A DIVERSIDADE DE RESOLUÇÕES E AS DISCUSSÕES COLETIVAS COMO PROMOTORAS DO DESENVOLVIMENTO DA ESTRUTURAÇÃO ESPACIAL, NO 1.º ANO DE ESCOLARIDADE

Joana Conceição
conceicaoj@campus.ul.pt
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

Margarida Rodrigues
margaridar@eselx.ipl.pt
CIED, Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa & UIDEF,
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

https://doi.org/10.34629/ipl.eselx.cap.livros.091

Introdução

Ao longo das últimas décadas, sobretudo desde a massificação do ensino, que o currículo de matemática e a forma como é ensinado têm vindo a ser alvo de constantes reflexões e consequentes reformulações no que respeita a práticas de ensino, conteúdos e competências a desenvolver nos alunos. A área da matemática constitui uma importante porta de acesso a muitas profissões, sobretudo na área das STEM (Sciences, Technology, Engineering, Mathematics), sendo este grupo constituído por muitas profissões com maior prestígio económico e social.

Como é do conhecimento comum, a matemática tem sido uma área em que os alunos apresentam uma taxa de insucesso elevada, embora, nos últimos anos, de acordo com o NCTM (2017), tenham sido feitos muitos progressos. Contudo, há ainda um caminho a percorrer para tornar a aprendizagem da matemática uma realidade para todos os alunos (NCTM, 2017), nomeadamente, e não obstante a importância da geometria, nos primeiros anos, este parece ser um domínio dentro da matemática onde ainda há bastante trabalho a fazer. Para além da importância da geometria em si, alguns autores referem o papel que a própria geometria tem no acesso ao conhecimento matemático noutros domínios, através do contributo das capacidades de visualização espacial e do raciocínio espacial (Mamolo, Rutenberg-Rozen & Whiteley, 2015). Isto é, muitas representações matemáticas, pela sua natureza espacial, requerem um domínio de competências associadas à visualização e ao raciocínio espacial, como é o caso da organização numérica, de gráficos ou de diagramas. Associada ao raciocínio espacial está também a estruturação espacial enquanto forma de abstração mental que permite representar de maneira organizada a estrutura de um objeto. Bruce e Hawes (2015) referem que, para além de constituir uma forma de acesso ao conhecimento matemático, o desenvolvimento do raciocínio espacial constitui um preditor de sucesso em matemática, em anos mais avançados, e está associado a carreiras na área das STEM.

A visualização e o raciocínio espacial constituem formas de entrada no conhecimento matemático, em especial, no que respeita à geometria, já que os alunos, quando chegam à escola, trazem já algumas competências desenvolvidas, nesse âmbito, e que merecem continuar a ser estimuladas (Mamolo, Rutenberg-Rozen & Whiteley, 2015). Goldenberg, Cuoco e Mark (1998) acentuam também a importância das abordagens baseadas na visualização, com recurso a mediadores visuais (Sfard, 2008), por constituírem formas alternativas de acesso à Matemática quando a linguagem simbólica ainda é um obstáculo (Goldenberg et al., 1998). No caso da geometria, o reconhecimento e a valorização da linguagem informal dos alunos, seja através de gestos, desenhos, ou com recurso a materiais concretos, permite aos professores irem ao encontro das ideias dos alunos, sem, no entanto, deixarem de reconhecer a sua complexidade (Radford & Barwell, 2016). Esta valorização permite aos professores ter acesso às ideias dos alunos e serve como ponto de partida para a construção de um maior entendimento conceptual (Radford & Barwell, 2016), ao mesmo tempo que permite que todos os alunos participem na aula de matemática.

Tendo como princípio assegurar o acesso e a equidade dos alunos na aprendizagem da matemática, o NCTM (2017) reconhece a importância de promover o envolvimento dos alunos na sua própria aprendizagem, assim como de os intervenientes no processo educativo reconhecerem as contribuições dos alunos, na sua diversidade. Para que isto seja possível, é fundamental que o professor promova um ambiente de sala de aula que estimule o sentido de comunidade, permitindo que os alunos expressem as suas ideias matemáticas ainda que de uma forma muito pessoal.

Para além da importância do desenvolvimento do raciocínio espacial, nos primeiros anos, importa ter em conta determinados aspetos pedagógicos que possam contribuir para esta aprendizagem e que garantam a inclusão de alunos com diferentes níveis de conhecimentos. Desta forma, procuramos compreender que princípios devem guiar uma experiência de ensino incidente na estruturação espacial que promova a participação de todos os alunos, independentemente do seu nível, de forma a garantir o seu acesso ao conhecimento matemático. Como é que a presença de diferentes resoluções, na sala de aula, pode contribuir para a aprendizagem dos alunos? Que princípios pedagógicos permitem a integração de alunos que apresentam diferentes níveis de estruturação espacial?

