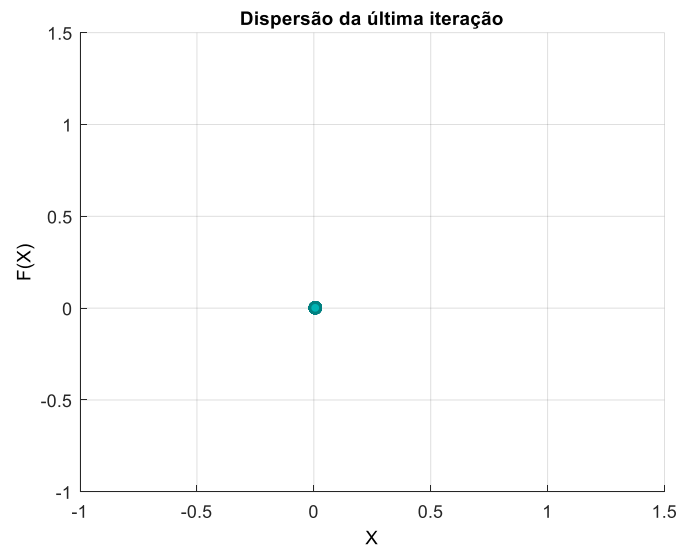
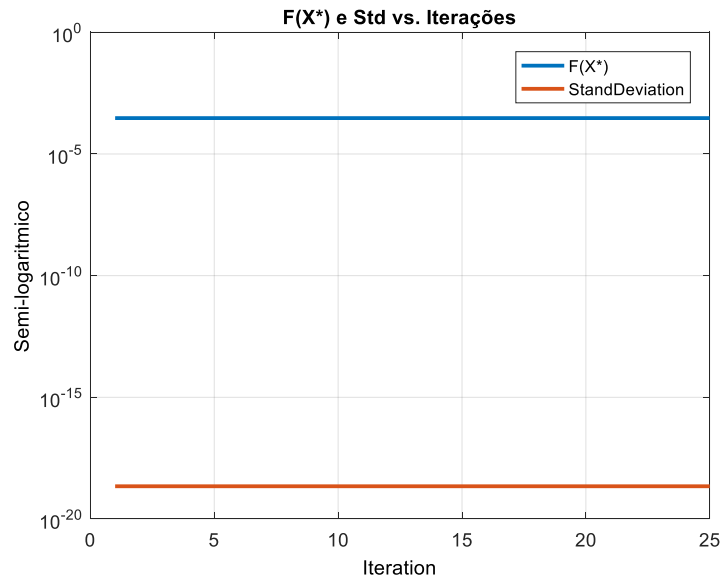


C. DEFORMADA MÁXIMA DA PLACA FINA COM FORMULAÇÃO DE KANT (PSO E WOA)

Neste apêndice encontram-se os resultados obtidos na otimização da deformada máxima da placa de Kant utilizando os algoritmos meta-heurísticos.

1. PSO RESTRINGIDO

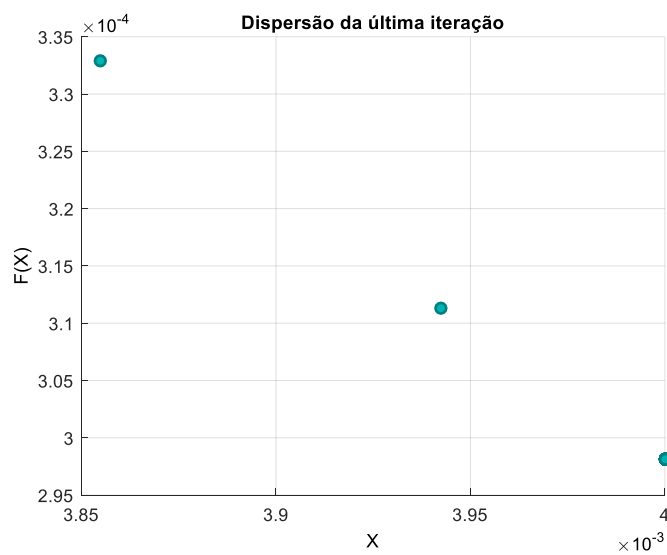
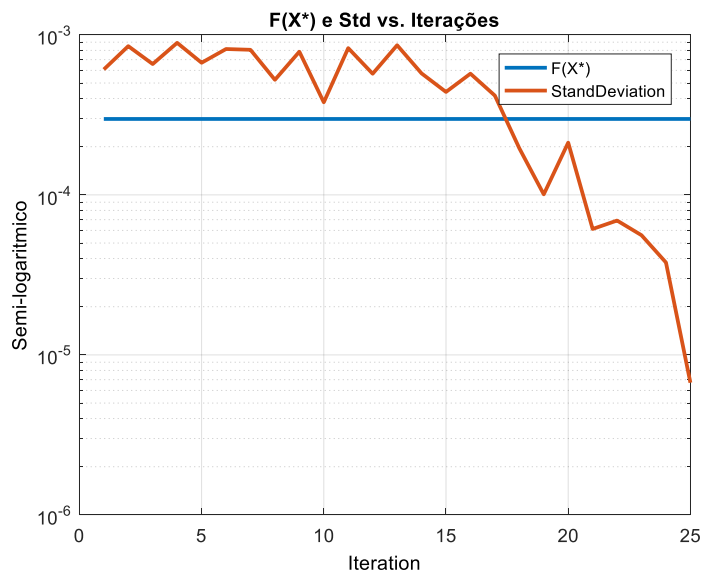
Iteração	PSO			
	F(X*)	X*	StdDev	Média
1	0,000298175	0,004	2,21E-19	0,000298175
2	0,000298175	0,004	2,21E-19	0,000298175
3	0,000298175	0,004	2,21E-19	0,000298175
4	0,000298175	0,004	2,21E-19	0,000298175
5	0,000298175	0,004	2,21E-19	0,000298175
6	0,000298175	0,004	2,21E-19	0,000298175
7	0,000298175	0,004	2,21E-19	0,000298175
8	0,000298175	0,004	2,21E-19	0,000298175
9	0,000298175	0,004	2,21E-19	0,000298175
10	0,000298175	0,004	2,21E-19	0,000298175
11	0,000298175	0,004	2,21E-19	0,000298175
12	0,000298175	0,004	2,21E-19	0,000298175
13	0,000298175	0,004	2,21E-19	0,000298175
14	0,000298175	0,004	2,21E-19	0,000298175
15	0,000298175	0,004	2,21E-19	0,000298175
16	0,000298175	0,004	2,21E-19	0,000298175
17	0,000298175	0,004	2,21E-19	0,000298175
18	0,000298175	0,004	2,21E-19	0,000298175
19	0,000298175	0,004	2,21E-19	0,000298175
20	0,000298175	0,004	2,21E-19	0,000298175
21	0,000298175	0,004	2,21E-19	0,000298175
22	0,000298175	0,004	2,21E-19	0,000298175
23	0,000298175	0,004	2,21E-19	0,000298175
24	0,000298175	0,004	2,21E-19	0,000298175
25	0,000298175	0,004	2,21E-19	0,000298175



2. WOA

WOA				
Iteração	$F(X^*)$	X^*	StdDev	Média
1	0,000298175	0,004	0,000607892	0,000611754
2	0,000298175	0,004	0,000850136	0,000803024
3	0,000298175	0,004	0,000657001	0,000596198
4	0,000298175	0,004	0,000891949	0,000921937
5	0,000298175	0,004	0,000669416	0,000591052
6	0,000298175	0,004	0,000815656	0,000780982
7	0,000298175	0,004	0,000806816	0,000726683
8	0,000298175	0,004	0,000523792	0,000447962
9	0,000298175	0,004	0,000784999	0,000718871
10	0,000298175	0,004	0,00037887	0,000386135

11	0,000298175	0,004	0,000826453	0,000763308
12	0,000298175	0,004	0,000571636	0,000522831
13	0,000298175	0,004	0,000861448	0,000791141
14	0,000298175	0,004	0,000574513	0,000546928
15	0,000298175	0,004	0,000439834	0,000434484
16	0,000298175	0,004	0,000572198	0,000488083
17	0,000298175	0,004	0,00041742	0,000427033
18	0,000298175	0,004	0,000195501	0,000353195
19	0,000298175	0,004	0,000100762	0,000323828
20	0,000298175	0,004	0,00021206	0,000397108
21	0,000298175	0,004	6,12E-05	0,000322638
22	0,000298175	0,004	6,91E-05	0,000331582
23	0,000298175	0,004	5,59E-05	0,000325544
24	0,000298175	0,004	3,78E-05	0,000315742
25	0,000298175	0,004	6,70E-06	0,000299771

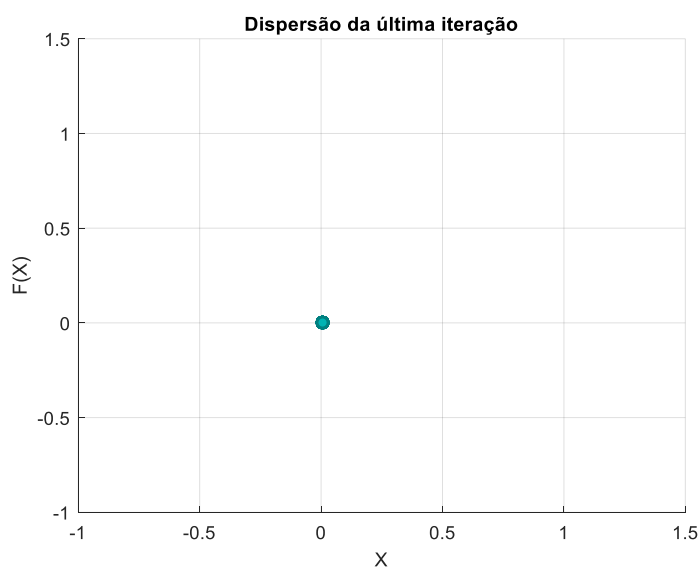
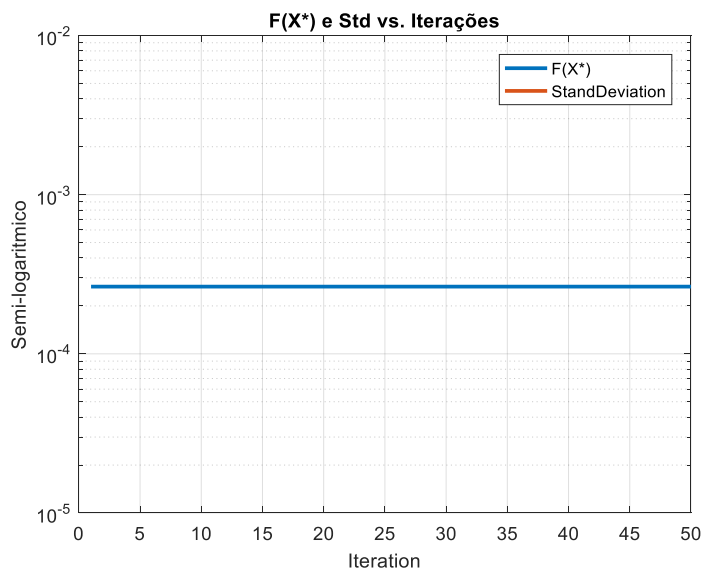


D. METAMODELAÇÃO DA DEFORMADA DA PLACA FINA

Nesta sub-secção do Apêndice VIII mostram-se os resultados obtidos na otimização do polinómio metamodelo da placa obtido com a função CurveFitting do Matlab.

