

NOTA PRÉVIA

O autor agradece às equipas do LABEST (www.fe.up.pt/labest) e da NewMENSUS (www.newmensus.pt) o suporte técnico na condução dos ensaios e a informação disponibilizada sobre a obra. Agradece ainda ao consórcio responsável pela construção, CAETXXI, e à equipa projetista, LCW (www.lcwconsult.com), pelo apoio em obra e pelas informações acerca do projeto. Agradece ainda à Fundação para Ciência e a Tecnologia pelo financiamento do Projeto que envolve a FEUP e o LNEC, denominado PTDC/ECM-EST/2131/2012 – “Integração de dados GNSS e de acelerómetros na monitorização de grandes estruturas” (Inv. responsável: Prof. Carlos Félix, ISEP/LABEST, Porto), no âmbito do qual se enquadrou o trabalho realizado na presente dissertação.

DEDICATÓRIA

*Aos meus pais, Luís e Fátima,
À minha irmã, Mafalda,
À Rita Soares.*

AGRADECIMENTOS

Antes de mais quero agradecer ao Eng.º Sérgio Oliveira por me ter dado a chance de desenvolver esta dissertação no Laboratório Nacional de Engenharia Civil, à sua orientação e à do Eng.º José Piteira. Agradeço por todo o conhecimento transmitido, dentro e fora do âmbito da engenharia civil, e pela total cooperação e disponibilidade, que levaram a uma aprendizagem profunda e por gosto.

Aliada a esta chance, surgiu a oportunidade de desenvolver este trabalho na companhia de uma equipa de trabalho que, sem dúvida, aumentou tanto os níveis de alegria, como o ritmo de trabalho de todos. Agradeço por isso ao André Osório, à Patrícia Salvado, ao Emanuel Mendes, ao André Silvestre e ao Renato Pereira.

Agradeço também à minha família, à Rita, aos meus amigos, por me terem trazido e acompanhado até aqui. Fazem todos, também, parte deste trabalho.

Quero por isso deixar bem clara a importância que todo um grupo de pessoas teve para a realização deste trabalho. Pela amizade e paciência, desde a minha família e amigos, a todo o grupo de trabalho do LNEC, tenho a certeza que a participação de todos serviu de combustível para me ajudar a desenvolver e concluir esta etapa da minha vida. E para mim, além das componentes técnica e teórica que compuseram este trabalho, foi igualmente importante e enriquecedor conhecer novas faces para encarar a gestão de um grupo de trabalho. Na verdade, acho que aquilo que sinto que mais aprendi, ao longo destes últimos meses, foi a observar atentamente. Para dentro e para fora.

Por tudo isto, por toda a amizade e experiências, agradeço a todos pela vossa partilha.

OBSERVAÇÃO E MODELAÇÃO DO COMPORTAMENTO DINÂMICO DO VIADUTO DO CORGO. UTILIZAÇÃO INTEGRADA DE MODELOS DE IDENTIFICAÇÃO MODAL E MODELOS DE ELEMENTOS FINITOS DE BARRA

Resumo

Na presente dissertação, analisam-se os resultados obtidos em ensaios de vibração ambiente realizados no viaduto do Corgo. Os registos de acelerações medidos foram analisados através de técnicas de processamento de sinal e foram utilizados modelos de identificação modal baseados na técnica de decomposição no domínio da frequência, com vista à identificação dos principais parâmetros modais da referida estrutura. Mostra-se que, instrumentando apenas a secção central do tabuleiro, é possível obter resultados com interesse para a calibração dos modelos numéricos. Para tal, foi desenvolvido em MATLAB o programa **DynBridges 1.0** (EF barra 3D) para cálculo dinâmico do viaduto. Os modos de vibração calculados são representados com base em animações 3D, assim como as oscilações da secção instrumentada. O comportamento dinâmico do viaduto foi também estudado com o programa Ansys. As configurações modais identificadas são comparadas com as obtidas com os dois programas referidos.

OBSERVATION AND MODELING OF THE DYNAMIC BEHAVIOR OF CORGO VIADUCT. INTEGRATED USE OF MODAL IDENTIFICATION MODELS AND FINITE ELEMENT BAR MODELS

Abstract

In this dissertation, the data from ambient vibration tests, performed on the Corgo viaduct, are analysed. The records of the measured accelerations were analysed by signal processing techniques and modal identification methods, based on frequency domain decomposition, are used in order to get the main modal parameters of the referred structure. It is shown that by instrumenting only the deck's middle section, it is possible to obtain interesting results for the calibration of numerical models. The program **DynBridges 1.0** (EF 3D bar) was developed in MATLAB, to perform the dynamic calculation of the viaduct. The modal configurations are represented by 3D animations as well as the oscillations of the instrumented section. The dynamic behavior of the viaduct was also studied with the ANSYS program. The identified modal configurations are compared with those obtained with both programs.

Índice geral

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Justificação e enquadramento	1
1.2	Objetivos da dissertação	4
1.3	Estruturação do trabalho.....	5
2	PONTES DE TIRANTES.....	7
2.1	Considerações iniciais	7
2.2	Da sua origem à atualidade.....	7
2.3	Constituição e conceção estrutural.....	12
2.3.1	Número de panos de tirantes	13
2.3.1.1	Suspensão central	13
2.3.1.2	Suspensão lateral	14
2.3.2	Configuração longitudinal.....	15
2.3.3	Espaçamento dos cabos.....	17
2.3.4	Tabuleiro.....	17
2.4	Monitorização e controlo da segurança	18
2.5	Considerações finais	20
3	ANÁLISE DINÂMICA DE ESTRUTURAS. ENSAIOS DE VIBRAÇÃO E MODELAÇÃO COM ELEMENTOS FINITOS DE BARRA.....	21
3.1	Considerações iniciais	21
3.2	Fundamentos de análise dinâmica de estruturas no domínio do tempo	22
3.2.1	Movimentos oscilatórios e equilíbrio de forças	22
3.2.2	Osciladores com 1 grau de liberdade. Formulação clássica e formulação no espaço de estados	22
3.2.2.1	Formulação clássica.....	22
3.2.2.2	Formulação no espaço de estados.....	27
3.2.3	Osciladores com N graus de liberdade. Formulação clássica e formulação no espaço de estados.....	30
3.2.3.1	Normalização da matriz modal relativamente à matriz de massas	30
3.2.3.2	Formulação clássica.....	31
3.2.3.3	Formulação no espaço de estados.....	33

3.3	Fundamentos da análise dinâmica de estruturas no domínio da frequência. Ensaios de vibração	37
3.3.1	Análise de sinal.....	37
3.3.1.1	Dos sinais contínuos aos sinais discretos	37
3.3.1.2	Análise espectral. Conceitos fundamentais.....	40
3.3.2	Análise espectral utilizando software disponível no mercado	46
3.3.2.1	Erros de sobreposição e de escorregamento	47
3.3.2.2	Correção para obter registos de média nula	48
3.3.2.3	Cálculo de espectros utilizando uma única janela no tempo	49
3.3.2.4	Cálculo de espectros utilizando várias janelas no tempo	50
3.3.3	Osciladores com N graus de liberdade. Identificação modal	52
3.3.3.1	Comportamento dinâmico de estruturas sob excitação estocástica	52
3.3.3.2	Funções de correlação	53
3.3.3.3	Matriz de densidade espectral de potência.....	56
3.3.3.4	Determinação das matrizes de densidade espectral de potência da resposta com base na matriz de flexibilidade dinâmica e na matriz de densidade espectral da ação	58
3.3.4	Fundamentos de identificação modal	60
3.3.4.1	Identificação modal com base em ondas harmónicas.....	60
3.3.4.2	Identificação modal com base na matriz de densidade espectral de potência	62
3.3.4.3	Cálculo da matriz de densidade espectral de potência com base no método de Welch	64
3.3.4.4	Cálculo de valores e vetores singulares com base na matriz DEP	65
3.4	Análise matricial de estruturas usando elementos finitos de barra	69
3.4.1	Elasticidade sob carga uniaxial.....	69
3.4.2	Teoria das peças lineares	70
3.4.3	Classificação de estruturas.....	70
3.4.3.1	Estruturas reticuladas	70
3.4.3.2	Estruturas não reticuladas	71
3.4.4	Equilíbrio global de uma estrutura.....	71
3.4.4.1	Eixos locais e eixos globais.....	71
3.4.4.2	Relações de compatibilidade e equilíbrio.....	72
3.4.4.3	Relações força-deslocamento.....	72
3.4.4.4	Matriz de rigidez elementar.....	73
3.4.4.5	Matriz de massa elementar	76
3.4.4.6	Matriz de amortecimento elementar.....	76
3.4.4.7	Matriz de transformação	77
3.4.4.8	Matriz de rigidez global	78
3.4.4.9	Condições de apoio	79
3.4.4.10	Forças nodais.....	80
3.4.4.11	Deslocamentos nodais.....	80

3.5	Considerações finais	81
4	DESENVOLVIMENTO EM MATLAB DO PROGRAMA DYNBRIDGES 1.0.....	83
4.1	Considerações iniciais	83
4.2	Ficheiros <i>input</i>	84
4.3	Organização do programa DynBridges 1.0	84
4.3.1	Painel “Início”	84
4.3.2	Painel “Malha”	93
4.3.3	Painel “Modelo de elementos finitos”	94
4.3.4	Painel “Modelos de identificação modal”	96
4.3.5	Painel “Comparação de resultados”	99
4.4	Considerações finais	100
5	ENSAIO DE VIBRAÇÃO NO VIADUTO DO CORGO	101
5.1	Considerações iniciais	101
5.2	Viaduto do Corgo	101
5.3	Modelo de elementos finitos de barra 3D	105
5.3.1	Malha	105
5.3.2	Características dos elementos estruturais	106
5.3.3	Características dos materiais	106
5.3.4	Libertações internas	108
5.3.5	Secções 3D.....	108
5.4	Registo de vibração ambiental com acelerómetros.....	109
5.5	Análise de resultados. Comparação entre experimentais e numéricos	111
5.6	Considerações finais	123
6	CONCLUSÕES	125
7	BIBLIOGRAFIA.....	127
8	ANEXOS	129

Índice de figuras

Capítulo 1

Figura 1.1 - Viaduto do Corgo.	1
Figura 1.2 - Registos de vibração ambiental.	2
Figura 1.3 - Modelos de elementos finitos de barra: a) output do programa DynBridges 1.0 (MATLAB); b) output do programa ANSYS Mechanical APDL.	3

Capítulo 2

Figura 2.1 - Cabos ou cordas como elementos estruturais: a) ponte de lianas; b) equilíbrio de mastros nos barcos. ..	8
Figura 2.2 - a) Fausto Veranzio, ou Faust Vrancic (1551-1617); b) desenho de uma ponte de tirantes idealizada no início do século XVII (Fausto Veranzio, <i>Machinae Novae</i>); c) desenho de uma estrutura suportada por cordas, idealizada para testar saltos de páraquedas (Fausto Veranzio, <i>Machinae Novae</i>).....	8
Figura 2.3 - Ponte de Strömsund, Suécia (1956).....	9
Figura 2.4 - Ponte Jiaxing-Shaoxing, China (2013).....	9
Figura 2.5 - a) Ponte Russky, Rússia (2012); b) Ponte Basarad Overpass, Roménia (2011).....	10
Figura 2.6 - Ponte Centenario, Panamá (2004): a) fase de construção; b) em serviço.	10
Figura 2.7 - Ponte Octavio Frias de Oliveira, Brasil (2008): a) fase de construção; b) em serviço.	10
Figura 2.8 - Ponte Vasco da Gama, Portugal (1998).....	11
Figura 2.9 - Ponte Zhivopisny, Rússia (2007).	11
Figura 2.10 - Inserção da ponte Centenario na paisagem natural do canal do Panamá.	12
Figura 2.11 - Fluxo de transmissão de esforços desde o tabuleiro, até ao terreno. Representam-se a verde as cargas exemplo aplicadas sobre o tabuleiro; a laranja a transmissão de esforços dos tirantes, provenientes do tabuleiro, para os mastros e dos mastros para os pilares; a azul a transmissão de esforços do tabuleiro diretamente para os pilares; e a castanho a transmissão de esforços dos pilares até às sapatas.	13
Figura 2.12 - Ponte atirantada com suspensão central (viaduto do Corgo, Portugal, 2014).....	14
Figura 2.13 - Ponte atirantada com suspensão lateral (ponte Great Seto, Japão, 1988).	14
Figura 2.14 - Ponte Samuel Beckett, Irlanda (2009).	15
Figura 2.15 - Sistemas de suspensão atirantados: a) Sistema em Harpa, com tirantes paralelos e ancorados ao longo do mastro; b) Sistema em Leque, com tirantes ancorados apenas no topo do mastro; c) Sistema em Semi-leque, com tirantes não paralelos e ancorados ao longo do mastro.	16
Figura 2.16 - Ponte Friedrich Ebert, Alemanha (1967).....	17
Figura 2.17 - Ponte Russky, Rússia: a) construção do tabuleiro por avanços sucessivos; b) elevação de uma aduela pré-fabricada do tabuleiro.	18
Figura 2.18 - Acelerómetros instalados em tirantes para monitorização de vibrações.	19

Capítulo 3

Figura 3.1 - Forças envolvidas no movimento oscilatório de um sistema massa-mola-amortecedor.	22
Figura 3.2 - Representação de um impulso unitário e da sua resposta para o instante genérico $t = \tau$	25
Figura 3.3 - Representação esquemática da aproximação de uma força com variação contínua ao longo do tempo através de uma sequência de infinitos impulsos infinitesimalmente próximos. Por exemplo a variação de força que o vento exerce numa estrutura, ao longo do tempo.	25

Figura 3.4 - Representação de uma história de carga definida por troços lineares.	26
Figura 3.5 - Modo de vibração natural de um modelo de 1 GL. Representação no domínio do tempo e no espaço de estados.	27
Figura 3.6 - Exemplo de um sinal: a) contínuo; b) discreto, ou amostra.	38
Figura 3.7 - Processo de obtenção de uma amostra de vibração, através da conversão de sinal analógico-digital....	38
Figura 3.8 - Função do tipo onda harmónica e as várias formas de a representar (Oliveira, 2013).	40
Figura 3.9 - Transformada discreta de Fourier. Decomposição em ondas sinusoidais (Oliveira, 2013).	41
Figura 3.10 - Valor médio de uma função.	43
Figura 3.11 - Decomposição de um acelerograma medido, em espectros de amplitude e de fase: a) acelerograma; b) vetor coluna, $acel(t)$, com os valores das acelerações, em função do tempo; c) vetor coluna que contém a parte real e a parte imaginária, $a(\omega)+b(\omega)i$, de cada onda sinusoidal; d) espectro de amplitudes; e) espectro de fases.	46
Figura 3.12 - Representação da diferença de fase de duas ondas sinusoidais com a mesma frequência natural.	47
Figura 3.13 - Determinação da média móvel de um registo discreto, em acelerações, utilizando janelas de 7 pontos ($x_i = 3$; $x_{janela}=3+1+3=7$).	48
Figura 3.14 - Utilização de um filtro de médias móveis para obter um sinal com média nula.	49
Figura 3.15 - Janela de acelerograma filtrado, selecionado entre os 1050 e os 1250 segundos.	49
Figura 3.16 - Aplicação do filtro de média móvel (<i>filtro_MM</i>) de forma a obter espectros de amplitude suavizados.	50
Figura 3.17 - Função que calcula o espectro de amplitudes de um registo, através da média dos espectros de janelas com 100 segundos e sobreposição de 50%.	50
Figura 3.18 - Aplicação de uma janela de $Tukey=1$ $W(t_k)$ a um registo de acelerações $a(t_k)$ num ponto de uma secção de um tabuleiro de onde se obtém $W(t_k).x(t_k)$	51
Figura 3.19 - Processo estocástico vetorial com 5 componentes (3 verticais, 1 transversal e 1 longitudinal). Através de uma realização, obtém-se 5 registos temporais de acelerações, com duração $T=300s$: a) posição de instalação dos 5 acelerómetros uniaxiais; b) acelerogramas obtidos a partir de cada acelerómetro.	53
Figura 3.20 - Representação gráfica das funções da auto-correlação para dois processos estocásticos. Num processo com maior grau de aleatoriedade a função tende mais rapidamente para zero (Newland, D., 1975).	54
Figura 3.21 - Ensaio de vibração ambiente com medição de acelerações em cinco pontos. Séries temporais observadas (acelerogramas), espectros de amplitude, matriz de correlação e matriz de densidade espectral de potência.	57
Figura 3.22 - Ensaio de vibração: a) local de instalação dos aparelhos; b) registos de acelerações (direção vertical).	60
Figura 3.23 - As três ondas em fase e com a mesma amplitude.	61
Figura 3.24 - Duas ondas em contra-fase e uma onda com amplitude praticamente nula (verde).	61
Figura 3.25 - Representação das matrizes de densidade espectral de potência para as várias frequências. Exemplo de um ensaio de vibração em que se analisam acelerações radiais medidas em três pontos da secção de um tabuleiro.	63
Figura 3.26 - Esquema de cálculo da matriz de densidade espectral de potência de acelerações para um exemplo com três acelerómetros.	63
Figura 3.27 - Matriz de densidade espectral de potência. A azul estão representados os espectros de amplitude (escala logarítmica) e a verde os espectros das diferenças de fase.	64

Figura 3.28 - Determinação da configuração modal correspondente a um modo de vibração exemplo (Modo n) através do cálculo do primeiro vetor singular da matriz DEP calculada para a frequência 0,40 Hz.	66
Figura 3.29 - Determinação da configuração modal correspondente a um modo de vibração exemplo (Modo m) através do cálculo do primeiro vetor singular da matriz DEP calculada para a frequência 0,85 Hz.	67
Figura 3.30 - Espectro dos valores singulares da matriz $\underline{S}(\omega_n)$. Análise de registos de acelerações verticais, gerados numericamente para excitação do tipo ruído branco.	68
Figura 3.31 - Modos de vibração identificados no tabuleiro da ponte: a) modo com frequência de 0,40 Hz (simétrico); b) modo com frequência de 0,85 Hz (antissimétrico).	68
Figura 3.32 - Coeficiente de Poisson.	69
Figura 3.33 - Simplificação de um elemento tridimensional através da teoria das peças lineares: a) peça linear; b) esforços num elemento de barra 3D.	70
Figura 3.34 - Estruturas reticuladas: a) pórtico; b) treliça; c) grelha; d) viga.	70
Figura 3.35 - Estruturas não reticuladas: a) placas; b) cascas; c) membranas.	71
Figura 3.36 - Coordenadas globais, G, e locais, L. Tabela de coordenadas dos nós e tabela de incidências.	72
Figura 3.37 - Equilíbrio estático do nó 6.	72
Figura 3.38 - Rótula cilíndrica entre elementos vertical e horizontal.	73
Figura 3.39 - Graus de liberdade locais dos elementos vertical e horizontal. Libertações internas a vermelho.	73
Figura 3.40 - Assemblagem da matriz de rigidez global do pórtico simples 3D (sem condições de apoio): a) elementos 1 a 4 assemblados; b) elementos 5 a 8 assemblados.	78
Figura 3.41 - Introdução das condições de apoio (a castanho) nos nós 1 a 4: a) elementos 1 a 4 assemblados; b) elementos 5 a 8 assemblados.	79
Figura 3.42 - Exemplo de forças e momentos aplicados na estrutura.	80

Capítulo 4

Figura 4.1 - Painel "Início".	84
Figura 4.2 - Definição do eixo local e_2 , com e_1 no plano x_2x_3	87
Figura 4.3 - Definição do eixo local e_2 , com e_1 no plano x_1x_3	87
Figura 4.4 - Definição do eixo local e_2 , com e_1 no plano x_1x_2	87
Figura 4.5 - Exemplo de tabela com sequência de nós para desenhar faces.	91
Figura 4.6 - Exemplo da influência da rotação de um nó, em nós adjacentes.	91
Figura 4.7 - Painel "Malha".	93
Figura 4.8 - Painel "Modelo de elementos finitos".	94
Figura 4.9 - Painel "Modelos de identificação modal". Escolha de registos para análise.	96
Figura 4.10 - Painel "Modelos de identificação modal". Análise dos dados obtidos.	97
Figura 4.11 - Painel que apresenta a matriz DEP.	97
Figura 4.12 - Painel que apresenta o espectro de valores singulares.	98
Figura 4.13 - Painel "Comparação de resultados".	100

Capítulo 5

Figura 5.1 - Localização do viaduto do Corgo (Vila Real).	102
Figura 5.2 - Viaduto do Corgo: a) planta; b) perfil longitudinal.	102

Figura 5.3 - Sub-viaduto central (viaduto do Corgo): a) planta; b) corte.....	103
Figura 5.4 - Vista lateral do viaduto do Corgo.	104
Figura 5.5 - Cortes transversais do tabuleiro no SVC: a) no topo dos pilares 15 e 22; b) na zona suspensa.	104
Figura 5.6 - Vista lateral de um mastro do viaduto do Corgo.....	105
Figura 5.7 - Malha de elementos finitos de barra 3D do viaduto do Corgo.....	105
Figura 5.8 - Características geométricas das secções (ANSYS): a) pilares 15 e 22; b) tabuleiro.	106
Figura 5.9 - Tipos materiais associados a cada tipo de elemento estrutural e algumas representações das suas respetivas secções.	107
Figura 5.10 - Representação dos nós onde se simula o aparelho de apoio, através das libertações internas.	108
Figura 5.11 - Representação tridimensional das secções: a) tabuleiro; b) pilares 15 e 22; c) pilares 16 e 21; d) pilares 17 e 20.	108
Figura 5.12 - Medição de vibrações durante os ensaios de carga, no viaduto do Corgo (Wenzel & Pichler, 2005).	109
Figura 5.13 - Ensaio de vibração. Medição de acelerações na secção de meio vão do Sub-viaduto central do viaduto do Corgo. Conversão de sinal do domínio do tempo (acelerogramas) para o domínio da frequência (espectros de amplitude) através da Transformada Discreta de Fourier.	110
Figura 5.14 - Configurações modais de projeto dos primeiros três modos de vibração (Barata, 2012).	111
Figura 5.15 - Espectros de valores singulares de 0,1 a 1,5 Hz. As linhas verticais representam as frequências obtidas através do programa DynBridges 1.0: a) acelerómetro triaxial; b) acelerómetros uniaxiais (cinco).	113
Figura 5.16 - Identificação das configurações modais (representação das oscilações através de ondas harmónicas), correspondentes às frequências dos três picos de maior amplitude, no espectro do primeiro valor singular da matriz DEP 5x5 (considerando os cinco acelerómetros uniaxiais).	114
Figura 5.17 - Modo de vibração 1. Flexão longitudinal dos pilares e tabuleiro. Comparação entre resultados experimentais e numéricos.....	115
Figura 5.18 - Modo de vibração 2. Flexão transversal dos pilares com flexão simétrica do tabuleiro. Comparação entre resultados experimentais e numéricos.	116
Figura 5.19 - Acelerómetro triaxial: a) acelerograma e espectro na direção transversal (dia 27 às 10h05m); b) ondas identificadas nos três canais.	117
Figura 5.20 - Modo de vibração 3. Flexão transversal dos pilares e flexão antissimétrica do tabuleiro. Comparação entre resultados experimentais e numéricos.	118
Figura 5.21 - Modo de vibração 4. Flexão longitudinal do tabuleiro. Comparação entre resultados experimentais e numéricos.....	119
Figura 5.22 - Acelerómetro triaxial: a) acelerograma e espectro na direção vertical (dia 27 às 10h05m); b) ondas identificadas nos três canais.	120
Figura 5.23 - Modo de vibração 5. Flexão transversal dos mastros. Comparação entre resultados experimentais e numéricos.....	121
Figura 5.24 - Acelerómetro triaxial: a) acelerograma e espectro na direção transversal (dia 27 às 10h05m); b) ondas identificadas nos três canais.	122

Simbologia

Latinas maiúsculas

A	Amplitude de uma onda
$\underline{A}_{(mck)}$	Matriz de estado que contém as matrizes de massa, amortecimento e rigidez
\underline{C}	Matriz de amortecimento modal normalizada
\underline{C}_G^e	Matriz de amortecimento global elementar
\underline{C}_L^e	Matriz de amortecimento local elementar
E	Módulo de elasticidade ou módulo de Young
$F = F(\omega_n)$	Transformada de Fourier de uma função discreta
$\tilde{F} = \tilde{F}(\omega)$	Transformada de Fourier de $f(t)$
\tilde{F}_m	Vetor das histórias de carga modais
\underline{F}_G^e	Matriz de forças global elementar
\underline{F}_L^e	Matriz de forças local elementar
\vec{G}	Versor do sistema de eixos globais
$\underline{H} = \underline{H}(\omega)$	Matriz de flexibilidade dinâmica ou matriz das funções de resposta em frequência
I	Inércia
\underline{K}	Matriz de rigidez modal normalizada
\underline{K}_G^e	Matriz de rigidez global elementar
\underline{K}_L^e	Matriz de rigidez local elementar
\underline{L}	Matriz dos fatores de participação modal
\vec{L}	Versor do sistema de eixos locais
\underline{L}_E	Matriz dos fatores de participação modal na representação de estado
\underline{M}	Matriz de massa modal
\underline{M}_G^e	Matriz de massa global elementar
\underline{M}_L^e	Matriz de massa local elementar
N	Número de pontos da discretização de uma janela temporal
NP	Número de pontos nodais de uma estrutura discretizada
N_{GL}	Número de graus de liberdade de um modelo numérico de elementos finitos
$\tilde{Q} = \tilde{Q}(\omega)$	Transformada de Fourier de $q(t)$
\underline{R}	Matriz de funções de correlação da resposta medida num ensaio de vibração
$\underline{S}_F = \underline{S}_F(\omega)$	Matriz de densidade espectral das forças de excitação
\underline{S}_u	Matriz de densidade espectral de potência
T	Duração de um registo
\mathcal{T}	Intervalo de tempo de um registo
T_d	Comprimento associado a cada segmento n_d
\underline{T}	Matriz de transformação elementar
$\underline{T}_{3 \times 3}$	Matriz de transformação de 3 linhas por 3 colunas

W_k	Janela de dados
$\tilde{X}(\omega)$	Transformada de Fourier de $x(t)$

Latinas minúsculas

a	Parcela do cosseno de uma solução geral $u(t)$
a_n	Coefficiente do cosseno de uma onda n
\underline{a}	Vetor de acelerações (processo estocástico vetorial)
b	Parcela do seno de uma solução geral $u(t)$
b_n	Coefficiente do seno de uma onda n
c	Amortecimento
c^{te}	Constante
\underline{c}	Matriz de amortecimento global
\vec{e}_G	Vetor unitário global
\vec{e}_L	Vetor unitário local
f	Força exterior
f_a	Força de amortecimento
f_{ams}	Frequência de amostragem
f_e	Força elástica
f_i	Força de inércia
f_n	Frequência natural de um modo n (em Hz)
f_N	Frequência natural (em Hz)
\underline{f}	Vetor de histórias de forças nodais nos N_{GL} graus de liberdade de uma estrutura
\underline{f}	Vetor de n_1 (n° de “ <i>inputs</i> ”) histórias de forças nodais aplicadas (independentes)
f_{Nyq}	Frequência de Nyquist (em Hz)
h	Função de resposta a um impulso
$\underline{h} = \underline{k}^{-1}$	Matriz de flexibilidade
k	Rigidez
\underline{k}	Matriz de rigidez
m	Massa
\underline{m}	Matriz de massa
n_d	Número total de segmentos utilizados
\underline{q}	Vetor das coordenadas modais (formulação em deslocamentos)
$\dot{\underline{q}}$	Vetor das derivadas das coordenadas modais em ordem ao tempo
$\ddot{\underline{q}}$	Vetor das segundas derivadas das coordenadas modais em ordem ao tempo
\underline{s}	Matriz da distribuição espacial das n_1 histórias de forças nodais pelos vários GL
t	Tempo
t_k	Instante de tempo k

u_0	Deslocamento inicial
u_k	Valor medido no instante k da amostragem
u_p	Solução particular
\underline{u}	Vetor de deslocamentos
$\dot{\underline{u}}$	Vetor de velocidades
$\ddot{\underline{u}}$	Vetor de acelerações
v_0	Velocidade inicial
v_m	Valor médio de uma função
\underline{v}	Vetor de velocidades na formulação de estado
$\dot{\underline{v}}$	Vetor de acelerações na formulação de estado
\underline{x}	Vetor de estado (deslocamentos e velocidades)
z_n	Coordenada modal de estado do modo n
\underline{z}	Vetor das coordenadas modais de estado
$\dot{\underline{z}}$	Derivada do vetor das coordenadas modais de estado

Gregas maiúsculas

$\underline{\Phi}$	Matriz modal
$\underline{\Phi}_E$	Matriz modal no espaço de estados

Gregas minúsculas

α	Constante de amortecimento de <i>Rayleigh</i>
α_n	Coefficiente de normalização da matriz modal de um modo n
β	Constante de amortecimento de <i>Rayleigh</i>
ε	Deformações
ϕ	Vetor modal
ϕ_E	Vetor modal no espaço de estados
ν	Coefficiente de Poisson
$\theta_{(nm)}$	Ângulo de fase da vibração de um modo n, no grau de liberdade m
λ	Valores próprios de um sistema estrutural
$\underline{\lambda}$	Matriz de valores próprios de um sistema estrutural (diagonal)
$\bar{\lambda}$	Conjugado da matriz de valores próprios de um sistema
λ_E	Valores próprios da matriz de estado
$\underline{\lambda}_E$	Matriz diagonal com os valores próprios de um sistema no espaço de estados
$\rho_{(nm)}$	Amplitude da vibração do modo n, no grau de liberdade m
σ	Tensão
τ	Instante de tempo (t) genérico
ω_a	Frequência angular de amortecimento (em rad/s)

ω_n	Frequência natural de um modo n (em rad/s)
ξ	Coefficiente de amortecimento relativo ($\xi = c/c_{cr} = c/2\sqrt{km}$)
ξ_n	Amortecimento modal referente a um modo n

Abreviaturas (siglas)

DEP	Densidade Espetral de Potência
EF	Elementos finitos
FFT	<i>Fast Fourier Transform</i>
GL	Grau de Liberdade
RAAD	Recolha e análise automática de dados
SVC	Sub-viaduto Central
TDF	Transformada Discreta de Fourier

1

Introdução

“Discoveries are often made by not following instructions, by going off the main road, by trying the untried.”

- Frank Tyger

1.1 Justificação e enquadramento

Ao longo dos últimos séculos, o desenvolvimento dos sistemas estruturais utilizados em pontes e viadutos, tem sido orientado na perspetiva de interligar três fatores fundamentais para a simbiose homem-estrutura: forma, função e estética. Desde cedo se começou a perceber que o projeto de estruturas não podia estar limitado apenas a um desses fatores e por isso a inovação nesta área sempre foi uma constante. As pontes de tirantes surgem precisamente nesta linha de inovação. Em Portugal existem várias pontes deste tipo, sendo o viaduto do Corgo (Figura 1.1) das mais recentes. Este viaduto localiza-se perto da cidade de Vila Real e surgiu como solução para a travessia do vale do rio Corgo pela Autoestrada Transmontana. Neste viaduto, de quatro semi-leques de 22 tirantes, faz-se a travessia a uma altura máxima de 230 metros acima do leito do rio Corgo e apresenta-se com 4 vias de trânsito de 3,5 metros e uma largura total de plataforma de 25,3 metros. O seu comprimento total é de 2796 metros.



Figura 1.1 - Viaduto do Corgo.

Tanto no estudo do comportamento estático como no estudo do comportamento dinâmico, várias técnicas de cálculo e análise têm vindo a ser desenvolvidas, tais como o método dos elementos finitos e a análise espectral, muito pela ajuda da utilização de métodos computacionais (Andersen P. , Brincker, Ventura, & Cantieni, 2008). A programação veio permitir uma enorme rentabilização de tempo, resolvendo milhares de equações e executando milhares de funções, em poucos segundos e com uma enorme eficiência (Andersen P. , Brincker, Goursat, & Mevel, 2007). Por isso, hoje em dia, vão sendo criados programas cada vez mais sofisticados que permitem ao utilizador introduzir, por exemplo, informações relativas a materiais e geometria de uma estrutura, carregamentos, registos de vibração ambiental e/ou sísmica (Figura 1.2), etc., e efetuar cálculos estáticos e dinâmicos (Caetano, 2000).



Figura 1.2 - Registos de vibração ambiental.

Desta forma, é possível fazer-se a monitorização constante de estruturas através de registos de vibração ambiental. A sua análise é automática e traduz-se em resultados muito fiáveis.

A liberdade para criar programas com diferentes funcionalidades e diferentes formas gráficas de apresentar a informação output é uma mais-valia. O domínio da programação aplicada à engenharia civil permite que sejam desenvolvidos programas com funções muito específicas (Figura 1.3a), facilitando também ao utilizador a adaptação de programas ou funções já existentes. É já bastante usual a utilização de programas como o Fortran ou o MATLAB, na engenharia civil.

O ANSYS é um programa comercial muito utilizado em várias áreas da engenharia e que é conhecido pela sua rapidez e poder de cálculo. No âmbito da engenharia de estruturas, é possível modelar qualquer tipo de estrutura (Figura 1.3b), permitindo ao utilizador escolher vários tipos de barra, como os beam188 (elementos de viga) e os link180 (elementos de tirante), e a eles associar uma geometria e material.

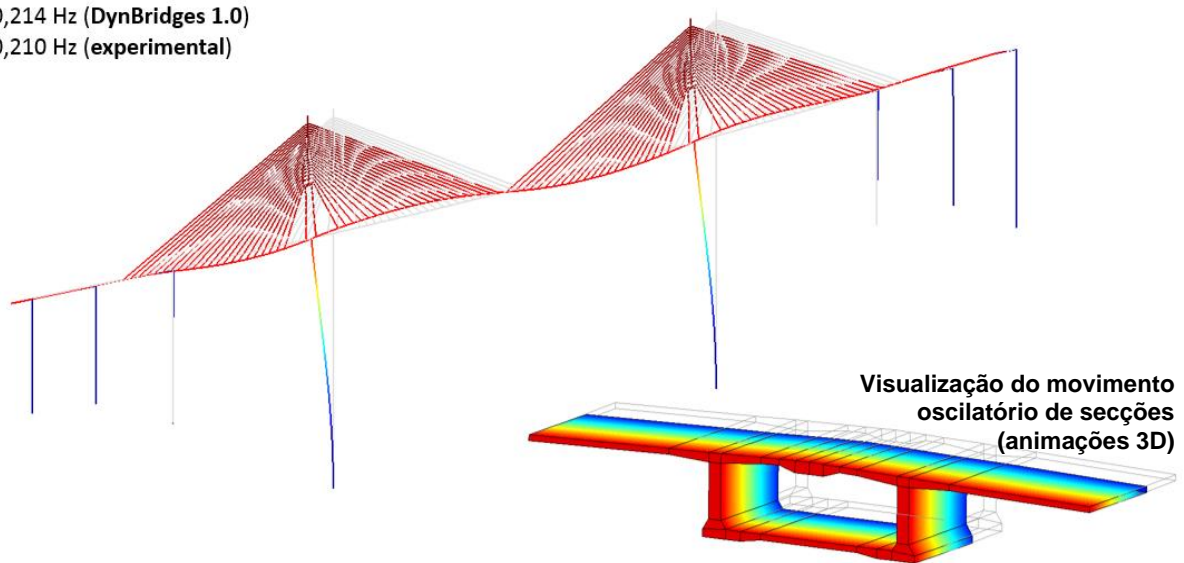
Modelos de elementos finitos de barra

a) *MODELO NUMÉRICO DYNBRIDGES 1.0 (DESENVOLVIDO EM MATLAB)*

Modo 1. Flexão longitudinal do tabuleiro

$f = 0,214$ Hz (DynBridges 1.0)

$f = 0,210$ Hz (experimental)



b) *MODELO NUMÉRICO ANSYS MECHANICAL APDL*

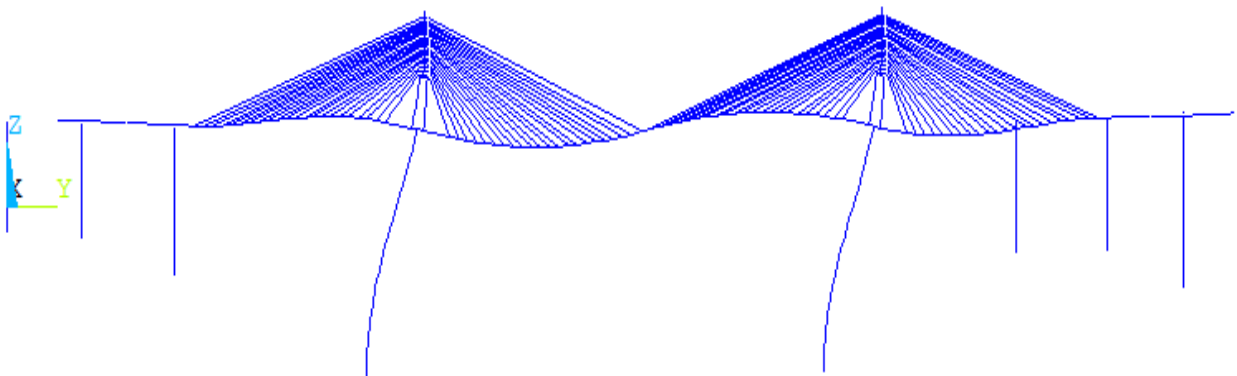


Figura 1.3 - Modelos de elementos finitos de barra: a) output do programa **DynBridges 1.0** (MATLAB);

b) output do programa **ANSYS Mechanical APDL**.

1.2 Objetivos da dissertação

O objetivo principal da dissertação é mostrar que, a partir de resultados de ensaios de vibração ambiente em viadutos atirantados, é possível obter resultados com interesse para a calibração de modelos numéricos, mesmo quando se utiliza um reduzido número de sensores.

Em particular, um dos objetivos é mostrar que, no caso do viaduto do Corgo, é possível obter os principais parâmetros modais (nomeadamente, frequências naturais e configurações dos primeiros modos de vibração), instrumentando apenas a secção central (meio vão do Sub-viaduto central). Desta forma, tem-se como objetivo mostrar que, com base num ensaio de vibração ambiente de baixo custo, envolvendo apenas 6 acelerómetros na referida secção central (próximos do sistema de digitalização e aquisição, o que não exige cabos de grande comprimento), é possível obter resultados com grande interesse para a calibração de modelos numéricos. Salienta-se que, sobretudo nestes casos em que se utiliza pouca instrumentação, é fundamental acompanhar a interpretação dos resultados dos ensaios, recorrendo a simulações computacionais. É de referir, desde já, que a medição de vibrações foi efetuada no âmbito de um projeto de investigação financiado pela FCT, denominado “*Integração de dados GNSS e de acelerómetros na monitorização de grandes estruturas*” (FEUP-LNEC): neste caso de aplicação ao viaduto do Corgo, visava-se medir deslocamentos na secção central com GNSS durante o ensaio de carga (realizado antes da obra entrar em serviço) e simultaneamente medir acelerações, com vista a efetuar a fusão de deslocamentos e acelerações na perspetiva de melhorar a qualidade das séries de deslocamentos medidos.

Foi também objetivo desta dissertação desenvolver um programa em MATLAB, para análise dinâmica de estruturas reticuladas (EF barra 3D), denominado **DynBridges 1.0**, que permitisse:

- i) a análise e processamento dos registos dos ensaios com vista na identificação modal do viaduto;
- ii) cálculo numérico de um modelo de EF de barra 3D; e
- iii) a comparação integrada dos resultados experimentais com os numéricos.

A identificação modal é feita através de espetros de amplitude, ângulos de fase, matrizes de densidade espectral de potência e valores e vetores singulares, traduzindo as características dinâmicas do viaduto em termos de frequências naturais e modos de vibração. É possível analisarem-se os resultados experimentais de uma forma interativa, já que no programa se oferece a possibilidade de visualizar animações dos modos de vibração, não só de toda a estrutura, mas também de representações tridimensionais de algumas secções, nomeadamente da secção instrumentada (secção de meio vão).

Foi ainda objetivo analisar o mesmo modelo numérico recorrendo ao programa comercial **ANSYS Mechanical APDL**, com vista a obter resultados para comparar com os do programa **DynBridges 1.0**.

1.3 Estruturação do trabalho

Capítulo 2 - Pontes de tirantes

Neste capítulo, faz-se referência às principais pontes e viadutos de tirantes da Era Moderna, dando ênfase à importância da monitorização da segurança das estruturas.

Começa-se por fazer uma breve introdução acerca dos primeiros sistemas atirantados concebidos pelo Homem e como evoluíram até à atualidade. Destacam-se algumas das mais vistosas pontes de tirantes, atualmente em serviço em todo o Mundo. São depois explicados quais os tipos de sistemas estruturais com elementos de tirantes mais correntemente utilizados, fazendo referência ao sistema estrutural utilizado no viaduto do Corgo.

É também abordada a importância da monitorização da segurança de estruturas, com base em análises dinâmicas, bem como na automatização dos muitos processos que envolvem a interpretação dos registos de vibração medidos.

Capítulo 3 - Análise dinâmica. Ensaios de vibração e modelação com elementos finitos de barra

Neste capítulo, são abordados os fundamentos da dinâmica de estruturas, bem como a análise matricial de estruturas reticuladas.

Começa-se por introduzir os conceitos fundamentais da dinâmica de estruturas, exemplificando o movimento oscilatório e equilíbrio de forças de osciladores com 1 grau de liberdade, no domínio do tempo, onde são desenvolvidas as formulações clássica e no espaço de estados. De seguida, são analisados osciladores com vários graus de liberdade, também eles no domínio do tempo e para as anteriores formulações.

Depois são explicados os fundamentos da dinâmica de estruturas no domínio da frequência, onde se desenvolve o conceito de análise de sinal de funções discretas, desde a onda harmónica à Transformada Discreta de Fourier. Com isto, aborda-se a utilização de programas informáticos na automatização do processamento e análise de sinais, com vista à criação de modelos de identificação modal, utilizando o exemplo de um modelo de identificação modal de um tabuleiro, onde se mediram três séries de registos de acelerações.

Por fim, introduzem-se as teorias e conceitos da análise matricial de estruturas reticuladas, explicando detalhadamente como abordar uma estrutura discretizada em nós e elementos.

Capítulo 4 - Desenvolvimento em MATLAB do programa **DynBridges 1.0**

Neste capítulo, é explicado em detalhe como foi desenvolvido o programa **DynBridges 1.0**, que permite calcular os modos de vibração de estruturas com elementos de barra 3D.

Explica-se a forma de organizar o ficheiro *input* do programa, onde estão contidas todas as informações relativas à geometria, materiais e secções da estrutura, lido pelo programa. É depois explicada detalhadamente toda a programação das funções desenvolvidas no programa, quais as suas formas de output e que cuidados foram tidos em conta para a sua formulação, aproximando-a o mais possível da realidade.

Capítulo 5 - Ensaio de vibração no viaduto do Corgo

Neste capítulo, analisam-se os resultados obtidos num ensaio de vibração ambiental e, posteriormente, comparam-se com os resultados obtidos nos programas **DynBridges 1.0** e ANSYS.

Começa-se por fazer uma breve apresentação do viaduto do Corgo, de alguns métodos utilizados na sua construção e de algumas das suas características estruturais, de forma a melhor compreender as várias opções tomadas para a modelação do viaduto nos programas **DynBridges 1.0** e ANSYS. São explicadas as considerações tomadas para efetuar os registos, no que toca às características dos acelerómetros e ao seus locais de instalação estratégicos, sendo esta uma parte fulcral na identificação modal a desenvolver.

De seguida, é feita a identificação modal através dos resultados experimentais do ensaio de vibração, de onde se obtém as frequências naturais da estrutura e algumas configurações modais possíveis, em função do local de instalação dos aparelhos. Depois de modulado o viaduto nos programas **DynBridges 1.0** e ANSYS, e ao verificar-se a semelhança de resultados obtidos entre ambos, foi possível comparar as configurações modais obtidas a partir dos resultados experimentais, com as configurações modais a partir dos dois modelos matemáticos. São por fim apresentados os resultados dos primeiros 5 modos de vibração da estrutura.

2

Pontes de tirantes

“The walls between art and engineering exist only in our minds.”

- Theo Jansen

2.1 Considerações iniciais

As razões para a escolha de uma ponte de tirantes como solução estrutural, passam muito pela sua eficácia estrutural, bem como pela elegância e inserção no meio natural. Apesar da sua complexidade estrutural, integram-se bem na paisagem, sendo altamente eficazes tanto do ponto de vista estético, como funcional (Chatterjee, 2003).

Por questões de segurança, a monitorização de estruturas de grande envergadura tem vindo a assumir uma importância crescente. Sejam edifícios, pontes ou barragens, a monitorização em contínuo da sua integridade estrutural, recorrendo a sensores térmicos, acelerómetros, anemómetros, extensómetros, etc., é atualmente uma prática corrente. Desde as inspeções visuais, à monitorização com base em sistemas RAAD (recolha e análise automática de dados), os progressos têm sido enormes, já que hoje em dia é possível utilizar meios computacionais para gerar e interpretar registos de dados observados, dos quais se pode tirar conclusões acerca da segurança estrutural e/ou informação útil para calibração de modelos numéricos (Costa & Rodrigues, 2001).

2.2 Da sua origem à atualidade

A ideia de utilizar cabos para suportar o peso de elementos estruturais como tabuleiros de pontes vem já de há muitos séculos atrás. A necessidade de atravessar rios ou falésias, ou de navegar os mares, levou à necessidade de se inovar neste domínio da engenharia de estruturas. Desde a utilização de materiais naturais, como as lianas, para segurar tabuleiros em bamboo, à utilização de cordas para segurar os mastros dos barcos, é possível perceber que estes sistemas estruturais já eram dimensionados com base em alguns dos princípios teóricos dos sistemas estruturais compostos por tirantes (Figura 2.1). A grande evolução destes sistemas estruturais passou principalmente pelo desenvolvimento da tecnologia dos materiais, dos métodos computacionais de análise e de novos instrumentos de monitorização, permitindo aumentar a eficácia destes sistemas, em função das crescentes exigências de comprimento das pontes e da capacidade de suporte das cargas a que iriam estar sujeitas (Fujino, Kimura, & Tanaka, 2012).

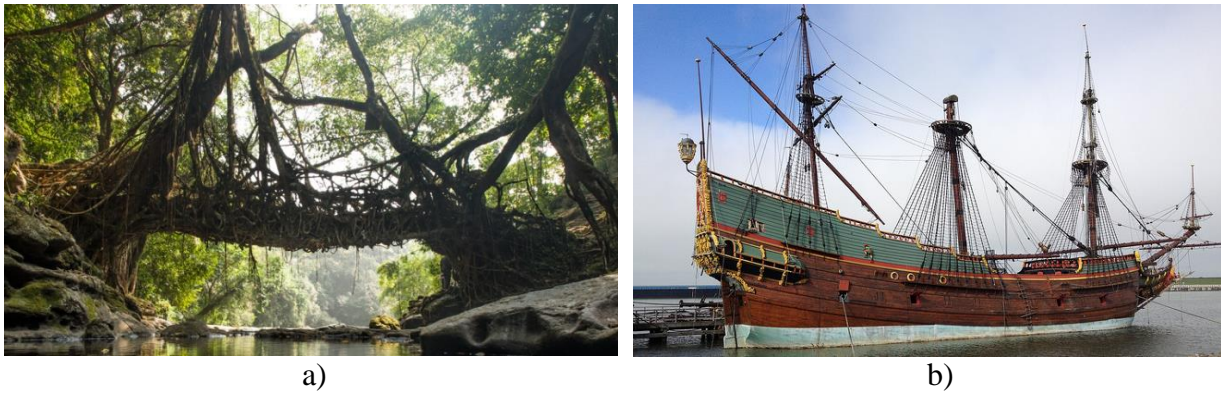


Figura 2.1 - Cabos ou cordas como elementos estruturais: a) ponte de lianas; b) equilíbrio de mastros nos barcos.

Pensa-se que o polímato croata Fausto Veranzio (Figura 2.2a) foi o primeiro a idealizar uma ponte com um sistema de tirantes (Figura 2.2b), publicado no seu livro *Machinae Novae*, no início do século XVII. No entanto, até hoje, apenas se conseguiu provar que a primeira ponte de tirantes com amarrações inclinadas foi construída já no século XIX.

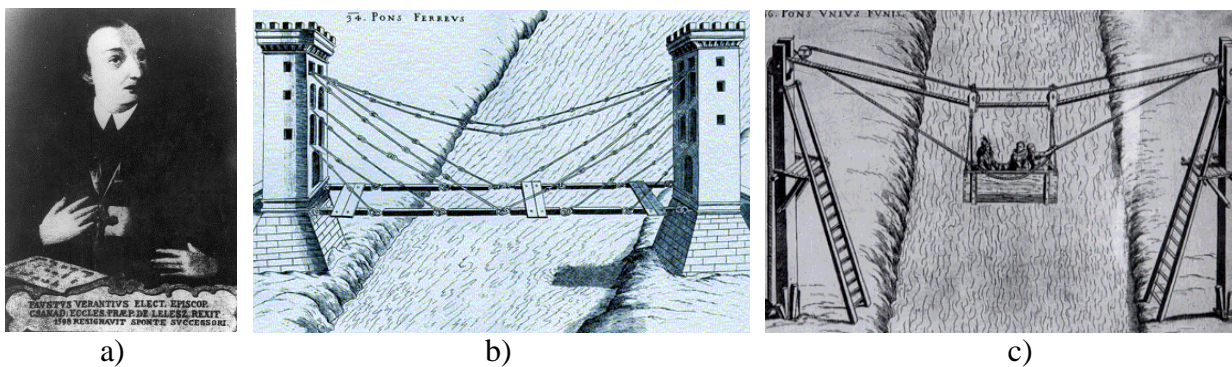


Figura 2.2 - a) Fausto Veranzio, ou Faust Vrancic (1551-1617); b) desenho de uma ponte de tirantes idealizada no início do século XVII (Fausto Veranzio, *Machinae Novae*); c) desenho de uma estrutura suportada por cordas, idealizada para testar saltos de páraquedas (Fausto Veranzio, *Machinae Novae*).