Enquadramento Teórico

Raciocínio espacial e estruturação espacial

O raciocínio espacial tem vindo a ganhar relevo na investigação internacional que, por sua vez, vem mostrar a importância deste tipo de raciocínio na aprendizagem da matemática. Battista (2007) define raciocínio espacial como a "capacidade de 'ver', examinar e refletir sobre objetos espaciais, imagens, relações e transformações, envolvendo gerar e analisar imagens, transformar e operar com imagens, e colocá-las ao serviço de outras representações mentais" (p. 843). Nesta definição, estão presentes aspetos importantes como capacidades que devem ser desenvolvidas nos alunos: a análise de objetos espaciais, comportando uma dimensão reflexiva que permite aprofundar a compreensão acerca de um objeto e daí gerar nova informação; e a manipulação que envolve a transformação das imagens mentais com vista a uma maior compreensão das propriedades que se alteram e das que se mantêm invariáveis. Também Mulligan (2015) entende o raciocínio espacial como a capacidade para "reconhecer e manipular (mentalmente) as propriedades espaciais dos objetos e as relações espaciais entre objetos" (p. 513). Na mesma linha, Gutiérrez (1996), assumindo a visualização como uma forma de raciocínio por si, parece apresentar uma definição de visualização próxima das de raciocínio espacial já apresentadas. Esta definição de Gutiérrez inclui quatro elementos: imagens mentais, representações externas, processos de visualização e capacidades de visualização. As definições enunciadas focam-se sobretudo em processos de análise e manipulação de figuras, mas um terceiro processo, a construção (van den Heuvel-Panhuizen & Buys, 2005), pode ser igualmente importante para compreender a estrutura dos objetos e as propriedades que lhes são inerentes. Importa ainda referir, que nos primeiros anos, a natureza mental do raciocínio espacial precisa ainda de uma base concreta, como é o caso da utilização de materiais manipuláveis. É através do processo de estruturação espacial que as relações presentes nos objetos vão sendo progressivamente abstraídas, em modelos mentais.

Desta forma, o ato de estruturar espacialmente um objeto constitui uma forma de abstração que permite representar mentalmente uma forma de organização para um objeto ou para um conjunto de objetos com base em relações entre componentes, compostos e o todo (Battista & Clements, 1996). A estruturação espacial consiste, assim, em identificar componentes, estabelecer relações entre componentes em compostos e estabelecer relações entre componentes, compostos e o todo. Quando os alunos reconhecem os componentes e os relacionam ou não entre si sem ainda os relacionarem com o todo, estamos perante uma estruturação local. Quando os alunos já são capazes de estabelecer relações entre os componentes, formando compostos, e relacionar esses componentes e compostos com o todo, trata-se então de uma estruturação global. A estruturação global está dependente das operações de coordenação e de integração. A coordenação permite combinar componentes e compostos entre si, relacionando-os com o todo. A integração corresponde ao ato de fazer corresponder um modelo mental previamente existente à estrutura de um objeto. A integração está dependente da coordenação.

Tarefas

Para além dos aspetos de conteúdo relativos à estruturação espacial e ao raciocínio espacial, para o seu desenvolvimento é preciso ter em conta aspetos de caráter pedagógico, nomeadamente o tipo de tarefas e o tipo de comunicação a valorizar na sala de aula.

Stein e Smith (1998) propõem que as tarefas partam dos conhecimentos dos alunos ao mesmo tempo que lhes é dado o suporte necessário para que consigam evoluir, incluindo serem eles próprios a monitorizar o seu próprio desempenho. Relativamente às tarefas em geometria, Loureiro (2012) salienta a importância destas tarefas oferecerem oportunidades para os alunos manipularem os objetos geométricos de modo a construírem representações mentais com base em relações espaciais com sentido. Para isso, devem ser tarefas que levem os alunos a percecionar e estabelecer relações e a usá-las como base para raciocinar sobre os objetos. Para além da manipulação referida por Loureiro (2012), van den Heuvel- Panhuizen e Buys (2005) propõem, para os primeiros anos, tarefas incidentes em construções. Ao construírem, os alunos estarão também a estabelecer relações importantes para a compreensão da estrutura dos objetos.

Para além disto, tarefas que permitam diferentes formas de resolução não só contribuem para o desenvolvimento da criatividade dos alunos como também para que cada aluno possa participar. Leikin (2009) propõe o conceito de *espaços de solução*[1] que se constituem como os diferentes tipos de resolução que uma determinada tarefa pode oferecer. Por exemplo, dentro dos espaços de solução convencionais, estão muitas vezes as resoluções que são valorizadas e ensinadas na escola. Já os espaços de solução não convencionais remetem para tipos de resolução fora desse âmbito. Leikin (2009) distingue ainda os espaços de solução individuais de espaços de solução coletivos. O primeiro caso refere-se ao conjunto de resoluções que um mesmo aluno é capaz de fazer, o que pode ser feito de forma autónoma (resoluções disponíveis) ou com a ajuda de outros (resoluções potenciais). Relativamente aos espaços de solução coletivos, estes constituem o grupo de resoluções produzidas por um determinado grupo e normalmente é mais abrangente do que o conjunto de soluções individuais. É nos espaços de solução coletivos que os alunos têm uma maior possibilidade de desenvolver os seus espaços de solução individuais.