1. PSO RESTRINGIDO

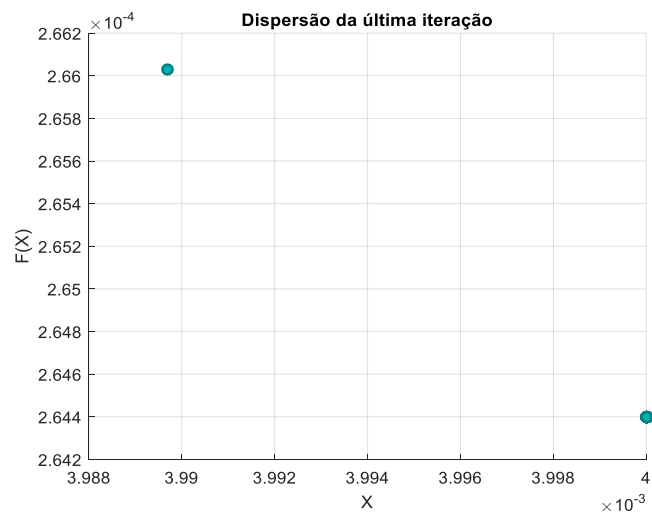
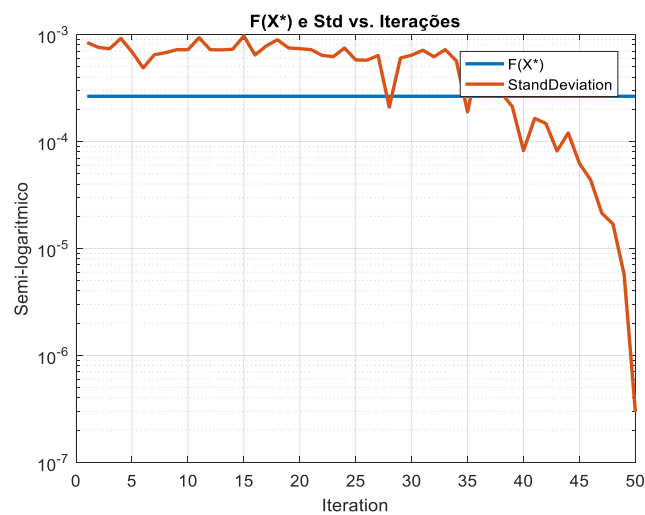
PSO				
Iteração	F(X*)	X*	StdDev	Média
1	0,0002644	0,004	0	0,0002644
2	0,0002644	0,004	0	0,0002644
3	0,0002644	0,004	0	0,0002644
4	0,0002644	0,004	0	0,0002644
5	0,0002644	0,004	0	0,0002644
6	0,0002644	0,004	0	0,0002644
7	0,0002644	0,004	0	0,0002644
8	0,0002644	0,004	0	0,0002644
9	0,0002644	0,004	0	0,0002644
10	0,0002644	0,004	0	0,0002644
11	0,0002644	0,004	0	0,0002644
12	0,0002644	0,004	0	0,0002644
13	0,0002644	0,004	0	0,0002644
14	0,0002644	0,004	0	0,0002644
15	0,0002644	0,004	0	0,0002644
.			.	
.			.	
.			.	
41	0,0002644	0,004	0	0,0002644
42	0,0002644	0,004	0	0,0002644
43	0,0002644	0,004	0	0,0002644
44	0,0002644	0,004	0	0,0002644
45	0,0002644	0,004	0	0,0002644
46	0,0002644	0,004	0	0,0002644
47	0,0002644	0,004	0	0,0002644
48	0,0002644	0,004	0	0,0002644
49	0,0002644	0,004	0	0,0002644
50	0,0002644	0,004	0	0,0002644



2. WOA

WOA: Metamodelo				
Iteração	F(X*)	X*	StdDev	Média
1	0,0002644	0,004	0,000840149	0,000724294
2	0,0002644	0,004	0,000757608	0,000660158
3	0,0002644	0,004	0,000735618	0,00061614
4	0,0002644	0,004	0,000918782	0,000934561
5	0,0002644	0,004	0,000687837	0,000599142
6	0,0002644	0,004	0,000486878	0,000453053
7	0,0002644	0,004	0,000646745	0,000536908
8	0,0002644	0,004	0,000675333	0,00058304
9	0,0002644	0,004	0,000721474	0,000596394
10	0,0002644	0,004	0,000719675	0,000563602

11	0,0002644	0,004	0,000932434	0,000858528
12	0,0002644	0,004	0,000719977	0,000594529
13	0,0002644	0,004	0,000717869	0,000567263
14	0,0002644	0,004	0,000727445	0,000599606
15	0,0002644	0,004	0,000967208	0,000935895
.			.	
.			.	
.			.	
41	0,0002644	0,004	0,000164241	0,000325131
42	0,0002644	0,004	0,000147251	0,000342691
43	0,0002644	0,004	8,14E-05	0,000288272
44	0,0002644	0,004	0,000120058	0,000320636
45	0,0002644	0,004	6,23E-05	0,000285723
46	0,0002644	0,004	4,37E-05	0,000285918
47	0,0002644	0,004	2,14E-05	0,000269958
48	0,0002644	0,004	1,69E-05	0,000270978
49	0,0002644	0,004	5,68E-06	0,00026686
50	0,0002644	0,004	2,98E-07	0,000264454



E. OPTIMIZAÇÃO DO METAMODELO DA DEFORMADA DA PLACA FINA COM KRIGING

Neste apêndice mostram-se os resultados obtidos na minimização do metamodelo $W(x,y)$ com cinco espessuras diferentes $h=\{2, 2.5, 3, 3.5, 4\}$ mm. Com a identificação de dos valores médios e desvios-padrão de (X^*,Y^*) calculados tendo em conta os resultados de (X^*,Y^*) para as cinco espessuras.

Para cada algoritmo foram feitas 5 corridas com 150 gerações e populações de 30 elementos. A cada corrida são feitas 5 minimizações, tendo em conta que é feita uma minimização por espessura.

1. PSO RESTRINGIDO

1ª Corrida: PSO

W*	X*med		W*(X*,Y*)	H
-2,337	Y*med	49,949	-2,337	2
	Std(X*)	52,230	-1,196	2,5
	Std(Y*)	3,839	-0,690	3
		2,046	-0,437	3,5
			-0,294	4

2ª Corrida: PSO

W*	X*med		W*(X*,Y*)	H
-2,328	Y*med	53,232	-2,328	2
	Std(X*)	50,859	-1,199	2,5
	Std(Y*)	3,278	-0,698	3
		2,490	-0,441	3,5
			-0,287	4

3ª Corrida: PSO

W*	X*med		W*(X*,Y*)	H
-2,346	Y*med	50,016	-2,346	2
	Std(X*)	51,782	-1,204	2,5
	Std(Y*)	1,717	-0,698	3
		1,852	-0,440	3,5
			-0,294	4

4ª Corrida: PSO

W*	X*med	51,100	W(X*,Y*)	H
	Y*med	52,910	-2,340	2
	Std(X*)	2,392	-1,199	2,5
-2,340	Std(Y*)	4,848	-0,694	3
			-0,433	3,5
			-0,286	4

5ª Corrida: PSO

W*	X*med	53,036	W(X*,Y*)	H
	Y*med	51,394	-2,352	2
	Std(X*)	3,661	-1,206	2,5
-2,352	Std(Y*)	2,348	-0,681	3
			-0,432	3,5
			-0,295	4

2. **WOA**

1ª Corrida: WOA

W*	X*med	50,175	W(X*,Y*)	H
	Y*med	50,199	-2,352	2
	Std(X*)	0,418	-1,206	2,5
-2,3519	Std(Y*)	0,415	-0,699	3
			-0,441	3,5
			-0,296	4

2ª Corrida: WOA

W*	X*med	50,309	W(X*,Y*)	H
	Y*med	50,067	-2,352	2
	Std(X*)	0,293	-1,206	2,5
-2,3520	Std(Y*)	0,296	-0,699	3
			-0,441	3,5
			-0,296	4

3ª Corrida: WOA

W*	X*med	50,417	W(X*,Y*)	H
-2,3515	Y*med	49,956	-2,351	2

	Std(X*)	0,325	-1,206	2,5
	Std(Y*)	0,331	-0,699	3
			-0,441	3,5
			-0,296	4

4ª Corrida: WOA

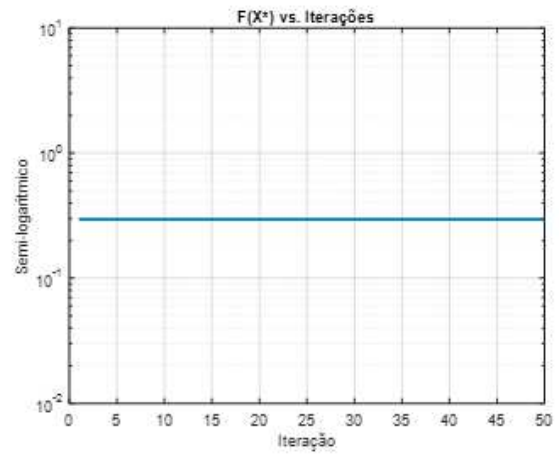
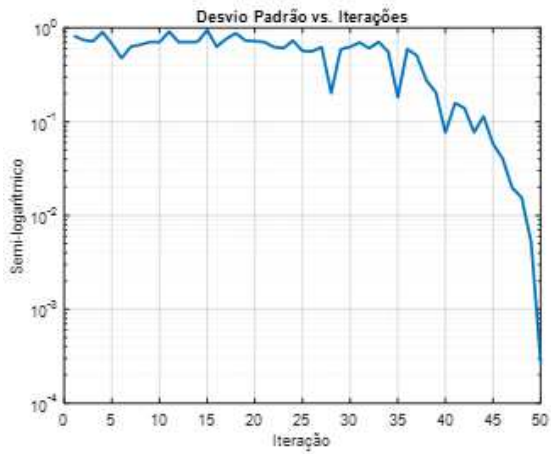
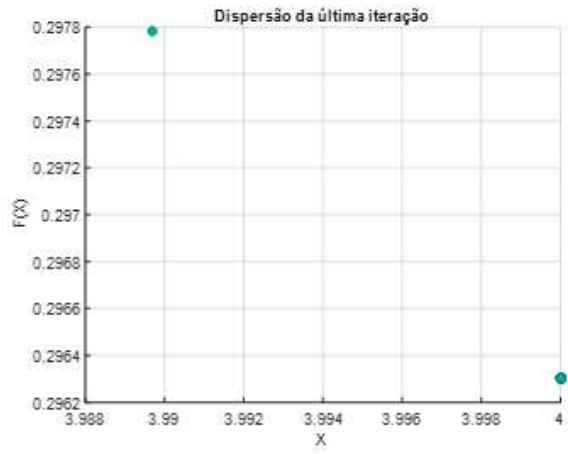
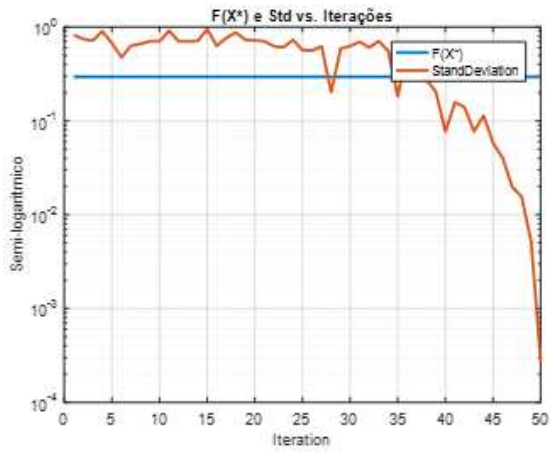
W*	X*med	50,055	W(X*,Y*)	H
	Y*med	50,321	-2,352	2
	Std(X*)	0,294	-1,206	2,5
-2,3522	Std(Y*)	0,291	-0,699	3
			-0,441	3,5
			-0,296	4

5ª Corrida: WOA

W*	X*med	50,342	W(X*,Y*)	H
	Y*med	50,034	-2,352	2
	Std(X*)	0,233	-1,206	2,5
-2,3522	Std(Y*)	0,235	-0,699	3
			-0,441	3,5
			-0,296	4

3. OPTIMIZAÇÃO DO METAMODELO $W_{X^*,Y^*}(H)$

WOA: 1ª Corrida				
Iteração	W*	h	Desvio-padrão	Média
1	0,2963	4	0,8244	0,7459
2	0,2963	4	0,7427	0,6833
3	0,2963	4	0,7211	0,6402
4	0,2963	4	0,9014	0,9519
5	0,2963	4	0,6743	0,6229
.				
.				
.				
46	0,2963	4	0,0405	0,3162
47	0,2963	4	0,0198	0,3014
48	0,2963	4	0,0155	0,3023
49	0,2963	4	0,0052	0,2985
50	0,2963	4	0,0003	0,2964



IX. ESTUDOS DE OPTIMIZAÇÃO DO DESLOCAMENTO RESULTANTE DAS MÁSCARAS

Este apêndice contém todos os estudos de optimização relacionados com as máscaras de imobilização da cabeça.

A. OPTIMIZAÇÃO COM O *DESIGN STUDY*

Nesta sub-secção encontram-se os resultados de todas as corridas efectuadas no estudo de optimização das máscaras M2_TC e M2_3DLS com a ferramenta *DesignStudy* do *SolidWorks*.

