



ISEL

**INSTITUTO SUPERIOR DE ENGENHARIA DE LISBOA**

**Departamento de Engenharia Mecânica**

# **Influência da Variabilidade dos Materiais Compósitos na Resposta Dinâmica de Estruturas Laminadas**

**FÁBIO RAIMUNDO DAMÁSIO**  
(Licenciado em Engenharia Mecânica)

Trabalho Final de Mestrado para a obtenção do grau de  
Mestre em Engenharia Mecânica

Orientadores:

Doutora Maria Amélia Ramos Loja  
Doutora Alda Cristina Jesus V. Nunes de Carvalho  
Doutor Tiago Alexandre Narciso da Silva

Juri:

Presidente: Doutor João Manuel Ferreira Calado,  
Vogal: Doutor Aurélio Lima Araújo,  
Vogal: Doutora Maria Amélia Ramos Loja,

**Dezembro 2015**



# Agradecimentos

Aos meus pais por todo o esforço e apoio que me deram ao longo destes últimos 5 anos. Foi um período difícil que sem eles não teria conseguido alcançar. Muito obrigado!

Ao meu irmão Joel que está neste momento a iniciar o seu percurso académico e a quem desejo toda a sorte do mundo. A tua presença foi essencial para a minha motivação do dia-a-dia, conta com a minha sempre que precisares! Muito Obrigado!

Ao André a quem agradeço pela sincera amizade nestes últimos anos! Muito Obrigado!

Ao Sérgio, João, Miguel, Inês, David, Diogo, José Berardo, Gonçalo, aos membros da equipa do Formula Student e a todos aqueles que estiveram o meu lado durante este percurso. Muito Obrigado! (PS: Que as nossas férias no Bom Sucesso se mantenham por muitos anos!)

Um especial Obrigado aos meus orientadores, a professora Amélia Loja, a professora Alda Carvalho e o professor Tiago Silva, pois sem a constante ajuda deles este trabalho não teria sido possível. Agradeço-lhes não só pelo envolvimento no trabalho como também pela forma como o fizeram. A constante preocupação com o meu trabalho e com a necessidade de me motivarem leva-vos, na minha opinião, para outro nível! Levo-vos daqui como excelentes docentes que são mas também como pessoas de referência! Muito obrigado!

Ao meu orientador de estágio, Tiago Carreira, pela compreensão e motivação em terminar este trabalho. Por ser um excelente mentor nos meus primeiros passos enquanto profissional, muito obrigado!

A todos aqueles que directamente ou indirectamente possibilitaram a realização deste trabalho, à minha família e amigos. Muito obrigado!

Por fim, mas não menos importante, muito obrigado à Joana que esteve sempre ao meu lado durante estes últimos anos. Muito obrigado pela compreensão, paciência e motivação para andar em frente sem nunca olhar para trás!



# Resumo

Devido às suas propriedades diversificadas, os materiais compósitos são fortes candidatos à melhoria de diferentes tipos de estruturas. As propriedades dinâmicas das estruturas constituídas por estes materiais podem ser manipuladas pela sua geometria, pelos diferentes materiais utilizados ou ainda pela distribuição de cada material na própria estrutura, como a orientação ou concentração de fibras em cada camada. A determinação de modelos adequados para a caracterização do comportamento do material é fundamental para a obtenção de bons resultados. No entanto, todos estes aspectos/parâmetros contribuem para a variabilidade das propriedades mecânicas/dinâmicas do modelo. Assim, é de elevada importância determinar o impacto da incerteza inerente aos processos de modelação e produção no comportamento estático e dinâmico dessas estruturas. Para tal, propõe-se uma abordagem comparativa entre metodologias de modelação de materiais compósitos e a caracterização da variabilidade intrínseca do modelo, tendo por base uma amostra da variabilidade das respostas. O trabalho visa proceder a um estudo comparativo entre metodologias de modelação e subsequentemente relacionar as variáveis de entrada com as variáveis de saída de um modelo de elementos finitos. Deste modo, pretende-se descrever um modelo equivalente com base probabilística, de modo a identificar quais os parâmetros de entrada mais relevantes para a determinação do comportamento dinâmico da estrutura.

## **Palavras-chave**

Elementos finitos; FEM; FGM; Materiais compósitos; Regressão linear múltipla; Validação de pressupostos de regressão; Variabilidade



# Abstract

Due to their diversified properties, composites materials are strong candidates to improve different kinds of structures. The properties of the structure can be manipulated by their geometry, by combining different materials or by mixing the distribution of each material in the structure such as orientation or concentration of fibers in each layer. The determination of suitable models for characterizing its behavior is critical to obtain good results. However, all these possibilities add additional variability of the mechanical properties. Thus, it is highly important to determine the impact of the uncertainty inherent in modeling and production processes in static and dynamic behavior of these structures. To this end, it is proposed a comparative approach of modeling methodologies composites and the characterization of the intrinsic variability of the model, based on a sample of responses. The work intended to make a comparative study of modeling methodologies and correlate input variables to the output variable of a finite element model, allowing the implementation of a model with equal probability basis, so as to identify which input parameters is more relevant for determining the static and dynamic behavior of the structure.

## **Keywords**

Finite elements; FEM; FGM; Composite materials; Multiple linear regression; Validation regression assumptions; Variability



# Résumé

En raison de leurs propriétés variées, les matériaux composites sont de forts candidats à l'amélioration de différents types de structures. Les propriétés dynamiques de ces matériaux peuvent être manipulés par sa géométrie, par l'utilisation de différentes combinaison de matériaux ou par la distribution de chaque matériel dans la structure telle que l'orientation ou la concentration de fibres selon les coordonnées de l'espace. La détermination du modèle le plus approprié à la caractérisation du comportement des matériaux est essentielle pour obtenir de bons résultats. Cependant, toutes ces possibilités ajoutent une certaine variabilité supplémentaire des propriétés mécaniques/dynamiques des matériaux et influencent les réponses du modèle. Ainsi, il est très important de déterminer l'impact de l'incertitude inhérente à la modélisation et production de ces matériaux dans comportement statique et dynamique de ces structures. À cette fin, ce document propose une approche comparative des méthodologies de modélisation de matériaux composites et la caractérisation de la variabilité intrinsèque du modèle, basé sur un échantillon simulé de la variabilité des réponses du modèle.

Le travail vise à faire une étude comparative des méthodes de modélisation et de corrélérer les variables d'entrée à la variable de sortie d'un modèle d'éléments finis, permettant la mise en  $\frac{1}{2}$ uvre d'un modèle avec base de probabilité, de façon à identifier les paramètres d'entrée plus pertinent pour la détermination du comportement dynamique de la structure.

## **mots clés**

Elements finits; FEM; FGM; Matériaux composites; Validation des hypothèses de régression, Variabilité



# Índice

<b>Agradecimentos</b>	<b>iii</b>
<b>Resumo</b>	<b>v</b>
<b>Abstract</b>	<b>vii</b>
<b>Résumé</b>	<b>ix</b>
<b>Índice</b>	<b>xi</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>xv</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xvii</b>
<b>Lista de Algoritmos</b>	<b>xix</b>
<b>Nomenclatura</b>	<b>xxi</b>
<b>1 Introdução e Objectivos</b>	<b>1</b>
1.1 Objectivos . . . . .	1
1.2 Estrutura da Dissertação . . . . .	1
1.3 Materiais Compósitos . . . . .	2
Vantagens e Curiosidades . . . . .	4
Metodologias de Modelação . . . . .	6
1.4 Enquadramento Teórico . . . . .	7
Modelação de Materiais Compósitos . . . . .	8
Variabilidade na Modelação de Materiais Compósitos . . . . .	9
<b>2 Fundamentos Teóricos</b>	<b>11</b>
2.1 Materiais Compósitos . . . . .	11
Materiais Compósitos de Partículas, com Gradiente Funcional (FGM) . . . . .	11
Cálculo de Propriedades Média . . . . .	12
Distribuição de Partículas de Reforço em Espessura . . . . .	12
Regra das Misturas . . . . .	13
Regra de Mori-Tanaka . . . . .	14
Teorias de Laminados . . . . .	15
Teoria de Deformação de Corte de Primeira Ordem (FSDT) . . . . .	16
Lei Constitutiva da Lâmina . . . . .	16

	Equações Constitutivas do Laminado . . . . .	18
2.2	Elementos Finitos . . . . .	23
	Geração de Malhas . . . . .	23
	Geração de Malha para Elementos Q4 . . . . .	24
	Geração de Malha para Elementos Q9 . . . . .	26
	Geração de Malha para Elementos Q16 . . . . .	27
	Formulação de Lagrange . . . . .	28
	Formulação de Kriging . . . . .	30
	Equações de Equilíbrio . . . . .	32
	Definição da Matriz de Rigidez . . . . .	32
	Definição da Matriz de Massa . . . . .	33
2.3	Simulação e Comparação de Amostras . . . . .	34
	Simulação . . . . .	34
	Comparação de Amostras . . . . .	34
2.4	Modelo de Regressão Linear . . . . .	35
	Regressão Linear Múltipla . . . . .	35
	Análise de Variância . . . . .	37
	Coeficiente de Determinação . . . . .	38
	Teste à Significância individual dos Coeficientes do Modelo . . . . .	39
	Validação dos Pressupostos do Modelo de Regressão Linear . . . . .	39
<b>3</b>	<b>Casos de Estudo</b> . . . . .	<b>41</b>
3.1	Comparação de Modelos . . . . .	41
	Caso 1: Estudo de Convergência . . . . .	41
	Caso 2: Validação dos Elementos Finitos . . . . .	44
	Validação dos Resultados da Deformada Transversal Máxima . . . . .	44
	Validação da Frequência Fundamental . . . . .	46
3.2	Abordagem Contínua e Discreta . . . . .	48
3.3	Distribuição de Potência e Exponencial . . . . .	55
3.4	Interface de Utilização dos Modelos . . . . .	65
	Definição do Laminado . . . . .	66
	Definição do Elemento Finito . . . . .	66
	Resultados . . . . .	67
3.5	Simulação de Variabilidade nos Parâmetros de Entrada do Modelo . . . . .	69
3.6	Influência da Variabilidade no Comportamento Estático da Placa Compósita . . . . .	73
	Estudo Descritivo da Deformada Transversal Máxima . . . . .	74
	Regressão Linear Múltipla . . . . .	74
	1º-Modelo de Regressão . . . . .	74
	Pressupostos de Validação . . . . .	75
	2º-Modelo de Regressão . . . . .	76
	Pressupostos de validação . . . . .	77
	3º-Modelo de Regressão . . . . .	77
	Pressupostos de validação . . . . .	78
3.7	Variabilidade não Contabilizada . . . . .	78
3.8	Influência da Variabilidade no Comportamento Dinâmico do Laminado . . . . .	80
	Estudo descritivo das frequências naturais . . . . .	80
	Correlação entre Frequências Naturais . . . . .	80

<i>ÍNDICE</i>	xiii
Regressão Linear Múltipla . . . . .	83
Pressupostos de Validação . . . . .	83
Regressão Linear entre Frequências . . . . .	83
<b>4 Conclusões e Trabalho Futuro</b>	<b>87</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>91</b>



# Lista de Figuras

1.1	Classificação dos materiais compósitos (adaptado de Mota Soares et al. (2000)) . . . . .	3
1.2	Representação esquemática de uma lamina de fibras . . . . .	3
1.3	Representação esquemática de compósito FGM . . . . .	4
1.4	Representação esquemática de compósito sandwich . . . . .	4
1.5	F-117 retirado a 15 de Agosto de ( <a href="https://archive.is/20120629101020/http://www.af.mil/information/heritage/aircraft.asp">https://archive.is/20120629101020/http://www.af.mil/information/heritage/aircraft.asp</a> ) . . . . .	5
1.6	Aeronáutica comercial (adaptado de Up (2012)) . . . . .	5
1.7	Evolução dos materiais compósitos (adaptado de Caetano (2014)) . . . . .	6
1.8	Ilustração de alguns elementos finitos . . . . .	7
2.1	Modelação do FGM (adaptado de Wessel (2004)) a) abordagem contínua; b) abordagem discreta . . . . .	11
2.2	Distribuição da fracção de volume de partículas cerâmicas ao longo da espessura descrito pela regra da potência . . . . .	12
2.3	Distribuição do módulo de Young ao longo da espessura descrito pela regra exponencial . . . . .	13
2.4	Iso-Tensão e Iso-Deformação . . . . .	14
2.5	A) Representação esquemática de um laminado não sujeito a carregamento B) Representação esquemática de um laminado sujeito a carregamento segundo considerações FSMT (adaptado de J.N.Reddy (1997)) . . . . .	15
2.6	A) Referencial da lâmina vs referencial global . . . . .	18
2.7	Representação esquemática dos diversos elementos . . . . .	23
2.8	Numeração local do elemento Q4 . . . . .	24
2.9	Numeração global considerando elementos Q4 . . . . .	24
2.10	Numeração local do elemento Q9 . . . . .	26
2.11	Numeração local do elemento Q16 . . . . .	27
2.12	Funções de interpolação de Kriging do elemento de 9 nós . . . . .	31
2.13	Aleatoriedade condicionada . . . . .	34
2.14	Distribuição dos resíduos para diferentes valores de x (adaptado de Devore (2011)) . . . . .	36
2.15	Distribuição dos resíduos (adaptado de Montgomery (2003)) . . . . .	40
3.1	Estudo de convergência dos elementos . . . . .	43
3.2	Validação da deformada transversal máxima . . . . .	44
3.3	Distribuição de cerâmico ao longo da espessura descrito pela lei de potência para $p=7$ . . . . .	45
3.4	Modelação do FGM (adaptado de Wessel (2004)) a) abordagem contínua; b) abordagem discreta . . . . .	48
3.5	Representação da distribuição contínua e discreta de partículas considerando 10 camadas discretas . . . . .	49

3.6	Efeito da distribuição de partículas sobre a deformada transversal máxima para uma relação $a/h=20$ . . . . .	51
3.7	Representação linear da deformada transversal máxima . . . . .	52
3.8	Representação logarítmica da deformada transversal máxima . . . . .	52
3.9	Representação linear da frequência fundamental . . . . .	54
3.10	Representação logarítmica da frequência fundamental . . . . .	54
3.11	Distribuição do módulo de Young ao longo da espessura segundo a lei exponencial e a lei de potência . . . . .	55
3.12	Representação do compósito descrito pela lei exponencial . . . . .	56
3.13	Desvio em função da percentagem de núcleo FGM-caso estático . . . . .	60
3.14	Desvio em função da percentagem de núcleo FGM-caso dinâmico . . . . .	64
3.15	Interface de utilização . . . . .	65
3.16	Interface de caso de estudo . . . . .	66
3.17	Interface de elemento a seleccionar . . . . .	67
3.18	Interface de resultados obtidos . . . . .	67
3.19	Deformação do laminado . . . . .	68
3.20	Modos de vibração do laminado . . . . .	68
3.21	Distribuição de fracção de volume para diferentes valores de expoente . . . . .	69
3.22	Distribuição das variáveis simuladas . . . . .	71
3.23	Variabilidade do parâmetro de distribuição . . . . .	72
3.24	Distribuição das propriedades mecânicas efectivas ao longo da espessura do laminado . . . . .	72
3.25	Variabilidade do parâmetro de distribuição . . . . .	73
3.26	Pressupostos de validação do 1º modelo . . . . .	76
3.27	Pressupostos de validação do 2º modelo . . . . .	77
3.28	Pressupostos de validação do 3º modelo . . . . .	78
3.29	Distribuições e correlações entre frequências naturais . . . . .	81
3.30	Modos de vibração . . . . .	82
3.31	Pressupostos de validação do modelo dinâmico . . . . .	83
3.32	Representação da 2ª frequência natural em função da fundamental . . . . .	84
3.33	Representação das regressões das frequências superior em função da fundamental . . . . .	85

# Lista de Tabelas

2.1	Pontos e pesos de pontos de Gauss (adaptado de Azevedo Álvaro F. M. (2003)) . . . . .	33
2.2	Inverso da distribuição em função de $\alpha$ . . . . .	35
2.3	Tabela ANOVA . . . . .	38
3.1	Propriedades para estudo de convergência . . . . .	42
3.2	Deformada utilizando elementos de base de Lagrange . . . . .	42
3.3	Deformada utilizando elementos de base de Kriging . . . . .	43
3.4	Deformada transversal máxima [ $w_{norm}$ ] (Nguyen et al. (2007)) . . . . .	45
3.5	Validação da deformação transversal máxima $w_{norm}$ . . . . .	46
3.6	Validação da frequência fundamental . . . . .	47
3.7	Propriedades mecânicas dos materiais utilizados . . . . .	48
3.8	Abordagem discreta vs contínua: Deformada máxima . . . . .	50
3.9	Abordagem discreta vs contínua: Frequência fundamental [ $\bar{\omega}$ ] . . . . .	53
3.10	Propriedades mecânicas dos materiais utilizados . . . . .	56
3.11	Deformada $Al - ZrO_2$ [ $w_{norm} = w_{max} / h$ ] . . . . .	57
3.12	Deformada $Al - Al_2O_3$ [ $w_{norm} = w_{max} / h$ ] . . . . .	58
3.13	Deformada $Al - WC$ [ $w_{norm} = w_{max} / h$ ] . . . . .	59
3.14	Frequência fundamental $Al - ZrO_2$ [ $\bar{\omega} = 10\omega h \sqrt{\rho_c E_c}$ ] . . . . .	61
3.15	Frequência fundamental $Al - Al_2O_3$ [ $\bar{\omega} = 10\omega h \sqrt{\rho_c E_c}$ ] . . . . .	62
3.16	Frequência fundamental $Al - WC$ [ $\bar{\omega} = 10\omega h \sqrt{\rho_c E_c}$ ] . . . . .	63
3.17	Valores de simulação dos parâmetros . . . . .	70
3.18	Teste Kolmogorov-Smirnov 2 amostras . . . . .	74
3.19	Estudo descritivo da deformação máxima . . . . .	74
3.20	Coefficientes do modelo que inclui todos os parâmetros (modelo de Lagrange) . . . . .	75
3.21	Coefficientes do modelo que inclui todos os parâmetros (modelo de Kriging) . . . . .	75
3.22	Coefficientes do modelo que inclui parâmetros geométricos (modelo de Lagrange) . . . . .	76
3.23	Coefficientes do modelo que inclui parâmetros geométricos (modelo de Kriging) . . . . .	77
3.24	Coefficientes do modelo que inclui interação entre variáveis (modelo de Lagrange) . . . . .	77
3.25	Coefficientes do modelo que inclui interação entre variáveis (modelo de Kriging) . . . . .	78
3.26	Testes à normalidade dos resíduos . . . . .	78
3.27	Coefficientes do modelo que inclui apenas a variabilidade as propriedades mecânicas (modelo de Lagrange) . . . . .	79
3.28	Teste Kolmogorov-Smirnov 2 amostras . . . . .	80
3.29	Estudo descritivo de frequências naturais . . . . .	80
3.30	Coefficientes do modelo de regressão da frequência fundamental (modelo de Lagrange) . . . . .	83
3.31	Regressão linear entre as frequências superiores e a fundamental . . . . .	84



# Lista de Algoritmos

1	Matrizes $A$ , $B$ , $D$ , $A_s$ e $\rho$ de FGM: Abordagem contínua . . . . .	20
2	Matrizes $A$ , $B$ , $D$ , $A_s$ e $\rho$ de FGM: Abordagem discreta . . . . .	21
3	Matrizes $A$ , $B$ , $D$ , $A_s$ e $\rho$ de FGM: distribuição exponencial . . . . .	21
4	Matrizes $A$ , $B$ , $D$ , $A_s$ e $\rho$ de compósito ortotrópico . . . . .	22
5	Geração de Malha Q4 (adaptado de Ferreira (2010)) . . . . .	25
6	Geração de Malha Q9 . . . . .	26
7	Geração de Malha Q16 . . . . .	27



# Nomenclatura

São aqui apresentadas as principais nomenclaturas e simbologias utilizadas ao longo deste trabalho:

## Acrónimos:

**FGM** - Material com gradiente funcional de partículas

**FSDT** - Teoria de deformação de corte de primeira ordem

**HSDT** - Teoria de deformação de corte de ordem superior

**Q4** - Elemento composto por 4 nós

**Q9** - Elemento composto por 9 nós

**Q16** - Elemento composto por 16 nós

**LHS** - Amostra Latina Hipercúbica

## Nomenclatura Romana:

**$V_c(z)$ ;  $V_m(z)$**  - Função de distribuição da fracção de volume de partículas de cerâmico ou metálicas

**$h$**  - Espessura do laminado

**$p$**  - Expoente da função de potência da distribuição de fracção de volume de partículas

**$P(z)$**  - Distribuição da propriedade ( $P$ ) em estudo ao longo da espessura ( $z$ )

**$E$ ;  $E_c$ ;  $E_m$**  - Módulo de Young geral ou correspondente ao material cerâmico ou metálico

**$K_c$ ;  $K_m$**  - Módulo de compressão volumétrica correspondente ao material cerâmico ou metálico

$G_c; G_m$  - Módulo de rigidez transversal correspondente ao material cerâmico ou metálico

$u; v; w$  - graus de liberdade correspondentes ao deslocamento

$[Q]$  - Coeficientes de rigidez elástica reduzidos da lâmina

$[\bar{Q}]$  - Coeficientes de rigidez elástica reduzidos transformados da lâmina

$[A]; [B]; [D]; [As]$  - Matrizes de coeficientes da rigidez elástica para cálculo das resultantes

$\{W\}$  - Vector dos pesos de Gauss

$\{P\}$  - Vector dos pontos de Gauss

$q(x, y)$  - Função de pontos nodais pertencentes ao domínio de interpolação

$\bar{q}(x, y)$  - Função de interpolação entre pontos nodais

$\{y\}$  - Vector de variáveis dependentes

$[x]$  - Matriz de variáveis independentes

$\{\hat{y}\}$  - Vector de valores dependentes estimados

$\bar{y}$  - Valor médio do conjunto de observações da variável dependente

$H_0; H_1$  - Hipóteses estatísticas de teste

$R^2$  - Coeficiente de determinação

$R_{corr}^2$  - Coeficiente de determinação corrigido

$m; n$  - dimensão de amostras

$w$  - Deformada transversal máxima normalizada pela espessura

$w_{max}$  - Deformada transversal máxima resultante

$q_0$  - Pressão uniformemente distribuída sobre o laminado

$a/h$  - Relação entre comprimento de aresta do laminado e espessura

$e/h$  - Relação entre espessura de núcleo FGM e espessura da placa compósita

## Nomenclatura Grega:

$V_{c\alpha}$ ;  $V_{c\beta}$  - Fração de volume de partículas de um material  $\alpha$  ou  $\beta$

$P_{\alpha}$ ;  $P_{\beta}$  - Propriedade em estudo de um material  $\alpha$  ou  $\beta$

$\nu$ ;  $\nu_c$ ;  $\nu_m$  - coeficiente de poisson geral ou correspondente ao material cerâmico ou metálico

$\rho$ ;  $\rho_c$ ;  $\rho_m$  - peso específico geral ou correspondente ao material cerâmico ou metálico

$\phi_x$ ,  $\phi_y$  - graus de liberdade correspondentes às rotações

$\{\epsilon\}$  - Vector de extensões

$\{\sigma\}$  - Vector de tensões

$[\xi; \eta]$  - Coordenadas locais do elemento bidimensional

$\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  - Combinação linear de funções

$\{\beta\}$  - Vector de coeficientes de declive parciais

$\{\epsilon\}$  - Vector de resíduos do modelo de regressão

$\alpha$  - significância



# Capítulo 1

## Introdução e Objectivos

### 1.1 Objectivos

Esta dissertação tem por objectivo compreender e implementar diversas metodologias de elementos finitos perspectivando a caracterização do comportamento de materiais compósitos laminados com reforço de partículas. O presente trabalho foca-se, principalmente, nas diversas formas de modelação de materiais FGM ou sandwich compostos por um núcleo FGM. A modelação por FEM pode ser abordada por inúmeras teorias e metodologias, sendo que, neste caso, pretende-se estudar a influência da utilização de diversas técnicas de modelação, baseadas na teoria FSDT, variando os elementos ao nível do número de nós por elemento e das funções de forma implementadas na caracterização dos elementos ou ainda na forma como é caracterizado o laminado ao nível de homogeneização de propriedades. Este trabalho visa ainda compreender a resposta desses modelos, em termos estáticos e dinâmicos, e como poderiam estes ser resumidos, em termos de modelos probabilísticos, de modo a compreender a sensibilidade dos mesmos à variabilidade dos materiais em estudo. Pretende-se ainda desenvolver uma aplicação que permita interagir de forma simples com as metodologias de modelação implementadas e permitir assim a utilização desses modelos através de uma interface de utilização.

### 1.2 Estrutura da Dissertação

O trabalho encontra-se organizado em cinco capítulos distintos. É fulcral, tendo em conta o foco desta dissertação, num primeiro capítulo, abordar, de forma introdutória, o tema dos materiais compósitos e dos métodos de modelação aplicados à caracterização dos mesmos. É apresentada uma breve descrição dos diferentes tipos de materiais e quais as vantagens da sua aplicação face aos materiais conhecidos como convencionais. São apresentados factos históricos acerca da utilização destes materiais e como estes têm vindo, progressivamente, a ganhar lugar no mercado industrial. Este capítulo visa ainda apresentar, de um modo geral, as principais contribuições deste trabalho e quais os objetivos a alcançar.

No segundo capítulo, é apresentado o estado da arte. Este capítulo visa indicar a bibliografia mais actual acerca do tema em estudo, no qual estão presentes referências de relevância acerca da modelação de materiais compósitos e onde são apresentadas diversas abordagens de modelação destes materiais. São apresentadas diversas abordagens de estudo acerca dos materiais compósitos, mostrando a grande presença do tema no mundo actual da investigação e mostrando ainda os diversos caminhos que esta tem seguido.

Na terceira parte, exploram-se os diversos conceitos e metodologias implementadas. São descritas e apresentadas, especificamente, todas as ferramentas, metodologias e conceitos utilizados ao longo deste trabalho. Como por exemplo, conceitos acerca da modelação de materiais compósitos, da implementação das diversas metodologias de elementos finitos e técnicas de abordagem estatística.

As principais contribuições deste trabalho são expostas no quarto capítulo, no qual todos os conceitos apresentados no capítulo anterior são postos em prática. Este está dividido por diferentes secções, sendo que cada uma delas descreve um caso de estudo distinto. O primeiro caso de estudo parte de uma validação dos métodos de modelação implementados e sustentados por resultados presentes na bibliografia existente. O segundo caso de estudo ilustra as diferenças da implementação de uma abordagem considerando diferentes tipos de homogeneização de propriedades. O terceiro ilustra as diferenças em considerar distribuições de partículas de materiais compósitos de diferentes formas. Adicionalmente, é ainda descrito um quarto caso de estudo baseado no desenvolvimento de uma interface de utilização dos métodos implementados permitindo desse modo a utilização simplificada das metodologias. Numa perspetiva diferente, é apresentado o quinto caso de estudo que visa compreender a influência da variabilidade dos materiais ou das distribuições ou condições geométricas sobre os resultados do modelo, sendo estes últimos compostos pela deformação máxima do laminado e as frequências naturais do mesmo. Nesta abordagem, do quinto caso de estudo, são apresentados modelos probabilísticos que visam correlacionar as variáveis de entrada com as variáveis de saída do modelo de elementos finitos implementado na tentativa de caracterizar a distribuição de variabilidade intrínseca do modelo.

No quinto e último capítulo, são apresentadas as conclusões gerais do trabalho. De forma sumária, as diferentes conclusões obtidas com a descrição dos diversos casos de estudo. São finalmente efectuadas algumas sugestões de estudos futuros e possíveis seguimentos a este trabalho.

### 1.3 Materiais Compósitos

O estudo de novos materiais está a tornar-se um ramo da engenharia muito importante na competitividade e liderança dos diversos mercados. Materiais que permitam ir mais longe, com menos peso, por menos custos são cada vez mais essenciais e visto como arma fundamental em mercados exigentes, tais como no ramo aeronáutico ou no mercado da competição automóvel de excelência ou outros. O estudo de novos materiais está cada vez mais virado para as necessidades industriais como meios de diferenciação no mercado e desse modo permitir alcançar a liderança do mesmo. Para tal, é necessário primeiramente compreender as necessidades a alcançar para permitir direccionar o estudo de novos materiais com características especificamente desenhadas para o caso em estudo.

Os materiais compósitos são fortes candidatos à substituição de materiais conhecidos como tradicionais. Estes materiais possibilitam uma infinidade de diferentes características por serem obtidos por união de diversos materiais e possibilitam desse modo a união de diversos pontos fortes característicos de materiais diferentes. Reddy (1994) afirma que, na data de publicação, os materiais compósitos eram o assunto de investigação com maior número de adeptos nas áreas da indústria química, eléctrica, nas ciências dos materiais, na engenharia mecânica e de estruturas.

Com a utilização dos materiais compósitos pretende-se fundamentalmente conseguir propriedades físicas, químicas, mecânicas ou térmicas pretendidas misturando 2 ou mais materiais cujas propriedades individuais não correspondam às propriedades pretendidas de forma satisfatória. Os materiais compósitos são geralmente classificados em 3 classes distintas, tal como ilustrado na Figure 1.1.

Os materiais compósitos de fibra consistem em dois ou mais materiais em que um deles se apresenta em forma de fibras, podendo ser exposto em fibras longas (figura a de 1.2) ou curtas (figura b

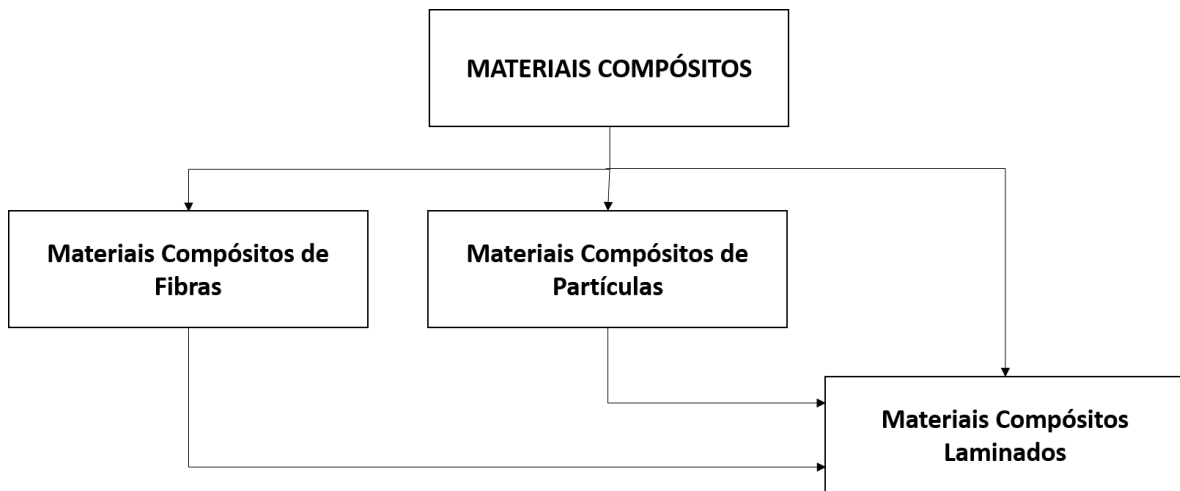


Figura 1.1: Classificação dos materiais compósitos (adaptado de Mota Soares et al. (2000))

de 1.2), com orientação definida ou não e sendo este ou estes geralmente os materiais que apresentam melhores propriedades mecânicas, ou seja as propriedades desejadas. Os restantes materiais são utilizados enquanto matriz de forma a envolver e isolar as fibras do meio ambiente e assim proteger as fibras, das agressões do meio envolvente, que poderão por exemplo, ser a humidade, sujidades e impurezas existentes. Os materiais compósitos de fibras longas são muito conhecidos por possuírem

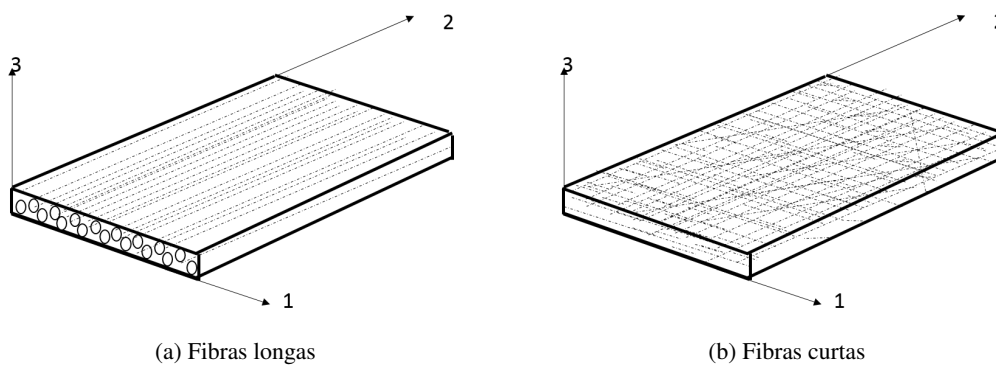


Figura 1.2: Representação esquemática de uma lamina de fibras

propriedades ortotrópica que permite adaptar a estrutura às solicitações mecânicas dependendo exclusivamente da orientação da fibras. Estes materiais são muito utilizados em estruturas onde a relação peso/performance é um factor fundamental.

Os materiais compósitos de partículas consistem em materiais resultantes da mistura de macro ou micro partículas de um certo material envolvido por outro ou outros materiais cujo o papel consiste em envolver essas mesmas partículas, chamado de matriz. Estes materiais são muito utilizados quando existe a necessidade de materiais com propriedades químicas ou térmicas diferentes, em função da localização no compósito. As partículas podem ser distribuídas de forma aleatória ou por uma gradação espacial otimizada para a aplicação pretendida. A figura 1.3 exemplifica um material compósito com

distribuição de partículas entre 2 determinados materiais  $A$  e  $B$  segundo a direcção da espessura  $z$ .

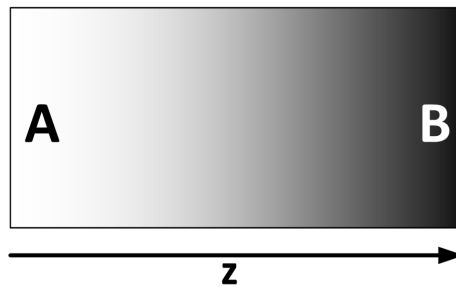


Figura 1.3: Representação esquemática de compósito FGM

Os materiais compósitos laminados são o resultados da disposição em camadas de materiais iguais ou diferentes, incluindo laminas de materiais compósitos do tipo descrito anteriormente (Reddy (1994)). Combinando os vários tipos de estruturas de materiais compósitos apresentados anteriormente resulta assim uma infinidade de configurações possíveis levando assim a inúmeras possibilidades por vezes de alcançarmos as propriedades pretendidas. Exemplos da aplicação de materiais sandwich (figura 1.4) podem ser encontrados em inúmeras situações da indústria aeronáutica ou indústria naval.

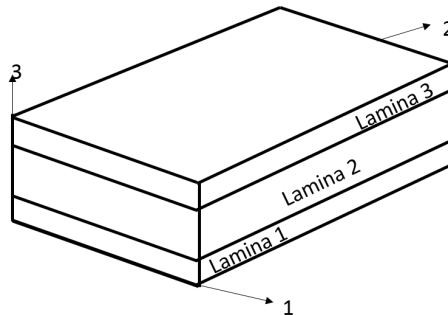


Figura 1.4: Representação esquemática de compósito sandwich

### Vantagens e Curiosidades

A década de 1960 ficou marcada pela introdução dos materiais compósitos de alto desempenho de forma significativa na indústria aeroespacial. O desenvolvimento de diversos materiais poliméricos com inserção de fibras de carbono, vidro e outros materiais ofereceram aos projetistas a oportunidade de flexibilizar os projetos estruturais, atendendo às necessidades de desempenho dos projectos. Mirabel C. Rezende (2000)

Durante a década de 70, a força aérea americana começa a projectar o primeiro avião capaz de passar despercebido pelos radares inimigos, o F-117 (figura 1.5) que voou pela primeira vez no dia 18 de junho de 1981 Force (2012). Toda essa tecnologia foi possível de ser alcançada devido ao avanço tecnológico dos materiais que apresentavam características de absorção da radiação eletromagnética na faixa das micro-ondas. Aeronáutica (2015)



Figura 1.5: F-117 retirado a 15 de Agosto de (<https://archive.is/20120629101020/http://www.af.mil/information/heritage/aircraft.asp>)

a velocidade com que a adoção dos compósitos se deu pela indústria não foi como se estimava nos anos 70. Pode-se dizer que esta ocorreu de forma bem mais rápida no campo da aviação militar que no mercado da aviação comercial. os exemplos mais recentes são o Boeing 787 e o Airbus A380, cujos projetos estruturais incluem muitos componentes estruturais feitos a partir de tais materiais. Aeronáutica (2015)

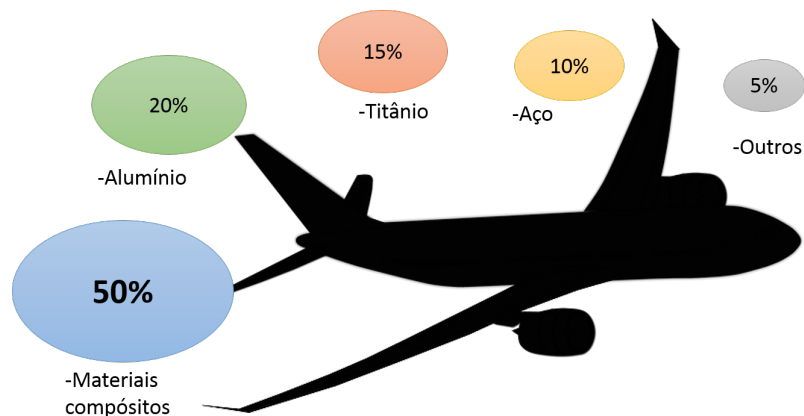


Figura 1.6: Aeronáutica comercial (adaptado de Up (2012))

A aeronave A380 apresentada pela Airbus no início de janeiro de 2005 veio revolucionar o mercado. Esta apresentou inúmeras melhorias em termos estruturais e em termos de tempo de vida estimada ao substituir os materiais convencionais por materiais compósitos Airbus (2015). É de constatar que só cerca de 25 anos após a indústria militar dar os primeiros grandes passos na utilização desta tecnologia, é que esta começou a surgir também no mercado comercial.

A aeronáutica não é o único exemplo de aplicação deste tipo de materiais. Na verdade, a utilização destes materiais está presente na maioria dos mercados. Desde a bicicleta ao aeromodelismo, passando

pelos barcos e raquetes de ténis, estes materiais vieram substituir os metais e ligas metálicas durante os últimos anos.

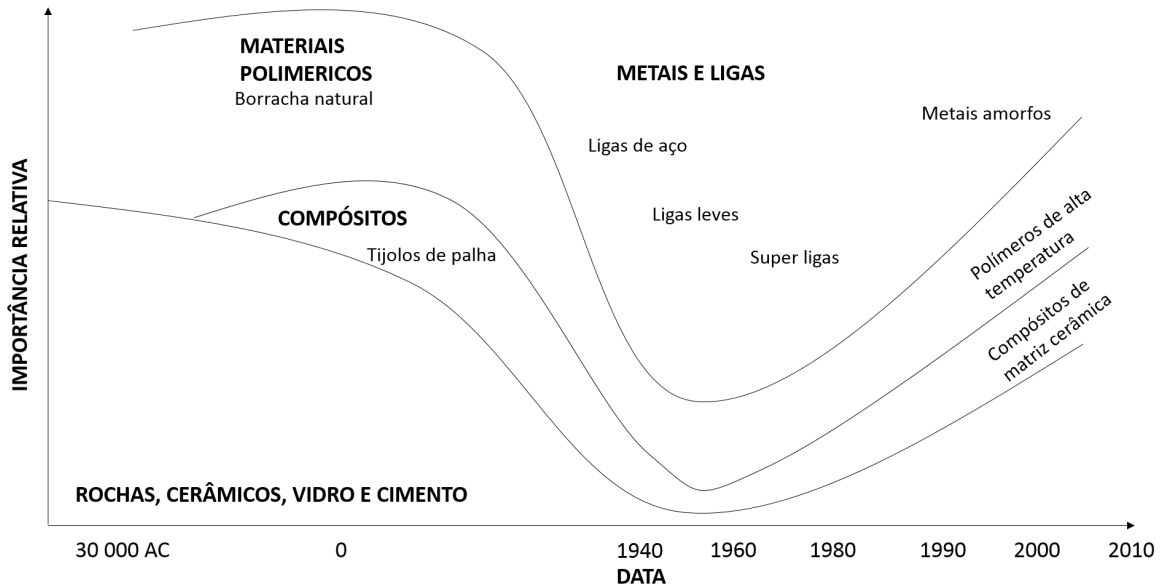


Figura 1.7: Evolução dos materiais compósitos (adaptado de Caetano (2014))

A figura 1.7 ilustra a evolução da utilização dos diversos materiais ao longo dos anos. É de notar uma forte evolução dos materiais compósitos a partir dos anos 70.

As vantagens da utilização destes materiais tem vindo a ser apresentada ao longo deste capítulo. Vários são os exemplos de vantagens apresentadas por estes materiais, poder-se-à dizer que a principal vantagem destes é possibilitar uma infinidade de novas possibilidades de otimização ao projecto de estruturas, à combinação de materiais que possibilite o alcance de propriedades nunca antes conseguidas no ramo da electrónica, química, mecânica e tecnológico.