Mesmo depois de inúmeras tentativas, por parte de arquitetos e engenheiros ingleses e escoceses, para conceber pontes de tirantes que garantissem a sua total viabilidade em serviço, muitas foram as que ruíram, como a ponte de Dryburgh Abbey, em 1818, e a ponte de Nienburg, em 1824, levando à interrupção da utilização deste tipo de sistema em pontes durante um século. Apenas em meados do século XX, se voltou a iniciar o grande desenvolvimento da conceção das pontes e viadutos de tirantes. Historicamente é difícil dizer qual a primeira ponte de tirantes a ser construída. No entanto, a mais citada ponte como a primeira ponte atirantada da Era Moderna, é a ponte de Strömsund (Figura 2.3), na Suécia, desenhada por Franz Dischinger em 1955, entrando em serviço um ano mais tarde e apresentando-se com 332 m de comprimento e vão central de 182 m. Hoje em dia, a construção de pontes de tirantes é frequente, já que se tornaram economicamente mais viáveis que as pontes suspensas até um certo comprimento de vão.



Figura 2.3 - Ponte de Strömsund, Suécia (1956).

Atualmente, a mais longa ponte de tirantes do mundo é a ponte de Jiaxing-Shaoxing, na China, com um comprimento total de 10.138 m, acomodando seis vias de trânsito e constituída por 6 mastros de 227 m (Figura 2.4). Destacam-se também as pontes Basarab Overpass, na Roménia, pela maior largura de tabuleiro com 44,5 m (Figura 2.5); a Russky, na Rússia, com o maior vão, de 1104 m (Figura 2.5); a Centenario, no Panamá, fazendo a travessia de seis vias de trânsito sobre o canal do Panamá (Figura 2.6); a Octavio Frias de Oliveira, no Brasil, que cruza duas faixas de rodagem sobrepostas, no mastro (Figura 2.7); a Vasco da Gama, em Portugal, sendo a ponte mais longa da Europa (Figura 2.8); e a Zhivopisny, na Rússia, sendo a ponte de tirantes mais alta da Europa (Figura 2.9).



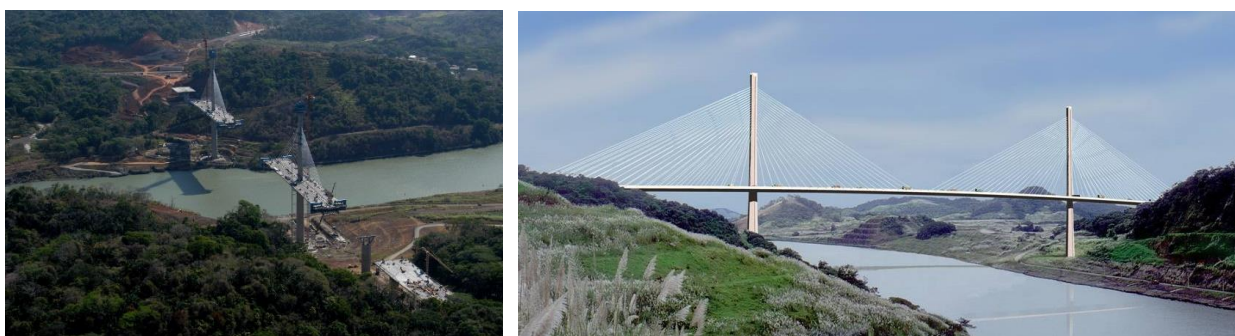
Figura 2.4 - Ponte Jiaxing-Shaoxing, China (2013).



a)

b)

Figura 2.5 - a) Ponte Russky, Rússia (2012); b) Ponte Basarad Overpass, Roménia (2011).



a)

b)

Figura 2.6 - Ponte Centenario, Panamá (2004): a) fase de construção; b) em serviço.



a)

b)

Figura 2.7 - Ponte Octavio Frias de Oliveira, Brasil (2008): a) fase de construção; b) em serviço.

No entanto, algumas restrições surgem ao aumentar-se o vão suspenso, uma vez que os tirantes induzem forças de compressão muito elevadas no tabuleiro, e o comprimento e secção dos cabos torna a obra economicamente pouco viável. Assumiu-se assim que a melhor opção, para vãos superiores a 1500 metros, seriam as pontes suspensas (Xanthakos, 1994).

Muitas restrições e obstáculos, no dimensionamento de pontes de tirantes, vão sendo ultrapassados pela conjugação do progressivo desenvolvimento tecnológico dos sistemas estruturais e materiais utilizados (aço e betão), com os métodos numéricos utilizados para análise estrutural .

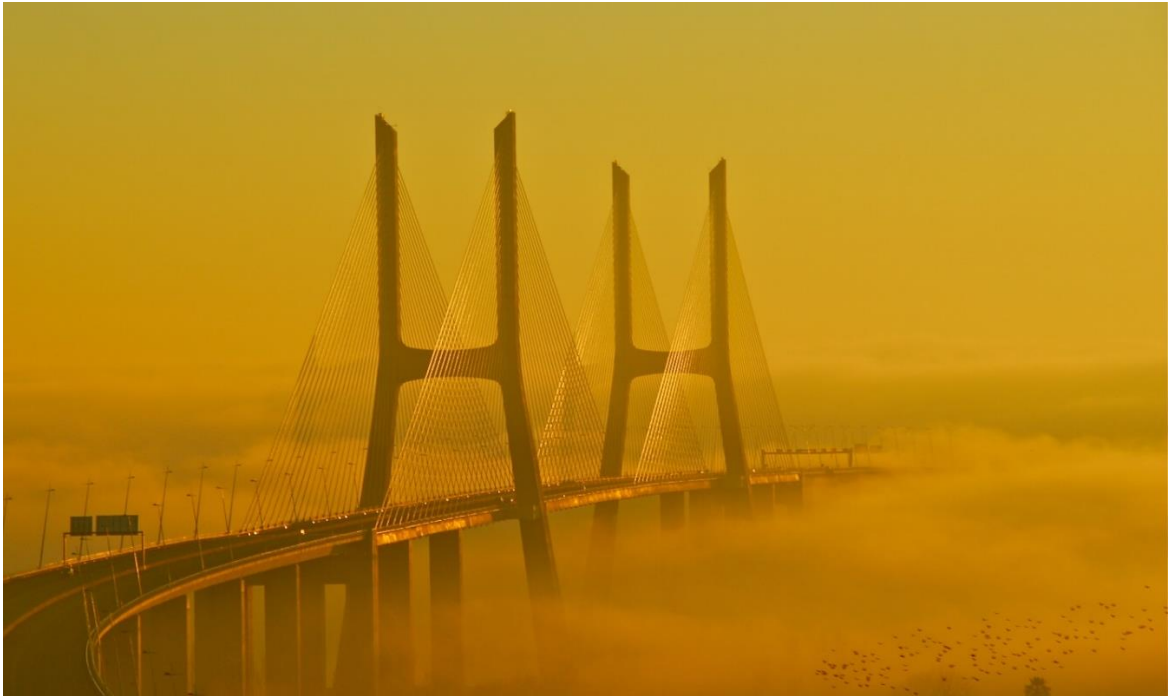


Figura 2.8 - Ponte Vasco da Gama, Portugal (1998).



Figura 2.9 - Ponte Zhipovisny, Rússia (2007).

2.3 Constituição e concepção estrutural

Na era atual, as exigências estéticas para concepção de estruturas de elevado porte são globalmente tomadas em consideração, como se referiu anteriormente. Pode-se considerar que, à parte das exigências sociais e estruturais, a simbiose Homem-Estrutura-Natureza é o fator fundamental quando se desenha e projeta uma ponte. Essas exigências passam por um sistema estrutural com boas proporções, boa integração no ambiente, boa escolha dos materiais e da cor, com um fluxo de forças simples e com iluminação e simplicidade. Pode-se assim garantir que, além de cumpridas as exigências sociais que levam à necessidade de construir uma ponte, é também assegurada a integridade da paisagem onde a mesma se insere, quer no meio natural (Figura 2.10), quer no meio citadino.

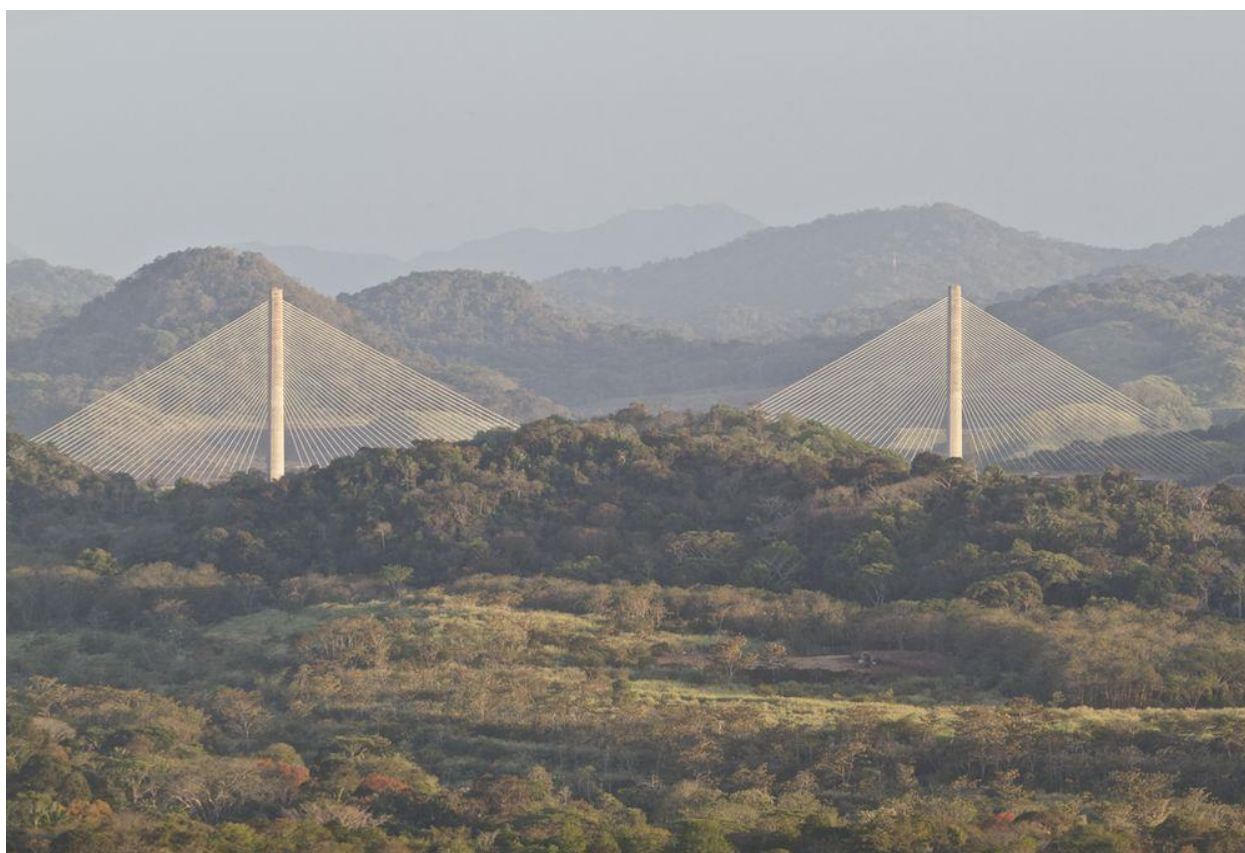


Figura 2.10 - Inserção da ponte Centenario na paisagem natural do canal do Panamá.

Uma ponte de tirantes é geralmente constituída por tabuleiro, mastros, tirantes, pilares e sapatas. O tabuleiro, funcionando à compressão e à flexão, é responsável por suportar as cargas e transferir os esforços para os tirantes e pilares (Figura 2.11). Por sua vez, os esforços recebidos pelos tirantes, funcionando à tração, são transferidos para os respectivos mastros. Tanto os pilares, como os mastros funcionam à compressão, sendo os primeiros responsáveis por transmitir os esforços para as sapatas, que por sua vez os transmitem para o terreno (Walther, Houriet, Isler, Moia, & Klein, 1999).

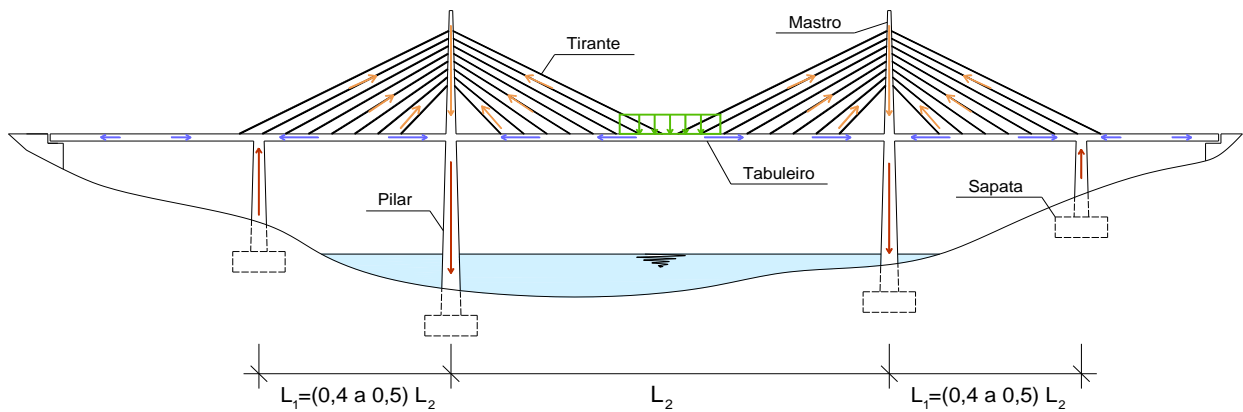


Figura 2.11 - Fluxo de transmissão de esforços desde o tabuleiro, até ao terreno. Representam-se a verde as cargas exemplo aplicadas sobre o tabuleiro; a laranja a transmissão de esforços dos tirantes, provenientes do tabuleiro, para os mastros e dos mastros para os pilares; a azul a transmissão de esforços do tabuleiro diretamente para os pilares; e a castanho a transmissão de esforços dos pilares até às sapatas.

Em geral, o tabuleiro é constituído por betão armado pré-esforçado, sendo os tirantes de aço e os mastros, pilares e sapatas em betão armado. No entanto, a sua conceção em termos de sistemas estruturais varia muito, existindo, hoje em dia, um vasto número de estilos diferentes de sistemas de suspensão atirantados. A maioria das pontes de tirantes existentes consistem em dois panos de cabos. No entanto, várias são as que foram recentemente construídas com sucesso, apenas por um pano central de cabos. O elemento final na determinação da disposição dos cabos é o espaçamento longitudinal dos vãos.

2.3.1 Número de panos de tirantes

2.3.1.1 Suspensão central

Sob a ação de cargas móveis, a deformada da estrutura depende essencialmente da rigidez dos pilares e do sistema de suspensão. O tabuleiro está sujeito a deslocamentos impostos e a sua flexão longitudinal aumenta com a rigidez. A mais notável vantagem destes sistemas é sem dúvida de natureza estética: a presença de apenas um pano central evita qualquer perceção visual de cruzamento de cabos, conferindo-lhe uma elegância inegável, tal como se pôde verificar na ponte Centenario ou no viaduto do Corgo (Figura 2.12). Esta impressão de luz e naturalidade é ainda maior ao serem usados mastros centrais delgados. No entanto, conceber mastros no centro das faixas de rodagem implica aumentar a largura do tabuleiro e, ao lidar com pontes de grandes dimensões ou com vãos extensos, a utilização de suspensão central leva a excessivos esforços de torção.



Figura 2.12 - Ponte atirantada com suspensão central (viaduto do Corgo, Portugal, 2014).

2.3.1.2 Suspensão lateral

A maioria das pontes de tirantes construídas até à data são constituídas por sistemas de suspensão lateral (Figura 2.13). A largura do tabuleiro depende da distância mínima da faixa de rodagem aos mastros, podendo este problema ser contornado, concebendo as pernas dos mastros fora do tabuleiro. Isto faz com que os mastros estejam colocados num plano exterior ao da ligação tirantes-tabuleiro, levando a que, geralmente, seja necessário criar um equilíbrio de flexão transversa do mastro, gerado pelo desvio dos cabos, através de ancoragens superiores.



Figura 2.13 - Ponte atirantada com suspensão lateral (ponte Great Seto, Japão, 1988).

2.3.2 Configuração longitudinal

Na Figura 2.15, estão representados os sistemas de atirantamento mais comuns. Entre estes três, existem relações de vantagem e desvantagem, no que toca à sua inclinação com o plano horizontal e ao local e tipo de ancoragem dos tirantes nos mastros. A componente vertical da força num tirante é semelhante em todos eles, mas quanto maior for o ângulo que os tirantes fazem com o plano horizontal, menor terão de ser as suas secções, diminuindo a sua área, e por isso diminuindo o custo global da estrutura, já que os tirantes são um dos elementos principais no custo destas obras.

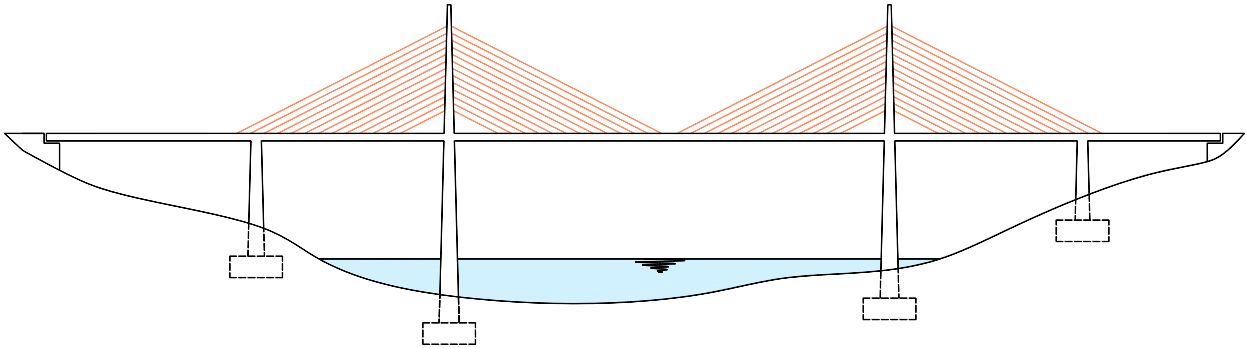
Na Figura 2.15b, está representado o sistema de atirantamento em leque, onde se pode observar que todos os tirantes estão ancorados no topo do mastro, fazendo com que os ângulos com a horizontal sejam superiores. No entanto, esta concentração de esforços no topo do mastro poderá produzir momentos fletores muito elevados sob ações assimétricas ou ações dinâmicas, acabando por ser significativo no custo da obra. Por outro lado, na Figura 2.15a, o sistema em harpa é composto por tirantes paralelos, ancorados ao longo dos mastros, obrigando a conceber mastros mais altos de forma a compensar a inclinação média dos tirantes. A Figura 2.15c, representa uma opção intermédia às duas anteriores, eliminando o problema da concentração de esforços no topo dos pilares e procura manter uma inclinação o mais elevada possível. Todas estas opções passam por fazer uma análise custo-benefício, envolvendo o peso dos tirantes, a altura dos mastros e qual a quantidade de esforços nestes imposta. Devido a condições topográficas desfavoráveis ou à necessidade de se apresentar uma estrutura com um reduzido impacto visual ou com o mínimo de obstáculos físicos, pode surgir a situação em que a ponte terá de fazer a travessia com apenas um vão. Dessa forma, são muitas vezes concebidos sistemas de tirantes com formas assimétricas variadas, sendo limitadas apenas por razões estéticas ou pelas condições geotécnicas, como é, por exemplo, o caso da ponte Zhivopisny (Figura 2.9) e da ponte Samuel Beckett, em Dublin (Figura 2.14).



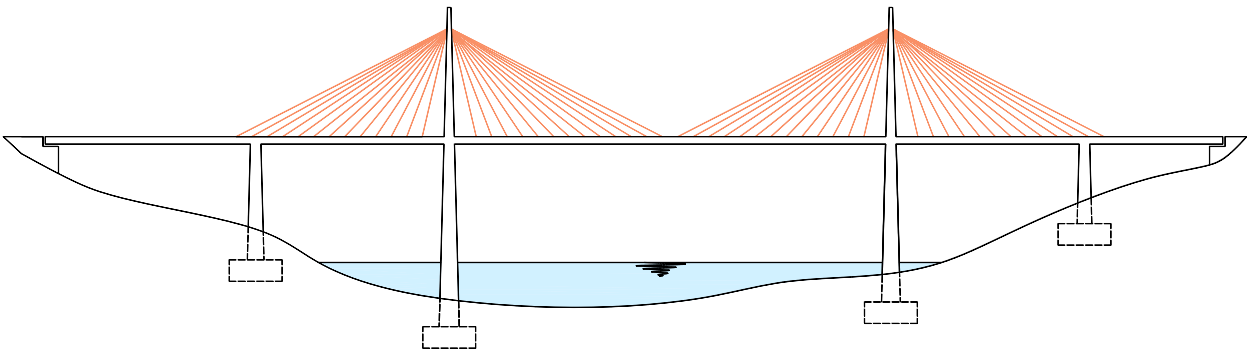
Figura 2.14 - Ponte Samuel Beckett, Irlanda (2009).

Sistemas de suspensão atirantados clássicos

a) *SISTEMA EM HARPA*



b) *SISTEMA EM LEQUE*



c) *SISTEMA EM SEMI-LEQUE*

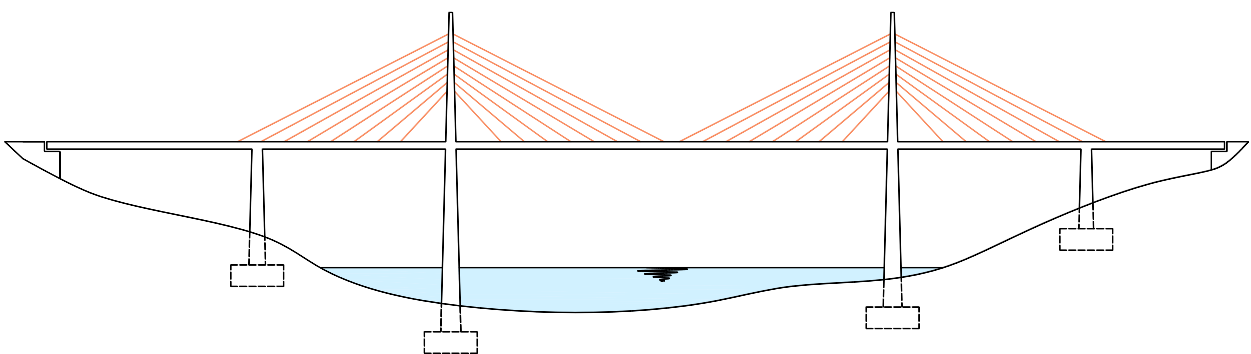


Figura 2.15 - Sistemas de suspensão atirantados: a) Sistema em Harpa, com tirantes paralelos e ancorados ao longo do mastro; b) Sistema em Leque, com tirantes ancorados apenas no topo do mastro; c) Sistema em Semi-leque, com tirantes não paralelos e ancorados ao longo do mastro.

2.3.3 Espaçamento dos cabos

As primeiras pontes de tirantes da Era Moderna foram construídas com um número reduzido de tirantes, por vezes espaçados de 70 metros (Figura 2.3). Isso fez com que as secções transversais dos tabuleiros chegassem a tomar 5 metros de altura, um facto que não é mais competitivo nos dias de hoje, pelo menos para estruturas de grande envergadura. Uma espessura de tabuleiro tão grande requer uma grande quantidade de materiais e de equipamentos de elevação mais caros, podendo, em casos extremos, levar à necessidade de se construir cimbramento.

Data de 1967, a primeira ponte que utilizava panos com vários tirantes, de espaçamentos relativamente pequenos (Figura 2.16). Este sistema apresenta inúmeras vantagens desde a moderada flexão longitudinal do tabuleiro, devido aos vários apoios elásticos, até ao tamanho reduzido dos tirantes, facilitando a sua instalação e substituição.



Figura 2.16 - Ponte Friedrich Ebert, Alemanha (1967).

O espaçamento máximo dos tirantes depende de vários parâmetros, em particular da largura e da geometria da secção do tabuleiro, mas, acima de tudo, depende dos equipamentos de elevação e de construção do tabuleiro. Se o tabuleiro for construído por secções pré-fabricadas, é necessário aplicar pré-esforço durante a sua elevação, de forma a encaixar as secções umas nas outras. Se, por outro lado, o tabuleiro for betonado *in situ*, é possível fazer uso direto dos tirantes para suporte das aduelas.

2.3.4 Tabuleiro

Na altura em que se começaram a construir pontes de tirantes, cujos panos continham um reduzido número de cabos, a espessura dos tabuleiros, geralmente constituídos por aço, era elevada e com ela aumentava o peso próprio destes. Conforme foram surgindo pontes de panos com múltiplos cabos, foi possível reduzir a espessura dos tabuleiros, surgindo os tabuleiros em betão armado e betão armado pré-esforçado (Figura 2.17).

Para pontes que usam suspensão lateral, é possível usarem-se tabuleiros mais delgados, já que os esforços de torção são quase desprezáveis. Por isso, as suas dimensões mínimas são principalmente influenciadas pela flexão transversal e por cargas concentradas introduzidas pelas ancoragens dos cabos. O aumento dos esforços de flexão longitudinal e transversal são proporcionais ao aumento da largura do tabuleiro, fazendo também com que os esforços nos tirantes sejam maiores. Deve-se sempre procurar estabelecer um equilíbrio entre a eficiência estrutural e o custo total da obra, após um estudo intensivo de todos estes fatores que influênciam a sua geometria e economia.

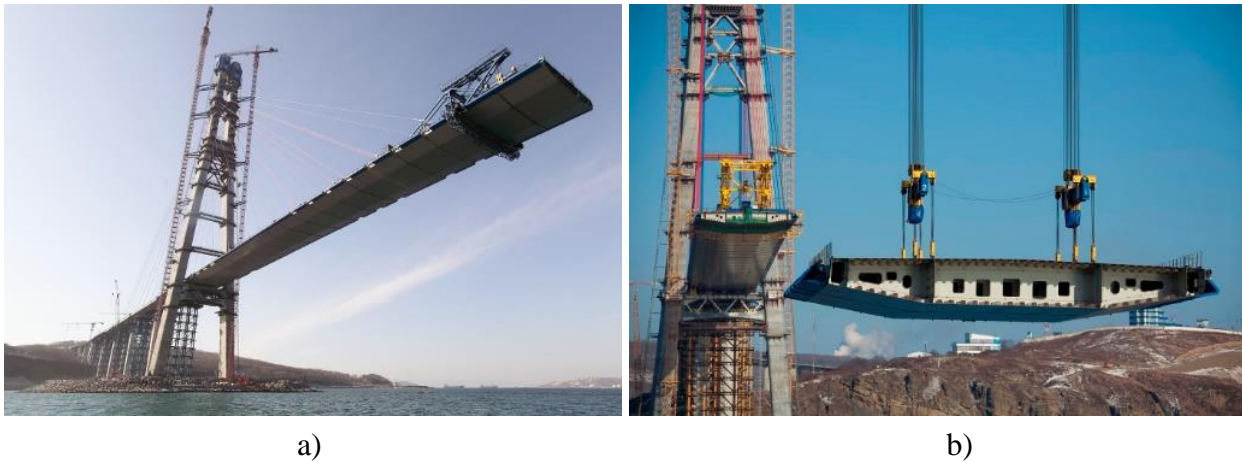


Figura 2.17 - Ponte Russky, Rússia: a) construção do tabuleiro por avanços sucessivos; b) elevação de uma aduela pré-fabricada do tabuleiro.

2.4 Monitorização e controlo da segurança

No projeto e orçamento de algumas estruturas já se inclui a instalação de alguns instrumentos de monitorização, durante a fase de construção, em locais estratégicos, como sensores térmicos, acelerómetros, anemómetros, extensómetros, entre outros (Félix, 2004). Estes aparelhos permitem obter, quer em fase de construção, quer em serviço, temperaturas, acelerações, deslocamentos, rotações, extensões, velocidade do vento, etc., que posteriormente são guardados e analisados em computador. Estes computadores estão então ligados a uma central de monitorização onde podem ser consultados os dados medidos com o objetivo de se avaliar a segurança estrutural (Faria, 2010).

No caso particular dos acelerómetros, têm como função registar as acelerações de vibração de uma estrutura em determinado local, em uma ou mais direções, sendo que acelerómetros uniaxiais medem vibrações apenas numa direção (x, y ou z) e acelerómetros triaxiais medem as acelerações nas três direções (x, y e z). O número e os locais de instalação dos aparelhos variam conforme o tipo de estrutura. Em pontes de tirantes, a ação do vento e a ação dos veículos provocam vibrações importantes nos cabos, sendo por isso uma prática corrente a instalação de um ou mais acelerómetros nos mesmos (Caetano, 2007). Além de acelerómetros localizados nos tirantes (Figura 2.18), é muito importante registar também as vibrações do tabuleiro, pilares e mastros.

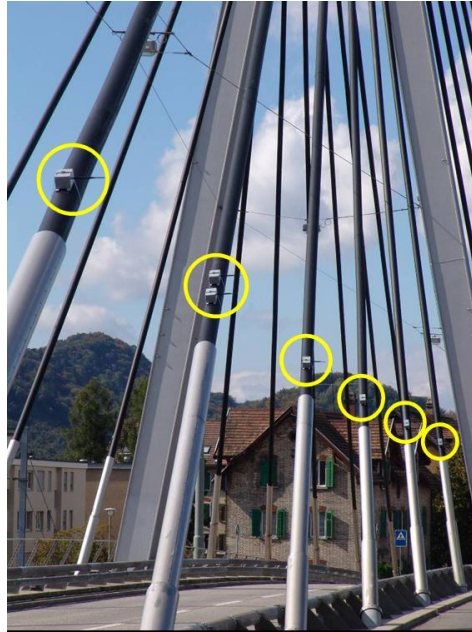


Figura 2.18 - Acelerômetros instalados em tirantes para monitorização de vibrações.

Estes acelerômetros obtêm registos contínuos que, através de análise e processamento de sinal, permitem determinar os parâmetros modais da estrutura (configurações modais e amortecimentos e frequências naturais). Este método passa por processar os acelerogramas registados, através da transformada de Fourier, de onde se obtêm os valores das frequências naturais da estrutura. Conhecendo a massa da estrutura e sabendo que a frequência natural, f , é função da rigidez, k , e da massa, m , como se pode verificar pela equação 2.1, caso haja uma variação de frequências naturais, poderá significar a ocorrência de alteração de rigidez da estrutura e, logo, possíveis danos graves na estrutura.

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{Hz}) \quad (2.1)$$

Por outro lado, através desses registos é também possível estudar o comportamento dinâmico da estrutura e com isso calibrar os modelos numéricos, com vista a efetuar futuros cálculos dinâmicos.

2.5 Considerações finais

Hoje em dia, as pontes e viadutos de tirantes são uma das soluções mais frequentes quando se exigem obras que sejam simultaneamente estrutural e esteticamente muito eficazes. Este sistema estrutural é cada vez mais escolhido para cumprir as exigências construtivas que são propostas e, por isso, são cada vez mais estudadas. Dessa forma, tal como em outros tipos de estruturas, torna-se necessário fazer a monitorização da segurança, garantindo que se mantém a sua integridade estrutural e que continua a cumprir as exigências estruturais mínimas.

Abordaram-se neste capítulo quais são essas as principais obras de arte atualmente em serviço e quais os métodos mais correntes para fazer a sua monitorização. A utilização de acelerómetros para medir as vibrações de tirantes é uma forma de, através da análise dinâmica, determinar variações significativas nas suas tensões. O mesmo se pode aplicar aos restantes elementos estruturais, como o tabuleiro ou mastros, já que permite determinar as características dinâmicas da estrutura e, através da monitorização contínua, observar eventuais variações não expectáveis nesses resultados.

3

Análise dinâmica de estruturas. Ensaio de vibração e modelação com elementos finitos de barra

“When you want to know how things really work, study them when they're coming apart.”

- William Gibson

3.1 Considerações iniciais

A monitorização de estruturas através da medição de vibrações com acelerómetros é cada vez mais utilizada no controlo da segurança. Utilizando técnicas de identificação modal analisam-se os resultados das medições (registos de acelerações) e obtêm-se as frequências naturais e as configurações dos principais modos de vibração. Estas técnicas passam por converter os sinais medidos em ondas harmónicas, através da transformada de Fourier. Ao analisar essas ondas ou os correspondentes espectros de amplitudes e de fases, podem-se tirar conclusões acerca do comportamento dinâmico da estrutura. Esse comportamento dinâmico é como que uma identidade própria, intrínseca à geometria e materiais dessa estrutura (Chopra, 1995).

Fazendo a monitorização constante e verificando variações nas características dinâmicas da mesma, é possível avaliar se há variações na sua rigidez, pois em geral não há alterações de massa significativas. Quando se detetam variações nas suas características dinâmicas, devem ser tomadas medidas para avaliar se há possíveis danos na estrutura. Outra vantagem da monitorização de estruturas, através do comportamento dinâmico, é a possibilidade de se comparar os resultados dos registos de vibração, com os resultados de modelos numéricos, em geral elaborados na fase de projeto. Isto permite, logo após a fase construção, avaliar e comparar o comportamento global da estrutura (aparelhos de apoio, ligações, rigidez dos materiais) previsto na fase de projeto, com o comportamento real que se está a verificar (Costa & Rodrigues, 2001).

3.2 Fundamentos de análise dinâmica de estruturas no domínio do tempo

3.2.1 Movimentos oscilatórios e equilíbrio de forças

No movimento oscilatório de um sistema estrutural, como é o caso de um sistema simples massa-mola-amortecedor, é necessário que se verifique o equilíbrio de forças, em cada instante de tempo t , tal como se mostra na Figura 3.1, ou seja, em cada instante, deve ser nulo o somatório de todas as forças envolvidas: forças de inércia (f_i), forças de amortecimento (f_a), forças elásticas (f_e) e forças exteriores (f).

3.2.2 Osciladores com 1 grau de liberdade. Formulação clássica e formulação no espaço de estados

3.2.2.1 Formulação clássica

Como se pode ver na Figura 3.1, as forças de inércia estão associadas à aceleração (\ddot{u}) e à massa do corpo (m), as forças de amortecimento ligadas à velocidade (\dot{u}) e coeficiente de amortecimento (c) e as forças elásticas ligadas ao deslocamento (u) e à rigidez da mola (k). Como se referiu, o somatório de todas as forças envolvidas, em cada instante, tem de ser zero.

$$f_i + f_a + f_e + f = 0 \Leftrightarrow (-m \ddot{u}) + (-c \dot{u}) + (-k u) + f = 0 \quad (3.1)$$

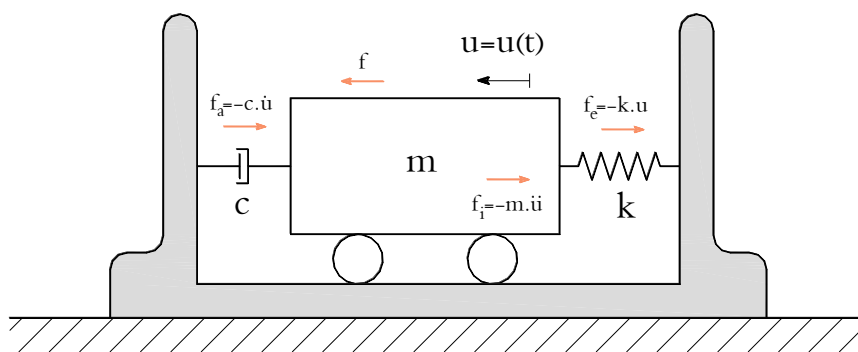


Figura 3.1 - Forças envolvidas no movimento oscilatório de um sistema massa-mola-amortecedor.

Da equação de equilíbrio anterior surge a conhecida equação diferencial do movimento oscilatório, ou equação do equilíbrio dinâmico, para um sistema de 1 grau de liberdade (GL).

$$m \ddot{u} + c \dot{u} + k u = f \quad (3.2)$$

em que $\dot{u} = \frac{du}{dt}$ e $\ddot{u} = \frac{d^2u}{dt^2}$.

Nas tabelas seguintes, apresentam-se os vários tipos de regime oscilatório que podem ocorrer, nomeadamente: regime livre sem amortecimento; regime livre com amortecimento e regime forçado com amortecimento.

Tabela 3.1 - Regime livre sem amortecimento.

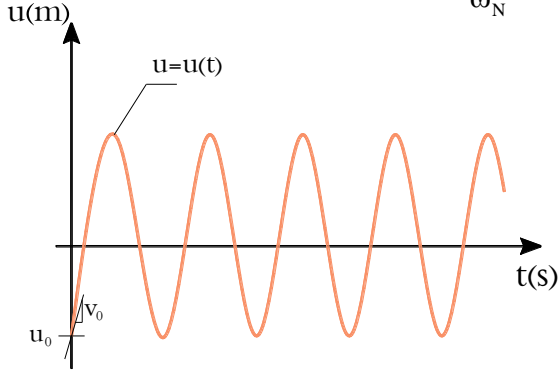
<u>Regime livre sem amortecimento</u>	
<p>Equação do movimento: $m \ddot{u} + k u = 0$ $(c = 0 ; f = 0)$</p> <p>Condições iniciais: $u(0) = u_0 ; \dot{u}(0) = v_0$</p>	<p>Solução particular: $a = u_0 \quad b = \frac{v_0}{\omega_N}$</p> 
<p>Solução geral: $u(t) = a \cos(\omega_N t) + b \sin(\omega_N t)$</p> <p>com a e $b \in \mathbb{R}$ e $\omega_N = \sqrt{\frac{k}{m}}$</p>	
<p>Para obter a solução geral da equação anterior, pode-se admitir $m=1$ e $k=1$, ficando $\ddot{u} + u = 0$. Procura-se a função $u(t)$ cuja soma com a sua segunda derivada é zero. Essa solução é da forma: $a \cos(t) + b \sin(t)$.</p>	

Tabela 3.2 - Regime livre com amortecimento.

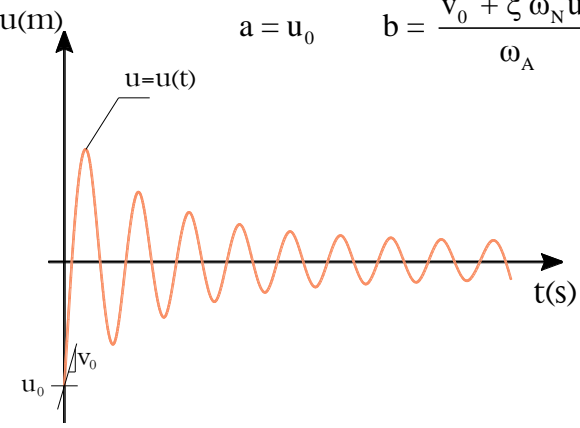
<u>Regime livre com amortecimento</u>	
<p>Equação do movimento: $m \ddot{u} + c \dot{u} + k u = 0$ $(f = 0)$</p> <p>Condições iniciais: $u(0) = u_0 ; \dot{u}(0) = v_0$</p>	<p>Solução particular: $a = u_0 \quad b = \frac{v_0 + \xi \omega_N u_0}{\omega_A}$</p> 
<p>Solução geral: $u(t) = [a \cos(\omega_A t) + b \sin(\omega_A t)] e^{-\xi \omega_n t}$</p> <p>$\omega_A = \omega_N \sqrt{1 - \xi^2} ; \xi = \frac{c}{c_{crit}} = \frac{c}{2\sqrt{k m}}$</p>	
<p>A solução da equação anterior envolve o produto por uma exponencial negativa (a amplitude da oscilação decresce, ao longo do tempo)</p>	

Tabela 3.3 - Regime forçado com amortecimento.

<u>Regime forçado com amortecimento</u>	
<p>Equação do movimento: $m \ddot{u} + c \dot{u} + k u = f$</p> <p>Condições iniciais: $u(0) = u_0$; $\dot{u}(0) = v_0$</p>	<p style="text-align: center;">Solução particular:</p>
<p style="text-align: center;">Solução geral:</p> $u(t) = [a \cos(\omega_A t) + b \sin(\omega_A t)] e^{-\xi \omega_n t} + u_p(t)$	
<p>Nesta situação, são contabilizadas todas as componentes atuantes no sistema massa-mola-amortecedor, havendo uma força exterior a atuar no corpo ao longo do tempo. A solução geral da equação é dada pela soma da solução geral de vibração livre com amortecimento (solução da equação homogénea), com uma parcela correspondente a uma solução particular $u_p(t)$, considerando a força aplicada $f = f(t)$.</p>	

A componente da solução particular, $u_p(t)$, considerando, por exemplo, uma força contínua, como é o caso da ação sísmica ou do vento, pode ser obtida através da sobreposição das respostas a uma sequência de impulsos infinitesimalmente próximos (Figura 3.2 e Figura 3.3). Esta sobreposição pode ser traduzida por um integral de convolução, designado por integral de Duhamel, que corresponde à solução particular:

$$u_p(t) = f(t) * h(t) = \int_0^t f(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (3.3)$$

em que:

Função de resposta a um impulso unitário no instante inicial $t = 0$	Função de resposta a um impulso unitário num instante genérico $t = \tau$
$h(t) = \frac{1}{m \omega_A} e^{-\xi \omega_n t} \sin(\omega_A t)$	$h(t - \tau) = \frac{1}{m \omega_A} e^{-\xi \omega_n (t - \tau)} \sin(\omega_A (t - \tau))$

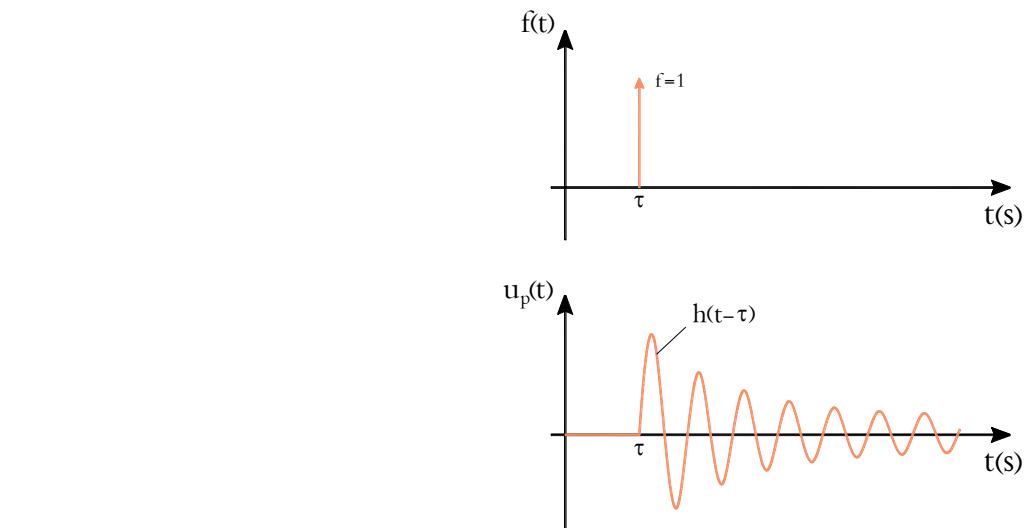


Figura 3.2 - Representação de um impulso unitário e da sua resposta para o instante genérico $t = \tau$.

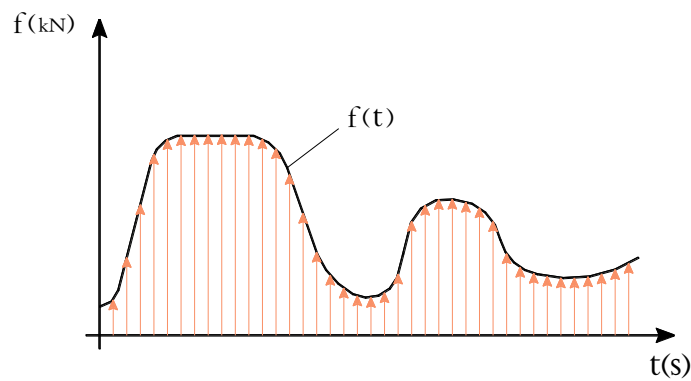


Figura 3.3 - Representação esquemática da aproximação de uma força com variação contínua ao longo do tempo através de uma sequência de infinitos impulsos infinitesimalmente próximos. Por exemplo a variação de força que o vento exerce numa estrutura, ao longo do tempo.

Para condições iniciais não nulas, ou seja, $u_0 \neq 0$ e $\dot{u}_0 \neq 0$, a solução para um sistema oscilatório em regime forçado com amortecimento pode ser dada pela equação:

$$u(t) = [a \cos(\omega_A t) + b \sin(\omega_A t)] e^{-\xi \omega_N t} + \int_0^t f(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (3.4)$$

Para calcular numericamente o integral de convolução anterior pode-se recorrer ao método de integração por trapézios, que consiste na aproximação da área sob uma curva, através da soma de áreas de trapézios (Figura 3.4). No entanto, com este método, o cálculo computacional torna-se pouco eficiente devido a que, para cada instante de tempo, é necessário efetuar uma integração completa. Para melhorar a eficiência computacional, recorre-se a uma fórmula recursiva, em que a variação das forças ao longo tempo é definida por troços lineares. Este método recursivo tem a vantagem de resolver a equação do movimento independentemente para cada um dos intervalos

da discretização, assumindo que as condições iniciais de deslocamento e velocidade de um dado intervalo sejam as condições finais do intervalo anterior.

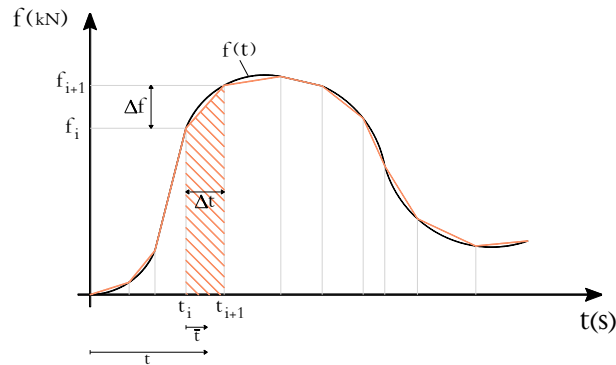


Figura 3.4 - Representação de uma história de carga definida por troços lineares.

Para isso usa-se a equação matricial seguinte, correspondente à referida fórmula recursiva (Chopra, 1995):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_{i+1} \\ \dot{\mathbf{u}}_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{A}' & \mathbf{B}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \dot{\mathbf{u}}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{D} \\ \mathbf{C}' & \mathbf{D}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_i \\ \mathbf{f}_{i+1} \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

em que:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= e^{-\xi\omega_N\Delta t} \left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \text{sen}(\omega_A \Delta t) + \cos(\omega_A \Delta t) \right) \\ \mathbf{B} &= e^{-\xi\omega_N\Delta t} \left(\frac{1}{\omega_A} \text{sen}(\omega_A \Delta t) \right) \\ \mathbf{C} &= \int_0^{\Delta t} h(\Delta t - \tau) d\tau - \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \tau h(\Delta t - \tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{k} \left\{ \frac{2\xi}{\omega_N \Delta t} + e^{-\xi\omega_N\Delta t} \left[\left(\frac{1-2\xi^2}{\omega_A \Delta t} - \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \right) \text{sen}(\omega_A \Delta t) - \left(1 + \frac{2\xi}{\omega_N \Delta t} \right) \cos(\omega_A \Delta t) \right] \right\} \\ \mathbf{D} &= \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \tau h(\Delta t - \tau) d\tau = \frac{1}{k} \left\{ 1 - \frac{2\xi}{\omega_N \Delta t} + e^{-\xi\omega_N\Delta t} \left[\frac{2\xi^2 - 1}{\omega_A \Delta t} \text{sen}(\omega_A \Delta t) + \frac{2\xi}{\omega_N \Delta t} \cos(\omega_A \Delta t) \right] \right\} \\ \mathbf{A}' &= -e^{-\xi\omega_N\Delta t} \left(\frac{\omega_N}{\sqrt{1-\xi^2}} \text{sen}(\omega_A \Delta t) \right) \\ \mathbf{B}' &= e^{-\xi\omega_N\Delta t} \left(\cos(\omega_A \Delta t) - \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \text{sen}(\omega_A \Delta t) \right) \\ \mathbf{C}' &= \frac{1}{k} \left\{ -\frac{1}{\Delta t} + e^{-\xi\omega_N\Delta t} \left[\left(\frac{\omega_N}{\sqrt{1-\xi^2}} + \frac{\xi}{\Delta t \sqrt{1-\xi^2}} \right) \text{sen}(\omega_A \Delta t) + \frac{1}{\Delta t} \cos(\omega_A \Delta t) \right] \right\} \\ \mathbf{D}' &= \frac{1}{k \Delta t} \left[1 - e^{-\xi\omega_N\Delta t} \left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \text{sen}(\omega_A \Delta t) + \cos(\omega_A \Delta t) \right) \right] \end{aligned} \quad (3.6)$$

3.2.2.2 Formulação no espaço de estados

Nesta formulação de estado (em deslocamento, u , e velocidades, v), parte-se uma vez mais da equação diferencial do movimento (equação de 2ª ordem), e procede-se a uma mudança de variável $\dot{u} = v$, com vista a obter um sistema de duas equações diferenciais de 1ª ordem:

$$m \ddot{u} + c \dot{u} + k u = f \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{u} = v \\ m \dot{v}(t) + c v(t) + k u(t) = f(t) \end{cases} \quad (3.7)$$

que pode ser escrito também sob a forma:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}}(t) = -\frac{k}{m} \mathbf{u}(t) - \frac{c}{m} \mathbf{v}(t) + \frac{f(t)}{m} \end{cases} \quad (3.8)$$

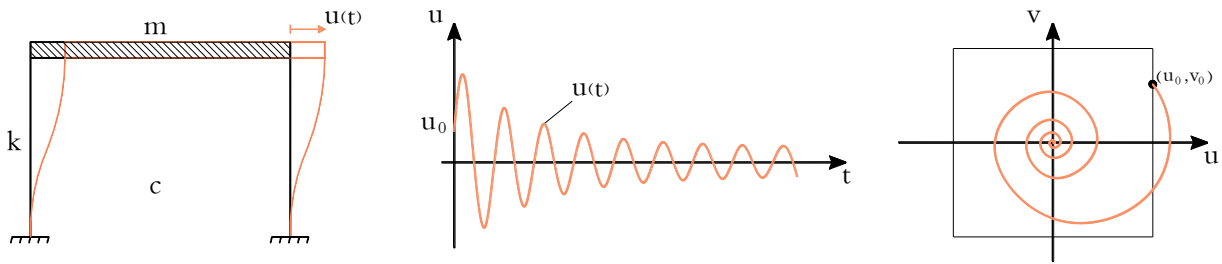


Figura 3.5 - Modo de vibração natural de um modelo de 1 GL. Representação no domínio do tempo e no espaço de estados.