1. M2_TC: FLEXÃO LATERAL ESQUERDA DO PESCOÇO

Passo: 0,1 mm									
	Valor Actual	1 ^a Iteração	Valor Óptimo	Caso 1	Caso 2	Caso 2	...		
h [mm]	5	5	5.5	5	5.1	5.2	5.3	5.4	5.5
σ_{max} [MPa]	12.355	12.355	11.796	12.355	12.244	12.131	12.019	11.907	11.796
Desl. Máx. [mm]	1.09996	1.09996	0.86382	1.09996	1.04615	0.99592	0.94896	0.90502	0.86382
Passo: 0,125 mm									
	Valor Actual	1 ^a Iteração	Valor Óptimo						
h [mm]	5	5	5.5	5	5.125	5.25	5.375	5.5	
σ_{max} [MPa]	12.355	12.355	11.796	12.355	12.216	12.075	11.935	11.796	
Desl. Máx. [mm]	1.09996	1.09996	0.86382	1.09996	1.03327	0.97205	0.91573	0.86382	
Passo: 0,15 mm									
	Valor Actual	1 ^a Iteração	Valor Óptimo						
h [mm]	5	5	5.5	5	5.15	5.3	5.45	5.5	
σ_{max} [MPa]	12.355	12.355	11.796	12.355	12.187	12.019	11.852	11.796	
Desl. Máx. [mm]	1.09996	1.09996	0.86382	1.09996	1.02061	0.94896	0.88408	0.86382	
Passo: 0,175 mm									
	Valor Actual	1 ^a Iteração	Valor Óptimo						
h [mm]	5	5	5.5	5	5.175	5.35	5.5		
σ_{max} [MPa]	12.355	12.355	11.796	12.355	12.159	11.963	11.796		
Desl. Máx. [mm]	1.09996	1.09996	0.86382	1.09996	1.00816	0.92663	0.86382		
Passo: 0,2 mm									

	Valor Actual	1ª Iteração	Valor Ótimo				
h [mm]	5	5	5.5	5	5.2	5.4	5.5
σ_{max} [MPa]	12.355	12.355	11.796	12.355	12.131	11.907	11.796
Desl. Máx. [mm]	1.09996	1.09996	0.86382	1.09996	0.99592	0.90502	0.86382

2. M2_3DLS: FLEXÃO LATERAL ESQUERDA DO PESCOÇO

Passo: 0,1 mm									
	Valor Actual	1ª Iteração	Valor Ótimo	Caso1	Caso2	Caso2	...		
h [mm]	5	5	5.5	5	5.1	5.2	5.3	5.4	5.5
σ_{max} [MPa]	12.692	12.692	12.025	12.692	12.556	12.421	12.287	12.155	12.025
Desl. Máx. [mm]	1.12118	1.12118	0.8798	1.12118	1.06616	1.01482	0.96681	0.92188	0.8798

Passo: 0,125 mm									
	Valor Actual	1ª Iteração	Valor Ótimo						
h [mm]	5	5	5.5	5	5.125	5.25	5.375	5.5	
σ_{max} [MPa]	12.692	12.692	12.025	12.692	12.522	12.354	12.188	12.025	
Desl. Máx. [mm]	1.12118	1.12118	0.8798	1.12118	1.05298	0.99038	0.93283	0.8798	

Passo: 0,15 mm									
	Valor Actual	1ª Iteração	Valor Ótimo						
h [mm]	5	5	5.5	5	5.15	5.3	5.45	5.5	
σ_{max} [MPa]	12.692	12.692	12.025	12.692	12.489	12.287	12.095	12.025	
Desl. Máx. [mm]	1.12118	1.12118	0.8798	1.12118	1.04004	0.96681	0.9005	0.8798	

Passo: 0,175 mm									
	Valor Actual	1ª Iteração	Valor Ótimo						
h [mm]	5	5	5.5	5	5.175	5.35	5.5		
σ_{max} [MPa]	12.692	12.692	12.025	12.692	12.455	12.221	12.025		
Desl. Máx. [mm]	1.12118	1.12118	0.8798	1.12118	1.02731	0.94396	0.8798		

Passo: 0,2 mm									
	Valor Actual	1ª Iteração	Valor Ótimo						
h [mm]	5	5	5.5	5	5.2	5.4	5.5		
σ_{max} [MPa]	12.692	12.692	12.025	12.692	12.421	12.155	12.025		
Desl. Máx. [mm]	1.12118	1.12118	0.8798	1.12118	1.01482	0.92188	0.8798		

3. M2_TC: FLEXÃO DO PESCOÇO

Passo: 0,1 mm									
	Valor Actual	1ª Iteração	Valor Ótimo	Caso 1	Caso2	Caso2	...		
h [mm]	2.2	2.2	2.7	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7
σ_{max} [MPa]	15.12	15.12	11.24	15.12	14.191	13.345	12.575	11.88	11.24
Desl. Máx. [mm]	1.4559	1.4559	0.87696	1.4559	1.30111	1.17001	1.05788	0.96102	0.87696
Passo: 0,125 mm									
	Valor Actual	1ª Iteração	Valor Ótimo						
h [mm]	2.2	2.2	2.7	2.2	2.325	2.45	2.575	2.7	
σ_{max} [MPa]	15.12	15.12	11.24	15.12	13.972	12.95	12.049	11.24	
Desl. Máx. [mm]	1.4559	1.4559	0.87696	1.4559	1.26633	1.11184	0.98397	0.87696	
Passo: 0,15 mm									
	Valor Actual	1ª Iteração	Valor Ótimo						
h [mm]	2.2	2.2	2.7	2.2	2.35	2.5	2.65	2.7	
σ_{max} [MPa]	15.12	15.12	11.24	15.12	13.758	12.575	11.553	11.24	
Desl. Máx. [mm]	1.4559	1.4559	0.87696	1.4559	1.23293	1.05788	0.91753	0.87696	
Passo: 0,175 mm									
	Valor Actual	1ª Iteração	Valor Ótimo						
h [mm]	2.2	2.2	2.7	2.2	2.375	2.55	2.7		
σ_{max} [MPa]	15.12	15.12	11.24	15.12	13.547	12.219	11.24		
Desl. Máx. [mm]	1.4559	1.4559	0.87696	1.4559	1.20083	1.00773	0.87696		
Passo: 0,2 mm									
	Valor Actual	1ª Iteração	Valor Ótimo						
h [mm]	2.2	2.2	2.7	2.2	2.4	2.6	2.7		
σ_{max} [MPa]	15.12	15.12	11.24	15.12	13.345	11.88	11.24		
Desl. Máx. [mm]	1.4559	1.4559	0.87696	1.4559	1.17001	0.96102	0.87696		

4. M2_3DLS: FLEXÃO DO PESCOÇO

Passo: 0,1 mm									
	Valor Actual	1ª Iteração	Valor Ótimo	Caso 1	Caso 2	Caso 2	...		
h [mm]	2.2	2.2	2.7	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7
σ_{max} [MPa]	15.178	15.178	11.231	15.178	14.233	13.371	12.59	11.885	11.231
Desl. Máx. [mm]	1.50686	1.50686	0.90611	1.50686	1.34635	1.21029	1.0939	0.99346	0.90611

Passo: 0,125 mm								
	Valor Actual	1ª Iteração	Valor Ótimo					
h [mm]	2.2	2.2	2.7	2.2	2.325	2.45	2.575	2.7
σ_{max} [MPa]	15.178	15.178	11.231	15.178	14.01	12.97	12.05	11.23
Desl. Máx. [mm]	1.50686	1.50686	0.90611	1.50686	1.310	1.149	1.017	0.906
Passo: 0,15 mm								
	Valor Actual	1ª Iteração	Valor Ótimo					
h [mm]	2.2	2.2	2.7	2.2	2.35	2.5	2.65	2.7
σ_{max} [MPa]	15.178	15.178	11.231	15.178	13.789	12.59	11.55	11.23
Desl. Máx. [mm]	1.50686	1.50686	0.90611	1.50686	1.275	1.093	0.948	0.906
Passo: 0,175 mm								
	Valor Actual	1ª Iteração	Valor Ótimo					
h [mm]	2.2	2.2	2.7	2.2	2.375	2.55	2.7	
σ_{max} [MPa]	15.178	15.178	11.231	15.178	13.578	12.22	11.23	
Desl. Máx. [mm]	1.50686	1.50686	0.90611	1.50686	1.242	1.041	0.906	
Passo: 0,2 mm								
	Valor Actual	1ª Iteração	Valor Ótimo					
h [mm]	2.2	2.2	2.7	2.2	2.4	2.6	2.7	
σ_{max} [MPa]	15.178	15.178	11.231	15.178	13.37	11.88	11.23	
Desl. Máx. [mm]	1.50686	1.50686	0.90611	1.50686	1.210	0.993	0.906	

B. OPTIMIZAÇÃO DOS METAMODELOS DO DESLOCAMENTO RESULTANTE

Nesta sub-secção do apêndice encontram-se todos os resultados relacionados com os estudos de optimização aos metamodelos da deformada máxima das máscaras M2_TC e M2_3DLS.

1. M2_TC: FLEXÃO LATERAL ESQUERDA DO PESCOÇO

1ª Corrida				
W*	X*med	-40,992	W(X*,Y*,Z*)	H
-1,1174	Y*med	-74,900	-1,117	5
	Z*med	65,806	-1,050	5,125
	Std(X*)	1,513	-0,988	5,25
	Std(Y*)	0,597	-0,933	5,375
	Std(Z*)	0,608	-0,880	5,5

2ª Corrida					
-1,1178	W*	X*med	-40,054	W(X*,Y*,Z*)	H
		Y*med	-75,300	-1,1178	5
		Z*med	65,665	-1,0507	5,125
		Std(X*)	0,740	-0,9898	5,25
		Std(Y*)	0,364	-0,9335	5,375
		Std(Z*)	0,424	-0,8818	5,5
3ª Corrida					
-1,1172	W*	X*med	-40,777	W(X*,Y*,Z*)	H
		Y*med	-75,007	-1,117	5
		Z*med	65,784	-1,051	5,125
		Std(X*)	1,066	-0,990	5,25
		Std(Y*)	0,462	-0,934	5,375
		Std(Z*)	0,546	-0,880	5,5
4ª Corrida					
-1,1171	W*	X*med	-40,772	W(X*,Y*,Z*)	H
		Y*med	-75,003	-1,117	5
		Z*med	65,774	-1,051	5,125
		Std(X*)	1,007	-0,990	5,25
		Std(Y*)	0,48347	-0,934	5,375
		Std(Z*)	0,443727	-0,881	5,5
5ª Corrida					
-1,1172	W*	X*med	-39,849	W(X*,Y*,Z*)	H
		Y*med	-75,364	-1,117	5
		Z*med	65,615	-1,051	5,125
		Std(X*)	1,194	-0,989	5,25
		Std(Y*)	0,562875	-0,933	5,375
		Std(Z*)	0,369125	-0,882	5,5
6ª Corrida					
-1,1168	W*	X*med	-40,969	W(X*,Y*,Z*)	H
		Y*med	-74,911	-1,117	5
		Z*med	65,798	-1,051	5,125
		Std(X*)	1,175	-0,990	5,25
		Std(Y*)	0,5374765	-0,933	5,375
		Std(Z*)	0,4788712	-0,880	5,5
7ª Corrida					
-1,1174	W*	X*med	-40,805	W(X*,Y*,Z*)	H
		Y*med	-74,984	-1,117	5
		Z*med	65,780	-1,051	5,125
		Std(X*)	1,467	-0,988	5,25
		Std(Y*)	0,661722	-0,933	5,375
		Std(Z*)	0,357416	-0,882	5,5
8ª Corrida					
-1,1171	W*	X*med	-39,848	W(X*,Y*,Z*)	H
		Y*med	-75,387	-1,117	5
		Z*med	65,638	-1,051	5,125

	Std(X*)	0,465	-0,990	5,25
	Std(Y*)	0,133172	-0,934	5,375
	Std(Z*)	0,561856	-0,881	5,5

9ª Corrida

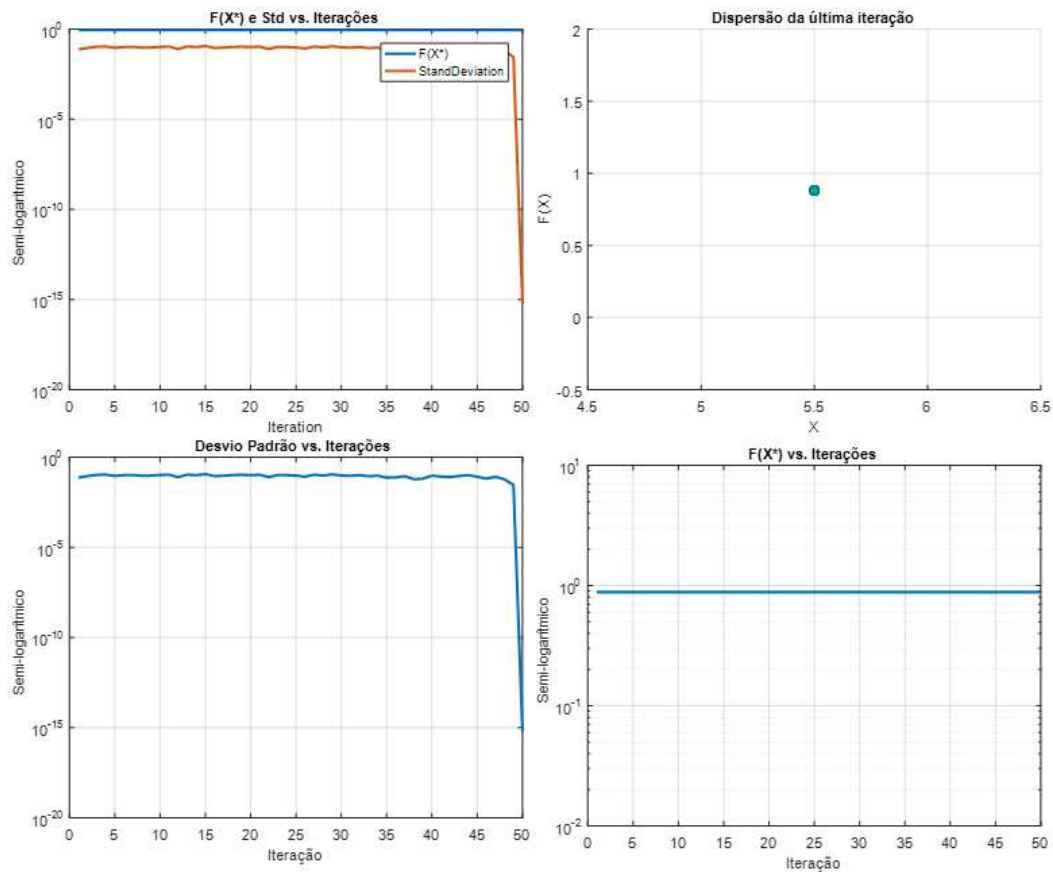
W*	X*med	-40,682	W(X*,Y*,Z*)	H
	Y*med	-75,064	-1,117	5
	Z*med	65,793	-1,051	5,125
-1,1173	Std(X*)	0,814	-0,990	5,25
	Std(Y*)	0,25818	-0,933	5,375
	Std(Z*)	0,633222	-0,880	5,5