## Metodologias de Modelação

Com a evolução dos recursos computacionais, a mecânica computacional tem vindo nos últimos anos a tomar um lugar preponderante enquanto ferramenta industrial e no projeto de estruturas e soluções otimizadas. No entanto, a modelação de materiais complexos tais como os materiais compósitos eleva a necessidade de recursos computacionais quando a tentativa de discretização do modelo alcança o nível da micro escala, tornando a análise micromecânica de difícil alcance. Para tal, existem diversas técnicas de homogeneização que visam quantificar propriedades médias de um volume representativo e de modo a encontrar um comportamento constitutivo equivalente numa escala maior, considerada homogeneizada. Dentro de diversos métodos de modelação computacional, podemos destacar o método de FEM. Esta é uma metodologia que tem vindo a ganhar bastante terreno em indústrias competitivas e justifica-se para tal a existência de diversos programas comerciais, tais como *Ansys*, *Abaqus*, *Nastran* entre outros, que visam satisfazer a necessidade existente.

O método dos elementos finitos é uma ferramenta matemática que permite analisa estruturas e em geral domínios de elevada complexidade, discretizando-os e aproximando dessa forma a resposta que

poderemos esperar da estrutura real. O problema pode ser abordado segundo diferentes pressupostos, que permitirão seleccionar um ou vários tipos de elementos mais favoráveis para o caso em estudo.

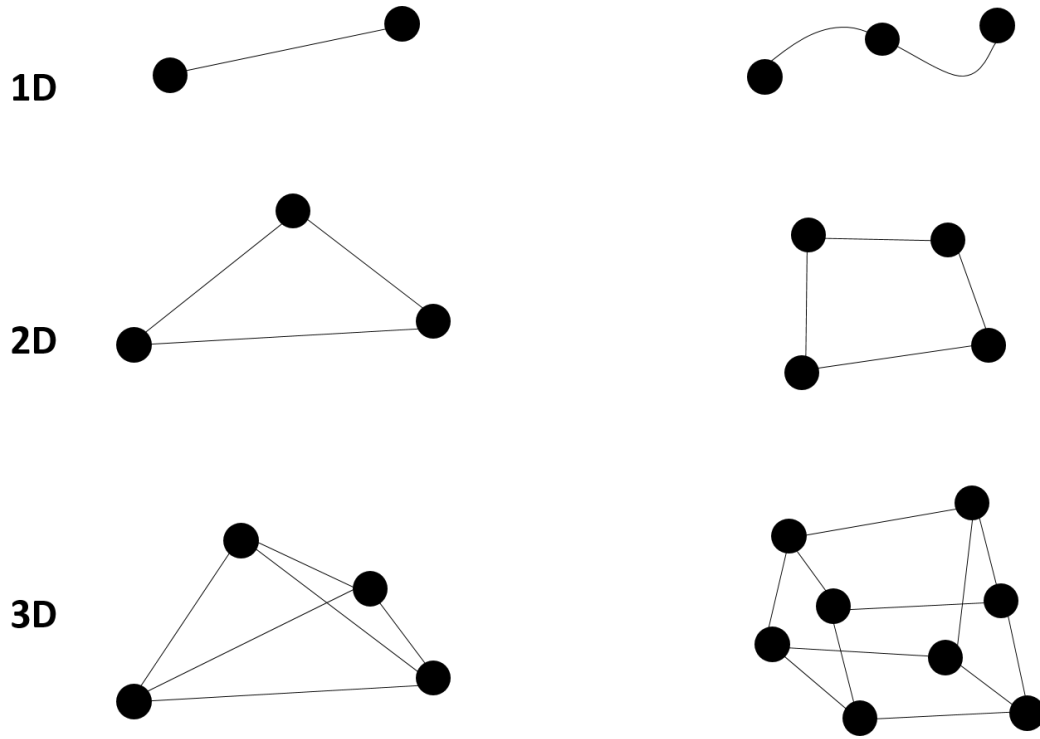


Figura 1.8: Ilustração de alguns elementos finitos

Existem vários tipos de elementos, a figura 1.8 apresenta alguns dos mais conhecidos. O problema pode assim ser descrito por elementos de uma, duas ou três dimensões dependendo do tipo de problema a analisar e das simplificações que é possível considerar.

Com as necessidades de resposta a novos desafios em crescimento constante, é por vezes necessário investigar além do que os programas comerciais nos oferecem. Teorias mais complexas, como é o caso das teorias de deformação de corte de ordem superior (HSDT) ou mesmo de primeira ordem (FSDT) ou regras de homogeneização específicas que não existam na biblioteca desses programas ou simplesmente na tentativa de alcançar melhorias nas metodologias existentes necessitam de uma abordagem diferente. Nesse caso, identificam-se inúmeras teorias e metodologias diferentes para a modelação de casos distintos. Desde o tipo de homogeneização de propriedades às funções interpoladoras, diversas são as possibilidades de modelação do mesmo caso de estudo.

## 1.4 Enquadramento Teórico

A modelação de estruturas constituídas por materiais compósitos bem como destes materiais por si só, tem envolvido um vasto trabalho de investigação designadamente no que refere à sua modelação. Apesar deste investimento já se vir a fazer há alguns anos, continua apesar de tudo a ser um tema muito actual, e cuja complexidade de abordagem tem proporcionado a implementação de novas metodologias de caracterização das suas propriedades bem como do seu comportamento mecânico. No presente capítulo é efectuada uma breve referência às principais contribuições encontradas na li-

teratura mais directamente relacionadas com os objectivos deste trabalho, bem como as que foram utilizadas no âmbito do seu desenvolvimento.

### **Modelação de Materiais Compósitos**

O tema da modelação de materiais compósitos possui uma abrangência muito vasta, podendo ser considerada na perspectiva da caracterização das suas propriedades até à caracterização do comportamento mecânico que um dado compósito irá proporcionar no contexto de uma dada estrutura submetida às condições de fronteira que lhe são impostas. Inúmeros trabalhos têm sido desenvolvidos nestes domínios, existindo alguns livros de referência que sistematizam esta temática, bem como a evolução de diferentes técnicas e métodos de análise deste tipo de estruturas. Neste contexto é de salientar o livro devido a J.N.Reddy (1997) que se constitui como uma referência incontornável para aqueles que se iniciam no estudo dos materiais compósitos e das estruturas construídas com estes materiais. Outra referência neste contexto é devida a Campbell (2010) onde um maior foco é colocado na caracterização de propriedades dos diferentes tipos destes materiais e processos de fabrico. Embora no presente trabalho tenham sido objecto de estudo mais aprofundado os compósitos de partículas com gradiente funcional (FGM), foram também implementadas os procedimentos de cálculo associados ao estudo de materiais laminados com reforço de fibras longas. O acrónimo FGM apareceu em meados dos anos 80, como descrito em M. Yamanouchi, T. Hirai (1990) e refere-se à possibilidade de definir uma variação contínuo das propriedades do material no espaço tridimensional da estrutura compósita. Desde então, múltiplos investigadores se têm debruçado sobre o estudo destes materiais. Em J.N.Reddy (2000) é apresentado um estudo sobre o comportamento estático e dinâmico de placas construídas de materiais desta natureza. É utilizada a sua teoria de terceira ordem bem como o método de Navier para analisar placas rectangulares, onde são considerados o acoplamento termo-mecânico bem como a não-linearidade geométrica de Von- Kármán. Bouchafa et al. (2010) implementam um modelo analítico para o estudo de tensões residuais de origem térmica, segundo uma distribuição exponencial de partículas de reforço ao longo da espessura. De acordo com estes autores estas inclusões numa região totalmente composta por um dos materiais que compõem o FGM provocam um aumento das tensões residuais. Num trabalho mais recente, Lee et al. (2015) apresenta um estudo em que é considerada a distribuição de partículas segundo uma função exponencial e procede à comparação de modelos por esta definida, com distribuições segundo a função de potência da espessura ou a distribuição sinusoidal. O estudo desenvolvido assenta numa teoria de deformação de corte de ordem superior, visando quantificar a variação da espessura do compósito. Apesar da distribuição das partículas de reforço no domínio espacial da estrutura desempenhar um papel muito importante, sabe-se que outro tipo de parâmetros influencia também o desempenho de uma estrutura. Bhandari and Purohit (2014) apresenta um estudo sobre a influência da distribuição de partículas de uma combinação FGM, metal-cerâmico e apresenta resultados que visam também comparar a influência do tipo de condições de fronteira. Em Nguyen et al. (2007) é apresentada uma abordagem comparativa da influência do factor de correcção ao corte, para diferentes casos de compósitos FGMs, em que são considerados diferentes valores para o expoente da lei de distribuição da fracção de volume expressa em função da potência da espessura. Ferreira et al. (2005) apresentam um trabalho em que se compara a influência de diferentes metodologias de predição de propriedades, no comportamento mecânico de placas FGM em que é utilizada uma teoria de deformação de corte de terceira ordem implementada através de um método sem malha em que são usadas funções de base radial. Mais recentemente, Loc V. Tran, A.J.M Ferreira (2013) apresentam uma comparação entre os resultados obtidos para frequências naturais, através de um método sem malha e a aplicação do método dos elementos finitos. Matsunaga (2008) faz um estudo do comportamento dinâmico em vibrações livres e da estabilidade de uma placa FGM através de

uma teoria de corte de ordem superior utilizando o método de Navier. Também Thai and Choi (2013) apresentam uma modelação utilizando a solução de Navier, mas recorrendo à teoria de deformação de corte de primeira ordem (FSDT). Num contexto de comparação entre resultados obtidos utilizando diferentes teorias de deformação de corte, é de referir os trabalhos desenvolvidos por Bhar et al. (2010), bem como mais recentemente Loja et al. (2015). Neste último caso, para além de serem consideradas diferentes teorias de deformação de corte, são adicionalmente utilizados elementos finitos, de 3 a 6 nós, cujas funções interpoladoras são obtidas a partir de interpolação de Kriging. Nesse trabalho é apresentada a comparação da utilização de diversas funções de forma entre os nós do elemento de viga utilizado para caracterizar uma viga composta por uma estrutura sandwich. O tipo de abordagem aos elementos finitos pode ser baseado em diferentes metodologias. A análise numérica proporciona grandes vantagens a nível de recursos computacionais mas exige uma maior complexidade do modelo visto que se torna necessário, por vezes, a utilização de um número elevado de elementos para a sua caracterização. Nos dias de hoje, os recursos computacionais deixaram de ser uma limitação tão significativa em algumas abordagens. Davies (1998) apresenta uma abordagem na modelação de painéis sandwich aplicados à construção civil que visa modelar a estrutura em elementos de viga. Estes elementos permitem contabilizar o efeito de deformação devido ao esforço transversal. Na mesma referência, é apresentada uma metodologia de alteração ao elemento de viga de Bernoulli que permite adaptar este elemento de modo a quantificar essa mesma deformação.

### Variabilidade na Modelação de Materiais Compósitos

Sabe-se que é extremamente importante conseguir caracterizar as propriedades elásticas da melhor forma, de modo a conseguir obter uma previsão mais credível do seu comportamento mecânico. É neste contexto que Maletta and Pagnotta (2004) apresentam um estudo com vista a quantificar as propriedades mecânicas efectivas de um laminado compósito. Para o efeito comparam os resultados obtidos através de um modelo de elementos finitos disponível num programa comercial com dados reais obtidos por ensaios dinâmicos experimentais. De forma a aproximar as constantes elásticas do modelo, os autores utilizaram uma técnica com base em algoritmos genéticos cuja função objectivo se baseia na minimização da respectiva diferença. Garshasbinia and Jam (2005) apresentou uma abordagem semelhante à dos anteriores co-autores, mas com aplicação em materiais isotrópicos, ortotrópicos e anisotrópicos. Partindo de conclusões anteriores sobre a baixa influência dos coeficientes de Poisson sobre as respostas dinâmicas de laminados, Ragauskas and Belevičius (2009) desenvolvem um estudo incidente sobre o problema inverso, de identificação de propriedades elásticas do material compósito, utilizando algoritmos genéticos. Sabe-se que algumas características/parâmetros poderão possuir uma menor influência no comportamento mecânico de um compósito. Assim, dependendo do caso, poderá ser possível reduzir o custo computacional de uma análise, se forem utilizados modelos em que apenas a actualização dos parâmetros mais relevantes seja permitida, por representarem a maioria da significância da variabilidade. Nesse sentido, e perspectivando a redução dos custos computacionais associados às análises de elementos finitos, em particular quando se tratam de estruturas de maior complexidade, tem-se pretendido desenvolver estudos que visam compreender quais os parâmetros do modelo mais representativos da sensibilidade dos resultados de saída. Em François M. Hemez (2004) é apresentada a validação de um modelo descrito por elementos finitos de um compósito laminado composto por 8 lâminas ortotrópicas, baseado em diferentes ensaios experimentais. Sobre esse modelo, é desenvolvido um estudo que visa identificar quais os parâmetros de entrada do modelo com maior significância sobre cada frequência obtida pelo mesmo. Para tal, é considerada a introdução de variabilidade sobre os parâmetros de orientação de cada camada, de propriedades do material ortotrópico obtidos por dados do fabricante, do modelo de elementos finitos com vista a estimar uma

relação estatística entre a variabilidade de entrada e a de saída. Com este estudo, obtiveram-se as sensibilidades dos parâmetros de saída do modelo face aos parâmetros de entrada e quantificou-se a significância de cada parâmetro. Em função destes resultados, foi definido um meta-modelo associado a cada frequência natural, com o menor número de variáveis de entrada possível, para um grau de certeza pré-definido. Potter (2009) apresenta um levantamento das principais causas de variabilidade associadas ao processamento de materiais compósitos. Desde a incerteza das propriedades do material, passando pela orientação de fibras ao processo de fabrico, o autor apresenta mais de 60 principais causas de defeitos e variabilidade associada ao produto, deixando claro a existência de variabilidade não quantificada pelas causas identificadas.

## Capítulo 2

# Fundamentos Teóricos

Neste capítulo são apresentados todos os conceitos e fundamentos teóricos necessários à realização do trabalho apresentado. Em seguida são apresentados conceitos, teorias e metodologias no âmbito da determinação de propriedades efectivas de diversas estruturas compósitas e das metodologias de elementos finitos em que os compósitos são discretizados. São também apresentados alguns algoritmos como forma de melhor explicação das implementações que foram realizadas. São ainda apresentados os conceitos de estatística utilizados ao longo do trabalho.

### 2.1 Materiais Compósitos

#### Materiais Compósitos de Partículas, com Gradiente Funcional (FGM)

Os Functionally graded materials, chamados de FGMs são materiais compósitos constituídos por uma gradação espacial em termos de constituição dos materiais, podendo ser descritos por uma determinada função de aproximação da distribuição de cada constituinte (Wessel (2004)). Ambos os constituintes de um FGM irão ter um papel fundamental nas propriedades do material resultante podendo cada um deles interferir no desempenho do material (Ford et al. (1999)).

As propriedades mecânicas de um FGM não podem ser caracterizadas por apenas alguns valores médios dos materiais que o constituam, visto que as propriedades mecânicas do mesmo vão variar em concordância com a variação específica de cada material no espaço. No entanto, existem algumas técnicas que permitem estipular características para previsão do comportamento do FGM (Wessel (2004)).

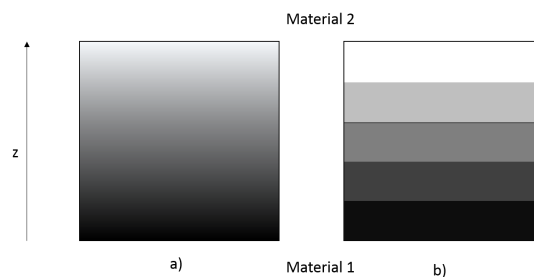


Figura 2.1: Modelação do FGM (adaptado de Wessel (2004)) a) abordagem contínua; b) abordagem discreta

As formas de homogeneização apresentadas ao longo deste capítulo podem ser aplicadas de uma forma contínua, segundo a ilustração a) da figura 3.4 ou de um modo discreto tal como apresenta a ilustração b) da mesma figura. O caso de estudo apresentado no capítulo 4.2 apresenta resultados comparativos das 2 abordagens.

Para determinar as propriedades médias, efectivas de um compósito, ou seja, para homogeneizar as suas propriedades, é necessário definir uma função que expresse a distribuição das partículas de cada material nas diferentes direcções do referencial utilizado. Geralmente, os FGMs são projectados para que as suas propriedades mecânicas variem de forma contínua ao longo da espessura, desde a superfície inferior até à superfície do superior (Matsunaga (2008)). O facto de se conseguir uma distribuição contínua ao longo da espessura torna-se numa grande vantagem face aos laminados pois deste modo reduz-se significativamente a possibilidade de existência de delaminação (Ferreira et al. (2005)).

Nos casos mais usuais de aplicação de FGMs, estes são compostos por uma componente cerâmica, de forma a promover a resistência à temperatura e às corrosões de uma das superfícies, e a resistência mecânica que será obtida através de uma superfície composta por uma forte componente metálica (Zhu and Liew (2011)). Para além deste exemplo de aplicação, este tipo de materiais possibilita a adaptação do mesmo a diversas circunstâncias, ao reunir os componentes mais indicados para a situação em questão.

## Cálculo de Propriedades Média

### Distribuição de Partículas de Reforço em Espessura

A definição de uma expressão que caracterize a distribuição de partículas ao longo da espessura pode ter diferentes abordagens. A forma mais usual é definida pela regra da potência, apresentada na equação 2.1.

$$V_c(z) = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^p \quad (2.1)$$

Em que neste caso se admite que esta fracção de volume é referente às partículas cerâmicas. Esta equação visa caracterizar a distribuição de partículas ao longo da espessura. O parâmetro  $p$  define o perfil da variação de volume de partículas ao longo da espessura, resultando em diversas possibilidades de distribuição apresentadas na figura 2.2 dependendo do valor de potência.

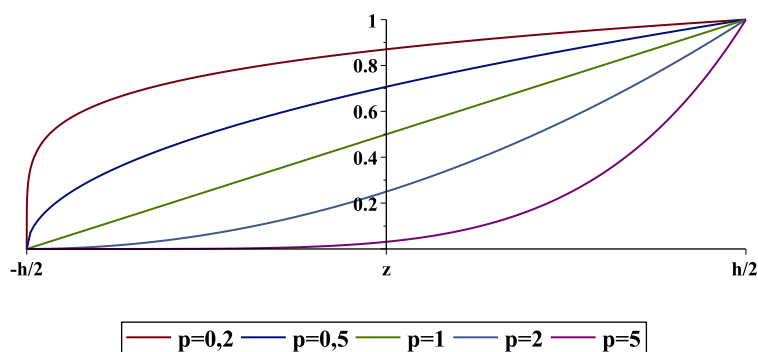


Figura 2.2: Distribuição da fracção de volume de partículas cerâmicas ao longo da espessura descrito pela regra da potência

A regra da potência pode ser utilizada juntamente com diversas regras de homogeneização, tomando por exemplo o trabalho de Nguyen et al. (2007) que utiliza a regra das potências aplicada à regra das misturas e Ferreira et al. (2006) e Ferreira et al. (2005) que apresenta a mesma aproximação aplicando a regra de Mori-Tanaka.

Outra forma de caracterizar a distribuição do volume de partículas é a chamada regra exponencial, apresentada na equação 2.2.

$$\begin{aligned}
 P(z) &= P_\alpha & -\frac{h}{2} \leq z \leq -\frac{ec}{2} \\
 P(z) &= P_\beta * e^{\frac{1}{h} * \ln(\frac{P_\alpha}{P_\beta}) * (z + \frac{h}{2})} & -\frac{ec}{2} < z \leq \frac{ec}{2} \\
 P(z) &= P_\beta & \frac{ec}{2} < z \leq \frac{h}{2}
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Sendo  $ec$  corresponde à espessura de núcleo FGM e  $h$  à espessura do laminado. A regra exponencial é em si mesma simultaneamente uma regra que define a distribuição de partículas, mas também os valores das propriedades, pois dela resultam as distribuições das propriedades homogeneizadas ao longo da espessura. A Figura 2.3 ilustra a distribuição da propriedade obtida, neste caso do módulo de Young, ao longo da espessura obtido pela utilização da regra exponencial.

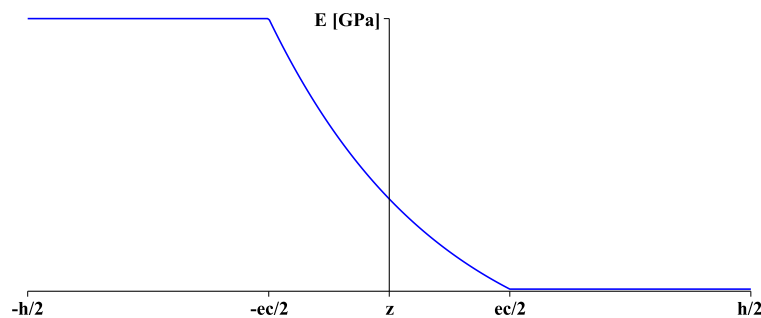


Figura 2.3: Distribuição do módulo de Young ao longo da espessura descrito pela regra exponencial

A aplicação desta técnica de homogeneização é bastante usual e podemos tomar como exemplo o trabalho de Bouchafa et al. (2010) que apresenta a implementação desta técnica aplicada ao núcleo FGM de um laminado sandwich.

Existem ainda outras formas de obter uma aproximação da distribuição do volume de partículas, as quais não serão abordadas neste trabalho, tais como a regra sinusoidal apresentada em Bouchafa et al. (2010), onde também estão apresentadas as regras anteriores.

### Regra das Misturas

As regras das misturas apresentadas em Voigt (1889) e Reuss (1929), são referidas como sendo uma aproximação muito usual para estimativa das propriedades térmicas ou mecânicas de um material compósito. A aproximação de Voigt (eq. 2.3) baseia-se na média aritmética das propriedades individuais de cada material que compõe o laminado. Outra regra das misturas muito utilizada é a aproximação de Reuss (eq. 2.4) que se baseia numa média harmônica das propriedades em estudo. (adaptado de Miyamoto (1999)).

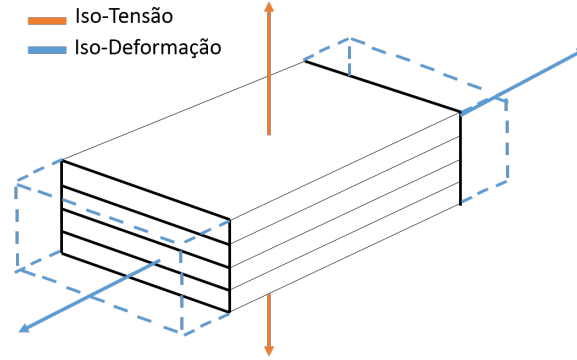


Figura 2.4: Iso-Tensão e Iso-Deformação

Cada uma das regras anteriormente mencionadas deverá ser aplicada dependendo de cada caso. A figura 2.4 ilustra o princípio de cada uma, sendo que a regra de Voigt (eq. 2.3) deverá ser utilizada para o caso de iso-deformação e a regra de Reuss (eq. 2.4) para o caso de iso-tensão.

$$P = Vc_{\alpha} * P_{\alpha} + Vc_{\beta} * P_{\beta} \quad (2.3)$$

$$P = \frac{P_{\alpha} * P_{\beta}}{V_{\alpha} * P_{\beta} + V_{\beta} * P_{\alpha}} \quad (2.4)$$

As equações da regra das misturas não têm em consideração a interação entre os constituintes do laminado (Bernardo and Loja (2015)), sendo por isso considerado uma das aproximações mais simples mas também mais limitada em termos de validação (Miyamoto (1999)).

Ao longo deste trabalho, serão utilizados diversas formas de homogeneização, sendo uma delas a regra de Voigt (eq. 2.3), onde  $P$  representa a propriedade a homogeneizar e  $Vc$  a fracção de volume, neste caso respectiva ao cerâmico. Poder-se-à estimar qualquer propriedades mecânica do compósito em estudo substituindo a variável  $P$  por  $E$ ,  $\nu$  ou  $\rho$  representando respectivamente o módulo de Young, o coeficiente de Poisson e a massa específico de cada constituinte. Deste modo, poder-se-à estimar a distribuição ao longo da espessura do laminado de cada propriedade.

$$\begin{aligned} E(z) &= Vc(z) * E_c + Vm(z) * E_m \\ \nu(z) &= Vc(z) * \nu_c + Vm(z) * \nu_m \\ \rho(z) &= Vc(z) * \rho_c + Vm(z) * \rho_m \end{aligned} \quad (2.5)$$

### Regra de Mori-Tanaka

Outra forma de estimar as propriedades efectivas do compósito, que contrariamente à regra das misturas considera a interação dos materiais constituintes, é a devida a Mori-Tanaka (Bernardo and Loja (2015)). Esta técnica de homogeneização é apresentada em Mori and Tanaka (1973) e descrita de uma forma clara em Miyamoto (1999).

$$\begin{aligned} K_m &= \frac{E_m}{3 * (1 - 2 * \nu_m)} & K_c &= \frac{E_c}{3 * (1 - 2 * \nu_c)} \\ G_m &= \frac{E_m}{2 * (1 + \nu_m)} & G_c &= \frac{E_c}{2 * (1 + \nu_c)} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Esta técnica de homogeneização relaciona os módulos de compressão volumétrica ( $K$ ) e de distorção ( $G$ ), definidos pela equação 2.6 dos materiais constituintes do compósito através das igualdades expressas na equação 2.7.

$$\frac{K_{eq.} - K_m}{K_c - K_m} = \frac{Vc(z)}{1 + Vm(z) * \frac{K_c - K_m}{K_m - \frac{4}{3} * G_m}} \quad (2.7)$$

$$\frac{G_{eq.} - G_m}{G_c - G_m} = \frac{Vc(z)}{1 + Vm(z) * \frac{G_c - G_m}{G_m - f1}}$$

onde:

$$f1 = \frac{G_m * (9 * K_m + 8 * G_m)}{6 * (K_m + 2 * G_m)} \quad (2.8)$$

Obtendo as distribuições ao longo da espessura dos módulos de compressão volumétrica e de corte expressas pela equação 2.9.

$$K_{eq.}(z) = \frac{4 * G_m * K_m + 3 * K_m * K_c - 4 * G_m * K_m * Vc(z) + 4 * G_m * K_c * Vc(z)}{4 * G_m + 3 * K_c + 3 * K_m * Vc(z) - 3 * K_c * Vc(z)} \quad (2.9)$$

$$G_{eq.}(z) = \frac{G_m * f1 + G_m * G_c - G_m * Vc(z) * f1 + G_c * Vc(z) * f1}{G_c + f1 + G_m * Vc(z) - G_c * Vc(z)}$$

Permitindo deste modo uma aproximação do módulo de Young e do coeficiente de Poisson ao longo da espessura  $z$  expressa pela equação 2.10.

$$E(z) = \frac{9 * K_{eq.}(z) * G_{eq.}(z)}{3 * K_{eq.}(z) + G_{eq.}(z)} \quad \nu(z) = \frac{3 * K_{eq.}(z) - 2 * G_{eq.}(z)}{2 * (3 * K_{eq.}(z) + G_{eq.}(z))} \quad (2.10)$$

No caso da utilização da regra de Mori-Tanaka, a aproximação da distribuição da massa específico deverá ser calculada segunda a regra de Voigt , ou seja pela equação 2.11.

$$\rho(z) = Vc(z) * \rho_c + (1 - Vc(z)) * \rho_m \quad (2.11)$$

### Teorias de Laminados

Existem várias teorias que permitem estudar um material compósito, muitas delas baseiam-se numa abordagem de camada única equivalente. Este princípio permite fazer a equivalência entre um compósito/laminado heterógeneo e uma camada equivalente descrita por um comportamento constitutivo complexo, reduzindo assim a dimensão do problema J.N.Reddy (1997).

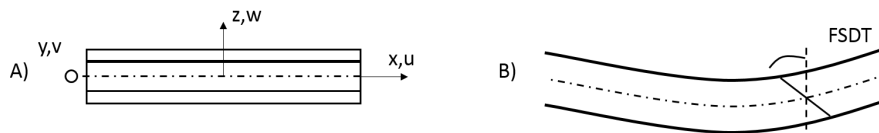


Figura 2.5: A) Representação esquemática de um laminado não sujeito a carregamento B) Representação esquemática de um laminado sujeito a carregamento segundo considerações FSDT (adaptado de J.N.Reddy (1997))

### Teoria de Deformação de Corte de Primeira Ordem (FSDT)

A teoria de deformação de corte de primeira ordem (FSDT) tem a particularidade de admitir que as linhas de extensões inicialmente perpendiculares ao plano médio possam deixar de o ser após deformação do compósito, tal como ilustrado em B) da figura 2.5. Esta condição permite incluir as extensões de corte  $\epsilon_{xz}$  e  $\epsilon_{xy}$  à teoria e assim definir o campo de deslocamentos presente na equação 2.12. (J.N.Reddy (1997))

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) + z * \phi_x(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) + z * \phi_y(x, y, t) \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Sendo que  $u_0$ ,  $v_0$  e  $w_0$  correspondem aos deslocamentos do plano médio da placa em estudo e  $\phi_x$  e  $\phi_y$  correspondem às rotações em torno do respectivo eixo.  $\phi_x$  e  $\phi_y$  são descritas por funções independentes. Desta teoria resultam extensões  $\epsilon_{xz}$  e  $\epsilon_{xy}$  constantes, ou seja não são função de  $z$  e por consequência, as tensões de corte respectivas são também constantes. Por esse motivo, é definido um factor de correcção de corte que é obtido por um balanço energético entre a energia devida às tensões de corte obtidas pela metodologia aplicada e a teoria da elasticidade tridimensional. Este factor de correcção ao corte ( $K$ ) resulta em 5/6 (aplicado na equação 2.22) quando se trata de uma secção rectangular de material isotrópico. É no entanto um valor que em inúmeras situações é também utilizado (J.N.Reddy (1997)).

### Lei Constitutiva da Lâmina

A Lei constitutiva da lâmina explicita a formulação do comportamento mecânico de cada lâmina de uma estrutura compósita laminada. Esta lei é válida quando forem assumidos pressupostos tais como (Mota Soares et al. (2000)):

- A lâmina é contínua sem apresentar impurezas ou espaços residuais;
- A lâmina apresenta um comportamento linear elástico.

Pelos pressupostos anteriormente apresentados poder-se-á assim aplicar a lei de Hooke Generalizada para o caso de uma lâmina em estado de tensão plana, no referencial do material.

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Não são considerados  $\sigma_3$  e  $\epsilon_3$  na lei constitutiva da lâmina, pois esta é sustentada por uma condição de tensão plana e à utilização da teoria FSDT. Ao considerar a teoria de primeira ordem (ver secção 2.1) justifica-se a apresentação das componentes  $\sigma_4$ ,  $\sigma_5$ ,  $\epsilon_4$  e  $\epsilon_5$  e os respectivos coeficientes de rigidez  $Q_{44}$  e  $Q_{55}$  pois baseia-se na consideração das deformações de corte transversais ao plano da lâmina.

Podemos assim traduzir a equação 2.13, para o caso de uma lâmina isotrópica:

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} = Q(z) \quad e \quad \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} = G(z) \quad (2.14)$$

Sendo que  $Q(z)$  e  $G(z)$  são determinados para uma lamina isotrópica não homogênea por:

$$Q(z) = \frac{E(z)}{1 - \nu(z)^2} * \begin{bmatrix} 1 & \nu(z) & 0 \\ \nu(z) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu(z)}{2} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

$$G(z) = \frac{E(z)}{2 * (1 + \nu(z))} * \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Para o caso de uma lâmina ortotrópica, os coeficientes de rigidez devem ser transformados para o referencial do laminado e se necessário depois para o referencial da estrutura. Para tal, os coeficientes de rigidez elástica reduzidos são determinados de forma diferente, pois trata-se de um material ortotrópico, por (J.N.Reddy (1997)):

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E1}{1 - \nu_{12} * \nu_{21}} & Q_{22} &= \frac{E2}{1 - \nu_{12} * \nu_{21}} \\ Q_{12} &= \frac{\nu_{12} * E2}{1 - \nu_{12} * \nu_{21}} = \frac{\nu_{21} * E1}{1 - \nu_{12} * \nu_{21}} \\ Q_{44} &= G_{23} & Q_{55} &= G_{13} & Q_{66} &= G_{12} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Os coeficientes de rigidez elástica reduzidos transformados são obtidos por (Mota Soares et al. (2000)):

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11}\cos^4\theta + 2(Q_{12} + 2 * Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{22}\sin^4\theta \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{12}(\sin^4\theta + \cos^4\theta), \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11}\sin^4\theta + 2(Q_{12} + 2 * Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{22}\cos^4\theta \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})\sin\theta\cos^3\theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})\sin^3\theta\cos\theta \\ \bar{Q}_{44} &= Q_{44}\cos^2\theta + Q_{55}\sin^2\theta \\ \bar{Q}_{45} &= (Q_{55} - Q_{44})\cos\theta\sin\theta \\ \bar{Q}_{55} &= Q_{55}\cos^2\theta + Q_{44}\sin^2\theta \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})\sin^3\theta\cos\theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})\sin\theta\cos^3\theta \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{66}(\sin^4\theta + \cos^4\theta) \end{aligned} \quad (2.18)$$

Em que  $\theta$  representa o ângulo entre o referencial global de um laminado e o referencial local da própria lamina.

Os coeficientes de elasticidade reduzidos transformados permitem transpor as propriedades do referencial da lâmina para o referencial do laminado ou até mesmo para o referencial global caracterizado pelas direções x,y, ilustrado na figura 2.6.

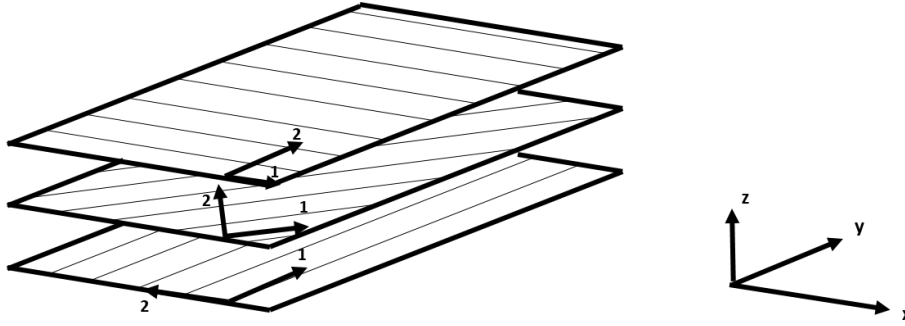


Figura 2.6: A) Referencial da lâmina vs referencial global

Considerando os mesmos coeficientes, obtém-se a igualdade segundo as direcções x,y segundo:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & 0 & 0 & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & 0 & 0 & \bar{Q}_{26} \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{54} & \bar{Q}_{55} & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & 0 & 0 & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ 2\epsilon_{yz} \\ 2\epsilon_{xz} \\ 2\epsilon_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

### Equações Constitutivas do Laminado

De modo a quantificar a rigidez do laminado, são definidas as Matrizes A, B, D e As. Estas matrizes relacionam forças e momentos resultantes no laminado devido às extensões do mesmo. Estas extensões podem ser divididas em 2 partes, sendo elas  $\epsilon^{(0)}$ , extensões devidas ao efeito de membrana, e  $\epsilon^{(1)}$ , correspondentes ao efeito de flexão, tal como apresenta a equação 2.20 (J.N.Reddy (1997)).

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx}^{(0)} \\ \epsilon_{yy}^{(0)} \\ \epsilon_{xy}^{(0)} \\ \epsilon_{xz}^{(0)} \\ \epsilon_{yz}^{(0)} \end{bmatrix} + z * \begin{bmatrix} \epsilon_{xx}^{(1)} \\ \epsilon_{yy}^{(1)} \\ \epsilon_{xy}^{(1)} \\ \epsilon_{xz}^{(1)} \\ \epsilon_{yz}^{(1)} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx}^{(0)} \\ \epsilon_{yy}^{(0)} \\ \epsilon_{xy}^{(0)} \\ 2\epsilon_{xz}^{(0)} \\ 2\epsilon_{yz}^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \end{bmatrix} ; \quad \begin{bmatrix} \epsilon_{xx}^{(1)} \\ \epsilon_{yy}^{(1)} \\ \epsilon_{xy}^{(1)} \\ 2\epsilon_{xz}^{(1)} \\ 2\epsilon_{yz}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A equação 2.21 apresenta a relação entre forças e momentos resultantes das extensões do laminado (J.N.Reddy (1997)).

$$\begin{bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{bmatrix} = [A] * \begin{bmatrix} \epsilon_{xx}^{(0)} \\ \epsilon_{yy}^{(0)} \\ \epsilon_{xy}^{(0)} \end{bmatrix} + [B] * \begin{bmatrix} \epsilon_{xx}^{(1)} \\ \epsilon_{yy}^{(1)} \\ \epsilon_{xy}^{(1)} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

$$\begin{bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{bmatrix} = [B] * \begin{bmatrix} \epsilon_{xx}^{(0)} \\ \epsilon_{yy}^{(0)} \\ 2\epsilon_{xy}^{(0)} \end{bmatrix} + [D] * \begin{bmatrix} \epsilon_{xx}^{(1)} \\ \epsilon_{yy}^{(1)} \\ 2\epsilon_{xy}^{(1)} \end{bmatrix}$$

A equação 2.21 apenas descreve a relação dos esforços normais segundo as direcções x e y e o esforço transversal segundo xy, ou seja, o necessário para aplicação da teoria clássica dos laminados (CLT). Para o caso dos esforços transversos xz e yz a relação é dada na equação 2.22 e é representada pela matriz [As] multiplicada pelas distorções e o factor de correcção ao corte descrito anteriormente.

$$\begin{bmatrix} Q_{xz} \\ Q_{yz} \end{bmatrix} = K * [As] * \begin{bmatrix} 2 * \epsilon_{xz}^{(0)} \\ 2 * \epsilon_{yz}^{(0)} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Sendo que as matrizes A, B, D e As são assim definidas para o caso de um material isotrópico não homogéneo pela equação 2.23.

$$A = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q(z) dz \quad B = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q(z) * z dz \quad D = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q(z) * z^2 dz \quad (2.23)$$

$$As = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} G(z) dz$$

Enquanto que para o caso de laminados ortotrópicos temos a equação 2.24 (Mota Soares et al. (2000)).

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^k * (z_{k+1} - z_k) \quad B_{ij} = \frac{1}{2} * \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^k * (z_{k+1}^2 - z_k^2) \quad D_{ij} = \frac{1}{3} * \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^k * (z_{k+1}^3 - z_k^3)$$

$$As = \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^k * (z_{k+1} - z_k) \quad (2.24)$$

Os algoritmos 1 a 4 apresentam o modo de obtenção das matrizes A, B, D e As de diferentes compósitos, sendo eles respectivamente laminados compostos por FGM com distribuição contínua, FGM em forma de laminado com distribuição discreta, FGM descrito por uma distribuição exponencial e ainda para um laminado composto por lâminas ortotrópicas. A conjugação destas diferentes opções permitirá a modelação de diversos compósitos.

---

**Algoritmo 1** Matrizes A, B, D, As e  $\rho$  de FGM: Abordagem contínua
 

---

- 1: **função** PROPRIEDADES FGM(a, b, c, d, e, f, g, h, i, j)
  - 2:  $Vc \leftarrow \frac{z + \frac{h}{2}}{h}$
  - 3: **se**  $j \leftarrow 1$  **então** ▷ regra das misturas

$$E_{(z)} \leftarrow Vc * c + (1 - Vc) * d$$

$$\nu_{(z)} \leftarrow Vc * f + (1 - Vc) * e$$
  - 4: **senão**  $j \leftarrow 2$  ▷ regra de Mori-Tanaka

$$G_1 \leftarrow \frac{d}{2*(1+e)} ; G_2 \leftarrow \frac{c}{2*(1+f)}$$

$$K_1 \leftarrow \frac{d}{3*(1-2e)} ; K_2 \leftarrow \frac{c}{3*(1-2f)}$$

$$f_1 \leftarrow \frac{G_1*(9*K_1+8*G_1)}{6*(K_1+2*G_1)}$$

$$K_{1s} \leftarrow \frac{4*G_1*K_1+3*K_1*K_2-4*G_1*K_1*Vc+4*G_1*K_2*Vc}{4*G_1+3*K_2+3*K_1*Vc-3*K_2*Vc}$$

$$G_{1s} \leftarrow \frac{G_1*f_1+G_1*G_2-G_1*Vc*f_1+G_2*Vc*f_1}{G_2+f_1+G_1*Vc-G_2*Vc}$$

$$E_{(z)} \leftarrow \frac{9*K_{1s}*G_{1s}}{3*K_{1s}+G_{1s}}$$

$$\nu_{(z)} \leftarrow \frac{3*K_{1s}-2*G_{1s}}{2*(3*K_{1s}+G_{1s})}$$
▷  $a \leftarrow \frac{aresta}{espessura}$   
▷  $b \leftarrow aresta$   
▷  $c \leftarrow$  Young do cerâmico  
▷  $d \leftarrow$  Young metal  
▷  $e \leftarrow$  poisson metal  
▷  $f \leftarrow$  poisson cerâmico  
▷  $g \leftarrow$  expoente p da regra das misturas  
▷  $h \leftarrow$  peso específico metal  
▷  $i \leftarrow$  peso específico cerâmico
  - 5: **fim se**

$$Q_{(z)} \leftarrow \frac{E_{(z)}}{1-\nu_{(z)}} * \begin{bmatrix} 1 & \nu_{(z)} & 0 \\ \nu_{(z)} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu_{(z)}}{2} \end{bmatrix}$$
▷  $j \leftarrow$  opção para regra de homogeneização

$$G_{(z)} \leftarrow \frac{E_{(z)}}{2*(1+\nu_{(z)})} * \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
▷  $h \leftarrow$  espessura

$$A \leftarrow \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{(z)} dz ; B \leftarrow \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{(z)} * z dz$$

$$D \leftarrow \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{(z)} * z^2 dz ; As \leftarrow \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} G_{(z)} dz$$

$$\rho \leftarrow \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Vc * i + (1 - Vc) * h dz ; \rho^2 \leftarrow \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (Vc * i + (1 - Vc) * h) * z^2 dz$$
  - 6: **fim função**
-

**Algoritmo 2** Matrizes A, B, D, As e  $\rho$  de FGM: Abordagem discreta1: **função** PROPRIEDADES FGM DISCRETO(a, b, c, d, e, f, g, h, i, j)

...