Comunicação

A natureza das tarefas é um aspeto importante na aprendizagem da matemática, mas a comunicação matemática enquanto capacidade transversal, constitui-se como um elemento potenciador dessa aprendizagem.

Radford e Barwell (2016) referem a importância de valorizar a linguagem natural dos alunos como forma de acesso às conceções dos alunos e como meio para a entrada dos alunos na linguagem matemática. Esta valorização surge, assim, como forma de participação, constituindo contributos importantes para a construção do conhecimento partilhado. Para isso, é preciso contemplar diferentes formas de comunicação que não apenas o matemático formal. Isto quer dizer que o recurso a mediadores da atividade discursiva (Sfard, 2008), ou seja, o recurso a diferentes formas de representação que permitam exprimir,

1 Solution spaces, no original.

ainda que de uma forma inicialmente mais visual, a estrutura de objetos geométricos pode servir como oportunidade para que os alunos possam participar. Entre essas diferentes representações podem estar os materiais manipuláveis, os desenhos, os gestos, apoiando os alunos que não dominam conceitos formais para que possam expressar as suas ideias com base nestas representações, (Goldenberg et al.,1998). Isto é fundamental, sobretudo, nos primeiros anos, quando os alunos ainda não estão familiarizados com os conceitos formais. A sala de aula pode então constituir-se como uma comunidade de aprendizagem (Lave, 1991), enquanto meio de construção social do conhecimento. Aqui cada individuo, professor e alunos, desempenha o papel de membro com participação efetiva, contribuindo com o seu conhecimento individual, para que a aprendizagem matemática ocorra. Neste processo social, onde vão sendo discutidos e negociados significados matemáticos individuais, vai sendo também exigida uma comunicação cada vez mais precisa e uma progressiva utilização dos símbolos matemáticos (NCTM, 2007), que contribui para a construção de um conhecimento que é coletivo e que contribui para o aprofundamento do conhecimento matemático.

Para além da comunicação constituir um meio de participação e de construção do conhecimento matemático socialmente partilhado, van den Heuvel-Panhuizen e Buys (2005) atribuem ainda à comunicação uma função reflexiva:

> "estar familiarizado com a linguagem geométrica implica mais do que o uso de certos termos. Também tem uma função importante no desenvolvimento de capacidades de visualização espacial. Ao expressar alguma ideia em palavras, é possível ver mais. A comunicação sustenta a observação e leva a que os alunos desenvolvam uma melhor imagem dos objetos" (p. 168).

Parece, assim, que a interação entre o que se vê e o que se diz acerca do que se vê promove a reflexão donde emerge a aprendizagem. Desta forma, ao comunicarem aos colegas as relações que estabelecem para um determinado objeto, os alunos têm um novo olhar que lhes permite aprofundar o seu conhecimento.

Metodologia

O estudo que aqui apresentamos segue a modalidade de investigação baseada em design (Gravemeijer & Cobb, 2013), inserindo-se num estudo mais amplo, no âmbito de uma tese de doutoramento. Neste estudo, procuramos relacionar os processos de aprendizagem de estruturação espacial associados ao raciocínio espacial com os meios pedagógicos que suportam essa aprendizagem (Prediger, Gravemeijer & Confrey, 2015). Na mesma linha do referido por Collins, Joseph e Bielaczyc (2004), entendemos por meios pedagógicos os aspetos críticos que influenciam de forma clara a aprendizagem e neles incluímos os materiais, as tarefas e os princípios pedagógicos que guiam a prática letiva. A presente experiência de ensino encontra-se estruturada em três sequências de tarefas, num total de vinte tarefas, sendo a tarefa aqui discutida a quinta a ser implementada. Para o desenho desta experiência de ensino, optámos por uma estrutura de aula associada ao ensino exploratório, organizada em três momentos: apresentação da tarefa, trabalho autónomo e discussão coletiva final. Esta estrutura de aula permite que os alunos tenham oportunidade de resolver a tarefa por si ou a pares, usando os seus conhecimentos, e depois discutir a sua forma de resolução com os colegas.

A experiência de ensino foi implementada numa turma do 1.º ano do ensino básico, de uma escola da área metropolitana de Lisboa, com 24 alunos, com idades entre os 6 e os 7 anos. Desta turma, foi selecionado o trabalho de três alunos, para uma análise mais aprofundada, , Gil, Dalila e Maria (nomes fictícios), com o critério de serem alunos que habitualmente verbalizam os seus raciocínios. O trabalho destes alunos foi registado em áudio e vídeo, durante o trabalho autónomo. Foram também videogravados outros alunos que intervieram durante a discussão coletiva final, cujo trabalho aqui também analisamos, Matilde, Bruno e Luísa. Ainda como instrumento de recolha de dados, foram recolhidos, copiados e analisados os registos escritos destes alunos, que são também objeto de análise, neste texto.