10ª Corrida

W*	X*med	-40,522	W(X*,Y*,Z*)	H
	Y*med	-75,096	-1,118	5
	Z*med	65,727	-1,050	5,125
-1,1177	Std(X*)	1,088	-0,990	5,25
	Std(Y*)	0,511912	-0,933	5,375
	Std(Z*)	0,3544286	-0,882	5,5

3ª Corrida

Iteração	W_{X*,Y*(h)}	h	Desvio-padrão	Média
1	0,8819	5,5	0,0750	0,9297
2	0,8819	5,5	0,0895	0,9325
3	0,8819	5,5	0,1047	0,9562
4	0,8819	5,5	0,1085	0,9784
5	0,8819	5,5	0,0908	0,9366
.				
.				
.				
46	0,8819	5,5	0,0646	0,9117
47	0,8819	5,5	0,0816	0,9272
48	0,8819	5,5	0,0592	0,9104
49	0,8819	5,5	0,0287	0,8953
50	0,8819	5,5	0,0000	0,8819



2. M2_3DLS: FLEXÃO LATERAL ESQUERDA DO PESCOÇO

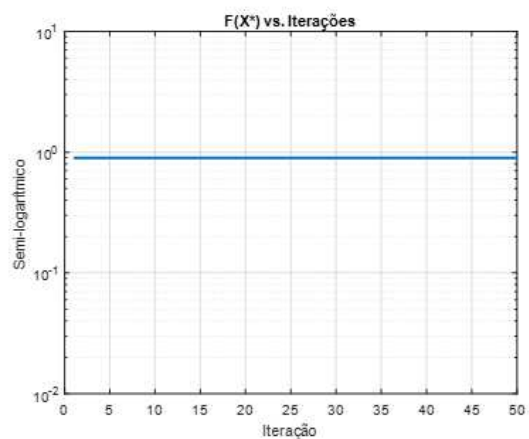
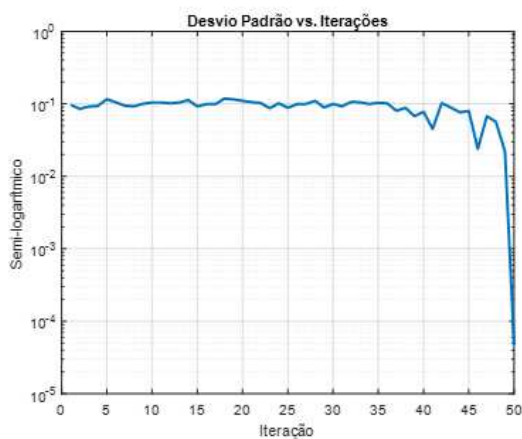
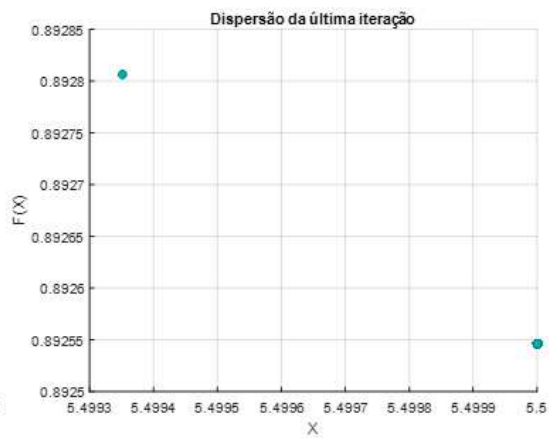
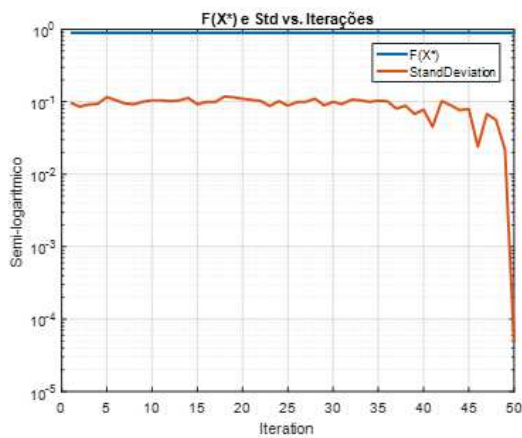
1ª Corrida					
-1,1368	W*	X*med	-40,711	W(X*,Y*,Z*)	H
		Y*med	-75,538	-1,137	5
		Z*med	64,568	-1,067	5,125
		Std(X*)	0,546	-1,005	5,25
		Std(Y*)	0,318	-0,946	5,375
		Std(Z*)	0,070	-0,892	5,5
2ª Corrida					
-1,13687	W*	X*med	-42,131	W(X*,Y*,Z*)	H
		Y*med	-73,804	-1,1369	5
		Z*med	62,979	-1,0681	5,125
		Std(X*)	3,069	-1,0044	5,25
		Std(Y*)	3,844	-0,9463	5,375
		Std(Z*)	3,541	-0,8716	5,5
3ª Corrida					
-1,1369	W*	X*med	-40,668	W(X*,Y*,Z*)	H
		Y*med	-75,572	-1,1369	5
		Z*med	64,580	-1,0678	5,125
		Std(X*)	0,557	-1,0032	5,25

	Std(Y*)	0,345	-0,9459	5,375
	Std(Z*)	0,069	-0,8924	5,5
4ª Corrida				
W*	X*med	-41,155	W(X*,Y*,Z*)	H
	Y*med	-75,263	-1,137	5
	Z*med	64,556	-1,067	5,125
-1,1368	Std(X*)	0,673	-1,004	5,25
	Std(Y*)	0,41547	-0,945	5,375
	Std(Z*)	0,068471	-0,891	5,5
5ª Corrida				
W*	X*med	-40,740	W(X*,Y*,Z*)	H
	Y*med	-75,521	-1,137	5
	Z*med	64,577	-1,068	5,125
-1,1368	Std(X*)	0,376	-1,005	5,25
	Std(Y*)	0,246660721	-0,945	5,375
	Std(Z*)	0,053865389	-0,892	5,5
6ª Corrida				
W*	X*med	-42,211	W(X*,Y*,Z*)	H
	Y*med	-73,758	-1,137	5
	Z*med	62,978	-1,068	5,125
-1,1367	Std(X*)	3,098	-1,002	5,25
	Std(Y*)	3,822538	-0,925	5,375
	Std(Z*)	3,545666	-0,892	5,5
7ª Corrida				
W*	X*med	-43,409	W(X*,Y*,Z*)	H
	Y*med	-72,160	-1,115	5
	Z*med	61,414	-1,047	5,125
-1,1153	Std(X*)	3,857	-1,005	5,25
	Std(Y*)	4,716976	-0,946	5,375
	Std(Z*)	4,396898	-0,892	5,5
8ª Corrida				
W*	X*med	-40,921	W(X*,Y*,Z*)	H
	Y*med	-75,409	-1,136	5
	Z*med	64,565	-1,068	5,125
-1,1357	Std(X*)	0,535	-1,004	5,25
	Std(Y*)	0,339729	-0,946	5,375
	Std(Z*)	0,083111	-0,893	5,5
9ª Corrida				
W*	X*med	-40,316	W(X*,Y*,Z*)	H
	Y*med	-75,782	-1,137	5
	Z*med	64,579	-1,068	5,125
-1,1367	Std(X*)	0,212	-1,004	5,25
	Std(Y*)	0,130186254	-0,946	5,375
	Std(Z*)	0,070270975	-0,892	5,5
10ª Corrida				
W*	X*med	-40,701	W(X*,Y*,Z*)	H

-1,1367	Y*med	-75,553	-1,137	5
	Z*med	64,589	-1,068	5,125
	Std(X*)	0,402	-1,005	5,25
	Std(Y*)	0,233017	-0,946	5,375
	Std(Z*)	0,060015	-0,892	5,5

1ª Corrida

Iteração	$W_{X^*,Y^*}(h)$	h	Desvio-padrão	Média
1	0,8925	5,5	0,0968	0,9680
2	0,8925	5,5	0,0854	0,9461
3	0,8925	5,5	0,0915	0,9425
4	0,8925	5,5	0,0935	0,9382
5	0,8925	5,5	0,1159	0,9781
⋮				
⋮				
⋮				
46	0,8925	5,5	0,0240	0,9011
47	0,8925	5,5	0,0675	0,9303
48	0,8925	5,5	0,0562	0,9192
49	0,8925	5,5	0,0218	0,9001
50	0,8925	5,5	0,0000	0,8926

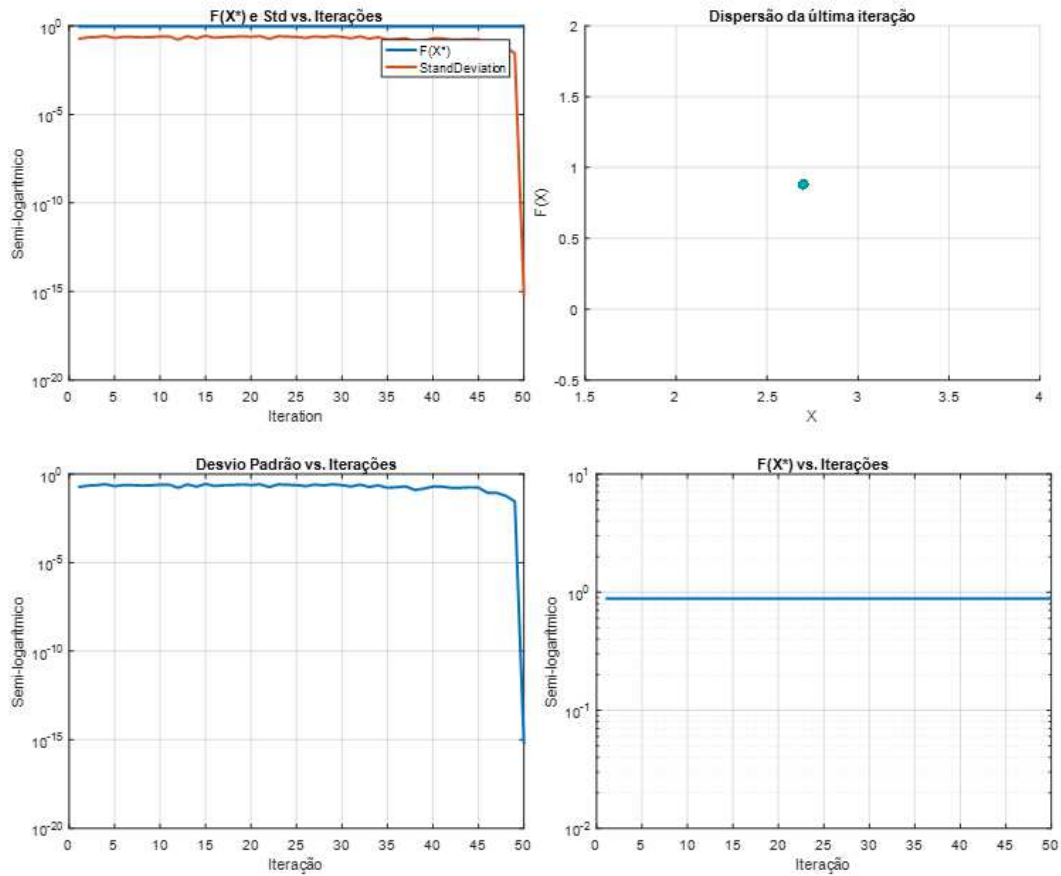


3. M2_TC: FLEXÃO DO PESCOÇO

1ª Corrida					
-1,466306	W*	X*med	-0,0053	W(X*,Y*,Z*)	H
		Y*med	-126,7851	-1,466	2,2
		Z*med	96,2990	-1,276	2,325
		Std(X*)	0,0188	-1,120	2,45
		Std(Y*)	0,3151	-0,991	2,575
		Std(Z*)	0,0000	-0,883	2,7
2ª Corrida					
-1,466306	W*	X*med	-0,0113	W(X*,Y*,Z*)	H
		Y*med	-126,7867	-1,4663	2,2
		Z*med	96,2990	-1,2757	2,325
		Std(X*)	0,0385	-1,1199	2,45
		Std(Y*)	0,3100	-0,9911	2,575
		Std(Z*)	0,0000	-0,8834	2,7
3ª Corrida					
-1,466306	W*	X*med	0,0236	W(X*,Y*,Z*)	H
		Y*med	-126,7765	-1,466	2,2
		Z*med	96,2990	-1,276	2,325
		Std(X*)	0,0461	-1,120	2,45
		Std(Y*)	0,3154	-0,991	2,575
		Std(Z*)	0,0000	-0,883	2,7
4ª Corrida					
-1,466305	W*	X*med	0,0125	W(X*,Y*,Z*)	H
		Y*med	-126,7797	-1,466	2,2
		Z*med	96,2990	-1,276	2,325
		Std(X*)	0,0235	-1,120	2,45
		Std(Y*)	0,3072	-0,991	2,575
		Std(Z*)	0,0000	-0,883	2,7
5ª Corrida					
-1,466306	W*	X*med	0,0007	W(X*,Y*,Z*)	H
		Y*med	-126,7833	-1,466	2,2
		Z*med	96,2990	-1,276	2,325
		Std(X*)	0,0217	-1,120	2,45
		Std(Y*)	0,3148	-0,991	2,575
		Std(Z*)	0,0000	-0,883	2,7
6ª Corrida					
-1,466306	W*	X*med	-0,0079	W(X*,Y*,Z*)	H
		Y*med	-126,7858	-1,466	2,2
		Z*med	96,2990	-1,276	2,325
		Std(X*)	0,0236	-1,120	2,45
		Std(Y*)	0,3131	-0,991	2,575
		Std(Z*)	0,0000	-0,883	2,7
7ª Corrida					
W*	X*med	0,0084	W(X*,Y*,Z*)	H	