▷ **Regra de Mori-Tanaka ou regra das misturas (ver algoritmo 2.1)****Declarar variáveis necessárias**2: **para**  $y \leftarrow 1$  **até**  $j$  **faça**

$$z_k(1, i) \leftarrow -\frac{h}{2} + \frac{e_k(1, i)}{2} + \text{camada}_{\text{seguinte}}$$

$$\text{camada}_{\text{seguinte}} \leftarrow \text{camada}_{\text{seguinte}} + e_k(1, i)$$

$$E_{\text{camada}}(i, 1) \leftarrow E_{(z \leftarrow z_k(1, i))}$$

$$\nu_{\text{camada}}(i, 1) \leftarrow \nu_{(z \leftarrow z_k(1, i))}$$

$$\rho_{\text{camada}}(i, 1) \leftarrow \rho_{(z \leftarrow z_k(1, i))}$$

$$Q(1 : 3, 1 : 3, i) \leftarrow \frac{E_{\text{camada}}(i, 1)}{1 - \nu_{\text{camada}}(i, 1)^2} * \begin{bmatrix} 1 & \nu_{\text{camada}}(i, 1) & 0 \\ \nu_{\text{camada}}(i, 1) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu_{\text{camada}}(i, 1)}{2} \end{bmatrix}$$

$$G(1 : 2, 1 : 2, i) \leftarrow \frac{E_{\text{camada}}(i, 1)}{2 * (1 + \nu_{\text{camada}}(i, 1))} * \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A \leftarrow A + \int_{\frac{z_k(1, i) - e_k(1, i)}{2}}^{\frac{z_k(1, i) + e_k(1, i)}{2}} Q(1 : 3, 1 : 3, i) dz$$

$$B \leftarrow B + \int_{\frac{z_k(1, i) - e_k(1, i)}{2}}^{\frac{z_k(1, i) + e_k(1, i)}{2}} Q(1 : 3, 1 : 3, i) * z dz$$

$$D \leftarrow D + \int_{\frac{z_k(1, i) - e_k(1, i)}{2}}^{\frac{z_k(1, i) + e_k(1, i)}{2}} Q(1 : 3, 1 : 3, i) * z^2 dz$$

$$As \leftarrow As + \int_{\frac{z_k(1, i) - e_k(1, i)}{2}}^{\frac{z_k(1, i) + e_k(1, i)}{2}} G(1 : 2, 1 : 2, i) dz$$

$$\rho \leftarrow \rho + \int_{\frac{z_k(1, i) - e_k(1, i)}{2}}^{\frac{z_k(1, i) + e_k(1, i)}{2}} \rho_{\text{camada}}(i, 1) dz$$

$$\rho^2 \leftarrow \rho^2 + \int_{\frac{z_k(1, i) - e_k(1, i)}{2}}^{\frac{z_k(1, i) + e_k(1, i)}{2}} \rho_{\text{camada}}(i, 1) * z^2 dz$$

3: **fim**4: **fim função****Algoritmo 3** Matrizes A, B, D, As e  $\rho$  de FGM: distribuição exponencial1: **função** PROPRIEDADES FGM DISTRIBUIÇÃO EXPONENTIAL(a, b, c, d, e, f, g, h, i, j)

...

▷ **Semelhante ao algoritmo 1 com exceção do apresentado****Declarar variáveis necessárias**

$$E(z) \leftarrow \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} c * e^{\frac{1}{t} * \ln(\frac{d}{c}) * (z + \frac{t}{2})} dz$$

$$\nu(z) \leftarrow \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} e * e^{\frac{1}{t} * \ln(\frac{f}{e}) * (z + \frac{t}{2})} dz$$

$$\rho(z) \leftarrow \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} h * e^{\frac{1}{t} * \ln(\frac{g}{h}) * (z + \frac{t}{2})} dz$$

...

2: **fim função**

**Algoritmo 4** Matrizes A, B, D, As e  $\rho$  de compósito ortotrópico

---

```

1: função PROPRIEDADES COMPÓSITO ORTOTRÓPICO(a, b, c, d, e, f, g, h,  $t_1, \dots, t_g$ )
   Declarar variáveis necessárias
    $z1(1) \leftarrow -\frac{h}{2} + \frac{h}{g}; z1(2) \leftarrow -\frac{h}{2} + 2 * \frac{h}{g}; \dots; z1(g) \leftarrow -\frac{h}{2} + g * \frac{h}{g}$ 
    $z2(1) \leftarrow -\frac{h}{2}; z2(2) \leftarrow z1(1); \dots; z2(g) \leftarrow z1(g - 1)$ 
    $z12 \leftarrow z1^2$   $\triangleright h \leftarrow$  Espessura do laminado
    $z22 \leftarrow z2^2$   $\triangleright g \leftarrow$  No de camadas do laminado
    $z13 \leftarrow z1^3$   $\triangleright t_1, \dots, t_g$  Orientação de cada camada do laminado
    $z23 \leftarrow z2^3$ 
    $thick \leftarrow z1 - z2$ 
    $thick2 \leftarrow z12 - z22$ 
    $thick3 \leftarrow z13 - z23$ 
2: para y  $\leftarrow$  1 até g faça
    $\bar{Q} \leftarrow$  função Coeficientes elásticos transformados ( $t_y, g; Q(1, 1); Q(1, 2); Q(2, 2);$ 
    $Q(3, 3); Q(4, 4); Q(5, 5)$ )
3: fim
4: para x  $\leftarrow$  1 até g faça
5:   para y  $\leftarrow$  1 até 3 faça
6:     para z  $\leftarrow$  1 até 3 faça
        $A(y, z) \leftarrow A(y, z) + \bar{Q}(y, z) * thick(x);$ 
        $B(y, z) \leftarrow B(y, z) + \bar{Q}(y, z) * thick2(x);$ 
        $D(y, z) \leftarrow D(y, z) + \bar{Q}(y, z) * thick3(x);$ 
7:     fim
8:   fim
9: fim
10: para x  $\leftarrow$  1 até g faça
11:   para y  $\leftarrow$  4 até 5 faça
12:     para z  $\leftarrow$  4 até 5 faça
        $As(y, z) \leftarrow As(y, z) + \bar{Q}(y, z) * thick(x);$ 
13:     fim
14:   fim
15: fim
16: fim função

```

---

## 2.2 Elementos Finitos

O FEM é actualmente uma ferramenta cada vez mais utilizada pela indústria enquanto ferramenta computacional no âmbito da análise do comportamento mecânico de estruturas, da mecânica dos fluidos e da transferência de calor. Muitas são as metodologias apresentadas para diferentes situações e muitos são os programas comerciais implementados no mercado que visam fornecer uma solução para facilitar a utilização dessas ferramentas.

Nesta secção do trabalho, são apresentados modelos de elementos finitos com vista a caracterizar as diversas abordagens aos materiais compósitos apresentadas na secção 2.1.

Utilizando uma abordagem FSDT, os diversos laminados podem ser caracterizados por elementos de placa que incluem 5 graus de liberdade por nó, correspondendo esses aos respectivos deslocamentos  $(u_0, v_0, w_0, \phi_x, \phi_y)$  da superfície média da placa. Os elementos aqui apresentados baseiam-se em diferentes formulações para a obtenção das funções de interpolação entre os nós de cada elemento, nomeadamente em funções de Lagrange ou funções de Kriging. A refinação da malha aplicada ao laminado pode ser efectuada por quantidade de elementos inseridos na estrutura, mas também ao número de nós presentes em cada elemento, sendo por isso apresentados elementos denominados por Q4, Q9 e Q16 que correspondem respectivamente a elementos de 4 nós, 9 nós e 16 nós, ilustrados na figura 2.14.

### Geração de Malhas

Para a implementação da formulação descrita ao longo deste capítulo acerca de cada elemento, é necessário proceder à numeração dos nós pela ordem correcta e respeitar a sequência das funções de forma para poder interpolar os nós adequados segundo a numeração local do próprio elemento.

A Figure 2.14 apresenta 3 tipos de elementos com diferentes numerações de nós. Todos eles são designados ao longo do trabalho como Q4 para o elemento apresentado em a), Q9 para o elemento em b) e Q16 para o elemento ilustrado em c).

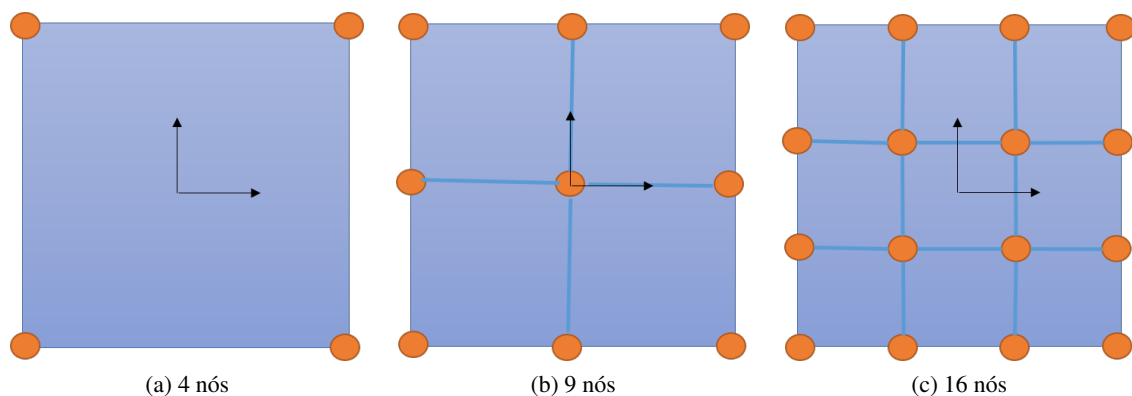


Figura 2.7: Representação esquemática dos diversos elementos

Cada elemento anteriormente ilustrado requer um algoritmo de automatização para a numeração de todos os nós envolventes na malha discretizada, ficando o número total de nós da malha dependendo do número de elementos que a constitui.

### Geração de Malha para Elementos Q4

A numeração dos nós utilizada para os elementos Q4 está de acordo com a numeração apresentada no livro Ferreira (2010), o qual apresenta também um algoritmo que será utilizado e descrito neste capítulo. A geração da malha para os elementos Q4 será a mesma para o caso dos elementos correspondentes com funções de interpolação lagrangeanas e com funções de interpolação de Kriging, pois foi assumida a mesma numeração em ambos os elementos.

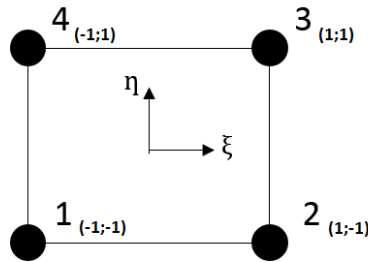


Figura 2.8: Numeração local do elemento Q4

A Figura 2.8 apresenta a numeração dos nós tendo por referência o elemento que os contém. Esta numeração é apenas válida para identificação do nó localizado em determinado elemento, sendo que é necessário adotar uma numeração mais abrangente que permita a numeração dos nós no referencial da própria malha.

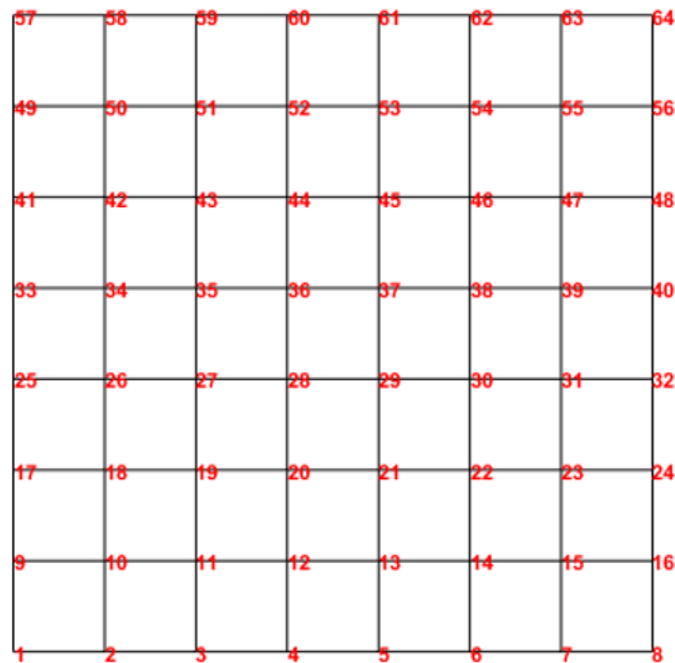


Figura 2.9: Numeração global considerando elementos Q4

A Figura 2.9 exemplifica a numeração dos nós no referencial global do laminado. A exposição desta numeração está dependente do número de elementos que constituem a malha da placa em estudo.

A numeração local é essencial para agilizar o processo de implementação da formulação do elemento, visto que a ordem dos nós deverá estar de acordo com a numeração do vector das funções de forma  $N$ . Exemplificando com o vector das funções de forma do elemento Q4 lagrangeano, a equação 2.25, apresenta os resultados do vector para os casos em que o par  $(\xi, \eta) \in \{(-1, -1), (1, -1), (-1, 1), (1, 1)\}$ , sendo esta ordem numerada segunda a numeração global do elemento, ou seja correspondente aos nós 1; 2; 3 e 4.

$$N = \begin{bmatrix} \frac{(\eta-1)*(\xi-1)}{4} \\ -\frac{(\eta-1)*(\xi+1)}{4} \\ \frac{(\eta+1)*(\xi+1)}{4} \\ -\frac{(\eta+1)*(\xi-1)}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Como poder-se-á concluir dos resultados da Equação 2.25, correspondentes à ordem descrita, a localização do nó com valor 1 no vector de funções de forma segue a ordem da numeração local do elemento, segunda a Figura 2.8 pois apresenta o valor nos nós 1; 2; 4 e 3.

A implementação do algoritmo que permite ordenar a referência do nó segundo a numeração global para uma numeração traduzida para local é descrita pelo algoritmo 5 (adaptado de Ferreira (2010)).

---

**Algoritmo 5** Geração de Malha Q4 (adaptado de Ferreira (2010))

---

```

1: função MALHA Q4 (a, b, c, d)
2:   para j ← 1 até No elementos em Y+1 faça
3:     para i ← 1 até No elementos em X+1 faça
4:        $x(i) \leftarrow (i - 1) * \frac{a}{c}$ 
5:        $y(j) \leftarrow (j - 1) * \frac{b}{d}$ 
6:        $node \leftarrow [x(i), y(j)]$ 
7:     fim
8:   fim
9:   para j ← 1 até No elementos em Y faça
10:    para i ← 1 até No elementos em X faça
11:       $i1 \leftarrow i + (j - 1) * N^o \text{ elementos em X} + 1$ 
12:       $i2 \leftarrow i1 + 1$ 
13:       $i3 \leftarrow i2 + n.\text{elementosemX} + 1$ 
14:       $i4 \leftarrow i1 + N^o \text{ elementos em X} + 1$ 
15:       $element \leftarrow [i1, i2, i3, i4]$ 
16:    fim
17:  fim

```

▷ a ← Comprimento de aresta em X  
 ▷ c ← N<sup>o</sup> elementos na aresta X  
 ▷ b ← Comprimento de aresta em Y  
 ▷ d ← N<sup>o</sup> elementos na aresta Y  
 ▷ Nova linha da matriz

---

### Geração de Malha para Elementos Q9

O conceito aplicado à geração da malha de 9 nós segue os mesmos princípios que a geração da malha de 4. Sendo que a numeração global do elemento é obtida da mesma forma que para o caso anterior. Em relação à numeração dos nós no referencial do elemento, esta segue uma ordem diferente, visto que este elemento é composto por um maior número de nós, ilustrado na figura 2.10.

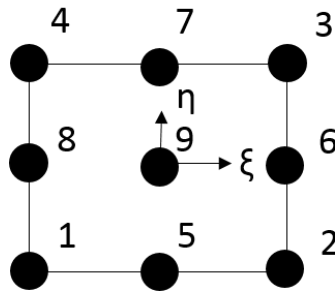


Figura 2.10: Numeração local do elemento Q9

O seguinte algoritmo apresenta a implementação em pseudo-código da geração desta malha.

---

#### Algoritmo 6 Geração de Malha Q9

---

```

1: função MALHA Q9 (a, b, c, d)
2:   para j ← 1 até 2*Nº elementos em Y+1 faça
3:     para i ← 1 até 2*Nº elementos em X+1 faça
4:        $x(i) \leftarrow (i - 1) * \frac{a}{2*c}$ 
5:        $y(j) \leftarrow (j - 1) * \frac{b}{2*d}$ 
6:        $node \leftarrow [x(i), y(j)]$ 
7:     fim
8:   fim
9:   para j ← 1 até Nº elementos em Y faça
10:    para i ← 1 até Nº elementos em X faça
11:       $i1 \leftarrow (2 * i - 1) + (j - 1) * 2*(2*Nº \text{ elementos em } X+1)$ 
12:       $i2 \leftarrow i1 + 2$ 
13:       $i3 \leftarrow i1 + 2*(2*Nº \text{ elementos em } X+1) + 2$ 
14:       $i4 \leftarrow i1 + 2*(2*Nº \text{ elementos em } X+1)$ 
15:       $i5 \leftarrow i1 + 1$ 
16:       $i6 \leftarrow (2*Nº \text{ elementos em } X+1) + (i * 2) + 1 + 2 * (j - 1) * (2*Nº \text{ elementos em } X+1)$ 
17:       $i7 \leftarrow i3 - 1$ 
18:       $i8 \leftarrow i6 - 2$ 
19:       $i9 \leftarrow i8 + 1$ 
20:       $element \leftarrow [i1, i2, \dots, i8, i9]$ 
21:    fim
22:  fim
23: função

```

▷ a ← Comprimento de aresta em X  
 ▷ c ← Nº elementos na aresta X  
 ▷ b ← Comprimento de aresta em Y  
 ▷ d ← Nº elementos na aresta Y  
 ▷ Nova linha da matriz

---

### Geração de Malha para Elementos Q16

Analogamente, na Figura 2.11 ilustra-se a numeração local do elemento Q16.

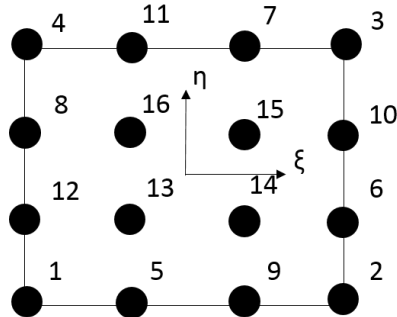


Figura 2.11: Numeração local do elemento Q16

O algoritmo 7, cujo pseudo-código se reproduz, foi implementado com vista à geração da malha constituída por elementos Q16.

---

#### Algoritmo 7 Geração de Malha Q16

---

```

1: função MALHA Q16 (a, b, c, d)
2:   para j ← 1 até 3*No elementos em Y+1 faça
3:     para i ← 1 até 3*No elementos em X+1 faça
4:        $x(i) \leftarrow (i - 1) * \frac{a}{3*c}$ 
5:        $y(j) \leftarrow (j - 1) * \frac{b}{3*d}$ 
6:        $node \leftarrow [x(i), y(j)]$ 
7:     fim
8:   fim
9:   para j ← 1 até No elementos em Y faça
10:    para i ← 1 até No elementos em X faça
11:       $i1 \leftarrow (3 * i - 2) + (j - 1) * 3*(3*N^o \text{ elementos em X}+1)$ 
12:       $i2 \leftarrow i1 + 3$ 
13:       $i3 \leftarrow i1 + 3*(3*N^o \text{ elementos em X}+1) + 3$ 
14:       $i4 \leftarrow i1 + 3*(3*N^o \text{ elementos em X}+1)$  ;  $i5 \leftarrow i1 + 1$ 
15:       $i6 \leftarrow i2 + (3*N^o \text{ elementos em X}+1)$  ;  $i7 \leftarrow i3 - 1$ 
16:       $i8 \leftarrow i1 + 2*(3*N^o \text{ elementos em X}+1)$  ;  $i9 \leftarrow i1 + 2$ 
17:       $i10 \leftarrow i2 + 2*(3*N^o \text{ elementos em X}+1)$  ;  $i11 \leftarrow i5 + 3*(3*N^o \text{ elementos em X}+1)$ 
18:       $i12 \leftarrow i1 + (3*N^o \text{ elementos em X}+1)$  ;  $i13 \leftarrow i12 + 1$ 
19:       $i14 \leftarrow i13 + 1$  ;  $i15 \leftarrow i14 + (3*N^o \text{ elementos em X}+1)$ 
20:       $i16 \leftarrow i15 - 1$  ;
21:       $element \leftarrow [i1, i2, \dots, i15, i16]$ 
22:    fim
23:  fim
24: fim função

```

▷ a ← Comprimento de aresta em X  
 ▷ c ← N<sup>o</sup> elementos na aresta X  
 ▷ b ← Comprimento de aresta em Y  
 ▷ d ← N<sup>o</sup> elementos na aresta Y  
 ▷ Nova linha da matriz

---

### Formulação de Lagrange

Os elementos da família de Lagrange, tal como a designação indica, utilizam funções interpoladoras construídas por polinómios de Lagrange.

Ao considerar um elemento quadrilátero composto por 2 dimensões em coordenadas locais  $[\xi, \eta]$ , pretende-se relacionar as coordenadas locais com as coordenadas globais  $[x, y]$  através duma representação isoparamétrica tal como:

$$x = \sum_{i=1}^n N_i x_i ; \quad y = \sum_{i=1}^n N_i y_i \quad (2.26)$$

Sendo  $N_i$  as funções de forma interpoladoras bivariáveis resultantes da multiplicação das funções de Lagrange de linha, ou seja a uma dimensão. No caso das funções bivariáveis, estas são obtidas segundo a equação 2.27.

$$N_i(\xi, \eta) = l(\xi)l(\eta) \quad (2.27)$$

Sendo que:

$$l(\xi) = \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{\xi - \xi_j}{\xi_i - \xi_j} ; \quad l(\eta) = \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{\eta - \eta_j}{\eta_i - \eta_j} \quad (2.28)$$

A equação 2.28 ilustra a forma de obtenção da função linear de interpolação de Lagrange em cada direcção  $[\xi, \eta]$  do elemento. Deste modo, as funções de forma em coordenadas locais  $[\xi, \eta]$  para o elemento Q4 Lagrangiano resultam nas funções polinomiais apresentadas em 2.29. (Ferreira (2010))

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= l_1(\xi)l_1(\eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \\ N_2(\xi, \eta) &= l_2(\xi)l_1(\eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \\ N_3(\xi, \eta) &= l_2(\xi)l_2(\eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \\ N_4(\xi, \eta) &= l_1(\xi)l_2(\eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \end{aligned} \quad (2.29)$$

Para o caso do elemento composto por 9 nós, ou seja o elemento denominado por Q9 Lagrangiano, as funções de forma são obtidas pela mesma metodologia, sendo que nesse caso, a interpolação é aplicada a 3 pontos  $[-1, 0, 1]$  em cada direcção  $[\xi, \eta]$ , resultando na equação 2.30.

$$l(\xi) = \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{(\xi - \xi_j)(\xi - \xi_{j+1})}{(\xi_i - \xi_j)(\xi_i - \xi_{j+1})} ; \quad l(\eta) = \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{(\eta - \eta_j)(\eta - \eta_{j+1})}{(\eta_i - \eta_j)(\eta_i - \eta_{j+1})} \quad (2.30)$$

Resutando desta interpolação as funções de forma apresentadas na equação 2.31.

$$\begin{aligned}
N_1(\xi, \eta) &= l_1(\xi)l_1(\eta) = \frac{1}{4}\xi\eta(1-\xi)(1-\eta) \\
N_2(\xi, \eta) &= l_3(\xi)l_1(\eta) = -\frac{1}{4}\xi\eta(1+\xi)(1-\eta) \\
N_3(\xi, \eta) &= l_3(\xi)l_3(\eta) = \frac{1}{4}\xi\eta(1+\xi)(1+\eta) \\
N_4(\xi, \eta) &= l_1(\xi)l_3(\eta) = -\frac{1}{4}\xi\eta(1-\xi)(1+\eta) \\
N_5(\xi, \eta) &= l_2(\xi)l_1(\eta) = -\frac{1}{2}(1+\xi)(1-\xi)\eta(1-\eta) \\
N_6(\xi, \eta) &= l_3(\xi)l_2(\eta) = \frac{1}{2}\xi(1+\xi)(1+\eta)(1-\eta) \\
N_7(\xi, \eta) &= l_2(\xi)l_3(\eta) = \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\xi)\eta(1+\eta) \\
N_8(\xi, \eta) &= l_1(\xi)l_2(\eta) = -\frac{1}{2}\xi(1-\xi)(1+\eta)(1-\eta) \\
N_9(\xi, \eta) &= l_2(\xi)l_2(\eta) = (1-\xi^2)(1-\eta^2)
\end{aligned} \tag{2.31}$$

É de notar que as funções presentes na equação 2.31 são funções polinomiais bivariáveis de grau 2. É possível concluir que para elementos compostos por 16 e 25 nós, as funções de Lagrange resultariam em funções polinomiais de grau 3 e 4 respectivamente.

Tendo em consideração uma formulação isoparamétrica, da mesma forma que é obtida a interpolação das coordenadas, obtém-se também a interpolação dos deslocamentos.

$$\begin{aligned}
u &= \sum_{i=1}^n N_i u_i ; \quad v = \sum_{i=1}^n N_i v_i ; \quad w = \sum_{i=1}^n N_i w_i \\
\phi_x &= \sum_{i=1}^n N_i \phi_{xi} ; \quad \phi_y = \sum_{i=1}^n N_i \phi_{yi}
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Sendo  $N_i$  correspondentes às funções de forma referidas anteriormente e  $u, v, w, \phi_x$  e  $\phi_y$  correspondentes aos deslocamentos e rotações existentes segundo a teoria FSDT.

De modo a obter o equivalente das funções de forma expressas em coordenadas locais  $[\xi, \eta]$  para funções escritas em função das coordenadas globais, torna-se necessário definir as derivadas  $\frac{dN}{dx}$  e  $\frac{dN}{dy}$ .

Aplicando a regra da dedução em cadeia, obtém-se:

$$\begin{aligned}
\frac{dN}{dx} &= \frac{dN}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} + \frac{dN}{d\eta} \frac{d\eta}{dx} \\
\frac{dN}{dy} &= \frac{dN}{d\xi} \frac{d\xi}{dy} + \frac{dN}{d\eta} \frac{d\eta}{dy}
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Visualizando de forma matricial, temos:

$$\begin{bmatrix} \frac{dN}{d\eta} \\ \frac{dN}{d\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{dx}{d\xi} & \frac{dy}{d\xi} \\ \frac{dx}{d\eta} & \frac{dy}{d\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dN}{dx} \\ \frac{dN}{dy} \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

Deste modo define-se uma relação entre  $[\frac{dN}{dx} \ \frac{dN}{dy}]$  e  $[\frac{dN}{d\xi} \ \frac{dN}{d\eta}]$  através de uma matriz de transformação que é definida pela matriz Jacobiana. Desta forma, define-se:

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dx} &= J^{-1} \frac{dN}{d\xi} \\ \frac{dN}{dy} &= J^{-1} \frac{dN}{d\eta} \end{aligned} \quad (2.35)$$

A equação 2.35 permite transformar as coordenadas locais em coordenadas globais através do operador Jacobiano que relaciona as coordenadas. É de referenciar que  $J^{-1}$  apenas existe caso exista uma relação injectiva entre as coordenadas locais e globais do elemento. Em elementos muito distorcidos, podem ocorrer singularidades nesta transformação do Jacobiano. Ferreira (2010)

### Formulação de Kriging

Os elementos que utilizam funções de interpolação de Kriging são obtidos de forma semelhante aos elementos anteriormente descritos. O ponto de diferenciação está apenas presente nas funções de forma que interpolam os nós do elemento e na forma como se procede à integração da matriz de rigidez e de massa do elemento. Esta metodologia de interpolação foi primeiramente utilizada, como o nome o indica, por Krige (1952) como forma de interpolar localizações no espaço tridimensional no ramo da geologia e minas. Tem-se vindo a disseminar e constitui também uma importante ferramenta no âmbito da modelação de superfícies e interpolação entre pontos no mundo da engenharia inversa. A figura 2.12 ilustra as funções de forma do elemento de Kriging Q9 biquadrático obtidas pela metodologia descrita.

A interpolação de Kriging baseia-se no pressuposto de que para uma função genérica definida por  $q(x, y)$  pode ser aproximada por uma combinação linear de funções de interpolação  $\phi(x, y)$ . A localização dos nós é obtida segundo a equação 2.36.

$$\bar{q}(x, y) = \phi(x, y)q(x, y) \quad (2.36)$$

Neste caso, as funções de interpolação são obtidas por:

$$\phi(x, y) = P^T(x, y)A + r^T(x, y)B \quad (2.37)$$

Sendo que  $x, y$  representam os pontos nodais associados ao subdomínio considerado e as matrizes  $A$  e  $B$  são obtidas segundo (Loja et al. (2015)):

$$\begin{aligned} A &= (P^T R^{-1} P)^{-1} P^T R^{-1} \\ B &= R^{-1}(I - PA) \end{aligned} \quad (2.38)$$

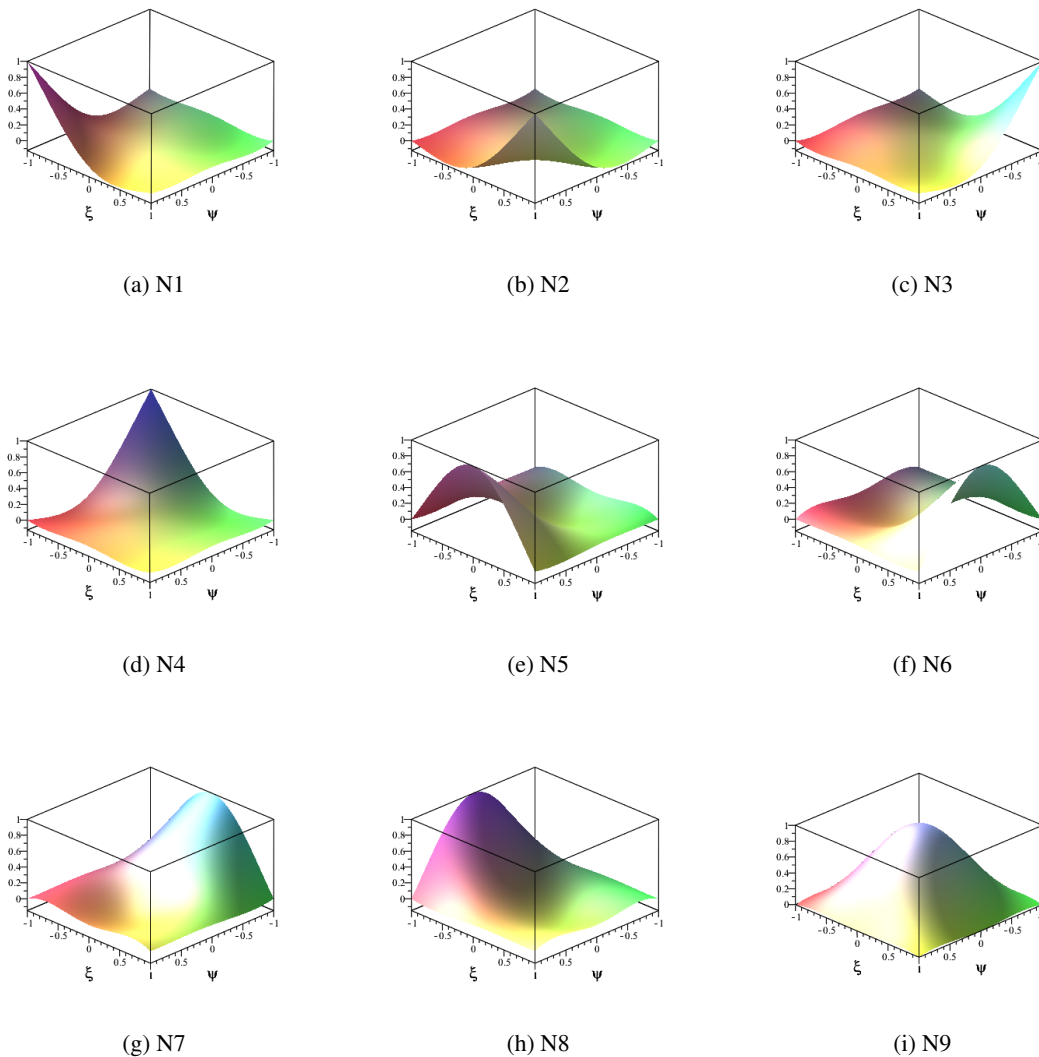


Figura 2.12: Funções de interpolação de Kriging do elemento de 9 nós

A matriz  $P$  corresponde à matriz rectangular dos polinómios, sendo que  $M$  corresponde ao grau polinomial da função e  $N$  o número de pontos a interpolar estabelecidos para a obtenção da função  $\phi(x,y)$ . A matriz  $R$  corresponde à matriz de correlação composta por funções Gaussianas do tipo  $e^{-\theta, r_{ij}^2}$  onde  $r_{ij}^2$  representa as distância Euclidianas entre 2 pontos (Loja et al. (2015)).

$$P = \begin{bmatrix} p_1(x_1, y_1) & \cdots & p_M(x_1, y_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(x_N, y_1) & \cdots & p_M(x_N, y_N) \end{bmatrix}; R = \begin{bmatrix} R((x_1, y_1), (x_1, y_1)) & \cdots & R((x_1, y_1), (x_N, y_N)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R((x_N, y_N), (x_1, y_1)) & \cdots & R((x_N, y_N), (x_N, y_N)) \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

As funções de forma dos elementos de Kriging não estão tão restringidas no seu grau relativamente

ao número de nós do elemento como as funções de forma dos elementos lagrangianos, isto porque não existe apenas uma solução única como no caso anterior. No caso do elementos de Kriging Q9, a interpolação pode ser baseada em funções de base linear ou funções quadráticas. Para o caso do elemento de Kriging Q16, este é composto por 4 nós em cada direcção, o que permite a utilização de funções com base polinomial de grau, 1 (lineares), 2 (quadráticas) e 3 (cúbicas).

As funções de forma obtidas através de funções de interpolação de Kriging são funções extensas e complexas. Estas funções não são funções polinomiais, pelo que não permite a interpolação através do método de quadratura de Gauss. A integração deste tipo de elementos deve ser obtida de forma analítica, pelo que se torna computacionalmente mais pesada.

Todo o restante processo referente à formulação dos elementos finitos permanece idêntico ao descrito para os elementos lagrangianos.

### Equações de Equilíbrio

As equações de equilíbrio, do ponto de vista dinâmico, partem da equação generalizada que traduz o comportamento de uma vibração não amortecida por:

$$M\ddot{q} + Kq = F \quad (2.40)$$

Para o domínio discretizado em N elementos, e considerando uma situação de análise dinâmica em vibração livre, teremos:

$$([K] - \omega_i^2[M])\{q_i\} = 0 \quad (2.41)$$

Sendo [K] correspondente à matriz de rigidez e [M] a matriz de massa resultantes da estrutura em estudo.  $\{q_i\}$  representa o i-ésimo modo de vibração associado à iésima frequência natural  $\{\omega_i\}$ . Na sequência da nota anterior, a equação 2.43 simplifica-se segundo:

$$|[K] - \omega_i^2[M]| = 0 \quad (2.42)$$

As frequências naturais são obtidas pela solução de valores próprios do problema próprio definido na equação 2.42.  $\omega$  expresso em [rad/s].

No caso de uma análise estática linear teremos a seguinte equação de equilíbrio:

$$Kq = F \quad (2.43)$$

Em que o vector  $q$  é o vector dos graus de liberdade generalizados e  $F$  corresponde ao vector de forças generalizadas.

### Definição da Matriz de Rigidez

A matriz de rigidez de cada elemento é obtida tendo em conta as contribuições de membrana, flexão e corte. Assim, define-se a matriz de rigidez elementar segundo a equação 2.44

$$K^{(e)} = K_{bb}^{(e)} + K_{mm}^{(e)} + K_{bm}^{(e)} + K_{mb}^{(e)} + K_{cc}^{(e)} \quad (2.44)$$

em que, no caso dos elementos da família da Lagrange obtém-se:

$$\begin{aligned}
 K_{bb}^{(e)} &= \sum_{i=1}^n B_{bb}^T D B_{bb} w_i \det J \\
 K_{mm}^{(e)} &= \sum_{i=1}^n B_{mm}^T A B_{mm} w_i \det J \\
 K_{bm}^{(e)} &= \sum_{i=1}^n B_{bb}^T B B_{mm} w_i \det J \\
 K_{mb}^{(e)} &= \sum_{i=1}^n B_{mm}^T B B_{bb} w_i \det J \\
 K_{cc}^{(e)} &= \sum_{i=1}^{n-1} B_s^T A_s B_s w_i \det J
 \end{aligned} \tag{2.45}$$

Sendo que as matrizes  $A$ ,  $B$ ,  $D$ , e  $A_s$  correspondem às matrizes características de rigidez do compósito,  $\det J$  corresponde ao determinante do Jacobiano,  $B_{bb}$ ,  $B_{mm}$  e  $B_s$  correspondem às matrizes que relacionam a deformação com o deslocamento respectivamente à deformação obtida por flexão, por efeito de membrana e por efeito de corte.  $w_i$  corresponde aos pesos de integração de Gauss. Estes pesos podem ser consultados para apenas alguns pontos, na Tabela 2.1. Os pontos de avaliação das matrizes  $B$ , são também apresentados na referida tabela. O efeito de bloqueio (“locking”) é tido em consideração, procedendo à integração reduzida no caso da matriz  $B_s$ , quando nos referenciamos aos elementos de Lagrange.

**Tabela 2.1** Pontos e pesos de pontos de Gauss (adaptado de Azevedo Álvaro F. M. (2003) )

Número de pontos de Gauss (n)	Grau do polinômio (p)	Pesos e pontos [W,P]
1	1	$[W_1, P_1] = [2, 0]$
2	3	$[W_1, P_1] = [1, -1/\sqrt{3}]$ $[W_2, P_2] = [1, 1/\sqrt{3}]$
3	5	$[W_1, P_1] = [5/9, -\sqrt{3}/\sqrt{5}]$ $[W_2, P_2] = [8/9, 0]$ $[W_3, P_3] = [5/9, \sqrt{3}/\sqrt{5}]$
...	$2n - 1$	$[W_1, P_1] \dots [W_N, P_N]$

### Definição da Matriz de Massa

A matriz de massa elementar é obtida considerando as mesmas contribuições que a matriz de rigidez. Esta depende da distribuição de massa específica ao longo da espessura e é obtida para o caso dos elementos da família de Lagrange pela equação 2.46 ao proceder à integração reduzida pelo método de quadratura de Gauss utilizando os pontos e pesos da tabela 2.1. Para o caso dos elementos de Kriging, a integração deve ser obtida de forma analítica.

$$M^e = \sum_{i=1}^n N^T * \left( \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z) dz \right) N * w_i * \det J \tag{2.46}$$

Sendo que  $\rho(z)$  corresponde à distribuição de massa específica ao longo da espessura do compósito.  $[\xi, \eta]$  assumem os valores dos diferentes  $n$  pontos de Gauss e a matriz  $N$ , vector que contém as funções de forma da interpolação, inclui as potências de  $z$ .

## 2.3 Simulação e Comparação de Amostras

### Simulação

A simulação de dados experimentais não deve ser obtido como uma simples obtenção de dados segundo uma distribuição pretendida. É necessário garantir a independência e a homogeneidade da distribuição entre variáveis. Para tal, pode ser aplicada a técnica da amostra latina hipercúbica (*Latin Hypercube sampling*) (Iman and Conover (1982)). Esta técnica baseia-se na divisão do espaço de amostra numa grelha composta por células de igual probabilidade, na qual cada localização da grelha permite alocar um ponto da amostra. Esta técnica permite restringir a distribuição da amostra impedindo que 2 pontos possam estar situados na mesma linha ou na mesma coluna.

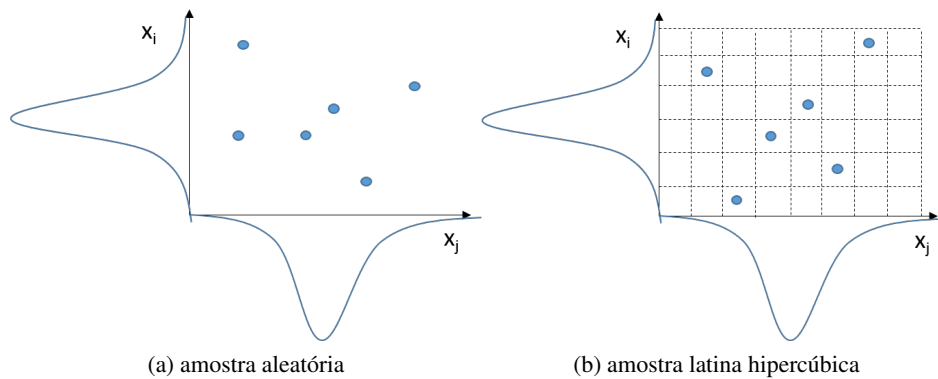


Figura 2.13: Aleatoriedade condicionada

Esta técnica permite um número limitado de possibilidades da amostra, devido aos constrangimentos impostos por natureza (Iman and Conover (1982)). Para além desses, a amostra pode ser gerada considerando outros constrangimentos impostos manualmente como por exemplo a tentativa de aproximação a uma matriz de covariância pretendida de modo a controlar a dependência entre variáveis. No caso em que se pretende a independência entre variáveis, a aproximação deverá ser feita à matriz identidade ( $I$ ), pois esta é o resultado da matriz de covariância de variáveis totalmente independentes.