Na análise de dados, focamo-nos nos momentos de trabalho autónomo e de discussão coletiva e nos registos dos alunos por evidenciarem tipos de relações diferentes estabelecidas pelos alunos e tipos de representações diferentes. O quadro de análise (Quadro 1) foca-se na estruturação espacial, entendida como processo fundamental no raciocínio espacial. Para a construção deste quadro, recorremos à proposta de Battista e Clements (1996), entendendo a identificação de unidades, estabelecimento de relações em compostos e estabelecimento de relações entre unidades, compostos e o todo como subníveis de progressão associados à estruturação local ou à estruturação global. Para um melhor entendimento dos processos associados a estes subníveis, incluímos aspetos emergentes da própria análise dos dados.

Níveis	Subníveis	Indicadores/estratégias
Apreensão global	E0- Reconhecer pelo aspeto global	Considerar congruentes construções ou representações diferentes que apresentam um aspeto global semelhante.
Estruturação local	E1- Reconhecer componentes	Reconhecer componentes, mas sem estabelecimento de relações entre esses componentes.
		Construir utilizando componentes.
	E2- Estabelecer relações entre componentes	Descrever semelhanças entre partes da mesma figura ou entre figuras.
		Manter um composto e manipular apenas algumas partes da construção, por tentativa e erro.
		Manter um composto e manipular apenas algumas partes da construção, por antecipação.
	E3- Estabelecer relações entre compostos	Utilizar os movimentos de deslizar, rodar, e inverter com recurso a materiais manipuláveis para estabelecer relações entre compostos.
		Construir, coordenando diversos compostos, em supercompostos (compostos de compostos).
Estruturação global	E4- Estabelecer relações entre componentes, compostos e o todo por coordenação	Coordenar a posição e orientação de compostos e supercompostos para formar o todo.
	E5- Estabelecer relações entre componentes, compostos e o todo por integração	Rodar e refletir mentalmente construções. Construir por antecipação. Transformar uma construção noutra, por processos de decomposição e recomposição.

Quadro 1. - Quadro de análise para os níveis de estruturação espacial.

Os dados analisados foram recolhidos durante a implementação da quinta tarefa (anexo 1) da primeira sequência de tarefas. Nesta tarefa, foi proposto aos alunos que construíssem um paralelepípedo a partir de um modelo 3D (Anexo 2), utilizando quatro tricubos congruentes (Figura 1), formando um ângulo reto, feito com cubos de encaixe.

Figura 1.- Tricubo utilizado como unidade composta de construção

Para além deste modelo ser passível de ser construído de diferentes formas, foram ainda considerados outros paralelepípedos diferentes do modelo

Resultados

Nesta secção, apresentamos os resultados tendo em conta os processos de estruturação espacial, a diversidade de resoluções e a diversidade de resoluções apresentadas pelo mesmo aluno. Recorremos aos registos escritos dos alunos e, em alguns casos, aos diálogos que ocorreram, durante os momentos de discussão coletiva.

Começamos por apresentar o registo da construção de Matilde (Figura 2). Neste registo, podemos ver o desenho de seis quadrados: um verde, um roxo por baixo do verde, dois pretos e dois vermelhos por baixo dos pretos, tal como mostra a imagem da construção (Figura 2)

Figura 2. - Construção e registo de Matilde (Conceição & Rodrigues, 2020)

Matilde explica, no seuinte excerto (Conceição & Rodrigues, 2020), durante a discussão coletiva, como desenhou a sua construção:

> Matilde- Este ("quadrado" vermelho em baixo à direita, no registo) é como se fosse também o detrás (aponta para o cubo vermelho atrás, na imagem da construção projetada no quadro).
> (...)
> Professora- Por que é que só desenhaste seis quadradinhos?
> Matilde- Por causa que [sic] não se vê estes debaixo.
> Professora- Quais é que não se veem?
> Matilde- Os debaixo.. E atrás.
> (...)
> Professora – Ela só conseguiu ver esta parte da frente. Não conseguiu ver os de trás. Então o que é que ela desenhou? Ela só desenhou esta camada aqui da frente.

A professora chama a atenção para a vista que a aluna desenhou, procurando levar os alunos a estabelecer uma relação entre a construção e o registo. No entanto, a professora não deixa de refletir com os alunos sobre o facto de este desenho não permitir fazer o processo inverso: construir a mesma figura a partir da informação nele expressa.

Neste processo, Matilde, ao mesmo tempo que descreve o seu registo, parece ir estabelecendo relações entre o registo e a construção, aprofundando essas relações.