-1,466306	Y*med	-126,7811	-1,466	2,2
	Z*med	96,2990	-1,276	2,325
	Std(X*)	0,0239	-1,120	2,45
	Std(Y*)	0,3162	-0,991	2,575
	Std(Z*)	0,0000	-0,883	2,7
8ª Corrida				
W*	X*med	0,0045	W(X*,Y*,Z*)	H
-1,466306	Y*med	-126,7821	-1,466	2,2
	Z*med	96,2990	-1,276	2,325
	Std(X*)	0,0262	-1,120	2,45
	Std(Y*)	0,3156	-0,991	2,575
	Std(Z*)	0,0000	-0,883	2,7
9ª Corrida				
W*	X*med	-0,0004	W(X*,Y*,Z*)	H
-1,466306	Y*med	-126,7836	-1,4663	2,2
	Z*med	96,2990	-1,2757	2,325
	Std(X*)	0,0127	-1,1199	2,45
	Std(Y*)	0,3124	-0,9911	2,575
	Std(Z*)	0,0000	-0,8834	2,7
10ª Corrida				
W*	X*med	-0,014	W(X*,Y*,Z*)	H
-1,466306	Y*med	-126,788	-1,466	2,2
	Z*med	96,299	-1,276	2,325
	Std(X*)	0,053	-1,120	2,45
	Std(Y*)	0,314356	-0,991	2,575
	Std(Z*)	0	-0,883	2,7

3ª Corrida				
Iteração	W_{X*,Y*(h)}	h	Desvio-padrão	Média
1	0,8833	2,7	0,1821	0,9913
2	0,8833	2,7	0,2168	0,9988
3	0,8833	2,7	0,2332	1,0367
4	0,8833	2,7	0,2633	1,0977
5	0,8833	2,7	0,2056	0,9993
.				
.				
.				
46	0,8833	2,7	0,0854	0,9195
47	0,8833	2,7	0,0863	0,9311
48	0,8833	2,7	0,0586	0,9117
49	0,8833	2,7	0,0282	0,8966
50	0,8833	2,7	0,0000	0,8833



4. M2_3DLS: FLEXÃO DO PESCOÇO

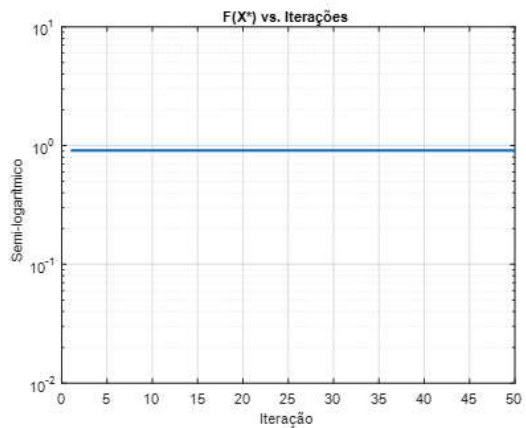
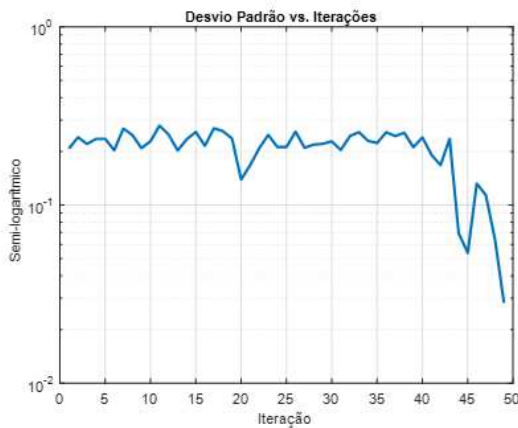
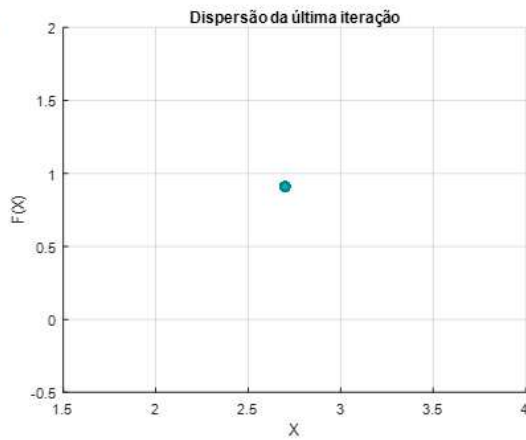
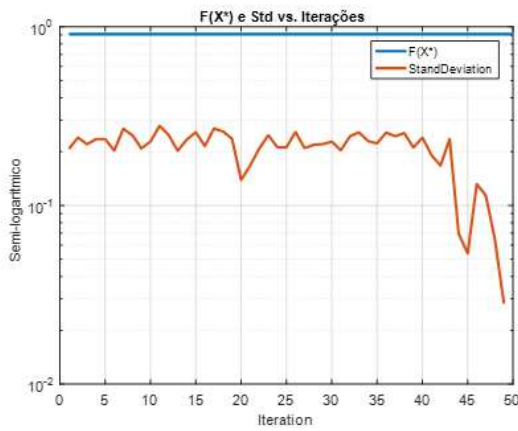
3ª Corrida					
-1,5129	W*	X*med	2,849	W(X*,Y*,Z*)	H
		Y*med	-131,217	-1,513	2,2
		Z*med	94,346	-1,315	2,325
		Std(X*)	0,029	-1,154	2,45
		Std(Y*)	0,038	-1,021	2,575
		Std(Z*)	0,042	-0,909	2,7
2ª Corrida					
-1,5129	W*	X*med	2,845	W(X*,Y*,Z*)	H
		Y*med	-131,220	-1,5129	2,2
		Z*med	94,344	-1,3148	2,325
		Std(X*)	0,031	-1,1542	2,45
		Std(Y*)	0,048	-1,0210	2,575
		Std(Z*)	0,042	-0,9093	2,7
3ª Corrida					
-1,5129	W*	X*med	6,718	W(X*,Y*,Z*)	H
		Y*med	-131,121	-1,513	2,2
		Z*med	92,557	-1,315	2,325
		Std(X*)	5,278	-1,154	2,45

	Std(Y*)	0,091	-1,022	2,575
	Std(Z*)	2,472	-0,910	2,7
4ª Corrida				
W*	X*med	4,781	W(X*,Y*,Z*)	H
	Y*med	-131,161	-1,513	2,2
	Z*med	93,480	-1,315	2,325
-1,5129	Std(X*)	4,315	-1,154	2,45
	Std(Y*)	0,105075	-1,022	2,575
	Std(Z*)	1,94165	-0,909	2,7
5ª Corrida				
W*	X*med	2,857	W(X*,Y*,Z*)	H
	Y*med	-131,211	-1,513	2,2
	Z*med	94,350	-1,315	2,325
-1,5129	Std(X*)	0,024	-1,154	2,45
	Std(Y*)	0,046604	-1,021	2,575
	Std(Z*)	0,041395	-0,909	2,7
6ª Corrida				
W*	X*med	2,855	W(X*,Y*,Z*)	H
	Y*med	-131,211	-1,5129	2,2
	Z*med	94,349	-1,3148	2,325
-1,5129	Std(X*)	0,015	-1,1542	2,45
	Std(Y*)	0,042	-1,0210	2,575
	Std(Z*)	0,039	-0,9093	2,7
7ª Corrida				
W*	X*med	4,772	W(X*,Y*,Z*)	H
	Y*med	-131,171	-1,513	2,2
	Z*med	93,550	-1,316	2,325
-1,5128	Std(X*)	4,320	-1,154	2,45
	Std(Y*)	0,132993	-1,021	2,575
	Std(Z*)	1,785508	-0,909	2,7
8ª Corrida				
W*	X*med	4,779	W(X*,Y*,Z*)	H
	Y*med	-131,234	-1,513	2,2
	Z*med	93,303	-1,315	2,325
-1,5129	Std(X*)	4,316	-1,155	2,45
	Std(Y*)	0,038098	-1,021	2,575
	Std(Z*)	2,346143	-0,909	2,7
9ª Corrida				
W*	X*med	8,640	W(X*,Y*,Z*)	H
	Y*med	-131,077	-1,513	2,2
	Z*med	91,766	-1,316	2,325
-1,5129	Std(X*)	5,285	-1,154	2,45
	Std(Y*)	0,117507	-1,022	2,575
	Std(Z*)	2,387883	-0,910	2,7
10ª Corrida				
W*	X*med	6,714	W(X*,Y*,Z*)	H

-1,5129	Y*med	-131,123	-1,513	2,2
	Z*med	92,548	-1,315	2,325
	Std(X*)	5,282	-1,154	2,45
	Std(Y*)	0,095642	-1,022	2,575
	Std(Z*)	2,479638	-0,910	2,7

3ª Corrida

Iteração	$W_{X^*,Y^*}(h)$	h	Desvio-padrão	Média
1	0,9092	2,7	0,2071	1,0217
2	0,9092	2,7	0,2400	1,0447
3	0,9092	2,7	0,2200	1,0136
4	0,9092	2,7	0,2350	1,0500
5	0,9092	2,7	0,2353	1,0525
⋮				
⋮				
⋮				
46	0,9092	2,7	0,1318	0,9630
47	0,9092	2,7	0,1135	0,9399
48	0,9092	2,7	0,0645	0,9401
49	0,9092	2,7	0,0282	0,9239
50	0,9092	2,7	0,0000	0,9092

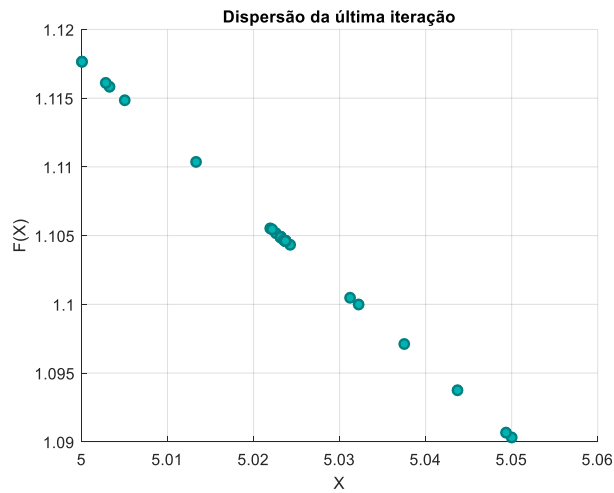
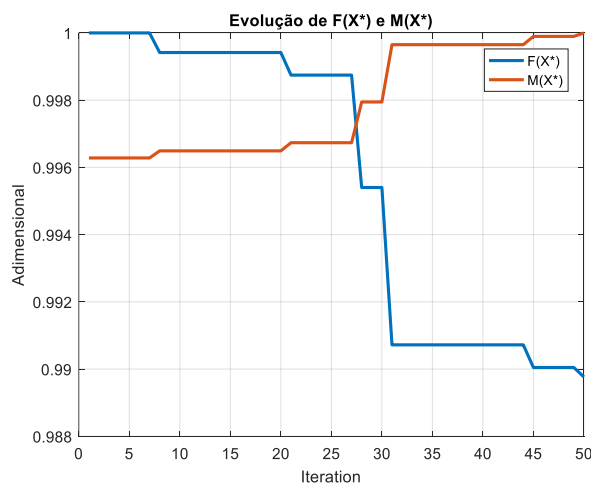
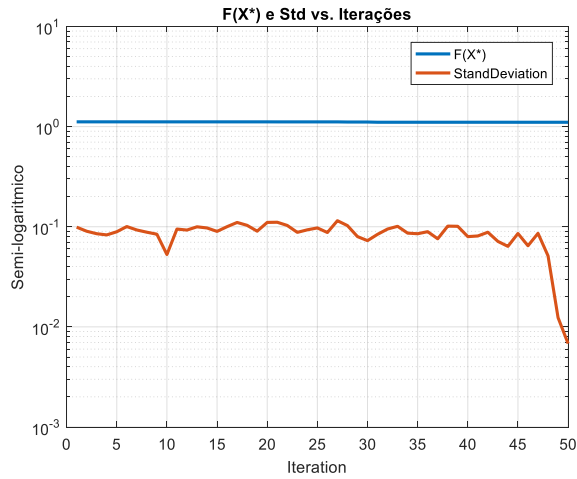


C. OPTIMIZAÇÃO DOS METAMODELOS DO DESLOCAMENTO RESULTANTE COM CONSTRANGIMENTO DE MASSA

Nesta sub-seção do Apêndice IX, apresentam-se os resultados dos estudos de otimização feito às máscaras de imobilização com o algoritmo WOA com constrangimento de massa.