Reescrevendo as equações anteriores sob a forma matricial obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{v}} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -m^{-1}k & -m^{-1}c \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ m^{-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \mathbf{f} \quad \text{ou} \quad \dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \underbrace{\mathbf{A}}_{(mck)} \tilde{\mathbf{x}} + \underbrace{\mathbf{B}}_{(m)} \mathbf{f} \quad (3.9)$$

Para resolver esta equação de estado é conveniente proceder à sua diagonalização através da decomposição da matriz de estado em valores e vetores próprios.

Matriz de estado	Matriz de estado diagonalizada
$\mathbf{A}_{(mck)} = \mathbf{\Phi}_E \underline{\lambda}_E \mathbf{\Phi}_E^{-1}$	$\underline{\lambda}_E = \mathbf{\Phi}_E^{-1} \mathbf{A}_{(mck)} \mathbf{\Phi}_E$

em que:

Valores próprios	Vetores próprios		
$\underline{\lambda}_E = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{bmatrix}$	$\mathbf{\Phi}_E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda & \bar{\lambda} \end{bmatrix}$	$\mathbf{\Phi}_E^{-1} = \frac{i}{2\omega_A} \begin{bmatrix} \bar{\lambda} & -1 \\ -\lambda & 1 \end{bmatrix}$	$\lambda = -\xi \omega_N + i\omega_A$

A diagonalização da equação de estado $\dot{\underline{x}} = \underline{A} \underline{x} + \underline{B} f$ obtém-se efetuando a mudança de variável $\underline{x} = \underline{\Phi}_E \underline{z}$, vindo então

$$\underline{\Phi}_E \dot{\underline{z}} = \underline{A} \underline{\Phi}_E \underline{z} + \underline{B} f \quad (3.10)$$

Multiplicando ambos os membros por $\underline{\Phi}_E^{-1}$ fica

$$\dot{\underline{z}} = \underline{\lambda}_E \underline{z} + \underline{\Phi}_E^{-1} \underline{B} f, \quad (3.11)$$

o que equivale a escrever

$$\begin{bmatrix} \dot{u}^* \\ \dot{v}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^* \\ v^* \end{bmatrix} + \frac{i}{2 m \omega_A} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} f \quad (3.12)$$

Obtiveram-se, assim, duas equações diferenciais desacopladas de 1ª ordem cujas soluções são

$$\begin{cases} u^*(t) = u_0^* e^{\lambda t} - \frac{i}{2 m \omega_A} \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} f(\tau) d\tau \\ v^*(t) = v_0^* e^{\bar{\lambda} t} + \frac{i}{2 m \omega_A} \int_0^t e^{\bar{\lambda}(t-\tau)} f(\tau) d\tau \end{cases} \quad (3.13)$$

ou, em vibração livre (forças nulas)

$$\begin{cases} u^*(t) = u_0^* e^{\lambda t} \\ v^*(t) = v_0^* e^{\bar{\lambda} t} \end{cases} \quad \begin{cases} u^*(t) = u_0^* e^{\lambda t} \\ v^*(t) = v_0^* e^{\bar{\lambda} t} \end{cases} \quad (3.14)$$

Efetuada agora a transformação para coordenadas estruturais $\underline{x} = \underline{\Phi}_E \underline{z}$ obtém-se

$$\underline{x} = \underline{\Phi}_E \underline{z} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda & \bar{\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^* \\ v^* \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} u = u^* + v^* \\ v = \lambda u^* + \bar{\lambda} v^* \end{cases}, \quad (3.15)$$

o que, no caso da vibração livre em análise corresponde a escrever

$$\begin{cases} u = u_0^* e^{\lambda t} + v_0^* e^{\bar{\lambda} t} \\ v = \lambda u_0^* e^{\lambda t} + \bar{\lambda} v_0^* e^{\bar{\lambda} t} \end{cases} \quad (3.16)$$

Dado que as condições iniciais implicam que, para $t = 0$, se tenha

$$\begin{cases} \mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_0^* + \mathbf{v}_0^* \\ \mathbf{v}_0 = \lambda \mathbf{u}_0^* + \bar{\lambda} \mathbf{v}_0^* \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{u}_0^* = \frac{\mathbf{u}_0}{2} + \frac{\mathbf{v}_0 + \mathbf{u}_0 \xi \omega_N}{2\omega_A} \mathbf{i} \\ \mathbf{v}_0^* = \frac{\mathbf{u}_0}{2} - \frac{\mathbf{v}_0 + \mathbf{u}_0 \xi \omega_N}{2\omega_A} \mathbf{i} \end{cases}, \quad (3.17)$$

então, efetuando a substituição em $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0^* e^{\lambda t} + \mathbf{v}_0^* e^{\bar{\lambda} t}$ e aplicando a fórmula de Euler para os complexos obtém-se, tal como no caso da formulação clássica, a seguinte solução em deslocamentos (vibração livre com amortecimento)

$$\mathbf{u}(t) = \left[\mathbf{u}_0 \cos(\omega_A t) + \left(\frac{\mathbf{v}_0 + \mathbf{u}_0 \xi \omega_N}{\omega_A} \right) \text{sen}(\omega_A t) \right] e^{-\xi \omega_N t}, \quad (3.18)$$

tal como se pretendia, para ilustrar a aplicação da formulação de estado. Na Figura 3.5 representa-se graficamente a resposta do modelo de 1 GL no seu modo natural de vibração, com amortecimento, num gráfico tempo-deslocamento e no espaço de estados (gráfico no plano deslocamento-velocidade).

3.2.3 Osciladores com N graus de liberdade. Formulação clássica e formulação no espaço de estados

A equação diferencial do movimento na forma matricial surge na análise dinâmica de estruturas discretizadas (elementos finitos de barra, de casca, ou tridimensionais) na conhecida forma:

$$\underline{m} \ddot{\underline{u}} + \underline{c} \dot{\underline{u}} + \underline{k} \underline{u} = \underline{f} , \quad (3.19)$$

em que:

Matriz de massas	Matriz de amortecimento	Matriz de rigidez
\underline{m} ($N_{GL} \times N_{GL}$)	\underline{c} ($N_{GL} \times N_{GL}$)	\underline{k} ($N_{GL} \times N_{GL}$)

Vetor dos deslocamentos	Vetor das velocidades	Vetor das acelerações	Vetor das forças
\underline{u}	$\dot{\underline{u}}$	$\ddot{\underline{u}}$	\underline{f}

A resolução do anterior sistema de equações diferenciais pode ser efetuada diretamente no domínio do tempo, escolhendo uma adequada discretização temporal e um adequado método numérico para a resolução das equações diferenciais ordinárias. Após proceder à respetiva diagonalização, este sistema poderá ser facilmente resolvido, recorrendo à transformação de coordenadas estruturais para coordenadas modais:

$$\underline{u} = \underline{\Phi} \underline{q} , \quad (3.20)$$

sendo $\underline{\Phi}$, a matriz modal clássica.

3.2.3.1 Normalização da matriz modal relativamente à matriz de massas

Geralmente, recorre-se à normalização da matriz modal relativamente à matriz de massas, de forma a simplificar os componentes da equação diferencial do movimento. Através da equação seguinte, determina-se o coeficiente α_n que irá então depois multiplicar na matriz modal:

$$\underline{M} = \underline{\phi}_n^T \underline{m} \underline{\phi}_n = 1 \Leftrightarrow \alpha_n \begin{bmatrix} \phi_{1n} & \phi_{2n} & \phi_{3n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \alpha_n \begin{bmatrix} \phi_{1n} \\ \phi_{2n} \\ \phi_{3n} \end{bmatrix} = 1 , \quad (3.21)$$

de onde se obtém:

$$\alpha_n = \frac{1}{\sqrt{m(\phi_{1n}^2 + \phi_{2n}^2 + \phi_{3n}^2)}} \quad (3.22)$$

3.2.3.2 Formulação clássica

Nesta formulação, a matriz modal é calculada para a hipótese de amortecimento nulo, resolvendo o seguinte problema de valores e vetores próprios:

$$\left[\underline{k} - \underline{m} \omega_n^2 \right] \underline{\phi}_n = \underline{0} \quad (3.23)$$

que, como se sabe, tem solução não nula (indeterminada) se for $|\underline{k} - \underline{m} \omega_n^2| = 0$.

A partir desta equação é então possível determinar a matriz modal (de dimensão $N_{GL} \times N_{GL}$), que permite diagonalizar o problema, recorrendo à mudança de variável, para coordenadas modais, $\underline{u} = \underline{\Phi} \underline{q}$, vindo

$$\underline{m} \underline{\Phi} \ddot{\underline{q}}(t) + \underline{c} \underline{\Phi} \dot{\underline{q}}(t) + \underline{k} \underline{\Phi} \underline{q}(t) = \underline{f}(t) \quad (3.24)$$

Multiplicando ambos os membros por $\underline{\Phi}^T$, obtém-se a equação diagonalizada (N_{GL} equações diferenciais independentes):

$$\underline{\Phi}^T \underline{m} \underline{\Phi} \ddot{\underline{q}}(t) + \underline{\Phi}^T \underline{c} \underline{\Phi} \dot{\underline{q}}(t) + \underline{\Phi}^T \underline{k} \underline{\Phi} \underline{q}(t) = \underline{\Phi}^T \underline{f}(t) \quad (3.25)$$

ou

$$\underline{M} \ddot{\underline{q}}(t) + \underline{C} \dot{\underline{q}}(t) + \underline{K} \underline{q}(t) = \underline{F}_m(t) \quad (3.26)$$

em que

$$\underline{M} = \underline{\Phi}^T \underline{m} \underline{\Phi} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} = \underline{I} \quad (3.27)$$

$$\underline{K} = \underline{\Phi}^T \underline{k} \underline{\Phi} = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \omega_N^2 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

$$\underline{C} = \underline{\Phi}^T \underline{c} \underline{\Phi} = \begin{bmatrix} 2 \xi_{N_1} \omega_{N_1} & & \\ & \ddots & \\ & & 2 \xi_{N_{GL}} \omega_{N_{GL}} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

$$\underline{F}_m(t) = \underline{\Phi}^T \underline{f}(t) \quad (3.30)$$

Quanto à matriz de amortecimento, considera-se em geral, a hipótese de amortecimento proporcional de Rayleigh:

$$\underline{c} = \alpha \underline{m} + \beta \underline{k} \quad (3.31)$$

Por fim, de forma a obter um sistema de equações diferenciais ordinárias, em t , que podem ser resolvidas independentemente, substituem-se todas as equações da equação matricial (3.26) pelos respectivos componentes, obtendo-se a equação matricial:

$$\ddot{\underline{q}}(t) + 2 \xi \omega_N \dot{\underline{q}}(t) + \omega_N^2 \underline{q}(t) = \underline{F}_m(t) \quad (3.32)$$

A vantagem desta equação tem a ver com a possibilidade de se resolver independentemente cada uma das equações, já que todas elas são equações diferenciais desacopladas.

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + 2 \xi_1 \omega_{N_1} \dot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 = F_{m,1} \\ \dots \\ \ddot{q}_n + 2 \xi_n \omega_{N_n} \dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = F_{m,n} \end{cases} \quad (3.33)$$

3.2.3.3 Formulação no espaço de estados

Com a formulação de estado é possível considerar amortecimento generalizado (matriz de amortecimento não proporcional às matrizes de massa e de rigidez globais) e ainda assim diagonalizar o problema. Tal como para 1 GL, procede-se à mudança de variável $\dot{\underline{u}} = \underline{v}$, obtendo-se um sistema de 1ª ordem, nas variáveis de estado deslocamentos e velocidades,

$$\underline{m} \ddot{\underline{u}} + \underline{c} \dot{\underline{u}} + \underline{k} \underline{u} = \underline{f} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{\underline{u}}(t) = \underline{v}(t) \\ \underline{m} \dot{\underline{v}}(t) + \underline{c} \underline{v}(t) + \underline{k} \underline{u}(t) = \underline{f}(t) \end{cases} \quad (3.34)$$

Nesta equação é usual considerar que o vetor das histórias de forças aplicadas $\underline{f}(t)$ não envolve, em geral, N_{GL} histórias de forças independentes, podendo ser escrito na forma:

$$\underline{f}(t) = \underline{s} \underline{f}(t) \quad (3.35)$$

em que $\underline{f}(t)$ contém apenas n_1 histórias de forças (em geral $n_1 \ll N_{GL}$) e a matriz \underline{s} indica os GL em que se aplicam as referidas histórias de forças (matriz com 0 e 1). Assim pode-se escrever:

$$\begin{cases} \dot{\underline{u}}(t) = \underline{v}(t) \\ \dot{\underline{v}}(t) = - \underline{m}^{-1} \underline{k} \underline{u}(t) - \underline{m}^{-1} \underline{c} \underline{v}(t) + \underline{m}^{-1} \underline{s} \underline{f}(t) \end{cases} \quad (3.36)$$

Convertendo o anterior sistema para a forma matricial

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{u}}(t) \\ \dot{\underline{v}}(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{1} \\ - \underline{m}^{-1} \underline{k} & - \underline{m}^{-1} \underline{c} \end{bmatrix}}_{\underline{A}} \begin{bmatrix} \underline{u}(t) \\ \underline{v}(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{m}^{-1} \underline{s} \end{bmatrix}}_{\underline{B}} \underline{f}(t) \quad (3.37)$$

é possível obter a seguinte forma mais compacta, denominada equação de estado do movimento para um modelo estrutural discretizado espacialmente:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A} \underline{x} + \underline{B} \underline{f} \quad (3.38)$$

em que:

Matriz de estado	Vetor de estado	Matriz B	Vetor f
\underline{A} (mck) ($2N_{GL} \times 2N_{GL}$)	\underline{x} ($2N_{GL} \times 1$)	\underline{B} (ms) ($2N_{GL} \times n_1$)	\underline{f} ($n_1 \times 1$)
Envolve as propriedades do sistema estrutural discretizado, referentes à distribuição de massa, amortecimento e rigidez	Contém as variáveis de estado: deslocamentos e velocidades	Envolve valores nulos e a inversa da matriz de massa e a distribuição espacial das histórias de forças aplicadas pelos GL do modelo discretizado	Contém as histórias de forças aplicadas (em geral $n_1 \ll N_{GL}$)

Para se proceder à diagonalização da equação diferencial anterior, procede-se de igual modo a (3.20) mas utilizando uma transformação de coordenadas estruturais para coordenadas modais, recorrendo à matriz modal de estado, $\underline{\Phi}_E$:

$$\underline{u} = \underline{\Phi}_E \underline{z} \quad (3.39)$$

A matriz modal de estado é uma matriz cujas colunas correspondem aos vetores próprios da matriz de estado \underline{A} . A sua determinação corresponde a resolver o seguinte problema de valores e vetores próprios (dimensão $2N_{GL} \times 2N_{GL}$):

$$\underline{A}_{(mck)} \underline{\phi}_E = \lambda_E \underline{\phi}_E \Leftrightarrow \left[\underline{A}_{(mck)} - \lambda_E \underline{I} \right] \underline{\phi}_E = \underline{0} \quad (3.40)$$

que fornece, para além dos $2N_{GL}$ vetores próprios que constituem as colunas da matriz $\underline{\Phi}_E$, os correspondentes $2N_{GL}$ valores próprios (de estado) λ_E . Dado que a matriz de estado \underline{A} é não simétrica verifica-se que os seus valores próprios são complexos, assim como as componentes dos correspondentes vetores próprios, sendo importante ter em conta as seguintes relações

$\underline{\lambda}_E = \begin{bmatrix} \underline{\lambda} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{\bar{\lambda}} \end{bmatrix}$	$\underline{\lambda} = \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & \lambda_n & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}$	$\lambda_n = \underbrace{-\xi_n \omega_n}_{\text{Componente Real}} + i \underbrace{\omega_n \sqrt{1 - \xi_n^2}}_{\text{Componente Imaginária}}$
$\underline{\Phi}_E = \begin{bmatrix} \underline{\Phi}_{uE} & \underline{\bar{\Phi}}_{uE} \\ \underline{\Phi}_{uE} \underline{\lambda} & \underline{\bar{\Phi}}_{uE} \underline{\bar{\lambda}} \end{bmatrix}$	$\underline{\Phi}_{uE} = \begin{bmatrix} \dots & \underline{\phi}_n & \dots \end{bmatrix}$	$(\phi_n - \text{componentes complexas})$ $(n = 1, 2, \dots, N_{GL})$

Onde $\|\lambda_n\| < \|\lambda_{n+1}\|$, $\underline{\bar{\lambda}}$ representa o conjugado de λ e $\underline{\bar{\Phi}}_{uE}$ representa o conjugado de $\underline{\Phi}_{uE}$.

Os valores complexos calculados correspondem à existência de modos não estacionários e, assim, para um determinado modo n , a vibração em cada GL j pode ser descrita como uma onda harmónica, com decaimento, ficando completamente definida através dos seguintes quatro parâmetros (extraídos a partir dos valores complexos):

Frequência natural do modo n:

$$\omega_n = |\lambda_n| \quad (3.41)$$

Amortecimento do modo n:

$$\xi_n = \frac{-\text{Re}(\lambda_n)}{|\lambda_n|} \quad (3.42)$$

Amplitude da vibração do modo n, no GL m:

$$\rho_{(nm)} = |\Phi_{(n m)}| \quad (3.43)$$

Ângulo de fase da vibração do modo n, no GL m:

$$\theta_{(nm)} = \text{arctg} \left(\frac{\text{Im}(\Phi_{(n m)})}{\text{Re}(\Phi_{(n m)})} \right) \quad (3.44)$$

em que “Im” indica a parte imaginária e “Re” a parte real do número complexo em causa. Conhecendo estes parâmetros pode-se definir a variação das amplitudes ao longo do tempo de uma configuração modal n segundo um GL m, através da seguinte expressão

$$u(t)_{(n m)} = \left[\text{Re}(\Phi_{(nm)}) \cos(\omega_n t) + \text{Im}(\Phi_{(nm)}) \text{sen}(\omega_n t) \right] e^{-\xi \omega_n t} \quad (3.45)$$

É importante referir que os máximos atingidos, pelas ondas determinadas através deste método, não são simultâneos nos vários pontos da estrutura.

Pela definição de valores e vetores próprios de uma matriz pode-se fatorizar a matriz \underline{A} tendo por base a matriz dos seus vetores próprios $\underline{\Phi}_E$ e a matriz diagonal dos seus valores próprios λ_E , ou seja:

$$\underline{A}_{(mck)} = \underline{\Phi}_E \underline{\lambda}_E \underline{\Phi}_E^{-1} \quad (3.46)$$

Finalmente, a diagonalização da equação de estado obtém-se através da mudança para coordenadas modais ($\underline{x} = \underline{\Phi}_E \underline{z}$) e introduzindo (3.46) em (3.38), ficando

$$\underline{\Phi}_E \dot{\underline{z}} = \underline{A}_{(mck)} \underline{\Phi}_E \underline{z} + \underline{B}_{(ms)} \underline{f} \quad (3.47)$$

de seguida, multiplicando ambos os membros por $\underline{\Phi}_E^{-1}$:

$$\dot{\underline{z}} = \underline{\lambda}_E \underline{z} + \underline{\Phi}_E^{-1} \underline{B}_{(ms)} \underline{f} \quad (3.48)$$

e, por fim, obtém-se a forma final da equação de estado em coordenadas modais:

$$\dot{\underline{\tilde{z}}} = \underline{\lambda}_E \underline{\tilde{z}} + \underline{L}_E \underline{\tilde{f}} \quad (3.49)$$

em que

Vetor das coordenadas modais de estado	Vetor das derivadas das coordenadas modais de estado	Matriz dos fatores de participação modal na representação de estado
$\underline{z} = \underline{z}(t)$ $(2N_{GL} \times 1)$	$\dot{\underline{\tilde{z}}} = \dot{\underline{\tilde{z}}}(t)$ $(2N_{GL} \times 1)$	$\underline{L}_E = \underline{\Phi}_E^{-1} \underline{B}_{(ms)}$ $(2N_{GL} \times n_I)$

Assim, o sistema (3.38) é convertido num outro sistema de $2N_{GL}$ equações diferenciais desacopladas, de 1ª ordem, do tipo

$$\dot{z}_n(t) - \lambda_E z_n(t) = f_n^*(t) \quad (n=1,2,\dots,2N_{GL}) \quad (3.50)$$

sendo a sua solução dada pela fórmula recursiva

$$z_n(t_{i+1}) = e^{\lambda_E \Delta t} \cdot z_n(t_i) + \Delta t \cdot \frac{(1 - \Delta t)(e^{\lambda_E \Delta t} - 1) + \lambda_E}{\lambda_E} f_n^*(t_i) + \Delta t \cdot \frac{(1 - \Delta t) - e^{\lambda_E \Delta t}}{\lambda_E} f_n^*(t_{i+1}) \quad (3.51)$$

onde Δt corresponde aos incrementos de tempo considerados na descrição da variação temporal das forças aplicadas.

3.3 Fundamentos da análise dinâmica de estruturas no domínio da frequência. Ensaios de vibração

Na medição de vibrações em estruturas de betão armado, como é o caso das pontes, a fase de processamento e análise dos sinais medidos é importante para a obtenção de resultados fiáveis sobre o comportamento dinâmico das obras. A fase de processamento tem como principal função remover as componentes espúrias dos dados, enquanto a fase da análise tem o objetivo de apresentar os dados experimentais numa forma possível e mais fácil de interpretar, fazendo ressaltar aspetos importantes que neles se encontram camuflados.

3.3.1 Análise de sinal

3.3.1.1 Dos sinais contínuos aos sinais discretos

Para se partir para a análise de um sinal medido, no domínio da frequência, é antes preciso analisar como é utilizada a Transformada de Fourier para funções definidas no tempo. Uma função contínua ao longo do tempo, cujo seu domínio está definido em $[0, +\infty[$, é transformada para o domínio da frequência através de um integral de Fourier. No entanto, uma mesma função contínua mas definida num intervalo limitado $[0, T]$ é transformada para o domínio da frequência, através da série de Fourier. É ainda possível ter-se um sinal limitado e discreto, tais como os sinais obtidos em ensaios de vibração, sendo definidos por funções descontínuas e limitadas. Deve-se ao facto de que, num ensaio de vibração, os sinais medidos são um conjunto de registos de, por exemplo, acelerações, num dado instante. Obtém-se por isso um conjunto de valores da grandeza medida, ao qual chamamos um sinal discreto. Esse sinal discreto é, posteriormente, transformado para o domínio da frequência, através da Transformada Discreta de Fourier (TDF).

Na medição de vibrações utilizam-se normalmente transdutores (por exemplo, acelerómetros ou microfones) que permitem a medição de séries temporais de dados correspondentes, em geral, a acelerações ou velocidades. Estes transdutores fornecem diretamente séries de dados correspondentes a valores de tensão elétrica variável, sendo estes proporcionais ao parâmetro físico que se pretende observar com o transdutor utilizado o qual corresponde a um registo contínuo. Estes registos contínuos (Figura 3.6a) podem ser representados através de uma sucessão de valores, normalmente espaçados entre si de um dado intervalo de tempo fixo (Δt), designando-se, por isso, como registos discretos, cujos valores numéricos são designados por dados (Figura 3.6b).

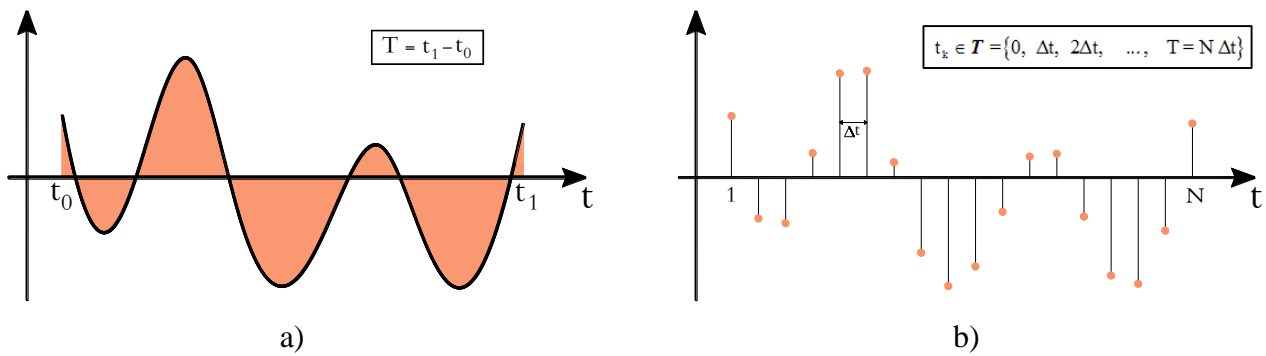


Figura 3.6 - Exemplo de um sinal: a) contínuo; b) discreto, ou amostra.

Ao referido conjunto de dados dá-se a designação de série temporal, ou amostra, com duração T e intervalo de tempo Δt . A designação dada ao processo em que se passa de um registo contínuo (sinal analógico) para um registo discreto (sinal digital) é amostragem, muito à semelhança do processo de conversão do sinal elétrico, proveniente de um microfone (transdutor), para sinal digital, como a linguagem binária dos computadores (Figura 3.7). A amostragem baseia-se, portanto, na aquisição de uma “amostra” que pretende representar o sinal contínuo. Esta transformação é assegurada pela ação dos designados conversores analógico/digital (A/D).

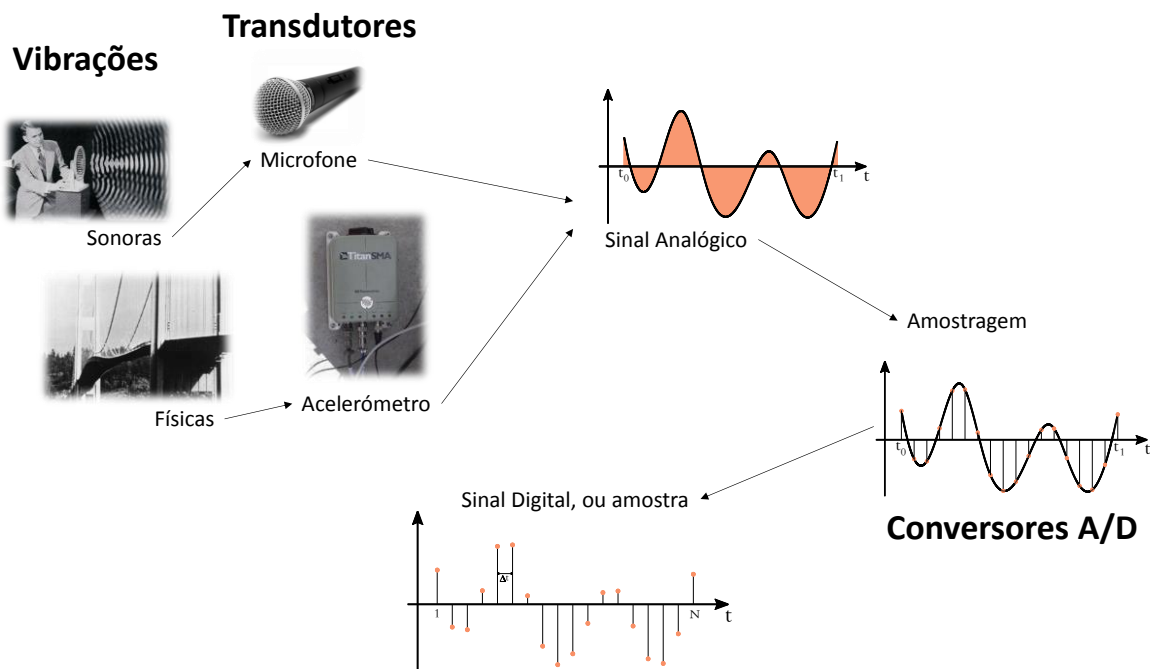


Figura 3.7 - Processo de obtenção de uma amostra de vibração, através da conversão de sinal analógico-digital.

A amostragem de um sinal $u(t)$, definido num intervalo de tempo $[0, T]$, consiste na obtenção de uma série de $N+1$ valores u_k , espaçados de um incremento de tempo constante Δt

$$u_k = u(t_k) \quad , \quad t_k \in T = \{0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, T = N \Delta t\} \quad (3.52)$$

Dada a regularidade temporal do processo de amostragem, admite-se que as séries temporais resultam de uma amostragem periódica, o que faz com que sejam constituídas por valores equidistantes no tempo. Ao espaçamento temporal Δt , dá-se a designação de intervalo de amostragem, ou período de amostragem e a partir deste surge a definição de frequência de amostragem, f_{ams} , que corresponde ao número de amostras efetuadas por unidade de tempo

$$f_{\text{ams}} = \frac{1}{\Delta t} \text{ (Hz)} \quad (3.53)$$

Um ponto bastante importante, no que diz respeito ao processo de amostragem será qual o intervalo de amostragem a eleger. Assim, à primeira vista, pode-se pensar que a desejada reconstrução do sinal, a partir da série, é tanto melhor quanto menor for o valor de Δt , mas esta condição por si só não é suficiente pois, no caso de o valor de Δt ser extremamente pequeno, obter-se-á informação redundante (série com demasiados pontos), o que pode provocar um esforço computacional desnecessário.

A escolha da frequência de amostragem a adotar ao nível dos conversores analógico/digital depende, em grande parte, do tipo de vibrações que se pretende medir ou seja, depende do tipo de estrutura, do tipo de excitação e do tipo de análise que se pretende efetuar. Por exemplo, a frequência de amostragem a adotar num ensaio de medição de vibrações numa estrutura de grande rigidez, em que as frequências naturais de vibração dos primeiros modos de vibração são da ordem das várias de dezenas ou centenas de Hz, terá que ser certamente superior à frequência de amostragem que se deve adotar num ensaio de medição de vibrações numa grande ponte, em que as frequências naturais dos principais modos de vibração são inferiores a 1 Hz.

3.3.1.2 Análise espectral. Conceitos fundamentais

Uma onda harmónica

Aparentemente, a partir das séries temporais correspondentes à medição de vibrações num ponto ou em vários pontos de uma dada estrutura, parece difícil obter informação útil sobre essa estrutura. No entanto, recorrendo à análise de Fourier ou análise espectral, é possível efetuar a decomposição em ondas harmónicas (Figura 3.8) de cada um dos registos medidos e, a partir do conhecimento dessas ondas, podem-se determinar os principais parâmetros modais da estrutura.

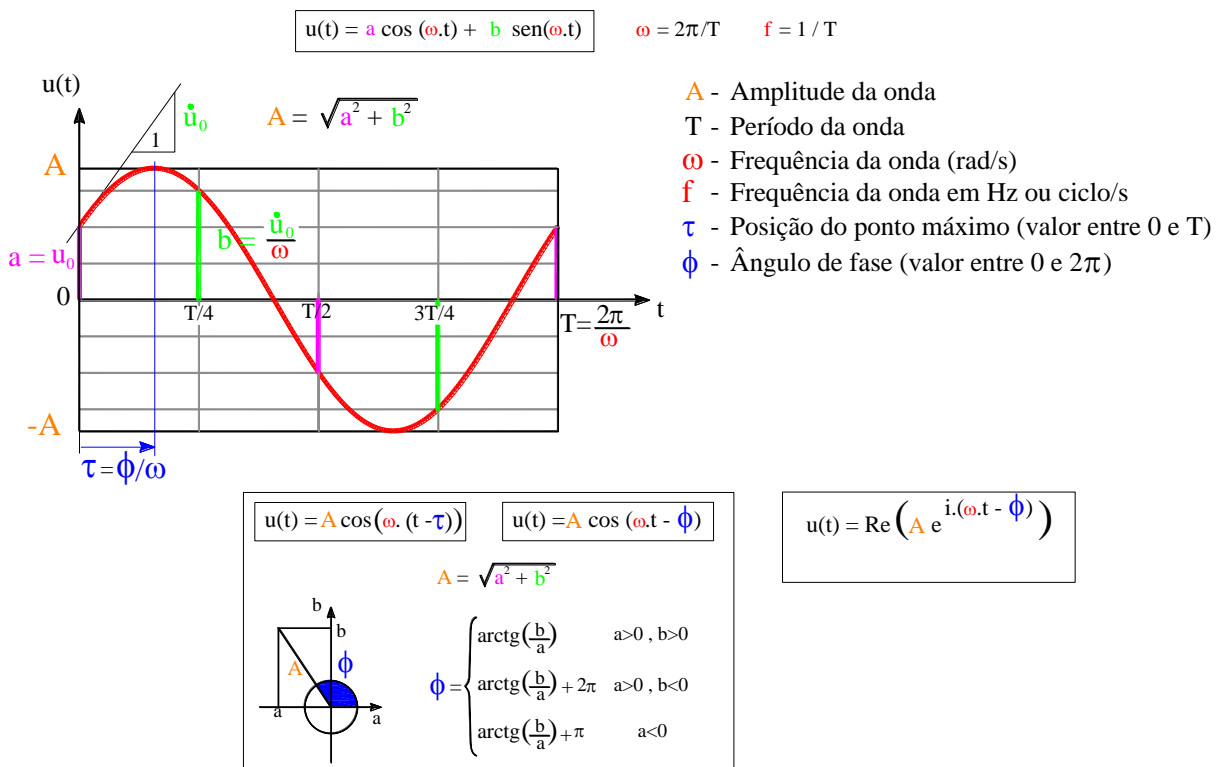


Figura 3.8 - Função do tipo onda harmónica e as várias formas de a representar (Oliveira, 2013).

A análise de Fourier de um dado sinal, consiste em transpor esse sinal, definido no domínio do tempo, para o domínio da frequência, através da sua decomposição em ondas sinusoidais com amplitudes e frequências variáveis.

A Transformada Discreta de Fourier

Um sinal é uma função real $f(t_k)$, de variável real discreta t_k , definida discretamente no domínio do tempo, em intervalos de tempo iguais (de comprimento Δt) num período de tempo finito de comprimento total T . A variável discreta t_k assume $N_P = N + 1$ valores entre 0 e T , sendo $N = T / \Delta t$, ou seja, $t_k \in \mathbf{T} = \{0, t_1, t_2, \dots, t_k, \dots, T=N \times \Delta t\}$, sendo por isso possível obter a sua decomposição em ondas harmónicas, também elas definidas de forma discreta, recorrendo à TDF. Esta decomposição pode ser visualizada através do esquema apresentado na Figura 3.9, onde se mostram, em perspetiva, as ondas cuja soma permite reconstituir a função original $f(t_k)$ e o espectro $F(\omega_n)$ correspondente às amplitudes de cada uma das ondas.

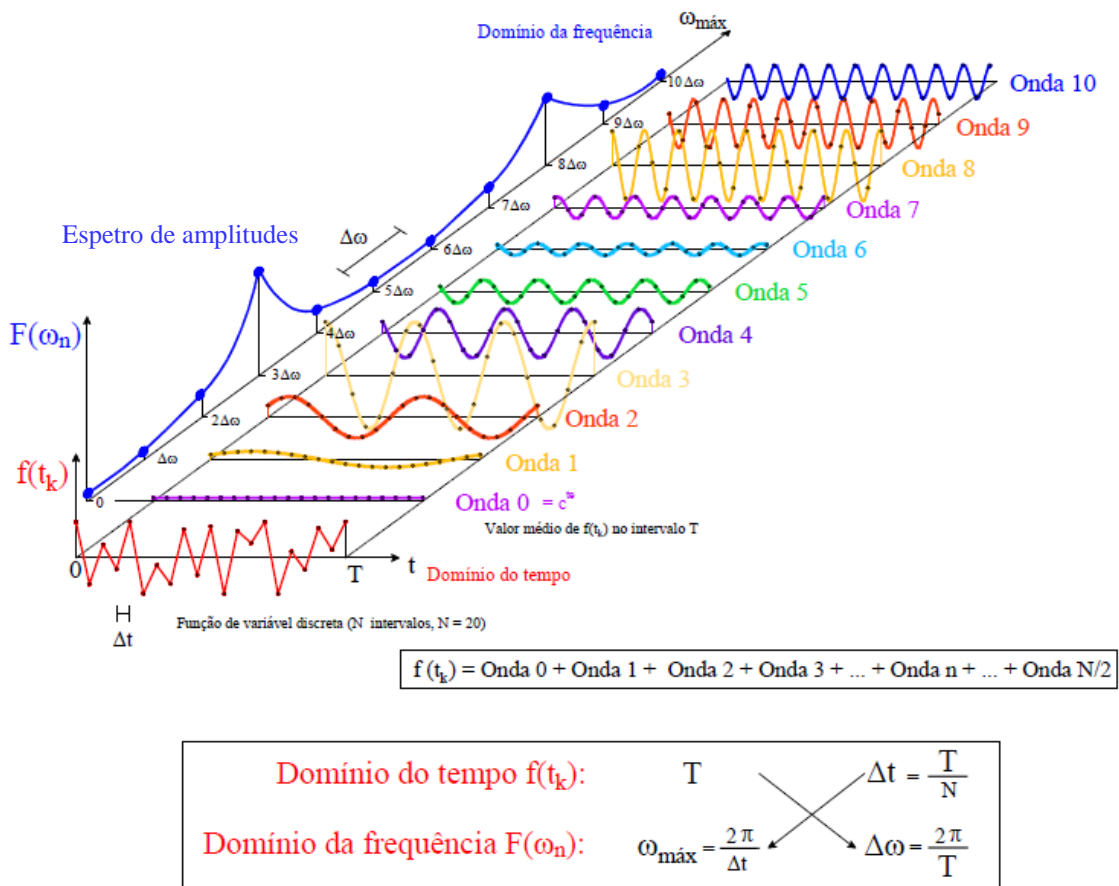


Figura 3.9 - Transformada discreta de Fourier. Decomposição em ondas sinusoidais (Oliveira, 2013).

Como referido, a expressão que representa uma onda harmónica, de frequência ω_n , definida discretamente em função da variável $t_k \in \mathbf{T}$, pode ser escrita na seguinte forma trigonométrica

$$\text{onda } n = a_n \cos(\omega_n t_k) + b_n \sin(\omega_n t_k) \quad (3.54)$$

A ideia principal da análise discreta de Fourier é que, com um somatório de n ondas como o anterior, é possível aproximar uma qualquer função de variável discreta, definida por pontos num

intervalo finito de comprimento T . De facto, a pretendida aproximação é dada pelo seguinte somatório envolvendo uma função constante, igual ao valor médio de $f(t_k)$, e $N/2$ ondas harmónicas

$$f(t_k) = c^{te} + \text{onda 1} + \text{onda 2} + \dots + \text{onda n} + \dots + \text{onda } N/2 \quad (3.55)$$

Considerando $\Delta\omega = 2\pi/T$, as frequências (em rad/s) das ondas indicadas devem ser

$$\omega_1 = \Delta\omega, \omega_2 = 2\Delta\omega, \dots, \omega_n = n\Delta\omega, \dots, \omega_{N/2} = N/2 \Delta\omega \quad (3.56)$$

Desta forma a função $f(t_k)$ pode ser escrita como

$$f(t_k) = c^{te} + \sum_{n=1}^{N/2} (a_n \cos(\omega_n t_k) + b_n \text{sen}(\omega_n t_k)) \text{ , com } \omega_n = n\Delta\omega \text{ e } t_k = k \Delta t \quad (3.57)$$

bastando agora determinar os coeficientes a_n e b_n das várias ondas.

Devido ao facto das ondas apresentarem períodos submúltiplos de T , o valor médio de cada onda em T é sempre nulo. Assim, recorrendo à notação $\langle f(t_k) \rangle_T$ para designar o valor médio de $f(t_k)$ em T , tem-se que

$$\langle f(t_k) \rangle_T = \langle c^{te} \rangle_T + \underbrace{\langle \text{onda 1} \rangle_T}_0 + \underbrace{\langle \text{onda 2} \rangle_T}_0 + \dots + \underbrace{\langle \text{onda n} \rangle_T}_0 + \dots + \underbrace{\langle \text{onda } N/2 \rangle_T}_0 \quad (3.58)$$

Donde se conclui que a constante corresponde ao valor médio da função $f(t_k)$ em T (Figura 3.10) e é então dada por ⁽¹⁾

$$c^{te} = v_m = \langle f(t_k) \rangle_T = \frac{1}{T_p} \sum_{k=0}^N f(t_k) \Delta t \text{ , } t_k = k\Delta t \quad (\text{Nota: } T_p = N_p \Delta t = T + \Delta t) \quad (3.59)$$

⁽¹⁾ Para o caso de uma função $f(t)$ de variável contínua, definida num intervalo $[0, T]$, o correspondente valor médio não é calculado através de um somatório, mas sim com base num integral: $v_m = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$.

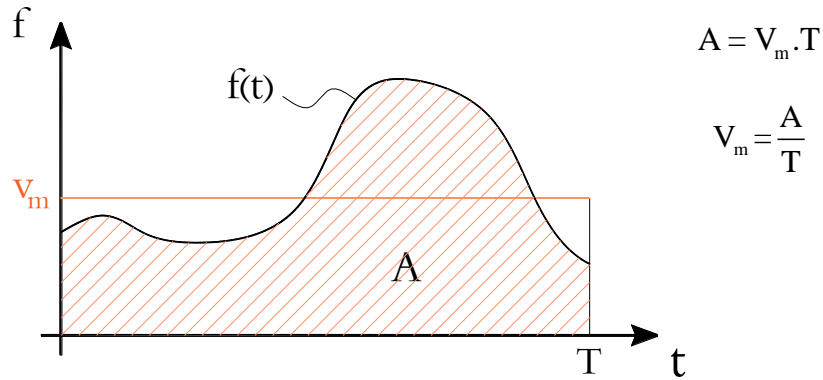


Figura 3.10 - Valor médio de uma função.

Para o cálculo dos coeficientes das várias ondas é conveniente começar pelo coeficiente a_1 (onda 1). Neste caso é útil verificar que o valor médio, em T , de cada onda multiplicada por $\cos(\omega_1 t_k)$ é sempre nulo, com exceção do caso da própria onda 1, logo

$$\langle f(t_k) \cos(\omega_1 t_k) \rangle_T = \langle \text{onda 1} \cos(\omega_1 t_k) \rangle_T = \underbrace{\langle a_1 \cos^2(\omega_1 t_k) \rangle_T}_{a_1/2} + \underbrace{\langle b_1 \sin(\omega_1 t) \cos(\omega_1 t_k) \rangle_T}_0 = \frac{a_1}{2} \quad (3.60)$$

assim o valor do coeficiente a_1 corresponde ao dobro do valor médio em T da função $f(t_k)$ multiplicada por $\cos(\omega_1 t_k)$ o que pode ser generalizado para todas as ondas, ficando

$$a_n = 2 \cdot \langle f(t_k) \cdot \cos(\omega_n t_k) \rangle_T = 2 \times \frac{1}{T_P} \sum_{k=0}^N f(t_k) \cdot \cos(\omega_n t_k) \Delta t \quad (3.61)$$

Do mesmo modo calcula-se o coeficiente b_n , só que em vez de se multiplicar por $\cos(\omega_n t_n)$ multiplica-se por $\sin(\omega_n t_n)$, ou seja

$$b_n = 2 \cdot \langle f(t_k) \cdot \sin(\omega_n t_k) \rangle_T = 2 \times \frac{1}{T_P} \sum_{k=0}^N f(t_k) \cdot \sin(\omega_n t_k) \Delta t \quad (3.62)$$

Verifica-se assim que a obtenção dos coeficientes das ondas harmónicas em que se decompõe uma função $f(t_k)$, definida em T , resume-se basicamente ao cálculo de valores médios. Conclui-se que a função $f(t_k)$ é representada, no domínio do tempo, apenas por um gráfico $f = f(t_k)$, mas no domínio da frequência passa a ser representada por dois gráficos: $a_n = a(\omega_n)$ e $b_n = b(\omega_n)$. O mais habitual é utilizar os gráficos de amplitude $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = A(\omega_n)$ designado por espectro de amplitudes, e da fase $\Phi_n = \arctg(b_n/a_n) = \Phi(\omega_n)$ designado por espectro de fases.

Por fim, importa salientar que a equação (3.57) pode ser escrita de uma forma mais compacta, conseguida através da representação complexa das funções trigonométricas, recorrendo à fórmula de Euler dos números complexos $e^{ix} = \cos(x) + i.\text{sen}(x)$, que permite escrever

$$\cos(\omega_n t) = \frac{e^{i\omega_n t} + e^{-i\omega_n t}}{2} \quad \text{e} \quad \text{sen}(\omega_n t) = \frac{-ie^{i\omega_n t} + ie^{-i\omega_n t}}{2} \quad (3.63)$$

introduzindo estas igualdades em (3.57) e desenvolvendo a expressão tem-se

$$f(t_k) = v_m + \sum_{n=1}^{N/2} \left(a_n \frac{e^{i\omega_n t_k} + e^{-i\omega_n t_k}}{2} + b_n \frac{-ie^{i\omega_n t_k} + ie^{-i\omega_n t_k}}{2} \right) \quad (3.64)$$

a qual pode ser simplificada e reescrita da seguinte forma

$$f(t_k) = \sum_{n=-N/2}^{N/2} \frac{a_n - ib_n}{2} e^{i\omega_n t_k}, \quad \omega_n = n.\Delta\omega, \quad -N/2 < n < N/2 \quad (3.65)$$

Tendo em conta que

$$\frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{T_p} \sum_{k=0}^N f(t_k) \cdot \underbrace{(\cos(\omega_n t_k) - i\text{sen}(\omega_n t_k))}_{e^{-i\omega_n t_k}} \cdot \Delta t = \frac{1}{T_p} \sum_{k=0}^N f(t_k) \cdot e^{-i\omega_n t_k} \Delta t \quad (3.66)$$

define-se TDF da função $f(t_k)$ em T , como sendo a função complexa $F(\omega_n)$ dada por

$$F(\omega_n) = \sum_{k=0}^N f(t_k) \cdot e^{-i\omega_n t_k} \Delta t = \frac{a_n - ib_n}{2} \cdot T_p, \quad \omega_n = n.\Delta\omega, \quad -N/2 < n < N/2 \quad (3.67)$$

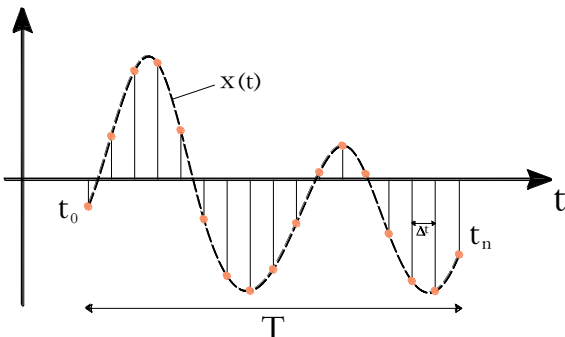
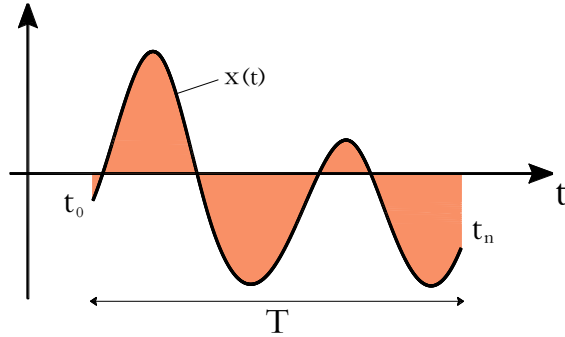
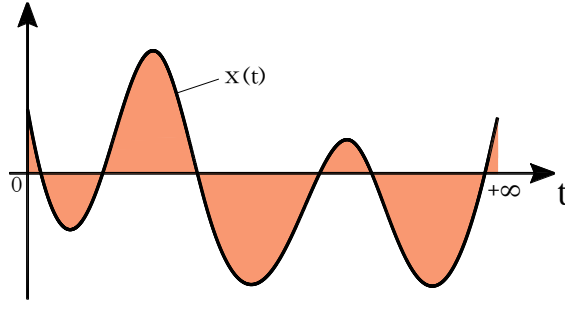
Assim, a expressão que traduz a aproximação de uma função $f(t_k)$ em somatório de Fourier na forma complexa pode ser escrita em termos da TDF da seguinte forma

$$f(t_k) = \frac{1}{T_p} \sum_{n=-N/2}^{N/2} F(\omega_n) e^{i\omega_n t_k} \quad (3.68)$$

A representação gráfica da TDF pode ser efetuada recorrendo a dois gráficos espectrais, um correspondente à parte real e outro à parte imaginária. De forma equivalente, pode-se também representar a TDF em termos de um gráfico de amplitudes e de um gráfico de ângulos de fase, sendo esta última uma opção muito utilizada, tal como já foi referido.

Para o caso de sinais $x(t)$ correspondentes a funções de variável contínua, definidas num intervalo limitado $[0, T]$ a pretendida aproximação de $x(t)$ é dada, não por um somatório de ondas, mas sim por uma série de ondas, denominada série de Fourier (“soma de infinitas ondas de frequências $\omega_n = n.\Delta\omega$, $n = 0, 1, 2, \dots$ ”). Para sinais representados por funções de variável contínua definidas num domínio não limitado do tipo $[0, +\infty [$, a pretendida aproximação de Fourier é dada por um integral, denominado integral de Fourier, o qual corresponde a uma “soma de infinitas ondas de frequências infinitesimalmente próximas” (Oliveira, 2013). Apresentam-se na Tabela 3.4 as funções $x(t)$ e respetivas fórmulas que representam cada tipo de sinal.

Tabela 3.4 - Aproximação de sinais através de sobreposição de ondas harmónicas.

<p style="text-align: center;">Sinal discreto $[0, T]$</p> 	<p style="text-align: center;">Somatório de Fourier</p> $x(t) = \sum_0^N (a_n \cos(\omega_n t) + b_n \text{sen}(\omega_n t))$ <p style="text-align: center;">em que $\omega_n = n.\Delta\omega$ e $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$</p>
<p style="text-align: center;">Sinal contínuo $[0, T]$</p> 	<p style="text-align: center;">Série de Fourier</p> $x(t) = \sum_0^{\infty} (a_n \cos(\omega_n t) + b_n \text{sen}(\omega_n t))$ <p style="text-align: center;">em que $\omega_n = n.\Delta\omega$ e $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$</p>
<p style="text-align: center;">Sinal contínuo $[0, +\infty [$</p> 	<p style="text-align: center;">Integral de Fourier</p> $x(t) = \int_0^{\infty} (a_n \cos(\omega_n t) + b_n \text{sen}(\omega_n t)) \Delta\omega$ <p style="text-align: center;">em que $T \rightarrow \infty$</p>

3.3.2 Análise espectral utilizando software disponível no mercado

Atualmente existem programas com módulos computacionais para cálculo de TDF, baseados num algoritmo de grande eficiência, designado por *Fast Fourier Transform* (FFT). Com este algoritmo podem-se calcular rapidamente os parâmetros a_n e b_n das ondas harmónicas apresentadas na Figura 3.9. Para aplicar o algoritmo FFT a um dado sinal pode-se recorrer à função $fft()$ do MATLAB (esta admite que o intervalo de tempo adotado na discretização temporal é unitário pelo que é necessário efetuar a multiplicação por Δt). A partir dos valores complexos correspondentes à TDF (obtidos com um comando do tipo: $TDF = fft(f).dt$) é possível obter os parâmetros a_n e b_n de cada onda n , utilizando as seguintes expressões

$$a_n = \frac{2 \operatorname{Re}(F(\omega_n))}{T} \quad \text{e} \quad b_n = -\frac{2 \operatorname{Im}(F(\omega_n))}{T} \quad (3.69)$$

Dos N_P valores complexos fornecidos para $F(\omega_n)$, metade são valores relativos a ω_n positivos, e os restantes são correspondentes aos respetivos simétricos. Em geral utiliza-se apenas a primeira metade dos N_P valores complexos fornecidos pelo algoritmo FFT, os quais correspondem às $N/2$ ondas harmónicas em que se decompõe o sinal analisado. Estas ondas harmónicas têm frequências que variam discretamente desde 0 até à frequência de Nyquist, $f_{\text{Nyq}} = 1/2 (1/\Delta t)$, sendo o incremento de frequência $\Delta f = 1/T$. A segunda metade dos valores fornecidos pelo algoritmo FFT é constituída por valores que são os conjugados dos contidos na primeira metade (Figura 3.11).