Durante a sua explicação, Matilde parece focar-se mais na forma como desenhou e não tanto como construiu, embora tenha sido capaz de montar o paralelepípedo. Apesar de não termos acesso à forma como Matilde construiu o seu paralelepípedo, a descrição que faz do seu registo mostra que nele consegue perceber que há mais cubos escondidos. Ou seja, a aluna parece conseguir coordenar diferentes vistas, já que mostra saber que há cubos que não são visíveis da sua perspetiva.

De seguida, na Figura 3 e 4, apresentamos a construção e o registo de Maria.

Figura 3. - Construção de Maria

Figura 4. – Registo de Maria

Ao longo do trabalho autónomo, Maria constrói o paralelepípedo de duas maneiras diferentes, com um nível apenas e com dois níveis, mas regista apenas o segundo. Para esta construção, Maria começa por construir dois supercompostos retangulares, cada um composto por dois tricubos, parecendo fazê-lo por tentativa e erro, já que vai experimentando várias posições para os tricubos. Depois, segurando os dois supercompostos lado a lado, roda-os para baixo, juntando-os como se estivesse a fazer o movimento de fechar um livro ao contrário (Figura 3). Com este movimento. Maria parece estruturar o sólido por camadas verticais. Faz então o registo da vista da frente (Figura 3), atendendo à discriminação por cores, embora as cores do registo não correspondam exatamente às mesmas que as da construção, no que respeita à localização.

Também Dalila constrói o seu paralelepípedo de forma análoga ao processo utilizado por Maria. No entanto, o registo de Dalila é um pouco diferente (Figura 5).

Figura 5 – Construção e registo de Dalila (Conceição & Rodrigues, 2020)

Dalila regista a camada superior atendendo à forma como estão organizados os tricubos, de acordo com a vista de cima, sem evidenciar a tridimensionalidade dos cubos, tal como Maria, e sem discriminar as cores. De seguida, regista a camada inferior com os elementos que consegue ver desta camada, da sua perspetiva, embora ignorando que uma face dos cubos da camada de cima também são visíveis dessa perspetiva Embora esta não seja uma forma de representar que permita facilmente compreender a estrutura presente e reproduzi-la, atendendo ao nível etário da aluna, ela parece conseguir representar relações espaciais importantes. Neste caso, a aluna parece ter presente a construção por níveis, ao mesmo tempo que parece evidenciar, de uma forma ainda muito simples, a coordenação de dois compostos e as suas vistas. Dalila parece assim estruturar a sua construção em camadas horizontais, enquanto Maria estrutura em camadas verticais, durante a construção, e passa depois para uma estruturação por camadas horizontais, durante o registo.

Apresentamos de seguida a resolução de Bruno que foi discutida em coletivo, onde o aluno foi convidado a explicar como pensou, a partir da projeção do seu registo (Figura 6), no quadro interativo.

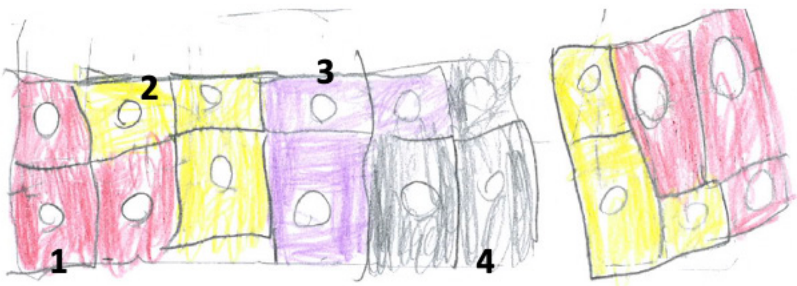


Figura 6. - Registo de Bruno

Bruno começa por descrever a ordem pela qual encaixou as peças, tendo também um conjunto de tricubos na mão:

Bruno- Eu pus primeiro esta (Identificada com 1 na Figura 5.) (Sobrepõe o tricubo ao desenho projetado.) e depois pus esta… (2) (Encaixa na anterior.) (Hesita.) E depois esta (3) (Encaixa nas outras).
Professora - Certo. E por fim…?
Bruno – E depois eu pus… (Encaixa o tricubo identificado com 4.)
Professora- Muito bem. E isso é um paralelepípedo, Bruno?
Bruno – Não, mas…
Professora- Não?
Bruno – Aaah… Sim..
Professora – Então é ou não?
Bruno – É.

A forma como Bruno descreve o processo que utilizou, e assumindo cada tricubo como um composto, parece remeter para o estabelecimento de relações com coordenação de compostos. No entanto, dada a hesitação de Bruno, não é claro se relaciona esses compostos com o todo de forma consciente ou se sente dificuldade com o nome do sólido. No entanto, ao construir a figura, Bruno procura formar retângulos, parecendo assim reconhecer essa característica dos paralelepípedos. É de salientar também que esta construção de Bruno foi realizada sem a presença de um modelo, já que o único modelo disponível seria para o paralelepípedo de dois níveis.