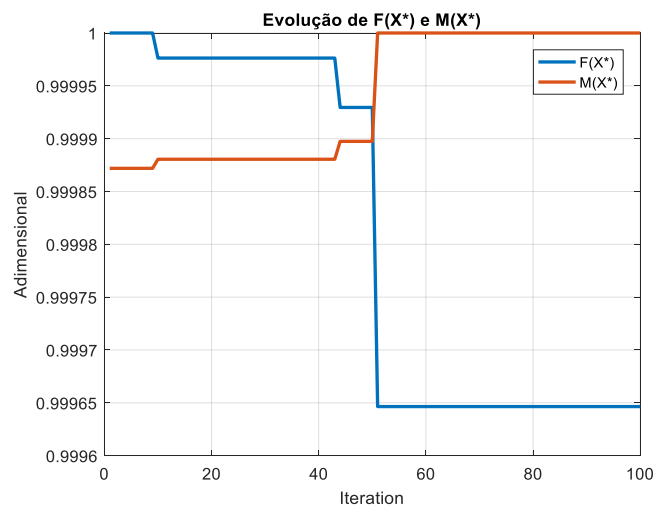
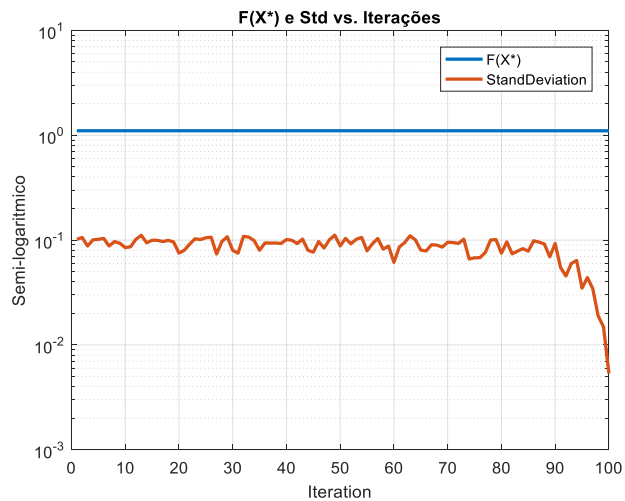
1. NÚMERO DE GERAÇÕES A UTILIZAR

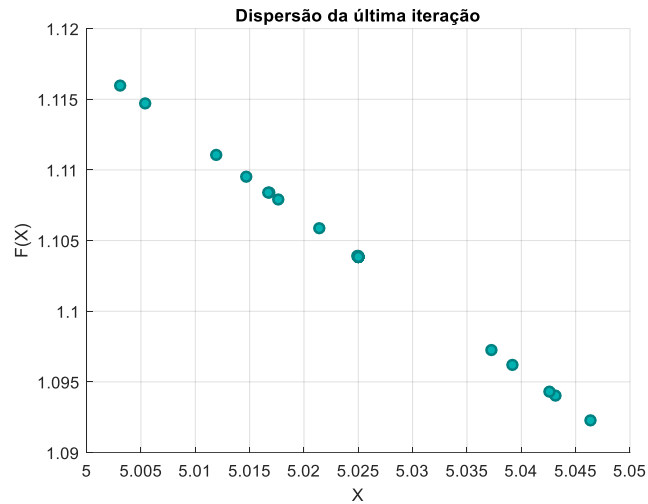
50 gerações					
Iteração	F(X*)	X*	M(X*)	StdDev	Média
1	1,11603233	5,0029564	858,055653	0,09898915	1,053425
2	1,11603233	5,0029564	858,055653	0,09018073	1,064505
3	1,11603233	5,0029564	858,055653	0,08515317	1,07301
4	1,11603233	5,0029564	858,055653	0,08285211	1,074465
5	1,11603233	5,0029564	858,055653	0,0890747	1,065927
6	1,11603233	5,0029564	858,055653	0,10044054	1,055845
7	1,11603233	5,0029564	858,055653	0,09281433	1,054003
8	1,1153814	5,0041308	858,237043	0,08815157	1,065098
9	1,1153814	5,0041308	858,237043	0,08422599	1,078016
10	1,1153814	5,0041308	858,237043	0,05276367	1,098505
.					
.					
.					
41	1,10567541	5,0217493	860,958673	0,08085869	1,068867
42	1,10567541	5,0217493	860,958673	0,08814189	1,071672
43	1,10567541	5,0217493	860,958673	0,07138198	1,07843
44	1,10567541	5,0217493	860,958673	0,06366756	1,083719
45	1,10492396	5,0231218	861,170723	0,08559037	1,064467
46	1,10492396	5,0231218	861,170723	0,06455663	1,08201
47	1,10492396	5,0231218	861,170723	0,08593198	1,063398
48	1,10492396	5,0231218	861,170723	0,05119643	1,088426
49	1,10492396	5,0231218	861,170723	0,01235539	1,104071
50	1,10460889	5,0236977	861,25969	0,00681231	1,105073



100 gerações					
Iteração	F(X*)	X*	M(X*)	StdDev	Média
1	1,104267596	5,024321649	861,356099	0,101866389	1,043419
2	1,104267596	5,024321649	861,356099	0,105889444	1,026398
3	1,104267596	5,024321649	861,356099	0,087806978	1,068912
4	1,104267596	5,024321649	861,356099	0,100678904	1,043698

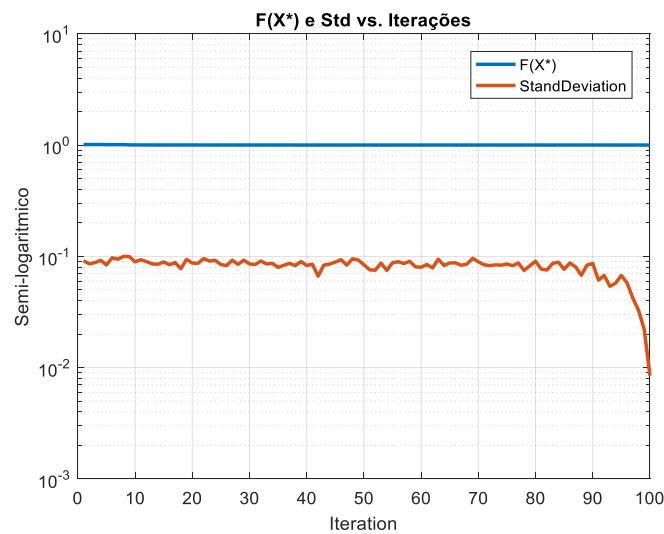
5	1,104267596	5,024321649	861,356099	0,101707147	1,036831
6	1,104267596	5,024321649	861,356099	0,103844869	1,03913
7	1,104267596	5,024321649	861,356099	0,087735228	1,062167
8	1,104267596	5,024321649	861,356099	0,096845915	1,045019
9	1,104267596	5,024321649	861,356099	0,093404817	1,056581
10	1,104241393	5,024369568	861,363503	0,084771122	1,065364
.					
.					
.					
91	1,103877127	5,02503587	861,466449	0,05499293	1,084922
92	1,103877127	5,02503587	861,466449	0,045446271	1,088755
93	1,103877127	5,02503587	861,466449	0,059770283	1,079937
94	1,103877127	5,02503587	861,466449	0,064026606	1,077547
95	1,103877127	5,02503587	861,466449	0,034787756	1,092608
96	1,103877127	5,02503587	861,466449	0,043970887	1,091297
97	1,103877127	5,02503587	861,466449	0,034411528	1,092419
98	1,103877127	5,02503587	861,466449	0,018952073	1,102977
99	1,103877127	5,02503587	861,466449	0,014873403	1,102786
100	1,103877127	5,02503587	861,466449	0,005353863	1,104065

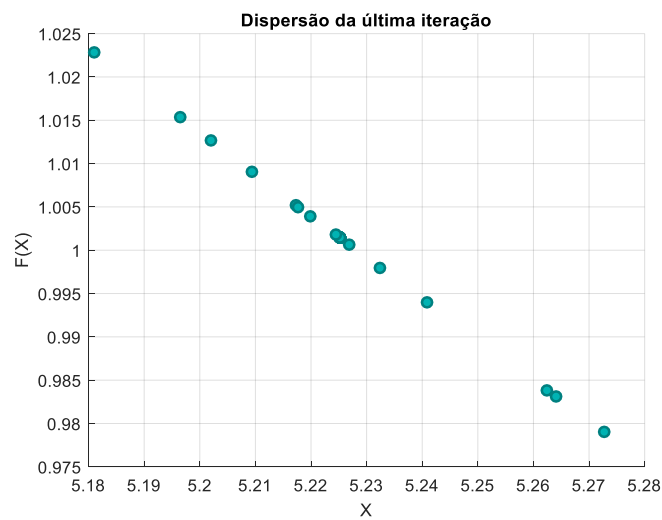
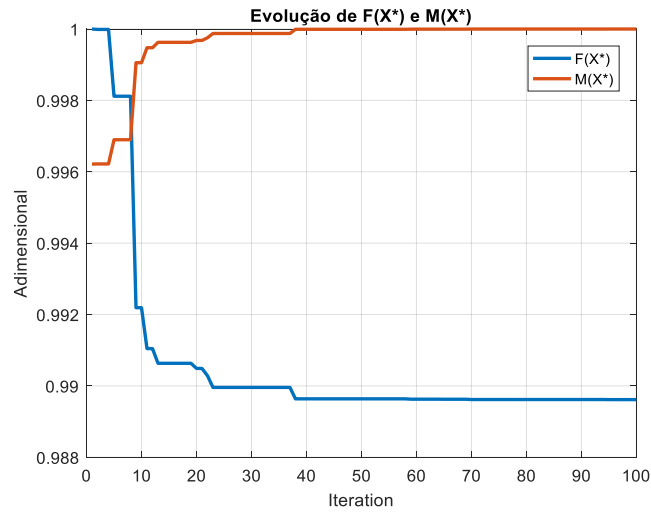




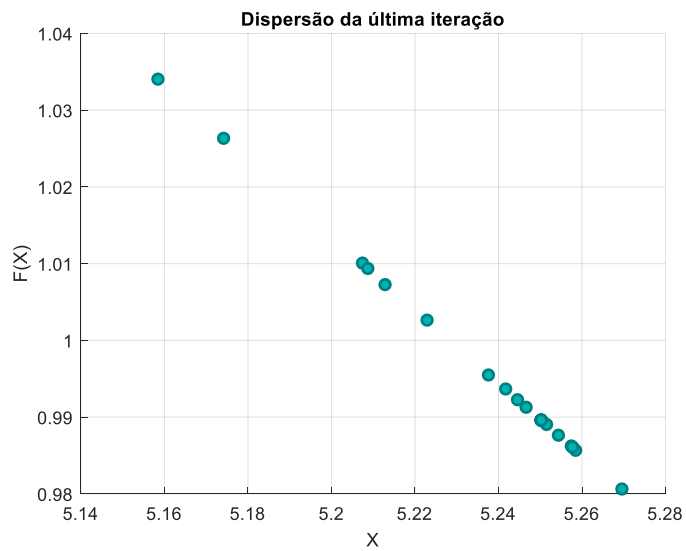
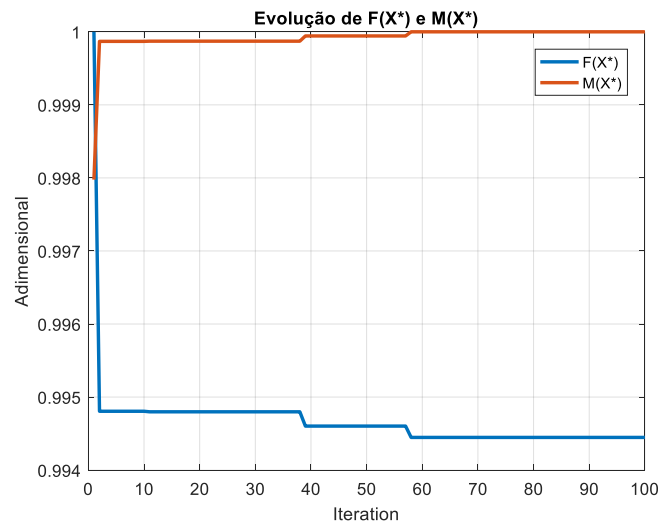
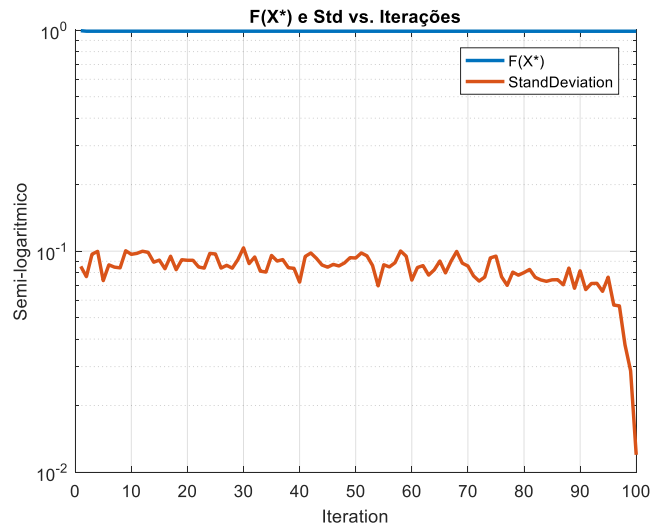
2. M2_TC: FLEXÃO LATERAL ESQUERDA DO PESCOÇO