### Comparação de Amostras

O teste à igualdade das amostras visa concluir a existência de diferenças na distribuição das diversas amostras. A técnica aqui descrita, baseia-se no teste de Kolmogorov-Smirnov de 2 amostras (Montgomery (2003)). Este é um teste de hipótese não paramétrico que avalia as diferenças das amostras ao comparar as distribuições de probabilidade das mesmas. Este teste quantifica a distância entre as funções de distribuição empíricas das 2 amostras. Considerando uma primeira amostra com  $m$  observações e descrita por uma função de distribuição cumulativa observada  $F(x)$  e sendo que a segunda amostra tem  $n$  observações e é descrita por uma função idêntica  $G(x)$ , poder-se-à assim

quantificar o  $D_{m,n}$  que quantifica a distância máxima entre distribuições (equação 2.47).

$$D_{m,n} = \max_x |F(x) - G(x)| \quad (2.47)$$

O teste de hipóteses de Kolmogorov-Smirnov visa testar a hipótese nula ( $H_0$ ) que nos indica que ambas as amostras provêm da mesma população. Para tal, o teste de hipótese é baseado na comparação do valor da distância máxima entre distribuições ( $D_{m,n}$ ) com um valor crítico ( $D_{m,n,\alpha}$ ).

$$D_{m,n} > D_{m,n,\alpha} = c(\alpha) \sqrt{\frac{m+n}{mn}} \quad (2.48)$$

Sendo que  $c(\alpha)$  representa o inverso da distribuição de Kolmogorov-Smirnov em  $\alpha$  e é obtido na tabela 2.2. Para o caso em que se verifique a condição da equação 2.48 a hipótese  $H_0$  será rejeitada,

**Tabela 2.2** Inverso da distribuição em função de  $\alpha$

$\alpha$	0,10	0,05	0,03	0,01	...
$c(\alpha)$	1,22	1,36	1,48	1,63	...

no caso inverso poder-se-à concluir que as amostras provêm da mesma população.

## 2.4 Modelo de Regressão Linear

A forma determinística de relacionar linearmente duas variáveis  $x$  e  $y$  é definida por  $y = \beta_0 + \beta_1 x$ . Numa abordagem probabilística assume-se que o valor esperado da variável dependente  $Y$  é função linear da variável independente  $X$ , isto é, a variável  $Y$  difere do seu valor esperado por uma quantidade aleatória. No modelo de regressão linear simples existem parâmetros  $\beta_0$ ,  $\beta_1$  e  $\sigma^2$  tais que

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \epsilon \quad (2.49)$$

onde  $\beta_0$  representa a ordenada na origem,  $\beta_1$  o declive da recta e  $\epsilon$ , geralmente designado por erro ou resíduo, é uma variável aleatória que se assume normalmente distribuída com média nula e variância constante, isto é,  $\epsilon \sim N(0, \sigma)$ .

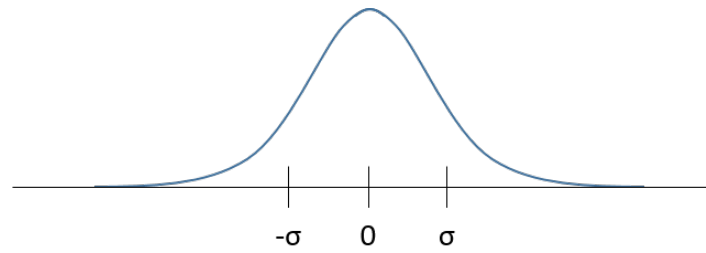
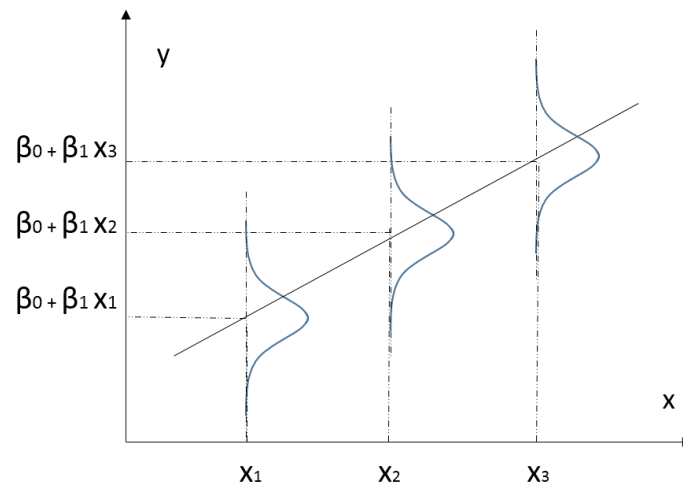
Os parâmetros  $\beta_0$ ,  $\beta_1$  e  $\sigma^2$  são desconhecidos mas podem ser estimados a partir de um conjunto de observações independentes  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ . Em inúmeros contextos a relação que se pretende construir tem mais de uma variável preditora. Nestes casos, a construção é idêntica; continuamos a ter uma variável dependente mas o número de variáveis independentes aumenta. Esta metodologia, designada por modelo de regressão linear múltipla, pode ser utilizada como forma de relacionar a resposta estática/dinâmica do modelo com as propriedades do material.

### Regressão Linear Múltipla

Considere-se agora que existem  $k$  variáveis dependentes ( $k \geq 2$ ),  $X_1, \dots, X_k$ . O modelo de regressão linear múltipla é descrito pela equação 2.55.

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \dots + \beta_k X_k + \epsilon, \quad (2.50)$$

onde  $\beta_0$  representa a ordenada na origem,  $\beta_i$  representa o coeficiente ou declive parcial associado à variável  $X_i$  e  $\epsilon$  o erro ou resíduo do modelo. Passando para o caso concreto de uma amostra, seja

(a) Distribuição de  $\epsilon$ (b) Distribuição de  $Y$  para diferentes valores de  $X$ Figura 2.14: Distribuição dos resíduos para diferentes valores de  $x$  (adaptado de Devore (2011))

através do modo experimental ou por simulação, a equação 2.55 pode ser apresentada matricialmente, obtendo por isso a equação 2.51.

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{k-1,1} & x_{k1} \\ 1 & x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{k-1,2} & x_{k2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{1,n-1} & x_{2,n-1} & \cdots & x_{k-1,n-1} & x_{k-1,n} \\ 1 & x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{k-1,n} & x_{kn} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{k-1} \\ \beta_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_{n-1} \\ \epsilon_n \end{bmatrix}, \quad (2.51)$$

onde  $k$  representa o número de variáveis independentes envolvidas e  $n$  o número de observações da amostra. Desprezando a componente aleatória, isto é, o vector  $[\epsilon]$ , a equação 2.51 pode ser reescrita da seguinte forma:

$$[Y] = [X][\beta] \quad (2.52)$$

Os coeficientes ou declives parciais  $\beta_i$  são estimados através da minimização da soma dos quadrados dos resíduos. A minimização dos resíduos é obtida pela projecção ortogonal do vector de variáveis dependentes ( $Y$ ) sobre o subespaço gerado pelas colunas das variáveis independentes ( $X$ ) que é obtido multiplicando o vector ( $Y$ ) pela matriz de projecção ortogonal, sendo esta descrita por  $H$  na

equação 2.53.

$$H = X(X^T X)^{-1} X^T \quad (2.53)$$

Desse modo obtém-se a relação entre o vector das variáveis dependentes ( $Y$ ) e o vector ( $\hat{Y}$ ) localizado no subespaço mais próxima por:

$$\hat{Y} = HY = X(X^T X)^{-1} X^T Y \quad (2.54)$$

Ao substituir na equação 2.54 a razão existente entre a matriz  $X$  e o vector  $Y$  por um vector composto pelos coeficientes de declive parciais desejados, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{k-1} \\ \beta_k \end{bmatrix} = \hat{Y} X^{-1} = (X^T X)^{-1} X^T Y \quad (2.55)$$

Deste modo, obtém-se o vector dos coeficientes de declive parciais que permite escrever a equação que define o modelo de regressão da equação 2.55. Para mais detalhes ver Smith and Draper (1998).

### Análise de Variância

A análise de variância (ANOVA) é um método de análise da qualidade do modelo de regressão que se baseia em dividir a variabilidade total de  $Y$  (variável dependente) António Carvalho Pedrosa (2004). Os valores dos coeficientes  $\beta_i$  estimados com base na equação 2.55 não dão indicação acerca da qualidade do ajustamento através do modelo linear múltiplo. Interessa para tal, desenvolver uma medida que descreve o grau de relação linear entre as variáveis independentes  $X_i$  e a dependente  $Y$  António Carvalho Pedrosa (2004). De modo a avaliar a qualidade do modelo ajustado, é necessário para tal quantificar a variabilidade total das observações de  $Y$ . Habitualmente designada por SST, essa variabilidade é obtida em função da soma dos quadrados dos desvios totais da variável dependente, ou seja, a soma das diferenças  $(Y - \bar{Y})^2$ . A variabilidade total pode ser decomposta em duas partes: a variabilidade associada aos resíduos (SSE) e da variabilidade explicada pela regressão (SSR), tal como apresenta a equação 2.64.

$$SST = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = SSE + SSR, \quad (2.56)$$

onde  $y_i$  representa cada observação da variável dependente e  $\bar{y}$  resulta da média das observações da variável dependente. A variabilidade associada aos resíduos, variabilidade não explicada, é obtida pela soma dos quadrados dos resíduos (equação 2.57).

$$SSE = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 \quad (2.57)$$

Sendo que  $\hat{y}_i$  é o valor estimado através do modelo. Resta por fim, definir a variabilidade do modelo de regressão (SSR). Esta quantifica a variabilidade explicada através da regressão linear entre os  $x_i$  e o  $Y$ , quanto maior for o SSR, maior será a qualidade do ajustamento do modelo.

$$SSR = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 \quad (2.58)$$

Outro conceito importante é a média dos quadrados dos desvios (MQR) que resulta do quociente entre a soma dos quadrados da regressão e o número de graus de liberdade (associado ao número de termos independentes).

$$MQR = \frac{SSR}{k - 1} \quad (2.59)$$

Sendo que  $k$  representa o número de variáveis independentes e  $k - 1$  o número de graus de liberdade associado ao cálculo da média dos quadrados dos desvios explicados pela regressão (MQR). Esta subtração deve-se ao cálculo anterior da média amostral, a qual veio impôr uma restrição às observações.

$$MQE = \frac{SSE}{n - k} \quad (2.60)$$

Sendo que  $n$  representa a dimensão da amostra e  $n - k$  o número de graus de liberdade associado ao cálculo da média dos quadrados dos resíduos (erros de ajuste do modelo (MQE)). Esta subtração deve-se ao número de restrições impostas pela estimativa dos coeficientes do modelo. Deste modo, obtém-se a tabela ANOVA (2.3). O valor da estatística de teste  $F$ , permite-nos inferir sobre a significância

**Tabela 2.3** Tabela ANOVA

Fonte de variação	SQ	gl	MQ	Estatística de teste $F$
<b>Regressão</b>	$SSR$	$k - 1$	$MQR$	$\frac{MQR}{MQE}$
<b>Erro</b>	$SSE$	$n - k$	$MQE$	—
<b>Total</b>	$SST$	$n - 1$	—	—

do modelo de regressão linear múltipla. Através de um teste de hipóteses, conhecido na literatura por teste de Snedecor ( $F - test$ ), testa-se a hipótese nula  $H_0$  :o modelo não é significativo contra a hipótese alternativa  $H_1$  : o modelo é significativo. A conclusão deste teste refere-se ao modelo no seu global e não especificamente a nenhum coeficiente em concreto Kutner et al. (2010).

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_{k-1} = \beta_k = 0$$

*vs*

$$H_1 : \exists \beta_j \neq 0 \quad (2.61)$$

A estatística de teste  $F$ –Snedecor traduz-se pela equação 2.62.

$$F = \frac{MQR}{MQE} \sim F_{(k-1; n-k)} \quad (2.62)$$

O  $p$ -value do teste  $F$ –Snedecor obtido corresponde ao valor de significância ( $\alpha$ ) a partir do qual se rejeita a hipótese nula, neste caso concreto, rejeitar  $H_0$  significa que o modelo é significativo. Esta conclusão implica que existe pelo menos um coeficientes é significativo, e consequentemente, pelo menos uma das variáveis independentes é significativa na explicação da variabilidade de  $Y$  Kutner et al. (2010).

### Coefficiente de Determinação

A forma mais usual para avaliar a qualidade do ajustamento do modelo é através do coeficiente de determinação amostral  $R^2$ . Este coeficiente indica-nos a percentagem de variabilidade de  $Y$  que é

explicada pelo modelo António Carvalho Pedrosa (2004). O valor deste coeficiente varia entre 0 e 1, sendo 1 para uma explicação perfeita e 0 para o caso em que a correlação linear entre variáveis não se verifica.

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} = \frac{SST - SSE}{SST} = \frac{SST}{SST} - \frac{SSE}{SST} = 1 - \frac{SSE}{SST} \quad (2.63)$$

No entanto, o valor de  $R^2$  que se considera produzir um ajustamento adequado varia na literatura. No caso das ciências exactas, neste caso engenharia mecânica,  $R^2 > 0,9$  é geralmente aceite como indicador de um bom ajustamento Montgomery (2003). O valor do coeficiente de determinação  $R^2$  pode ser influenciado pelo número de variáveis independentes presentes no modelo de regressão. De um modo geral, quanto maior o número de variáveis, mais explicação da variável dependente, consequentemente, maior será o coeficiente de determinação. Por isso, no caso da regressão linear múltipla, é usual analisar o coeficiente de determinação corrigido:

$$R_{corr}^2 = 1 - \frac{MQE}{SST * \frac{1}{n-1}} = R^2 - \frac{k(1 - R^2)}{n - k - 1} \quad (2.64)$$

O coeficiente de determinação corrigido ( $R_{corr}^2$ ) apenas sofre alterações com a adição de variáveis caso estas levem a um melhor ajustamento do modelo aos dados da amostra António Carvalho Pedrosa (2004).

### Teste à Significância individual dos Coeficientes do Modelo

A ANOVA apresenta conclusões acerca da significância do modelo como um todo. De modo a quantificar a significância individual de cada coeficiente de declive parcial, e assim concluir qual ou quais as variáveis independentes mais significativas na variabilidade da variável dependente, é necessário proceder ao teste de hipóteses da equação 2.65, de forma independente para cada coeficiente. Este teste é conhecido na literatura como o teste de Student (*t-test*) Kutner et al. (2010).

$$\begin{aligned} H_0 : \beta_j &= 0 \\ vs \\ H_1 : \beta_j &\neq 0 \end{aligned} \quad (2.65)$$

O teste *t*-Student é apresentado na equação 2.66.

$$\frac{\beta_j}{\sqrt{MQE * C_{ii}}} \sim t_{(n-k)} \quad (2.66)$$

onde  $C_{ij}$  corresponde ao elemento  $i$  da diagonal da matriz  $(X^t X)^{-1}$ . O *p*-value do teste *t* indica o valor de significância a partir do qual se rejeita a hipótese nula  $H_0$  (geralmente se este é menor de 0,05). Esta rejeição leva à aceitação da hipótese alternativa, ou seja, o coeficiente  $\beta_j$  em estudo é significativo na explicação da variabilidade de  $Y$  e, por consequência a variável  $X_j$  deve fazer parte do modelo Montgomery (2003).

### Validação dos Pressupostos do Modelo de Regressão Linear

A dedução de um modelo de regressão visa quantificar uma relação entre as variáveis independentes e a variável dependente em estudo. Para além de avaliar a qualidade do ajustamento e testar a significância do modelo, é também necessário validar que não exista violação dos pressupostos envolvidos

na metodologia adotada. A implementação da regressão linear envolve alguns pressupostos conhecidos por pressupostos de Gauss-Markov para os resíduos Montgomery (2003). Os pressupostos em questão ditam a validade da inferência do modelo e são baseados na distribuição e independência dos mesmos. Em suma, o modelo só é válido quando (Montgomery (2003)):

- $\epsilon_j \sim N(0, \sigma)$ , ou seja os resíduos possuem distribuição normal de média nula e variância constante;
- $Cov(\epsilon_k, \epsilon_l) = 0$  ( $k \neq l; k, l = 1, \dots, n$ ), ou seja os erros são independentes entre si.

A figura 2.15 ilustra, a título de exemplo, como deverão apresentar-se os resíduos  $\epsilon_i$  em função de  $\hat{y}_i$ . Inicialmente, a análise dos pressupostos pode ser feita de forma gráfica. Essa abordagem permite de-

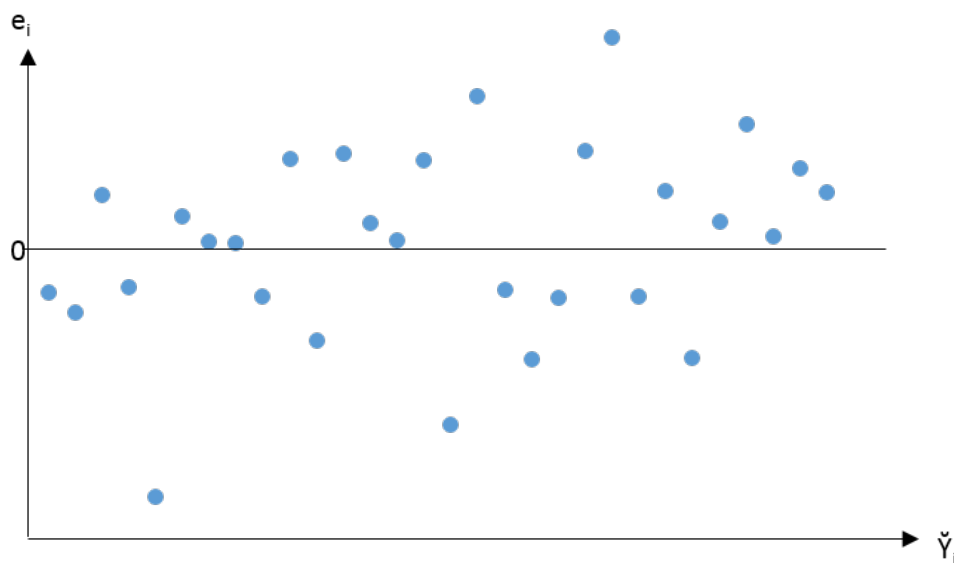


Figura 2.15: Distribuição dos resíduos (adaptado de Montgomery (2003))

tectar indícios de que a variância dos erros não é constante (heteroscedasticidade) ou caso exista uma relação entre  $Y$  e  $x_i$  não linear. De modo a quantificar os pressupostos dos resíduos, podemos realizar alguns testes de validação de resíduos. Para além da visualização, foram realizados testes de hipóteses para a média nula nos resíduos e testes de ajustamento à normalidade dos resíduos (Montgomery (2003)). Neste trabalho foi utilizado o package `norttest` do software R.

## Capítulo 3

# Casos de Estudo

Os casos de estudo apresentados neste capítulo têm como objectivo, numa primeira parte, validar as ferramentas e teorias implementadas ao longo deste trabalho. Numa segunda parte são apresentados estudos que visam comparar e quantificar a influência da utilização de diferentes metodologias, ao nível da natureza dos elementos finitos utilizados, uma comparação que visa comparar a implementação de uma abordagem contínua e discreta de distribuição de partículas e um estudo comparativo entre distribuições de partículas definidas de forma contínua por diferentes abordagens. Na terceira parte deste capítulo, é apresentado um estudo com foco na variabilidade deste tipo de materiais, demonstrando que alguns parâmetros de entrada dos modelos têm maior influência sobre a caracterização do material. Com uso de ferramentas estatísticas, é apresentado um modelo probabilístico que relaciona os parâmetros de entrada do modelo com os parâmetros de saída do mesmo.

### 3.1 Comparação de Modelos

Esta secção visa comparar e validar cada tipo de elemento utilizado ao longo do trabalho de forma a validar os resultados subsequentes. Nesta perspectiva, este capítulo apresenta, numa primeira parte, uma abordagem comparativa entre cada tipo de elemento utilizado seguido de um estudo de validação dos resultados em análise estática e dinâmica por comparação com valores de referência. No final de cada estudo são apresentadas algumas conclusões que serão tidas em conta para a continuação do trabalho apresentado.

#### Caso 1: Estudo de Convergência

Em termos de comparação e na perspectiva de escolher quais os elementos mais apropriados para implementação do estudo em causa, apresenta-se uma análise comparativa dos modelos para o mesmo caso de estudo. Este caso de estudo é realizado tendo como objectivo eleger os melhores elementos ao comparar a convergência do valor da deformada máxima em termos de refinação de malha. Este estudo é realizado tendo em consideração uma placa compósita com apenas uma única lamina ortotrópica orientada a  $0^\circ$  e com propriedades mecânicas e geométricas apresentadas na tabela 3.1.

Será expectável que a refinação da malha leve a uma melhor aproximação do comportamento da estrutura, porém a refinação excessiva levará também a um elevado número de requisitos necessários para processamento, devido à criação de matrizes de rigidez e de massa de elevada dimensão, para um caso do estudo de vibrações livres. Cada uma das matrizes anteriormente mencionadas têm dimensões iguais ao número de graus de liberdade que compõem o modelo de estudo. Assim, antes da imposição

**Tabela 3.1** Propriedades para estudo de convergência

E1 [GPa]	E2 [GPa]	v12	v21	G12 [GPa]	G23 [GPa]	G23 [GPa]
140	10	0,3	0,021429	7	7	7
		a [mm]	h [mm]			
		1000	10			

de condições de fronteira bi-encastadas, cada matriz terá dimensão 5 vezes o número de nós existentes no modelo, considerando os pressupostos mencionados no capítulo 3-Fundamentos teóricos.

Uma malha de 20x20 elementos no laminado cujas propriedades estão definidas pela tabela 3.1 será assim considerada como sendo uma malha para a qual um elemento considerado aceitável terá de ter convergido ou apresentar um desvio suficientemente pequeno para ser considerado admissível. Este tamanho de malha foi considerado com base nos resultados de convergência do elemento Q4-lagrangiano, elemento esse muito conhecido e incluído na biblioteca da maioria dos programas de elementos finitos, intitulado sob várias nomenclaturas dependendo do programa.

**Tabela 3.2** Deformada utilizando elementos de base de Lagrange

Nº elementos por aresta	Lagrange Q4	Lagrange Q9
5	1,94E-04	2,30E-04
7	2,11E-04	2,30E-04
9	2,18E-04	2,30E-04
11	2,22E-04	2,30E-04
13	2,24E-04	2,30E-04
15	2,26E-04	2,30E-04
17	2,27E-04	-
19	2,27E-04	-
20	2,29E-04	-

A tabela 3.2 apresenta os resultados obtidos para o caso dos elementos finitos mais conhecidos, elementos com funções de interpolação de base lagrangiana, sejam eles denominados por Q4 e Q9 Lagrangianos ou seja com 4 nós e 9 nós respectivamente. Os elementos finitos com funções de interpolação com base de Kriging serão comparados com os anteriormente descritos.

Por comparação dos resultados obtidos na utilização dos elementos com funções de interpolação de base de Kriging apresentados na Table 3.3 com os resultados dos elementos da tabela 3.2 poder-se-á concluir que o elemento Q9 com funções biquadráticas de base de Kriging apresenta uma convergência notável quando comparado com os restantes elementos da mesma tabela.

Em ambas as tabelas, o processamento de resultados para número de elementos superior é cessado quando os resultados obtidos são suficientes para garantir a convergência ou pelo contrário, que apresentam indícios de um número excessivo de elementos necessários. No caso do elemento Kriging Q4, foram obtidos maior número de resultados pelo facto de apresentar resultados iniciais muito diferentes do resultado alvo.

A tabela 3.3 apresenta também resultados obtidos utilizando os elementos Kriging Q16. São apresentados 3 elementos, cada um com 16 nós mas cuja as funções de interpolação diferem no grau, podendo ser funções bilineares, biquadráticas ou bicúbicas.

Após análise das tabelas apresentadas poder-se-á concluir que existem grandes diferenças na precisão de cada tipo de elemento. A Figura 3.1 apresenta os resultados das tabelas de forma gráfica na qual poder-se-á visualizar de uma forma clara quais os modelos que convergem mais rapidamente. Da

Tabela 3.3 Deformada utilizando elementos de base de Kriging

Nº elementos por lado	Kriging Q4-bilinear	Kriging Q9-bilinear	Kriging Q9-biquadrática	
5	6,76E-06	4,00E-05	1,90E-04	
7	1,36E-05	6,36E-05	2,19E-04	
9	2,21E-05	8,74E-05	2,26E-04	
11	3,20E-05	1,09E-04	2,29E-04	
13	4,27E-05	1,28E-04	2,30E-04	
15	5,39E-05	1,45E-04	-	
17	6,53E-05	1,58E-04	-	
19	7,66E-05	1,69E-04	-	
20	8,29E-05	1,73E-04	-	
30	1,31E-04	-	-	
40	1,63E-04	-	-	
50	1,83E-04	-	-	
60	1,97E-04	-	-	
70	2,05E-04	-	-	
80	2,11E-04	-	-	

Nº elementos por lado	Kriging Q16-bilinear	Kriging Q16-biquadrática	Kriging Q16-bicúbico	
5	1,17E-04	2,15E-04	2,28E-04	
7	1,37E-04	2,26E-04	2,29E-04	
9	1,56E-04	2,28E-04	2,30E-04	
11	1,71E-04	2,29E-04	-	
13	1,82E-04	2,29E-04	-	
15	1,91E-04	-	-	
17	1,98E-04	-	-	
19	2,04E-04	-	-	
20	2,06E-04	-	-	

Figura 3.1 poder-se-á concluir que alguns dos elementos com funções de base de Kriging apresentam taxas de convergência bastante satisfatórias. Podemos ainda concluir que os elementos com funções bilineares de base de Kriging são os elementos que apresentam taxas de convergência menores.

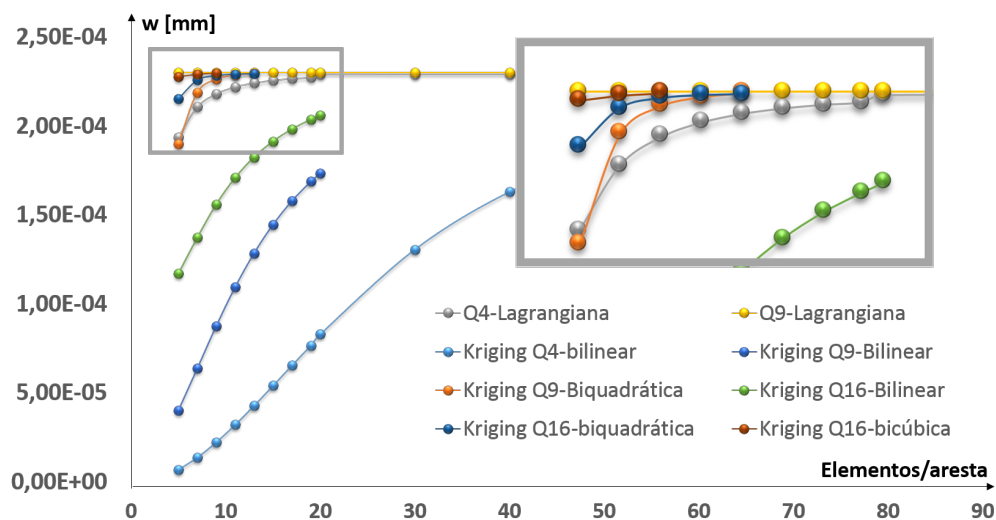


Figura 3.1: Estudo de convergência dos elementos

## Caso 2: Validação dos Elementos Finitos

Apesar da convergência de resultados entre os modelos, é importante proceder à validação de cada tipo de elemento de forma individual e sustentado pela devida bibliografia.

Realiza-se também neste capítulo a validação dos elementos tendo como base de comparação valores conhecidos e tomados como referência. Esta abordagem foi essencialmente sustentado em termos de comparação por resultados obtidos em Nguyen et al. (2007) para validação das deformações transversais máximas com factor de correcção de corte corrigido e em Loc V. Tran, A.J.M Ferreira (2013) para o caso da validação do estudo dinâmico.

De acordo com os trabalhos de referência, neste caso utilizando uma abordagem *FSDT*, poder-se-á modelar cada compósito *FGM* proposto em ambos os artigos aplicando a regra das misturas para o caso da deformada transversal máxima e a de Mori-Tanaka para o estudo da frequência fundamental.

Estas simulações foram realizados tendo em conta os elementos implementados.

### Validação dos Resultados da Deformada Transversal Máxima

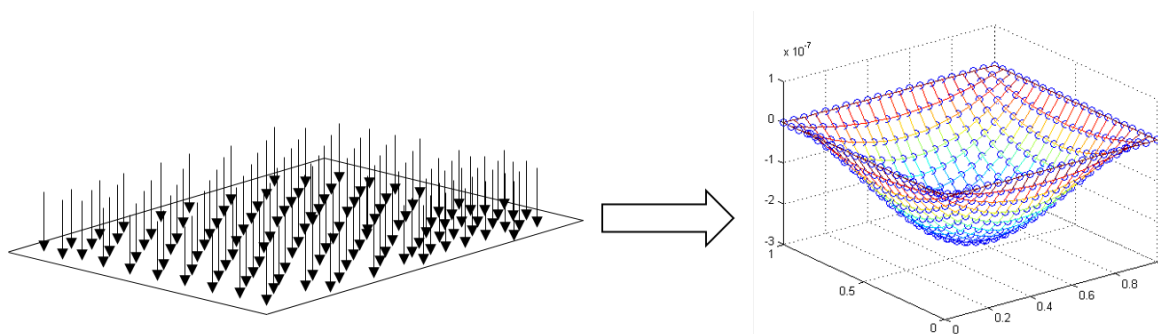


Figura 3.2: Validação da deformada transversal máxima

Esta análise tem como objectivo a validação dos resultados obtidos em termos de deformada máxima para o caso de um compósito simplesmente apoiado sujeito a uma pressão constante, tal como ilustra a Figura 3.2. Tendo em consideração diversos casos de relação entre o a aresta da placa e a sua espessura e considerando diferentes factores de corte. A validação dos resultados é obtida pela comparação de valores resultantes da deformação máxima normalizada pela espessura calculada pela equação 3.1.

$$w_{norm} = w_{max} / h \quad (3.1)$$

O caso de estudo apresentado em Nguyen et al. (2007), o qual é utilizado para comparação, apresenta o estudo de um compósito *FGM* composto por alumínio e Monotungsténio carbide-WC com as respectivas propriedades  $E_{al}=70$  GPa e  $E_{Mt}=696$  GPa, obtendo assim um rácio de módulos de Young  $E_{al}/E_{Mt}=9,9426$  e considerando  $\nu_{al}=0,2$  e  $\nu_{Mt}=0,4$ . O estudo refere-se a uma placa *FGM* sujeita a uma pressão uniforme de  $q_0=10^4$  Pa. A geometria do laminado é descrita por uma forma quadrada de arestas iguais e dimensões  $a=b=1$  m.

A distribuição de cerâmico (Monotungsténio carbide-WC) ao longo da espessura do laminado é descrita pela lei de potência considerando diferentes relações  $a/h$  e um expoente de Voigt  $p = 7$  descrito na tabela 3.4. A distribuição de partículas cerâmicas é ilustrada pela figura 3.3.

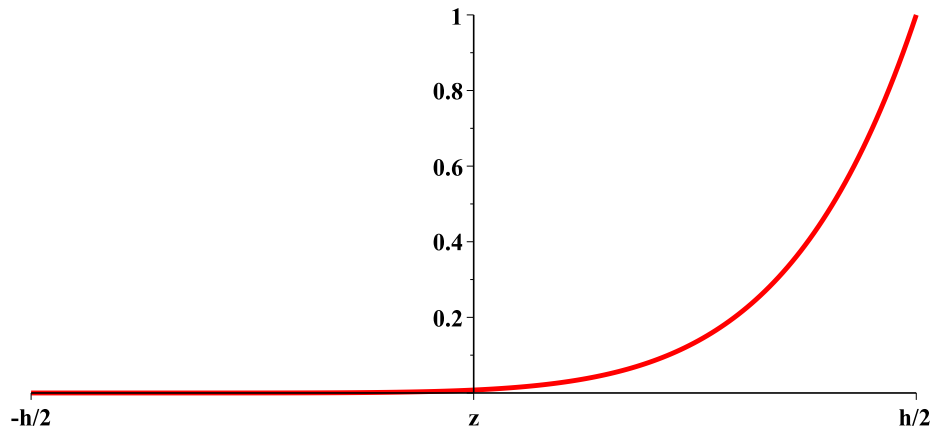


Figura 3.3: Distribuição de cerâmico ao longo da espessura descrito pela lei de potência para  $p=7$

A tabela 3.4 apresenta resultados de referência da deformação máxima para diversos casos de relação entre a aresta do laminado e a sua espessura comparando ainda com a influência do valor do factor de correcção ao corte. Estes resultados foram retirados da tabela 2 do artigo Nguyen et al. (2007) e são utilizados enquanto termos de comparação para a validação dos resultados em causa.

**Tabela 3.4** Deformada transversal máxima [ $w_{norm}$ ] (Nguyen et al. (2007))

$a/h$	$k=1$	$k=5/6$	$k=0,576$	$E_{al}/E_{Mt}$	$p$
5	2,2177E-06	2,28E-06	2,46E-06	9,9426	7
10	3,16E-05	3,19E-05	3,26E-05	9,9426	7
20	4,90E-04	4,91E-04	4,94E-04	9,9426	7
50	1,8980E-02	1,90E-02	1,90E-02	9,9426	7

A tabela 3.5 apresenta os resultados obtidos utilizando os elementos Q4, Q9 e Q16 com funções de interpolação de Lagrange e de Kriging segundo as diversas possibilidades de funções de interpolação. Para ambos os casos são apresentados os resultados tendo em conta os valores de factor de correcção ao corte 1, 5/6 e 0,576.

Por analogia à análise dos elementos Q4 e Q9, os elementos Q16 apresentam melhores resultados para os casos de ordens superiores, sendo que os elementos com funções bilineares de Kriging apresentam resultados menos promissores que os elementos com funções biquadráticas e funções bicúbicas.

A tabela apresentada referente ao estudo da validação dos elementos na determinação da deformação máxima apresenta valores médios de tempo de processamento. Estes valores indicam em média o tempo de processamento de cada caso, referente a cada tipo de elemento. Poder-se-à concluir que os elementos com funções de interpolação de Kriging são significativamente mais pesados em termos computacionais quando comparados com os elementos com funções de interpolação da família de Lagrange. Poder-se-à ainda concluir que os elementos Q16 são os elementos com maior necessidade de recursos computacionais, sem que por isso apresentem melhores resultados.

**Tabela 3.5** Validação da deformação transversal máxima  $w_{norm}$ 

K=1								
a/h	Q4-Lagrange	Desvio %	Q9-Lagrange	Desvio %	Q4-Kriging	Desvio %	Q9-Kriging Bilinear	Desvio %
5	2,21E-06	0,48%	2,21E-06	0,38%	2,17E-06	2,12%	2,19E-06	1,15%
10	3,15E-05	0,30%	3,16E-05	0,14%	2,97E-05	6,09%	3,09E-05	2,34%
20	4,89E-04	0,25%	4,90E-04	0,08%	3,94E-04	19,73%	4,53E-04	7,57%
50	1,82E-02	0,24%	1,90E-02	0,06%	7,54E-03	60,25%	1,27E-02	32,92%
time (s)	8,29E-01		6,56E+00		1,39E+03		3,59E+02	
K=1								
a/h	Q9-Kriging Biquadrático	Desvio %	Q16-Kriging Bilinear	Desvio %	Q16-Kriging Biquadrático	Desvio %	Q16-Kriging Bicúbico	Desvio %
5	2,21E-06	0,30%	2,21E-06	0,51%	2,21E-06	0,35%	2,21E-06	0,30%
10	3,16E-05	0,05%	3,14E-05	0,58%	3,16E-05	0,12%	3,16E-05	0,03%
20	4,90E-04	-0,02%	4,82E-04	1,71%	4,89E-04	0,15%	5,21E-04	-6,30%
50	1,90E-02	-0,03%	1,73E-02	8,77%	1,88E-02	0,76%	1,92E-02	-1,04%
time (s)	3,54E+02		3,18E+03		2,96E+03		2,74E+03	
K=5/6								
a/h	Q4-Lagrange	Desvio %	Q9-Lagrange	Desvio %	Q4-Kriging	Desvio %	Q9-Kriging Bilinear	Desvio %
5	2,27E-06	0,53%	2,27E-06	0,44%	2,24E-06	1,93%	2,26E-06	1,12%
10	3,18E-05	0,31%	3,18E-05	0,15%	3,02E-05	5,21%	3,12E-05	2,04%
20	4,90E-04	0,23%	4,91E-04	0,05%	4,08E-04	17,02%	4,60E-04	6,42%
50	1,89E-02	0,24%	1,90E-02	0,06%	8,39E-03	55,82%	1,35E-02	29,06%
time (s)	9,20E-01		6,51E+00		1,55E+03		3,82E+02	
K=5/6								
a/h	Q9-Kriging Biquadrático	Desvio %	Q16-Kriging Bilinear	Desvio %	Q16-Kriging Biquadrático	Desvio %	Q16-Kriging Bicúbico	Desvio %
5	2,27E-06	0,37%	2,27E-06	0,55%	2,27E-06	0,41%	2,27E-06	0,36%
10	3,18E-05	0,07%	3,17E-05	0,52%	3,18E-05	0,14%	3,19E-05	0,05%
20	4,91E-04	-0,04%	4,84E-04	1,43%	4,91E-04	0,11%	5,22E-04	-6,29%
50	1,90E-02	-0,04%	1,76E-02	7,52%	1,89E-02	0,64%	1,92E-02	-0,87%
time (s)	3,52E+02		1,66E+03		4,20E+03		3,49E+03	
K=0,576								
a/h	Q4-Lagrange	Desvio %	Q9-Lagrange	Desvio %	Q4-Kriging	Desvio %	Q9-Kriging Bilinear	Desvio %
5	2,44E-06	0,64%	2,44E-06	0,59%	2,41E-06	1,67%	2,43E-06	1,13%
10	3,24E-05	0,34%	3,25E-05	0,20%	3,13E-05	3,82%	3,20E-05	1,60%
20	4,93E-04	0,26%	4,94E-04	0,09%	4,32E-04	12,54%	4,71E-04	4,67%
50	1,90E-02	0,22%	1,90E-02	0,05%	1,01E-02	46,65%	1,48E-02	22,13%
time (s)	3,29E+01		6,60E+00		1,39E+03		3,38E+02	
K=0,576								
a/h	Q9-Kriging Biquadrático	Desvio %	Q16-Kriging Bilinear	Desvio %	Q16-Kriging Biquadrático	Desvio %	Q16-Kriging Bicúbico	Desvio %
5	2,44E-06	0,52%	2,44E-06	0,66%	2,44E-06	0,56%	2,44E-06	0,51%
10	3,25E-05	0,12%	3,24E-05	0,46%	3,25E-05	0,18%	3,25E-05	0,11%
20	4,94E-04	0,00%	4,89E-04	1,06%	4,93E-04	0,12%	5,25E-04	-6,17%
50	1,90E-02	-0,05%	1,80E-02	5,44%	1,89E-02	0,43%	1,91E-02	-0,62%
time (s)	3,45E+02		1,37E+03		4,19E+03		3,50E+03	

### Validação da Frequência Fundamental

De modo a validar os elementos finitos implementados, em termos de estudo dinâmico de vibrações livres, é apresentado nesta secção um estudo comparativo entre os resultados obtidos para os diversos elementos com valores de referência apresentados em Loc V. Tran, A.J.M Ferreira (2013), sendo esses considerados como resultados de referência na tabela 3.6. Este estudo baseia-se na comparação de

resultados obtidos para diferentes relações geométricas entre a aresta da placa *FGM* e a espessura ( $a/h$ ) e também para diferentes parâmetros de distribuição da lei de potência. Os resultados são baseados no estudo de um compósito composto pela combinação de materiais  $Al/Al_2O_3$ . As propriedades consideradas são  $E = 70 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0,3$ ,  $\rho = 2707 \text{ kg/m}^3$  para o caso do alumínio ( $Al$ ) e  $E = 380 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0,3$ ,  $\rho = 3800 \text{ kg/m}^3$  para o caso do óxido de alumínio ( $Al_2O_3$ ). A discretização do modelo é obtida por uma malha de 20x20 elementos. Os resultados apresentam-se normalizados segundo  $\omega_{norm} = \omega h \sqrt{\rho_m/E_m}$  sendo  $\rho_m$  e  $E_m$  a massa específica e o módulo de Young respectivos ao alumínio.