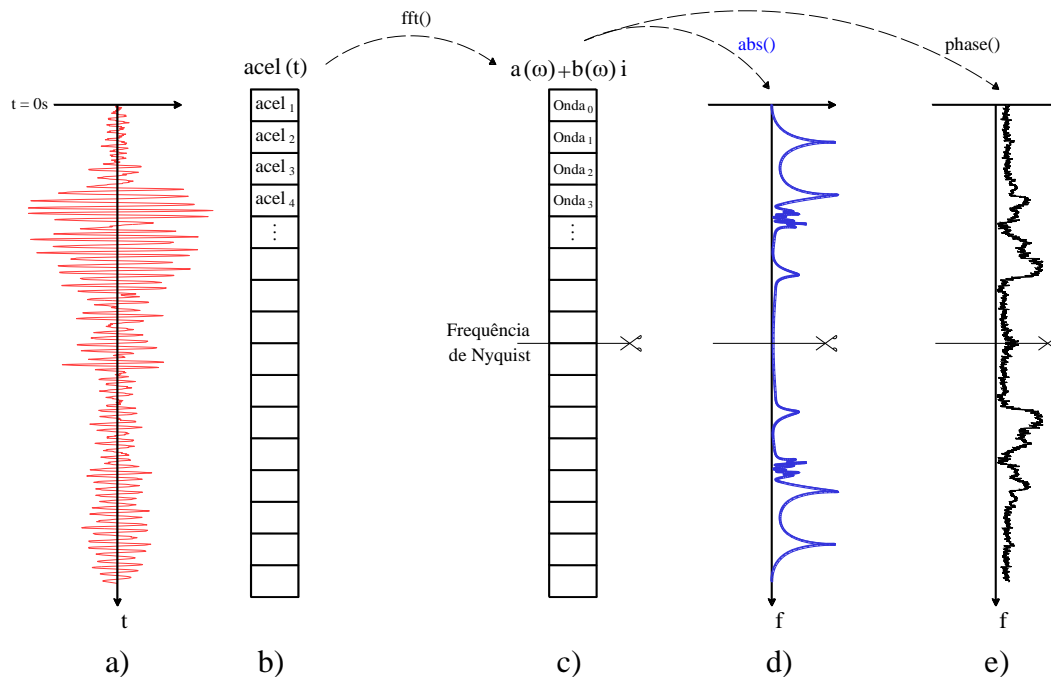


Figura 3.11 - Decomposição de um acelerograma medido, em espectros de amplitude e de fase: a) acelerograma; b) vetor coluna, $acel(t)$, com os valores das acelerações, em função do tempo; c) vetor coluna que contém a parte real e a parte imaginária, $a(\omega)+b(\omega)i$, de cada onda sinusoidal; d) espectro de amplitudes; e) espectro de fases.

Os espectros de amplitudes dizem-nos o valor da amplitude de cada onda n . Ao verificarem-se picos destacados ao longo do espectro, significa que se está a identificar frequências naturais da estrutura. Ao aplicar-se a transformada de Fourier a um sinal de n número de instantes de tempo, obtém-se um espectro simétrico de n ondas, sendo a frequência da onda média chamada de frequência de Nyquist. Por isso, apenas metade do espectro é utilizado, desde a onda 0 à onda média. Além do espectro de amplitudes, obtém-se também os ângulos de fase, tal como se pode ver na Figura 3.11 e sendo que estes nos informam acerca da posição inicial da onda correspondente (Figura 3.12).

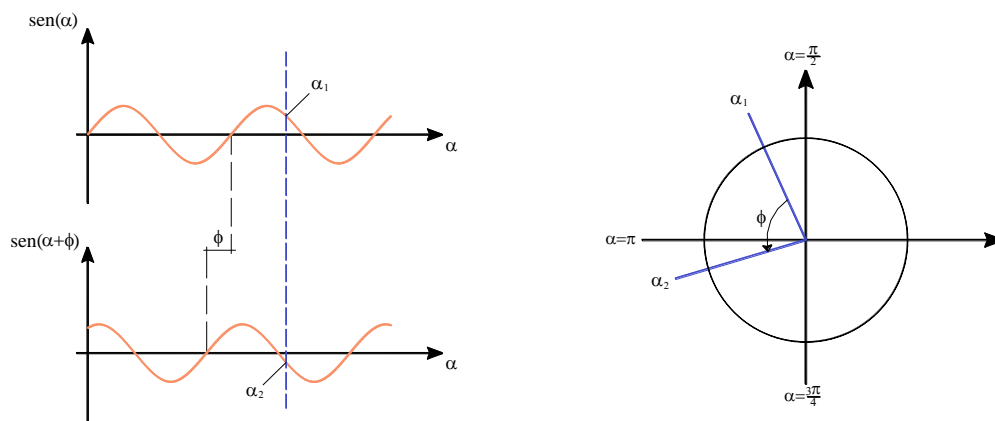


Figura 3.12 - Representação da diferença de fase de duas ondas sinusoidais com a mesma frequência natural.

3.3.2.1 Erros de sobreposição e de escorregamento

Ao longo de todo o processo de aquisição, processamento e análise de sinal, podem ocorrer diversos tipos de erros, nomeadamente associados aos processos de amostragem, decimação e filtragem. Os dois tipos de erros mais importantes são (Carvalho, Oliveira Costa, & Schiappa de Azevedo, 1989): erros por sobreposição ou dobragem (*aliasing errors*) e erros por escorregamento ou efeito de fuga (*leakage effect*).

Os erros por sobreposição surgem devido ao facto de sinais com conteúdo energético em frequências elevadas serem discretizados com frequências de amostragem baixas e, neste caso, se não forem tomadas as devidas precauções, podem surgir picos espectrais fictícios para frequências baixas. A colocação de um filtro analógico (filtro *anti-aliasing*) entre a saída dos transdutores e a entrada dos sistemas de conversão analógico-digital, uma técnica muito eficaz para evitar este tipo de erros, elimina o contributo de todas as frequências acima da frequência de Nyquist. Este tipo de erros também podem surgir quando se faz a decimação de um sinal para uma frequência de amostragem inferior à original, neste caso, antes de efetuar a decimação propriamente dita é necessário aplicar um filtro digital em frequência do tipo *passa-baixo* para eliminar todas as frequências acima da nova frequência de Nyquist (inferior à inicial).

Os erros por escorregamento, que estão associados ao carácter finito das séries temporais, têm como consequência uma distribuição fictícia da energia, associada a uma determinada frequência, por uma banda de frequências próximas desta (ver espectro não suavizado da Figura 3.16). A utilização de “janelas temporais de dados” não retangulares, nomeadamente, do tipo *Hanning* (sinusoidal) ou, em geral, do tipo *Tukey* (Figura 3.18b) minimiza este tipo de erros.

3.3.2.2 Correção para obter registos de média nula

Para calcular um espectro (de amplitude ou de fase) correspondente a um dado registo de acelerações, é necessário verificar se este está em condições de ser utilizado. Na prática quando se efetua a medição de acelerações recorrendo a sensores de aceleração (do tipo *force balance* ou piezoelétricos) é frequente obter registos de média não nula e, por vezes, de média variável (devido a problemas de calibração dos sensores, ou a problemas induzidos por indesejadas variações térmicas durante o tempo de medição, ou ao cuidado no manuseamento de equipamentos). Nos casos em que ocorre este tipo de problemas de medição é preciso corrigir os registos originais, através da utilização de filtros de médias móveis (utilizando janelas com um número de pontos adequado). O filtro de média móvel (*filtro_MM*) é uma técnica de processamento de sinal que procura melhorar a relação sinal-ruído (Vaseghi, 2008). Isto acontece porque, ao sinal medido, é subtraída a sua média móvel, que se obtém substituindo o valor da aceleração (*acel*), num dado instante, pelo valor da média das acelerações num alcance de instantes imediatamente anteriores e a seguir (Figura 3.13). Este alcance é determinado pela variável *xi*, que nos diz quantos instantes de tempo são inseridos na janela de cálculo da média, em que a janela terá um número de pontos igual ao instante em substituição mais duas vezes o valor de *xi*. É um método bastante prático que reduz a influência do ruído e logo suaviza o sinal. No caso dos instantes iniciais e finais do sinal, cujo valor de *xi* seja superior ao número de instantes anteriores ou seguintes, utilizam-se os instantes possíveis (repare-se, na figura seguinte, que a primeira e última janelas a laranja não fazem a média de 7 instantes de tempo, apesar de se ter definido $xi=3$). Com este obtém-se então o vetor *filtro_MM* que contém os valores da média móvel do registo.

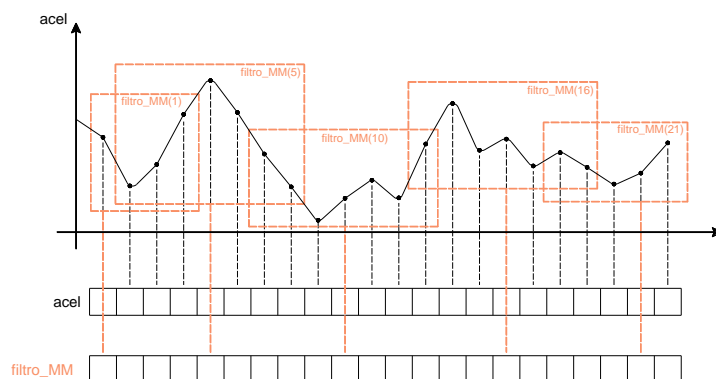


Figura 3.13 - Determinação da média móvel de um registo discreto, em acelerações, utilizando janelas de 7 pontos

$$(xi = 3; xjanela=3+1+3=7).$$

O acelerograma corrigido obtém-se subtraindo ao acelerograma original a média móvel obtida pelo referido filtro, como se mostra na Figura 3.14.

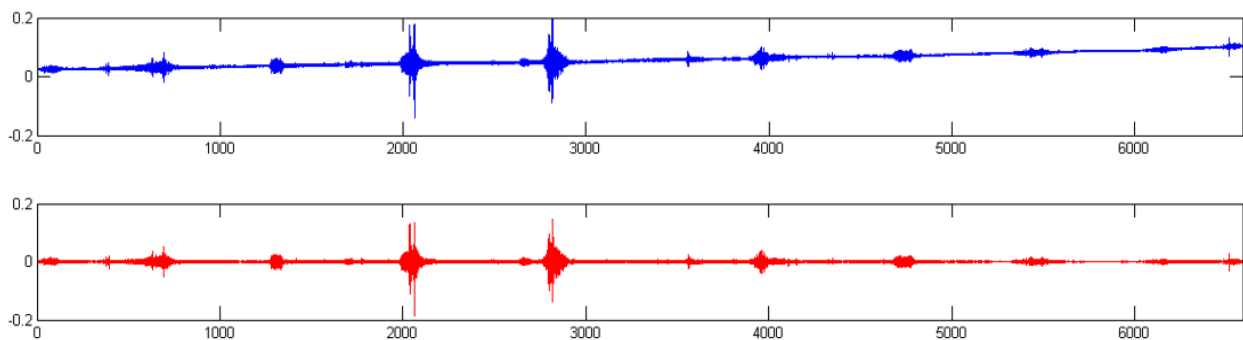


Figura 3.14 - Utilização de um filtro de médias móveis para obter um sinal com média nula.

3.3.2.3 Cálculo de espectros utilizando uma única janela no tempo

Após a realização da anterior correção, pode-se proceder ao cálculo dos espectros, utilizando o algoritmo da FFT, apenas a uma parte do acelerograma (Figura 3.15), que se ache mais conveniente ou em melhores condições de ser analisada.

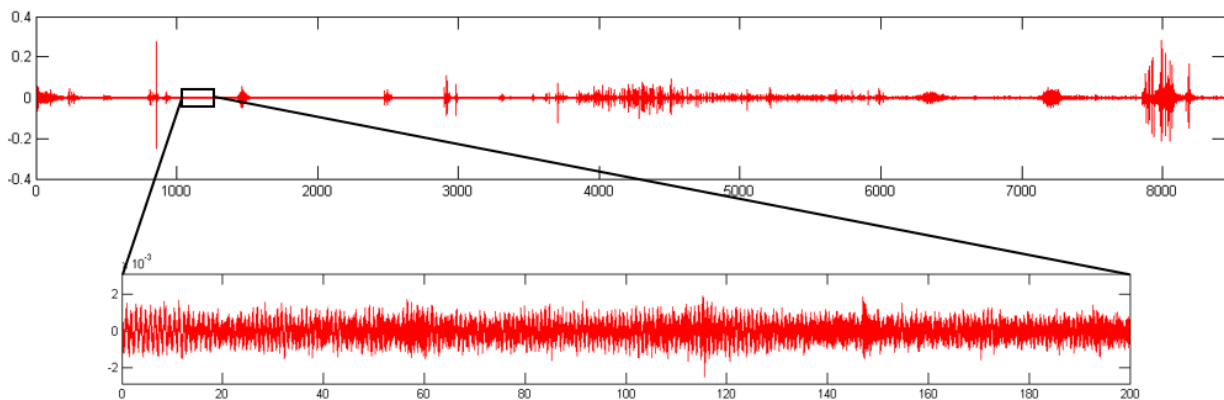


Figura 3.15 - Janela de acelerograma filtrado, selecionado entre os 1050 e os 1250 segundos.

Por outro lado, considerando todos os pontos do registo, para períodos de tempo relativamente elevados, obtém-se espectros com elevada discretização em frequência (valores de Δf bastante reduzidos, dado que $\Delta f = 1/T$), os quais apresentam, em geral, elevada “rugosidade”. Estes espectros podem ser suavizados recorrendo, também eles, a filtros de médias móveis. Neste caso é conveniente utilizar médias centradas com um pequeno número de pontos, por forma a suavizar o espectro sem que sejam eliminados os picos principais. Na Figura 3.16, é possível verificar o resultado da aplicação de um filtro de médias móveis para suavizar um espectro de amplitudes. A cinzento encontra-se o espectro original, a preto a primeira filtragem e, por fim, a vermelho uma segunda filtragem.

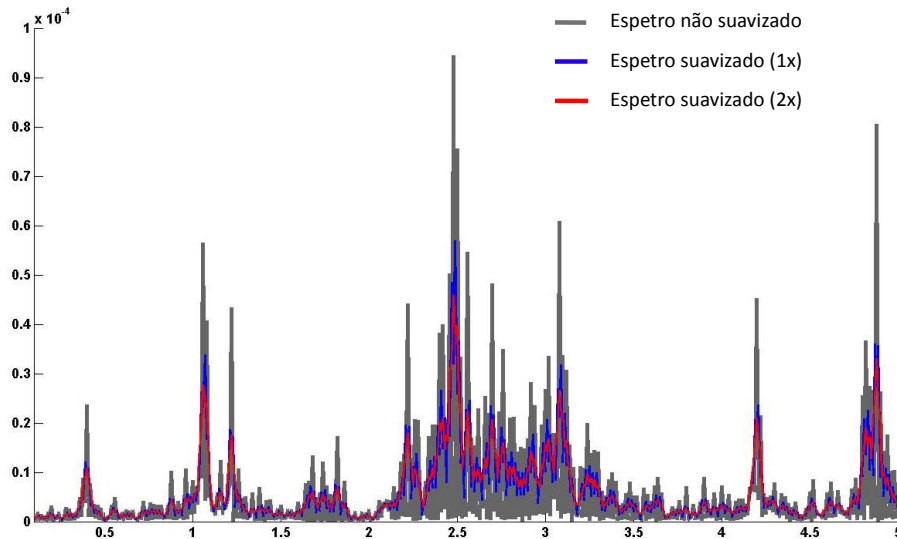


Figura 3.16 - Aplicação do filtro de média móvel (*filtro_MM*) de forma a obter espectros de amplitude suavizados.

3.3.2.4 Cálculo de espectros utilizando várias janelas no tempo

Outra alternativa para efetuar a análise espectral de um dado registo é aplicar o algoritmo FFT a várias janelas temporais, usualmente considerando sobreposição de janelas no tempo (é usual optar por sobreposição de 2/3 ou 1/2), uma técnica também conhecida por “*overlapping*”, tal como representado na Figura 3.17.

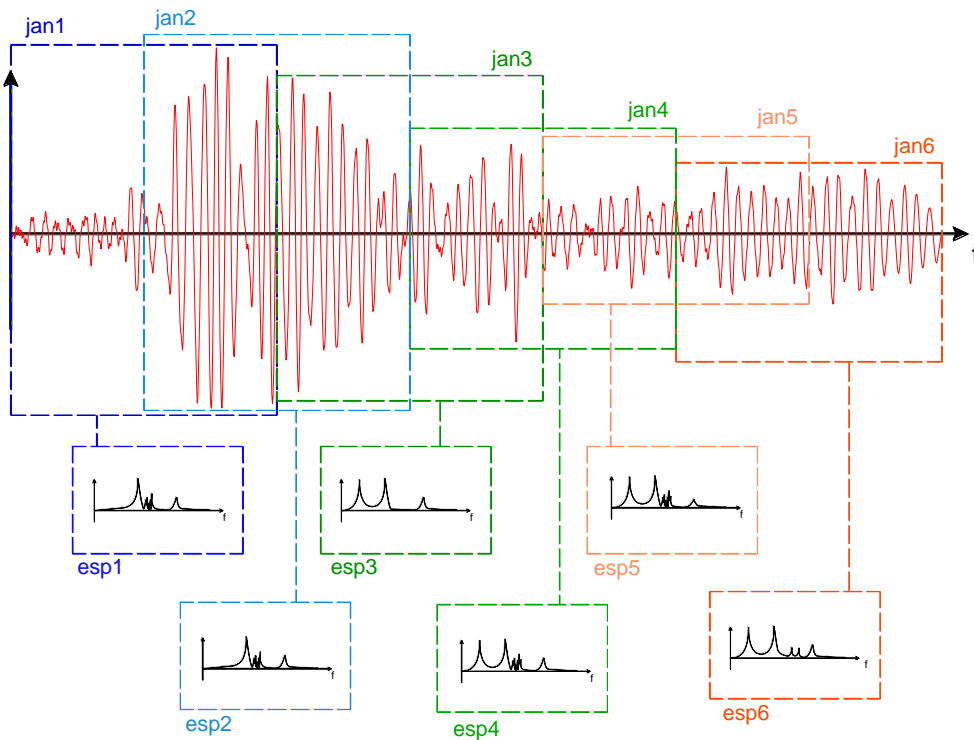


Figura 3.17 - Função que calcula o espectro de amplitudes de um registo, através da média dos espectros de janelas com 100 segundos e sobreposição de 50%.

Esta técnica é frequentemente utilizada para obter espectros de amplitudes suavizados que resultam da média dos espectros de amplitudes de cada uma das janelas. Quando se utiliza esta técnica obtêm-se espectros com uma discretização, em frequência, mais baixa, pois esta depende do comprimento das janelas temporais utilizadas ($\Delta f = 1/T_{\text{janela}}$) e não do comprimento total do registo.

A janela temporal mais simples é denominada janela retangular. Com este tipo de janela, aplicada a um dado intervalo, é extraído exatamente o registo de acelerações medido nesse intervalo. Contudo verifica-se que pode ser útil aplicar janelas temporais do tipo seno pois o registo extraído, dentro do intervalo T_{janela} , é multiplicado por uma função como a que se indica na Figura 3.18b. As janelas retangulares correspondem a um caso particular das denominadas janelas de *Tukey* e estão associadas ao parâmetro de *Tukey*=0. As janelas sinusoidais são também um caso particular das janelas de *Tukey* e correspondem ao parâmetro de *Tukey*=1. Podem ser utilizados para parâmetro de *Tukey* quaisquer valores entre 0 e 1, o que corresponde a janelas cujas formas variam entre a retangular e a sinusoidal.

O programa MATLAB tem uma função designada por *tukeywin()* que gera um vetor com os valores de janelas de *Tukey* para qualquer parâmetro pretendido (0 a 1).

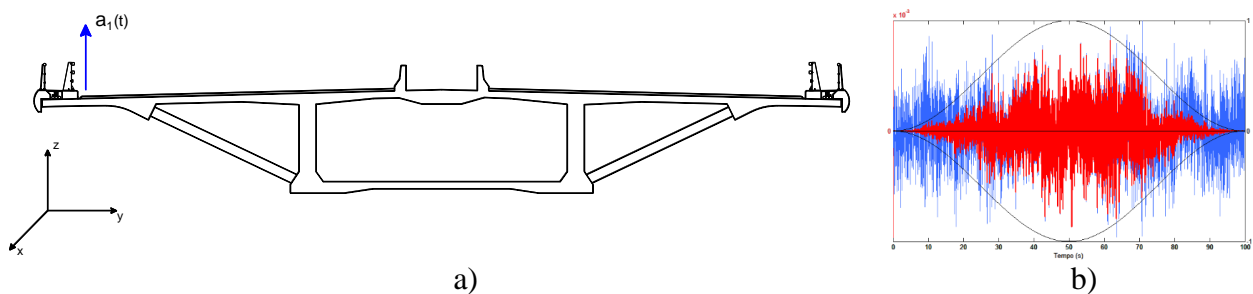


Figura 3.18 - Aplicação de uma janela de *Tukey*=1 $W(t_k)$ a um registo de acelerações $a(t_k)$ num ponto de uma secção de um tabuleiro de onde se obtém $W(t_k).x(t_k)$.

A aplicação deste tipo de janelas temporais diferentes da retangular não altera o conteúdo em frequência e geralmente permite obter espectros médios mais suaves. Para cada janela calcula-se o respetivo espetro e o objetivo final é obter um espetro médio suavizado correspondente à média dos espetros de todas as janelas temporais consideradas, tal como foi possível perceber na Figura 3.17.

Tendo agora todos os fundamentos necessários para a compreensão da processamento e análise de sinal, o próximo ponto irá incidir no campo da identificação modal no domínio da frequência, utilizando diversos registos obtidos em diferentes pontos da estrutura.

3.3.3 Osciladores com N graus de liberdade. Identificação modal

A identificação modal permite a identificação das características dinâmicas das estruturas (frequências naturais, configurações modais e amortecimentos modais) a partir de dados experimentais (medição de vibrações). Assim, a introdução desta secção tem como objetivo principal descrever os principais aspetos a ter em conta na utilização e implementação de técnicas de identificação modal, no domínio da frequência.

As técnicas de identificação modal descritas em seguida baseiam-se apenas na análise da resposta medida, sob excitação ambiente. Nos ensaios de vibração ambiente não existe controlo sobre as forças de excitação, nem existe a possibilidade de as conhecer ou medir, sendo necessário assumir que a resposta modal corresponde a uma realização de um processo estocástico gaussiano de tipo ruído branco com média nula. Por se adotar esta hipótese é que surge a designação identificação modal estocástica, que advém do facto de a fonte de excitação resultar da contribuição de várias fontes. Assim, para uma melhor compreensão desta temática, introduz-se no ponto seguinte o tema do comportamento dinâmico de estruturas sob de excitação estocástica.

3.3.3.1 Comportamento dinâmico de estruturas sob excitação estocástica

A variação ao longo do tempo de uma grandeza física, como a aceleração num ponto de uma estrutura, devido, por exemplo, ao efeito do vento, corresponde a uma função aleatória. Assim, a caracterização do comportamento dinâmico de estruturas sujeitas a ações de natureza aleatória só pode ser conseguida recorrendo a conceitos probabilísticos.

Nesta perspetiva, é conveniente começar por idealizar a excitação e a resposta estrutural recorrendo ao conceito de processo estocástico. Por exemplo, o lançamento de um dado considera-se ser um processo aleatório, já que dele se obtém os valores dos números das suas faces, todos eles independentes do instante de tempo. Por outro lado, o comportamento dinâmico de uma estrutura já requer a obtenção de uma função que represente a sua resposta ao longo do tempo e por isso considera-se ser um processo estocástico.

Um processo estocástico $x(t)$ é um conjunto de n funções aleatórias ($n \rightarrow \infty$) dependentes de um parâmetro t (tempo), em que cada uma corresponde a uma realização, r , do processo ($r \rightarrow \infty$). As realizações do processo estão associadas à caracterização/medição de uma determinada grandeza física (processo estocástico escalar), ou de um conjunto de grandezas físicas (processo estocástico vetorial). Um parâmetro estatístico como a aceleração, $a(t)$, num ponto de uma estrutura (medida numa dada direção), pode ser tratado como um processo estocástico escalar: uma realização r deste processo é um registo de acelerações, com duração T ($t \in [0, T]$, idealmente $T \rightarrow \infty$), iniciado num

dado instante; outro registo com a mesma duração T , iniciado noutra instante, constitui outra realização do mesmo processo. Como exemplo de um processo estocástico vetorial $\underline{a}(t)$ pode-se pensar na medição de acelerações em vários pontos de um tabuleiro de uma ponte, como se mostra na Figura 3.19, para o caso da medição em cinco pontos, $\underline{a}(t) = [a_1(t) \ a_2(t) \ a_3(t) \ a_4(t) \ a_5(t)]$. Neste caso, cada realização do processo inclui cinco registos de duração T , todos iniciados num mesmo instante.

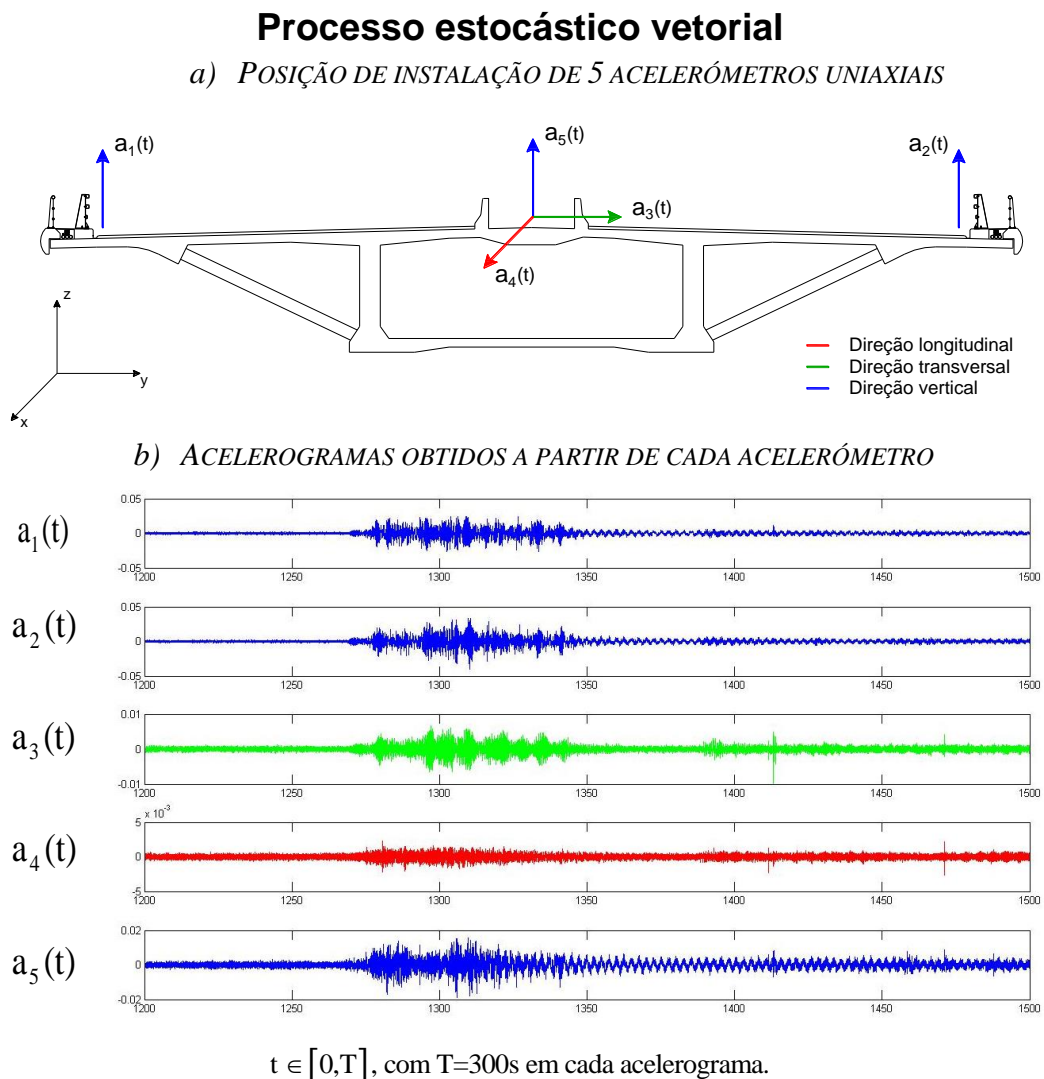


Figura 3.19 - Processo estocástico vetorial com 5 componentes (3 verticais, 1 transversal e 1 longitudinal). Através de uma realização, obtém-se 5 registos temporais de acelerações, com duração $T=300s$: a) posição de instalação dos 5 acelerómetros uniaxiais; b) acelerogramas obtidos a partir de cada acelerómetro.

3.3.3.2 Funções de correlação

Para simplificar a análise dos processos estocásticos é usual admitir que são estacionários e ergódicos. Estacionário significa que os seus parâmetros estatísticos são independentes do instante de tempo e ergódico significa que o valor dos parâmetros estatísticos avaliados para um determinado instante, para diferentes realizações, é igual ao valor avaliado apenas para uma

realização. Na análise do comportamento dinâmico de estruturas é também usual admitir, como é o caso desta dissertação, que os processos estocásticos têm média nula e são do tipo Gaussiano (à semelhança de muitos fenómenos naturais).

Assim, para um processo estocástico estacionário e ergódico, a correspondente função de auto-correlação depende apenas do desfaseamento τ entre instantes (não depende dos instantes) e, assim, pode ser calculada usando uma única realização $x(t)$ do processo, com base na seguinte expressão (valor médio do produto $x(t).x(t + \tau)$, na realização escolhida, de comprimento $T \rightarrow \infty$)

$$R(\tau) = E[x(t).x(t + \tau)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t).x(t + \tau) dt \quad (3.70)$$

Quanto mais irregular ou aleatório é o processo estocástico, mais rapidamente a sua função de auto-correlação decai com o aumento do desfaseamento τ (Figura 3.20). Para processos estocásticos estacionários de média nula, as funções de auto-correlação são simétricas com um máximo na origem igual à variância do processo e decaimento para zero quando $\tau \rightarrow \infty$.

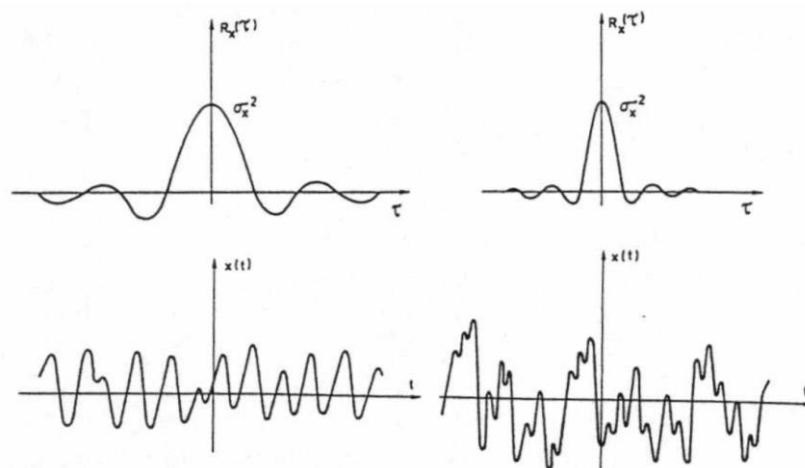


Figura 3.20 - Representação gráfica das funções da auto-correlação para dois processos estocásticos. Num processo com maior grau de aleatoriedade a função tende mais rapidamente para zero (Newland, D., 1975).

A história no tempo de uma realização $x(t)$ de um processo estocástico escalar, estacionário e ergódico, correspondente a um dado fenómeno físico, com duração $T \rightarrow \infty$ e, por isso, em rigor, o integral ao longo do tempo de $|x(t)|$, ou seja do módulo de $x(t)$, tende para infinito, o que significa que não é possível calcular, no sentido clássico, a transformada de Fourier de $x(t)$, com vista a obter informação sobre o conteúdo em frequência do processo aleatório (note-se que as funções seno e cosseno não têm transformada de Fourier no sentido clássico). Na prática esta dificuldade não se coloca dado que nunca se trabalha com registos de dados correspondentes a intervalos de tempo infinitos. Contudo, a referida dificuldade formal pode ser facilmente ultrapassada optando por analisar a função de auto-correlação (que tende para zero quando $\tau \rightarrow \infty$ e, por isso, tem

transformada de Fourier no sentido clássico) em vez da própria função aleatória (Newland, D., 1975) correspondente a uma realização do processo estocástico em análise, dado que a função de auto-correlação $R(\tau)$ de uma dada realização $x(t)$, contém informação em frequência idêntica à do sinal original. Assim, tendo um dado sinal $x(t)$, correspondente a uma realização de um processo estocástico estacionário e ergódico, é usual trabalhar com a respetiva função de auto-correlação $R(\tau)$, em vez de trabalhar diretamente com o sinal original $x(t)$. A função de auto-correlação é transposta para o domínio da frequência, recorrendo à transformada de Fourier, com vista a analisar o conteúdo em frequência de $x(t)$. A transformada de Fourier de uma função de auto-correlação denomina-se auto-espectro e, na prática, para um intervalo de tempo $[0, T]$ (idealmente $T \rightarrow \infty$, mas, na prática, T é sempre finito), obtém-se, recorrendo à regra para cálculo da transformada de Fourier do produto de convolução, a seguinte expressão

$$S(\omega) = \mathcal{F}(R(\tau)) = \frac{1}{T} \mathcal{F}(x(t)) \cdot \overline{\mathcal{F}(x(t))} = \frac{1}{T} X(\omega) \cdot \overline{X(\omega)} \quad (3.71)$$

que é uma função real, de variável real ω (frequência), que quantifica a distribuição em frequência do conteúdo energético de um sinal.

Para o caso de um processo estocástico vetorial do tipo $\underline{x}(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t) \ x_4(t) \ x_5(t)]$, como o que se apresentou atrás, na Figura 3.19, o conceito anterior de função de auto-correlação é generalizado e surge a denominada matriz de correlação $\underline{R}(\tau)$ em que, na diagonal, surgem funções de auto-correlação e nos termos não diagonais surgem as denominadas funções de correlação-cruzada e, neste caso, seria

$$\underline{R}(\tau) = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} & R_{15} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} & R_{25} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & R_{34} & R_{35} \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} & R_{45} \\ R_{51} & R_{52} & R_{53} & R_{54} & R_{55} \end{bmatrix}, \quad R_{ij}(\tau) = E[x_i(t) \cdot x_j(t + \tau)] = \frac{1}{T} \int_0^T x_i(t) \cdot x_j(t + \tau) dt \quad (3.72)$$

Mais à frente mostra-se que o problema da identificação modal de uma estrutura sob excitação ambiente corresponde à análise de um processo estocástico vetorial, em que se revela a utilidade das matrizes de correlação e, em particular, das respetivas transformadas de Fourier, designadas matrizes de densidade espectral de potência (DEP). Estas matrizes contêm informação de grande interesse para a identificação modal, nomeadamente para a determinação das frequências naturais, amortecimentos modais e configurações modais. Mostra-se também, em detalhe, que os termos não diagonais destas matrizes contêm informação que permite identificar as configurações modais, dado que envolvem informação de pares de registos correspondentes a pontos distintos da estrutura.

3.3.3.3 Matriz de densidade espectral de potência

A transformada de Fourier da anterior matriz de correlação $\underline{R}(\tau)$ correspondente a um determinado processo estocástico vetorial é, como se referiu, a denominada matriz de DEP do processo a qual é dada pela seguinte expressão

$$\underline{S}(\omega) = \mathcal{F}(\underline{R}(\tau)) = \frac{1}{T} \mathcal{F}(\underline{x}(t)) \cdot \overline{\mathcal{F}}(\underline{x}^T(t)) = \frac{1}{T} \underline{X}(\omega) \cdot \overline{X}^T(\omega) \quad (3.73)$$

em que $\underline{X}(\omega) = \mathcal{F}(\underline{x}(t))$.

Para o caso do processo estocástico vetorial da Figura 3.19, a matriz $\underline{S}(\omega)$ é dada por

$$\underline{S}(\omega) = \frac{1}{T} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \overline{X}_1 & \overline{X}_2 & \overline{X}_3 & \overline{X}_4 & \overline{X}_5 \end{bmatrix} = \frac{1}{T} \begin{bmatrix} X_1 \overline{X}_1 & X_1 \overline{X}_2 & X_1 \overline{X}_3 & X_1 \overline{X}_4 & X_1 \overline{X}_5 \\ X_2 \overline{X}_1 & X_2 \overline{X}_2 & X_2 \overline{X}_3 & X_2 \overline{X}_4 & X_2 \overline{X}_5 \\ X_3 \overline{X}_1 & X_3 \overline{X}_2 & X_3 \overline{X}_3 & X_3 \overline{X}_4 & X_3 \overline{X}_5 \\ X_4 \overline{X}_1 & X_4 \overline{X}_2 & X_4 \overline{X}_3 & X_4 \overline{X}_4 & X_4 \overline{X}_5 \\ X_5 \overline{X}_1 & X_5 \overline{X}_2 & X_5 \overline{X}_3 & X_5 \overline{X}_4 & X_5 \overline{X}_5 \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

Os resultados anteriores apresentam-se esquematicamente, de forma resumida, na Figura 3.21 para o caso de uma ponte de tirantes sob excitação ambiente em que se se medem acelerações em cinco pontos da secção central do tabuleiro (registos com duração T), com vista à determinação da matriz DEP de acelerações. Na secção seguinte, mostra-se que esta matriz espectral (função da frequência) contém informação sobre a estrutura e sobre a excitação. Nomeadamente contém informação sobre os parâmetros modais da estrutura (frequências naturais dos primeiros modos de vibração e as correspondentes configurações e amortecimentos).

Ainda na mesma figura, mostra-se também como determinar analiticamente uma matriz de DEP da resposta de uma estrutura (em deslocamentos, velocidades ou acelerações), considerando uma discretização qualquer (com N_{GL}), partindo da equação diferencial que descreve o comportamento dinâmico de estruturas no domínio do tempo, para qualquer tipo de história de forças aplicadas. Para tal recorre-se à formulação modal clássica (adotando a hipótese de amortecimento de Rayleigh, proporcional às matrizes de massas e de rigidez globais) e à posterior transposição da referida equação diferencial da dinâmica para o domínio da frequência, recorrendo à transformada de Fourier.

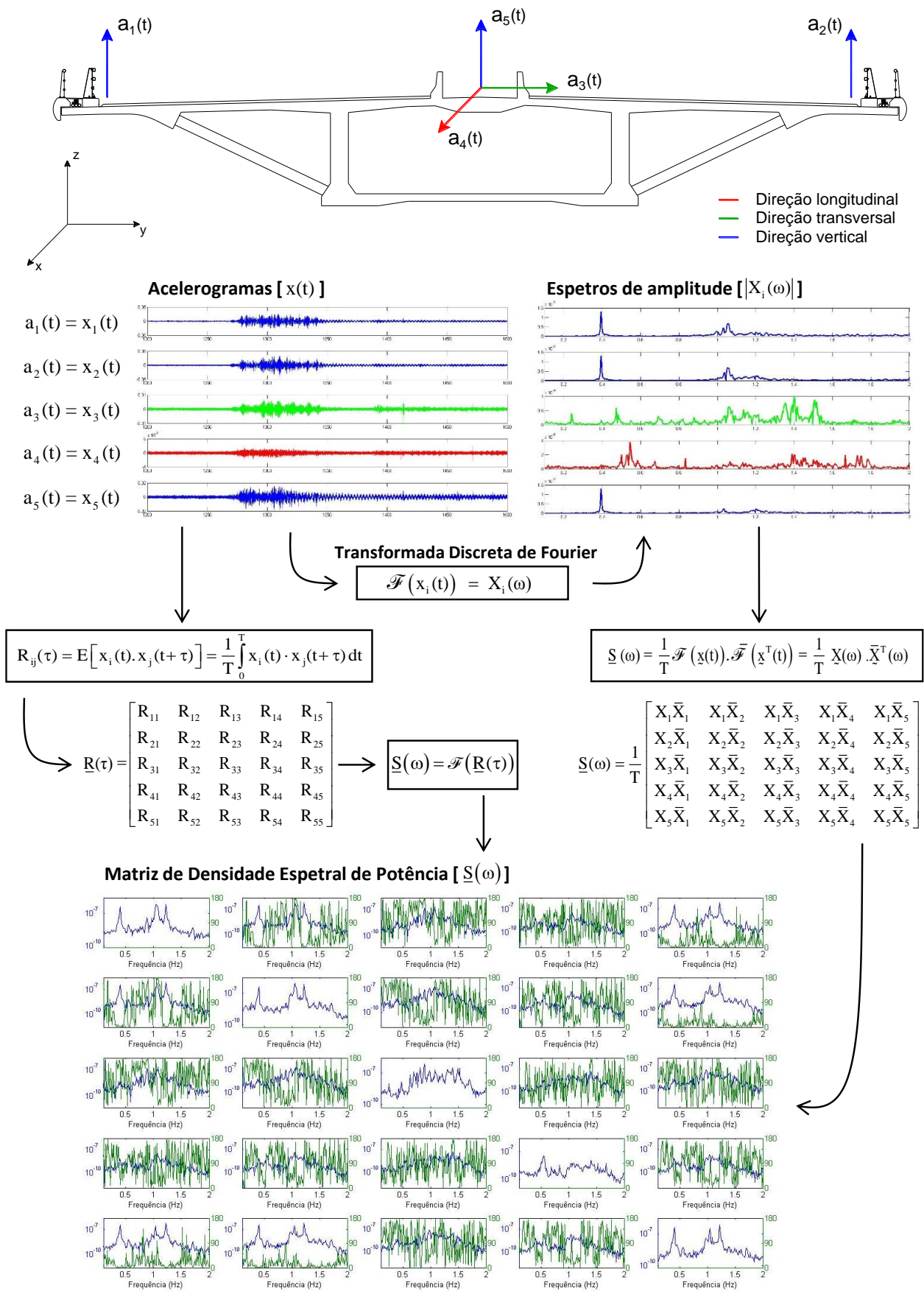


Figura 3.21 - Ensaio de vibração ambiente com medição de acelerações em cinco pontos. Séries temporais observadas (acelerogramas), espectros de amplitude, matriz de correlação e matriz de densidade espectral de potência.

3.3.3.4 Determinação das matrizes de densidade espectral de potência da resposta com base na matriz de flexibilidade dinâmica e na matriz de densidade espectral da ação

Na perspectiva de facilitar a interpretação dos resultados experimentais que se obtêm na monitorização de estruturas (sistemas de monitorização em contínuo ou em ensaios dinâmicos de vibração ambiente e/ou forçada) é conveniente utilizar modelos numéricos que permitam simular a resposta estrutural para os diversos tipos de ações dinâmicas que podem ocorrer durante a medição da resposta.

Nos modelos numéricos, geralmente baseados no método dos elementos finitos, a estrutura é discretizada em N graus de liberdade (N_{GL}) e o seu comportamento dinâmico é descrito pela conhecida equação diferencial da dinâmica de estruturas que, para uma dada discretização espacial, assume a forma seguinte

$$\underline{m}\ddot{\underline{u}} + \underline{c}\dot{\underline{u}} + \underline{k}\underline{u} = \underline{f} \quad (3.75)$$

que envolve as matrizes de massas, de amortecimento e de rigidez da estrutura, para a discretização adotada (matrizes \underline{m} , \underline{c} e \underline{k} , simétricas de dimensão $N_{GL} \times N_{GL}$), o vetor da história das forças nodais $\underline{f} = \underline{f}(t)$, e os vetores das histórias dos deslocamentos nodais $\underline{u} = \underline{u}(t)$ (incógnita) e respectivas derivadas em ordem ao tempo, $\dot{\underline{u}} = \dot{\underline{u}}(t)$ e $\ddot{\underline{u}} = \ddot{\underline{u}}(t)$, correspondentes aos vetores das histórias de velocidades e acelerações nodais, respetivamente.

Considerando a transformação para coordenadas modais $\underline{u} = \underline{\Phi} \underline{q}$ e transpondo a equação (3.26)

$$\underline{M} \ddot{\underline{q}}(t) + \underline{C} \dot{\underline{q}}(t) + \underline{K} \underline{q}(t) = \underline{\Phi}^T \underline{f}(t), \text{ com } \underline{f} = \underline{s} f(t)$$

para o domínio da frequência, aplicando a transformada de Fourier a ambos os membros, obtém-se a seguinte equação algébrica, complexa, definida no domínio da frequência, ω ,

$$-\omega^2 \underline{Q} + i \omega \underline{C} \underline{Q} + \underline{K} \underline{Q} = \underline{\Phi}^T \underline{F}, \quad (3.76)$$

em que $\underline{Q} = \underline{Q}(\omega) = \mathcal{F}(\underline{q}(t))$ e $\underline{F} = \underline{F}(\omega) = \mathcal{F}(\underline{f}(t))$. Colocando \underline{Q} em evidência, a anterior equação escreve-se na forma

$$\left(-\omega^2 \underline{I} + i \omega \underline{C} + \underline{K}\right) \underline{Q} = \underline{\Phi}^T \underline{F} \Leftrightarrow \underline{Q} = \left(-\omega^2 \underline{I} + i \omega \underline{C} + \underline{K}\right)^{-1} \underline{\Phi}^T \underline{F} \quad (3.77)$$

ou

$$\underline{Q} = \underline{H}_D \underline{\Phi}^T \underline{F} \quad (3.78)$$

em que $\underline{H}_D = \underline{H}_D(\omega)$ é uma matriz diagonal, onde $H_{D_{nn}} = 1 / (-\omega^2 + i \omega 2\xi_n \omega_n + \omega_n^2)$, $n = 1$ a N .

Dado que, $\underline{u} = \underline{\Phi} \underline{q}$ e que, por aplicação da transformada de Fourier, pode-se escrever $\underline{U} = \underline{\Phi} \underline{Q}$, que em ordem a \underline{Q} fica $\underline{Q} = \underline{\Phi}^{-1} \underline{U}$, então, substituindo na anterior equação, obtém-se

$$\underline{U} = \underline{\Phi} \underline{H}_D \underline{\Phi}^T \underline{F} \quad (3.79)$$

ou, simplificando a notação,

$$\underline{U} = \underline{H} \underline{F} \quad (3.80)$$

em que

$$\underline{H} = \underline{H}(\omega) = \underline{\Phi} \underline{H}_D \underline{\Phi}^T \quad (3.81)$$

é a denominada matriz de flexibilidade dinâmica ou matriz das funções de resposta em frequência (FRF). Nesta fase é interessante notar que, para $\omega=0$, a matriz de flexibilidade dinâmica $\underline{H}(\omega)$ é igual à matriz de flexibilidade estática, ou seja, $\underline{H}(\omega=0) = \underline{h} = \underline{k}^{-1}$. Com esta notação para a matriz de flexibilidade estática, $\underline{h} = \underline{k}^{-1}$, e, para a matriz de flexibilidade dinâmica, $\underline{H}(\omega)$, encontra-se um perfeito paralelismo entre as equações que descrevem o comportamento estático e o comportamento dinâmico de estruturas discretizadas: $\underline{u} = \underline{h} \underline{f}$ (comportamento estático) e $\underline{U} = \underline{H} \underline{F}$ ou $\underline{U}(\omega) = \underline{H}(\omega) \underline{F}(\omega)$ (comportamento dinâmico).

Na equação referente ao comportamento estático, as forças aplicadas (constantes no tempo), são transformadas em deslocamentos através da multiplicação pela matriz de flexibilidade estática enquanto na equação referente ao comportamento dinâmico, as forças aplicadas, correspondentes a ondas harmónicas de frequência ω (cada onda é representada por um número complexo), são transformadas em deslocamentos dados também por ondas harmónicas (números complexos).

Por fim, com base na equação (3.80) obtém-se a pretendida expressão da matriz DEP da resposta em deslocamentos $\underline{S}_u = \underline{S}_u(\omega)$, vindo

$$\underline{S}_u = \frac{1}{T} \underline{U} \underline{U}^T = \frac{1}{T} (\underline{H} \underline{F}) (\underline{H} \underline{F})^T = \frac{1}{T} (\underline{H} \underline{F}) (\underline{F}^T \underline{H}^T) = \underline{H} \left(\frac{1}{T} \underline{F} \underline{F}^T \right) \underline{H}^T \quad (3.82)$$

ou seja

$$\underline{S}_u = \underline{H} \underline{S}_F \underline{H}^T, \quad (3.83)$$

sendo $\underline{S}_F = \underline{S}_F(\omega) = \frac{1}{T} \underline{F} \underline{F}^T$ a matriz da densidade espectral das forças de excitação.

O resultado anterior mostra que a matriz \underline{S}_u depende das características modais da estrutura e do conteúdo em frequência das forças de excitação. Para o caso da excitação ser do tipo ruído branco de amplitude normalizada unitária $\underline{S}_F = \underline{I}$ e, nesse caso, a matriz \underline{S}_u só depende das características modais da estrutura. Assim a anterior expressão fica

$$\underline{S}_u = \underline{H} \overline{\underline{H}}^T \quad (3.84)$$

a qual mostra claramente que, num ensaio de ruído ambiente com excitação do tipo ruído branco, as matrizes DEP contêm, essencialmente, informação sobre os parâmetros modais da estrutura.