55% de Redução					
Iteração	F(X*)	X*	M(X*)	StdDev	Média
1	1,011920064	5,2034024	889,0572507	0,091310929	1,007303
2	1,01190805	5,20342716	889,0610841	0,085738953	1,021195
3	1,01190805	5,20342716	889,0610841	0,087992083	1,002718
4	1,011907592	5,2034281	889,0612302	0,092077748	1,011178
5	1,010013613	5,20733629	889,666362	0,083745349	0,9966
.					
.					
.					
96	1,001411427	5,22521923	892,4355521	0,057712492	0,991116
97	1,001411427	5,22521923	892,4355521	0,04224452	1,004178
98	1,001411427	5,22521923	892,4355521	0,032851628	1,007905
99	1,001411427	5,22521923	892,4355521	0,022067049	1,004371
100	1,001411427	5,22521923	892,4355521	0,008475158	1,001232



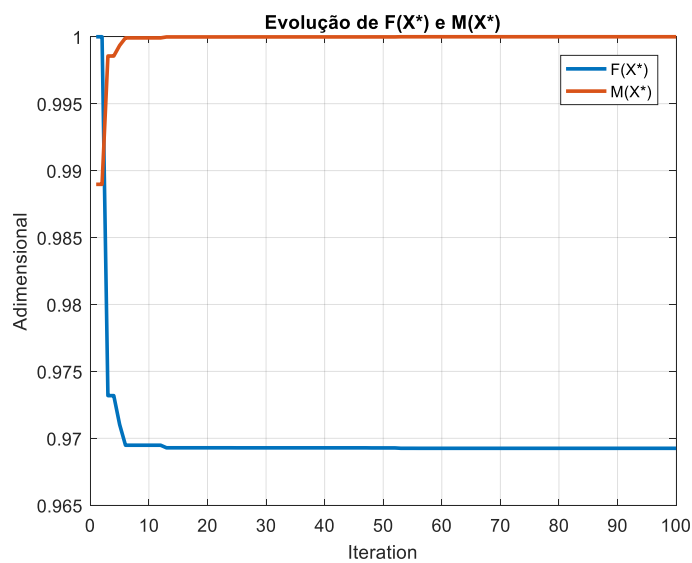
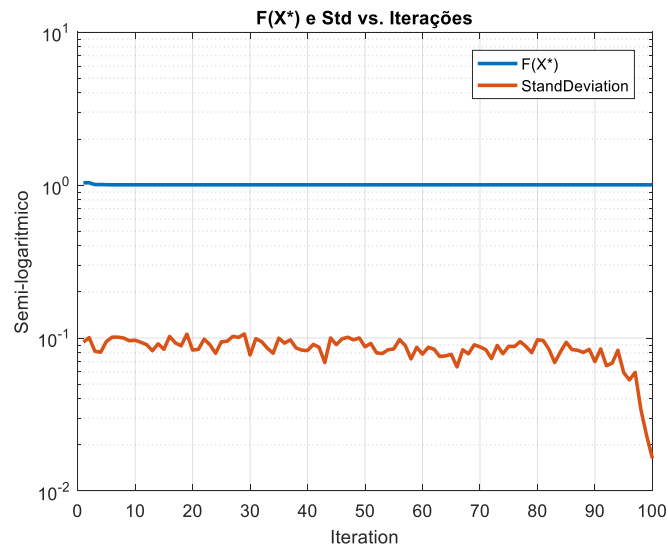


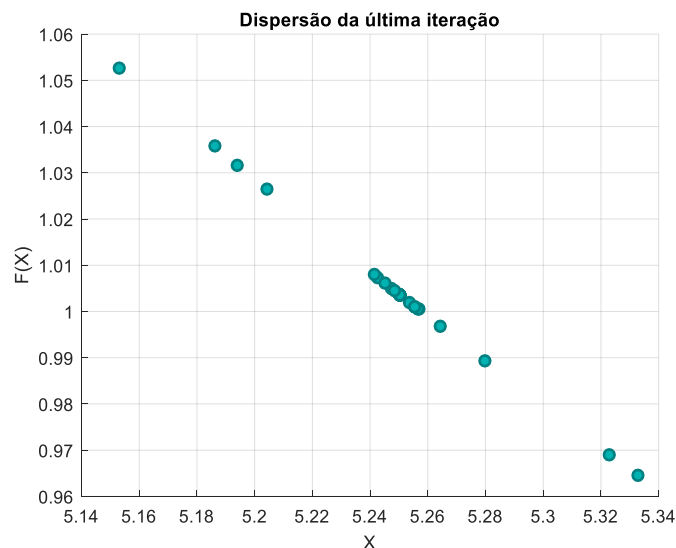
50% de Redução					
Iteração	F(X*)	X*	M(X*)	StdDev	Média
1	0,995088192	5,238505624	894,4932121	0,085313	0,988779
2	0,989919262	5,249457444	896,1894655	0,076689	0,975798
3	0,989919262	5,249457444	896,1894655	0,096893	0,981809
4	0,989919262	5,249457444	896,1894655	0,099777	0,99081
5	0,989919262	5,249457444	896,1894655	0,073563	0,947322
.					
.					
.					
96	0,989562936	5,25021547	896,3068759	0,057014	0,998123
97	0,989562936	5,25021547	896,3068759	0,056534	1,002028
98	0,989562936	5,25021547	896,3068759	0,037715	1,007686
99	0,989562936	5,25021547	896,3068759	0,028735	0,985984
100	0,989562936	5,25021547	896,3068759	0,011971	0,994261



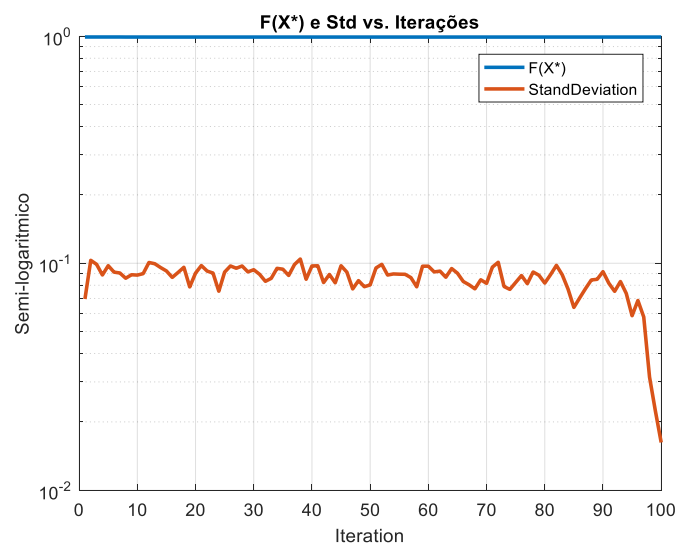
3. M2_3DLS: FLEXÃO LATERAL ESQUERDA DO PESCOÇO

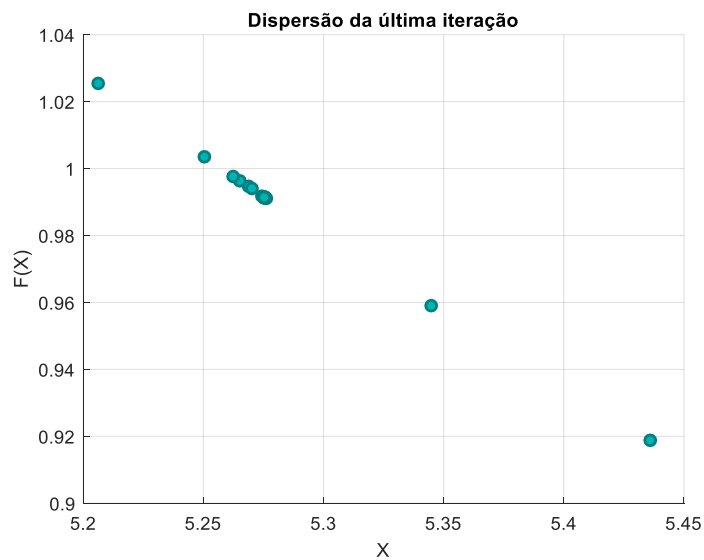
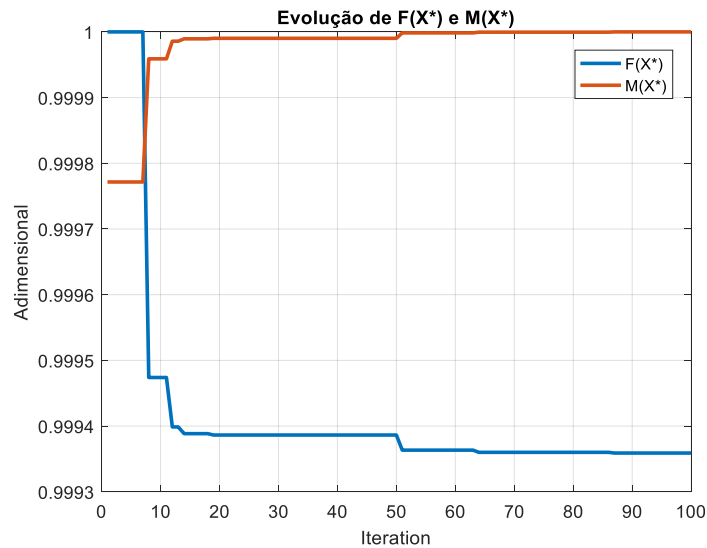
50% de Redução					
Iteração	F(X*)	X*	M(X*)	StdDev	Média
1	1,035477198	5,186482407	897,991289	0,0940279	1,039963
2	1,035477198	5,186482407	897,991289	0,1006755	1,019028
3	1,007713686	5,241890017	906,694572	0,0819201	1,020411
4	1,007713686	5,241890017	906,694572	0,0807648	1,024547
5	1,00548065	5,246442603	907,409837	0,0950032	0,991115
.					
.					
.					
96	1,00363927	5,250207948	908,001434	0,0531932	1,011869
97	1,00363927	5,250207948	908,001434	0,0596186	1,001283
98	1,00363927	5,250207948	908,001434	0,0340729	1,019017
99	1,00363927	5,250207948	908,001434	0,0229939	1,008694
100	1,003638314	5,250209905	908,001741	0,0163515	1,004861





45% de Redução					
Iteração	F(X*)	X*	M(X*)	StdDev	Média
1	0,992174626	5,2738852	911,7218759	0,0695621	0,982053
2	0,992174626	5,2738852	911,7218759	0,1030089	1,003959
3	0,992174626	5,2738852	911,7218759	0,0988977	0,993817
4	0,992174626	5,2738852	911,7218759	0,0887624	1,024359
5	0,992174626	5,2738852	911,7218759	0,097572	1,020685
.					
.					
.					
96	0,991538571	5,27521084	911,9301938	0,0685323	1,01404
97	0,991538571	5,27521084	911,9301938	0,0579953	0,979209
98	0,991538571	5,27521084	911,9301938	0,0315117	0,99637
99	0,991538571	5,27521084	911,9301938	0,0223675	0,989421
100	0,991538571	5,27521084	911,9301938	0,0162361	0,990094