De facto, Bruno parece não estar muito seguro acerca da validade da sua construção. Depois da hesitação de Bruno, a professora resolve remeter a discussão para a turma, na tentativa de perceber quais as conceções dos alunos acerca daquela construção.

Professora – É um paralelepípedo ou não, turma?(Alguns alunos respondem que sim e outros que não.)
Professora – Então, não é, porquê?
Gil – Não, porque é muito maior. Porque era muito maior.
Luísa – Não é muito maior. Posso? (Pede a Bruno para segurar a construção.) Esta podia tar[sic] aqui atrás. (Aponta para metade da construção: parte 3 e 4.)
Professora – Como?
Luísa – Esta podia tar [sic] aqui atrás. Este assim também é (Construção apresentada por Bruno.), mas (Decompõe o paralelepípedo de Bruno em duas metades, 2x3, e sobrepõe esses supercompostos.) mas assim… Mais grosso. (Referindo-se às duas camadas.)

Luísa, ao não concordar com a afirmação de Gil, procura mostrar que aquela construção é válida, mas parece não conseguir mobilizar os argumentos para conseguir fazer essa validação e acaba por mostrar uma outra possibilidade, recorrendo à manipulação dos materiais. Embora a intervenção de Luísa não justifique o facto da construção de Bruno ser um paralelepípedo, a aluna valida essa construção e vem oferecer ainda um outro contributo importante para a discussão. Para além de mostrar uma possibilidade diferente que ainda não tinha sido discutida, Luísa mostra como transformar a primeira na segunda, através de um processo de decomposição e recomposição. Isto parece evidenciar não só uma capacidade de coordenar diferentes compostos e relacioná-los com o todo, como também de passar de uma construção com um nível para uma construção de dois níveis, mais exigente. Luísa parece fazer esta transformação com antecipação.

Apesar desta intervenção, Luísa, no seu registo, apenas apresenta uma resolução (Figura 7).

Figura 7. - Registo de Luísa (Conceição & Rodrigues, 2020)

Neste registo, é de destacar a forma como a aluna procura mostrar a terceira dimensão da sua construção, colocando o número 2 em cada quadrado para fazer referência ao facto de ali estarem presentes dois cubos, embora o detrás não se veja. Assim, desenha uma das vistas e representa simbolicamente o número total de cubos em cada espaço. Luísa parece assim conseguir coordenar duas camadas de cubos.

Relativamente ao caso de Gil, este aluno começa por tentar desmontar o modelo, possivelmente para se apropriar da sua estrutura, mas não chega a fazê-lo. Constrói um paralelepípedo de um nível, diferente do de Bruno e, talvez por esse motivo, não tivesse validado a construção do colega. Neste caso, Gil vai colocando os tricubos da seguinte forma (Figura 8):

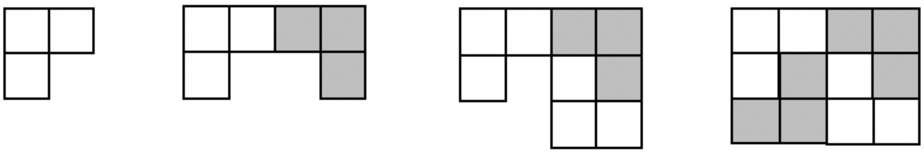


Figura 8. - Processo de construção utilizado por Gil (da esquerda para a direita)

Na discussão coletiva, Gil explica como pensou, enquanto que usa esta explicação para mostrar como construiu o modelo proposto:

> Gil-Primeiro eu pensei assim, que estes dois encaixavam. (Encaixa os dois tricubos: segundo registo da figura 8.) Depois vi estes assim (Foca-se no supercomposto com dois tricubos que forma um retângulo), encaixei assim (Encaixa o terceiro tricubo) e depois encaixei (Encaixa o quarto tricubo).

Neste processo, verificamos que Gil vai relacionando os compostos de maneiras diferentes. É o caso das relações estabelecidas entre os dois primeiros compostos e, depois, o segundo e terceiro. Regista sem discriminar os tricubos.

Figura 9. - Registo de Gil (Conceição & Rodrigues, 2020)

Para a segunda construção, de dois níveis, Gil mobiliza uma relação já estabelecida na primeira construção ao encaixar dois tricubos, formando um supercomposto retangular. De seguida, coloca outro supercomposto igual por cima. Desenha o segundo registo da Figura 9. Neste registo, Gil, opta por desenhar um nível da sua construção, desta vez discriminando a posição dos tricubos (assinalada pela distinção das cores) e, dentro de cada quadrado, escreve o número 1. Continuando a sua explicação, Gil descreve agora como usou a relação dos dois tricubos nesta nova construção, como é apresentado no seguinte excerto (Conceição & Rodrigues, 2020):

> Gil – Depois eu escolhi estes assim (Encaixa dois tricubos formando um supercomposto retangular.) e depois quando vi estes assim, quando descobri e vi que estes dois também encaixavam... (Referindo-se aos outros dois tricubos.) Quando vi que encaixavam, este para cima e este para baixo (Referindo-se à posição das peças.) imitei, este para este e vi que encaixavam.