**Tabela 3.6** Validação da frequência fundamental

a/h	Teoria	Método	p=0	p=0.5	p=1	p=4	p=10
5	FSDT	<b>Tran and Ferreira (2013)</b>	<b>2,112 (Desvio%)</b>	<b>1,805 (Desvio%)</b>	<b>1,631 (Desvio%)</b>	<b>1,397 (Desvio%)</b>	<b>1,324 (Desvio%)</b>
		Lagrange-Q4	2,117 (0,2%)	1,803 (0,1%)	1,624 (0,4%)	1,383 (1,0%)	1,315 (0,7%)
		Lagrange-Q9	2,107 (0,2%)	1,795 (0,6%)	1,616 (0,9%)	1,374 (1,6%)	1,308 (1,2%)
		Kriging-Q4	2,131 (0,9%)	1,817 (0,6%)	1,637 (0,4%)	1,392 (0,4%)	1,323 (0,1%)
		Kriging-Q9 Bilinear	2,119 (0,3%)	1,806 (0,0%)	1,627 (0,3%)	1,384 (0,9%)	1,316 (0,6%)
		Kriging-Q9 Biquadrático	2,111 (0,1%)	1,798 (0,4%)	1,620 (0,7%)	1,379 (1,3%)	1,312 (0,9%)
		Kriging-Q16 Bilinear [10x10]	2,118 (0,3%)	1,805 (0,0%)	1,626 (0,3%)	1,384 (1,0%)	1,316 (0,6%)
		Kriging-Q16 Biquadrático [10x10]	2,111 (0,1%)	1,798 (0,4%)	1,619 (0,7%)	1,379 (1,3%)	1,312 (1,3%)
		Kriging-Q16 Bicúbico [10x10]	2,111 (0,0%)	1,799 (0,3%)	1,620 (0,7%)	1,379 (1,3%)	1,312 (0,9%)
		10	FSDT	<b>Tran and Ferreira (2013)</b>	<b>0,577 (Desvio%)</b>	<b>0,490 (Desvio%)</b>	<b>0,442 (Desvio%)</b>
Lagrange-Q4	0,578 (0,2%)			0,492 (0,3%)	0,444 (0,5%)	0,385 (0,7%)	0,367 (0,3%)
Lagrange-Q9	0,577 (0,1%)			0,490 (0,0%)	0,443 (0,1%)	0,383 (0,3%)	0,366 (0,1%)
Kriging-Q4	0,592 (2,7%)			0,505 (3,1%)	0,457 (3,4%)	0,394 (3,2%)	0,375 (2,4%)
Kriging-Q9 Bilinear	0,582 (0,9%)			0,495 (1,1%)	0,448 (1,3%)	0,387 (1,4%)	0,369 (0,8%)
Kriging-Q9 Biquadrático	0,577 (0,1%)			0,490 (0,0%)	0,443 (0,2%)	0,383 (0,4%)	0,366 (0,0%)
Kriging-Q16 Bilinear [10x10]	0,582 (0,8%)			0,495 (1,0%)	0,447 (1,2%)	0,387 (1,3%)	0,369 (0,7%)
Kriging-Q16 Biquadrático [10x10]	0,577 (0,1%)			0,490 (0,0%)	0,443 (0,2%)	0,383 (0,4%)	0,366 (0,0%)
Kriging-Q16 Bicúbico [10x10]	0,577 (0,0%)			0,490 (0,0%)	0,443 (0,2%)	0,384 (0,4%)	0,366 (0,0%)
20	FSDT			<b>Tran and Ferreira (2013)</b>	<b>0,148 (Desvio%)</b>	<b>0,125 (Desvio%)</b>	<b>0,113 (Desvio%)</b>
		Lagrange-Q4	0,148 (0,3%)	0,126 (0,8%)	0,114 (0,8%)	0,099 (1,2%)	0,095 (0,8%)
		Lagrange-Q9	0,148 (0,0%)	0,126 (0,5%)	0,114 (0,5%)	0,099 (0,9%)	0,094 (0,5%)
		Kriging-Q4	0,162 (9,6%)	0,139 (11,3%)	0,126 (11,8%)	0,108 (10,7%)	0,102 (8,9%)
		Kriging-Q9 Bilinear	0,153 (3,2%)	0,130 (4,1%)	0,118 (4,3%)	0,102 (4,2%)	0,097 (3,3%)
		Kriging-Q9 Biquadrático	0,148 (0,1%)	0,126 (0,5%)	0,114 (0,5%)	0,099 (0,8%)	0,094 (0,5%)
		Kriging-Q16 Bilinear [10x10]	0,152 (2,7%)	0,129 (3,6%)	0,117 (3,7%)	0,102 (3,7%)	0,097 (2,9%)
		Kriging-Q16 Biquadrático [10x10]	0,148 (0,1%)	0,126 (0,5%)	0,114 (0,5%)	0,099 (0,9%)	0,094 (0,5%)
		Kriging-Q16 Bicúbico [10x10]	0,148 (0,0%)	0,126 (0,5%)	0,114 (0,5%)	0,099 (0,9%)	0,094 (0,5%)

Da tabela 3.6 podemos concluir acerca do bom desempenho global dos diferentes elementos. Poder-se-à observar a existência de ligeira oscilações nos resultados obtidos dependendo do elemento em causa.

### 3.2 Abordagem Contínua e Discreta

Diversos estudos foram já realizados acerca das vantagens de conseguir uma distribuição contínua de partículas ao longo da espessura. Essa distribuição torna-se vantajosa visto que vai na tentativa de minimizar as diferenças de materiais repentinas que provocariam transições abruptas no estado de tensão, bem como tensões residuais superiores e levariam a um pior desempenho do compósito. Porém, existem por vezes limitações do ponto de vista do processo de fabrico, sendo por questões económicas devido à elevada tecnologia necessária para conseguir distribuições de partículas contínuas ou simplesmente pela impossibilidade de o fazer que levam à necessidade de caracterizar o laminado de forma discreta, como apresenta a figura b) de 3.4.

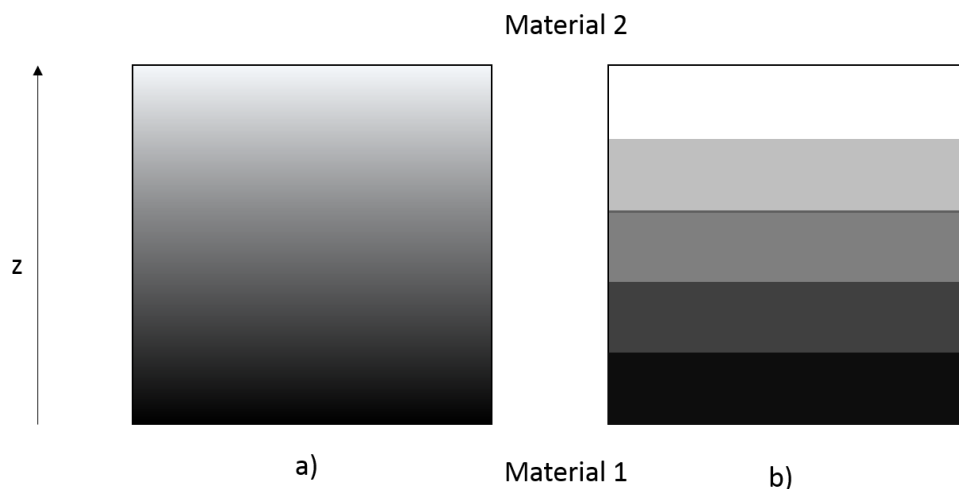


Figura 3.4: Modelação do FGM (adaptado de Wessel (2004)) a) abordagem contínua; b) abordagem discreta

Este estudo visa comparar a influência das metodologias sobre a deformada transversal máxima e a frequência fundamental do compósito. Pretende-se concluir acerca das consequências da discretização do *FGM* por um conjunto de camadas homogêneas e qual o impacto sobre os resultados ao escolher um número específico de laminas e relacionar essa discretização com o parâmetro  $p$  da distribuição de partículas quando considerada uma distribuição segundo a regra da potência.

O caso de estudo incide sobre um compósito *FGM* composto por alumínio (*Al*) e monotungsténio-Carbide (*WC*) para o caso da análise da deformada transversal. No caso da análise sobre a frequência fundamental o laminado é constituído por alumínio (*Al*) e óxido de alumínio ( $Al_2O_3$ ). As propriedades de cada material apresentam-se na tabela 3.7.

**Tabela 3.7** Propriedades mecânicas dos materiais utilizados

Material	Módulo de Young $E$ (Gpa)	Coefficiente de poisson $\mu$	Densidade $\rho$ (Kg/m <sup>3</sup> )
Alumínio ( <i>Al</i> )	70	0,3	2707
Monotungsténio Carbide ( <i>WC</i> )	696	0,3	15600
Óxido de Alumínio ( $Al_2O_3$ )	380	0,3	3800

Os casos considerados variam na distribuição de densidade de partículas, sendo consideradas modelações de distribuições de partículas segundo os expoentes ( $p$ ), da lei de potência, igual a 0, 0.5, 1 e 2 e pretende-se avaliar a influência da caracterização do laminado segundo 1, 2, 5, 10 e 20 camadas. Pretende-se ainda compreender a influência desta variação sobre laminados com ordens de espessura diferentes, sendo que o estudo foi considerado também segundo relações entre aresta e espessura da placa ( $a/h$ ) iguais a 5, 10 e 20.

Primeiramente avaliam-se as propriedades mecânicas efectivas do compósito tendo em conta uma distribuição contínua de partículas e considerando uma homogeneização baseada na regra de Mori-Tanaka. Dependendo do número de camadas a ter em conta, as propriedades de cada lâmina serão propriedades médias à cota de espessura ( $z$ ) média a que esta se encontra.

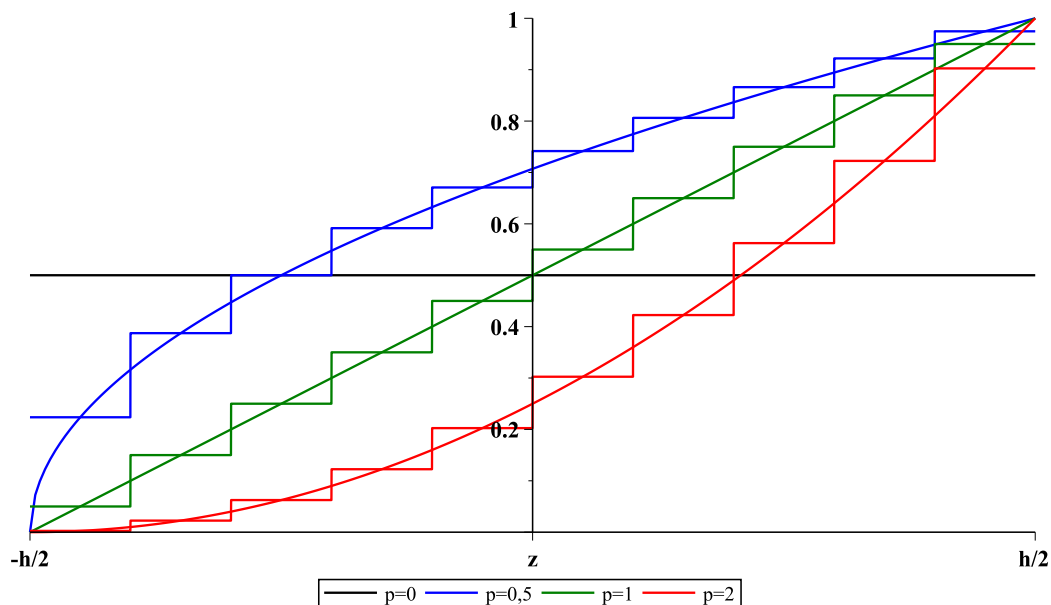


Figura 3.5: Representação da distribuição contínua e discreta de partículas considerando 10 camadas discretas

A Figura 3.5 ilustra as distribuições de cerâmico discretizadas por 10 camadas e a distribuição contínua associada ao expoente da lei de potência considerado.

A modelação do laminado é realizada segundo os vários métodos de elementos finitos implementados anteriormente. O modelo é discretizado segundo uma malha de 20x20 elementos. É considerado um factor de correcção ao corte de 5/6 para todos os casos apresentados nas tabelas 3.8 e 3.9. Tendo em consideração as conclusões dos estudos anteriores, os resultados apresentados seguidamente não incorporam resultados obtidos através de elementos descritos por funções lineares.

A tradução dos resultados para uma perspectiva gráfica correspondem aos valores obtidos pelo elemento Q9-Lagrange.

Tabela 3.8 Abordagem discreta vs contínua: Deformada máxima

Método	a/h	Contínuo	N=1	N=2	N=5	N=10	N=20
<b>p=0</b>							
<b>Lagrange Q9</b>	5	-4,81E-07	-4,81E-07	-4,81E-07	-4,81E-07	-4,81E-07	-4,81E-07
	10	-6,70E-06	-6,70E-06	-6,70E-06	-6,70E-06	-6,70E-06	-6,70E-06
	20	-1,03E-04	-1,03E-04	-1,03E-04	-1,03E-04	-1,03E-04	-1,03E-04
<b>Kriging-Q9 Biquadrático</b>	5	-4,81E-07	-4,81E-07	-4,81E-07	-4,81E-07	-4,81E-07	-4,81E-07
	10	-6,71E-06	-6,71E-06	-6,71E-06	-6,71E-06	-6,71E-06	-6,71E-06
	20	-1,03E-04	-1,03E-04	-1,03E-04	-1,03E-04	-1,03E-04	-1,03E-04
<b>Kriging Q16-Biquadrático</b>	5	-4,82E-07	-4,82E-07	-4,82E-07	-4,82E-07	-4,82E-07	-4,82E-07
	10	-6,71E-06	-6,71E-06	-6,71E-06	-6,71E-06	-6,71E-06	-6,71E-06
	20	-1,03E-04	-1,03E-04	-1,03E-04	-1,03E-04	-1,03E-04	-1,03E-04
<b>Kriging Q16-Bicúbico</b>	5	-4,81E-07	-4,81E-07	-4,81E-07	-4,81E-07	-4,81E-07	-4,81E-07
	10	-6,71E-06	-6,71E-06	-6,71E-06	-6,71E-06	-6,71E-06	-6,71E-06
	20	-1,03E-04	-1,03E-04	-1,03E-04	-1,03E-04	-1,03E-04	-1,03E-04
<b>p=0,5</b>							
<b>Lagrange Q9</b>	5	-1,28E-06	-1,28E-06	-1,30E-06	-1,28E-06	-1,28E-06	-1,28E-06
	10	-1,82E-05	-1,79E-05	-1,85E-05	-1,82E-05	-1,82E-05	-1,82E-05
	20	-2,82E-04	-2,77E-04	-2,87E-04	-2,82E-04	-2,82E-04	-2,82E-04
<b>Kriging-Q9 Biquadrático</b>	5	-1,28E-06	-1,28E-06	-1,31E-06	-1,28E-06	-1,28E-06	-1,28E-06
	10	-1,82E-05	-1,80E-05	-1,85E-05	-1,82E-05	-1,82E-05	-1,82E-05
	20	-2,82E-04	-2,77E-04	-2,87E-04	-2,83E-04	-2,82E-04	-2,82E-04
<b>Kriging Q16-Biquadrático</b>	5	-1,28E-06	-1,29E-06	-1,31E-06	-1,28E-06	-1,28E-06	-1,28E-06
	10	-1,82E-05	-1,80E-05	-1,85E-05	-1,82E-05	-1,26E-06	-1,82E-05
	20	-2,82E-04	-2,77E-04	-2,87E-04	-2,83E-04	-1,59E-05	-2,82E-04
<b>Kriging Q16-Bicúbico</b>	5	-1,28E-06	-1,28E-06	-1,31E-06	-1,28E-06	-1,28E-06	-1,28E-06
	10	-1,82E-05	-1,80E-05	-1,85E-05	-1,82E-05	-1,82E-05	-1,82E-05
	20	-2,82E-04	-2,77E-04	-2,87E-04	-2,83E-04	-2,82E-04	-2,82E-04
<b>p=1</b>							
<b>Lagrange Q9</b>	5	-1,70E-06	-2,01E-06	-1,94E-06	-1,76E-06	-1,72E-06	-1,71E-06
	10	-2,41E-05	-2,82E-05	-2,77E-05	-2,51E-05	-2,44E-05	-2,42E-05
	20	-3,74E-04	-4,34E-04	-4,29E-04	-3,88E-04	-3,78E-04	-3,75E-04
<b>Kriging-Q9 Biquadrático</b>	5	-1,70E-06	-2,01E-06	-1,94E-06	-1,76E-06	-1,72E-06	-1,71E-06
	10	-2,41E-05	-2,82E-05	-2,77E-05	-2,51E-05	-2,44E-05	-2,42E-05
	20	-3,74E-04	-4,35E-04	-4,29E-04	-3,89E-04	-3,78E-04	-3,75E-04
<b>Kriging Q16-Biquadrático</b>	5	-1,70E-06	-2,02E-06	-1,94E-06	-1,77E-06	-1,72E-08	-1,71E-06
	10	-2,42E-05	-2,82E-05	-2,77E-05	-2,51E-05	-2,44E-05	-2,42E-05
	20	-3,74E-04	-4,35E-04	-4,29E-04	-3,89E-04	-3,78E-04	-3,75E-04
<b>Kriging Q16-Bicúbico</b>	5	-1,70E-06	-2,01E-06	-1,94E-06	-1,76E-06	-1,72E-06	-1,71E-06
	10	-2,41E-05	-2,82E-05	-2,77E-05	-2,51E-05	-2,44E-05	-2,42E-05
	20	-3,74E-04	-4,35E-04	-4,29E-04	-3,89E-04	-3,78E-04	-3,75E-04
<b>p=2</b>							
<b>Lagrange Q9</b>	5	-2,14E-06	-3,16E-06	-2,81E-06	-2,32E-06	-2,20E-06	-2,22E-06
	10	-3,00E-05	-4,42E-05	-3,98E-05	-3,27E-05	-3,08E-05	-3,02E-05
	20	-4,63E-04	-6,81E-04	-6,16E-04	-5,06E-04	-4,76E-04	-4,67E-04
<b>Kriging-Q9 Biquadrático</b>	5	-2,14E-06	-3,17E-06	-2,81E-06	-2,32E-06	-2,20E-06	-2,16E-06
	10	-3,00E-05	-4,42E-05	-3,98E-05	-3,27E-05	-3,09E-05	-3,03E-05
	20	-4,64E-04	-6,82E-04	-6,17E-04	-5,06E-04	-4,76E-04	-4,67E-04
<b>Kriging Q16-Biquadrático</b>	5	-2,14E-06	-3,17E-06	-2,81E-06	-2,32E-06	-2,20E-06	-2,16E-06
	10	-3,00E-05	-9,97E-08	-3,98E-05	-3,27E-05	-3,09E-05	-3,03E-05
	20	-4,63E-04	-6,82E-04	-6,17E-04	-5,06E-04	-4,76E-04	-4,67E-04
<b>Kriging Q16-Bicúbico</b>	5	-2,14E-06	-3,17E-06	-2,81E-06	-2,32E-06	-2,20E-06	-2,16E-06
	10	-3,00E-05	-4,42E-05	-3,98E-05	-3,27E-05	-3,08E-05	-3,02E-05
	20	-4,64E-04	-6,82E-04	-6,17E-04	-5,06E-04	-4,76E-04	-4,67E-04

### Conclusões para a Deformada Transversal Máxima

Tendo em conta a tabela de resultados 3.8 e observando graficamente através do gráfico 3.6 a ilustração dos mesmos, poder-se-à afirmar que quanto maior o número de camadas discretas, maior será a aproximação da resposta do laminado ao resultado obtido pela abordagem contínua. O resultados apresentados na tabela 3.8 apresentam-se normalizados pela espessura segundo  $w = w_{max}/h$ .

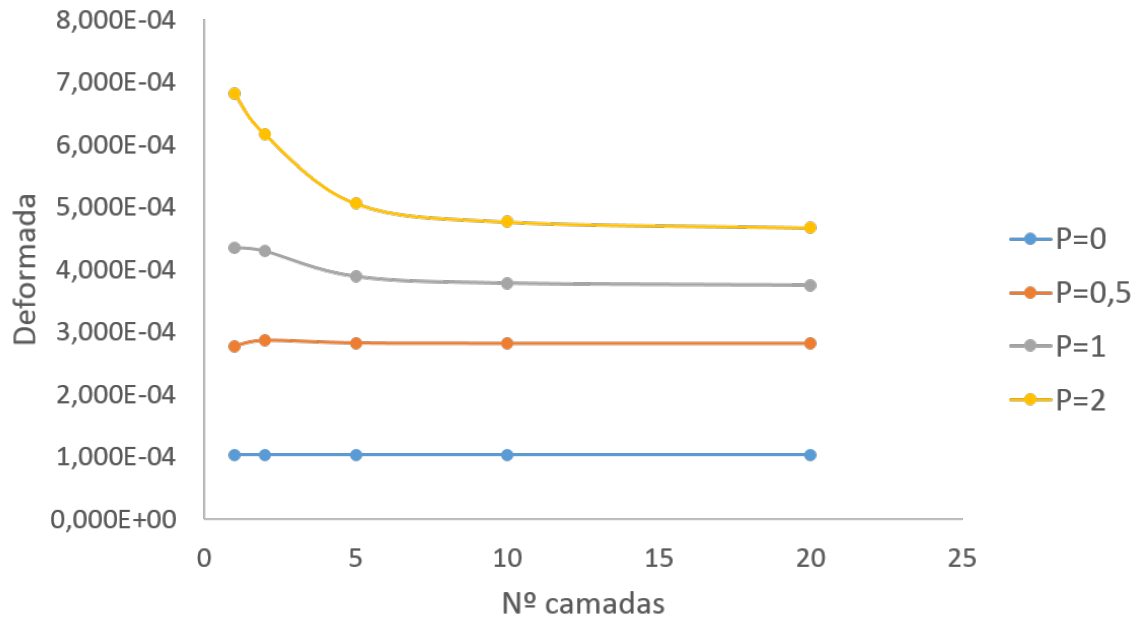


Figura 3.6: Efeito da distribuição de partículas sobre a deformada transversal máxima para uma relação  $a/h=20$

O gráfico 3.6, que ilustra os resultados obtidos para os diferentes expoentes e considerando uma relação de aresta e espessura da placa ( $a/h$ ) igual a 20, indica que quanto maior o valor do expoente de distribuição  $p$  maior será a necessidade de discretizar segundo um maior número de camadas. Esta conclusão é coerente com o caso específico de  $p = 0$  cujo valor de deformada transversal máxima se mantém constante independentemente do número de camadas utilizadas. Trata-se de um caso específico, pois para  $p = 0$  a distribuição deixa de existir e obtém-se um material isotrópico ao longo da espessura.

Ao observar os resultados como um todo, não é evidente, segundo o gráfico 3.7, a influência da relação entre a aresta e a espessura da placa ( $a/h$ ) sobre o comportamento da deformada transversal máxima.

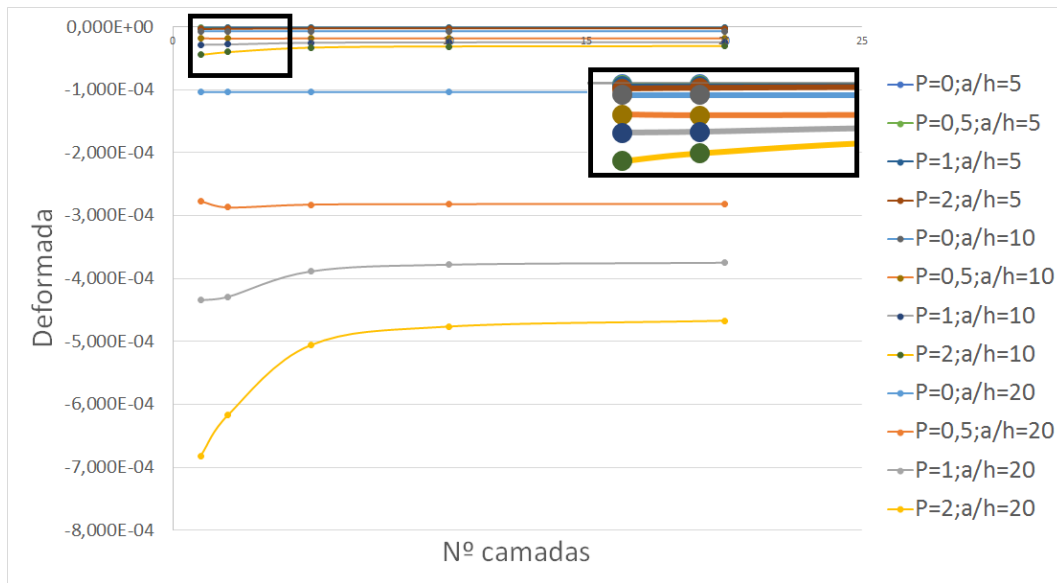


Figura 3.7: Representação linear da deformada transversal máxima

O gráfico da Figura 3.8, o qual ilustra em escala logarítmica os resultados obtidos, mostra um comportamento semelhante para os diversos casos de relação de aresta e espessura da placa ( $a/h$ ). Poder-se-à concluir que o desvio associado à abordagem discreta é proporcional à escala de deformação.

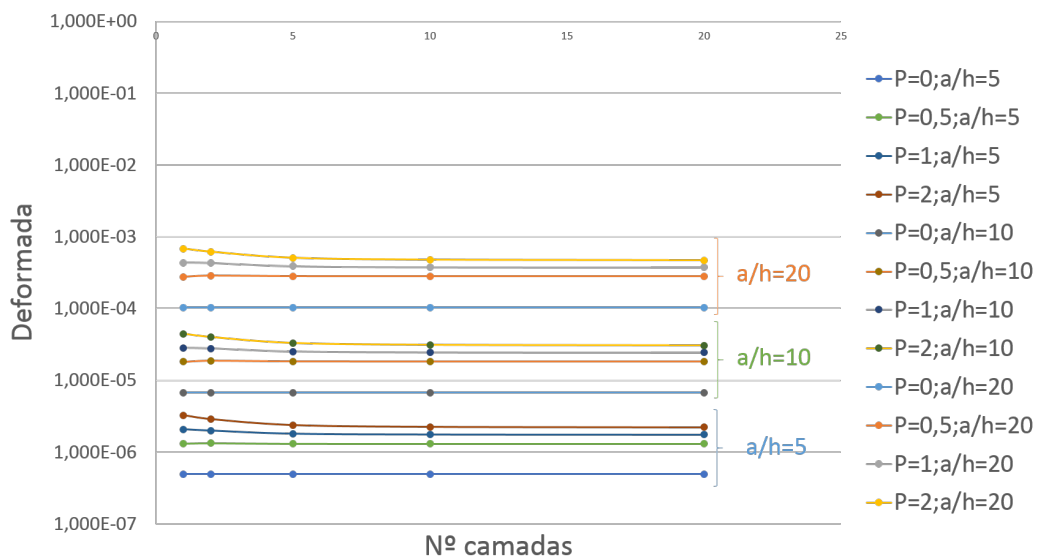


Figura 3.8: Representação logarítmica da deformada transversal máxima

**Tabela 3.9** Abordagem discreta vs contínua: Frequência fundamental  $[\bar{\omega}]$ 

Método	a/h	Contínuo	N=1	N=2	N=5	N=10	N=20
<b>p=0</b>							
<b>Lagrange Q9</b>	5	2,112	2,112	2,112	2,112	2,112	2,112
	10	0,577	0,577	0,577	0,577	0,577	0,577
	20	0,148	0,148	0,148	0,148	0,148	0,148
<b>Kriging-Q9 Biquadrático</b>	5	2,111	2,111	2,111	2,111	2,111	2,111
	10	0,577	0,577	0,577	0,577	0,577	0,577
	20	0,148	0,148	0,148	0,148	0,148	0,148
<b>Kriging Q16-Biquadrático</b>	5	2,111	2,111	2,111	2,111	2,111	2,111
	10	0,577	0,577	0,577	0,577	0,571	0,577
	20	0,148	0,148	0,148	0,148	0,148	0,148
<b>Kriging Q16-Bicúbico</b>	5	2,111	2,111	2,111	2,111	2,111	2,111
	10	0,577	0,577	0,577	0,577	0,577	0,577
	20	0,148	0,148	0,148	0,148	0,148	0,148
<b>p=0,5</b>							
<b>Lagrange Q9</b>	5	1,567	1,611	1,587	1,573	1,570	1,568
	10	0,429	0,440	0,433	0,431	0,430	0,429
	20	0,110	0,113	0,111	0,110	0,110	0,110
<b>Kriging-Q9 Biquadrático</b>	5	1,567	1,610	1,586	1,573	1,569	1,567
	10	0,429	0,439	0,433	0,430	0,429	0,429
	20	0,110	0,113	0,111	0,110	0,110	0,110
<b>Kriging Q16-Biquadrático</b>	5	1,566	1,610	1,585	1,572	1,569	1,567
	10	0,429	0,439	0,433	0,430	0,429	0,429
	20	0,110	0,113	0,111	0,110	0,110	0,110
<b>Kriging Q16-Bicúbico</b>	5	1,567	1,611	1,586	1,573	1,569	1,568
	10	0,429	0,440	0,433	0,430	0,430	0,200
	20	0,110	0,113	0,111	0,111	0,110	0,110
<b>p=1</b>							
<b>Lagrange Q9</b>	5	1,435	1,402	1,401	1,426	1,432	1,434
	10	0,395	0,382	0,383	0,392	0,394	0,395
	20	0,102	0,098	0,098	0,101	0,101	0,101
<b>Kriging-Q9 Biquadrático</b>	5	1,434	1,401	1,400	1,426	1,432	1,434
	10	0,395	0,382	0,382	0,392	0,394	0,395
	20	0,101	0,098	0,098	0,101	0,101	0,101
<b>Kriging Q16-Biquadrático</b>	5	1,434	1,401	1,400	1,425	1,432	1,433
	10	0,395	0,382	0,382	0,392	0,394	0,395
	20	0,101	0,098	0,098	0,101	0,101	0,101
<b>Kriging Q16-Bicúbico</b>	5	1,434	1,401	1,400	1,454	1,432	1,434
	10	0,395	0,382	0,382	0,392	0,394	0,395
	20	0,101	0,098	0,093	0,093	0,101	0,101
<b>p=2</b>							
<b>Lagrange Q9</b>	5	1,349	1,217	1,253	1,324	1,342	1,347
	10	0,374	0,332	0,342	0,365	0,371	0,373
	20	0,096	0,085	0,088	0,094	0,096	0,096
<b>Kriging-Q9 Biquadrático</b>	5	1,348	1,217	1,252	1,323	1,341	1,346
	10	0,374	0,332	0,342	0,365	0,371	0,373
	20	0,096	0,085	0,088	0,094	0,096	0,096
<b>Kriging Q16-Biquadrático</b>	5	1,348	1,217	1,252	1,323	1,341	1,346
	10	0,374	0,332	0,342	0,365	0,371	0,373
	20	0,096	0,085	0,287	0,094	0,096	0,096
<b>Kriging Q16-Bicúbico</b>	5	1,349	1,197	1,252	1,323	1,341	1,347
	10	0,374	0,332	0,342	0,365	0,371	0,373
	20	0,096	0,085	0,088	0,088	0,096	0,096

### Conclusões para a Frequência Fundamental

A segunda análise referente ao estudo em causa foca-se na variação da frequência fundamental. Trata-se de um estudo similar ao realizado para comparação da deformada máxima aplicado a um *FGM* de alumínio (*Al*) e óxido de alumínio ( $Al_2O_3$ ). Os resultados são apresentados na tabela 3.9 segundo a normalização  $\bar{\omega} = 10\omega h\sqrt{\rho_c E_c}$ . Ao contrário do caso anterior, os resultados obtidos em termos de estudo dinâmico não dependem apenas da matriz de rigidez. Neste caso, está implícita a utilização da matriz de massa. Por isso, as conclusões não são tão evidentes.

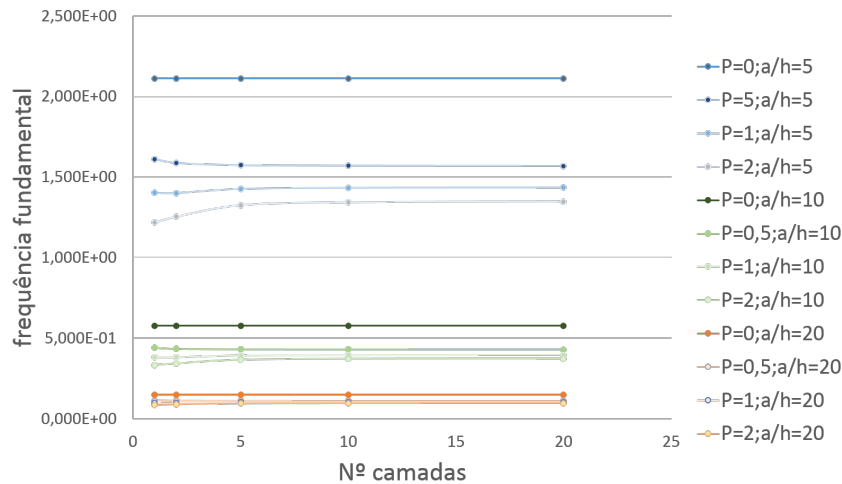


Figura 3.9: Representação linear da frequência fundamental

No entanto, para o caso em estudo, podemos concluir, analogamente ao caso da deformada transversal, que para expoentes da lei de potência maiores é necessário uma discretização composta por maior número de camadas.

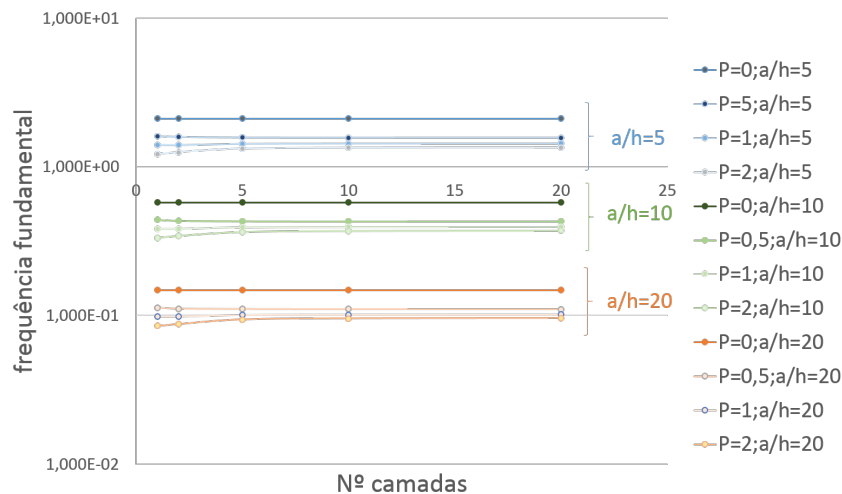


Figura 3.10: Representação logarítmica da frequência fundamental

### 3.3 Distribuição de Potência e Exponencial

Quando a modelação do laminado FGM é abordada de forma contínua, é possível modelar a distribuição de partículas de diversas formas distintas. Nesta secção, pretende-se estabelecer as diferenças entre uma abordagem definida pela distribuição de partículas obtida pela lei de potência e pela distribuição definida pela lei exponencial.

A distribuição descrita pela função exponencial é não só uma função de distribuição como também serve de regra de homogeneização, pois o resultado obtido é logo à partida uma distribuição de propriedades mecânicas. A função exponencial não depende de nenhum parâmetro de distribuição.

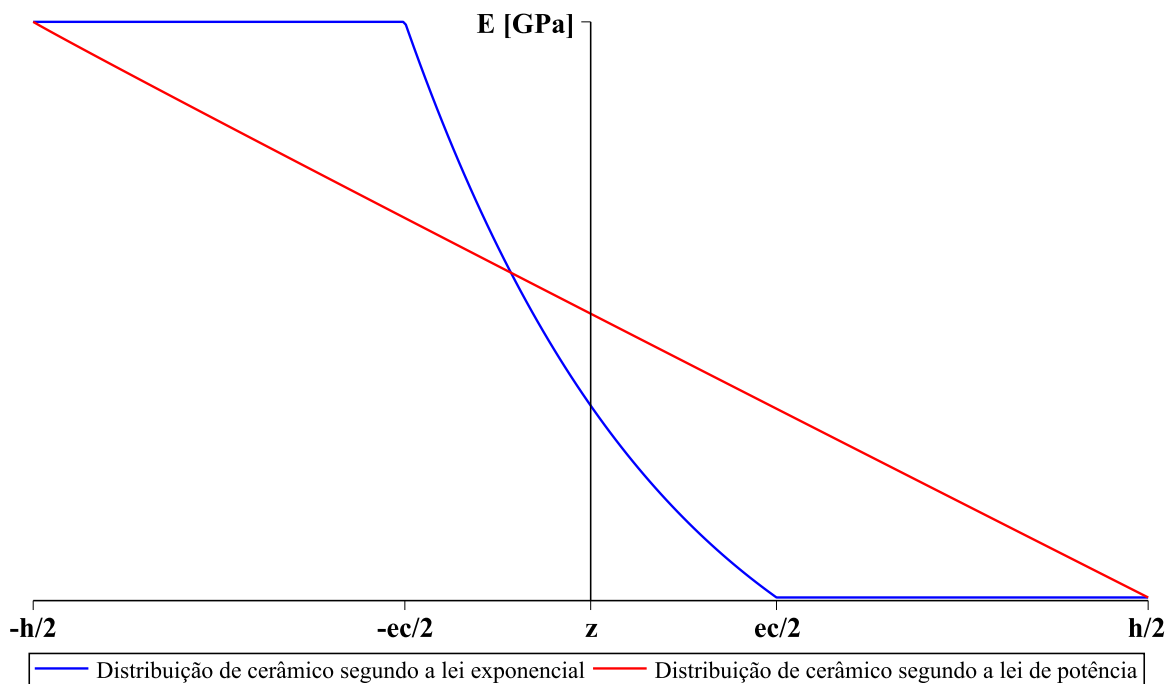


Figura 3.11: Distribuição do módulo de Young ao longo da espessura segundo a lei exponencial e a lei de potência

O estudo baseia-se em adaptar tanto quanto possível a distribuição descrita pela regra de potência à da distribuição exponencial. Esta metodologia baseia-se na variação do parâmetro de distribuição  $p$  da regra de potência. No caso do estudo estático, esta variação é baseada na igualdade de rigidez de flexão, descrita pela equação 3.3.

$$\int_{-h/2}^{h/2} E(z)_{\text{exponencial}} * z^2 dz = \int_{-h/2}^{h/2} E(z)_{\text{potencia}} * z^2 dz \quad (3.2)$$

Sendo que  $E(z)_{\text{exponencial}}$  é descrito pela equação 2.2 e  $E(z)_{\text{potencia}}$  pela equação 2.1. Esta última depende do parâmetro  $p$ , o qual resultando da igualdade descrita permitirá relacionar as distribuições.

Para o caso da comparação da frequência fundamental resultante, o parâmetro  $p$  é definido de 2 formas distintas, uma primeira pela equação 3.3 e uma segunda pela igualdade do segundo momento de massa, equação 3.3.

$$\int_{-h/2}^{h/2} \rho(z)_{exponencial} * z^2 dz = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z)_{potencia} * z^2 dz \quad (3.3)$$

A homogeneização no modelo descrito através da distribuição de potência é obtido segundo a regra das misturas. Deste modo poder-se-à definir os expoentes de distribuição equivalentes de comparação.

Este estudo visa comparar as diferenças descritas segundo diversas configurações de compósitos. Trata-se de um laminado sandwich composto por 3 camadas, sendo que a camada interna resulta numa distribuição de partículas tal como descrito anteriormente e as camadas exteriores compostas pelos materiais constituintes.

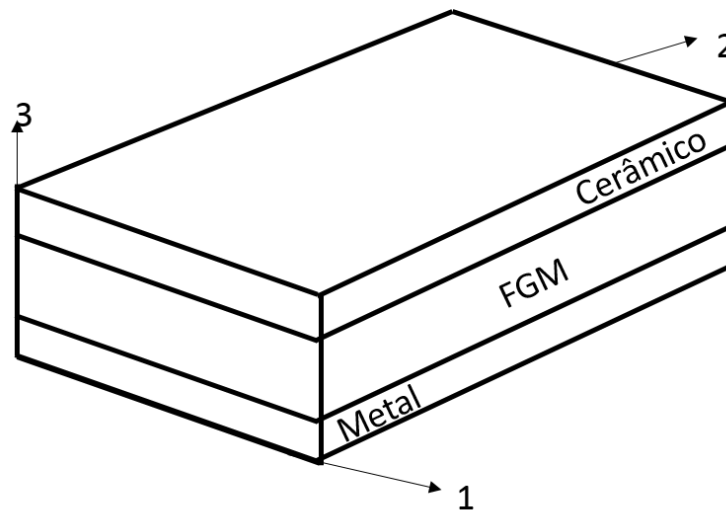


Figura 3.12: Representação do compósito descrito pela lei exponencial

Vários casos são abordados, variando os materiais que constituem o laminado, a relação de espessura ( $a/h$ ) e a percentagem de núcleo do laminado sandwich ( $e/h$ ). Os diversos casos de conjunto de materiais são  $Al - ZrO_2$ ,  $Al - Al_2O_3$  e  $Al - WC$  descritas as suas propriedades na tabela 3.10.

**Tabela 3.10** Propriedades mecânicas dos materiais utilizados

Material	Módulo de Young $E$ (Gpa)	Coefficiente de poisson $\mu$	Densidade $\rho$ (Kg/m <sup>3</sup> )
Alumínio (Al)	70	0,3	2707
Zirconia ( $ZrO_2$ )	200	0,3	5700
Monotungstênio Carbide (WC)	696	0,3	15600
Óxido de Alumínio ( $Al_2O_3$ )	380	0,3	3800

O estudo em causa pretende compreender as diferenças entre a utilização das duas metodologias e quais os efeitos da variação dos parâmetros em causa.