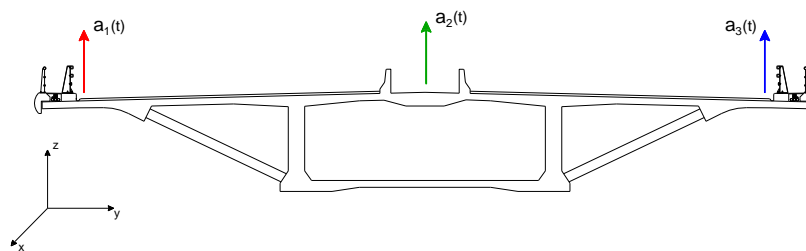
3.3.4 Fundamentos de identificação modal

3.3.4.1 Identificação modal com base em ondas harmónicas

No caso da identificação de modos de vibração de uma ponte, instrumentando o seu tabuleiro, é preciso ter em conta o local de instalação dos acelerómetros, pois é fundamental relacionarem-se os ângulos de fase e as amplitudes das ondas de igual frequência dos diferentes aparelhos. Na Figura 3.22, apresenta-se o local de instalação de 3 acelerómetros uniaxiais que medem acelerações verticais do tabuleiro.

Ensaio de vibração com 3 acelerómetros uniaxiais

a) LOCAL DE INSTALAÇÃO DE 3 ACELERÓMETROS UNIAXIAIS



b) ACELEROGRAMAS OBTIDOS A PARTIR DE CADA ACELERÓMETRO

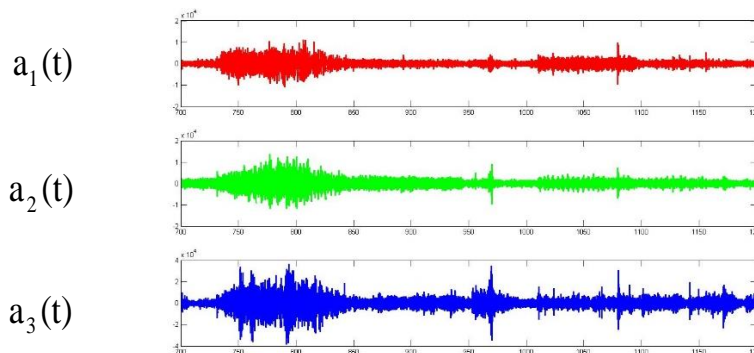


Figura 3.22 - Ensaio de vibração: a) local de instalação dos aparelhos; b) registos de acelerações (direção vertical).

Se, por exemplo, se verificar que num dado modo de vibração, as três ondas estão em fase (Figura 3.23), é possível concluir que o tabuleiro sofre flexão, uma vez que toda a secção sofre oscilações verticais para o mesmo sentido (Caetano, 1992).

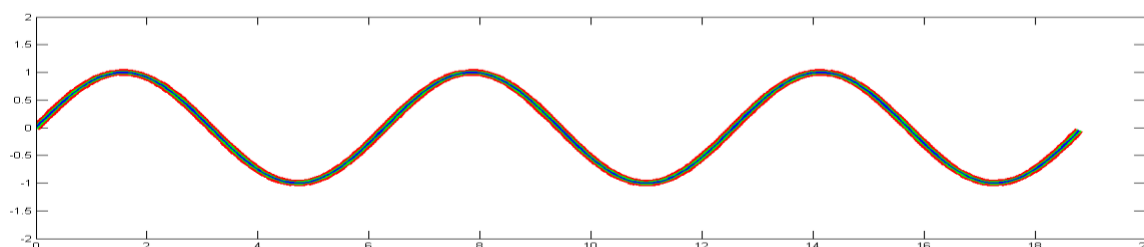


Figura 3.23 - As três ondas em fase e com a mesma amplitude.

Por outro lado, caso o gráfico mostre que as ondas dos acelerómetros das extremidades (vermelho e azul) estão em contra fase e a do meio (verde) é nula (Figura 3.24), conclui-se que o tabuleiro, na referida secção, sofre torsão para aquele modo de vibração. Isto porque, as oscilações verticais das extremidades do tabuleiro mostram oscilação em sentidos opostos, enquanto não há oscilação do centro da secção.

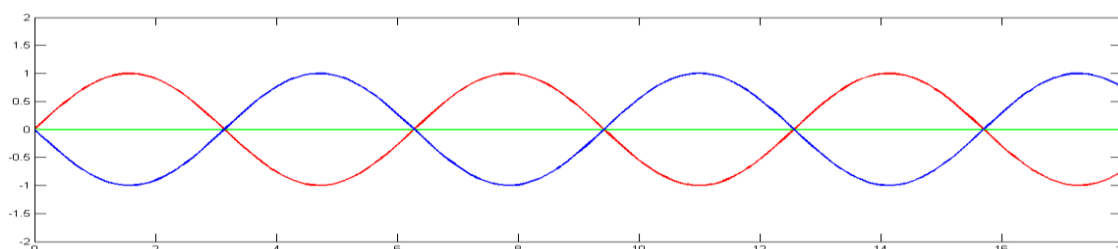


Figura 3.24 - Duas ondas em contra-fase e uma onda com amplitude praticamente nula (verde).

Como se pode verificar, para conseguir identificar frequências naturais e configurações modais de uma estrutura, é necessário analisar vários registos de acelerações, obtidos sincronizadamente em vários pontos da estrutura (neste caso foram escolhidos três pontos na secção central do tabuleiro de uma ponte). Esta técnica baseia-se na decomposição dos vários acelerogramas nas correspondentes ondas harmónicas, da forma $a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)$, usando a técnica da TDF. Comparando as ondas de uma dada frequência (escolhem-se as frequências em que ocorrem os picos espectrais) identificadas nos três pontos de medição, pode-se perceber qual a forma da correspondente configuração modal. Com esta técnica de decomposição dos acelerogramas nas respetivas ondas, verifica-se que as frequências naturais correspondem às frequências das ondas de maior amplitude, ou seja, às frequências dos maiores picos dos espetros de amplitude. Da mesma forma, a configuração modal associada a cada frequência é obtida comparando as ondas dessa frequência identificadas nos vários acelerogramas medidos, em particular, comparando as amplitudes das referidas ondas e comparando a diferença entre as respetivas fases (Fernandes & Santos, 1995).

3.3.4.2 Identificação modal com base na matriz de densidade espectral de potência

Este procedimento de comparação de ondas de uma dada frequência, identificadas nos vários acelerogramas medidos, pode ser efetuado de forma mais eficaz tendo em conta que a diferença de fase entre duas ondas de frequência ω_n (por exemplo, onda i, $a_i \cos(\omega_n t) + b_i \sin(\omega_n t)$, identificada no ponto de medição i, e onda j, $a_j \cos(\omega_n t) + b_j \sin(\omega_n t)$ identificada no ponto de medição j), representadas pelos números complexos $(a_i - b_i i).T/2$ e $(a_j - b_j i).T/2$, pode ser calculada como o ângulo de fase do produto entre estes números complexos, considerando o conjugado do segundo, o que é fácil de verificar usando a regra da multiplicação de complexos na forma trigonométrica: $\rho_1 \text{cis}(\theta_1) \cdot \rho_2 \text{cis}(-\theta_2) = \rho_1 \rho_2 \text{cis}(\theta_1 - \theta_2)$.

Ainda com o exemplo das 3 medições no tabuleiro e aproveitando esta propriedade dos números complexos (que, neste caso, representam ondas), o cálculo das diferenças de fase entre qualquer par de ondas com uma dada frequência, pode ser organizado através da montagem de uma matriz 3×3 , como a seguinte

$$\underline{S}(\omega_n) = \begin{bmatrix} (a_1 - b_1 i).(a_1 + b_1 i) & (a_1 - b_1 i).(a_2 + b_2 i) & (a_1 - b_1 i).(a_3 + b_3 i) \\ (a_2 - b_2 i).(a_1 + b_1 i) & (a_2 - b_2 i).(a_2 + b_2 i) & (a_2 - b_2 i).(a_3 + b_3 i) \\ (a_3 - b_3 i).(a_1 + b_1 i) & (a_3 - b_3 i).(a_2 + b_2 i) & (a_3 - b_3 i).(a_3 + b_3 i) \end{bmatrix} \cdot T/4 \quad (3.85)$$

a qual pode ser escrita na seguinte forma trigonométrica

$$\underline{S}(\omega_n) = \begin{bmatrix} \rho_1 \text{cis}(\theta_1) \cdot \rho_1 \text{cis}(-\theta_1) & \rho_1 \text{cis}(\theta_1) \cdot \rho_2 \text{cis}(-\theta_2) & \rho_1 \text{cis}(\theta_1) \cdot \rho_3 \text{cis}(-\theta_3) \\ \rho_2 \text{cis}(\theta_2) \cdot \rho_1 \text{cis}(-\theta_1) & \rho_2 \text{cis}(\theta_2) \cdot \rho_2 \text{cis}(-\theta_2) & \rho_2 \text{cis}(\theta_2) \cdot \rho_3 \text{cis}(-\theta_3) \\ \rho_3 \text{cis}(\theta_3) \cdot \rho_1 \text{cis}(-\theta_1) & \rho_3 \text{cis}(\theta_3) \cdot \rho_2 \text{cis}(-\theta_2) & \rho_3 \text{cis}(\theta_3) \cdot \rho_3 \text{cis}(-\theta_3) \end{bmatrix} \cdot T/4 \quad (3.86)$$

ou, para facilitar a interpretação do significado físico dos termos não diagonais (cujos argumentos correspondem a diferenças de fase) fica

$$\underline{S}(\omega_n) = \begin{bmatrix} \rho_1^2 & \rho_1 \rho_2 \text{cis}(\theta_1 - \theta_2) & \rho_1 \rho_3 \text{cis}(\theta_1 - \theta_3) \\ \rho_2 \rho_1 \text{cis}(\theta_2 - \theta_1) & \rho_2^2 & \rho_2 \rho_3 \text{cis}(\theta_2 - \theta_3) \\ \rho_3 \rho_1 \text{cis}(\theta_3 - \theta_1) & \rho_3 \rho_2 \text{cis}(\theta_3 - \theta_2) & \rho_3^2 \end{bmatrix} \cdot T/4 \quad (3.87)$$

Esta matriz $\underline{S}(\omega_n)$, denominada matriz DEP, é avaliada para cada frequência ω_n . Os elementos da diagonal (i,i) são números reais e os elementos não diagonais (i,j) são números complexos cujo ângulo de fase representa a diferença de fase entre as ondas i e j.

Num problema de identificação modal, como o presente, é usual calcular esta matriz para todas as frequências $\omega_n = n \cdot \Delta\omega$ ($\Delta\omega = 2\pi/T$, em que T é o comprimento do acelerograma ou o

comprimento da janela que se utiliza quando se opta pela a análise espectral pela sobreposição de janelas temporais), tal como é possível ver na Figura 3.25.

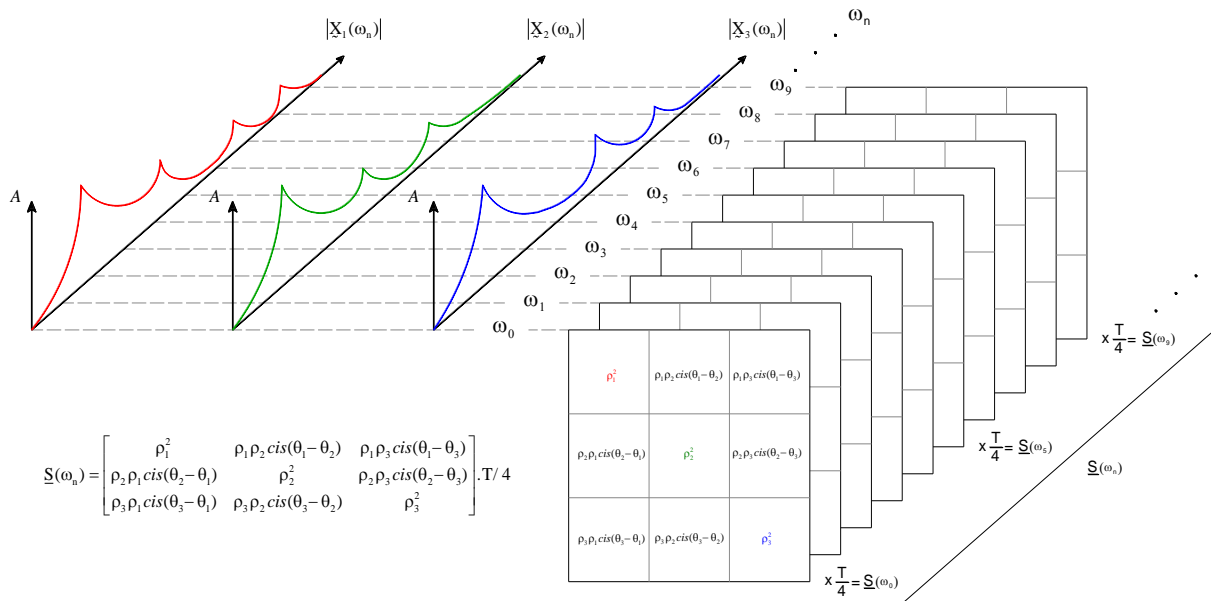
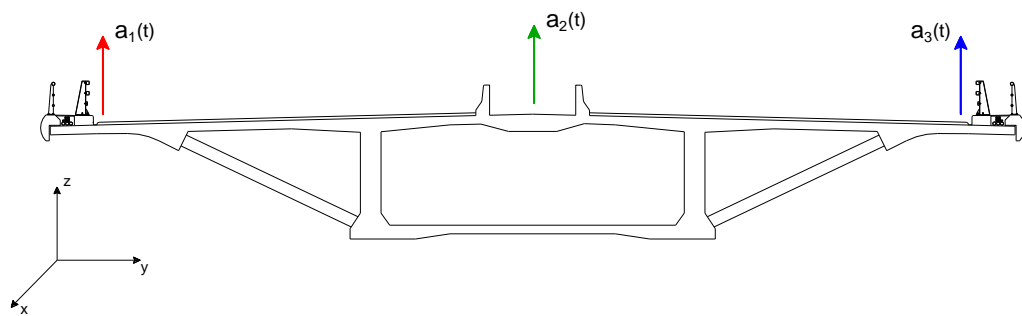


Figura 3.25 - Representação das matrizes de densidade espectral de potência para as várias frequências. Exemplo de um ensaio de vibração em que se analisam acelerações radiais medidas em três pontos da secção de um tabuleiro.

Neste caso, em que se consideram três pontos de medição, a matriz $\underline{S}(\omega_n)$ (3x3) pode ser calculada de uma única vez para todas as frequências, colocando em cada entrada i,j o produto da transformada de Fourier do acelerograma medido no ponto i pelo conjugado da transformada de Fourier do acelerograma medido no ponto j , como se mostra na Figura 3.26.



$$\underline{S}(\omega) = \begin{bmatrix} \text{FFT}_1 \cdot \overline{\text{FFT}_1} & \text{FFT}_1 \cdot \overline{\text{FFT}_2} & \text{FFT}_1 \cdot \overline{\text{FFT}_3} \\ \text{FFT}_2 \cdot \overline{\text{FFT}_1} & \text{FFT}_2 \cdot \overline{\text{FFT}_2} & \text{FFT}_2 \cdot \overline{\text{FFT}_3} \\ \text{FFT}_3 \cdot \overline{\text{FFT}_1} & \text{FFT}_3 \cdot \overline{\text{FFT}_2} & \text{FFT}_3 \cdot \overline{\text{FFT}_3} \end{bmatrix} \cdot 1/T$$

Figura 3.26 - Esquema de cálculo da matriz de densidade espectral de potência de acelerações para um exemplo com três acelerómetros.

3.3.4.3 Cálculo da matriz de densidade espectral de potência com base no método de Welch

O procedimento, geralmente utilizado para estimar as funções de DEP com base em séries temporais divididas em segmentos de tempo, baseia-se na aplicação de uma janela de dados a cada segmento, no cálculo da FFT para cada segmento e posterior realização de médias – método de Welch (Welch, 1967). Assim, obtêm-se os diversos termos da matriz (espectros de amplitude e diferença de fase) mais suavizados. Ao aplicar diretamente a expressão (3.73) verifica-se que a estimativa espectral resultante tem uma elevada variância, essencialmente, pelo facto de o seu cálculo se basear numa só série temporal discretizada com duração finita. Para reduzir essa variância é usual dividir a série temporal em segmentos mais curtos e adotar alguma sobreposição entre eles, tal como se abordou anteriormente no capítulo 3.3.2.1, para se efetuar mais médias. Contudo a consideração de segmentos mais curtos tem como consequência um agravamento dos erros por escorregamento, pelo que é usual aplicar a estes segmentos janelas de dados, $W_k = W(t_k)$, do tipo *Hanning* (sendo agora $X_i(\omega_n) = \mathcal{F}(W(t_k).x_i(t_k))$). Assim, a estimativa espectral pode agora ser escrita na forma (Bendat, J. S.; Piersol, A. G., 1980)

$$S_{ij}(\omega_n) = \frac{1}{n_d} \sum_{k=1}^{n_d} \left[\frac{\bar{X}_i(\omega_n) X_j(\omega_n)}{T_d \sum_{k=0}^{N-1} |W_k|^2 / N} \right]_k, \quad i, j = 1, 2, \dots, NPI \text{ e } n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.88)$$

em que n_d corresponde ao número total de segmentos utilizados e T_d corresponde ao comprimento associado a cada segmento. Assim, obtêm-se estimativas suavizadas das funções DEP da resposta. Na Figura 3.27, apresenta-se o resultado da aplicação da técnica de Welch para calcular a matriz DEP (para todas as frequências), para o referido exemplo do tabuleiro da ponte. Nesta figura, podem-se ver os espectros de amplitude na diagonal e os espectros cruzados, de amplitude (cruzada) e de diferença de fase, nas posições fora da diagonal.

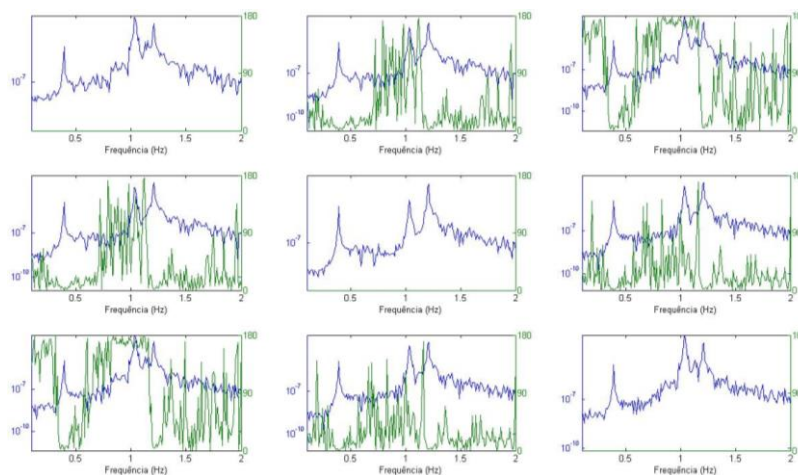


Figura 3.27 - Matriz de densidade espectral de potência. A azul estão representados os espectros de amplitude (escala logarítmica) e a verde os espectros das diferenças de fase.

Analisando os resultados da figura anterior, é possível identificar a forma dos modos de vibração do tabuleiro da ponte, utilizando apenas uma coluna da respectiva matriz. Por exemplo, usando apenas a primeira coluna (Figura 3.28), a qual é montada tomando como referência o acelerómetro 1, é possível notar um primeiro pico na frequência dos 0,40 Hz correspondente a um possível modo de vibração do tabuleiro. Surge também, na frequência 0,85 Hz, um pico espectral interessante de analisar (Figura 3.29).

Também é possível utilizar a segunda coluna da matriz DEP (coluna correspondente a tomar como referência o acelerómetro 2), para identificar a configuração dos modos de vibração, ou ainda a terceira coluna. Utilizando qualquer uma das colunas da matriz DEP, as configurações modais que se obtêm deverão ser semelhantes (não é de esperar que a escolha do acelerómetro de referência possa influenciar a configuração dos modos identificados). Convém notar que, quando se escolhe uma coluna da matriz DEP para analisar as configurações modais, se está a escolher como referência o acelerómetro correspondente ao número dessa coluna.

Na prática, verifica-se que devido a imprecisões nas medições e ao facto da excitação não ser geralmente um ruído branco (como se admite em termos teóricos quando se efetua a identificação modal de uma estrutura usando estas técnicas de análise espectral) não se obtêm configurações modais exatamente iguais quando se escolhem colunas diferentes, ou seja, quando se escolhem diferentes acelerómetros como referência. O ideal será obter as configurações modais fazendo a média das que se obtêm para cada uma das colunas. Isto pode-se conseguir calculando os valores e vetores singulares da matriz DEP, como se mostra no ponto seguinte.

3.3.4.4 Cálculo de valores e vetores singulares com base na matriz DEP

Na sequência da análise efetuada no ponto anterior, concluiu-se que é possível obter a configuração do respetivo modo de vibração, para uma dada frequência natural, ω_N (frequência de um pico espectral importante), usando a informação contida em todas as colunas da matriz DEP (calculada para a referida frequência natural), recorrendo ao cálculo dos seus vetores e valores singulares. O primeiro vetor singular da matriz DEP corresponde à configuração modal pretendida (Figura 3.28 e Figura 3.29): neste caso o primeiro vetor singular contém três números complexos, ou seja, contém os parâmetros das três ondas que descrevem o movimento oscilatório de cada um dos três pontos de medição, para a frequência em análise.

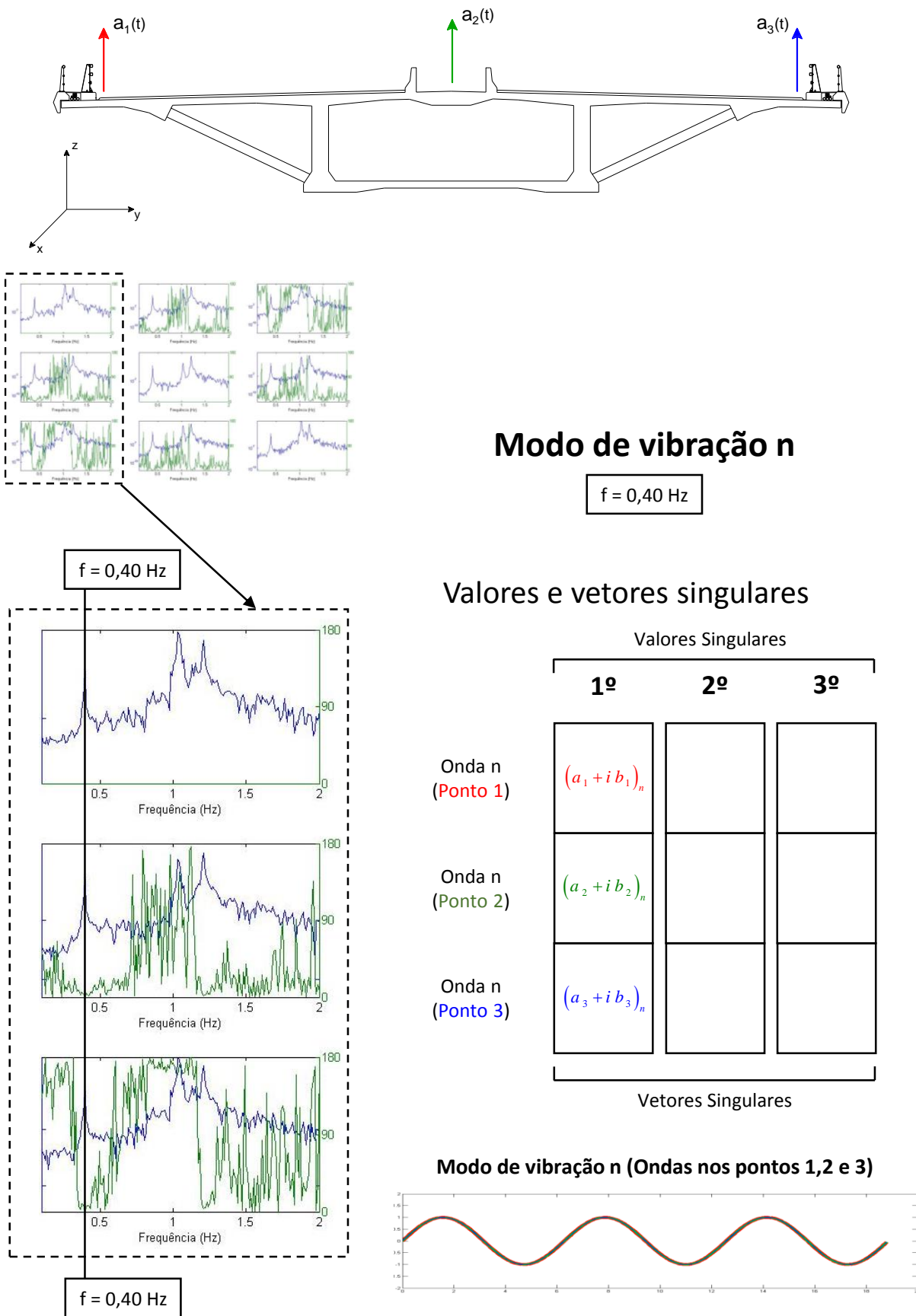


Figura 3.28 - Determinação da configuração modal correspondente a um modo de vibração exemplo (Modo n) através do cálculo do primeiro vetor singular da matriz DEP calculada para a frequência 0,40 Hz.

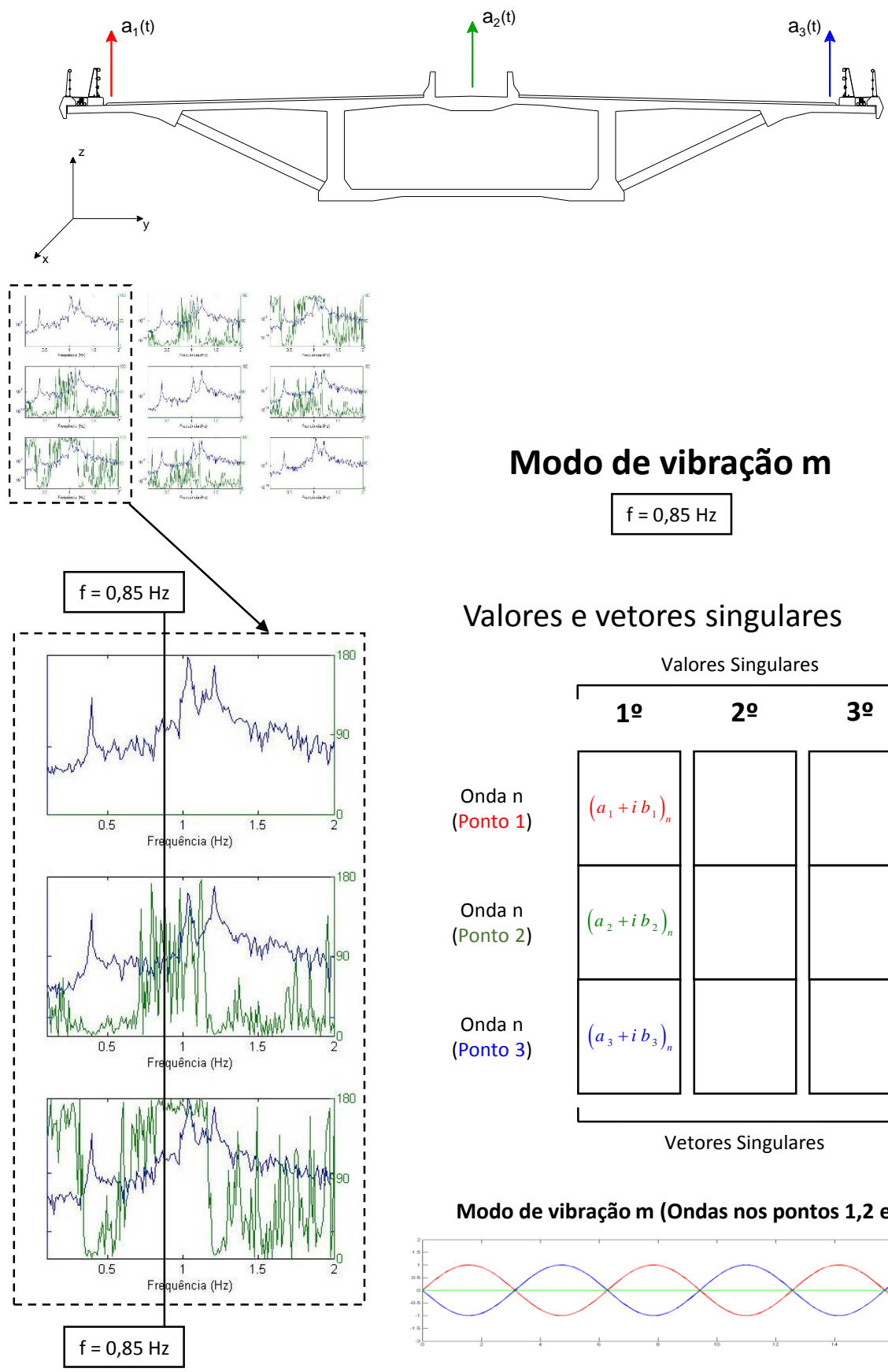


Figura 3.29 - Determinação da configuração modal correspondente a um modo de vibração exemplo (Modo m) através do cálculo do primeiro vetor singular da matriz DEP calculada para a frequência 0,85 Hz.

Quando se faz este tipo de análise é útil traçar os espectros dos valores singulares (Figura 3.30) pois estes apresentam picos espectrais coincidentes com os picos dos espectros de amplitudes.

Na Figura 3.30, apresenta-se o espectro (suavizado) dos valores singulares, correspondentes aos registos de acelerações gerados numericamente, admitindo uma excitação do tipo ruído branco. Estes foram obtidos através da matriz DEP.

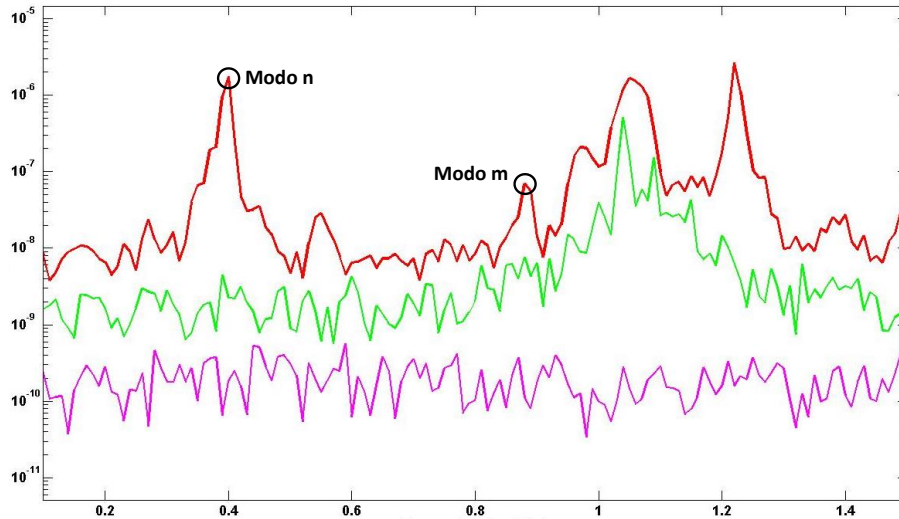
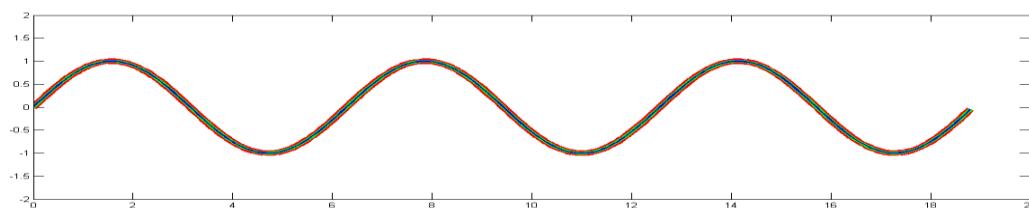


Figura 3.30 - Espectro dos valores singulares da matriz $\underline{S}(\omega_n)$. Análise de registos de acelerações verticais, gerados numericamente para excitação do tipo ruído branco.

Na Figura 3.31, mostram-se as ondas correspondentes aos modos de vibração identificados, obtidos através dos primeiros vetores singulares da matriz DEP, correspondentes às frequências anteriormente apresentadas.

Modos de vibração do tabuleiro da ponte

a) ONDAS DE FREQUÊNCIA 0,40 Hz



b) Ondas de frequência 0,85 Hz

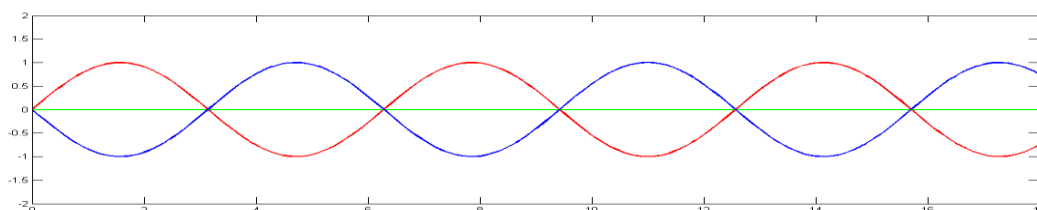


Figura 3.31 - Modos de vibração identificados no tabuleiro da ponte: a) modo com frequência de 0,40 Hz (simétrico); b) modo com frequência de 0,85 Hz (antissimétrico).

3.4 Análise matricial de estruturas usando elementos finitos de barra

3.4.1 Elasticidade sob carga uniaxial

Hooke estudou a relação entre as forças, f , e os deslocamentos, u , de um corpo carregado e chegou à conclusão que existia uma proporcionalidade entre ambos, através de uma constante k . Essa constante de proporcionalidade, a rigidez, depende das características do material e da geometria da peça ensaiada (por exemplo, num ensaio de tração $k = EA/L$).

$$f = k u \quad (3.89)$$

Hooke tentou então encontrar uma equação, a partir da primeira, que dependesse apenas das características do material. Ao estudar os provetes com diferentes materiais, descobriu que, dividindo a força aplicada, pela área da superfície de carregamento, e dividindo o deslocamento observado pelo comprimento do provete, volta a haver proporcionalidade numa fórmula que relaciona as tensões, σ , e as deformações, ε , a que lhe estão associadas. Nesta fórmula, a constante de proporcionalidade designa-se por módulo de elasticidade, ou módulo de Young, característica de cada tipo de material, que faz a ponte entre a relação Tensão-Deformação, durante o comportamento elástico do corpo. Obteve-se assim uma fórmula que apenas depende do material para o caso uniaxial.

$$\sigma = E \varepsilon \quad (3.90)$$

É também importante referir que se assume que os materiais são isotrópicos, ou seja, as suas propriedades naturais são iguais em todas as direções. Dessa forma foi possível determinar uma relação constante entre as deformações transversais e longitudinais, o coeficiente de Poisson (Figura 3.32).

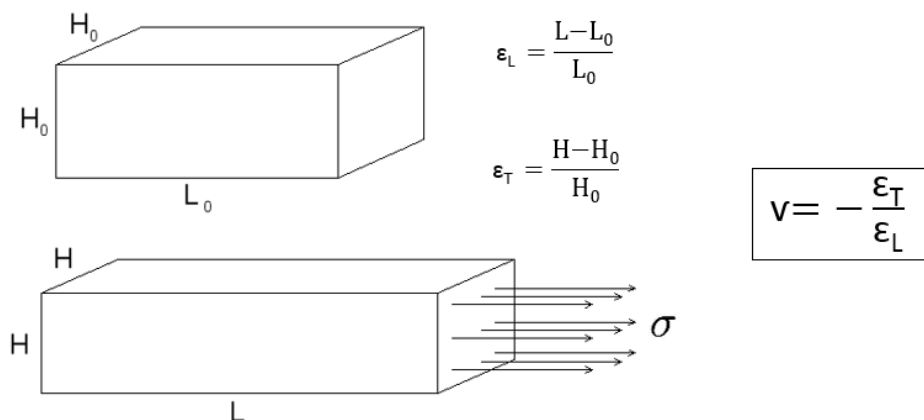


Figura 3.32 - Coeficiente de Poisson.

3.4.2 Teoria das peças lineares

A teoria das peças lineares aplica-se quando se estudam corpos com um comprimento muito maior que a sua largura e quando os deslocamentos ou deformações são muito pequenos, comparativamente às suas dimensões. Considera-se que os corpos, com um certo comprimento L , e secção transversal constante, ou não, são representados por uma barra coincidente à linha do seu centro de gravidade (Figura 3.33a). Ao simplificarem-se as peças lineares como barras, está-se também a transformar as várias tensões de uma secção em esforços (Figura 3.33b).

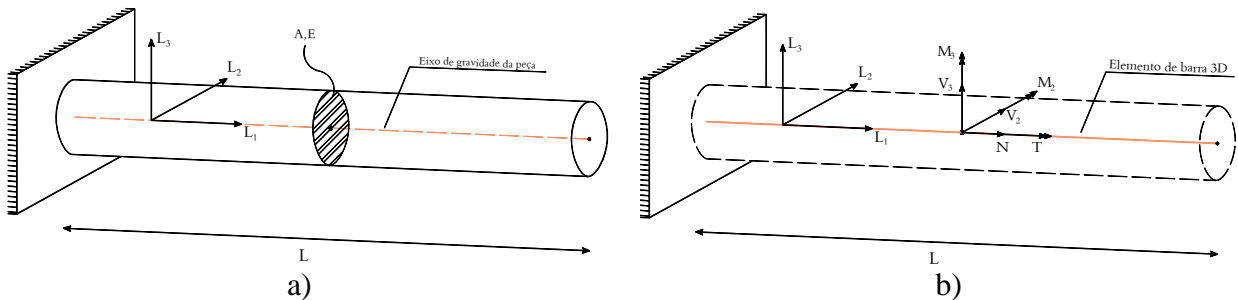


Figura 3.33 - Simplificação de um elemento tridimensional através da teoria das peças lineares: a) peça linear; b) esforços num elemento de barra 3D.

3.4.3 Classificação de estruturas

3.4.3.1 Estruturas reticuladas

São consideradas estruturas reticuladas (Figura 3.34) todas aquelas que são constituídas por barras de eixo reto ou seja, que podemos estudá-las com a aproximação das peças lineares.

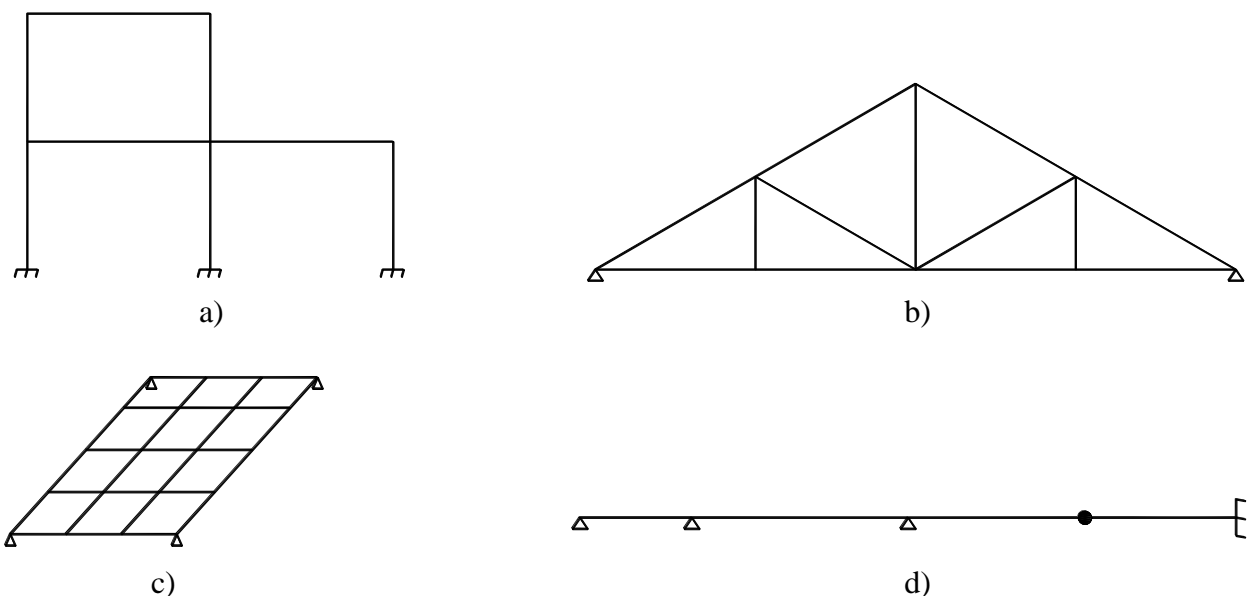


Figura 3.34 - Estruturas reticuladas: a) pórtico; b) treliça; c) grelha; d) viga.

3.4.3.2 Estruturas não reticuladas

As estruturas não reticuladas (Figura 3.35) são constituídas por elementos estruturais que não podem ser representados pela aproximação das peças lineares. Existem, no entanto, estruturas que podem ser aproximadas com base na teoria das lajes ou das cascas, como é o caso das barragens abóbada ou das lajes de edifícios. São o exemplo das Cascas, Membranas e Placas.

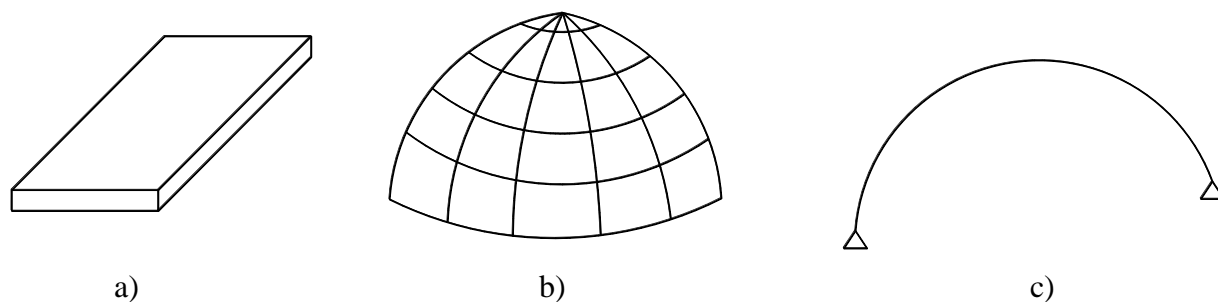


Figura 3.35 - Estruturas não reticuladas: a) placas; b) cascas; c) membranas.

3.4.4 Equilíbrio global de uma estrutura

O campo de deslocamentos nodais é função do número de nós da estrutura e do número de GL de cada nó. Os GL são os parâmetros que permitem determinar a posição de um nó no espaço, em relação a um sistema de eixos.

Para análises 3D, existem 3 GL de translação e 3 GL de rotação, 6 GL no total. Assim terá de ser definido o sistema de eixos global da estrutura e o sistema de eixos locais de cada barra. Define-se então a matriz elementar de cada barra para serem depois assembladas na matriz de rigidez global da estrutura, onde, posteriormente, são também introduzidas as condições de apoio. Da mesma forma que a matriz de rigidez global, definem-se os vetores das forças elementares para assemblagem no vetor de forças global. Por fim, é diretamente aplicada a lei de Hooke de forma a obter-se o vetor global dos deslocamentos nodais.

3.4.4.1 Eixos locais e eixos globais

Admite-se que o sistema de eixos globais da estrutura é dado pelo referencial global G_1 , G_2 e G_3 . Só depois de definido o referencial global é que atribui as coordenadas dos nós da estrutura e definir as ligações das barras (Figura 3.36). Já os sistemas de eixos locais são dados pelos referenciais locais L_1 , L_2 e L_3 , que irão estar definidos em função da orientação de cada barra.

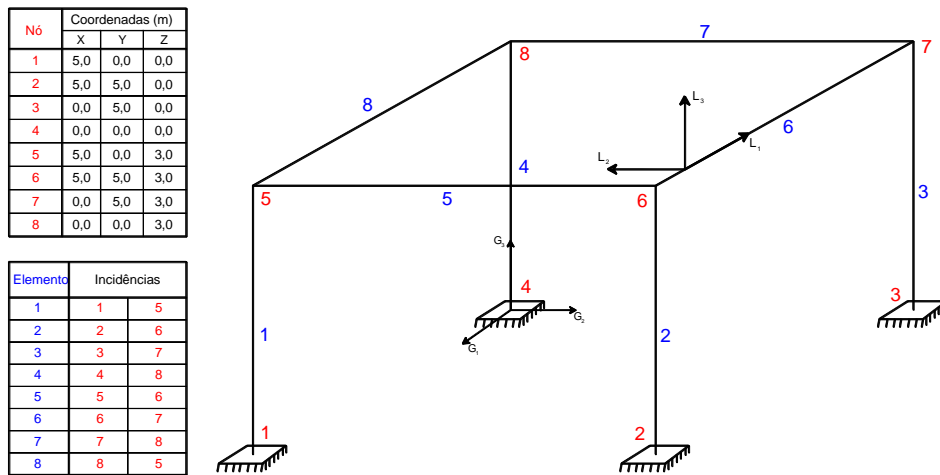


Figura 3.36 - Coordenadas globais, G, e locais, L. Tabela de coordenadas dos nós e tabela de incidências.

3.4.4.2 Relações de compatibilidade e equilíbrio

Em estruturas reticuladas, todas as barras têm dependência entre si, devido ao efeito de continuidade. Quer isto dizer que, em barras com nós coincidentes, as secções extremas coincidentes irão ter deslocamentos iguais. Assim sendo, nenhuma barra deforma livremente, assegurando a exigência de continuidade em toda a estrutura.

Para que isto aconteça, tem de existir um equilíbrio interno em todos os nós da estrutura (Figura 3.37). Ao isolar-se um determinado nó, seccionando as suas barras coincidentes, obtém-se os somatórios dos momentos e das forças, aplicadas em cada direção, igualados a zero. Desta forma, são garantidas as equações de equilíbrio estático.

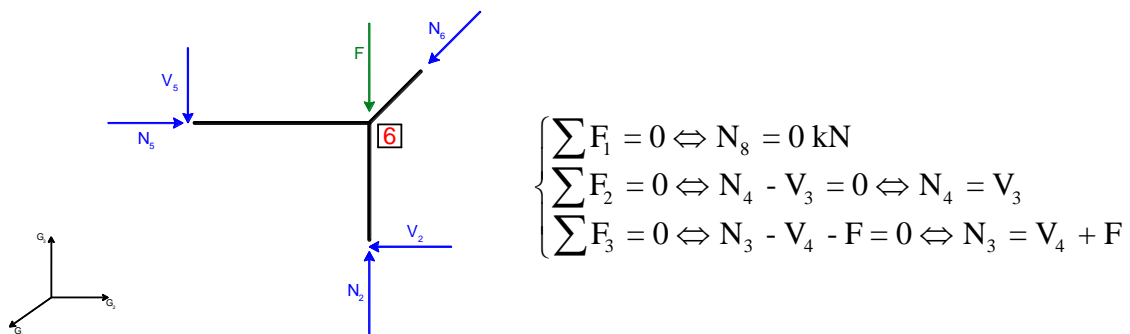


Figura 3.37 - Equilíbrio estático do nó 6.

3.4.4.3 Relações força-deslocamento

Como já foi referido no ponto 3.4.1, pela lei de Hooke é possível relacionar as forças e os deslocamentos através da equação (3.89) e, aplicada a um elemento, traduz o seu equilíbrio estático. Dessa forma, conhecendo a sua matriz de Flexibilidade ou matriz de Rigidez e conhecendo as forças nodais aplicadas, é possível determinar os deslocamentos nodais desse elemento.

3.4.4.4 Matriz de rigidez elementar

Numa análise 3D, a matriz de rigidez elementar terá a dimensão 12x12, pois cada um dos dois nós do elemento tem 6 GL. No entanto, existem vários tipos de elementos, no que toca às suas condições de fronteira. Quando se tem um elemento encastrado-encastrado, está-se a dizer que todos os GL estão restringidos de movimento relativo. No entanto, sendo necessário simular uma rótula cilíndrica na ligação entre dois elementos, em que o deslocamento em Y e a rotação em X são livres (Figura 3.38), será necessário adaptar a matriz de rigidez elementar de ambos.

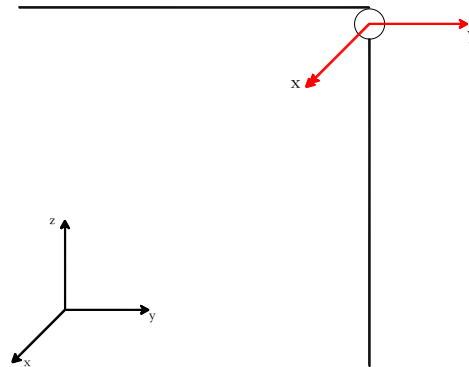


Figura 3.38 - Rótula cilíndrica entre elementos vertical e horizontal.

Mais concretamente, para simular uma rótula cilíndrica entre um elemento vertical e um horizontal, pode-se optar por provocar a libertação de translação no primeiro e a libertação de rotação no segundo, tendo em atenção as direções das libertações internas e os respetivos GL de cada um. Na Figura 3.39, é possível ver que o GL do elemento vertical, que corresponde à libertação interna de translação em Y, é o GL local 9. No elemento horizontal, a libertação interna de rotação em X corresponde ao GL local 11.

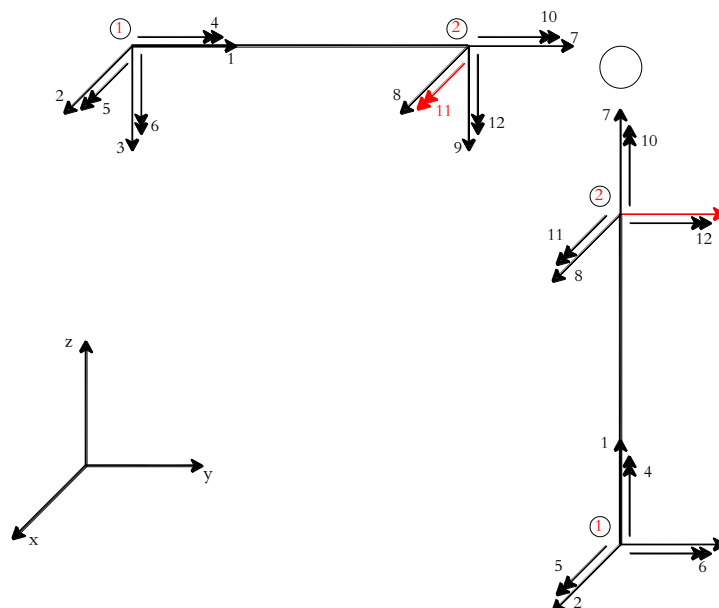


Figura 3.39 - Graus de liberdade locais dos elementos vertical e horizontal. Libertações internas a vermelho.