Apesar de Gil ter já estabelecido uma relação entre dois compostos a partir da manipulação dos materiais, a relação com o todo não parece ter sido antecipada. No entanto, ao longo da construção, rapidamente, consegue abstrair a relação entre os dois tricubos, formando um supercomposto, e transpô-la para a construção de um segundo supercomposto com dois tricubos. Quando Gil diz "imitei", parece estar a referir-se à iteração de supercompostos. Desta forma, Gil parece conseguir relacionar compostos entre si e com o todo, embora pareça ser um processo que vai sendo construído à medida que a tarefa decorre. É de salientar que Gil apresenta duas formas de resolução diferentes, correspondentes ao paralelepípedo, uma com base num modelo fornecido e outra sem qualquer modelo, tal como Bruno.

Durante a sua explicação, Gil recorre à comunicação verbal que, como se nota, apresenta ainda algumas lacunas em termos de vocabulário. Talvez por isso Gil tenha necessidade de utilizar os materiais manipuláveis como mediadores da atividade discursiva e gestos para tornar o seu discurso mais claro. Também os colegas, Luísa e Bruno recorrem a gestos, mas recorrem sobretudo aos materiais que são manipulados de uma forma dinâmica para completarem as suas explicações. A valorização de diferentes meios e recursos para comunicar permite que os alunos se expressem de diferentes formas, numa fase em que a natureza das ideias está associada a uma dimensão mais visual e menos baseada em propriedades e conhecimentos formais.

A presença de diferentes resoluções parece, assim, trazer contributos importantes para a aprendizagem dos alunos, como a possibilidade de conhecer diferentes resoluções e processos de construção, como no caso de Luísa e Gil. Isto permite também que cada aluno possa participar com as suas ideias, independentemente do seu nível de desempenho. Possibilita também a discussão de ideias, como foi o caso da comunicação de Bruno, que envolveu a discussão de ideias diferentes com Gil e Luísa. Esta discussão, por sua vez, permitiu aos alunos, por um lado, comunicar aos outros as suas ideias, trabalhando essa capacidade, e, por outro, voltar a refletir sobre o que se construiu e como se construiu, como foi, por exemplo, o caso de Matilde, aprofundando o seu conhecimento.

Conclusões

A valorização de diferentes tipos de resoluções e de diferentes processos mentais, independentemente do nível de estruturação espacial, num determinado momento, parece contribuir para o aprofundamento do nível de estruturação espacial de cada aluno. Tal como proposto por Stein e Smith (1998), tarefas que partam dos conhecimentos dos alunos, mas contribuam para a sua progressão, constituem tarefas importantes. A aceitação da diversidade de resoluções permite ao professor ter acesso ao conhecimento dos alunos (Radford & Barwell, 2016), mas permite também que os alunos participem e construam o seu conhecimento, partindo do que sabem no momento em que realizam determinada tarefa. Da mesma forma, quando os alunos são convidados a apresentar as suas resoluções, têm a oportunidade de voltar a pensar sobre o que foi feito e, nesse momento, estão também a construir conhecimento. Ao partilharem essa reflexão com os colegas, também estes são convidados a refletir, transformando esse momento de comunicação numa discussão. Desta forma, assumimos como um princípio de design: *Propor tarefas de caráter exploratório, permitindo a construção do conhecimento pelos próprios alunos, incentivando a diversidade de resoluções. Esta diversidade contribui e é potenciada pelas discussões coletivas.*

Tarefas que permitem diferentes resoluções, que por sua vez se constituem como objetos de discussão, em sala de aula, parecem constituir ainda bons meios para levar os alunos, nas suas diferenças individuais, a ter um espaço próprio dentro da comunidade de aprendizagem da sua sala de aula. Estas diferentes resoluções servem como objetos de reflexão que, no seio da discussão, permitem aos alunos aprender uns com os outros, ainda que se situem em níveis diferentes. Tal como refere van den Heuvel-Panhuizen e Buys (2005), nestas discussões, os alunos são convidados a refletir e isso permite-lhes "ver mais", ou seja, conseguem ver e estabelecer relações espaciais que, possivelmente, sozinhos não conseguiriam. Daqui parecer emergir um outro princípio de design: *Valorizar a comunicação de ideias matemáticas com recurso a gestos, materiais, desenhos ou palavras, incentivando à utilização de uma linguagem progressivamente mais espacial e geométrica.* Tal como Leikin (2009) refere, é nos espaços de solução coletivos que os alunos têm maior possibilidade de desenvolver os seus espaços de solução individuais. Para isso, é necessário criar condições para a emergência de diferentes tipos de resoluções e o espaço para que estas sejam partilhadas, o que nos conduza um terceiro princípio de design: *Estruturar as aulas considerando um momento de trabalho, onde os alunos possam construir conhecimento a partir das suas ideias e um momento de discussão onde a diversidade de resoluções seja utilizada nas discussões, na sala de aula, com vista ao aprofundamento das relações espaciais presentes na estruturação das figuras.*