**Tabela 3.11** Deformada Al – ZrO<sub>2</sub> [ $w_{norm} = w_{max} / h$ ]

a/h	e/h	P_eq	Peqm	Exp Law	Power Law (rig)	Dev.(%)	Power Law (massa)	Dev.(%)
<b>Lagrange-Q9</b>								
5	1/3	0,989	0,992	-2,87E-06	-2,85E-06	0,79%	-2,85E-06	0,79%
	2/3	0,914	0,937	-2,83E-06	-2,77E-06	1,98%	-2,77E-06	2,17%
	7/9	0,867	0,903	-2,82E-06	-2,76E-06	2,28%	-2,75E-06	2,68%
10	1/3	0,989	0,992	-4,06E-05	-4,04E-05	0,38%	-4,04E-05	0,39%
	2/3	0,914	0,937	-3,98E-05	-3,92E-05	1,47%	-3,91E-05	1,63%
	7/9	0,867	0,903	-3,96E-05	-3,89E-05	1,87%	-3,87E-05	2,23%
20	1/3	0,989	0,992	-6,28E-04	-6,27E-04	0,26%	-6,27E-04	0,27%
	2/3	0,914	0,937	-6,15E-04	-6,07E-04	1,32%	-6,06E-04	1,47%
	7/9	0,867	0,903	-6,12E-04	-6,01E-04	1,75%	-5,99E-04	2,09%
50	1/3	0,989	0,992	-2,43E-02	-2,43E-02	0,23%	-2,42E-02	0,23%
	2/3	0,914	0,937	-2,38E-02	-2,35E-02	1,28%	-2,34E-02	1,43%
	7/9	0,867	0,903	-2,37E-02	-2,32E-02	1,72%	-2,32E-02	2,06%
<b>Kriging-Q9 Biquadrático</b>								
5	1/3	0,989	0,992	-2,87E-06	-2,85E-06	0,79%	-2,85E-06	0,79%
	2/3	0,914	0,937	-2,83E-06	-2,78E-06	1,98%	-2,77E-06	2,17%
	7/9	0,867	0,903	-2,82E-06	-2,76E-06	2,28%	-2,75E-06	2,68%
10	1/3	0,989	0,992	-4,06E-05	-4,05E-05	0,38%	-4,05E-05	0,39%
	2/3	0,914	0,937	-3,98E-05	-3,92E-05	1,47%	-3,92E-05	1,63%
	7/9	0,867	0,903	-3,97E-05	-3,89E-05	1,87%	-3,88E-05	2,23%
20	1/3	0,989	0,992	-6,29E-04	-6,27E-04	0,26%	-6,27E-04	0,27%
	2/3	0,914	0,937	-6,15E-04	-6,07E-04	1,32%	-6,06E-04	1,48%
	7/9	0,867	0,903	-6,12E-04	-6,02E-04	1,76%	-6,00E-04	2,09%
50	1/3	0,989	0,992	-2,43E-02	-2,43E-02	0,23%	-2,43E-02	0,23%
	2/3	0,914	0,937	-2,38E-02	-2,35E-02	1,28%	-2,35E-02	1,43%
	7/9	0,867	0,903	-2,37E-02	-2,33E-02	1,72%	-2,32E-02	2,06%
<b>Kriging-Q16 Biquadrático</b>								
5	1/3	0,989	0,992	-2,87E-06	-2,85E-06	0,79%	-2,85E-06	0,79%
	2/3	0,914	0,937	-2,83E-06	-2,78E-06	1,98%	-2,77E-06	2,17%
	7/9	0,867	0,903	-2,83E-06	-2,76E-06	2,28%	-2,75E-06	2,68%
10	1/3	0,989	0,992	-4,06E-05	-4,05E-05	0,38%	-4,05E-05	0,39%
	2/3	0,914	0,937	-3,98E-05	-3,93E-05	1,47%	-3,92E-05	1,63%
	7/9	0,867	0,903	-3,97E-05	-3,89E-05	1,88%	-3,88E-05	2,23%
20	1/3	0,989	0,992	-6,29E-04	-6,27E-04	0,27%	-6,27E-04	0,27%
	2/3	0,914	0,937	-6,15E-04	-6,07E-04	1,33%	-6,06E-04	1,48%
	7/9	0,867	0,903	-6,12E-04	-6,02E-04	1,76%	-5,99E-04	2,10%
50	1/3	0,989	0,992	-2,42E-02	-2,42E-02	0,24%	-2,42E-02	0,25%
	2/3	0,914	0,937	-2,37E-02	-2,34E-02	1,30%	-2,34E-02	1,45%
	7/9	0,867	0,903	-2,36E-02	-2,32E-02	1,74%	-2,31E-02	2,07%
<b>Kriging-Q16 Bicúbico</b>								
5	1/3	0,989	0,992	-2,87E-06	-2,85E-06	0,79%	-2,85E-06	0,79%
	2/3	0,914	0,937	-2,83E-06	-2,78E-06	1,98%	-2,77E-06	2,17%
	7/9	0,867	0,903	-2,82E-06	-2,76E-06	2,28%	-2,75E-06	2,68%
10	1/3	0,989	0,992	-4,06E-05	-4,05E-05	0,38%	-4,05E-05	0,39%
	2/3	0,914	0,937	-3,98E-05	-3,92E-05	1,47%	-3,92E-05	1,63%
	7/9	0,867	0,903	-3,97E-05	-3,89E-05	1,87%	-3,88E-05	2,23%
20	1/3	0,989	0,992	-6,29E-04	-6,27E-04	0,26%	-6,27E-04	0,27%
	2/3	0,914	0,937	-6,15E-04	-6,07E-04	1,32%	-6,06E-04	1,47%
	7/9	0,867	0,903	-6,12E-04	-6,02E-04	1,75%	-6,00E-04	2,09%
50	1/3	0,989	0,992	-2,44E-02	-2,43E-02	0,22%	-2,43E-02	0,22%
	2/3	0,914	0,937	-2,38E-02	-2,35E-02	1,27%	-2,35E-02	1,42%
	7/9	0,867	0,903	-2,37E-02	-2,33E-02	1,71%	-2,32E-02	2,05%

**Tabela 3.12** Deformada  $Al - Al_2O_3$  [ $w_{norm} = w_{max} / h$ ]

a/h	e/h	P_eq	Peqm	Exp Law	Power Law (rig)	Dev.(%)	Power Law (massa)	Dev.(%)
<b>Lagrange-Q9</b>								
5	1/3	0,982	0,996	-2,11E-06	-2,05E-06	3,13%	-2,05E-06	3,21%
	2/3	0,868	0,971	-2,05E-06	-1,92E-06	6,27%	-1,89E-06	7,71%
	7/9	0,801	0,954	-2,04E-06	-1,90E-06	6,91%	-1,84E-06	9,74%
10	1/3	0,982	0,996	-3,04E-05	-2,97E-05	2,51%	-2,96E-05	2,59%
	2/3	0,868	0,971	-2,92E-05	-2,76E-05	5,44%	-2,72E-05	6,78%
	7/9	0,801	0,954	-2,89E-05	-2,71E-05	6,24%	-2,63E-05	8,92%
20	1/3	0,982	0,996	-4,73E-04	-4,62E-04	2,34%	-4,62E-04	2,41%
	2/3	0,868	0,971	-4,52E-04	-4,28E-04	5,20%	-4,22E-04	6,51%
	7/9	0,801	0,954	-4,47E-04	-4,20E-04	6,05%	-4,08E-04	8,67%
50	1/3	0,982	0,996	-1,83E-02	-1,79E-02	2,29%	-1,79E-02	2,36%
	2/3	0,868	0,971	-1,75E-02	-1,66E-02	5,13%	-1,64E-02	6,43%
	7/9	0,801	0,954	-1,73E-02	-1,63E-02	5,99%	-1,58E-02	8,60%
<b>Kriging-Q9 Biquadrático</b>								
5	1/3	0,982	0,996	-2,11E-06	-2,05E-06	3,13%	-2,05E-06	3,21%
	2/3	0,868	0,971	-2,05E-06	-1,92E-06	6,27%	-1,89E-06	7,71%
	7/9	0,801	0,954	-2,04E-06	-1,90E-06	6,91%	-1,84E-06	9,74%
10	1/3	0,982	0,996	-3,05E-05	-2,97E-05	2,51%	-2,97E-05	2,59%
	2/3	0,868	0,971	-2,92E-05	-2,76E-05	5,44%	-2,72E-05	6,78%
	7/9	0,801	0,954	-2,89E-05	-2,71E-05	6,24%	-2,63E-05	8,91%
20	1/3	0,982	0,996	-4,74E-04	-4,63E-04	2,34%	-4,62E-04	2,41%
	2/3	0,868	0,971	-4,52E-04	-4,29E-04	5,20%	-4,23E-04	6,51%
	7/9	0,801	0,954	-4,48E-04	-4,20E-04	6,05%	-4,09E-04	8,67%
50	1/3	0,982	0,996	-1,84E-02	-1,79E-02	2,28%	-1,79E-02	2,36%
	2/3	0,868	0,971	-1,75E-02	-1,66E-02	5,12%	-1,64E-02	6,43%
	7/9	0,801	0,954	-1,73E-02	-1,63E-02	5,99%	-1,58E-02	8,60%
<b>Kriging-Q16 Biquadrático</b>								
5	1/3	0,982	0,996	-2,12E-06	-2,05E-06	3,13%	-2,05E-06	3,21%
	2/3	0,868	0,971	-2,05E-06	-1,92E-06	6,27%	-1,89E-06	7,71%
	7/9	0,801	0,954	-2,04E-06	-1,90E-06	6,91%	-1,84E-06	9,74%
10	1/3	0,982	0,996	-3,05E-05	-2,97E-05	2,51%	-2,97E-05	2,59%
	2/3	0,868	0,971	-2,92E-05	-2,76E-05	5,44%	-2,72E-05	6,78%
	7/9	0,801	0,954	-2,89E-05	-2,71E-05	6,25%	-2,63E-05	8,92%
20	1/3	0,982	0,996	-4,74E-04	-4,62E-04	2,34%	-4,62E-04	2,42%
	2/3	0,868	0,971	-4,52E-04	-4,29E-04	5,20%	-4,23E-04	6,52%
	7/9	0,801	0,954	-4,47E-04	-4,20E-04	6,06%	-4,09E-04	8,68%
50	1/3	0,982	0,996	-1,83E-02	-1,78E-02	2,32%	-1,78E-02	2,40%
	2/3	0,868	0,971	-1,74E-02	-1,65E-02	5,17%	-1,63E-02	6,48%
	7/9	0,801	0,954	-1,72E-02	-1,62E-02	6,02%	-1,58E-02	8,64%
<b>Kriging-Q16 Bicúbico</b>								
5	1/3	0,982	0,996	-2,11E-06	-2,05E-06	3,13%	-2,05E-06	3,21%
	2/3	0,868	0,971	-2,05E-06	-1,92E-06	6,27%	-1,89E-06	7,71%
	7/9	0,801	0,954	-2,04E-06	-1,90E-06	6,91%	-1,84E-06	9,74%
10	1/3	0,982	0,996	-3,05E-05	-2,97E-05	2,51%	-2,97E-05	2,59%
	2/3	0,868	0,971	-2,92E-05	-2,76E-05	5,44%	-2,72E-05	6,78%
	7/9	0,801	0,954	-2,89E-05	-2,71E-05	6,24%	-2,63E-05	8,91%
20	1/3	0,982	0,996	-4,74E-04	-4,63E-04	2,33%	-4,62E-04	2,41%
	2/3	0,868	0,971	-4,52E-04	-4,29E-04	5,19%	-4,23E-04	6,51%
	7/9	0,801	0,954	-4,47E-04	-4,20E-04	6,05%	-4,09E-04	8,67%
50	1/3	0,982	0,996	-1,84E-02	-1,80E-02	2,27%	-1,80E-02	2,34%
	2/3	0,868	0,971	-1,75E-02	-1,66E-02	5,11%	-1,64E-02	6,41%
	7/9	0,801	0,953	-1,73E-02	-1,63E-02	5,98%	-1,59E-02	8,58%

**Tabela 3.13** Deformada Al – WC [ $w_{norm} = w_{max} / h$ ]

a/h	e/h	P_eq	Peqm	Exp Law	Power Law (rig)	Dev.(%)	Power Law (massa)	Dev.(%)
<b>Lagrange-Q9</b>								
5	1/3	0,976	0,981	-1,57E-06	-1,45E-06	7,88%	-1,44E-06	7,93%
	2/3	0,831	0,864	-1,50E-06	-1,30E-06	13,37%	-1,29E-06	14,09%
	7/9	0,749	0,796	-1,49E-06	-1,28E-06	14,17%	-1,26E-06	15,50%
10	1/3	0,976	0,981	-2,30E-05	-2,13E-05	7,36%	-2,13E-05	7,41%
	2/3	0,831	0,864	-2,17E-05	-1,89E-05	12,58%	-1,88E-05	13,29%
	7/9	0,749	0,796	-2,13E-05	-1,84E-05	13,55%	-1,82E-05	14,85%
20	1/3	0,976	0,981	-3,59E-04	-3,33E-04	7,21%	-3,33E-04	7,26%
	2/3	0,831	0,864	-3,37E-04	-2,95E-04	12,35%	-2,93E-04	13,05%
	7/9	0,749	0,796	-3,32E-04	-2,87E-04	13,37%	-2,83E-04	14,66%
50	1/3	0,976	0,981	-1,39E-02	-1,29E-02	7,16%	-1,29E-02	7,21%
	2/3	0,831	0,864	-1,31E-02	-1,14E-02	12,28%	-1,14E-02	12,98%
	7/9	0,749	0,796	-1,28E-02	-1,11E-02	13,32%	-1,10E-02	14,60%
<b>Kriging-Q9 Biquadrático</b>								
5	1/3	0,976	0,981	-1,57E-06	-1,45E-06	7,87%	-1,45E-06	7,92%
	2/3	0,831	0,864	-1,50E-06	-1,30E-06	13,36%	-1,29E-06	14,09%
	7/9	0,749	0,796	-1,49E-06	-1,28E-06	14,16%	-1,26E-06	15,50%
10	1/3	0,976	0,981	-2,30E-05	-2,13E-05	7,35%	-2,13E-05	7,40%
	2/3	0,831	0,864	-2,17E-05	-1,89E-05	12,58%	-1,88E-05	13,28%
	7/9	0,749	0,796	-2,14E-05	-1,85E-05	13,55%	-1,82E-05	14,84%
20	1/3	0,976	0,981	-3,60E-04	-3,34E-04	7,20%	-3,33E-04	7,25%
	2/3	0,831	0,864	-3,37E-04	-2,96E-04	12,35%	-2,93E-04	13,05%
	7/9	0,749	0,796	-3,32E-04	-2,87E-04	13,37%	-2,83E-04	14,65%
50	1/3	0,976	0,981	-1,39E-02	-1,30E-02	7,15%	-1,29E-02	7,20%
	2/3	0,831	0,864	-1,31E-02	-1,15E-02	12,28%	-1,14E-02	12,97%
	7/9	0,749	0,796	-1,29E-02	-1,11E-02	13,31%	-1,10E-02	14,59%
<b>Kriging-Q16 Biquadrático</b>								
5	1/3	0,976	0,981	-1,57E-06	-1,45E-06	7,87%	-1,45E-06	7,92%
	2/3	0,831	0,864	-1,50E-06	-1,30E-06	13,36%	-1,29E-06	14,08%
	7/9	0,749	0,796	-1,49E-06	-1,28E-06	14,16%	-1,26E-06	15,50%
10	1/3	0,976	0,981	-2,30E-05	-2,13E-05	7,35%	-2,13E-05	7,40%
	2/3	0,831	0,864	-2,17E-05	-1,90E-05	12,58%	-1,88E-05	13,28%
	7/9	0,749	0,796	-2,14E-05	-1,85E-05	13,55%	-1,82E-05	14,84%
20	1/3	0,976	0,981	-3,59E-04	-3,33E-04	7,20%	-3,33E-04	7,25%
	2/3	0,831	0,864	-3,37E-04	-2,95E-04	12,35%	-2,93E-04	13,05%
	7/9	0,749	0,796	-3,32E-04	-2,87E-04	13,37%	-2,83E-04	14,66%
50	1/3	0,976	0,981	-1,39E-02	-1,29E-02	7,19%	-1,29E-02	7,24%
	2/3	0,831	0,864	-1,30E-02	-1,14E-02	12,32%	-1,13E-02	13,02%
	7/9	0,749	0,796	-1,28E-02	-1,11E-02	13,34%	-1,09E-02	14,63%
<b>Kriging-Q16 Bicúbico</b>								
5	1/3	0,976	0,981	-1,57E-06	-1,45E-06	7,87%	-1,45E-06	7,92%
	2/3	0,831	0,864	-1,50E-06	-1,30E-06	13,36%	-1,29E-06	14,09%
	7/9	0,749	0,796	-1,49E-06	-1,28E-06	14,16%	-1,26E-06	15,50%
10	1/3	0,976	0,981	-2,30E-05	-2,13E-05	7,35%	-2,13E-05	7,40%
	2/3	0,831	0,864	-2,17E-05	-1,89E-05	12,58%	-1,88E-05	13,28%
	7/9	0,749	0,796	-2,14E-05	-1,85E-05	13,55%	-1,82E-05	14,84%
20	1/3	0,976	0,981	-3,60E-04	-3,34E-04	7,19%	-3,34E-04	7,24%
	2/3	0,831	0,864	-3,37E-04	-2,96E-04	12,34%	-2,93E-04	13,04%
	7/9	0,749	0,796	-3,32E-04	-2,87E-04	13,37%	-2,83E-04	14,65%
50	1/3	0,976	0,981	-1,40E-02	-1,30E-02	7,13%	-1,30E-02	7,18%
	2/3	0,831	0,864	-1,31E-02	-1,15E-02	12,25%	-1,14E-02	12,95%
	7/9	0,749	0,796	-1,29E-02	-1,12E-02	13,30%	-1,10E-02	14,58%

O estudo foi realizado a conjuntos de materiais cuja relação entre os módulo de Young varia na sua grandeza. Podemos observar pelo gráfico 3.13 que o Desvio associado à comparação entre as metodologias varia em conformidade com a gradeza da relação entre os módulo de Young. Ou seja, quanto maior a diferença entre os materiais, maior será o Desvio de comparação. Deste modo, um laminado composto por  $Al - WC$  cuja relação de rigidez é igual a 9,94 terá um Desvio superior aos restantes compósitos,  $Al - Al_2O_3$  com  $E_c/E_m = 4,81$  e  $Al - ZrO_2$  com  $E_c/E_m = 2,86$ .

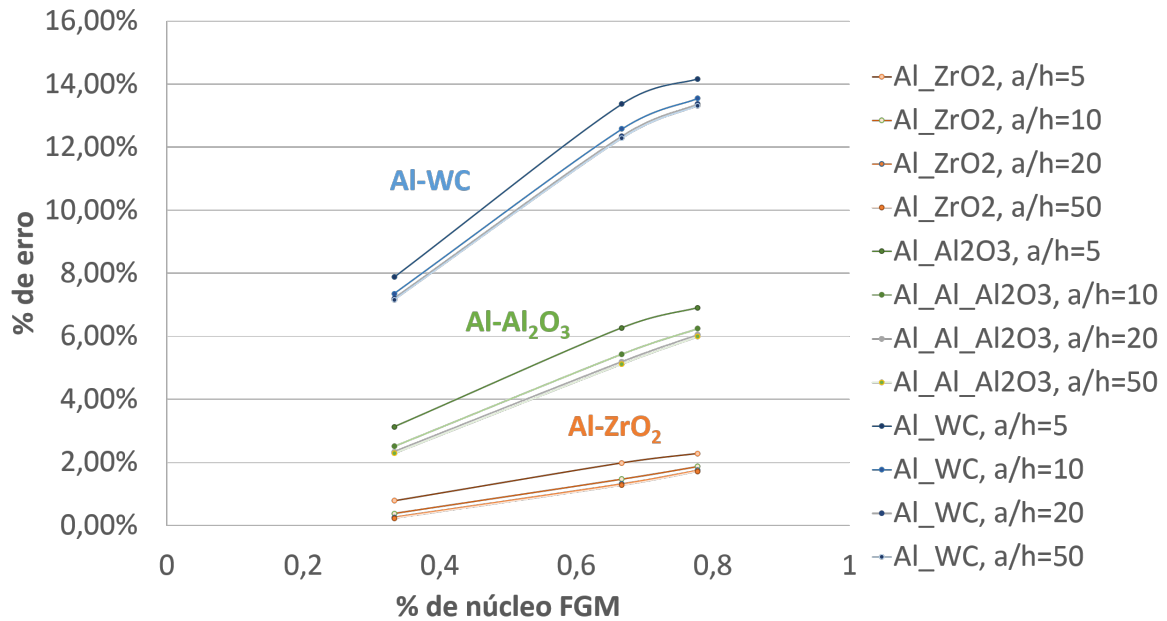


Figura 3.13: Desvio em função da percentagem de núcleo FGM-caso estático

A percentagem de núcleo FGM tem também grande influência sobre o erro na comparação das metodologias. Do gráfico 3.13 poder-se-à concluir que o desvio é proporcional à espessura da camada *FGM* existente. Assim quanto maior a percentagem do laminado composta pela distribuição de partículas, maior será o Desvio de comparação entre as abordagens. Isto porque as diferenças aplicam-se a essa fracção de laminado, sendo que a percentagem restante permanece igual.

A relação de espessura  $a/h$  é também um factor que influencia a diferenciação entre as metodologias. Quanto menor a relação, ou seja mais espesso será o laminado e maior será o desvio entre respostas.

**Tabela 3.14** Frequência fundamental  $Al - ZrO_2$  [ $\bar{\omega} = 10\omega h\sqrt{\rho_c E_c}$ ]

a/h	e/h	P_eq	Peqm	Exp Law	Power Law (rig)	Dev.(%)	Power Law (massa)	Dev.(%)
<b>Lagrange-Q9</b>								
5	1/3	0,989	0,992	1,87E+00	1,86E+00	0,22%	1,86E+00	0,22%
	2/3	0,914	0,937	1,90E+00	1,90E+00	-0,17%	1,90E+00	-0,12%
	7/9	0,867	0,903	1,91E+00	1,92E+00	-0,51%	1,92E+00	-0,45%
10	1/3	0,989	0,992	5,11E-01	5,09E-01	0,48%	5,09E-01	0,48%
	2/3	0,914	0,937	5,21E-01	5,20E-01	0,16%	5,19E-01	0,23%
	7/9	0,867	0,903	5,23E-01	5,24E-01	-0,24%	5,24E-01	-0,15%
20	1/3	0,989	0,992	1,31E-01	1,31E-01	0,56%	1,31E-01	0,56%
	2/3	0,914	0,937	1,34E-01	1,33E-01	0,26%	1,33E-01	0,34%
	7/9	0,867	0,903	1,34E-01	1,35E-01	-0,16%	1,34E-01	-0,05%
50	1/3	0,989	0,992	2,12E-02	2,10E-02	0,58%	2,10E-02	0,59%
	2/3	0,914	0,937	2,16E-02	2,15E-02	0,29%	2,15E-02	0,37%
	7/9	0,867	0,903	2,17E-02	2,17E-02	-0,13%	2,17E-02	-0,02%
<b>Kriging-Q9 Biquadrático</b>								
5	1/3	0,989	0,992	1,86E+00	1,86E+00	0,22%	1,86E+00	0,22%
	2/3	0,914	0,937	1,90E+00	1,90E+00	-0,17%	1,90E+00	-0,12%
	7/9	0,867	0,903	1,91E+00	1,92E+00	-0,51%	1,91E+00	-0,45%
10	1/3	0,989	0,992	5,11E-01	5,09E-01	0,48%	5,09E-01	0,48%
	2/3	0,914	0,937	5,20E-01	5,19E-01	0,16%	5,19E-01	0,23%
	7/9	0,867	0,903	5,23E-01	5,24E-01	-0,24%	5,24E-01	-0,15%
20	1/3	0,989	0,992	1,31E-01	1,30E-01	0,56%	1,30E-01	0,56%
	2/3	0,914	0,937	1,34E-01	1,33E-01	0,26%	1,33E-01	0,34%
	7/9	0,867	0,903	1,34E-01	1,34E-01	-0,16%	1,34E-01	-0,05%
50	1/3	0,989	0,992	2,11E-02	2,10E-02	0,58%	2,10E-02	0,59%
	2/3	0,914	0,937	2,15E-02	2,15E-02	0,29%	2,15E-02	0,37%
	7/9	0,867	0,903	2,17E-02	2,17E-02	-0,13%	2,17E-02	-0,02%
<b>Kriging-Q16 Biquadrático</b>								
5	1/3	0,989	0,992	1,86E+00	1,86E+00	0,22%	1,86E+00	0,22%
	2/3	0,914	0,937	1,90E+00	1,90E+00	-0,17%	1,90E+00	-0,12%
	7/9	0,867	0,903	1,91E+00	1,92E+00	-0,51%	1,91E+00	-0,45%
10	1/3	0,989	0,992	5,11E-01	5,09E-01	0,48%	5,09E-01	0,48%
	2/3	0,914	0,937	5,20E-01	5,19E-01	0,16%	5,19E-01	0,23%
	7/9	0,867	0,903	5,23E-01	5,24E-01	-0,24%	5,24E-01	-0,15%
20	1/3	0,989	0,992	1,31E-01	1,30E-01	0,55%	1,30E-01	0,56%
	2/3	0,914	0,937	1,34E-01	1,33E-01	0,26%	1,33E-01	0,33%
	7/9	0,867	0,903	1,34E-01	1,34E-01	-0,16%	1,34E-01	-0,05%
50	1/3	0,989	0,992	2,12E-02	2,11E-02	0,57%	2,11E-02	0,58%
	2/3	0,914	0,937	2,16E-02	2,15E-02	0,28%	2,15E-02	0,36%
	7/9	0,867	0,903	2,17E-02	2,17E-02	-0,14%	2,17E-02	-0,03%
<b>Kriging-Q16 Bicúbico</b>								
5	1/3	0,989	0,992	1,87E+00	1,86E+00	0,22%	1,86E+00	0,22%
	2/3	0,914	0,937	1,90E+00	1,90E+00	-0,17%	1,90E+00	-0,12%
	7/9	0,867	0,903	1,91E+00	1,92E+00	-0,51%	1,91E+00	-0,45%
10	1/3	0,989	0,992	5,11E-01	5,09E-01	0,48%	5,09E-01	0,48%
	2/3	0,914	0,937	5,20E-01	5,20E-01	0,16%	5,19E-01	0,23%
	7/9	0,867	0,903	5,23E-01	5,24E-01	-0,24%	5,24E-01	-0,14%
20	1/3	0,989	0,992	1,31E-01	1,30E-01	0,56%	1,30E-01	0,56%
	2/3	0,914	0,937	1,34E-01	1,33E-01	0,26%	1,33E-01	0,34%
	7/9	0,867	0,903	1,34E-01	1,34E-01	-0,16%	1,34E-01	-0,05%
50	1/3	0,989	0,992	2,11E-02	2,10E-02	0,59%	2,10E-02	0,59%
	2/3	0,914	0,937	2,15E-02	2,15E-02	0,30%	2,14E-02	0,37%
	7/9	0,867	0,903	2,16E-02	2,17E-02	-0,13%	2,16E-02	-0,02%

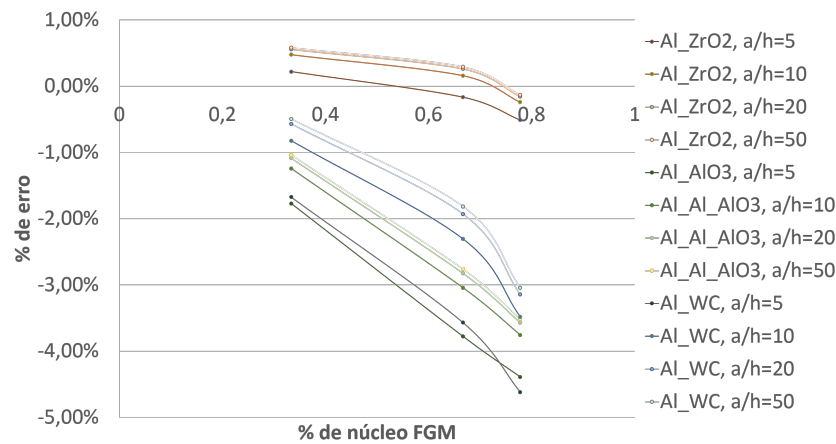
**Tabela 3.15** Frequência fundamental  $Al - Al_2O_3$  [ $\bar{\omega} = 10\omega h\sqrt{\rho_c E_c}$ ]

a/h	e/h	P_eq	Peqm	Exp Law	Power Law (rig)	Dev.(%)	Power Law (massa)	Dev.(%)
<b>Lagrange-Q9</b>								
5	1/3	0,982	0,996	1,43E+00	1,46E+00	-1,77%	1,46E+00	-1,80%
	2/3	0,868	0,971	1,46E+00	1,52E+00	-3,78%	1,53E+00	-4,35%
	7/9	0,801	0,954	1,47E+00	1,54E+00	-4,39%	1,55E+00	-5,54%
10	1/3	0,982	0,996	3,94E-01	3,99E-01	-1,24%	3,99E-01	-1,26%
	2/3	0,868	0,971	4,03E-01	4,16E-01	-3,04%	4,17E-01	-3,48%
	7/9	0,801	0,954	4,06E-01	4,21E-01	-3,76%	4,25E-01	-4,70%
20	1/3	0,982	0,996	1,01E-01	1,02E-01	-1,08%	1,02E-01	-1,10%
	2/3	0,868	0,971	1,04E-01	1,07E-01	-2,82%	1,07E-01	-3,23%
	7/9	0,801	0,954	1,04E-01	1,08E-01	-3,57%	1,09E-01	-4,46%
50	1/3	0,982	0,996	1,63E-02	1,65E-02	-1,04%	1,65E-02	-1,06%
	2/3	0,868	0,971	1,67E-02	1,72E-02	-2,76%	1,73E-02	-3,15%
	7/9	0,801	0,954	1,68E-02	1,74E-02	-3,51%	1,76E-02	-4,38%
<b>Kriging-Q9 Biquadrático</b>								
5	1/3	0,982	0,996	1,43E+00	1,46E+00	-1,77%	1,46E+00	-1,80%
	2/3	0,868	0,971	1,46E+00	1,52E+00	-3,78%	1,53E+00	-4,35%
	7/9	0,801	0,954	1,47E+00	1,54E+00	-4,39%	1,55E+00	-5,54%
10	1/3	0,982	0,996	3,94E-01	3,99E-01	-1,24%	3,99E-01	-1,26%
	2/3	0,868	0,971	4,03E-01	4,15E-01	-3,04%	4,17E-01	-3,48%
	7/9	0,801	0,954	4,06E-01	4,21E-01	-3,76%	4,25E-01	-4,70%
20	1/3	0,982	0,996	1,01E-01	1,02E-01	-1,08%	1,02E-01	-1,10%
	2/3	0,868	0,971	1,04E-01	1,07E-01	-2,82%	1,07E-01	-3,23%
	7/9	0,801	0,954	1,04E-01	1,08E-01	-3,57%	1,09E-01	-4,46%
50	1/3	0,982	0,996	1,63E-02	1,65E-02	-1,04%	1,65E-02	-1,05%
	2/3	0,868	0,971	1,67E-02	1,72E-02	-2,76%	1,72E-02	-3,15%
	7/9	0,801	0,954	1,68E-02	1,74E-02	-3,51%	1,76E-02	-4,38%
<b>Kriging-Q16 Biquadrático</b>								
5	1/3	0,989	0,992	1,43E+00	1,46E+00	-1,77%	1,46E+00	-1,80%
	2/3	0,914	0,937	1,46E+00	1,52E+00	-3,78%	1,53E+00	-4,34%
	7/9	0,867	0,903	1,47E+00	1,54E+00	-4,39%	1,55E+00	-5,54%
10	1/3	0,989	0,992	3,94E-01	3,99E-01	-1,24%	3,99E-01	-1,26%
	2/3	0,914	0,937	4,03E-01	4,15E-01	-3,04%	4,17E-01	-3,48%
	7/9	0,867	0,903	4,06E-01	4,21E-01	-3,76%	4,25E-01	-4,70%
20	1/3	0,989	0,992	1,01E-01	1,02E-01	-1,09%	1,02E-01	-1,11%
	2/3	0,914	0,937	1,04E-01	1,07E-01	-2,83%	1,07E-01	-3,23%
	7/9	0,867	0,903	1,04E-01	1,08E-01	-3,57%	1,09E-01	-4,46%
50	1/3	0,989	0,992	1,63E-02	1,65E-02	-1,06%	1,65E-02	-1,07%
	2/3	0,914	0,937	1,68E-02	1,72E-02	-2,78%	1,73E-02	-3,18%
	7/9	0,867	0,903	1,69E-02	1,74E-02	-3,53%	1,76E-02	-4,40%
<b>Kriging-Q16 Bicúbico</b>								
5	1/3	0,982	0,996	1,43E+00	1,46E+00	-1,77%	1,46E+00	-1,80%
	2/3	0,868	0,971	1,46E+00	1,52E+00	-3,78%	1,53E+00	-4,35%
	7/9	0,801	0,954	1,47E+00	1,54E+00	-4,39%	1,55E+00	-5,54%
10	1/3	0,982	0,996	3,94E-01	3,99E-01	-1,24%	3,99E-01	-1,26%
	2/3	0,868	0,971	4,03E-01	4,16E-01	-3,04%	4,17E-01	-3,48%
	7/9	0,801	0,954	4,06E-01	4,21E-01	-3,76%	4,25E-01	-4,70%
20	1/3	0,982	0,996	1,01E-01	1,02E-01	-1,08%	1,02E-01	-1,10%
	2/3	0,868	0,971	1,04E-01	1,07E-01	-2,82%	1,07E-01	-3,22%
	7/9	0,801	0,954	1,04E-01	1,08E-01	-3,57%	1,09E-01	-4,45%
50	1/3	0,982	0,996	1,63E-02	1,65E-02	-1,03%	1,65E-02	-1,04%
	2/3	0,868	0,971	1,67E-02	1,72E-02	-2,75%	1,72E-02	-3,14%
	7/9	0,801	0,954	1,68E-02	1,74E-02	-3,50%	1,75E-02	-4,37%

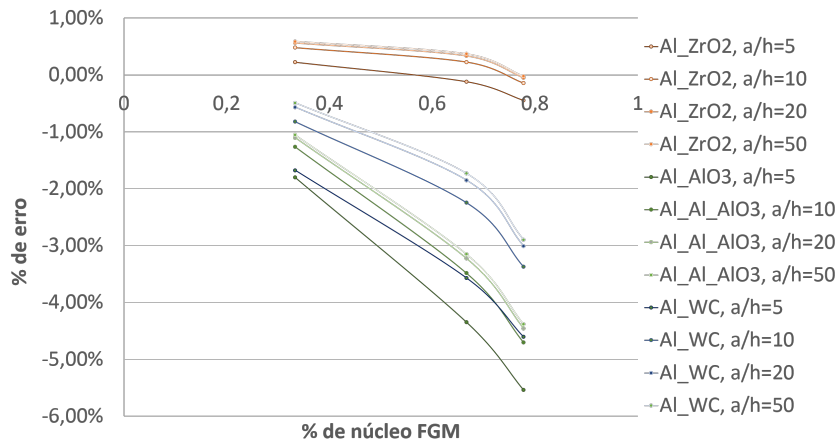
**Tabela 3.16** Frequência fundamental  $Al - WC$  [ $\bar{\omega} = 10\omega h\sqrt{\rho_c E_c}$ ]

a/h	e/h	P_eq	Peqm	Exp Law	Power Law (rig)	Dev.(%)	Power Law (massa)	Dev.(%)
<b>Lagrange-Q9</b>								
5	1/3	0,976	0,981	1,51E+00	1,54E+00	-1,67%	1,54E+00	-1,68%
	2/3	0,831	0,864	1,60E+00	1,66E+00	-3,57%	1,66E+00	-3,57%
	7/9	0,749	0,796	1,64E+00	1,71E+00	-4,62%	1,71E+00	-4,60%
10	1/3	0,976	0,981	4,16E-01	4,20E-01	-0,82%	4,20E-01	-0,82%
	2/3	0,831	0,864	4,45E-01	4,55E-01	-2,31%	4,55E-01	-2,25%
	7/9	0,749	0,796	4,54E-01	4,70E-01	-3,48%	4,69E-01	-3,37%
20	1/3	0,976	0,981	1,07E-01	1,08E-01	-0,57%	1,08E-01	-0,57%
	2/3	0,831	0,864	1,14E-01	1,17E-01	-1,93%	1,17E-01	-1,85%
	7/9	0,749	0,796	1,17E-01	1,21E-01	-3,14%	1,20E-01	-3,01%
50	1/3	0,976	0,981	1,72E-02	1,73E-02	-0,49%	1,73E-02	-0,49%
	2/3	0,831	0,864	1,85E-02	1,88E-02	-1,82%	1,88E-02	-1,73%
	7/9	0,749	0,796	1,89E-02	1,94E-02	-3,04%	1,94E-02	-2,90%
<b>Kriging-Q9 Biquadrático</b>								
5	1/3	0,976	0,981	1,51E+00	1,54E+00	-1,66%	1,54E+00	-1,67%
	2/3	0,831	0,864	1,60E+00	1,66E+00	-3,56%	1,66E+00	-3,56%
	7/9	0,749	0,796	1,63E+00	1,71E+00	-4,61%	1,71E+00	-4,60%
10	1/3	0,976	0,981	4,16E-01	4,20E-01	-0,82%	4,20E-01	-0,82%
	2/3	0,831	0,864	4,45E-01	4,55E-01	-2,30%	4,54E-01	-2,24%
	7/9	0,749	0,796	4,54E-01	4,70E-01	-3,48%	4,69E-01	-3,37%
20	1/3	0,976	0,981	1,07E-01	1,08E-01	-0,56%	1,08E-01	-0,56%
	2/3	0,831	0,864	1,14E-01	1,17E-01	-1,93%	1,17E-01	-1,85%
	7/9	0,749	0,796	1,17E-01	1,21E-01	-3,14%	1,20E-01	-3,00%
50	1/3	0,976	0,981	1,72E-02	1,73E-02	-0,49%	1,73E-02	-0,48%
	2/3	0,831	0,864	1,85E-02	1,88E-02	-1,81%	1,88E-02	-1,73%
	7/9	0,749	0,796	1,89E-02	1,94E-02	-3,04%	1,94E-02	-2,89%
<b>Kriging-Q16 Biquadrático</b>								
5	1/3	0,976	0,981	1,51E+00	1,54E+00	-1,66%	1,54E+00	-1,66%
	2/3	0,831	0,864	1,60E+00	1,66E+00	-3,56%	1,66E+00	-3,56%
	7/9	0,749	0,796	1,63E+00	1,71E+00	-4,61%	1,71E+00	-4,59%
10	1/3	0,976	0,981	4,16E-01	4,20E-01	-0,82%	4,20E-01	-0,81%
	2/3	0,831	0,864	4,44E-01	4,55E-01	-2,30%	4,54E-01	-2,24%
	7/9	0,749	0,796	4,54E-01	4,70E-01	-3,48%	4,69E-01	-3,37%
20	1/3	0,976	0,981	1,07E-01	1,08E-01	-0,57%	1,08E-01	-0,56%
	2/3	0,831	0,864	1,14E-01	1,17E-01	-1,93%	1,17E-01	-1,85%
	7/9	0,749	0,796	1,17E-01	1,21E-01	-3,14%	1,20E-01	-3,01%
50	1/3	0,976	0,981	1,73E-02	1,74E-02	-0,51%	1,74E-02	-0,50%
	2/3	0,831	0,864	1,85E-02	1,89E-02	-1,84%	1,88E-02	-1,75%
	7/9	0,749	0,796	1,89E-02	1,95E-02	-3,06%	1,95E-02	-2,91%
<b>Kriging-Q16 Bicúbico</b>								
5	1/3	0,976	0,981	1,51E+00	1,54E+00	-1,66%	1,54E+00	-1,67%
	2/3	0,831	0,864	1,60E+00	1,66E+00	-3,56%	1,66E+00	-3,56%
	7/9	0,749	0,796	1,64E+00	1,71E+00	-4,61%	1,71E+00	-4,60%
10	1/3	0,976	0,981	4,16E-01	4,20E-01	-0,82%	4,20E-01	-0,82%
	2/3	0,831	0,864	4,45E-01	4,55E-01	-2,30%	4,55E-01	-2,24%
	7/9	0,749	0,796	4,54E-01	4,70E-01	-3,48%	4,69E-01	-3,37%
20	1/3	0,976	0,981	1,07E-01	1,08E-01	-0,56%	1,08E-01	-0,56%
	2/3	0,831	0,864	1,14E-01	1,17E-01	-1,92%	1,17E-01	-1,84%
	7/9	0,749	0,796	1,17E-01	1,21E-01	-3,14%	1,20E-01	-3,00%
50	1/3	0,976	0,981	1,72E-02	1,73E-02	-0,48%	1,73E-02	-0,47%
	2/3	0,831	0,864	1,84E-02	1,88E-02	-1,80%	1,88E-02	-1,71%
	7/9	0,749	0,796	1,88E-02	1,94E-02	-3,03%	1,94E-02	-2,88%

Os resultados comparativos da frequência fundamental baseiam-se em duas abordagens de equivalência. A primeira cuja a equivalência é obtida pelos mesmos valores de  $p$  equivalente, ou seja pela igualdade de rigidez à flexão e uma segunda pela equivalência do segundo momento de massas. Neste caso, não só existem diferenças ao nível da matriz de rigidez resultante como também existem na matriz de massas. Para tal, sugerem-se as respectivas abordagens. No caso da frequência funda-



(a) Considerando equivalência de rigidez



(b) Considerando equivalência de massa

Figura 3.14: Desvio em função da percentagem de núcleo FGM-caso dinâmico

mental, as conclusões não são tão claras. Isto devido ao facto de existir maior número de variáveis em jogo. A diferença dos materiais constituintes no laminado não existe apenas na sua rigidez, neste caso está também presente na massa específica de cada conjunto de materiais. No entanto, em modo geral, podemos concluir que o desvio entre as metodologias é inferior quando comparado ao caso da deformação máxima. Podemos ainda concluir que o efeito da variação de espessura do laminado tem um efeito semelhante ao caso anterior. Em relação à percentagem de núcleo FGM, este tem um efeito idêntico em ambos os casos, quer para a equivalência de rigidez quer para a equivalência do segundo momento de massas. De modo geral, a utilização de diferentes distribuições de partículas na modelação de laminados tem como consequência diferenças significativas no comportamento do mesmo.

### 3.4 Interface de Utilização dos Modelos

De modo a permitir a utilização das diversas metodologias implementadas neste trabalho, foi desenvolvido um pequeno programa que permite a utilização das diversas implementações. Este programa é o resultados da utilização da ferramenta *GUI* presente no programa *matlab* e que permite a compilação de todas as funções implementadas ao longo deste trabalho numa única interface, permitindo desse modo disponibilizar de uma forma simples as funções desenvolvidas. A interface de utilização do programa é apresentada na figura 3.18.