Elemento encastrado-encastrado

A disposição dos componentes da matriz de rigidez para um elemento encastrado-encastrado tem a seguinte forma:

$$\mathbf{K}_1^e = \begin{bmatrix}
 \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \frac{12EI_{33}}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_{33}}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_{33}}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_{33}}{L^2} \\
 0 & 0 & \frac{12EI_{22}}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_{22}}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_{22}}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_{22}}{L^2} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{GI_{11}}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_{11}}{L} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -\frac{6EI_{22}}{L^2} & 0 & \frac{4EI_{22}}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_{22}}{L^2} & 0 & \frac{2EI_{22}}{L} & 0 \\
 0 & \frac{6EI_{33}}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_{33}}{L} & 0 & -\frac{6EI_{33}}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_{33}}{L} \\
 -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -\frac{12EI_{33}}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_{33}}{L^2} & 0 & \frac{12EI_{33}}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_{33}}{L^2} \\
 0 & 0 & -\frac{12EI_{22}}{L^3} & 0 & \frac{6EI_{22}}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_{22}}{L^3} & 0 & \frac{6EI_{22}}{L^2} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_{11}}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_{11}}{L} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \frac{6EI_{22}}{L^2} & 0 & \frac{2EI_{22}}{L} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_{22}}{L^2} & 0 & -\frac{4EI_{22}}{L} & 0 \\
 0 & \frac{6EI_{33}}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_{33}}{L} & 0 & -\frac{6EI_{33}}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_{33}}{L}
 \end{bmatrix} \quad (3.91)$$

Elemento rotulado-rotulado

A disposição dos componentes da matriz de rigidez para um elemento rotulado-rotulado tem a seguinte forma:

$$\mathbf{K}_1^e = \begin{bmatrix}
 \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix} \quad (3.92)$$

Rótula cilíndrica

Matriz de rigidez do elemento vertical para libertação de translação segundo o eixo longitudinal

$$\mathbf{K}_1^e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_{33}}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_{33}}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_{33}}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_{33}}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI_{11}}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_{11}}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EI_{22}}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EI_{22}}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_{33}}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_{33}}{L} & 0 & -\frac{6EI_{33}}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_{33}}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_{33}}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_{33}}{L^2} & 0 & \frac{12EI_{33}}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_{33}}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_{11}}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_{11}}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EI_{22}}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EI_{22}}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_{33}}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_{33}}{L} & 0 & -\frac{6EI_{33}}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_{33}}{L} \end{bmatrix} \quad (3.93)$$

Esta matriz está montada de forma a ser libertado o GL 3 do nó final da barra vertical (GL elementar 9), uma vez que é essa a libertação interna pretendida em termos de eixos globais.

Matriz de rigidez do elemento horizontal para libertação de rotação segundo o eixo transversal

$$\mathbf{K}_1^e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_{33}}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_{33}}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_{33}}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_{33}}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{3EI_{22}}{L^3} & 0 & -\frac{3EI_{22}}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{3EI_{22}}{L^3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI_{11}}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_{11}}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3EI_{22}}{L^2} & 0 & \frac{3EI_{22}}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{3EI_{22}}{L^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6EI_{33}}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_{33}}{L} & 0 & -\frac{6EI_{33}}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_{33}}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_{33}}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_{33}}{L^2} & 0 & \frac{12EI_{33}}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_{33}}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{3EI_{22}}{L^3} & 0 & \frac{3EI_{22}}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{3EI_{22}}{L^3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_{11}}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_{11}}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6EI_{33}}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_{33}}{L} & 0 & -\frac{6EI_{33}}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_{33}}{L} \end{bmatrix} \quad (3.94)$$

Esta matriz está preparada de forma a ser libertado o GL 5 do nó final da barra horizontal (GL elementar 11), uma vez que é essa a libertação interna pretendida em termos de eixos globais.

3.4.4.5 Matriz de massa elementar

A disposição dos componentes da matriz de massas para um elemento de barra com 12 GL tem o seguinte aspeto:

$$\underline{M}_1^e = \begin{bmatrix}
 70 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 35 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 78 & 0 & 0 & 0 & 11L & 0 & 27 & 0 & 0 & 0 & -\frac{13L}{2} \\
 0 & 0 & 78 & 0 & -11L & 0 & 0 & 0 & 27 & 0 & \frac{13L}{2} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{70I_{11}}{A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{35I_{11}}{A} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -11L & 0 & 2L^2 & 0 & 0 & 0 & -\frac{13L}{2} & 0 & -\frac{3L^2}{2} & 0 \\
 0 & 11L & 0 & 0 & 0 & 2L^2 & 0 & \frac{13L}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{3L^2}{2} \\
 35 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 27 & 0 & 0 & 0 & \frac{13L}{2} & 0 & 78 & 0 & 0 & 0 & -11L \\
 0 & 0 & 27 & 0 & -\frac{13L}{2} & 0 & 0 & 0 & 78 & 0 & 11L & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -\frac{35I_{11}}{A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{70I_{11}}{A} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \frac{13L}{2} & 0 & -\frac{3L^2}{2} & 0 & 0 & 0 & 11L & 0 & 2L^2 & 0 \\
 0 & -\frac{13L}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{3L^2}{2} & 0 & -11L & 0 & 0 & 0 & 2L^2
 \end{bmatrix} \quad (3.95)$$

3.4.4.6 Matriz de amortecimento elementar

Para se obter a matriz de amortecimento elementar, utiliza-se a fórmula de Rayleigh (3.31), já abordada anteriormente. Esta relaciona, através dos coeficientes α e β , as matrizes de rigidez e de massa para cada elemento.

$$\underline{c} = \alpha \underline{m} + \beta \underline{k} = \alpha \left[\underline{m} \right] + \beta \left[\underline{k} \right] \quad (3.96)$$

3.4.4.7 Matriz de transformação

A matriz de Transformação permite transformar as matrizes de rigidez, massas e forças elementares de coordenadas locais para coordenadas globais. Neste caso, para pórticos 3D, a matriz de transformação terá de ter as mesmas dimensões que as matrizes de rigidez elementares (12x12), devido ao número de GL do elemento. Dessa forma, representando por $\underline{0}$ uma matriz de zeros de três linhas por três colunas, a matriz $\underline{T}_{3 \times 3}$ é espalhada pela matriz \underline{T} da seguinte forma:

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} \underline{T}_{3 \times 3} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{T}_{3 \times 3} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{T}_{3 \times 3} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{T}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (3.97)$$

É então necessário determinar os versores dos referenciais de cada barra, para se calcular os componentes da matriz de transformação, através do cosseno do ângulo entre eixos correspondentes.

$$\underline{T}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} \cos(\vec{e}_{G1}, \vec{e}_{L1}) & \cos(\vec{e}_{G1}, \vec{e}_{L2}) & \cos(\vec{e}_{G1}, \vec{e}_{L3}) \\ \cos(\vec{e}_{G2}, \vec{e}_{L1}) & \cos(\vec{e}_{G2}, \vec{e}_{L2}) & \cos(\vec{e}_{G2}, \vec{e}_{L3}) \\ \cos(\vec{e}_{G3}, \vec{e}_{L1}) & \cos(\vec{e}_{G3}, \vec{e}_{L2}) & \cos(\vec{e}_{G3}, \vec{e}_{L3}) \end{bmatrix} \quad (3.98)$$

Os versores são os vetores unitários que definem cada um dos eixos dos referenciais global e local. Para o caso 3D tem-se então três versores para definir cada um dos sistemas de eixos:

$$\begin{cases} \vec{G} : (\vec{e}_{G1}, \vec{e}_{G2}, \vec{e}_{G3}) \\ \vec{L} : (\vec{e}_{L1}, \vec{e}_{L2}, \vec{e}_{L3}) \end{cases} \quad (3.99)$$

Por fim, resolvem-se as equações que irão transformar as matrizes elementares, de coordenadas locais para coordenadas globais.

$$\underline{K}_G^e = \underline{T} \underline{K}_L^e \underline{T}^T \quad (3.100)$$

$$\underline{C}_G^e = \underline{T} \underline{C}_L^e \underline{T}^T \quad (3.101)$$

$$\underline{M}_G^e = \underline{T} \underline{M}_L^e \underline{T}^T \quad (3.102)$$

$$\underline{F}_G^e = \underline{T} \underline{F}_L^e \underline{T}^T \quad (3.103)$$

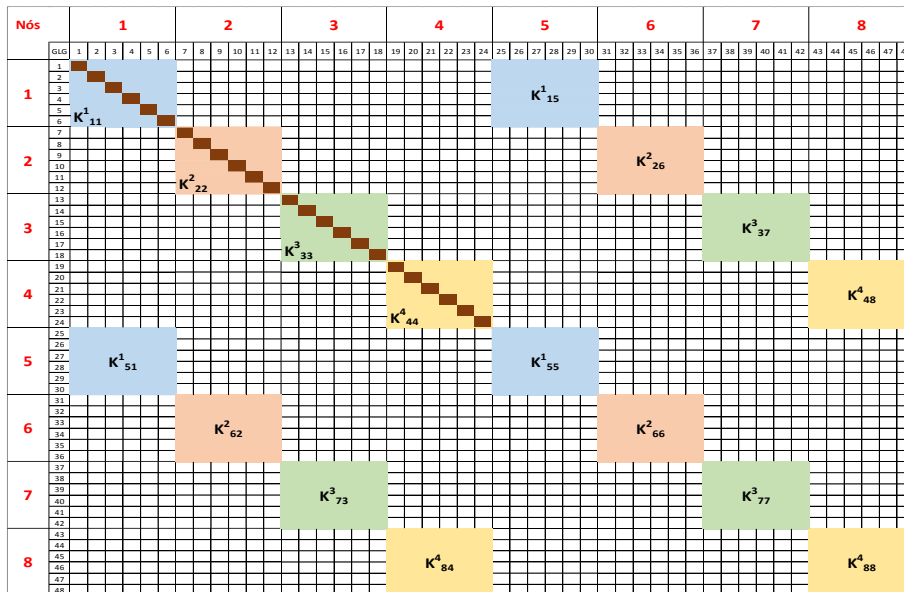
Obtêm-se assim as matrizes de rigidez, amortecimento, massas e forças elementares em coordenadas globais, prontas para a assemblagem na matriz global da estrutura.

3.4.4.9 Condições de apoio

As condições de apoio são introduzidas na matriz global (a castanho, na Figura 3.41). Para serem considerados os apoios encastrados dos nós na matriz de rigidez global, atribuem-se aos GL globais correspondentes, valores na ordem de 10^{15} . Dessa forma, está-se a restringir os deslocamentos nesses GL, uma vez que lhes são atribuídos valores de rigidez muito elevados.

Introdução das condições de apoio na matriz de rigidez global

a) MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL (ELEMENTOS 1 A 4)



b) MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL (ELEMENTOS 5 A 8)

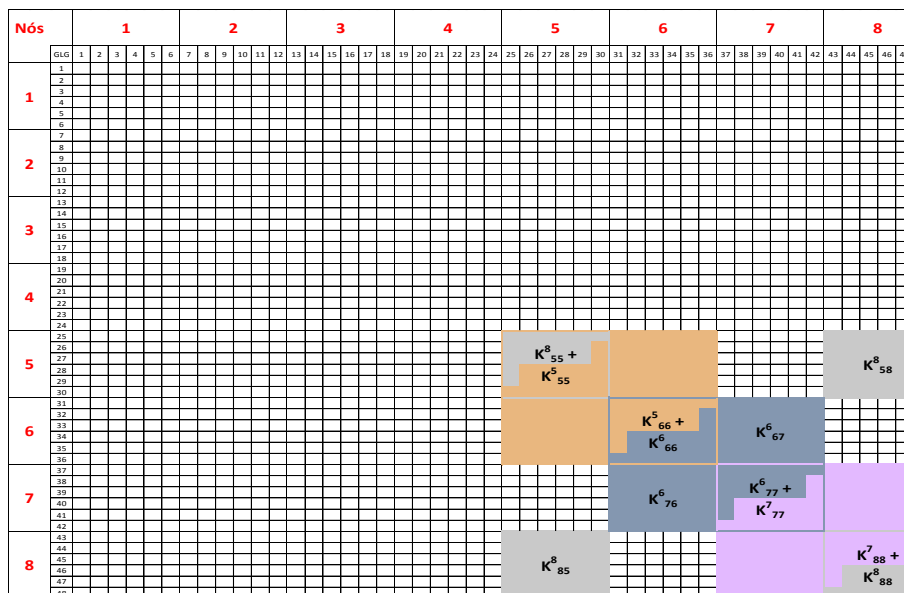


Figura 3.41 - Introdução das condições de apoio (a castanho) nos nós 1 a 4: a) elementos 1 a 4 assemblados; b) elementos 5 a 8 assemblados.

3.4.4.10 Forças nodais

Paralelamente à matriz de rigidez global, também um vetor de forças global é construído, de forma a englobar todas as forças nodais aplicadas na estrutura (Figura 3.42). No caso de cargas distribuídas aplicadas num elemento, é necessário transformá-las em cargas concentradas e momentos equivalentes nos nós desse elemento. Ao conhecerem-se todas as cargas e momentos equivalentes aplicados nos nós da estrutura, a construção do vetor de forças global é direta, tomando em atenção a direção da força aplicada no GL global correspondente.

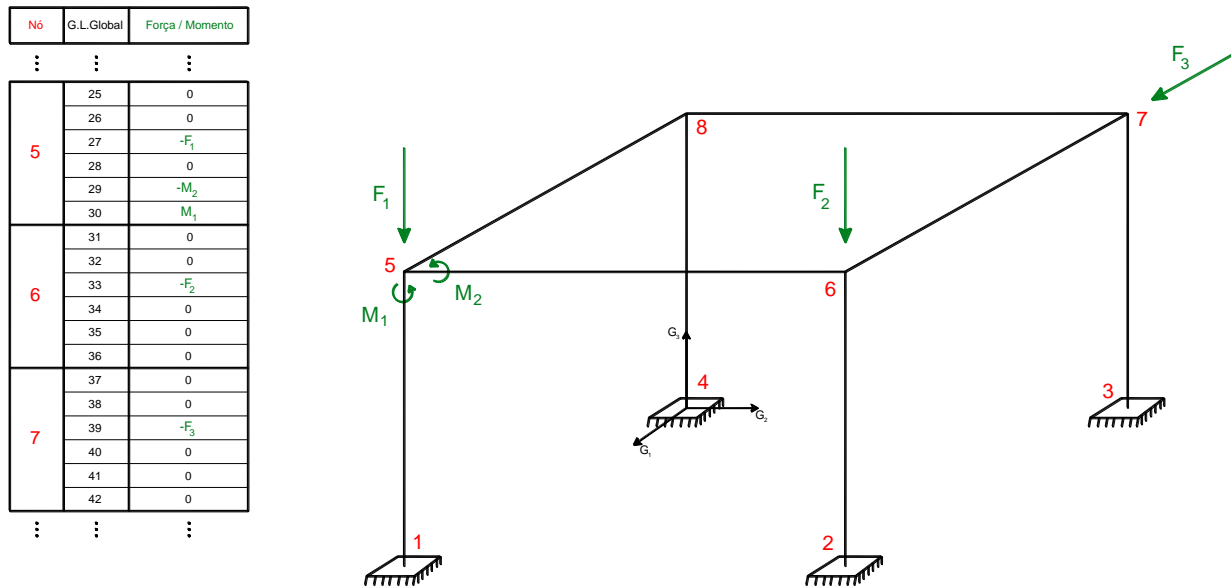


Figura 3.42 - Exemplo de forças e momentos aplicados na estrutura.

As forças F_1 e F_2 estão aplicadas na direção $-G_3$ e a força F_3 aplicada na direção G_1 . Os momentos M_1 e M_2 têm rotações segundo os eixos axiais das barras respetivas. No vetor das forças nodais, dispõe-se cada uma das forças, segundo o GL global correspondente. No caso do nó 5, preenche-se 3 posições do vetor elementar: F_1 corresponde ao GL local 3 (GL global 37), M_1 ao GL local 6 (GL global 30) e M_2 ao GL local 5 (GL global 29). Proceder-se da mesma forma para os nós 6 e 7.

3.4.4.11 Deslocamentos nodais

Depois de criada a matriz de rigidez global e o vetor das forças globais, aplica-se diretamente a equação 4.1, a Lei de Hooke, de onde se obtém o vetor dos deslocamentos nodais. Cada componente do vetor corresponde ao deslocamento do correspondente GL global da estrutura.

3.5 Considerações finais

As técnicas de processamento de sinal são cada vez mais utilizadas por engenheiros civis, para estudar o comportamento dinâmico de estruturas. A utilização da programação para esse fim, veio automatizar processos desde a filtragem e tratamento de sinal, passando pela sua decomposição em ondas, até à forma possível de analisar os resultados com rigor. Através desses resultados é possível fazer-se a identificação modal, uma técnica muito eficaz, que permite determinar as configurações modais de uma estrutura com bastante precisão e, com essa informação, calibrar os modelos numéricos de projeto, por exemplo, para futuros cálculos sob ações sísmicas ou do vento. É, por isso, fundamental continuar a desenvolver estas técnicas, não só para o estudo do comportamento dinâmico e posterior análise do comportamento dos materiais e da estrutura, mas também como forma de rapidamente se agir sobre possíveis danos que podem estar a passar despercebidos.

4

Desenvolvimento em MATLAB do programa DynBridges 1.0

“Most times your computer is not responding as you expected - first try to find out if the ERROR is not sitting right next to the computer.”

- Thomas Baehr

4.1 Considerações iniciais

Com a evolução da tecnologia computacional ao nível de linguagem de programação e de potência de processadores, tem-se desenvolvido e aplicado métodos numéricos de forma a automatizar e otimizar o cálculo de estruturas. Esses métodos matemáticos para análise de estruturas, que requerem a resolução de, por vezes, milhares de equações, são resolvidos rápida e eficientemente, apenas com a preparação da informação acerca da geometria e materiais da estrutura, bem como quais os fundamentos teóricos aplicados.

Em termos de geometria, a definição dos nós e das barras é fundamental, pois define o tipo de estrutura, onde se localiza no espaço e de que forma são feitas as suas ligações elementares. A atribuição da numeração dos nós e das barras deve ser feita com lógica, de maneira a facilitar a organização matricial de coordenadas e incidências.

As hipóteses simplificativas passam pela Teoria da Elasticidade e pela Teoria das Peças Lineares que, ao serem aplicados, tornam possível analisar estruturas, calculando deformadas estáticas ou comportamentos dinâmicos.

Ao traduzir todos estes conceitos para a linguagem de programação, torna-se possível automatizar funções que fornecem, em poucos minutos, resultados que manualmente poderiam demorar meses a obter.

4.2 Ficheiros *input*

O ficheiro de *input*, para importação no programa **DynBridges 1.0** (MATLAB), engloba todas as características geométricas e dos materiais da estrutura. À partida sabe-se que a análise é tridimensional e que o número de GL por nó é 6. No ficheiro são organizadas folhas, em determinada ordem, contendo coordenadas dos nós da estrutura, incidências, tipos de barra, condições de apoio, carregamentos, características dos materiais e geometria das secções. A sequência de folhas do ficheiro é a seguinte: Nós, Elementos, Materiais e Secções. No Anexo I está apresentado um guia de preenchimento do ficheiro excel para garantir uma total compatibilidade com o programa.

4.3 Organização do programa DynBridges 1.0

O programa **DynBridges 1.0** apresenta-se com várias funções que permitem a comparação dos resultados do modelo numérico com os dos modelos de identificação modal. Nos capítulos seguintes, faz-se a sua descrição detalhada e que procedimentos adotar na sua utilização.

4.3.1 Painel “Início”

No painel “Início” (Figura 4.1) é possível navegar por várias fotografias associadas ao viaduto em estudo. É neste que irá ser importado o ficheiro de dados, relativo ao viaduto (geometria, secções, materiais, etc.), e feito o cálculo dinâmico do mesmo.



Figura 4.1 - Painel "Início".

Para a criação deste programa de elementos finitos de barra foi necessário ultrapassar alguns obstáculos relativos, por exemplo, às matrizes de rigidez com a contabilização de libertações internas, ou até mesmo a associação dos 6 GL de um nó, à representação tridimensional dessa mesma secção. De seguida apresenta-se a formulação do programa que permite obter as frequências naturais da estrutura e os desenhos das suas configurações modais e, por fim, os filmes da estrutura e da secção em estudo para cada modo de vibração. Este cálculo é iniciado no botão “Cálculo Dinâmico” que, depois de terminar os cálculos, envia os resultados para os respetivos gráficos, nos painéis seguintes (painéis “Malha” e “Modelo de elementos finitos”).

1 - Definição dos parâmetros não incluídos no ficheiro de dados

De início são definidas as variáveis, relativamente aos GL por nó ($NGLNO=6$), número de dimensões de desenho ($NDIM=3$), número de nós por elemento ($NNOE=2$), número de GL por elemento ($NGLE=NGLNO*NNOE=12$) e o valor da aceleração gravítica ($g=9.81m/s^2$).

2 - Escolha do ficheiro de dados Excel

É feita a importação do ficheiro excel, onde foi preparada toda a informação acerca da estrutura a estudar. O comando *uigetfile* permite ao utilizador a escolha do caminho do ficheiro de dados, guardando-o como uma variável (*FICH_DADOS*).

3 - Leitura do ficheiro de dados

Aqui é feita a leitura da variável *FICH_DADOS*, associada a um ficheiro excel, através do comando *xlsread*. A leitura é relativa às folhas Nós, Elementos e Materiais.

O programa utiliza então a variável *DADOS* para englobar numa matriz, toda a informação contida em cada folha. Posteriormente, utilizam-se outras variáveis que vão fazer uma leitura de células ou submatrizes da variável *DADOS*. Desta forma a variável *DADOS* pode ser limpa da memória, através do comando *clear* e depois reutilizada para leitura da folha seguinte. O processo repete-se para cada folha a ler lida.

Da folha “Nós” são guardadas as variáveis *NP* (número de nós da estrutura), *NGL* (número de GL da estrutura), *coord* (matriz com as coordenadas x, y e z de cada nó da estrutura), *apoio* (matriz com os valores de rigidez de cada direção para simular os apoios, em cada nó) e *cargasC* (matriz com o valor e direção das cargas concentradas, aplicadas em cada nó).

Na folha “Elementos” são guardadas as variáveis *NE* (número de elementos da estrutura), *elem* (matriz com as incidências de cada barra – nó inicial e nó final), *imat* (vetor com o tipo de material associado), *Lib_internas* (vetor com o tipo de libertações internas), *areas* (vetor com a área de

cada elemento), *inercias* (matriz com as inercias *YY*, *ZZ* e torção de cada elemento) e *cargasD* (matriz com o valor e direção das cargas distribuídas, aplicadas em cada elemento).

Na folha “Materiais” são guardadas as variáveis *NMat* (número de materiais), *EE* (vetor com os módulos de elasticidade de cada material), *GG* (vetor com os módulos de elasticidade de cada material) e *Pesp* (vetor com peso específico de cada material, em kN/m³).

4 - Desenho da malha

Antes do desenho da malha, é definida uma margem de limitação do desenho, a variável *ax*, de forma a criar uma margem para desenho. Essa margem corresponde a 20% do comprimento da estrutura, em cada direção.

De seguida, dentro de dois ciclos (*NE* e *NNOE*), são criadas três matrizes (*x1*, *x2* e *x3*), correspondentes às coordenadas *x*, *y* e *z* dos nós. Estas variáveis são organizadas para que em cada coluna, de *NNOE* linhas, sejam guardadas as coordenadas do nó inicial e do nó final, da direção correspondente.

Depois de criados *x1*, *x2* e *x3*, usa-se o comando *plot3* para desenhar em 3D a estrutura, onde se pode também editar o tamanho, o tipo e a cor das linhas do desenho.

5 - Matrizes de transformação, rigidez e massas

Aqui serão calculadas as matrizes que irão permitir calcular o vetor dos deslocamentos globais da estrutura, as matrizes de rigidez e de massas global. Para isso, é primeiro preciso calcular essas matrizes para cada elemento em coordenadas locais e depois, através da matriz de transformação, transformá-las para coordenadas globais. Por fim, procede-se à assemblagem de todas as matrizes elementares em coordenadas globais, na matriz global correspondente.

Para determinar a matriz de transformação de cada elemento, inicia-se um ciclo ao número de elementos (*for n=1:NE*). Será então repetido o processo seguinte, para cada elemento da estrutura: Calcula-se o comprimento do elemento, *L*, através das coordenadas dos nós inicial e final, onde é criado um vetor *dx*, contendo três valores, correspondentes à diferença de coordenadas para cada direção. Aplicando a norma à variável *dx*, através da função *norm(dx)*, obtém-se o valor de *L*. Sabendo *L*, calcula-se o vetor linha unitário, *e1*, com a direção do eixo local 1 (direção axial). Diz-se então que *e1=dx/L*. Estabelecido o eixo local *e1*, inicia-se uma condição *if* para estabelecer a direção dos eixos locais 2 e 3.

Caso o primeiro valor de dx seja nulo, ou seja o elemento encontrar-se no plano x_2x_3 (Figura 4.2), o eixo local e_2 irá ser perpendicular a e_1 e contido no plano horizontal, ou seja $e_2=[1\ 0\ 0]$.

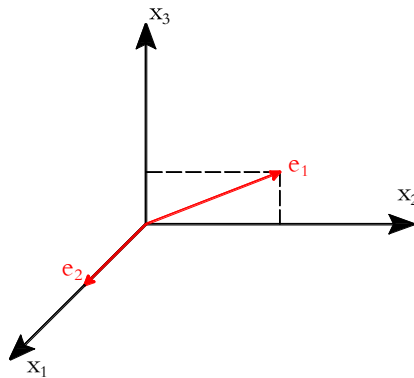


Figura 4.2 - Definição do eixo local e_2 , com e_1 no plano x_2x_3 .

Caso o segundo valor de dx seja nulo, ou seja o elemento encontrar-se no plano x_1x_3 (Figura 4.3), o eixo local e_2 irá ser perpendicular a e_1 e contido no plano horizontal, ou seja $e_2=[0\ 1\ 0]$.

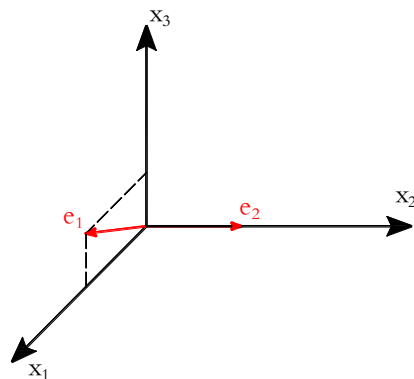


Figura 4.3 - Definição do eixo local e_2 , com e_1 no plano x_1x_3 .

Caso o terceiro valor de dx seja nulo, ou seja o elemento encontrar-se no plano x_1x_2 (Figura 4.4), o eixo local e_2 irá ser perpendicular a e_1 e contido num plano vertical, ou seja $e_2=[0\ 0\ 1]$.

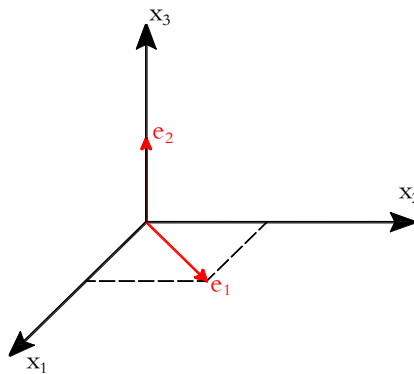


Figura 4.4 - Definição do eixo local e_2 , com e_1 no plano x_1x_2 .

Estabelecidos os eixos locais 1 e 2, aplica-se diretamente o produto externo a ambos, $e_3 = \text{cross}(e_1, e_2)$, de onde se obtém o vetor unitário do eixo local 3.

Posto isto, monta-se diretamente uma matriz dos vetores unitários ($T_{3 \times 3}$), arrumando os vetores em linhas, obtendo-se uma matriz de três linhas por três colunas.

$$T_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} e_1(1) & e_1(2) & e_1(3) \\ e_2(1) & e_2(2) & e_2(3) \\ e_3(1) & e_3(2) & e_3(3) \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Para terminar, a matriz de transformação do elemento, que tem doze linhas por 12 colunas, é obtida utilizando a disposição da matriz da equação (3.97).

De seguida, uma vez que já se tinha guardado em memória variáveis relativas às características dos elementos, como a área, inércias, e tipo de material, calcula-se a matriz de rigidez elementar em coordenadas locais, K_{local} , segundo a equação (3.91). No entanto, no topo dos pilares 15, 16, 17, 20, 21 e 22, existem rótulas cilíndricas, que provocam uma libertação interna na translação em Y e na rotação segundo o eixo X. Desta forma, para os elementos do topo dos pilares, aplica-se a matriz de rigidez elementar da equação (3.93), uma vez que se irá libertar a translação segundo Y. Aos elementos de tabuleiro que ligam à rótula cilíndrica, aplica-se a matriz de rigidez elementar da equação (3.94), uma vez que a esta se irá libertar a rotação segundo X.

Nos elementos de tirante aplica-se a matriz de rigidez elementar da equação (3.92), uma vez que são elementos rotulado-rotulado e têm apenas resistência axial.

Por fim, transforma-se a matriz de rigidez elementar de coordenadas locais para coordenadas globais através da expressão $Ke = T^*K_{local}*T$. Da mesma forma que se construiu a matriz de rigidez elementar em coordenadas locais, vai-se construir a matriz de massas elementar, M_{local} . Aplica-se diretamente a equação (3.95). Depois transforma-se de coordenadas locais para coordenadas globais através da expressão $Me = T^*M_{local}*T$.

Procede-se então à montagem das matrizes elementares, nas respetivas matrizes globais. Este processo passa por enviar o valor da rigidez ou da massa de cada GL local da matriz local, para o GL global correspondente da matriz global. Obtém-se uma matriz de rigidez global, K , e uma matriz de massas global, M , com NGL linhas por NGL colunas.

À matriz de rigidez global, para considerar as condições de apoio, associa-se aos GL globais correspondentes, um valor de rigidez muito elevado. Essa informação está contida na variável das condições de apoio, apoio, lida a partir do ficheiro excel. Aplica-se ainda a função *sparse* à matriz de rigidez K , com o objetivo de reduzir o tempo de processamento da matriz.

6 - Frequências próprias e modos de vibração

Nesta parte do programa, são executadas funções que determinam os valores e vetores próprios da estrutura, através da função *eigs*:

```
[VecP,ValP] = eigs(K,M,20,0);
```

Esta função permite definir quantos modos se pretende analisar, reduzindo para 2~3% a velocidade de processamento da função, pois evita que sejam calculadas milhares de equações das matrizes *K* e *M*. Depois de obtidos os valores de *VecP* e *ValP*, armazenam-se as raízes dos valores absolutos da diagonal de *ValP*, numa variável *Wno*. Depois usa-se a função *sort* para ordenar os valores das frequências, do mais pequeno para o maior. Obtém-se um vetor com as frequências angulares naturais ordenadas e um vetor, *Iordem*, com a numeração da ordem das frequências.

```
[W,Iordem] = sort(Wno);
```

Com o vetor *Iordem*, ordenam-se numa matriz nova, *VX*, as colunas dos vetores próprios, fazendo:

```
VX = VecP(:,Iordem);
```

Por fim, dividem-se os valores do vetor *W* por $2*\pi$, obtendo-se o vetor *f*, contendo as frequências naturais da estrutura, em Hz.

7 - Desenho das configurações modais

Para desenho das configurações modais da estrutura, define-se uma variável, *NMOD*, com o número de modos de vibração que se pretende observar.

Inicia-se então um ciclo ao número de modos (*for Nmod_des=1:NMOD*), sendo repetido este processo para cada modo:

Primeiro transforma-se a coluna *Nmod_des* da matriz *VX*, com a função *reshape*, numa matriz de *NP* linhas por *NGLNO* colunas.

```
VXm=reshape(VX(:,Nmod_des),NGLNO,NP)';
```

Assim será direta a forma como se adiciona, às coordenadas globais da estrutura, *coord*, os valores correspondentes da matriz *VXm*. Ou seja, à primeira coluna da matriz *coord* (coordenadas segundo x), adiciona-se a primeira coluna do vetor *VXm* (GL 1); à segunda coluna da matriz *coord* (coordenadas segundo y), adiciona-se a segunda coluna do vetor *VXm* (GL 2); à terceira coluna da matriz *coord* (coordenadas segundo z), adiciona-se a terceira coluna do vetor *VXm* (GL 3). Obtém-se assim as variáveis *x1vp*, *x2vp* e *x3vp*. Criou-se também uma variável, *cor_modo*, com a norma das três primeiras colunas de *VXm*, de maneira a possibilitar, com o auxílio de uma *colorbar*, a observação do valor dos deslocamentos de translação em função da cor do desenho. Utilizou-se então a função *fill3* para desenhar os modos de vibração da estrutura.

```
fill3(x1vp,x2vp,x3vp,cor_modo,'Edgecolor','interp','linewidth',1.5);
```

8 - Desenho das ondas dos GL de translação

Nesta parte do programa, foi criada uma ferramenta que permite perceber melhor quais os GL mais excitados num dado modo de vibração, para um nó da estrutura escolhido pelo utilizador, *NOescolha*. O utilizador pode também escolher, quais os GL que pretende observar no gráfico, alterando as características do vetor *GLdesenho*. Se se pretende apenas, por exemplo, os GL de translação do nó 397 faz-se:

```
NGLNO=6;  
NOescolha=397;  
GLdesenho=[NOescolha*NGLNO-5 NOescolha*NGLNO-4 NOescolha*NGLNO-3];
```

Criaram-se então variáveis que definem o intervalo de tempo, *dt*, e o tempo máximo de análise da onda, *tmax*. De seguida, criou-se o vetor *tt* que vai de 0 segundos a *tmax* segundos, em intervalos de *dt*.

De seguida, iniciou-se um ciclo ao número de modos de vibração (*for i=1:NMOD*), repetindo-se o seguinte processo para cada modo de vibração:

Iniciou-se um ciclo ao número de GL escolhidos (*for j=1:length(GLdesenho)*) onde se criou uma variável, *an*, com *NMOD* colunas e *GLdesenho* linhas, que guarda em coluna os valores do vetor próprio, correspondentes àqueles GL globais. Depois é criada a variável *Onda*, que vai multiplicar cada valor do vetor na pelo cosseno da frequência desse modo, *W(i)*, vezes o vetor *tt*.

```
Onda=an(j,i)*cos(W(i)*tt);
```

Por fim, usa-se o comando *plot*, onde se coloca no eixo x o vetor *tt* e no eixo y o vetor *Onda*. Desta forma, e usando a função *subplot*, é possível sobrepor no mesmo gráfico, de cada modo de vibração, as ondas correspondentes a cada GL em estudo.

9 - Desenho das secções. Cálculo estático

Nesta secção do programa, é feita a leitura da folha *Secções* do excel. Da mesma forma que se procedeu na leitura das folhas anteriores, utiliza-se a variável *DADOS* para armazenar toda a informação contida na folha e outras variáveis para ir buscar valores ou submatrizes nela contida. Neste caso, são criadas as variáveis *NS* (número de secções) e *Seccoes* (matriz com *NS* linhas e duas colunas, em que a primeira coluna tem a secção e a segunda coluna tem o tipo de secção). Cada secção está associada a um nó global da estrutura, à qual se irá atribuir o valor dos deslocamentos de translação e de rotação, obtidos no vetor dos deslocamentos globais, para desenho 3D.

Para isso, cria-se um ciclo ao número de secções (*for i=1:NS*), sendo repetido este processo para cada secção:

Através da variável *Seccoes*, lê-se qual é o nó global associado à secção corrente. A partir desse nó, é possível ler, no vetor global dos deslocamentos, *u*, os seis deslocamentos que lhe estão associados. A variável *useccoes* é então criada para guardar, em cada coluna de *NGLNO* linhas, os deslocamentos de cada nó, ou seja, terá dimensões de *NGLNO* linhas por *NS* colunas.

De seguida, é necessário ler todas as informações referentes ao tipo de secção associado àquele nó. São então criadas as variáveis *NPs* (número de nós das secções), *COORDs* (matriz das coordenadas dos nós da secção), *NFs* (número de faces da secção), *NNOFs* (número de nós por face) e *IDs* (matriz com a sequência de nós para criação das faces) (Figura 4.5).

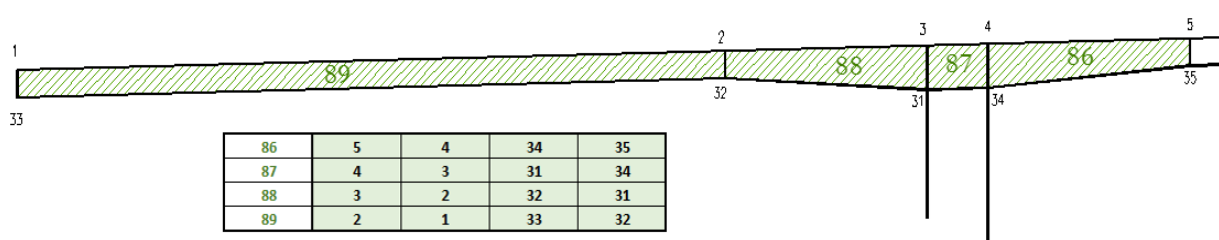


Figura 4.5 - Exemplo de tabela com sequência de nós para desenhar faces.

Depois de definidas todas as variáveis referentes aos deslocamentos modais e ao tipo de secção do nó global, aplicam-se os deslocamentos desses seis GL do nó global a todos os nós da secção. É importante frisar que esses GL são referentes ao nó global, que é centro de gravidade da secção. Dessa forma, além de se somar a cada nó da secção, os deslocamentos de translação tem que, posteriormente, se somar os valores de translação, obtidos a partir da transformação das rotações do nó global (Figura 4.6).

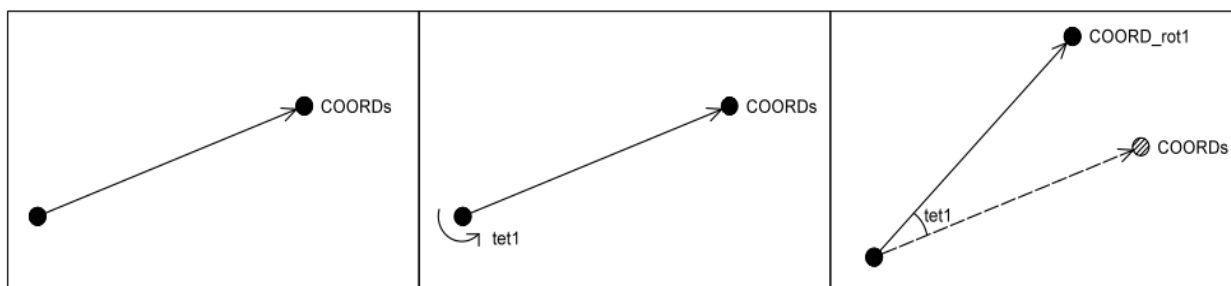


Figura 4.6 - Exemplo da influência da rotação de um nó, em nós adjacentes.

Para transformar as rotações do nó global em translações nos nós da secção, criam-se matrizes de transformação para cada direção (*Mrot1mod*, *Mrot2mod* e *Mrot3mod*).

$$\text{Mrot}_n \text{mod} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\text{tet}_n \text{mod}) & \sin(\text{tet}_n \text{mod}) \\ 0 & -\sin(\text{tet}_n \text{mod}) & \cos(\text{tet}_n \text{mod}) \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

sendo n o eixo de rotação. Depois criam-se variáveis para guardar o valor das coordenadas dos nós da secção ($COORD_rot1mod$, $COORD_rot2mod$ e $COORD_rot3mod$) se fossem afetadas por cada uma das rotações, ou seja, faz-se:

```
COORD_rot1mod=COORDs*Mrot1mod;
```

```
COORD_rot2mod=COORDs*Mrot2mod;
```

```
COORD_rot3mod=COORDs*Mrot3mod;
```

De seguida, subtrai-se a cada uma destas variáveis $COORD_rotmod$, o valor das coordenadas originais dos nós da secção, obtendo-se quanto é que cada rotação faz transladar cada nó da secção. Se se somar os três efeitos de rotação, provenientes das rotações segundo os três eixos, mais as coordenadas originais nos nós da secção, obtêm-se as coordenadas finais, tendo em conta apenas as rotações no nó global.

```
COORDf = COORDs + (COORD_rot1mod-COORDs) + (COORD_rot2mod-COORDs) +  
(COORD_rot3mod-COORDs);
```

Por fim, é apenas necessário somar a estas coordenadas finais dos nós da secção, o valor das translações do nó global, para cada direção, ou seja:

```
COORDf(:,1)=COORDf(:,1)+useccoes(1,i);
```

```
COORDf(:,2)=COORDf(:,2)+useccoes(2,i);
```

```
COORDf(:,3)=COORDf(:,3)+useccoes(3,i);
```

Depois de definidas as coordenadas finais dos nós da secção, criam-se variáveis para cada direção ($xff1$, $xff2$ e $xff3$), que englobem as coordenadas dos nós da face, segundo a sequência guardada em IDs . Repete-se este processo, mas com as coordenadas dos nós da secção originais, guardando-as nas variáveis $xf1$, $xf2$ e $xf3$.

Por fim, calcula-se a diferença entre as coordenadas xff e xf , obtendo-se os deslocamentos nodais da secção. Irão servir para calcular a sua norma, armazenados na variável uf . Usa-se então o comando $fill3$ para desenhar as variáveis $xff1$, $xff2$ e $xff3$, tendo em conta uf . Desta forma, o desenho, auxiliado pela colorbar, permite perceber, em função das cores, quais os deslocamentos associados.

4.3.2 Painel “Malha”

Depois do cálculo dinâmico terminado, o programa envia-nos automaticamente para o painel “Malha” (Figura 4.7). Este painel permite analisar a malha da estrutura, com ou sem a numeração dos nós ou dos elementos, com a possibilidade de usar ferramentas de zoom e de rotação. Permite também analisar a secção da estrutura em estudo com funções de zoom e rotação.

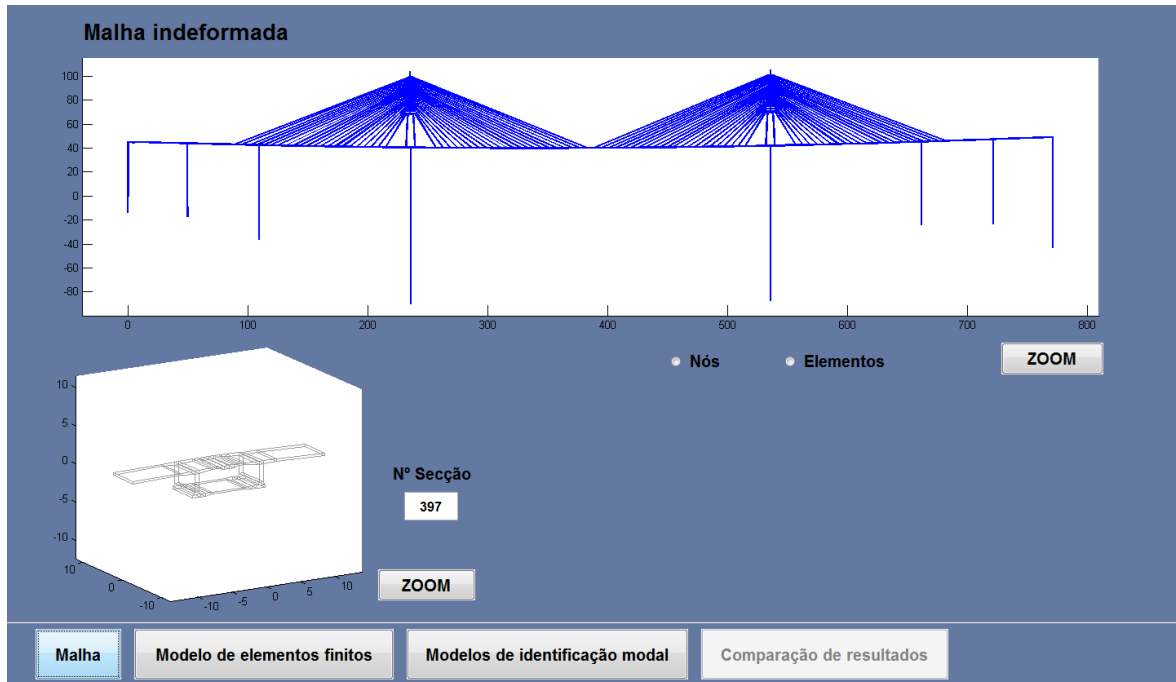


Figura 4.7 - Painel "Malha".

4.3.3 Painel “Modelo de elementos finitos”

Neste painel apresentam-se as configurações modais da estrutura, para o modo de vibração escolhido pelo utilizador (Figura 4.8). Apresenta-se também a deformada modal da secção em estudo, relativa ao respetivo nó global da estrutura, acompanhada de um gráfico com as ondas relativas aos GL de translação desse mesmo nó.

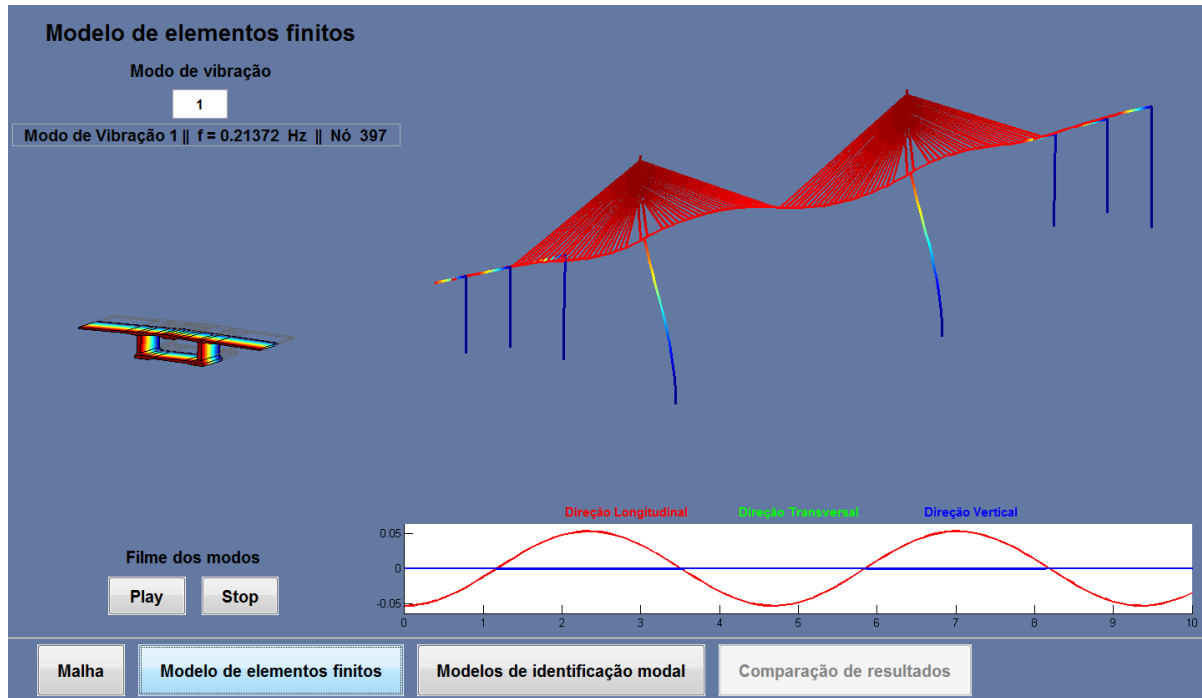


Figura 4.8 - Painel "Modelo de elementos finitos".

Ao clicar-se no botão “Play” inicia-se a animação, em sincronia, destes três elementos, onde é possível analisar com maior detalhe os deslocamentos modais da secção, para cada modo de vibração. O gráfico das ondas relativas aos graus de translação da secção são acompanhadas de uma linha vertical que nos indica a amplitude dos deslocamentos modais, para cada instante t .

1 - Filme dos Modos da Estrutura

Tal como na parte anterior do programa, começou-se por criar variáveis que definam o intervalo de tempo, dt , o tempo máximo, t_{max} e um vetor tt , com os valores de tempo, desde 0 segundos até t_{max} segundos, em intervalos de dt .

Depois são criadas duas variáveis, em que o utilizador define quais os filmes dos modos de vibração inicial (modoinicial) e final (NMODfilme) que quer ver. Nesta altura inicia-se a figura onde vai ser criado o filme.

Inicia-se então um ciclo ao número de modos de vibração ($Nmod_des=modoinicial:NMODfilme$), repetindo-se este processo para cada modo de vibração:

Primeiro transforma-se a coluna $Nmod_des$ da matriz VX , com a função *reshape*, numa matriz de NP linhas por $NGLNO$ colunas.

```
VXm=reshape(VX(:,Nmod_des),NGLNO,NP)';
```

De seguida, inicia-se um ciclo ao tempo (*for k=1:length(tt)*) onde vão ser criados, para cada instante t , os valores dos deslocamentos dos nós globais da estrutura. As variáveis onde as coordenadas vão ser guardadas são $x1vm$, $x2vm$ e $x3vm$. São obtidas através da soma das coordenadas originais, de cada direção, dos nós da estrutura, com a coluna da matriz VXm , da direção correspondente, afetada pelo cosseno de $W(i)$ vezes o instante de tempo.

```
x1mv(j,n)=coord(elem(n,j),1)+VXm(elem(n,j),1)*cos(W(Nmod_des)*(k-1)*dt);
```

```
x2mv(j,n)=coord(elem(n,j),2)+VXm(elem(n,j),2)*cos(W(Nmod_des)*(k-1)*dt);
```

```
x3mv(j,n)=coord(elem(n,j),3)+VXm(elem(n,j),3)*cos(W(Nmod_des)*(k-1)*dt);
```

Ainda dentro do ciclo aos instantes de tempo, é utilizado o *fill3* para desenho da estrutura naquele instante, seguido da função *getframe*. Esta função permite que, a janela de desenho seja atualizada conforme o ciclo de tt é reiniciado. Desta forma, o filme criado é o conjunto dos *getframe*, em cada instante do ciclo tt .

2 - Filme das secções da estrutura

Do mesmo modo que foi criado um desenho da estrutura para cada modo de vibração, aqui vão ser criados desenhos para cada instante t , em que o valor das rotações e das translações globais variam, em função do cosseno de W , do modo de vibração correspondente, vezes o instante de tempo. O restante código é semelhante do ponto 9 (Painel “Malha”), referente ao cálculo da configurações modais da secção. É possível obter para cada modo de vibração, o filme da secção escolhida.