Ao longo desta tarefa, a estruturação espacial parece ter estado envolvida nos processos de raciocínio espacial. Ao longo da tarefa, os alunos analisaram objetos espaciais, estabeleceram relações entre eles, criaram ou aprofundaram imagens mentais com base em relações estabelecidas entre compostos e todo. Também operaram com essas imagens, decompondo-as e recompondo com uma configuração mais complexa. Desta forma, parece-nos possível poder afirmar que a estruturação espacial é um processo fundamental no raciocínio espacial, mas que os próprios processos de raciocínio espacial parecem estar presentes na estruturação espacial, levando ao seu aprofundamento.

Agradecimentos

Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia através de uma bolsa concedida à primeira autora (SFRH/BD/130505/2017).

Referências

Battista, M. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. Lester (Ed), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 843–909). NCTM.

Battista, M.T., & Clements, D. (1996). Students' understanding of three-dimensional rectangular arrays of cubes. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(3), 258–292.

Bruce, C.D. & Hawes, Z. (2015). The role of 2D and 3D mental rotation in mathematics for young children: what is it? Why does it matter? And what can we do about it? *ZDM*, 47(3), 331–343. https://doi.org/10.1007/s11858-014-0637-4

Collins, A., Joseph, D., & Bielaczyc, K. (2004). Design research: Theoretical and methodological issues. *The Journal of the learning sciences, 13*(1), 15-42.

Conceição, J., & Rodrigues, M. (2020). Processos de raciocínio espacial na representação de figuras 3D por alunos do 1.º ano do ensino básico. *Quadrante*, 29(1), 115-139. Obtido de https://quadrante.apm.pt/index.php/quadrante/article/view/536

Goldenberg, E. P., Cuoco, A.A. & Mark, J. (1998). A Role for Geometry in general classroom. In R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (pp. 3–44). Erlbaum.

Gravemeijer, K., & Cobb, P. (2013). Design research from the learning design perspective. In T. Plomp & N. Nieveen (Eds.), *Educational design research* (pp. 72–113). Netherlands Institute for Curriculum Development (SLO).

.

Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. In L. Puig e A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 3–19). Universitat de Valencia.

Lave, J. (1991). Situating learning in communities of practice. In L. Resnick et al. (Eds), *Perspectives on socially shared cognition* (pp. 63-82). APA.

Leikin, R. (2009). Exploring mathematical creativity using multiple solution tasks. In R. Leikin, A. Berman & B. Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students* (pp. 129-145). Sense Publishers.

Loureiro, C. (2012). Um percurso didático de estruturação espacial e geométrica. In L. Santos, A.P. Canavarro, A. M. Boavida, H. Oliveira, L, Menezes, S. Carreira (Eds.), *Livro de Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática* (EIEM 2012) (pp. 149–160). Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Portalegre.

Mamolo, A., Ruttenberg-Rozen, R. & Whiteley, W. (2015). Developing a network of and for geometric reasoning. *ZDM*, 47(3), 483–496. https://doi.org/10.1007/s11858-014-0654-3

Mulligan, J. (2015). Looking within and beyond the geometry curriculum: connecting spatial reasoning to mathematics learning. *ZDM*, 47(3), 511–517. https://doi.org/10.1007/s11858-015-0696-1

National Council of Teachers of Mathematics (2017). *Princípios para a ação: Assegurar a todos o sucesso em Matemática*. Associação de Professores de Matemática [Obra original publicada em inglês em 2014].

Prediger, S., Gravemeijer, K., & Confrey, J. (2015). Design research with a focus on learning processes: an overview on achievements and challenges. *ZDM*, 47(6), 877-891. https://doi.org/10.1007/s11858-015-0722-3

Radford, L., & Barwell, R. (2016). Language in mathematics education research. In *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 275–313). SensePublishers.

Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3(4), 268–275.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing.* Cambridge University Press.

Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Buys, K. (2005). *Young Children Learn Measurement and Geometry: A learning-teaching trajectory with intermediate attainment targets for the lower grades in primary school.* Sense Publishers.

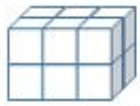
Anexo 1

Tarefa proposta aos alunos

Construções com cubos

Descobre diferentes figuras que podes formar com quatro tricubos.

Regista as descobertas no espaço abaixo, pintando de cor diferente cada tricubo.



Tenta agora descobrir maneiras de formar um paralelepípedo, usando tricubos e regista as tuas descobertas, pintando cada tricubo de uma cor diferente.

Anexo 2

Construção modelo em 3D

Construção modelo.