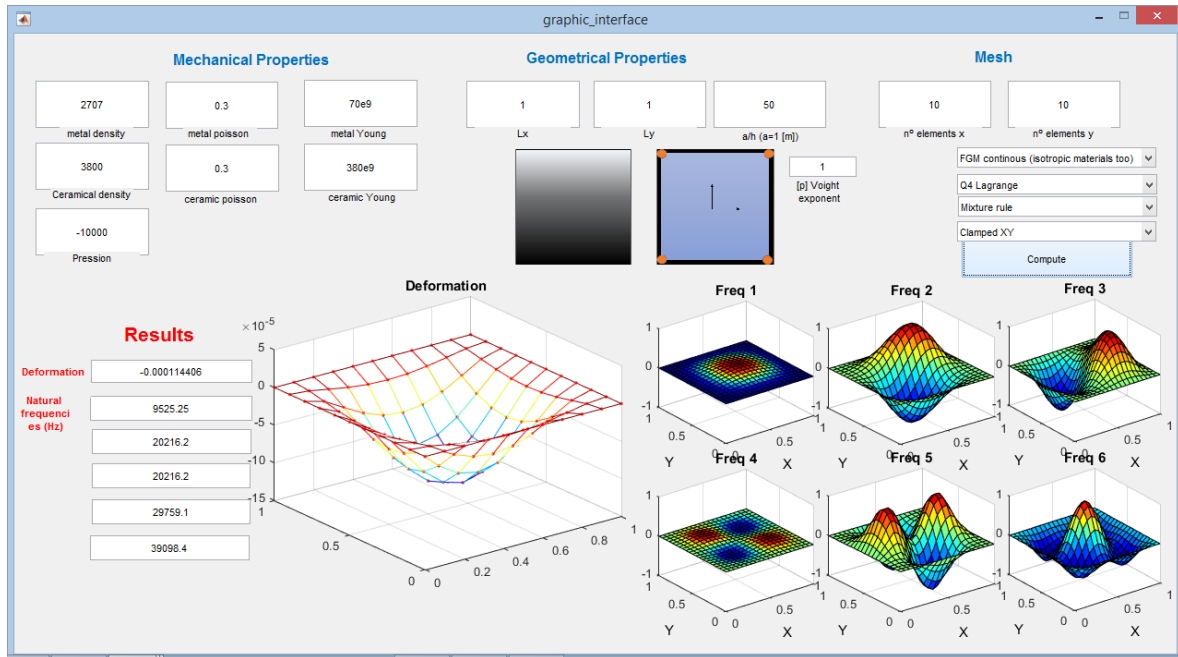


Figura 3.15: Interface de utilização

O programa apresenta a possibilidade de definir o compósito a estudar, as propriedades do elemento finito a utilizar, a possibilidade de utilização de regras de homogeneização diferentes e ainda a condição fronteira que se pretende. A apresentação dos resultados é feita através dos valores de deformada máxima e frequências fundamentais e a representação gráfica de cada um. O programa permite definir as propriedades mecânicas dos materiais constituintes do laminado, seja para o caso FGM ou laminado ortotrópico. Essas propriedades são definidas pelos módulos de Young, coeficientes de poisson e pesos específicos dos constituintes. Para o caso do laminado ortotrópico, as propriedades a introduzir são as propriedades mecânicas ortotrópicas efectivas, ou seja nas 2 direcções  $X$  e  $Y$  e a sua caracterização em  $z$ , ou seja o número de lâminas que o constituem e a orientação de cada uma. As características geométricas são caracterizadas pela definição dos comprimentos em  $x$  e  $y$  do laminado e definido por  $1/h$  ou seja o inverso da espessura. A caracterização da malha é definida pelo número de elementos em cada direcção do laminado.

### Definição do Laminado

Antes de definir as propriedades mecânica, é necessário caracterizar o tipo de laminado que se pretende estudar. Nesse caso, o programa permite definir 5 tipos de laminados diferentes. Associado ao tipo de laminado, surgem também algumas opções adicionais tais como a regra de homogeneização a incluir ou o número de camadas para o caso de um laminado modelado de forma discreta. As possibilidades do programa na escolha do laminado a caracterizar são apresentadas na figura 3.16.

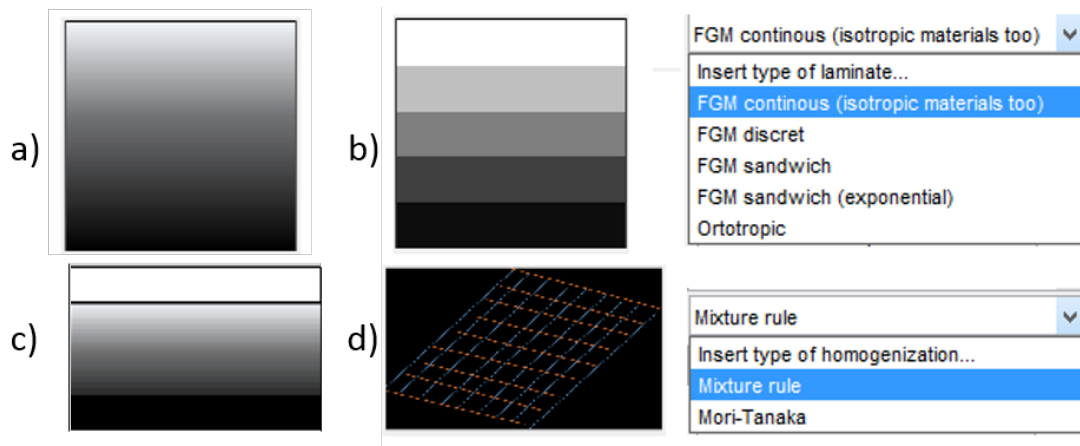


Figura 3.16: Interface de caso de estudo

O primeiro caso ilustrado em *a)* da figura 3.16, definido por *FGM continuous* permite descrever um laminado FGM contínuo. Este tipo de material é caracterizado pelas propriedades mecânicas dos constituintes FGM e pelo expoente de distribuição de partícula ( $p$ ). É também necessário definir a opção de homogeneização, tendo por opção a regra das misturas (*Mixture rule*) ou a regra de Mori-Tanaka. A opção *b)* visa caracterizar o mesmo laminado FGM obtando por uma abordagem discreta. Visa discretizar o laminado ao longo da espessura por  $Nk$  camadas isotrópicas. Ao escolher esta opção, deverá ser indecado o número de camadas pretendidas e o expoente de distribuição. A opção *c)* ilustra a modelação de um laminado do tipo sandwich, composto por uma camada inferior inteiramente composta por um dos constituintes FGM e por uma camada superior composta inteiramente pelo segundo constituinte. Na camada central, existe um núcleo FGM que traduz a dispersão ao longo da espessura entre os 2 materiais extremos. Este modelo pode ser caracterizado por uma homogeneização exponencial ao escolher a opção *FGM sandwich (exponential)* necessitando para esse efeito indicar a percentagem de espessura de núcleo do laminado ou ainda caracterizado da mesma forma da opção *a)* devendo para tal definir a percentagem de núcleo e o expoente de distribuição. Por última opção, é possível descrever um laminado descrito por  $Nk$  laminas ortotrópicas com as respectivas orientações de fibra.

### Definição do Elemento Finito

O programa permite também utilizar elementos distintos, tanto no seu número de nós como pela origem das suas funções de interpolação entre os mesmos. Neste caso, o programa permite a utilização de 8 tipos de elementos diferentes, definidos por 4 ilustrações diferentes na figura 3.17.

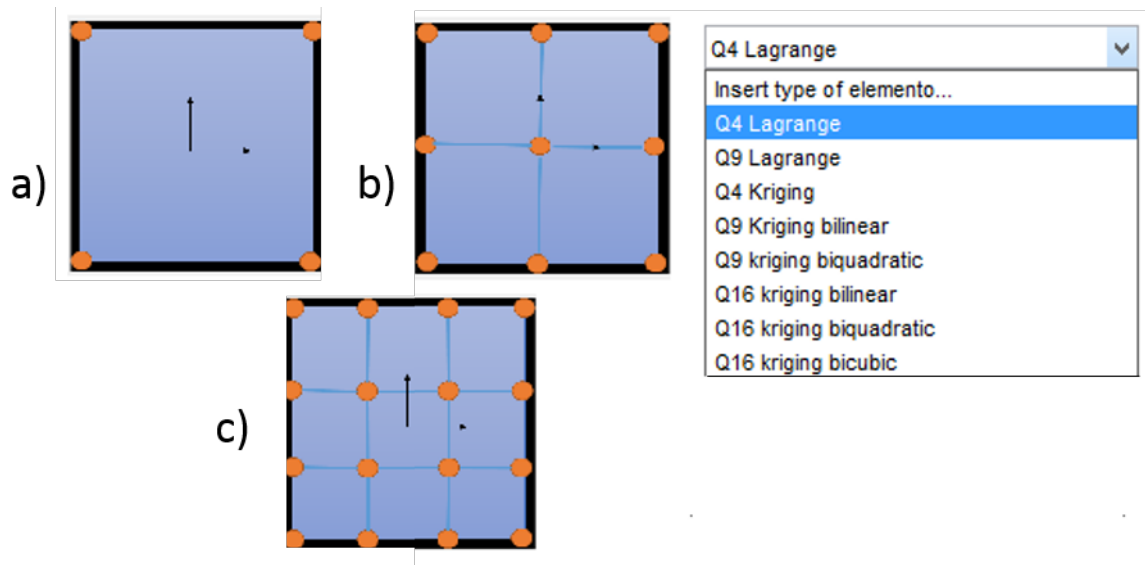


Figura 3.17: Interface de elemento a seleccionar

O primeiro caso ilustrado em *a*) da figura 3.17 ilustra a constituição do elemento Q4 (elemento composto por 4 nós). Este elemento pode ser definido por funções de interpolação  $N$  segundo funções polinomiais de Lagrange ou de origem em funções de Kriging. O elemento Q4 apenas possibilita a interpolação por funções lineares, ou seja de 1º grau. O caso ilustrado em *b*), apresenta-se o elemento Q9 (elemento definido por 9 nós). Este elemento pode ser descrito por 3 tipos de funções de interpolação, uma função polinomial de Lagrange quadrática (de grau 2) ou por 2 funções de interpolação de Kriging, uma linear e outra quadrática. Em *c*) é apresentado o elemento Q16 (elementos composto por 16 nós). Este último elemento é apenas descrito por elementos de origem de Kriging com possibilidade de optar por funções de interpolação lineares, quadráticas ou cúbicas.

## Resultados

Como resultados, o programa apresenta o valor da deformada máxima do laminado definido e o valor das 5 primeiras frequências.

Deformation	-0.000114406
Natural frequencies (Hz)	9525.25
	20216.2
	20216.2
	29759.1
	39098.4

Figura 3.18: Interface de resultados obtidos

Estes resultados são também ilustrados graficamente, apresentando a deformação do laminado ilustrada pela figura 3.19 e os modos de vibração correspondentes às frequências naturais ilustrados pela figura 3.20.

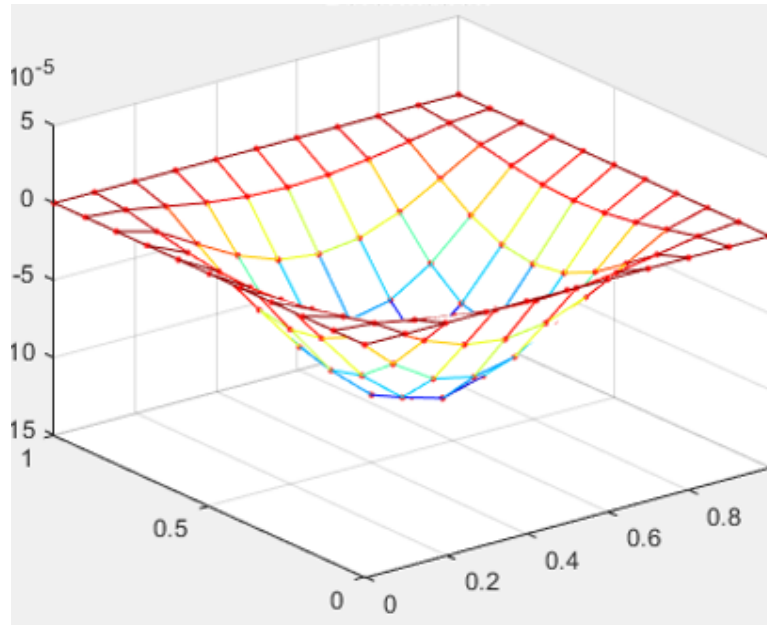


Figura 3.19: Deformação do laminado

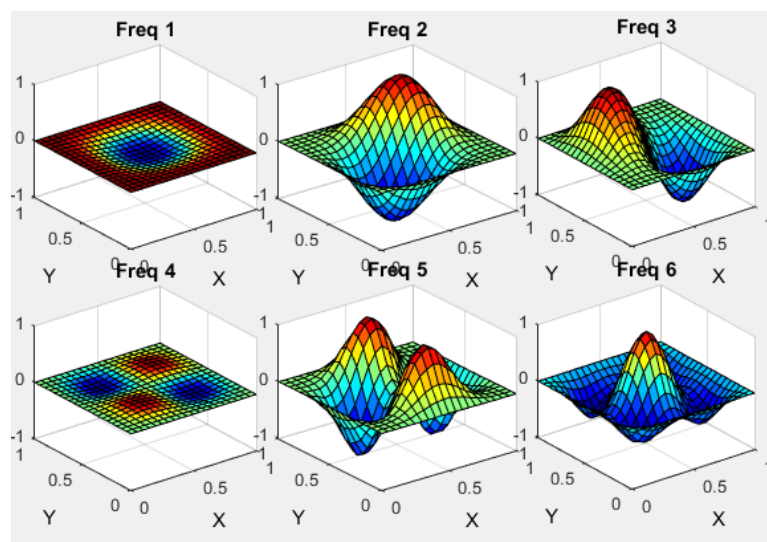


Figura 3.20: Modos de vibração do laminado

A representação gráfica dos modos de vibração permite não só a visualização dos mesmos como também permite concluir acerca da existência de modos de vibração simétricos. Estes modos de vibração apresentam frequências de vibração idênticas e devem-se à simetria do laminado nas direcções  $x$  e  $y$ . Este fenómeno pode ser observado entre o 2º e o 3º modo de vibração.

### 3.5 Simulação de Variabilidade nos Parâmetros de Entrada do Modelo

François M. Hemez (2004) apresenta uma abordagem que quantifica a incerteza de um laminado ortotrópico, justificando a variabilidade pela incerteza associada à orientação de cada lamina e à incerteza intrínseca das propriedades mecânicas dos materiais que o constituem. Por analogia, este capítulo visa aplicar uma metodologia semelhante aplicada a um compósito *FGM*. Do ponto de vista da simulação utilizada, para a obtenção de propriedades mecânicas e geométricas efectivas, é assumida variabilidade dos parâmetros de entrada do modelo. Foi considerado para este estudo 2 principais fontes de variabilidade. uma primeira representada pela variabilidade da distribuição de partículas e geometria do compósito e a segunda pela incerteza das propriedades mecânicas dos materiais que constituem o *FGM*. Do ponto de vista da engenharia, podemos associar a variabilidade da distribuição à variabilidade obtida pelo processo de fabrico do *FGM*, enquanto que a variabilidade das propriedades mecânicas dos materiais constituintes pode ser considerada em concordância com a incerteza apresentada pelo fabricante.

Ao considerar uma distribuição de partículas segundo o modelo de distribuição descrito pela regra da potência (ver capítulo 3.1-Distribuição de partículas), esta poderá ser descrita segundo diversas possibilidades, sendo que o seu comportamento será consequência do expoente  $p$  da lei de potência e é descrito segundo a figura 3.21.

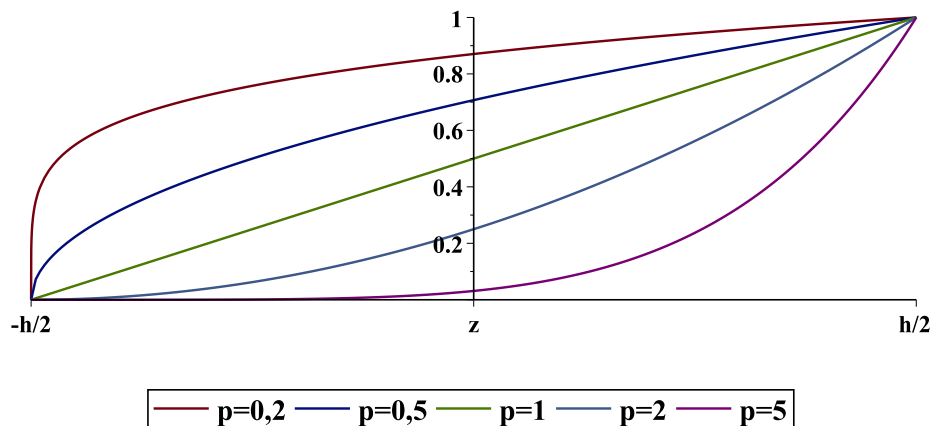


Figura 3.21: Distribuição de fracção de volume para diferentes valores de expoente

A variabilidade do compósito pode ser decomposta, no modelo que descreve o *FGM*, pela variabilidade associada aos módulos de Young, coeficientes de Poisson e massas específicas do cerâmico e do metal que constituem a placa compósita ( $E_c$ ,  $E_m$ ,  $\nu_c$ ,  $\nu_m$ ,  $\rho_c$  e  $\rho_m$ ) e pela variabilidade associada às características geométricas, o expoente da regra das misturas ( $p$ ) e a espessura ( $h$ ). De modo a simular a variabilidade dos parâmetros de entrada do modelo, cada um destes parâmetro foi definido segundo um valor médio ( $\mu$ ) e um respectivo desvio padrão ( $\sigma$ ) definido por 7,5% do valor médio da respectiva variável. A distribuição da variabilidade de cada parâmetro segue um modelo de distribuição normal designado por  $\mathbf{X} \sim N(\mu, \sigma)$ . A simulação é obtida garantindo a independência das variáveis. A independência é obtida através da técnica denominada por amostra latina hipercúbica (*Latin Hypercube Sampling*) (Iman and Conover (1982)). Com a utilização desta técnica, é possível criar restrições à geração de dados, sendo que neste caso foi possível restringir a matriz de covariância de modo a que esta se aproxime tanto quanto possível à matriz identidade. A amostra foi efectuada considerando os valores de  $\mu$  e  $\sigma$  presentes na tabela 3.17.

**Tabela 3.17** Valores de simulação dos parâmetros

Parâmetros	$E_c$ [Gpa]	$E_m$ [Gpa]	$\nu_c$	$\nu_m$	$\rho_c$ [Kg/m <sup>3</sup> ]	$\rho_m$ [Kg/m <sup>3</sup> ]	$h$ [m]	$p$
$\mu$	696	70	0,3	0,3	15600	2707	0,05	1
$\sigma$	52	5	0,0225	0,0225	1170	203	0,00375	0,075

Ao simular a variabilidade dos parâmetros segundo os valores da tabela 3.17, respeitando os pressupostos da independência, obtêm-se as distribuições de propriedades ilustradas segundo os histogramas da figura 3.22.

A figura 3.22 apresenta a distribuição de cada variável, distribuição normal, e os parâmetros de correlação entre variáveis, sendo que para  $r < 0,5$ , estas podem ser consideradas independentes.

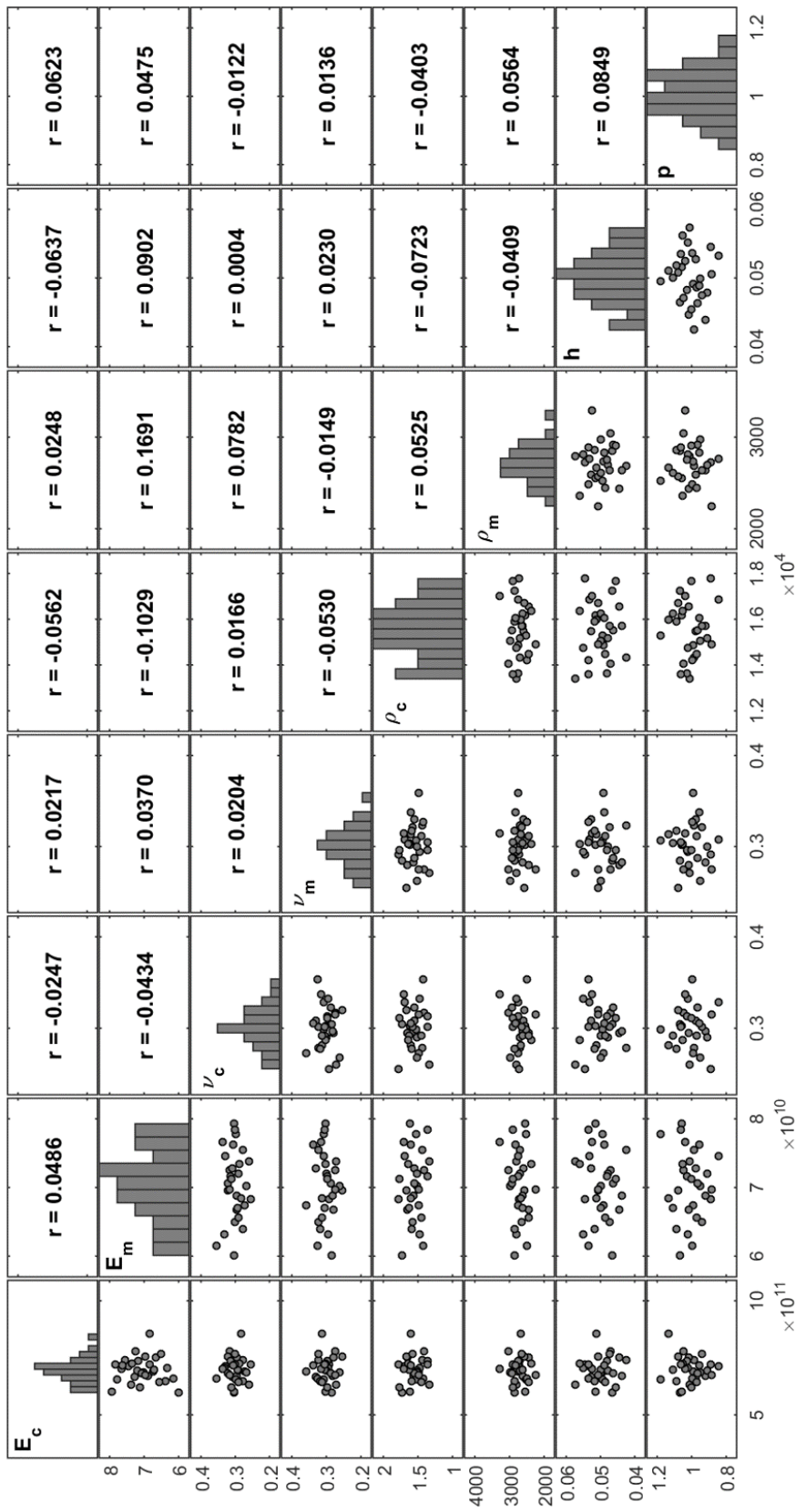


Figura 3.22: Distribuição das variáveis simuladas

Ao considerar um modelo descrito por  $p=1$ , obtêm-se uma distribuição linear de partículas ao longo da espessura ( $h$ ) do laminado. Considerando a existência de variabilidade em redor do valor médio ( $\mu$ ) do parâmetro  $p$  obtêm-se uma área representante das possíveis distribuições de partículas ao longo da espessura da placa compósita representada pela figura 3.23.

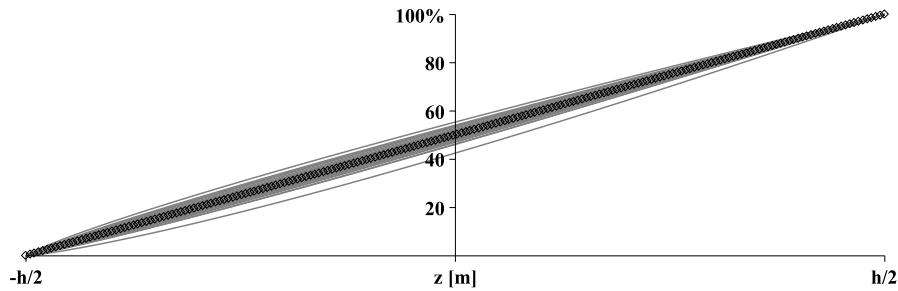
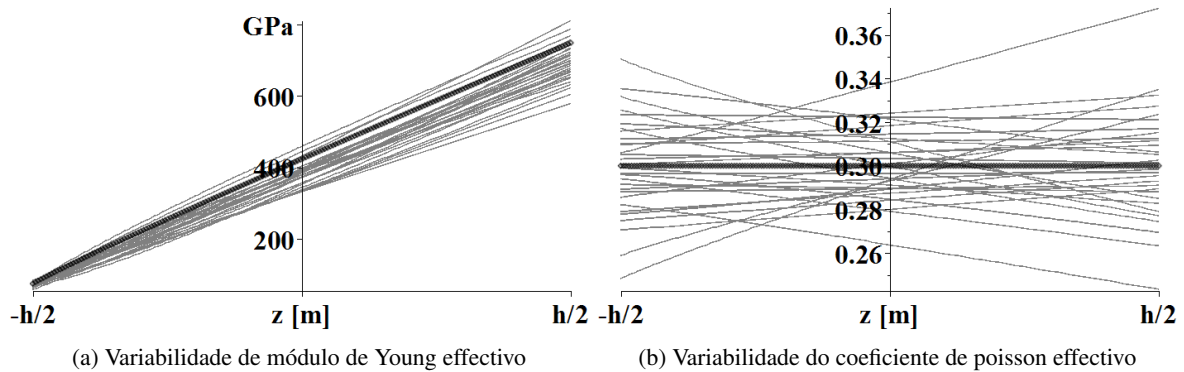


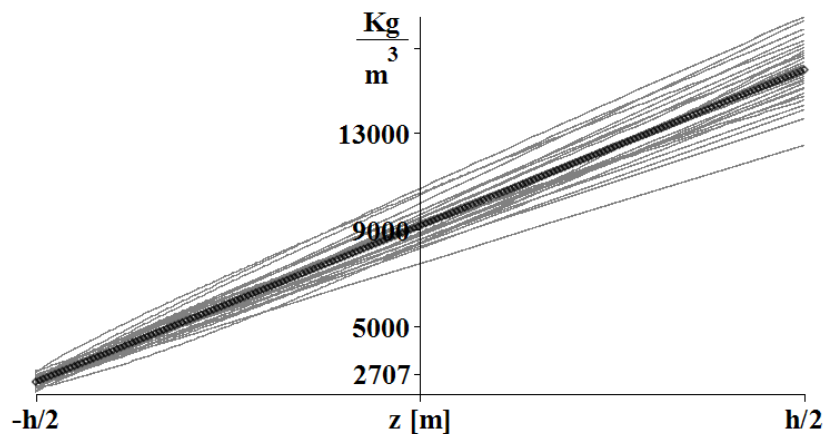
Figura 3.23: Variabilidade do parâmetro de distribuição

Ao propagar a variabilidade de cada um destes parâmetros, obtêm-se propriedades mecânicas efectivas, descritas ao longo da espessura do laminado, de acordo com a figura 3.24.



(a) Variabilidade de módulo de Young efectivo

(b) Variabilidade do coeficiente de poisson efectivo



(c) Variabilidade da massa específica efectiva

Figura 3.24: Distribuição das propriedades mecânicas efectivas ao longo da espessura do laminado

Podemos concluir que, apesar de existir apenas uma variabilidade descrita por 7,5% do valor médio de cada parâmetro, a variabilidade total das propriedades efectivas resulta na acumulação das variabilidades individuais de cada parâmetro.

### 3.6 Influência da Variabilidade no Comportamento Estático da Placa Compósita

Com base nos parâmetros de entrada descritos anteriormente, é possível obter uma distribuição da deformada transversal máxima resultante das combinações independentes de parâmetros de entrada do modelo. Os resultados foram obtidos para 2 modelos. Um primeiro modelo implementado por elementos baseados em funções de interpolação de Lagrange (Q9-Lagrange) e um segundo modelo implementado com elementos de base de Kriging (Q9-Kriging Biquadrático). Ambos os modelos foram implementados nas mesmas condições. Com uma malha descrito por 20x20 elementos e sob condições fronteiras simplesmente apoiado em todos os lados, simulou-se as 2 metodologias para uma amostra de  $n=30$ , um tamanho de amostra suficientemente grande que permita a significância dos resultados mas que também permita simular uma amostra obtida de forma experimental. A deformada transversal máxima não depende da massa específica do compósito, quando são desprezados os efeitos sobre a deformada devidos ao peso específico do mesmo, pelo que os parâmetros de entrada do modelo, para efeitos do estudo estático, baseiam-se exclusivamente sobre os parâmetros geométricos, módulos de Young e coeficientes de Poisson.

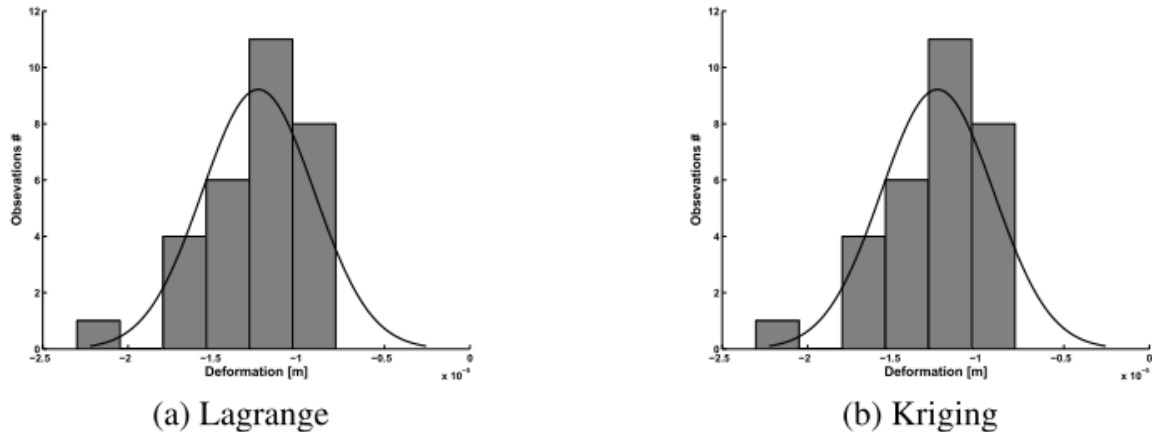


Figura 3.25: Variabilidade do parâmetro de distribuição

Na figura 3.25 é apresentado um histograma correspondente aos resultados obtidos por cada uma das metodologias implementadas. Cada histograma apresenta a frequência de resultados obtidos por intervalos de valores. Sendo que ambas as metodologias foram aplicadas para um caso de estudo idêntico, o teste de hipótese à igualdade dos modelos deve ser tido em conta. Ambos os histogramas da figura 3.25 apresentam um comportamento semelhante a uma distribuição normal.

Da tabela 3.18 podemos concluir que a distância de Kolmogorov-Smirnov entre as 2 metodologias utilizadas são bastante inferiores à distância crítica de referência. Por isso, não podemos rejeitar a

**Tabela 3.18** Teste Kolmogorov-Smirnov 2 amostras

Comparação	$D_{m;n}$	$D_{m;n;0,05}$	$p - value$
Deformação	0,0333	0,35115	1

hipótese  $H_0$  que indica que as amostras provém de uma mesma população. Deste modo, podemos afirmar que não existem evidências estatísticas como os modelos não são estatisticamente idênticos.

### Estudo Descritivo da Deformada Transversal Máxima

O estudo descritivo dos resultados acerca da deformação máxima estão presentes na tabela 3.19. Os valores apresentados são referentes à média, desvio padrão e mediana amostral respectivos aos resultados obtidos pela metodologia dos elementos de lagrange.

**Tabela 3.19** Estudo descritivo da deformação máxima

Média	Desvio padrão	Mediana
-1,239E-05	3,277E-06	-1,18E-05

Da tabela anterior, é possível constatar que o valor da média apresenta-se inferior ao valor da mediana, pelo que podemos concluir que a distribuição apresenta uma ligeira assimetria negativa, ou seja trata-se de uma distribuição assimétrica à esquerda.

## Regressão Linear Múltipla

### 1º-Modelo de Regressão

Ao aplicar o método de regressão linear múltipla pretende-se relacionar os parâmetros simulados de entrada do modelo com os valores obtidos respectivos à deformada transversal máxima do compósito.

A primeira tentativa de regressão aplicada entre os parâmetros de entrada e as respectivas deformadas passa por considerar a influência de todas as variáveis independentes de entrada sem entrar em consideração com a influência da interacção dos parâmetros. Desta forma, a regressão é definida pela equação 3.4.

$$Y = \beta_0 + \beta_1 E_c + \beta_2 E_m + \beta_3 \nu_c + \beta_4 \nu_m + \beta_5 h + \beta_6 p + \epsilon \quad (3.4)$$

Sendo que  $Y$  representa a deformada transversal máxima da placa compósita,  $\beta_0$  o declive parcial constante que representa o valor da variável dependente quando as variáveis independentes são zero,  $\epsilon$  o Desvio associado ao modelo de regressão e as restantes variáveis correspondentes aos parâmetros de entrada do modelo de elementos finitos e os correspondentes declive parciais. O modelo descrito pela equação 3.4 permite identificar quais os parâmetros de entrada do modelo mais significativos para a definição da deformada transversal máxima.

**Tabela 3.20** Coeficientes do modelo que inclui todos os parâmetros (modelo de Lagrange)

Coeficientes beta	beta0	beta1	beta2	beta3	beta4	beta5	beta6
Valor estimado	-5,902e-5	1,440e-17	3,702e-17	6,893e-6	6,594e-6	7,394e-4	-5,929e-6
Desvio	3,441e-6	1,734e-18	1,946e-17	4,179e-6	4,141e-6	2,606e-5	1,250e-6
t-test	-17,155	8,309	1,949	1,649	1,592	28,377	-4,743
p-value	7,87e-14	4,47e-8	0,06480	0,11393	0,12624	2e-16	0,00011
Análise do modelos	$R^2$	$R_{corr}^2$	<i>estatística</i> – <i>F</i>	<i>p</i> – <i>value</i>			
	0,9769	0,9681	111,1	1,977e-15			

**Tabela 3.21** Coeficientes do modelo que inclui todos os parâmetros (modelo de Kriging)

Coeficientes beta	beta0	beta1	beta2	beta3	beta4	beta5	beta6
Valor estimado	-6.724e-5	1.451e-17	5.976e-17	1.269e-5	1.187e-5	7.859e-4	-6.029e-6
Desvio	4.504e-6	2.603e-18	2.726e-17	6.019e-6	5.984e-6	3.481e-5	1.749e-6
t-test	-14.929	5.574	2.192	2.108	1.984	22.575	-3.447
p-value	2.53e-13	1.14e-5	0.03874	0.04609	0.05932	2e-16	0.00219
Análise do modelos	$R^2$	$R_{corr}^2$	<i>estatística</i> – <i>F</i>	<i>p</i> – <i>value</i>			
	0.9612	0.951	94.84	4.705e-15			

Com a utilização da análise ANOVA (análise de variância) conclui-se a significância do modelo baseado no valor de *p* – *value* do modelo apresentados na tabela 3.20 para o caso do modelo de Lagrange. O modelo probabilístico definido por todos os parâmetros de entrada apresenta uma significância apresentada pelo coeficiente de determinação corrigido de 96,8%. A existência de significância diz-nos que existe pelo menos uma variável independente que influência de forma significativa a variável dependente. Neste caso, resta aplicar o teste de t-Student (*t* – *test*) para definir a significância individual de cada variável independente. O resultado do teste individual a cada coeficiente de declive parcial é representado pelos valores de *p* – *value* individuais para cada coeficiente. Poder-se-à concluir que os parâmetros com maior impacto sobre a variabilidade da deformada transversal máxima são os de carácter geométrico, ou seja a espessura (*h*) do laminado e o parâmetro (*p*) de distribuição que o define e os módulos de Young  $E_c$  e  $E_m$ . Desse modo podemos também afirmar que os coeficientes de poisson  $\nu_c$  e  $\nu_m$  são pouco representativos da variabilidade da deformação máxima. Apesar de existir uma forte significância do modelo, este não pode ser considerado válido pois não se verificam os pressupostos de validação baseados sobre os resíduos do modelo apresentados seguidamente.

### Pressupostos de Validação

Para garantir a validade do modelo, é necessário que o estudo cumpra com alguns pressupostos. Para além da independência de todas as variáveis independentes, critério cumprido na simulação dos parâmetros de entrada do modelo, existem algumas outras condições com base na distribuição dos resíduos do modelo. A distribuição dos resíduos deve apresentar-se segundo uma distribuição normal de média ( $\mu$ ) igual a zero e desvio padrão constante ( $\sigma^2$ ), deve existir independência e estes devem apresentar uma distribuição normal. Deste modo, quando validados os pressupostos, é possível estimar a variável dependente (*y*) em função das variáveis independentes ( $x_i$ ) associada aos resíduos aleatórios descritos por  $\epsilon \sim N(0, \sigma)$ .

Apesar do modelo anteriormente descrito apresentar uma precisão considerável, este não apresenta os pressupostos necessários de validação.

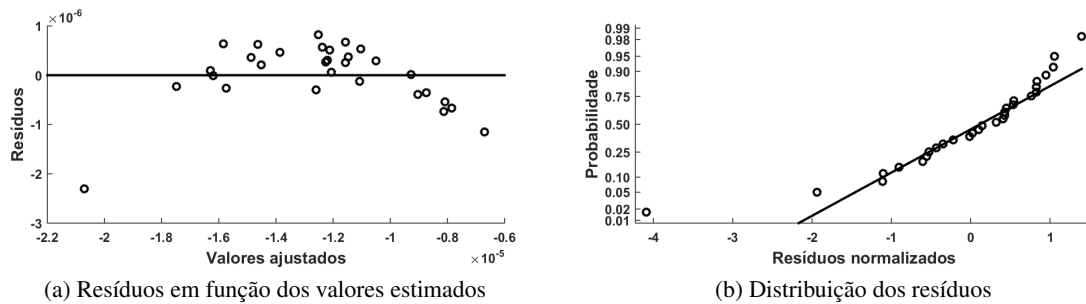


Figura 3.26: Pressupostos de validação do 1º modelo

A figura 3.26 a) apresenta a distribuição do vector dos resíduos em função do vector de valores de deformação máxima estimados obtidos através da realização do modelo de regressão que contempla todas as variáveis independentes. Na figura 3.26 b) é apresentada a distribuição dos valores residuais normalizados em comparação com a distribuição teórica desejada. Para este caso, é de considerar que os pressupostos de validação respectivos à média nula e à variância constante são violados. É de notar a existência de uma relação quadrática entre os valores residuais e os valores estimados levando à violação do pressuposto de média nula e desvio padrão constante, pelo que este resultado indica a existência de dependências não contabilizadas na escolha do modelo de regressão.

## 2º-Modelo de Regressão

De modo a isolar a influência sobre a variabilidade da variável dependente e na tentativa de validação dos pressupostos em causa, a segunda tentativa de modelação apresenta uma regressão contando apenas com os parâmetros geométricos do laminado, ou seja os parâmetros  $h$  e  $p$ , apresentado na equação 3.5.

$$Y = \beta_0 + \beta_1 h + \beta_2 p + \epsilon \quad (3.5)$$

Neste caso, é apresentado um modelo definido apenas pelas variáveis que descrevem geometricamente o laminado, do ponto de vista da engenharia, podemos afirmar que se trata de variáveis cuja variabilidade provém do processo de fabrico ou de tolerâncias geométricas aplicadas. Com este modelo, obtém-se uma significância do modelo apresentado pelo coeficiente de determinação corrigido de 87,9% segundo o modelo descrito pelo método de Lagrange e 88,21% para o método de Kriging.

**Tabela 3.22** Coeficientes do modelo que inclui parâmetros geométricos (modelo de Lagrange)

Coeficientes beta	beta0	beta1	beta2
Valor estimado	-4,368e-5	7,312e-4	-5,112e-6
Desvio	3,359e-6	5,031e-5	2,427e-6
t-test	-13,006	14,535	-2,107
p-value	3,85e-13	2,75e-14	0,0446
Análise do modelos	$R^2$	$R_{corr}^2$	estatística - F
	0,887	0,8787	106
			p - value
			1,639e-13

**Tabela 3.23** Coeficientes do modelo que inclui parâmetros geométricos (modelo de Kriging)

Coeficientes beta	beta0	beta1	beta2	
Valor estimado	-4.591e-5	7.923e-04	-6.036e-06	
Desvio	3.751e-6	5.388e-5	2.712e-6	
t-test	-12.240	14.704	-2.226	
p-value	1.58e-12	2.08e-14	0.0346	
Análise do modelos	$R^2$	$R^2_{corr}$	estatística - F	p - value
	0.8902	0.8821	109.5	1.113e-13

**Pressupostos de validação**

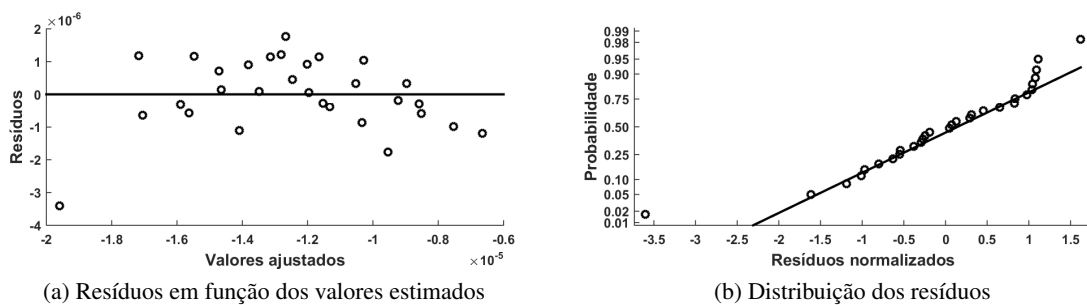


Figura 3.27: Pressupostos de validação do 2º modelo

Nesta segunda tentativa de validação de pressupostos, podemos constatar que a violação de pressupostos não é tão severa. A relação de dependência não é tão notória e a distribuição de probabilidade apresenta-se mais próxima da distribuição teórica, no entanto estas violações continuam presentes.

**3º-Modelo de Regressão**

Sendo que no modelo anterior se apresentam apenas 2 variáveis independentes e a existência de uma dependência quadrática não contabilizada, é assim analisado o modelo da equação 3.6 que conta com a interação das 2 variáveis independentes presentes.

$$Y = \beta_0 + \beta_1 h + \beta_2 p + \beta_{12}(h * p) + \epsilon \tag{3.6}$$

A análise do modelo é apresentada na tabela 3.24 e 3.25 respectivas à utilização dos métodos de Lagrange e Kriging respectivamente.