4.3.4 Painel “Modelos de identificação modal”

Este painel permite importar os ficheiros relativos aos registos obtidos através dos acelerómetros uniaxiais (5 acelerogramas) e triaxiais (3 acelerogramas). Cada um destes tipos é analisado separadamente, dispondo exatamente das mesmas funções. Tomando como referência os acelerogramas do acelerómetro triaxial (Nanometrics), clica-se no botão “Nanometrics (Triaxial)” e escolhe-se o ficheiro de dados (Figura 4.9).

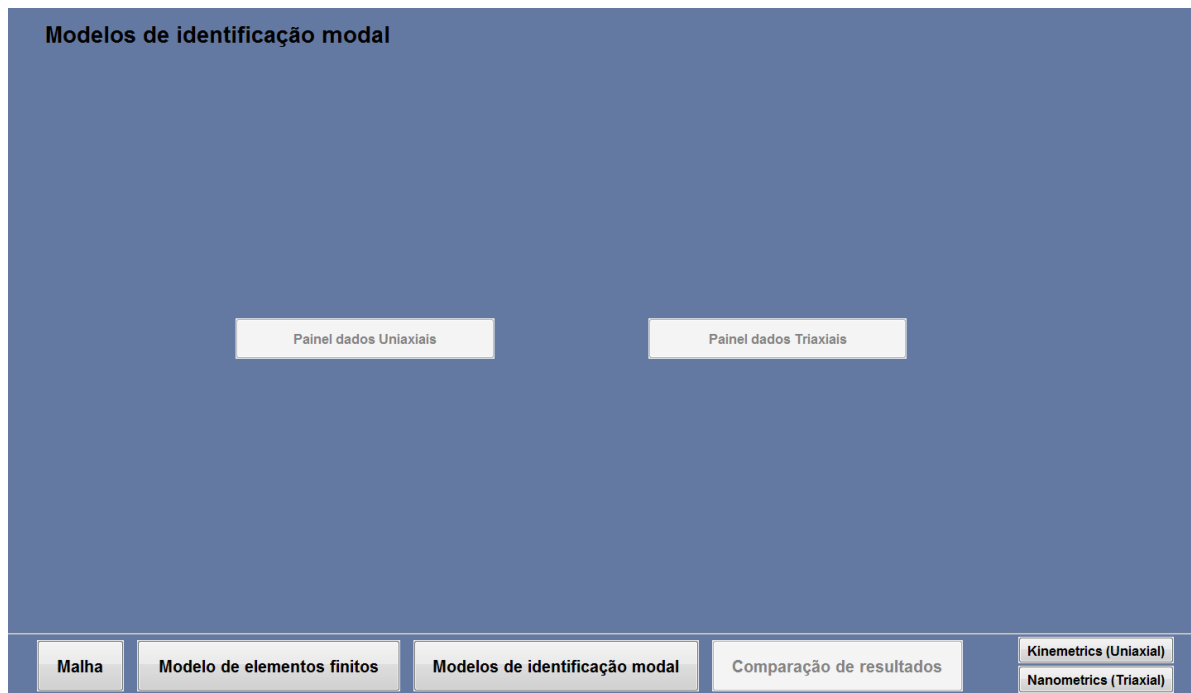


Figura 4.9 - Painel "Modelos de identificação modal". Escolha de registos para análise.

Após a escolha do registo, o programa abre automaticamente o painel que contém os 3 acelerogramas escolhidos (já filtrados pelo Filtro de Média Móvel) e os seus respetivos espetros de amplitudes, obtidos através da FFT (Figura 4.10). Há também a possibilidade de se selecionar janelas dos acelerogramas, atualizando automaticamente os espetros de amplitudes, e pedir a matriz de DEP (Figura 4.11) e o Espetro de Valores e Vetores Singulares (Figura 4.12), nos respetivos botões. No topo do painel há um botão que permite abrir uma janela nova, onde é apresentada a secção em estudo com o local de instalação da instrumentação.

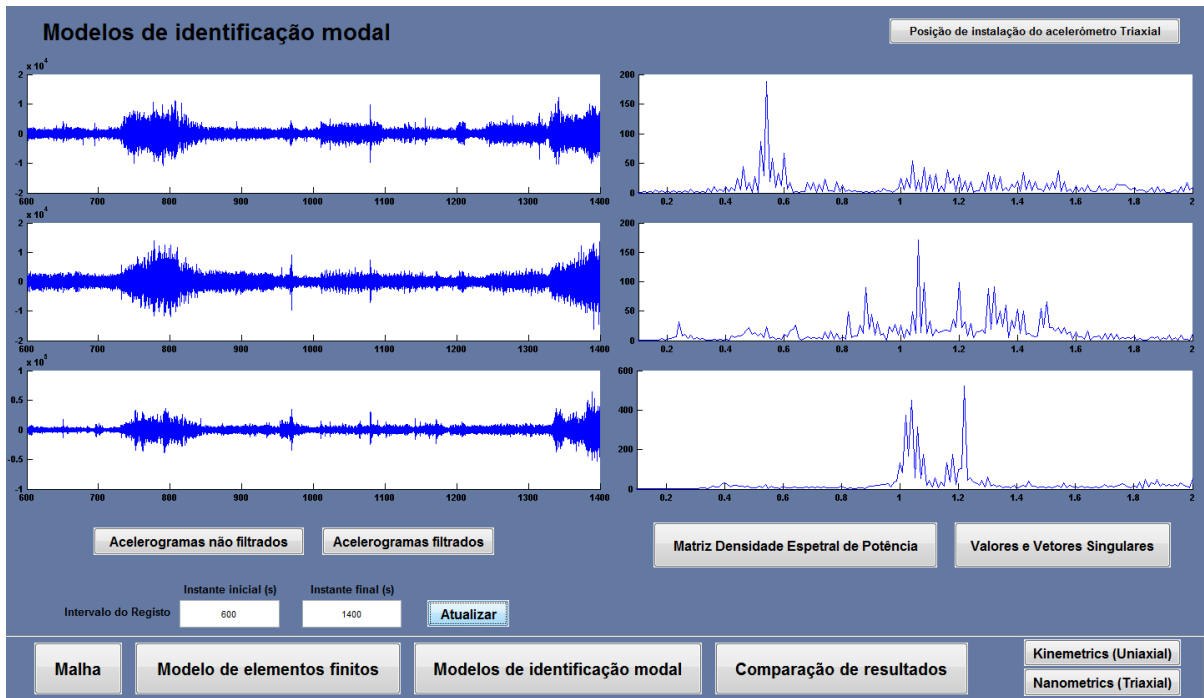


Figura 4.10 - Painel "Modelos de identificação modal". Análise dos dados obtidos.

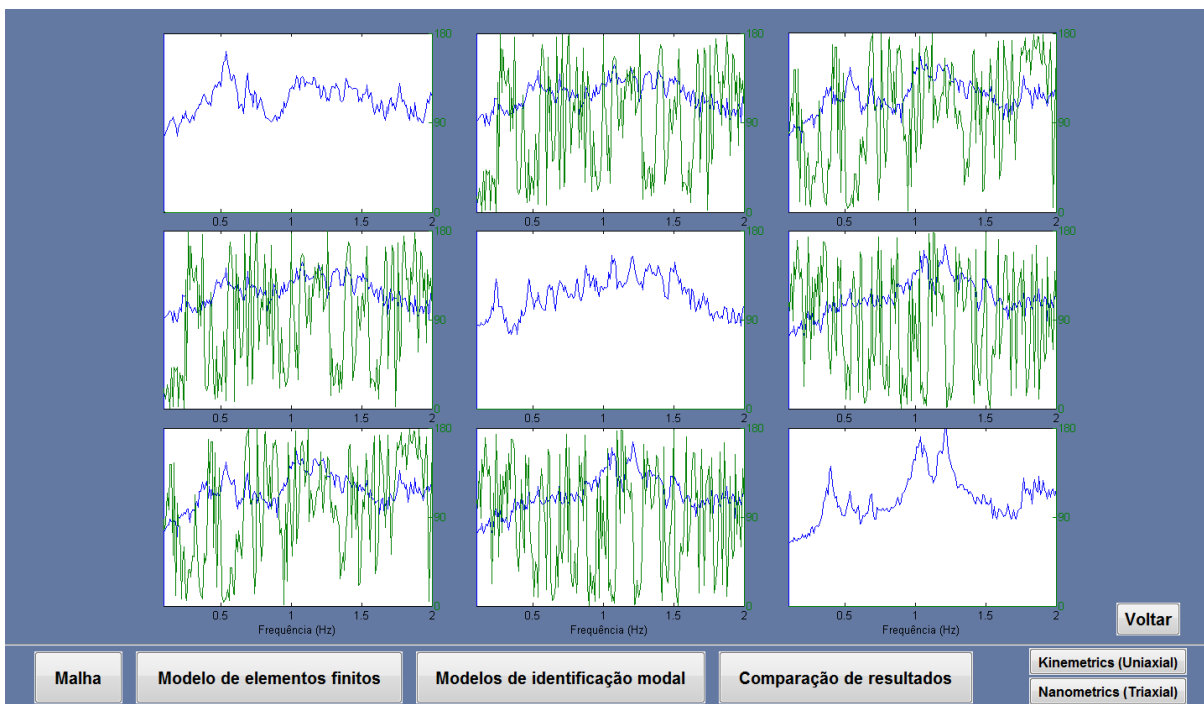


Figura 4.11 - Painel que apresenta a matriz DEP.

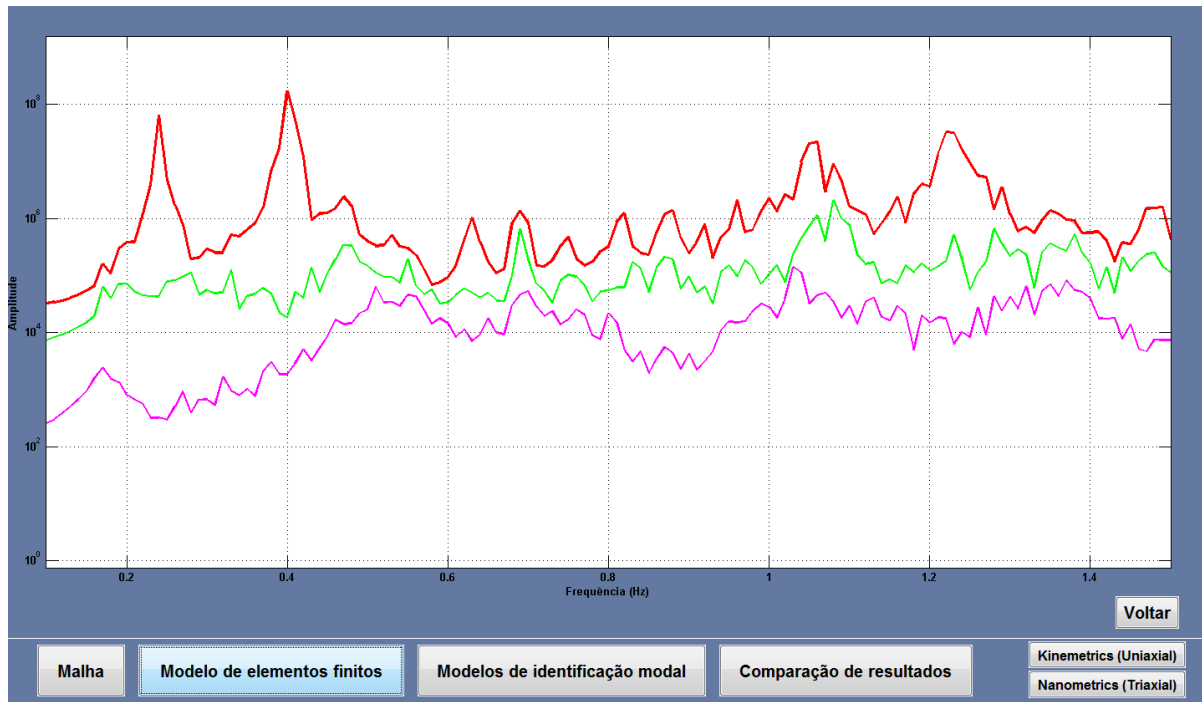


Figura 4.12 - Painel que apresenta o espectro de valores singulares.

De seguida, são apresentados em detalhe, os códigos para a formulação destas funções, desde a Transformada de Fourier à criação do espectro de valores e vetores singulares. Esta formulação que se apresenta, funciona também para os acelerogramas dos acelerómetros Kinematics (uniaxiais), onde varia apenas o número de acelerogramas (três).

1 - Leitura dos Acelerogramas Triaxiais e Definição de Variáveis do Ficheiro de Dados

Nesta secção é escolhido o ficheiro de dados que contém os registos de acelerações triaxiais (ou uniaxiais) do ensaio de vibração ambiental. É criada a variável correspondente à matriz que contém os valores das acelerações, em cada instante t , de cada acelerograma. Depois são criadas as variáveis N_{acel} (número de acelerogramas), dt (intervalo de tempo das leituras – 0,004s), $NP=length(Acel)$ (número total de pontos no tempo), $t_{max}=dt*(NP-1)$ (total de tempo medido, em segundos), $t=(0:dt:t_{max})'$ (vetor dos tempos, em segundos), $f_{max}=1/dt*(1/2)$ (frequência máxima ou frequência de Nyquist) e $df=1/t_{max}$ (incremento de frequência, em Hz).

2 - Filtragem das Histórias de Acelerações pela Média Móvel

De seguida, aplica-se aos acelerogramas o Filtro de Média Móvel de forma a reduzir a influência do ruído e logo suavizando o sinal. Desta forma obtém-se a variável $Acel_filtrado$ que corresponde a uma matriz que contém os acelerogramas filtrados do registo escolhido pelo utilizador. Foi usada a função $MedMov()$, cujo o funcionamento foi explicado em 3.3.1, para calcular a média móvel da variável $Acel$, sendo-lhe posteriormente subtraída.

3 - Desenho dos Espectros de cada Acelerograma com somatório (FFT)

Depois de filtrar os acelerogramas, é aplicada a transformada de Fourier para os decompor em ondas harmônicas, de onde se obtêm os espectros de amplitudes. Cada espectro de amplitudes final é obtido a partir da média dos espectros de cada janela do acelerograma (comprimento de 100 segundos e com sobreposição de 50%).

4 - Escolha dos Instantes Iniciais e Finais do trecho do acelerograma pretendido

É possível alterar a janela do acelerograma que pretendemos analisar. Desta forma é possível estudar apenas algumas zonas do acelerograma, evitando a contabilização de erros de medição dos aparelhos.

```
Lim1=input('Instante inicial? (s) '); % instante inicial do trecho
Lim2=input('Instante final? (s) '); % instante final do trecho
NP_jan=Lim2/dt-Lim1/dt+1; % número de pontos da nova janela escolhida (treço)
```

5 – Cálculo e desenho da Matriz de Densidade Espectral de Potência

Para o cálculo da matriz de densidade espectral de potência (MDEP), utiliza-se a variável *Acel_filtrado_JanEscolha*, que corresponde ao acelerograma ou trecho de acelerograma escolhido pelo utilizador (de *Lim1* a *Lim2* segundos), para aplicar a transformada de Fourier. É utilizada a formulação explicada no capítulo 3.3.3.3. É possível ao utilizador, variando a janela do acelerograma, calcular uma nova matriz DEP.

6 - Cálculo Valores e Vetores Singulares

O espectro de valores e vetores é posteriormente obtido através da variável *Mdep*, criada para o cálculo da matriz de DEP, também ele através da formulação apresentada no capítulo 3.3.3.4. Os espectros de valores e vetores singulares podem uma vez mais ser calculados, para cada janela de acelerograma em estudo, tal como na matriz DEP.

4.3.5 Painel “Comparação de resultados”

Por fim, este painel permite analisar em simultâneo o modelo numérico (estrutura ou secção), com a configuração de cada modo de vibração, e o modelo de identificação modal, neste caso o último espectro de valores e vetores singulares chamado (Figura 4.13). A este último, são agora sobrepostas linhas verticais, correspondentes às frequências dos modos de vibração do modelo numérico. Esta função facilita a comparação dessas frequências com os picos de frequência obtidos no espectro de valores e vetores singulares. Ao analisar-se um determinado modo de vibração, a linha vertical com a correspondente frequência tem uma cor e espessura mais perceptiva de forma a facilitar a análise.



Figura 4.13 - Painel "Comparação de resultados".

4.4 Considerações finais

O programa **DynBridges 1.0** permite obter os modos de vibração de uma estrutura modelada com elementos finitos de barra 3D. Existe a possibilidade de escolher quais os modos de vibração da estrutura a estudar e, para esses modos, é possível observar-se o desenho ou o filme da estrutura completa. Oferece também a possibilidade de escolher secções da estrutura analisando-se em pormenor as representações tridimensionais e fazer uma análise gráfica da relação dinâmica entre os GL de translação dessa mesma secção. Por fim, após introduzirem-se os registos de acelerações, é possível fazer-se a comparação dos resultados numéricos com os resultados experimentais obtidos.

As perspetivas futuras para o programa DynBridges 1.0 passam pelo seu melhoramento gráfico e pelo aumento do número de funções, nomeadamente a possibilidade de se ver a resposta dinâmica do viaduto, para um dado sismo introduzido pelo utilizador. Será também dada a possibilidade de criar estruturas fora do mesmo plano de desenho (já que a formulação para a criação dos eixos locais limita a estrutura a estar desenhada no mesmo plano). Isto irá permitir serem modeladas, não só pontes de suspensão lateral, mas também modelar edifícios (pórticos 3D).

5

Ensaio de vibração no viaduto do Corgo

“If you want to find the secrets of the universe, think in terms of energy, frequency and vibration.”

- Nikola Tesla

5.1 Considerações iniciais

Neste capítulo, apresenta-se o viaduto do Corgo como exemplo de aplicação para o estudo do comportamento dinâmico de estruturas, recorrendo a ensaios de vibração ambiente e a modelos numéricos de elementos finitos (programas **DynBridges 1.0** e ANSYS). Os registos de acelerações medidos nos ensaios de vibração ambiente foram analisados através de técnicas de processamento de sinal e de identificação modal no domínio da frequência (Rodrigues & Min, 2005). Mostra-se que, instrumentando apenas a secção de meio vão, é possível obter resultados com interesse para a calibração dos modelos numéricos. Os modos de vibração calculados numericamente são globalmente representados com base em animações 3D, assim como as oscilações da secção instrumentada. O comportamento dinâmico do viaduto foi também estudado com o programa ANSYS (ANSYS, 2012). As configurações modais identificadas são comparadas com as obtidas com os dois programas referidos.

5.2 Viaduto do Corgo

O viaduto do Corgo localiza-se perto da cidade de Vila Real e surgiu como solução para a travessia do vale do rio Corgo pela Autoestrada Transmontana (Figura 5.1). A travessia faz-se a uma altura máxima de 230 m acima do leito do rio Corgo, apresentando-se com 4 vias de trânsito de 3,5m e uma largura total de plataforma de 25,3 m (bermas exteriores de 3m e interiores de 1m). O seu comprimento total é 2796 m, atravessando superiormente o rio Corgo e a N2 (Figura 5.2). Por se inserir num meio natural, procurou-se um sistema estrutural que, além de eficaz, fosse composto por formas simples e que causassem o mínimo de impacto visual na paisagem do vale. Surgiu então a solução de um viaduto atirantado em betão armado pré-esforçado, com vão central de 300 m, vãos adjacentes de 40% do anterior, pilares de fuste único e mastros de 70 m que suportam uma fiada única de 4 semileques compostos por 22 tirantes (Figura 5.3).

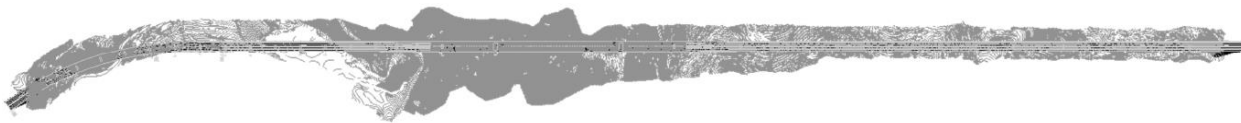


Figura 5.1 - Localização do viaduto do Corgo (Vila Real).

Viaduto do Corgo



a) *PLANTA DO VIADUTO DO CORGO*



b) *PERFIL LONGITUDINAL DO VIADUTO DO CORGO*

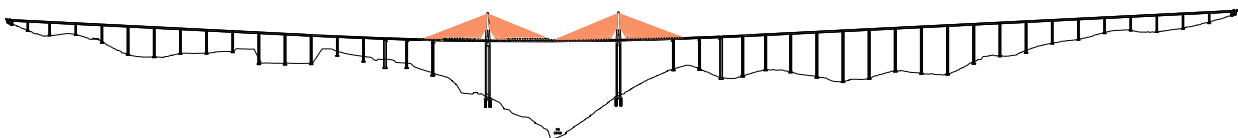


Figura 5.2 - Viaduto do Corgo: a) planta; b) perfil longitudinal.

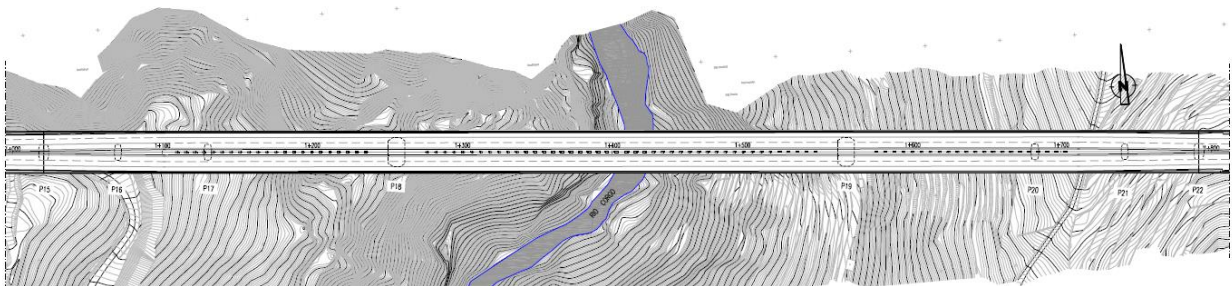
O comprimento dos tirantes varia entre 38m e 159m e o número de cordões, de 15,7mm, varia entre 39 a 66. O viaduto está dividido em 3 sub-viadutos, o de Poente, o Central e o de Nascente com 855m, 768m e 1167m, respetivamente, e separados por juntas de dilatação.

Sub-viaduto central

O sub-viaduto central (SVC) é composto por 7 vãos com suspensão atirantada central e simétrica e prolongamento contínuo. Devido à execução dos mastros e tirantes na zona central, a largura do tabuleiro do SVC (Figura 5.5), aumenta de 25,3m para 28m, apresentando uma viga-caixão central com 3,5m de altura, almas de 0,6m afastadas de 9,40m entre eixos e com abas laterais suportadas por escoras afastadas de 3m entre si. Em relação às ligações pilar-tabuleiro, apenas nos pilares P18 e P19 (Figura 5.4 e Figura 5.6) foram executadas ligações monolíticas, sendo as restantes feitas através de aparelhos de apoio.

Sub-viaduto central (viaduto do Corgo)

a) PLANTA DO SUB-VIADUTO CENTRAL DO VIADUTO DO CORGO



b) CORTE DO SUB-VIADUTO CENTRAL DO VIADUTO DO CORGO

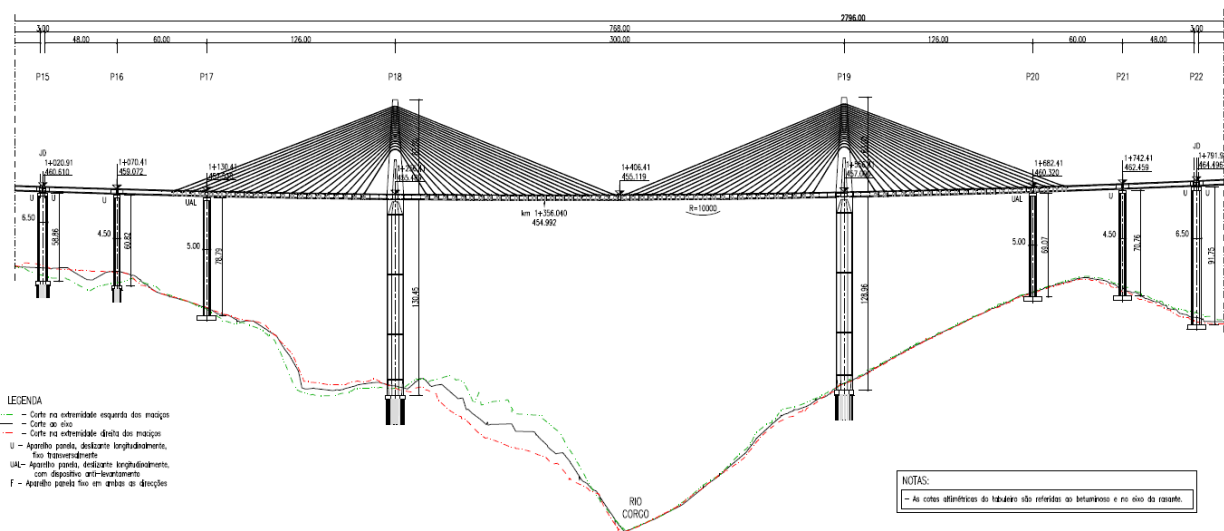


Figura 5.3 - Sub-viaduto central (viaduto do Corgo): a) planta; b) corte.

O pré-esforço longitudinal é constituído por vários grupos que pretendem assegurar os esforços da fase construtiva do tabuleiro (por aduelas sucessivas em consola) e da fase de exploração, utilizando cabos com cordões de 15,2mm e barras de $\phi 36$ mm.



Figura 5.4 - Vista lateral do viaduto do Corgo.

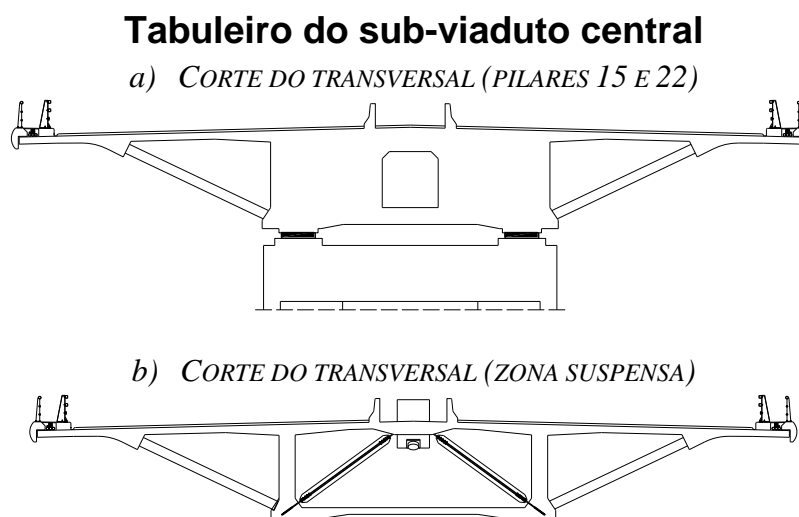


Figura 5.5 - Cortes transversais do tabuleiro no SVC: a) no topo dos pilares 15 e 22; b) na zona suspensa.

Transversalmente, a laje superior com 28,0m de largura apresenta-se pré-esforçada, o que complementa a ação de suspensão interna, na transferência das forças dos tirantes para a viga-caixão, no caso da zona suspensa e, permite garantir a verificação dos estados limite de serviço ao longo do SVC (zona suspensa e não-suspensa). Os cabos de pré-esforço transversal são de 4 cordões de 15,2mm e estão afastados, aproximadamente, de 0,40m na zona suspensa e de 0,75m no restante comprimento.

Os pilares apresentam formas ortogonais, com largura e comprimento constantes, à exceção dos pilares P18 e P19. Por isto, o método de execução dos pilares também foi distinto, sendo que a dos pilares P18 e P19 foi o de cofragem deslizante e os restantes por cofragem auto-trepante, tal como os mastros.



Figura 5.6 - Vista lateral de um mastro do viaduto do Corgo.

5.3 Modelo de elementos finitos de barra 3D

Neste capítulo apresentam-se todas as componentes do modelo de elementos finitos de barra 3D, consideradas para simular o comportamento dinâmico do viaduto do Corgo, no programa **DynBridges 1.0**. Desde a consideração dos vários tipos de elementos estruturais da estrutura, aos respectivos materiais e características geométricas, foi realizada uma análise cuidada de forma a obter-se uma aproximação o mais exata possível da estrutura projetada.

5.3.1 Malha

A malha do modelo (Figura 5.7) é constituída por 403 nós e 492 elementos (A.I.1 e A.I.2). Aos elementos respetivos, são associadas as matrizes de rigidez que consideram a libertação interna dos GL pretendidos, de forma a serem considerados os aparelhos de apoio do topo dos pilares 15 a 17 e 20 a 22.

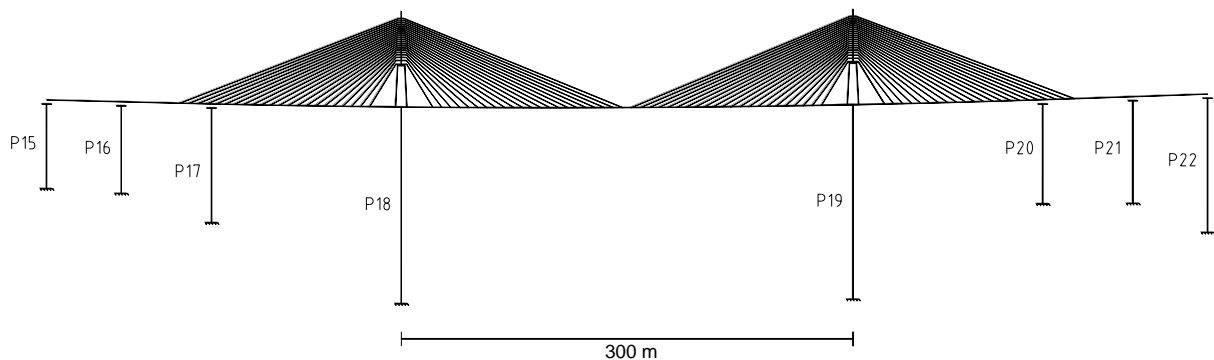


Figura 5.7 - Malha de elementos finitos de barra 3D do viaduto do Corgo.

5.3.2 Características dos elementos estruturais

Através dos desenhos de projeto (AutoCAD) do viaduto foi possível criar um ficheiro de dados (documento de texto) com as coordenadas de cada secção. Cada ficheiro de dados contém a estrutura de código necessária para automaticamente ser importado pelo programa ANSYS Mechanical APDL, criando uma área da secção. Essa secção é depois guardada como ficheiro de dados e, posteriormente importada de volta para o ANSYS para calcular as suas características geométricas (áreas, inércias e módulo de torção), tal como é possível ver na Figura 5.8. Dessa forma, após registarem-se essas características, eram preenchidas no ficheiro de dados (A.I.2) no respetivo elemento estrutural.

Há que referir também que se optou por criar barras rígidas horizontais (a azul na Figura 5.9) na ligação dos tirantes aos mastros, de forma a garantir-se que são respeitadas as suas dimensões e coordenadas estruturais.

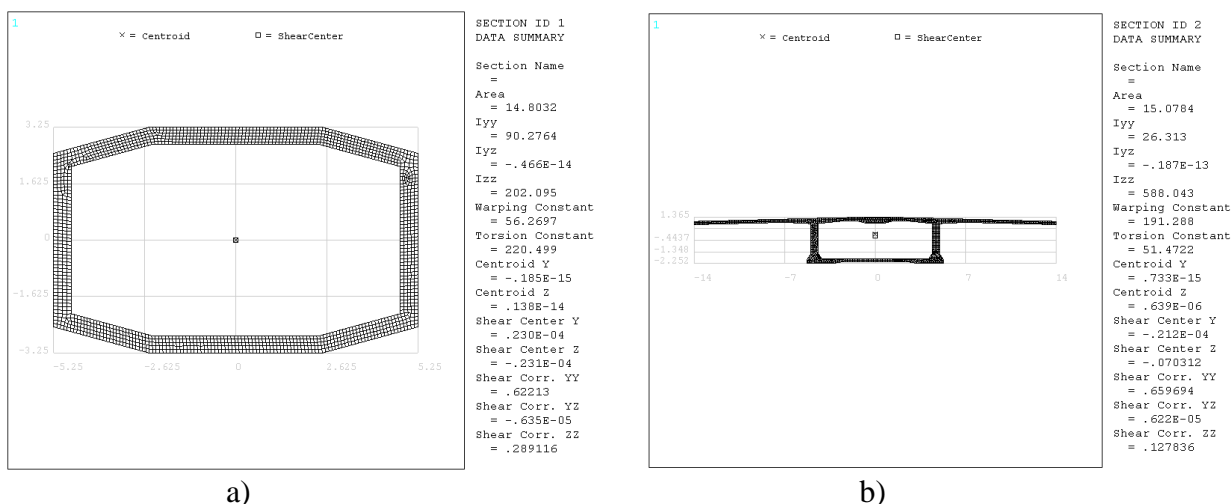


Figura 5.8 - Características geométricas das secções (ANSYS): a) pilares 15 e 22; b) tabuleiro.

5.3.3 Características dos materiais

Os materiais utilizados no viaduto do Corgo são o betão e o aço, tendo os elementos estruturais sido concebidos em betão armado, betão armado pré-esforçado e aço de pré-esforço. A cada tipo de elemento estrutural foi-lhe associado o respetivo material (Figura 5.9), podendo as suas características serem consultadas no anexo A.I.3. Ao material, associado às barras rígidas horizontais (a azul), foi-lhe conferido um módulo de elasticidade muito elevado e um peso específico praticamente nulo. Isto deve-se ao facto de que a massa dos mastros é considerada nos elementos “Mastros”, a verde, e assim não é considerada a sua massa a duplicar. A rigidez muito elevada garante que a relação de deslocamentos entre o par de semi-leques do mesmo mastro se mantém, simulando o comportamento expectável do mastro.

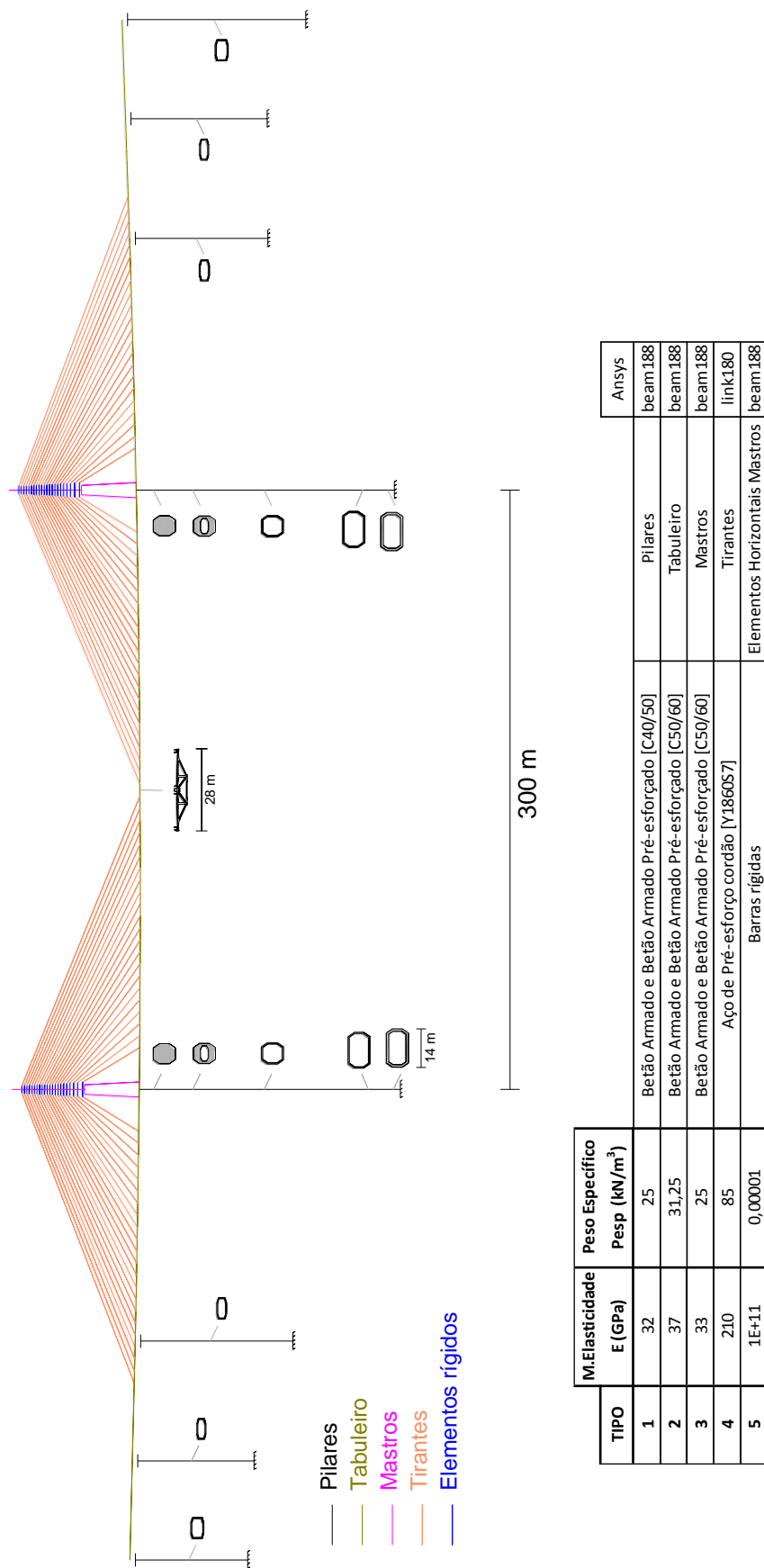


Figura 5.9 - Tipos materiais associados a cada tipo de elemento estrutural e algumas representações das suas respetivas secções.

5.3.4 Libertações internas

Os aparelhos de apoio no topo dos pilares 15 a 17 e 20 a 22 constituem um desafio na programação do modelo de EF. Para resolver este problema, foram associados aos elementos de interseção do nó de ligação pilar-tabuleiro, tal como explicado no ponto 3.4.4.4, as matrizes de rigidez com a respetiva libertação interna: translação longitudinal (matriz de rigidez (3.93)) e rotação segundo o eixo transversal (matriz de rigidez (3.94)). Da mesma forma, para simular o comportamento dos tirantes, foram associados aos respetivos elementos a matriz de rigidez de um elemento rotulado-rotulado (3.92).

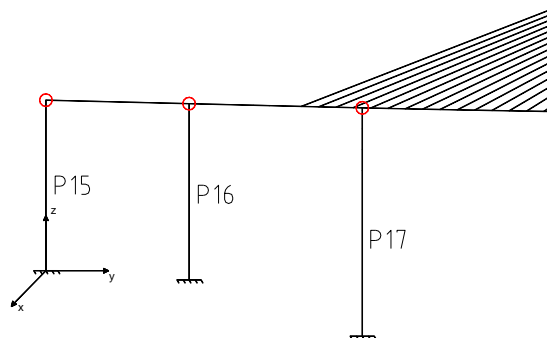


Figura 5.10 - Representação dos nós onde se simula o aparelho de apoio, através das libertações internas.

5.3.5 Secções 3D

Ao modelo de EF de barra, foi adicionada a possibilidade de se associar os deslocamentos modais de um determinado nó da estrutura, a uma secção tridimensional do elemento estrutural correspondente (A.I.4). Visto que a secção instrumentada do viaduto, durante o ensaio de vibração, foi a secção de meio vão do tabuleiro, esta foi a primeira representação 3D a ser criada. Posteriormente optou-se também por criar secções 3D dos pilares de secção constante (Figura 5.11).

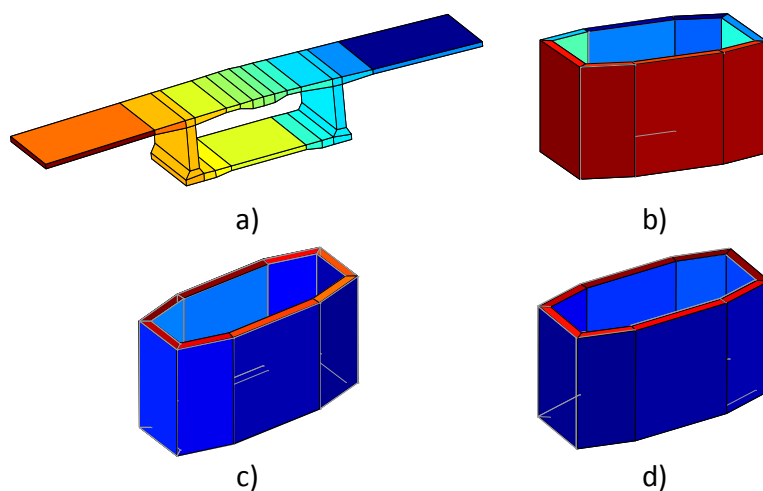


Figura 5.11 - Representação tridimensional das secções: a) tabuleiro; b) pilares 15 e 22; c) pilares 16 e 21; d) pilares 17 e 20.

5.4 Registo de vibração ambiental com acelerómetros

Pretende-se com este trabalho, interpretar a resposta dinâmica do viaduto do Corgo, através de registos medidos durante os ensaios de vibração (Figura 5.12), efetuados nos dias 27 de Junho e 29 e 30 de Julho de 2013. O critério adotado para a instalação dos acelerómetros teve como base o aproveitamento do local de instalação dos instrumentos para a medição de deslocamentos, no âmbito do projeto “Integração de dados GNSS e de acelerómetros na monitorização de grandes estruturas” (FEUP-LNEC), na altura dos ensaios de carga.



Figura 5.12 - Medição de vibrações durante os ensaios de carga, no viaduto do Corgo (Wenzel & Pichler, 2005).

Foram então obtidos, através de 5 acelerómetros uniaxiais (Kinematics) e 1 triaxial (Nanometrics) instalados na secção de meio vão do SVC, vários acelerogramas de vibração ambiental (Figura 5.13). Os acelerómetros uniaxiais 1, 2 e 5, mediram as acelerações de vibração no eixo Z (eixo vertical), o acelerómetro uniaxial 3 mediu as acelerações no eixo Y (eixo transversal) e o acelerómetro uniaxial 4 mediu as acelerações no eixo X (eixo longitudinal). Desta forma, obtiveram-se cinco séries de registos de acelerações de durações entre os 8 e os 30 minutos, em cada uma das direções, com uma frequência de amostragem de 250 Hz. Por outro lado, o acelerómetro triaxial (Figura 5.13) criou três séries de registos, uma em cada direção, também com uma frequência de amostragem de 250 Hz. Sabendo que a frequência é igual à inversa do período de uma onda, obtém-se:

$$f_{\text{ams}} = \frac{1}{T} \Leftrightarrow f_{\text{ams}} = \frac{1}{\Delta t} \Leftrightarrow \Delta t = \frac{1}{250} = 0,004\text{s} \quad (4.3)$$

Quer isto dizer que, em cada 0,004s os acelerómetros registam o valor da aceleração medida, repetindo-se este processo durante o tempo de medição. Esta informação é registada em formato de texto, com duas colunas em que a primeira regista os instantes de tempo, em segundos, e a segunda as acelerações medidas correspondentes.

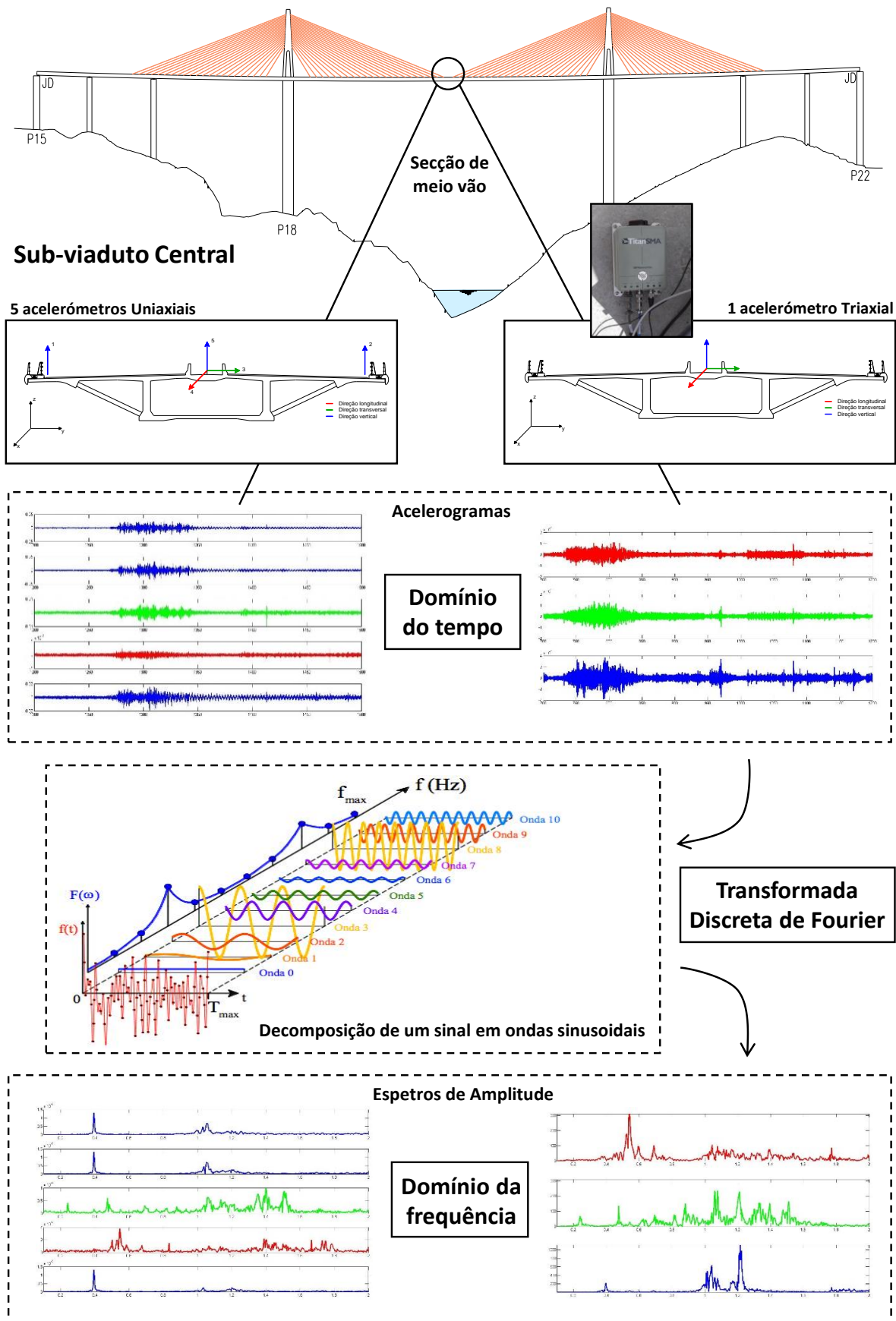


Figura 5.13 - Ensaio de vibração. Medição de acelerações na secção de meio vão do Sub-viaduto central do viaduto do Corgo. Conversão de sinal do domínio do tempo (acelerogramas) para o domínio da frequência (espetros de amplitude) através da Transformada Discreta de Fourier.

5.5 Análise de resultados. Comparação entre experimentais e numéricos

Através dos registos de acelerações obtidos na secção de meio vão, foi possível obter as frequências naturais e a configuração de alguns dos principais modos de vibração da estrutura. À partida conhecia-se apenas a informação acerca dos primeiros três modos da estrutura, calculados numericamente na fase de projeto (Figura 5.14). Procura-se então perceber a relação entre os valores dos parâmetros modais obtidos com base nos modelos de identificação modal (Magalhães, 2004) e os correspondentes valores obtidos numericamente com base no modelos de EF.

Em fase de exploração, os modos mais significativos são:

- o 1º modo de flexão longitudinal dos pilares e tabuleiro, $f = 0.215$ Hz;
- o 2º modo de flexão transversal dos pilares com flexão simétrica do tabuleiro, $f = 0.235$ Hz;
- o 3º modo que associa a flexão transversal dos pilares e a flexão anti-simétrica do tabuleiro, $f = 0.315$ Hz.



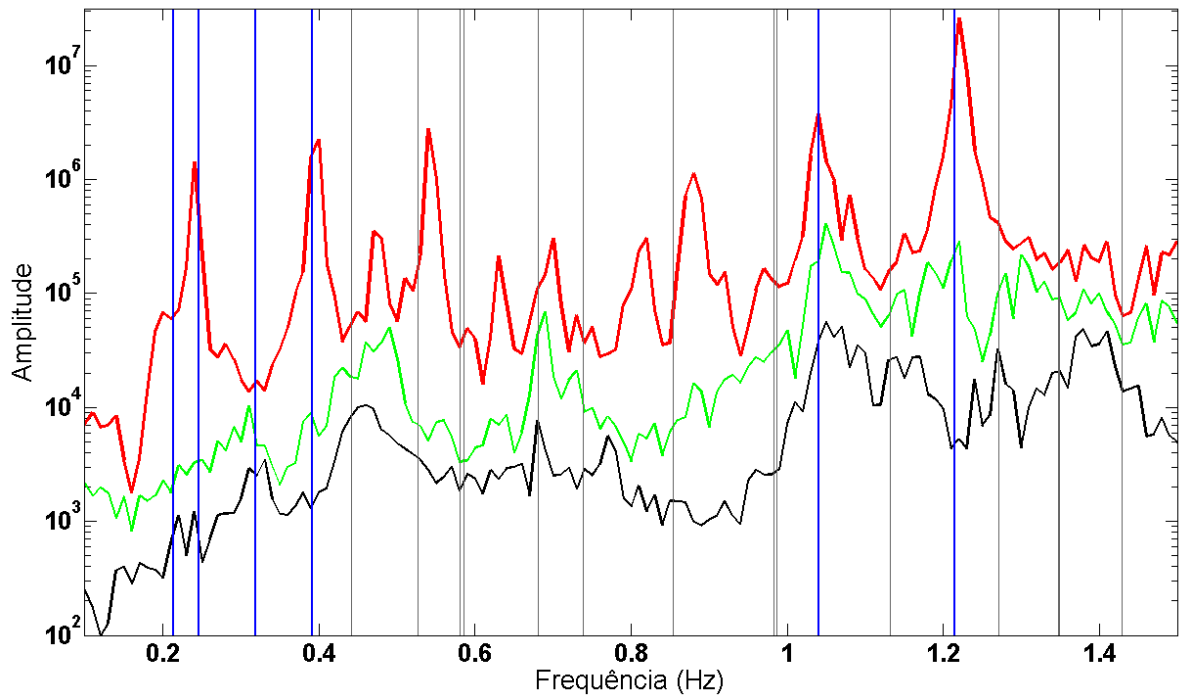
Figura 5.14 - Configurações modais de projeto dos primeiros três modos de vibração (Barata, 2012).