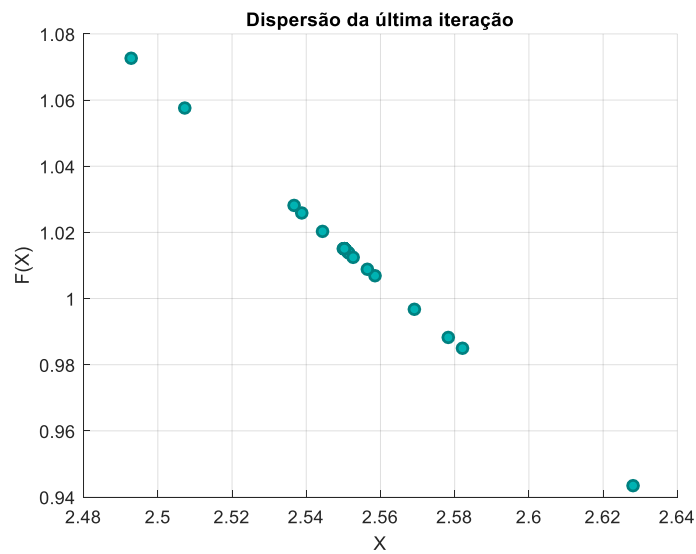
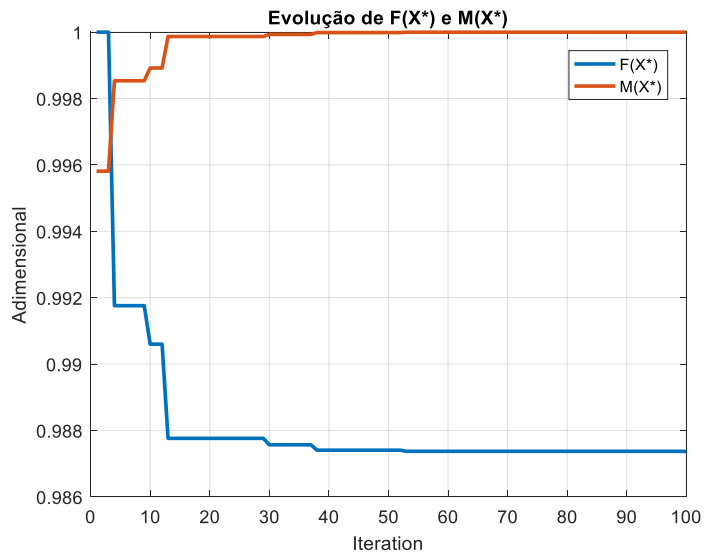
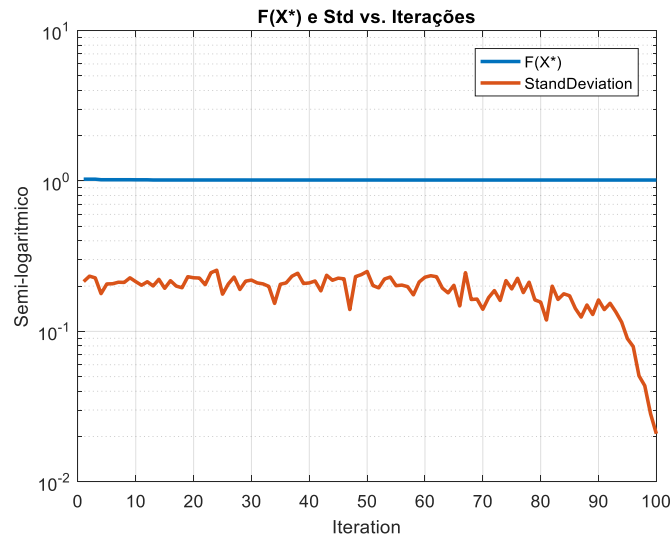




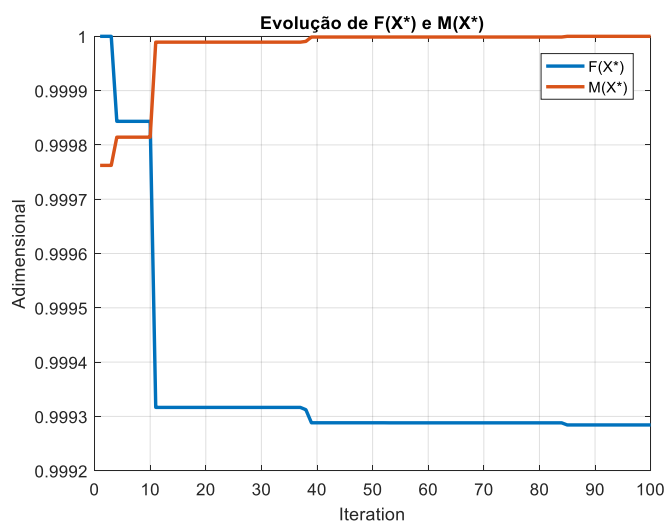
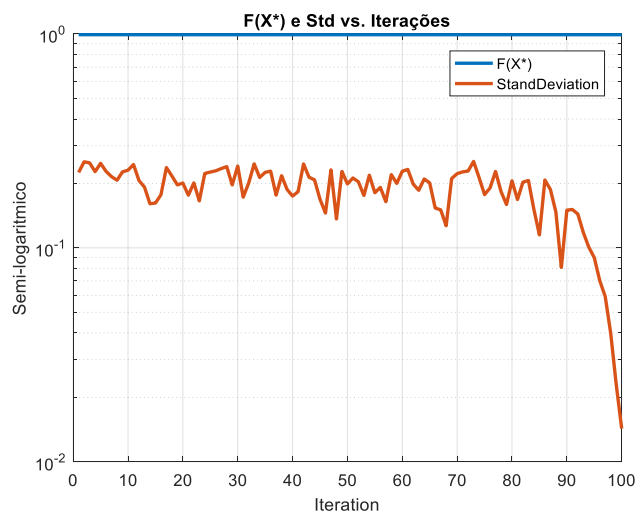
4. M2_TC: FLEXÃO DO PESCOÇO

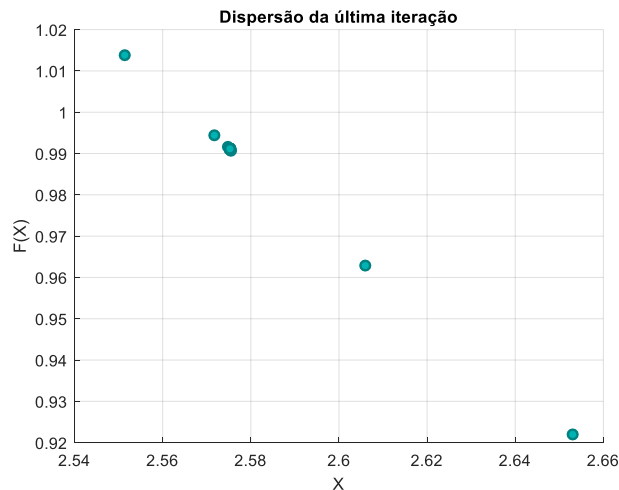
30% de Redução					
Iteração	$F(X^*)$	X^*	$M(X^*)$	StdDev	Média
1	1,027902248	2,53689371	480,1035731	0,214476928	1,100112
2	1,027902248	2,53689371	480,1035731	0,232949987	1,188382
3	1,027902248	2,53689371	480,1035731	0,226838313	1,11494
4	1,019431401	2,54552864	481,4164187	0,178194131	1,064624
5	1,019431401	2,54552864	481,4164187	0,206709475	1,040104
.					
.					
.					
96	1,01492159	2,55017088	482,1222632	0,079285036	1,021849
97	1,01492159	2,55017088	482,1222632	0,050633534	1,022631
98	1,01492159	2,55017088	482,1222632	0,043511165	1,005648

99	1,01492159	2,55017088	482,1222632	0,028322667	1,010135
100	1,014917441	2,55017516	482,1229148	0,020869664	1,013776



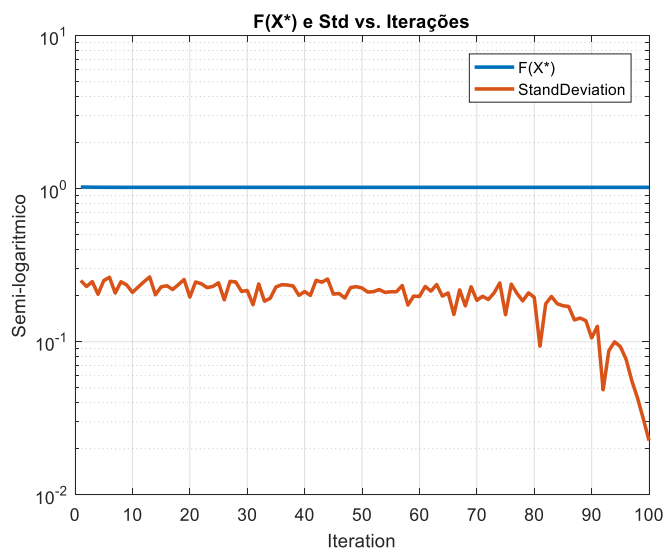
25% de Redução					
Iteração	F(X*)	X*	M(X*)	StdDev	Média
1	0,99188333	2,574383403	485,804142	0,225209	1,056303
2	0,99188333	2,574383403	485,804142	0,252469	1,129523
3	0,99188333	2,574383403	485,804142	0,249651	1,162656
4	0,99172802	2,57454949	485,8294	0,227078	1,07893
5	0,99172802	2,57454949	485,8294	0,248353	1,132606
.					
.					
.					
96	0,991173386	2,57514293	485,919649	0,070236	0,994156
97	0,991173386	2,57514293	485,919649	0,059168	0,990216
98	0,991173386	2,57514293	485,919649	0,039828	0,99082
99	0,991173386	2,57514293	485,919649	0,023029	0,995109
100	0,991173386	2,57514293	485,919649	0,014292	0,988772

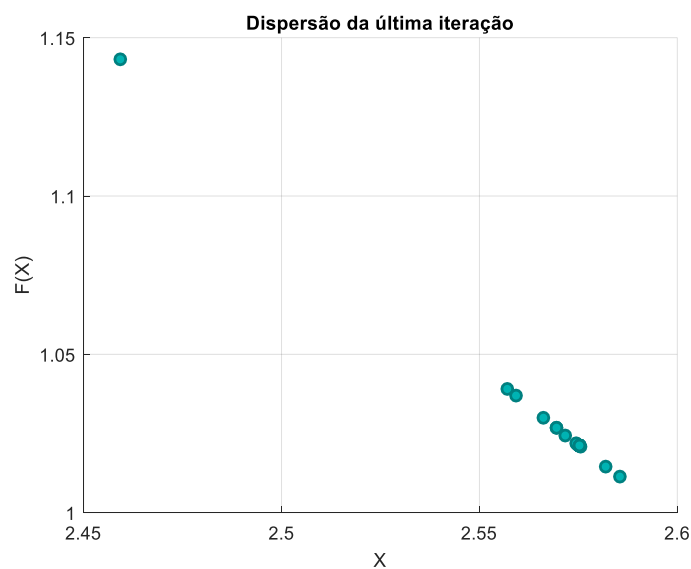
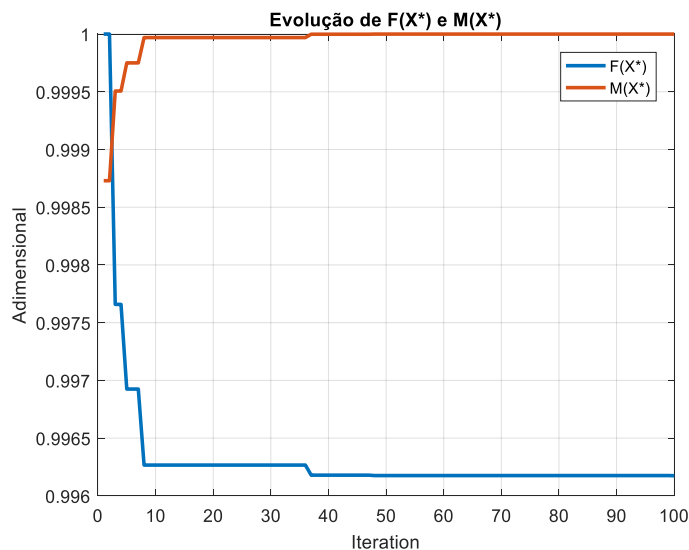




5. M2_3DLS: FLEXÃO DO PESCOÇO

25% de Redução					
Iteração	F(X*)	X*	M(X*)	StdDev	Média
1	1,02509525	2,57111578	490,98916	0,25106574	1,161443
2	1,02509525	2,57111578	490,98916	0,22962076	1,101846
3	1,02269472	2,573592293	491,371083	0,24724059	1,131294
4	1,02269472	2,573592293	491,371083	0,20431972	1,097611
5	1,0219428	2,574369728	491,49098	0,25103731	1,119854
.					
.					
.					
96	1,02117464	2,575164808	491,613598	0,07689921	1,029884
97	1,02117464	2,575164808	491,613598	0,05559593	1,015316
98	1,02117464	2,575164808	491,613598	0,04287759	1,01993
99	1,02117464	2,575164808	491,613598	0,03137433	1,020153
100	1,02117334	2,575166152	491,613805	0,02262437	1,026591





20% de Redução					
Iteração	$F(X^*)$	X^*	$M(X^*)$	StdDev	Média
1	1,003315982	2,593890333	494,501677	0,2428889	1,105494
2	1,003315982	2,593890333	494,501677	0,2553493	1,142996
3	1,002838342	2,594397517	494,579906	0,2042845	1,084658
4	1,001518508	2,595800711	494,796341	0,2416878	1,161924
5	0,999350079	2,598111586	495,152784	0,2106416	1,076922
⋮					
⋮					
⋮					
96	0,997450808	2,600141231	495,465854	0,0834392	1,032298
97	0,997450808	2,600141231	495,465854	0,0884831	1,02133
98	0,997450808	2,600141231	495,465854	0,0505182	1,000926
99	0,997450808	2,600141231	495,465854	0,0312945	0,997157
100	0,997450808	2,600141231	495,465854	0,0140959	0,999803