**Tabela 3.24** Coeficientes do modelo que inclui interação entre variáveis (modelo de Lagrange)

Coeficientes beta	beta0	beta1	beta2	beta12
Valor estimado	-1,15e-4	2,176e-3	6,291e-5	-1,379e-3
Desvio	3,36e-5	6,713e-4	3,34e-5	6,671e-4
t-test	-3,424	3,241	1,884	-2,068
p-value	0,00206	0,00326	0,07083	0,04873
Análise do modelos	$R^2$	$R^2_{corr}$	estatística - F	p - value
	0,905	0,894	82,84	1,970e-13

**Tabela 3.25** Coeficientes do modelo que inclui interação entre variáveis (modelo de Kriging)

Coefficientes beta	beta0	beta1	beta2	beta12
Valor estimado	-1.139e-04	2.155e-03	6.174e-05	-1.358e-03
Desvio	3.363e-05	6.721e-04	3.344e-05	6.678e-04
t-test	-3.387	3.206	1.847	-2.033
p-value	0.00226	0.00355	0.07623	0.05237
Análise do modelos	$R^2$	$R_{corr}^2$	estatística - F	p - value
	0.905	0.895	82.84	1.973e-13

### Pressupostos de validação

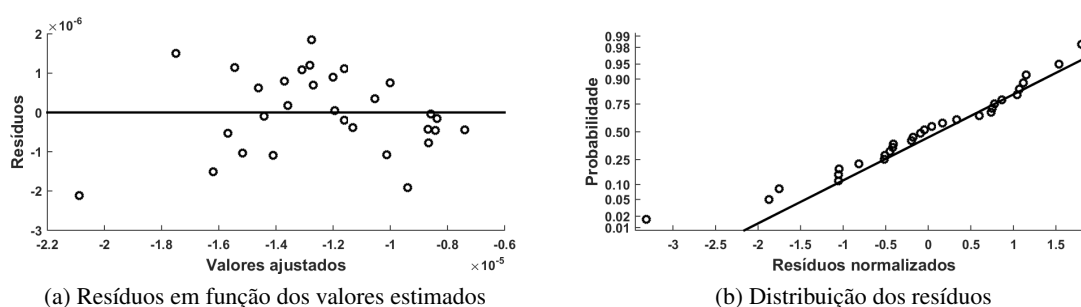


Figura 3.28: Pressupostos de validação do 3º modelo

Podemos observar da figura 3.31 que este modelo tem o melhor comportamento a nível de pressupostos de validação dos 3 modelos anteriormente considerados. O gráfico a) apresenta indícios de variância constante e média nula e o gráfico apresentado em b) apresenta um melhor ajuste à distribuição teórica. Segundo a metodologia apresentada em Montgomery (2003), os pressupostos de

**Tabela 3.26** Testes à normalidade dos resíduos

Teste à Normalidade	P-value
Anderson-Darling	0,7761
Cramer-von Mises	0,7614
Lilliefors (Kolmogorv-Smirnov)	0,6471
Pearson chi-square	0,392
Shapiro-Francia	0,8385

validação devem obedecer a 4 critérios apresentados anteriormente. Para o primeiro critério, o caso da média nula, o valor obtido é  $-2 * e^{-23}$ . Poder-se-à observar graficamente que não existem indícios de variância não constante ou de uma qualquer dependência dos valores. Para o caso da normalidade dos resíduos, são apresentados alguns teste na tabela 3.26 que evidenciam a normalidade da distribuição dos resíduos.

### 3.7 Variabilidade não Contabilizada

O modelo validado anteriormente apresenta uma qualidade de ajustamento de cerca de 90%, ou seja, permite quantificar 90% da variabilidade existente entre as variáveis de entrada e a variável de saída

do modelo, neste caso a deformada transversal máxima. De modo a identificar os restantes 10% de variabilidade existente, propõem-se ainda uma metodologia semelhante com base em uma amostra cuja variabilidade de entrada do modelo está presente apenas nas propriedades mecânicas dos materiais. Desta forma, as conclusões são baseadas no mesmo modelo com a diferença de ser considerado a espessura do laminado e o parâmetro de distribuição constantes.

$$Y = \beta_0 + \beta_1 E_c + \beta_2 E_m + \beta_3 \nu_c + \beta_4 \nu_m + \epsilon \quad (3.7)$$

A equação 3.7 apresenta o modelo que pretende caracterizar a variabilidade não contabilizada pelo modelo anterior. Visto que o objectivo deste estudo passa apenas por caracterizar quais os parâmetros que contribuem para os 10% de variabilidade, este modelo não será validado. O estudo apresenta os testes à significância de modo a quantificar a percentagem de variabilidade não contabilizada por este modelo.

**Tabela 3.27** Coeficientes do modelo que inclui apenas a variabilidade as propriedades mecânicas (modelo de Lagrange)

Coeficientes beta	beta0	beta1	beta2	beta3	beta4
Valor estimado	-2,62e-5	1,40e-17	3,15e-17	4,10e-6	3,73e-6
Desvio	3,83e-7	2,67e-19	3,02e-18	6,58e-7	6,18e-7
t-test	-68,31	52,26	10,45	6,24	6,03
p-value	2e-16	2e-16	1,32e-10	1,60e-6	2,65e-6
Análise do modelos	$R^2$	$R_{corr}^2$	<i>estatística - F</i>	<i>p - value</i>	
	0,992	0,990	738,3	2,2e-16	

A variabilidade não contabilizada pelo modelo validado da equação 3.6 corresponde a cerca de 10% da variabilidade total da resposta do modelo de elementos finitos em termos de deformada transversal máxima. Esses 10% de variabilidade correspondem aos 100% do último modelo apresentado, resultando que apenas 0,1% da variabilidade total não é justificada pelas variáveis de entrada do modelo validado.

### 3.8 Influência da Variabilidade no Comportamento Dinâmico do Laminado

Do ponto de vista da comparação entre modelos, a tabela 3.28 apresenta os resultados do teste de Kolmogorov-Smirnov para comparação de 2 amostras. É possível constatar para todas as frequências um coeficiente de correlação bastante elevado, significando que ambos os modelos apresentam resultados estatisticamente idênticos ou que as amostras provêm da mesma população.

**Tabela 3.28** Teste Kolmogorov-Smirnov 2 amostras

Comparação	$D_{m;n}$	$D_{m;n;0,05}$	correlação
Frequência 1	0,0667	0,35115	1
Frequência 2	0,1	0,35115	0,9988
Frequência 3	0,0667	0,35115	1
Frequência 4	0,0667	0,35115	1
Frequência 5	0,0667	0,35115	1
Frequência 6	0,0667	0,35115	1

A tabela anterior indica que não rejeitamos a hipótese  $H_0$  acerca da igualdade entre as amostras, para tal, o estudo será baseado sobre os resultados do modelo descrito por funções de Lagrange.

#### Estudo descritivo das frequências naturais

A tabela 3.29 apresenta a média, o desvio padrão e a mediana amostral das distribuições de frequências naturais obtidas.

**Tabela 3.29** Estudo descritivo de frequências naturais

	Média	Desvio padrão	Mediana
Frequência 1	2,854E+03	2,569E+02	2,85E+03
Frequência 2	7,006E+03	6,188E+02	6,99E+03
Frequência 3	7,025E+03	6,209E+02	7,01E+03
Frequência 4	1,116E+04	9,721E+02	1,11E+04
Frequência 5	1,348E+04	1,008E+03	1,34E+04
Frequência 6	1,364E+04	1,149E+03	1,36E+04

É de constatar que para todas as frequências naturais, os valores da média coincidem bastante com os valores da mediana. Este resultado reflecte uma simetria das distribuições das frequências naturais. Podemos ainda observar a proximidade de valores médios entre as frequências 2 e 3 e as frequências 5 e 6. Tal proximidade suscita curiosidade da existência de modos simétricos, visto que o compósito em estudo é uma placa compósita simétrica em termos de geometria.

#### Correlação entre Frequências Naturais

A figura 3.29 apresenta as distribuições dos resultados de frequências naturais obtidos através da metodologia do elemento de lagrange. É de constatar uma elevada correlação entre as diferentes frequências. Este fenómeno traduz-se, a nível estatístico, na possibilidade de dependência entre frequências.

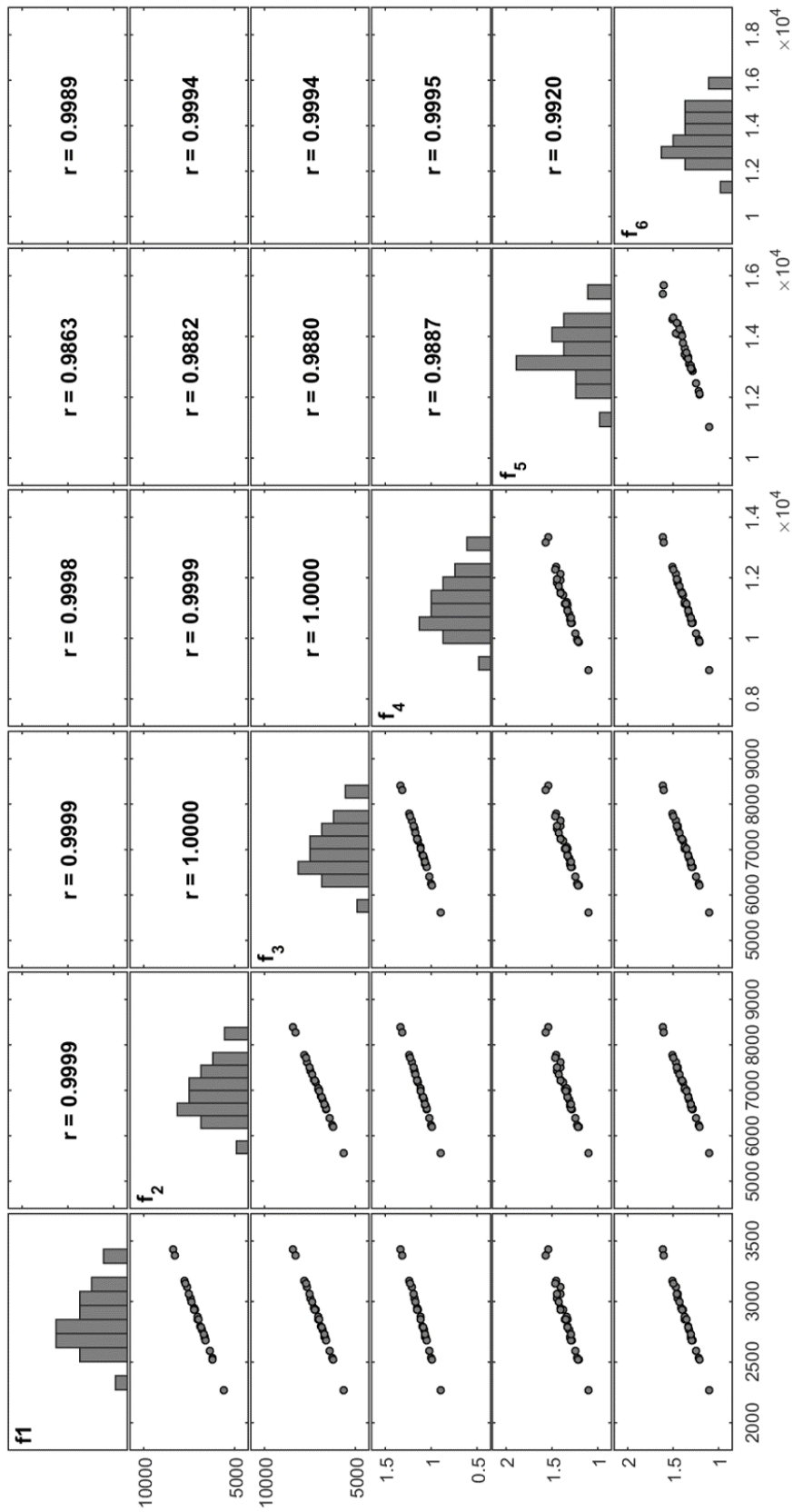


Figura 3.29: Distribuições e correlações entre frequências naturais

De modo a compreender a existência de correlação entre as diferentes frequências naturais, é necessário identificar os respectivos modos de vibração associados a cada uma delas. A figura 3.30 apresenta os modos de vibração associados às respectivas frequências naturais. Estes foram obtidos através das propriedades médias do estudo em causa.

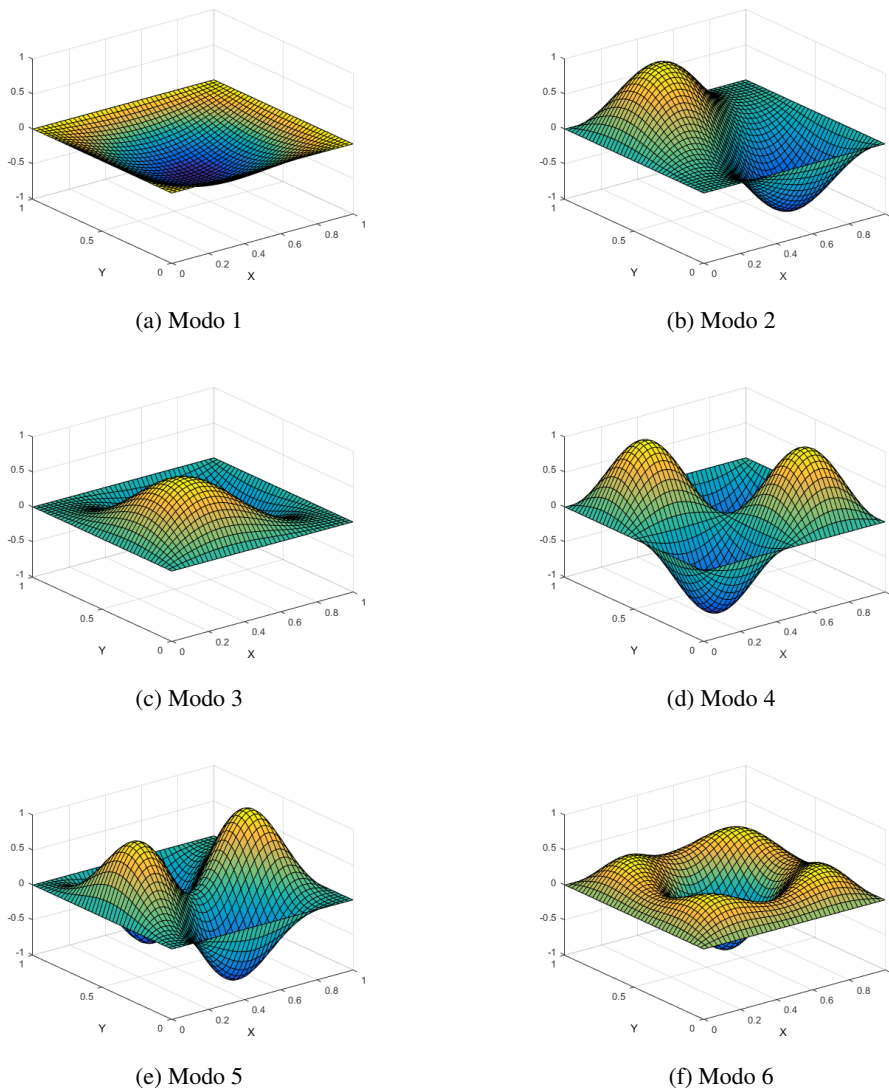


Figura 3.30: Modos de vibração

É de constatar a relação entre os modos de vibração 2 e 3, pois trata-se de modos de vibração simétricos. Estes apresentam frequências naturais correspondentes muito semelhantes, isto porque se trata de uma placa compósita simétrica e que os modos de vibração são idênticos mas dispostos segundo os eixos de forma diferente. O mesmo não podemos dizer acerca das frequências 5 e 6, pois apesar dos valores de frequências serem bastante próximos (tabela 3.29), os modos de vibração correspondentes são diferentes.

### Regressão Linear Múltipla

A regressão linear múltipla pode ser aplicada individualmente a cada frequência natural. Ao contrário do caso anterior, respectivo à deformada transversal máxima, as frequências naturais são dependentes das massas específicas, pois estas dependem também da matriz de massa. Para tal, o modelo de regressão linear múltipla que visa quantificar a frequência fundamental conta com 8 variáveis independentes. Todas as variáveis consideradas anteriormente e ainda as massas específicas  $\rho_c$  e  $\rho_m$ .

$$Y = \beta_0 + \beta_1 E_c + \beta_2 E_m + \beta_3 \nu_c + \beta_4 \nu_m + \beta_5 \rho_c + \beta_6 \rho_m + \beta_7 h + \beta_8 p + \epsilon \quad (3.8)$$

A tabela 3.30 apresenta o resultado do modelo de regressão linear da frequência fundamental.

**Tabela 3.30** Coeficientes do modelo de regressão da frequência fundamental (modelo de Lagrange)

Coefficientes beta	beta0	beta1	beta2	beta3	beta4	beta5	beta6	beta7	beta8
Valor estimado	-5,851e1	1,018e-19	2,776e-9	3,285e2	2,26e2	-4,649e-2	-3,863e-2	3,332e4	-1,409e2
Desvio	5,12e1	2,61e-11	2,83e-10	6,25e1	6,02e1	1,16e-3	6,906e-3	3,45e2	1,73e1
t-test	-1,14	38,979	9,81	5,25	3,75	-40,12	-5,59	96,53	-8,13
p-value	0,266	2e-16	2,71e-9	3,3e-5	0,0012	2e-16	1,5e-5	2e-16	6,42e-8
Análise do modelos	$R^2$	$R^2_{corr}$	<i>estatstica - F</i>	<i>p - value</i>					
	0,9984	0,9979	1688	2,2e-16					

Este modelo apresenta um  $R^2_{corr}$  de 99,74%. Ao contrário do caso da deformada, este modelo apresenta todas variáveis enquanto variáveis significativas.

### Pressupostos de Validação

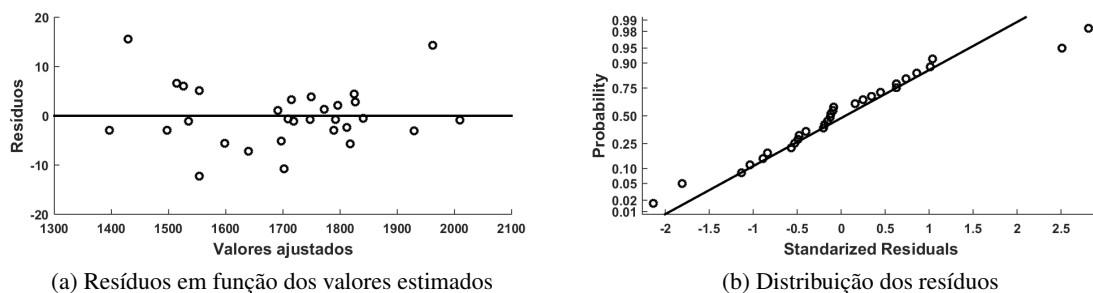


Figura 3.31: Pressupostos de validação do modelo dinâmico

Os pressupostos de validação do modelo apresentado não são validados, pelo que o modelo não deverá ser tido em conta para estimativa de eventuais outros resultados não contabilizados pela amostra.

### Regressão Linear entre Frequências

Já foi apresentado em estudos anteriores a forte correlação existente entre as diversas frequências naturais obtidas pelo modelo de elementos finitos. De modo a quantificar a relação existente entre as diversas frequências, propõe-se neste estudo uma aproximação dos valores das frequências superiores tendo em conta os valores resultantes da frequência fundamental.

A figura 3.29 mostra uma forte correlação entre as diversas frequências. Deste modo, é possível obter uma relação linear entre as mesmas escrevendo cada uma delas dependendo exclusivamente da frequência fundamental.

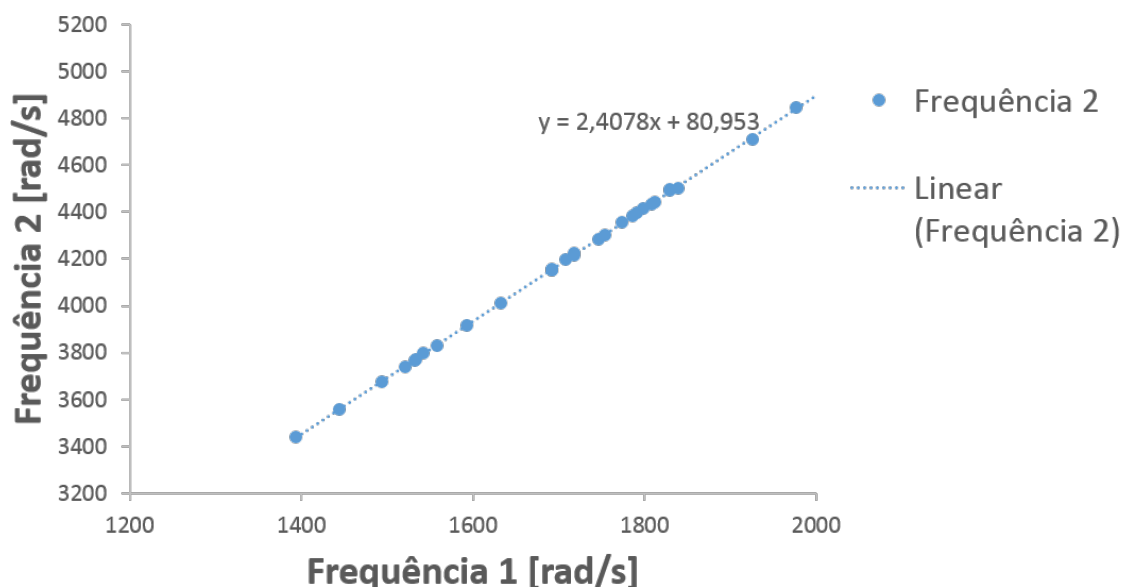


Figura 3.32: Representação da 2ª frequência natural em função da fundamental

A figura 3.32 apresenta uma regressão linear simples entre as duas primeiras frequências naturais. Esta regressão apresenta um forte ajustamento, com  $R^2 = 0,9998$ , aos valores resultantes da resposta do modelo de elementos finitos. A mesma aproximação pode ser obtida para as restantes frequências e apresenta-se as equações de regressão resultantes na tabela 3.31.

**Tabela 3.31** Regressão linear entre as frequências superiores e a fundamental

	Regressão linear	R2	Correlação	p-value (F-test)
<b>Frequência 2</b>	$80,95+2,41 \cdot F1$	0,9998	1	$<2,2e-16$
<b>Frequência 3</b>	$77,27+2,42 \cdot F1$	0,9999	1	$<2,2e-16$
<b>Frequência 4</b>	$208,95+3,79 \cdot F1$	0,9997	1	$<2,2e-16$
<b>Frequência 5</b>	$1356,1+3,937 \cdot F1$	0,9726	1	$<2,2e-16$
<b>Frequência 6</b>	$515,12+4,4827 \cdot F1$	0,9984	1	$<2,2e-16$

A tabela 3.31 apresenta também o valor do coeficiente de determinação correspondente ao modelo de regressão obtido e o coeficiente de correlação resultante entre as duas variáveis. Os valores de p-value apresentados são obtidos através da aplicação do teste de Snedecor (F-test) e permite validar a hipótese nula correspondente à significância do modelo de regressão. As regressões são ilustradas na figura 3.33.

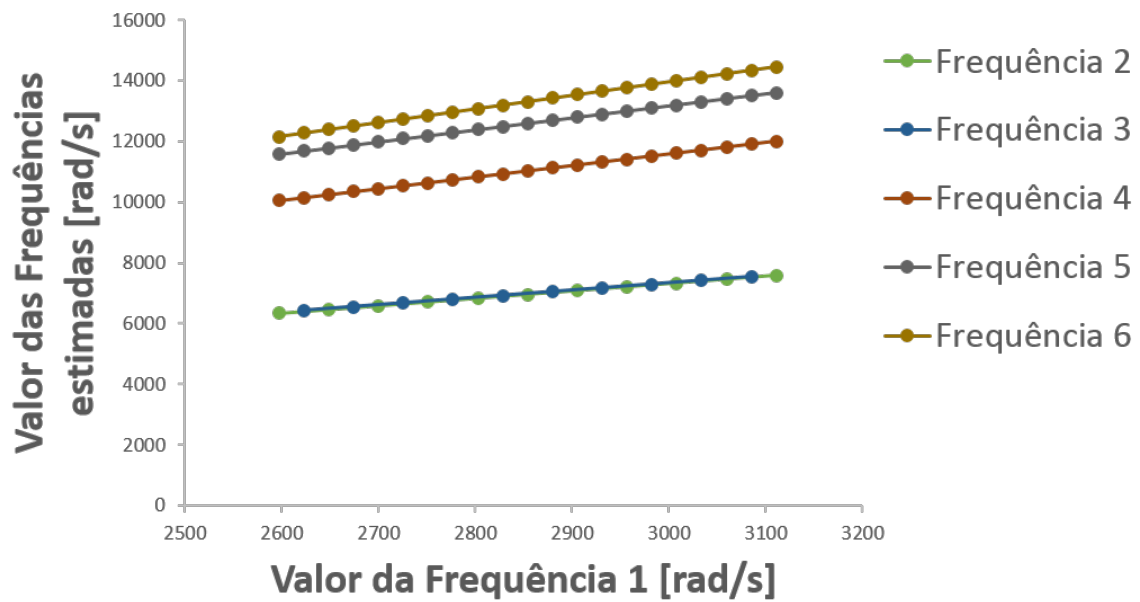


Figura 3.33: Representação das regressões das frequências superior em função da fundamental

É de constatar, pela análise da figura 3.33, a sobreposição das equações de regressão correspondentes à frequência 2 e 3 escritas em função da frequência fundamental. Já foi dito anteriormente que estas são frequências correspondentes a modos de vibração simétricos, pelo que faz todo o sentido a existência desta sobreposição.



## Capítulo 4

# Conclusões e Trabalho Futuro

A utilização da mecânica computacional com vista à modelação de estruturas laminadas revela ser uma abordagem complexa e tem em conta diversas considerações e pressupostos. Este trabalho foca-se na apresentação de diversas metodologias de modelação de materiais compósitos, laminados com reforço de fibras longas ou compósitos de partículas com uma variação espacial gradual (FGM), e na caracterização da resposta dos modelos face à existência de variabilidade intrínseca das propriedades mecânicas e geométricas dos materiais considerados.

Em primeira análise, poder-se-à concluir acerca da convergência das diversas metodologias de elementos finitos implementados, através de funções de interpolação de Kriging e os convencionais elementos de Lagrange. Ambos os elementos convergem para valores idênticos, tomados como referência de algumas bibliografias existentes. Esta conclusão é baseada em estudos estáticos e dinâmicos com vista a comparar as deformadas transversais máximas e frequências naturais dos diversos modelos implementados. Estes modelos foram comparados com vista a determinar a eficiência da sua implementação, tendo em consideração o tempo de processamento e o número de elementos necessários para caracterizar a resposta do modelo. Para além do número de nós considerados, este estudo visa também comparar os elementos utilizados em termos de grau polinomial das funções que interpolam os nós dos elementos. Dos estudos efectuados, pode concluir-se que os elementos que consideram funções de interpolação de ordem superior apresentam uma convergência de resultados para um menor número de elementos que para o caso de elementos de ordem inferior. Em termos de comparação dos elementos de Kriging, poder-se-à concluir que considerando um mesmo número de nós por elemento, a utilização de bases polinomiais de ordem superior tem todo o interesse pois permitem boas características de convergência para um menor número de elementos considerados. Em termos de processamento, os elementos descritos por funções de Kriging necessitam de recursos computacionais mais exigentes para a sua implementação.

Relativamente aos FGM, podem encontrar-se abordagens que consideram a variação das suas propriedades no espaço de forma contínua, enquanto outras utilizam uma abordagem discretizada, isto é, em camadas com propriedades que se assumem constantes. Este trabalho apresenta um estudo comparativo das abordagens discreta e contínua e conclui que a primeira abordagem leva a um erro de aproximação tanto maior quanto maior for o expoente da função de distribuição, associado à lei de potência considerada, ou seja, a distribuições mais abruptas correspondem erros de aproximação maiores, considerando a utilização do mesmo número de camadas.

A gradação espacial de partículas do tipo de laminados FGM pode ser caracterizada por diversas funções de aproximação à distribuição presente no mesmo. Este trabalho apresenta um estudo que visa aproximar o comportamento de um compósito FGM, caracterizado por uma distribuição descrita

pela lei de potência a um laminado de núcleo FGM cuja a sua distribuição é definida pela lei exponencial. Numa primeira análise consideram-se que os dois compósitos possuem uma igual rigidez de flexão. Conclui-se acerca deste estudo que o desvio entre ambas as metodologias é crescente quando a espessura do núcleo FGM é superior. O desvio será também proporcional à diferença de rigidez entre os dois materiais que constituem o laminado, sendo o desvio tanto maior quanto maior a razão entre a rigidez dos constituintes. Na mesma perspectiva de estudo, as diferentes distribuições originam diferentes resultados em termos dinâmicos. Neste caso, a aproximação é obtida não só pela igualdade de rigidez de flexão como também pela igualdade do segundo momento de massa, obtendo desse modo dois estudos distintos. As conclusões retiradas acerca do estudo dinâmico não são tão claras, pois existe um maior número de variáveis visto ser necessário considerar as massas específicas de cada material. A escolha dos constituintes do laminado tem um papel mais importante para o caso do estudo dinâmico, porém, poder-se-à concluir que, de um modo geral, a espessura do núcleo FGM origina um aumento do erro de aproximação entre as duas distribuições.

Na perspectiva de caracterizar o efeito da variabilidade intrínseca das propriedades mecânicas e geométricas dos constituintes de um compósito FGM, conclui-se que existe um efeito de acumulação de variabilidade nas propriedades efectivas que caracterizam o modelo da placa compósita. A obtenção da resposta do modelo de elementos finitos foi realizada tendo em consideração a utilização de elementos com funções de interpolação de Kriging e os respectivos elementos de Lagrange, originando uma amostra correspondente a cada uma das metodologias aplicadas. Sustentado por evidência estatística e em concordância com os restantes estudos realizados ao longo deste trabalho, não existem evidências para rejeitar a hipótese de que ambas as metodologias de modelação originam resultados idênticos. De modo a quantificar a significância de cada variável de entrada sobre a variabilidade de saída do modelo, é apresentado um estudo baseado na metodologia estatística da regressão linear múltipla. Como resultado deste estudo, obteve-se um modelo probabilístico, baseado em pressupostos validados, que visa estimar valores de saída do modelo tendo por base os valores das propriedades mecânicas e geométricas do compósito em causa. Ao caracterizar a variabilidade de saída existente, conclui-se, neste caso, que a variabilidade presente nas propriedades geométricas, associadas geralmente a tolerâncias geométricas ou ao processo de fabrico do compósito, permite explicar cerca de 90% da variabilidade presente na resposta estática do modelo. A variabilidade correspondente aos 10% não contabilizados pelo modelo, são justificados em 99% pelas restantes variáveis de entrada, resultando de um modo geral em apenas 0,1% de variabilidade total não justificada. O conhecimento das interações entre as variáveis de entrada e de saída de um modelo permite reduzir a necessidade de recursos computacionais nos diversos campos da optimização de modelos, tal como é o caso das técnicas de actualização ou aperfeiçoamento de modelos (*model updating*). O conhecimento de quais as variáveis de entrada mais significativas permitiu, neste caso, reduzir o número de variáveis consideradas inicialmente, de 6 para apenas 2, mantendo uma significância do modelo de cerca de 90%.

Em termos de análise dinâmica, poder-se-à aplicar a mesma metodologia de modo a permitir estimar valores de frequências naturais dependendo dos valores das diferentes variáveis de entrada. O estudo dinâmico apresentado foca-se principalmente na caracterização da relação existente entre as diversas frequências naturais. Conclui-se que existe uma forte correlação entre as primeiras seis frequências naturais. A estimativa das frequências superiores pode ser obtida por uma regressão linear simples dependendo exclusivamente do resultado da frequência fundamental.

Na perspectiva de trabalho futuro, pretende-se explorar melhor a existência de relação entre as diferentes frequências naturais. O conhecimento da interação da variabilidade entre as diversas variáveis que afectam o modelo permitirá a construção de relações probabilísticas entre diferentes variáveis de saídas e diferentes variáveis de entrada. Ao identificar a origem da variabilidade da resposta

do modelo e aplicando esse conhecimento juntamente com técnicas de aperfeiçoamento, será possível otimizar recursos computacionais de modo a obter uma melhor aproximação do modelo. A obtenção de um modelo probabilístico, descrito por um elevado coeficiente de ajustamento, permite identificar as variáveis mais significativas na resposta do modelo. Permite ainda estimar o efeito de alterações das variáveis de entrada sobre as variáveis de saída a um custo computacional reduzido.



# Bibliografia

Aeronáutica, C.:2015, MATERIAIS COMPÓSITOS NA AVIAÇÃO.

**URL:** <http://www.aviacao.org/article/materiais-compositos/> (Visitado em 20/08/2015) (cit. in pp. 4, 5)

Airbus: 2005, A380 introduces new features.

**URL:** <http://www.airbus.com/newsevents/news-events-single/detail/a380-introduces-new-features-2/> (Visitado em 20/08/2015) (cit. in p. 5)

António Carvalho Pedrosa, S. M. A. G.: 2004, *INTRODUÇÃO COMPUTACIONAL À PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA*. (cit. in pp. 37, 39)

Azevedo Álvaro F. M.: 2003, Quadratura de Gauss, *Método dos elementos finitos*, chapter 5, pp. 73–82. (cit. in pp. xvii, 33)

Bernardo, G. M. S. and Loja, M. A. R.: 2015, Static and Free Vibrations Analysis of Particulate Composite Plates using Radial Basis Functions, *Symcomp*, Faro, pp. 89–117. (cit. in p. 14)

Bhandari, M. and Purohit, K.: 2014, Analysis of Functionally Graded Material Plate under Transverse Load for Various Boundary Conditions, *Journal of Mechanical and Civil Engineering* **10**(5), 46–55. (cit. in p. 8)

Bhar, a., Phoenix, S. S. and Satsangi, S. K.: 2010, Finite element analysis of laminated composite stiffened plates using FSDT and HSDT: A comparative perspective, *Composite Structures* **92**(2), 312–321. (cit. in p. 9)

Bouchafa, A., Benzair, A., Tounsi, A., Draiche, K., Mechab, I. and Adda Bedia, E. A.: 2010, Analytical modelling of thermal residual stresses in exponential functionally graded material system, *Materials and Design* **31**(1), 560–563. (cit. in pp. 8, 13)

Caetano, M.: 2014, Importância relativa dos materiais.

**URL:** [http://ctborracha.com/?page\\_id=442](http://ctborracha.com/?page_id=442) (Visitado em 18/09/2015) (cit. in pp. xv, 6)

Campbell, F.: 2010, *Structural Composite Materials*. ASM International.

**URL:** <http://app.knovel.com/hotlink/toc/id:kpSCM00001/structural-composite> (Visitado em 03/09/2015) (cit. in p. 8)

Davies, J. M.: 1998, *Lightweight sandwich construction*. (cit. in p. 9)

Devore, J. L.: 2011, *Probability and Statistics for Engineering and the Sciences*, Cengage Learning. (cit. in pp. xv, 36)

- Ferreira, A.: 2010, *Problemas De Elementos Finitos Em MatLab*. (cit. in pp. xix, 24, 25, 28, 30)
- Ferreira, a. J. M., Batra, R. C., Roque, C. M. C., Qian, L. F. and Jorge, R. M. N.: 2006, Natural frequencies of functionally graded plates by a meshless method, *Composite Structures* **75**, 593–600. (cit. in p. 13)
- Ferreira, a. J. M., Batra, R. C., Roque, C. M. C., Qian, L. F. and Martins, P. a. L. S.: 2005, Static analysis of functionally graded plates using third-order shear deformation theory and a meshless method, *Composite Structures* **69**, 449–457. (cit. in pp. 8, 12, 13)
- Force, U. A.: 2012, F-117A Nighthawk.  
**URL:** <https://archive.is/20120629101020/http://www.af.mil/information/heritage/aircraft.asp> (Visitado em 06/10/2015) (cit. in p. 4)
- Ford, R. G., Miyamoto, Y., Kaysser, W. a., Rabin, B. H. and Kawasaki, a.: 1999, *Functionally graded materials: design, processing and applications*. (cit. in p. 11)
- François M. Hemez, T. B. T.: 2004, Verification and validation of a composite model, *Energy* **836**. (cit. in pp. 9, 69)
- Garshasbinia, N. and Jam, J. E.: 2005, Identification of Mechanical Properties in Laminated Composite Plates Using Genetic Algorithm, **14**(1), 39–46. (cit. in p. 9)
- Iman, R. L. and Conover, W. J.: 1982, A distribution-free approach to inducing rank correlation among input variables. (cit. in pp. 34, 69)
- J.N.Reddy: 1997, *Mechanics of Laminated Composite Plates and Sheels*. (cit. in pp. xv, 8, 15, 16, 17, 18, 19)
- J.N.Reddy: 2000, Analysis of functionally graded plates, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **47**, 663–684. (cit. in p. 8)
- Krige, D. G.: 1952, A Statistical Approach to Some Basic Mine Valuation Problems on the Witwatersrand, *Journal of the Chemical, Metallurgical and Mining Society of South Africa* pp. 201–215. (cit. in p. 30)
- Kutner, M. H., Nachtsheim, C. J., Neter, J. and Li, W.: 2010, *Applied Linear Statistical Models Fifth Edition*. (cit. in pp. 38, 39)
- Lee, W.-H., Han, S.-C. and Park, W.-T.: 2015, A refined higher order shear and normal deformation theory for E-, P-, and S-FGM plates on Pasternak elastic foundation, *Composite Structures* **122**, 330–342. (cit. in p. 8)
- Loc V. Tran, A.J.M Ferreira, H. N.-X.: 2013, Isogeometric analysis of functionally graded plates using higher-order shear deformation theory, *Elsevier* **B**. (cit. in pp. 8, 44, 46)
- Loja, M. A. R., Barbosa, J. I. and Soares, C. M. M.: 2015, Analysis of sandwich beam structures using kriging based higher order models, *COMPOSITE STRUCTURE* **119**, 99–106. (cit. in pp. 9, 30, 31)
- M. Yamanouchi, T. Hirai, I. S.: 1990, Overall view of the P/M fabrication of functionally graded materials, *First International Symposium on FGMs*, Sendai, Japan, pp. 59–64. (cit. in p. 8)

- Maletta, C. and Pagnotta, L.: 2004, On the determination of mechanical properties of composite laminates using genetic algorithms, *International Journal of Mechanics and Materials in Design* **1**(2), 199–211. (cit. in p. 9)
- Matsunaga, H.: 2008, Free vibration and stability of functionally graded plates according to a 2-D higher-order deformation theory, *Composite Structures* **82**(4), 499–512. (cit. in pp. 8, 12)
- Mirabel C. Rezende, E. C. B.: 2000, O Uso de Compósitos Estruturais na Indústria Aeroespacial.  
**URL:** [http://www.scielo.br/scielo.php?pid=S0104-14282000000200003&script=sci\\_arttext](http://www.scielo.br/scielo.php?pid=S0104-14282000000200003&script=sci_arttext) (Visitado em 08/10/2015) (cit. in p. 4)
- Miyamoto, Y.: 1999, FUNCTIONALLY GRADED MATERIALS: Design Processing and Applications.  
**URL:** <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780857092700500171> (Visitado em 12/10/2015) (cit. in pp. 13, 14)
- Montgomery, D. C.: 2003, *Applied Statistics and Probability for Engineers Third Edition*, Vol. 37.  
**URL:** <http://www.jstor.org/stable/1269738?origin=crossref> (Visitado em 04/09/2015) (cit. in pp. xv, 34, 39, 40, 78)
- Mori, T. and Tanaka, K.: 1973, Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions, *Acta Metallurgica* **21**(5), 571–574.  
**URL:** <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0001616073900643> (Visitado em 04/09/2015) (cit. in p. 14)
- Mota Soares, C. and Freitas, M. J.: 2000, Mechanics of composite materials and structures, *Computers & Structures* **76**(1-3), iii. (cit. in pp. xv, 3, 16, 17, 19)
- Nguyen, T.-K., Sab, K. and Bonnet, G.: 2007, Shear Correction Factors for Functionally Graded Plates, *Mechanics of Advanced Materials and Structures* **14**(8), 567–575. (cit. in pp. xvii, 8, 13, 44, 45)
- Potter, K. D.: 2009, Understanding the origins of defects and variability in composites manufacture, *17 th International Conference on Composite Materials* pp. 27–31. (cit. in p. 10)
- Ragauskas, P. and Belevičius, R.: 2009, Identification of material properties of composite materials, *Aviation* **13**(4), 109–115. (cit. in p. 9)
- Reddy, J. N.: 1994, *Mechanics of Composite Materials*, Springer-Science. (cit. in pp. 2, 4)
- Reuss, A.: 1929, ZAMM, pp. 9–49. (cit. in p. 13)
- Smith, H. and Draper, N. R.: 1998, *Applied Regression Analysis*, 3rd Edition.  
**URL:** <http://www.amazon.co.uk/Applied-Regression-Analysis-Probability-Statistics/dp/0471170828> (Visitado em 02/09/2015) (cit. in p. 37)
- Thai, H.-T. and Choi, D.-H.: 2013, A simple first-order shear deformation theory for laminated composite plates, *Composite Structures* **106**, 754–763. (cit. in p. 9)
- Up, G.: 2012, Boeing 787 From Ground Up, pp. 4–5. (cit. in pp. xv, 5)

Voigt, W.: 1889, Ueber die Beziehung zwischen den beiden Elasticitätsconstanten isotroper Körper, *Annalen der Physik* **274**(12), 573–587. (cit. in p. 13)

Wessel, J. K.: 2004, *Handbook of Advanced Materials*.

**URL:** <http://doi.wiley.com/10.1002/0471465186> (cit. in pp. xv, 11, 48)

Zhu, P. and Liew, K.: 2011, Free vibration analysis of moderately thick functionally graded plates by local Kriging meshless method, *Composite Structures* **93**(11), 2925–2944. (cit. in p. 12)