Na Figura 5.15a, apresentam-se os espetros dos valores singulares da matriz da DEP (3x3), correspondente aos três canais do acelerómetro triaxial atrás referido (acelerómetro Nanometrics de grande sensibilidade, calibrado para +/-1/8g, 24 bits). Utilizam-se registos de acelerações com duração de 1400 segundos, analisados através da técnica de médias espectrais, considerando janelas temporais de 100 segundos com sobreposição de 50%. Nesta figura apresentam-se também as frequências naturais calculadas com o programa **DynBridges 1.0** (linhas verticais), sendo notório o bom acordo entre os primeiros picos espectrais (cuja abcissa corresponde às frequências dos primeiros modos de vibração da estrutura) e as primeiras frequências naturais calculadas com o modelo, em particular o bom acordo para o caso das frequências do segundo e quarto modos. Para o primeiro modo é notório um pequeno pico espectral na frequência 0,20 Hz enquanto o valor calculado é de 0,214 Hz. Este pico espectral, apesar de ser claramente visível, tem uma amplitude relativamente baixa, dado que corresponde a um modo ao qual estão associados movimentos oscilatórios longitudinais do tabuleiro e que, para as condições de excitação na altura do ensaio, eram bastante reduzidos. Nas frequências 0,4 Hz, 1,05 Hz e 1,22 Hz, ocorrem 3 picos espectrais, verificando-se um bom acordo com as calculadas no **DynBridges 1.0**. Estes modos correspondem a movimentos oscilatórios verticais desta secção do tabuleiro (Figura 5.16).

Na Figura 5.15b, apresentam-se os espectros dos valores singulares da matriz da DEP (5x5), correspondente aos cinco acelerómetros uniaxiais (acelerómetros Kinematics, calibrados para +/-1/4g, 19 bits) atrás referidos. Utilizam-se registos de acelerações com duração de 800 segundos, analisados através da técnica de médias espectrais, considerando janelas temporais de 100 segundos com sobreposição de 50%. Nesta figura apresentam-se também as frequências naturais calculadas com o programa **DynBridges 1.0** (linhas verticais), sendo notório o bom acordo entre os primeiros picos espectrais e as primeiras frequências naturais calculadas com o modelo. O pico espectral correspondente à frequência do primeiro modo de vibração ocorre para a frequência de 0,21 Hz, que é um valor bastante próximo do valor 0,214 Hz calculado numericamente com o **DynBridges 1.0**. Este pico espectral, contudo, tem uma amplitude bastante baixa, mais uma vez pelas razões descritas anteriormente, para o acelerómetro triaxial. Nas frequências 0,4 Hz, 1,05 Hz e 1,22 Hz, ocorrem, de novo, 3 picos espectrais, verificando-se um bom acordo com as calculadas no **DynBridges 1.0**. Estes modos correspondem a movimentos oscilatórios verticais desta secção do tabuleiro.

ESPETROS DE VALORES SINGULARES

a) ACCELERÓMETRO TRIAXIAL



b) ACCELERÓMETROS UNIAXIAIS

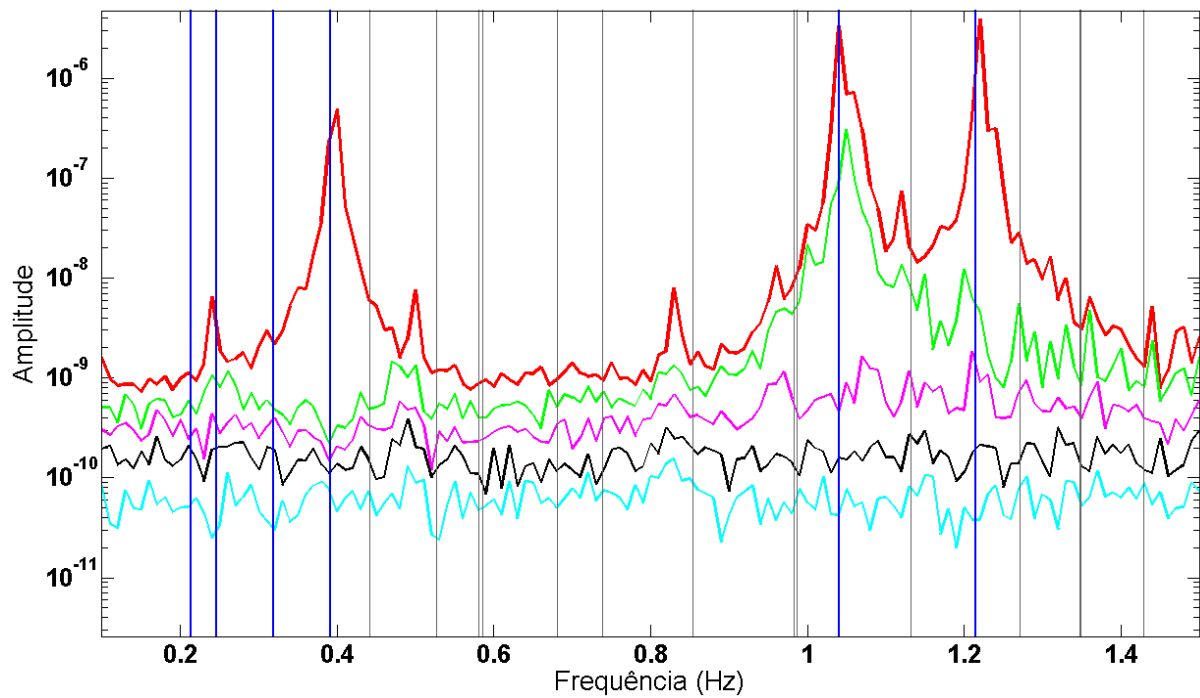
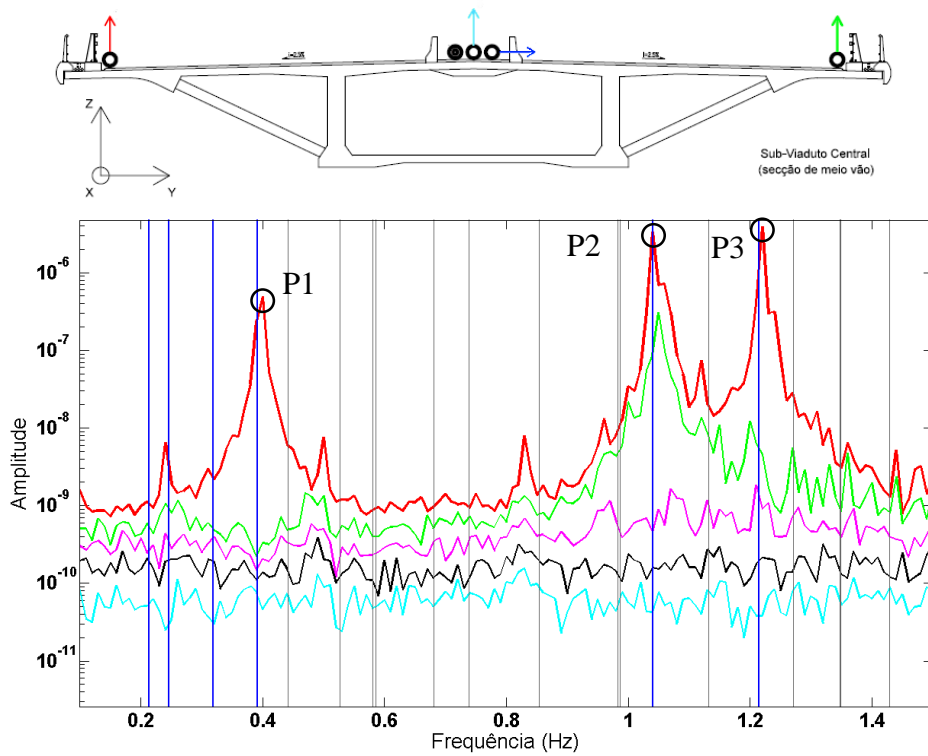
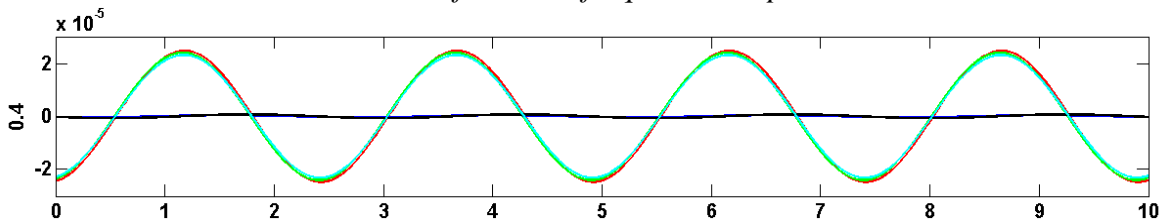


Figura 5.15 - Espectros de valores singulares de 0,1 a 1,5 Hz. As linhas verticais representam as frequências obtidas através do programa DynBridges 1.0: a) acelerómetro triaxial; b) acelerómetros uniaxiais (cinco).

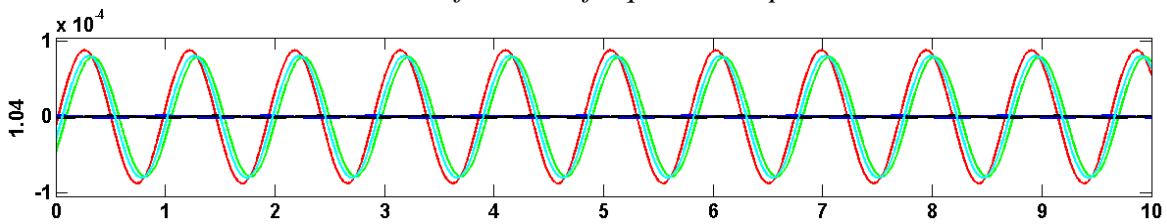
Identificação de configurações modais



Modo identificado na frequência do pico P1



Modo identificado na frequência do pico P2



Modo identificado na frequência do pico P3

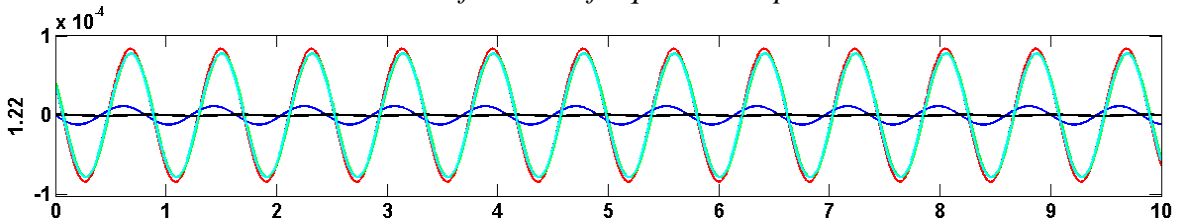


Figura 5.16 - Identificação das configurações modais (representação das oscilações através de ondas harmônicas), correspondentes às frequências dos três picos de maior amplitude, no espectro do primeiro valor singular da matriz DEP 5x5 (considerando os cinco acelerômetros uniaxiais).

Modo 1

Devido às dificuldades em obter registos de vibração do viaduto na direção longitudinal, por ser um modo difícil de excitar, obteve-se um pico, no espectro de valores singulares, na frequência 0,20 Hz, mas com amplitude relativamente baixa (Figura 5.17).

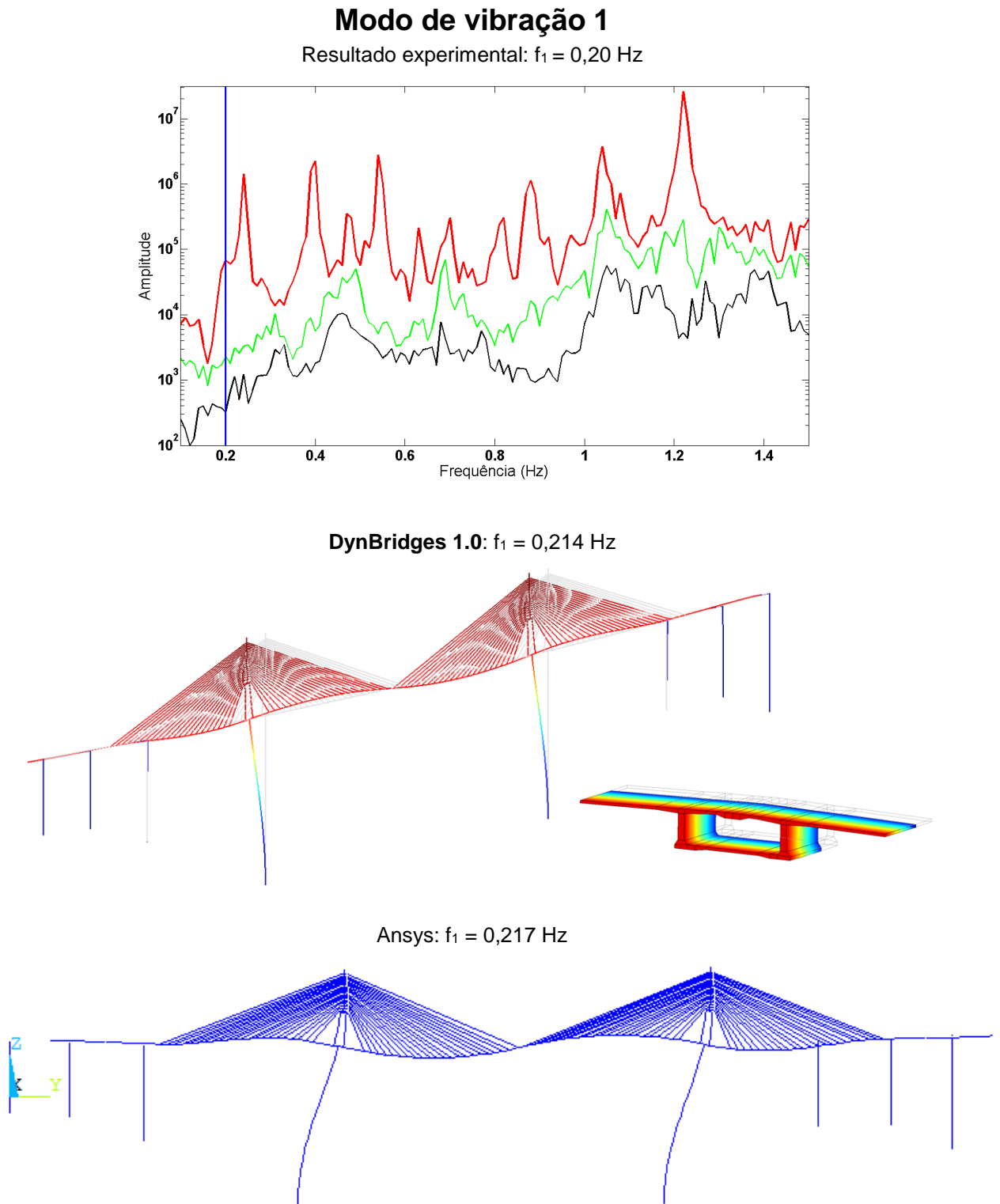


Figura 5.17 - Modo de vibração 1. Flexão longitudinal dos pilares e tabuleiro. Comparação entre resultados experimentais e numéricos.

Modo 2

O pico de frequência 0,24 Hz destaca-se em todos os espectros de amplitudes obtidos. Neste modo, o movimento da secção de meio vão tem a direção transversal, tal como se pode verificar pelos modelos numéricos (Figura 5.18). Destacam-se alguns dos resultados obtidos, utilizando uma janela de acelerograma de 590 segundos (Figura 5.19a).

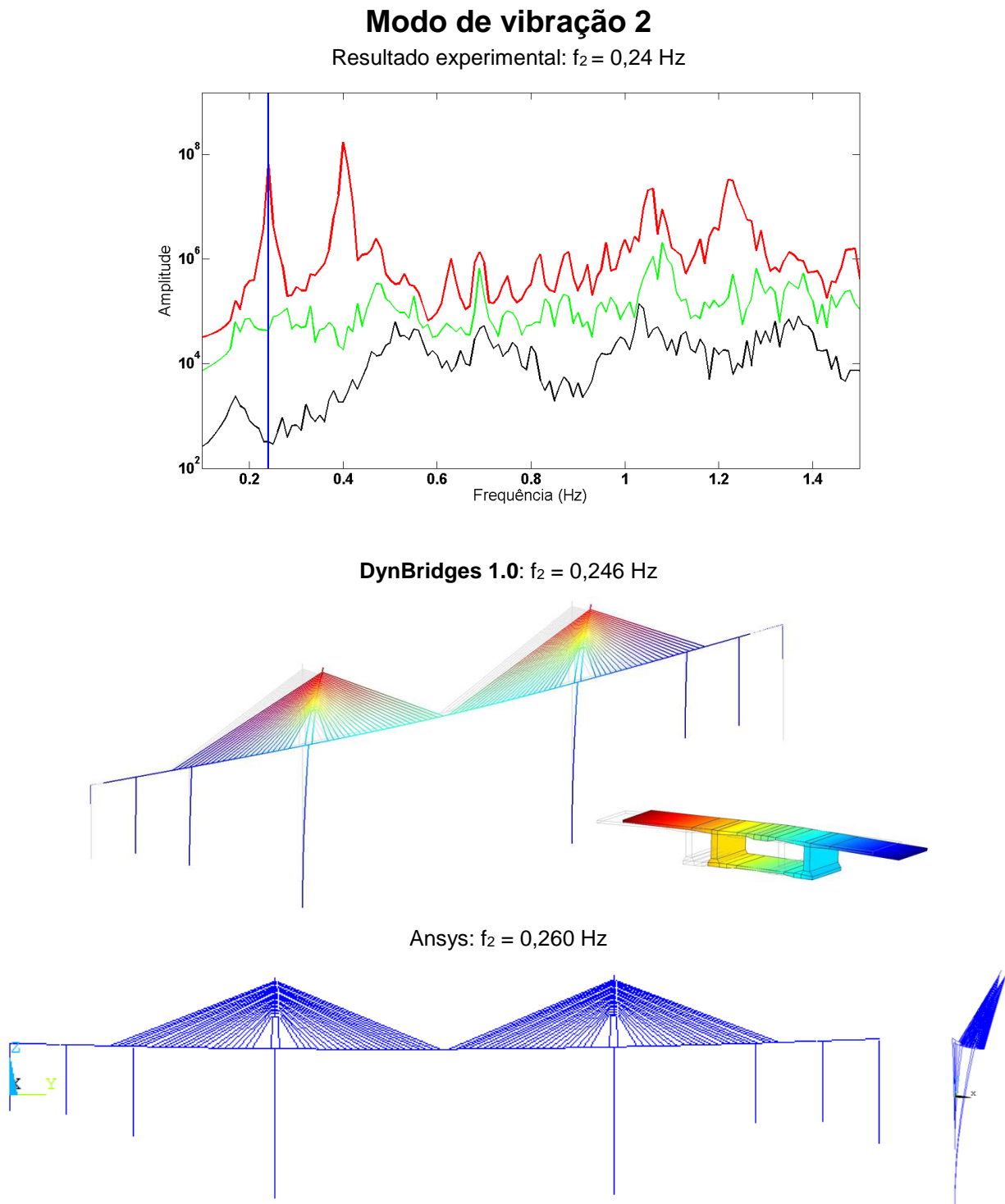
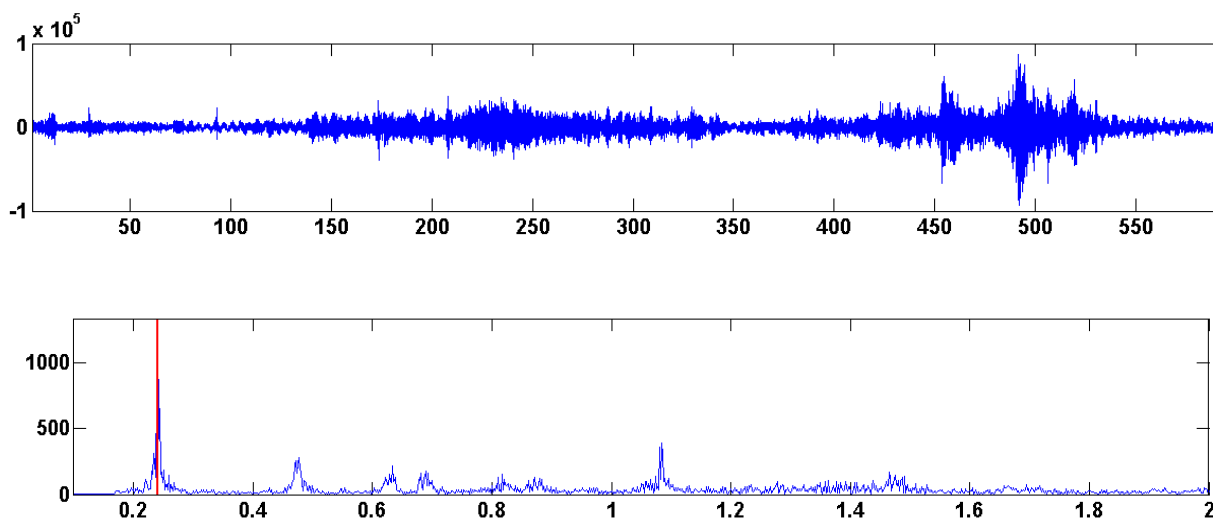


Figura 5.18 - Modo de vibração 2. Flexão transversal dos pilares com flexão simétrica do tabuleiro. Comparação entre resultados experimentais e numéricos.

O seguinte espectro de resposta, na direção transversal, mostra um pico destacado na frequência 0,24 Hz. Na Figura 5.19b é possível observar as ondas de frequência 0,24 Hz onde se pode ver que apenas a onda da direção transversal tem movimento. Quer isto dizer que a secção de meio vão, neste modo, tem apenas movimento transversal.

Acelerómetro Triaxial

a) ACELEROGRAMA E ESPETRO NA DIREÇÃO TRANSVERSAL



b) ONDAS NOS TRÊS CANAIS CORRESPONDENTES À FREQUÊNCIA DO PICO DE MAIOR AMPLITUDE (destaca-se apenas a onda na direção transversal)

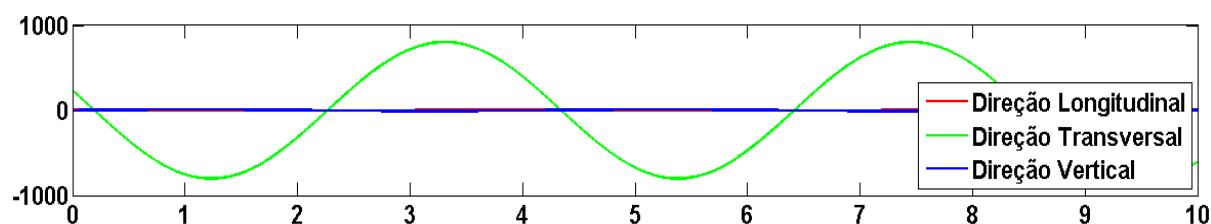


Figura 5.19 - Acelerómetro triaxial: a) acelerograma e espectro na direção transversal (dia 27 às 10h05m);
b) ondas identificadas nos três canais.

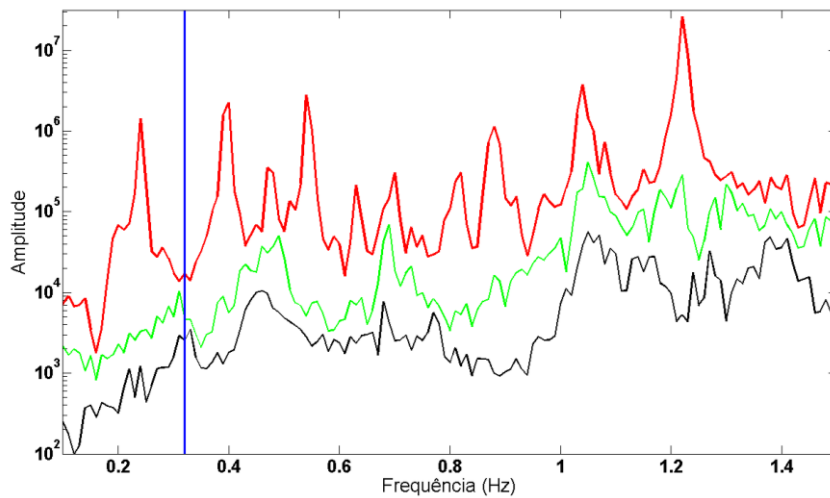
Modo 3

De acordo com o modelo numérico, para este modo, não ocorrem movimentos oscilatórios na secção central (Figura 5.20), o que foi confirmado pelos resultados experimentais, dado que no espectro dos valores singulares (DEP 3x3 do acelerómetro triaxial), não surge nenhum pico na frequência do terceiro modo calculado pelo modelo numérico (**DynBridges 1.0**: 0,318 Hz).

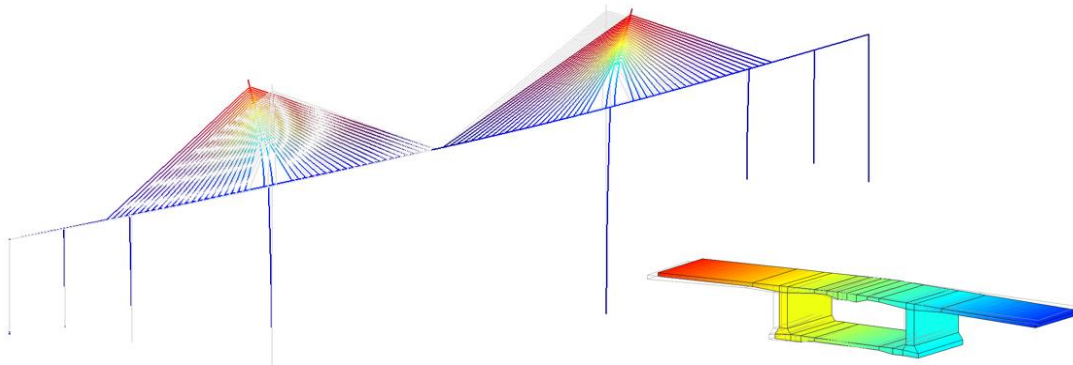
Modo de vibração 3

Resultado experimental:

Não é identificado um pico na frequência do terceiro modo calculado pelo modelo numérico.



DynBridges 1.0: $f_3 = 0,318$ Hz



Ansys: $f_3 = 0,360$ Hz

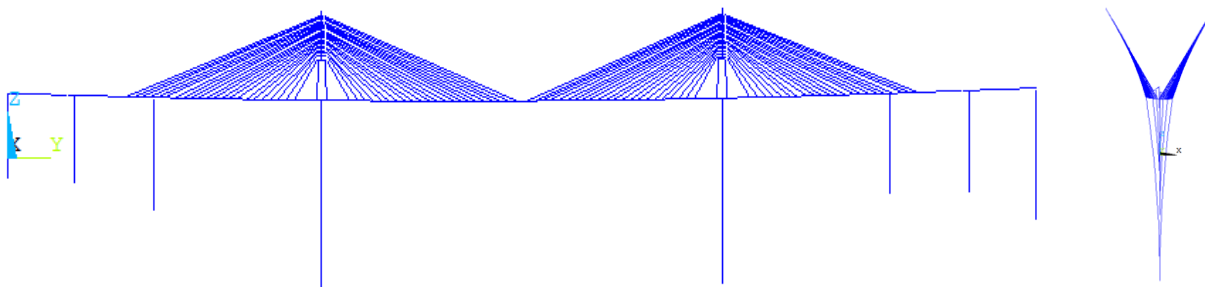


Figura 5.20 - Modo de vibração 3. Flexão transversal dos pilares e flexão antissimétrica do tabuleiro. Comparação entre resultados experimentais e numéricos.

Modo 4

O quarto modo foi facilmente identificado. Destacaram-se os picos de frequência nos espectros calculados, bem como foi evidente a configuração modal nessa secção. Verifica-se um pico no espectro dos valores singulares na frequência 0,4 Hz (Figura 5.21).

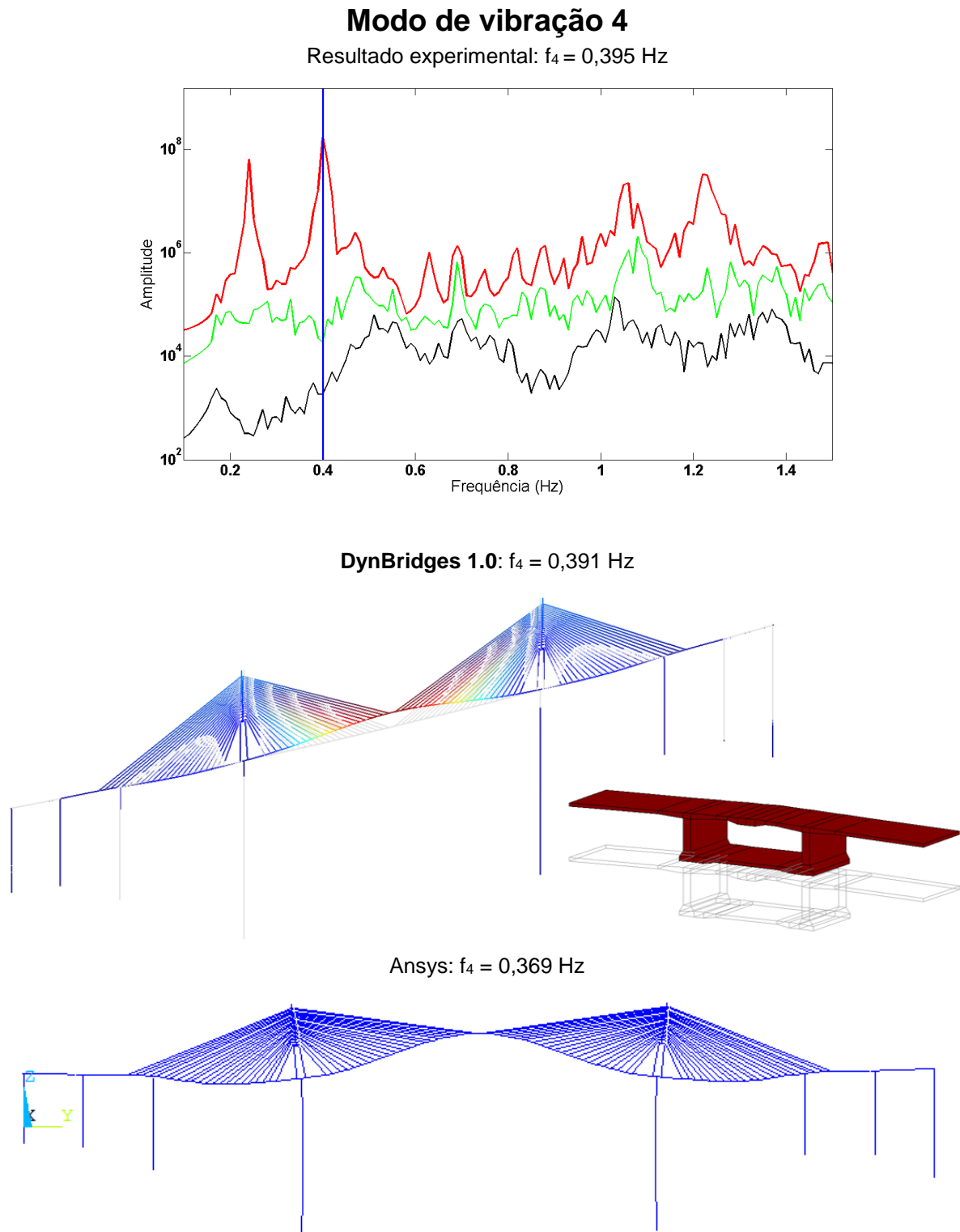
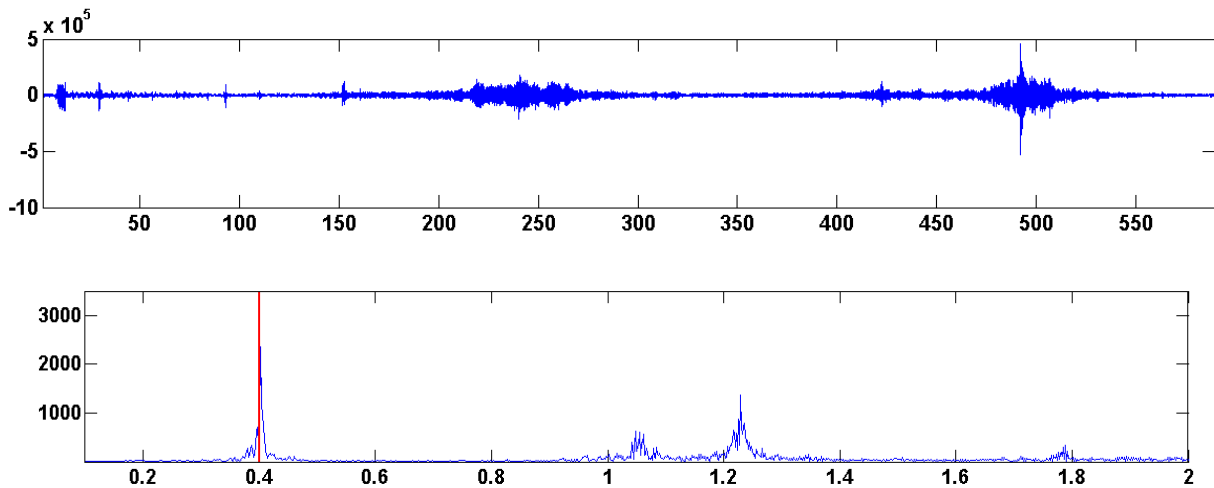


Figura 5.21 - Modo de vibração 4. Flexão longitudinal do tabuleiro. Comparação entre resultados experimentais e numéricos.

Verifica-se que, das três ondas de frequência 0,4 Hz, apenas a onda da direção vertical não tem amplitude nula (Figura 5.22a). Isto diz-nos que a secção de meio vão, para este modo, tem apenas movimento vertical.

Acelerómetro Triaxial

a) ACELEROGRAMA E ESPETRO NA DIREÇÃO VERTICAL



b) ONDAS NOS TRÊS CANAIS CORRESPONDENTES À FREQUÊNCIA DO PICO DE MAIOR AMPLITUDE (destaca-se apenas a onda na direção vertical)

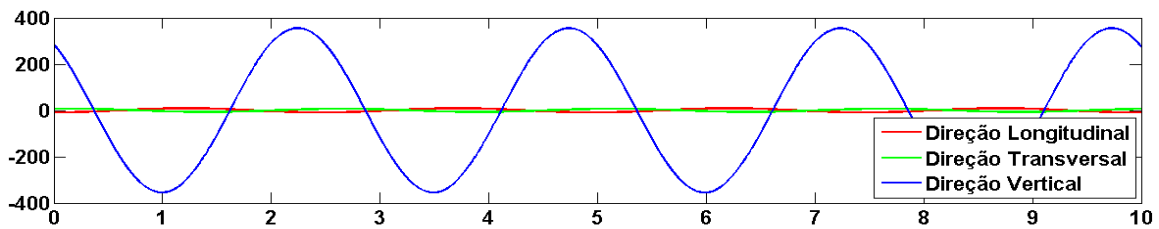


Figura 5.22 - Acelerómetro triaxial: a) acelerograma e espectro na direção vertical (dia 27 às 10h05m);

b) ondas identificadas nos três canais.

Modo 5

O quinto modo foi facilmente identificado. Destacaram-se os picos de frequência nos espectros calculados, bem como foi evidente a configuração modal nessa seção. Verifica-se um pico no espectro dos valores singulares na frequência 0,47 Hz (Figura 5.21).

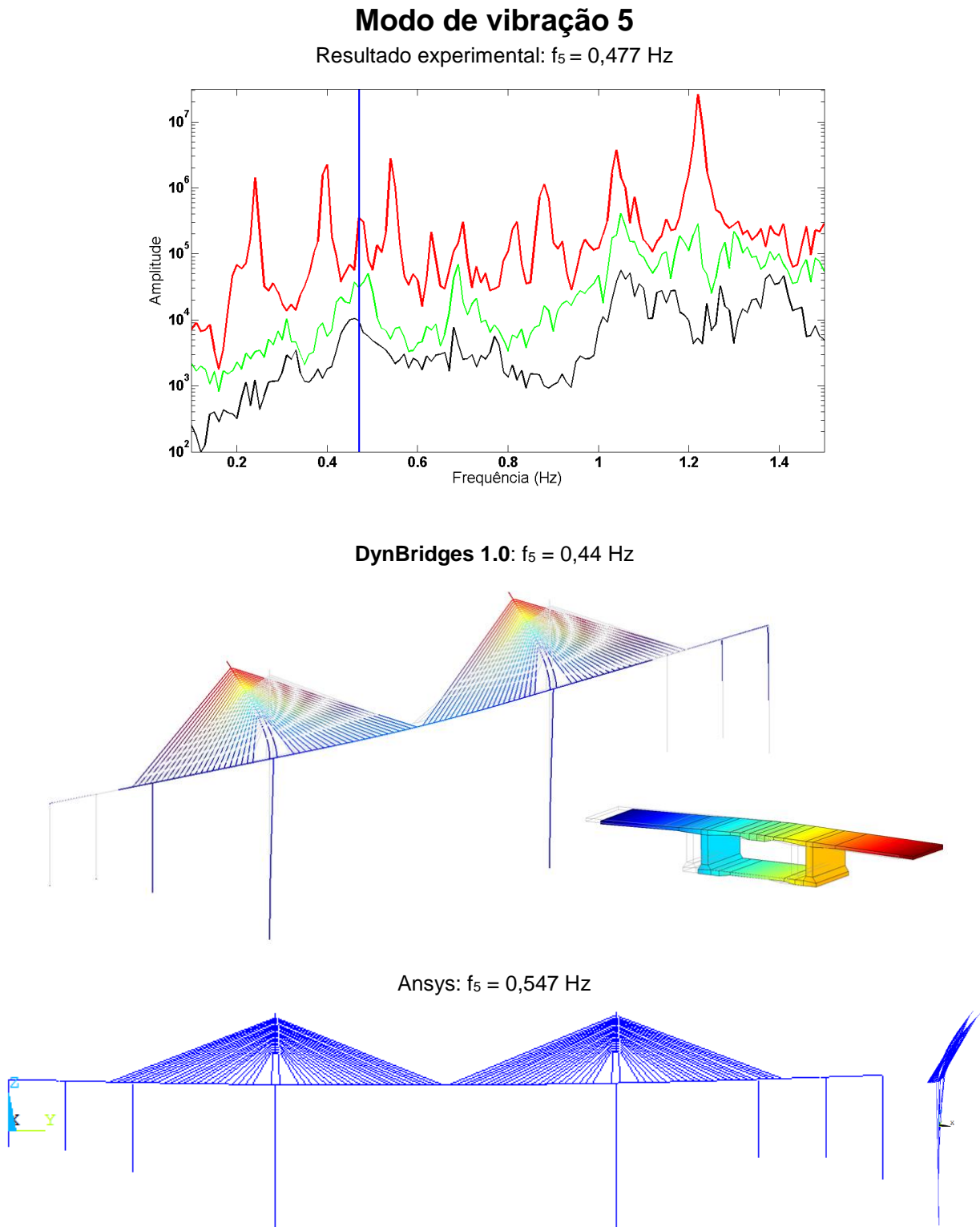
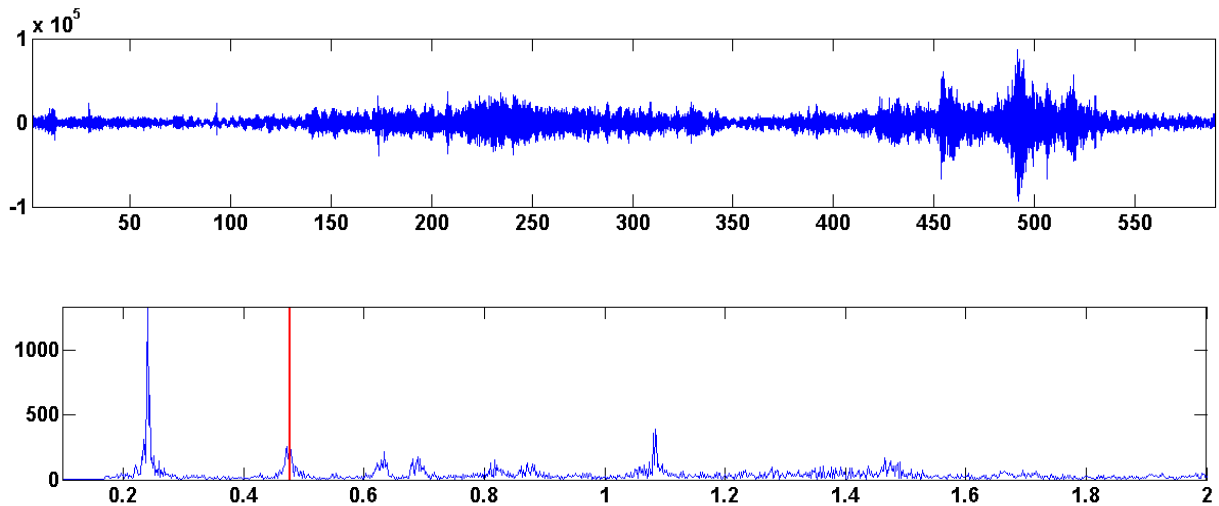


Figura 5.23 - Modo de vibração 5. Flexão transversal dos mastros. Comparação entre resultados experimentais e numéricos.

Verifica-se que, das três ondas de frequência 0,477 Hz, apenas a onda da direção transversal não tem amplitude nula (Figura 5.22a). Isto diz-nos que a secção de meio vão, para este modo, tem apenas movimento transversal.

Acelerómetro Triaxial

a) ACELEROGRAMA E ESPETRO NA DIREÇÃO TRANSVERSAL



b) ONDAS NOS TRÊS CANAIS CORRESPONDENTES À FREQUÊNCIA DO PICO DE MAIOR AMPLITUDE (destaca-se apenas a onda na direção transversal)

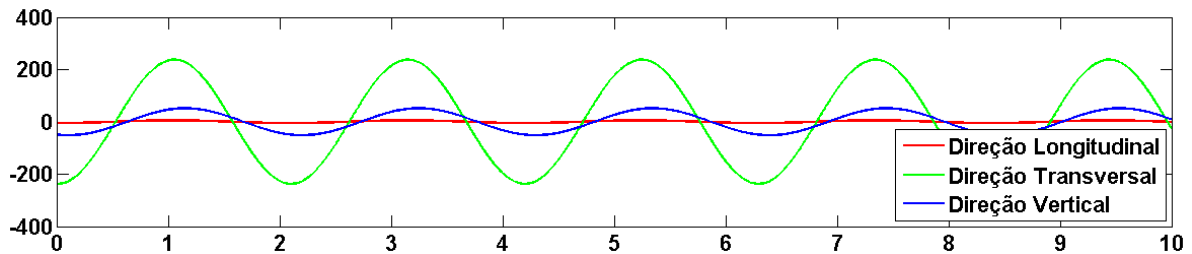


Figura 5.24 - Acelerómetro triaxial: a) acelerograma e espectro na direção transversal (dia 27 às 10h05m);
b) ondas identificadas nos três canais.

5.6 Considerações finais

Através da comparação entre resultados numéricos e experimentais, correspondentes à medição de vibrações (acelerações) apenas na secção central, é possível concluir que o comportamento dinâmico observado do viaduto do Corgo corresponde ao previsto no projeto, observando-se resultados de frequências naturais e modos de vibração muito parecidos com os valores do modelo numérico desenvolvido neste trabalho (com base no modelo do projeto). Dessa forma, conclui-se que as características geométricas da estrutura, as condições de apoio e os módulos de elasticidade dos materiais (betão e aço), da obra construída, correspondem ao previsto na fase de projeto.

Apesar de se conhecer apenas a informação acerca das configurações modais e frequências naturais dos três primeiros modos de vibração do projeto, a modelação do viaduto nos programas **DynBridges 1.0** e ANSYS permitiu confirmar o bom acordo entre os resultados numéricos e experimentais (frequências naturais e configurações modais), para os modos de vibração com frequências até 1,5 Hz (20 modos). A referida comparação entre resultados experimentais de modelos de identificação modal e resultados numéricos de modelos de elementos finitos (EF barra 3D), permite a calibração dos modelos numéricos, o que é fundamental para utilização futura em análises estruturais sob ações sísmicas ou do vento.

6

Conclusões

“Never tell people how to do things. Tell them what to do, and they will surprise you with their ingenuity.”

- George S. Patton

Com base na análise dos resultados obtidos em ensaios de vibração ambiente realizados no viaduto do Corgo, nos quais foram medidas acelerações na secção de meio vão do SVC, mostrou-se que, instrumentando apenas a referida secção, é possível obter resultados com interesse para a calibração dos modelos numéricos. Estes modelos poderão ser utilizados, futuramente, na simulação do comportamento dinâmico da obra, sob ações correntes e excepcionais (vento ou sismos de grande intensidade) com vista ao controlo da segurança.

Foi desenvolvido em MATLAB o programa **DynBridges1.0** (EF barra 3D) para cálculo dinâmico do viaduto, cujos modos de vibração calculados são globalmente representados com base em animações 3D, assim como as oscilações da secção instrumentada. Utilizou-se um método de identificação modal baseado no cálculo dos valores e vetores singulares da matriz DEP, com o qual se analisaram os registos de acelerações obtidos em cinco acelerómetros uniaxiais e num triaxial.

O comportamento dinâmico do viaduto foi também estudado com o programa ANSYS. As configurações modais identificadas experimentalmente foram comparadas com as obtidas com os dois programas referidos tendo-se conseguido um bom acordo entre os resultados experimentais e numéricos.

Bibliografia

- Andersen, P., Brincker, R., Goursat, M., & Mevel, L. (2007). *Automated modal parameter estimation for operational modal analysis of large system*. Copenhagen, Dinamarca.
- Andersen, P., Brincker, R., Ventura, C., & Cantieni, R. (2008). *Mode estimation of civil structures subjected to ambient and harmonic excitation*. Florida, USA.
- ANSYS, I. (2012). *ANSYS Mechanical APDL Element Reference*.
- ANSYS, I. (2012). *ANSYS MEchanical APDL Structural Analysis Guide*.
- Barata, V. (2012). Viaduto do Corgo da A.E. Transmontana. *Encontro Nacional BETÃO ESTRUTURAL - BE2012*. Porto.
- Bendat, J. S.; Piersol, A. G. (1980). *Engineering Applications of Correlation And Spectral Analysis*. New York: John Wiley & Sons.
- Caetano, E. (1992). *Identificação experimental de parâmetros dinâmicos em sistemas estruturais*. Porto, Portugal.
- Caetano, E. (2000). *Dynamic of Cable-stayed Bridges: Experimental assessment of cable-structure interaction*. Porto, Portugal.
- Caetano, E. (2007). *Cable Vibrations in Cable-Stayed Bridges*.
- Carvalho, F., Oliveira Costa, C., & Schiappa de Azevedo, F. (1989). *Elementos de Sistemas e de Análise e Processamento de Sinais*. Lisboa: LNEC.
- Chatterjee, S. (2003). *The Design of Modern Steel Bridges*.
- Chopra, A. (1995). *Dynamic of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering*. New Jersey.
- Corrêa, M., & Costa, A. (1992). *Ensaios dinâmicos da ponte sobre o Rio Arade. Portugal: pontes atirantadas do Guadiana e do Arade*. Lisboa, Portugal.
- Costa, A., & Rodrigues, C. (2001). *Structural health assessment of bridges by monitoring their dynamic characteristics*. Porto, Portugal.
- Costa, F., Pinto, T., Buescu, J., & Oliveira, S. (2013). *Matemática do Planeta Terra*.
- Cunha, Á., & Caetano, E. (2006). *Experimental modal analysis of civil engineering structures*. Porto, Portugal.
- Cunha, Á., Caetano, E., Brincker, R., & Andersen, P. (2004). *Identification from the natural response of Vasco da Gama bridge*. Detroit, USA.
- Faria, A. (2010). *Avaliação do desempenho de sistemas de monitorização de estruturas*. Porto.
- Félix, C. (2004). *Monitorização e análise do comportamento de obras de arte*.
- Fernandes, J., & Santos, L. O. (1995). Analysis and observation of Guadiana and Arade cable-stayed bridges. *EPMESC V, In EPMESC V - The 5th International Conference on Enhancement and Promotion of Computational Methods in Engineering and Science*. Macao.

- Fujino, Y., Kimura, K., & Tanaka, H. (2012). *Wind Resistant Design of Bridges in Japan*.
- Jurado, J., Hernández, S., Nieto, F., & Mosquera, A. (2011). *Bridge Aeroelasticity - Sensitivity Analysis and Optimal Design*.
- Lélé, G. (2009). *Cálculo automático de estruturas. Análise estrutural de Pórticos Tridimensionais*.
- Magalhães, F. (2004). *Identificação Modal Estocástica para validação experimental de Modelos Numéricos*. Porto, Portugal.
- Mendes, P. (2010). *Observação e análise do comportamento dinâmico de barragens de betão*.
- Newland, D. (1975). *Random vibrations and spectral analysis*. London: LONGMAN GROUP LIMITED.
- Oliveira, S. (2013). Análise de Fourier e Aplicações em Dinâmica de Estruturas. In F. Pestana da Costa, J. Pinto, & J. Buescu, *Matemática do Planeta Terra* (pp. 235-284). Lisboa.
- Rodrigues, J., & Min, X. S. (2005). Modal identification from ambient vibration tests on a cable-stayed bridge. *EURODYN 2005 - 6th European Conference on Structural Dynamics*. Paris.
- Santos, L. O., Rodrigues, J., Min, X., & Fernandes, J. (2004). Static and dynamic tests on Salgueiro Maia cable-stayed bridge. *2th International Conference on Bridge Maintenance, Safety and Management - IABMAS'04, In Bridge Maintenance, Safety and Management*. Kyoto.
- Shin, K., & Hammond, J. (2008). *Fundamentals of Signal Processing for Sound and Vibration Engineers*.
- Vaseghi, S. (2008). *Advanced Digital Signal Processing and Noise Reduction*.
- Walther, R., Houriet, B., Isler, W., Moia, P., & Klein, J.-F. (1999). *Cable-Stayed Bridges*.
- Welch, P. (1967). *The use of Fast Fourier Transform for the estimation of Power Spectra: a Method based on the averaging over short modified periodograms*. IEEE Transation on Audio and Electro-Acoustics, AU-15(2).
- Wenzel, H., & Pichler, D. (2005). *Ambient Vibration Monitoring*.
- Xanthakos, P. (1994). *Theory and Design of Bridges*.

Anexos
