

RACIOCÍNIO QUANTITATIVO ADITIVO DE ALUNOS DE 2.º ANO: A IMPORTÂNCIA DAS REPRESENTAÇÕES

Margarida Rodrigues

Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa
Unidade de Investigação do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
margaridar@eselx.ipl.pt

Lurdes Serrazina

Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa
Unidade de Investigação do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
lurdess@eselx.ipl.pt

Resumo: Neste artigo, pretendemos identificar tipos de representação usados pelos alunos na resolução de duas tarefas que apresentam problemas de transformação, e através da sua análise, discutir o seu papel bem como alguns dos aspetos do raciocínio quantitativo aditivo dos alunos. Começando por discutir o que se entende por raciocínio quantitativo aditivo e por representação matemática, apresentamos depois alguns resultados empíricos no contexto de uma experiência de ensino desenvolvida numa escola pública. Os resultados evidenciam a complexidade inerente ao raciocínio inversivo presente nas duas situações propostas aos alunos. A maioria dos alunos utiliza preferencialmente a representação simbólica, recorrendo também à linguagem oral e escrita como forma de exprimir o significado atribuído às suas resoluções. A representação icónica foi usada apenas por um par de alunos, parecendo ter sido utilizada numa situação inicial de incompreensão do problema, e após registos simbólicos iniciais apagados pelos alunos em causa. O uso da linha numérica vazia e a disposição tabelar constituíram modelos de pensar auxiliando a lidar com a transformação inversa. As representações assumiram um duplo papel, o de serem meios de compreensão do raciocínio dos alunos, e também suportes do desenvolvimento do seu pensamento matemático.

Palavras-chave: representações matemáticas, problemas de transformação, raciocínio quantitativo aditivo, aprendizagem matemática.

Introdução

Esta comunicação insere-se no Projeto *Pensamento numérico e cálculo flexível: Aspetos críticos* que está a ser desenvolvido por docentes das Escolas Superiores de Educação de Lisboa, Setúbal e Portalegre. Tem como objetivo identificar tipos de representação matemática usados pelos alunos e analisar o seu papel, nomeadamente na compreensão de alguns aspetos do raciocínio quantitativo aditivo de alunos de 2.º ano, evidenciado na resolução de duas tarefas, concebidas com o propósito de desenvolver esse tipo de raciocínio, que apresentam problemas de transformação inseridos nas classes de procura

do estado inicial (Vergnaud, 2009). Foram propostas na mesma aula de Matemática e constituíram as últimas tarefas de uma sequência de seis tarefas que foi aplicada no contexto de uma experiência de ensino desenvolvida numa escola pública de Lisboa.

O raciocínio quantitativo no âmbito da estrutura aditiva foca-se sobretudo nas relações entre quantidades (Thompson, 1993). As representações estão interligadas ao raciocínio dada a relevância do seu papel na compreensão do raciocínio dos alunos (NCTM, 2007). Por outro lado, as representações também assumem um papel importante na aprendizagem dos alunos, constituindo meios cognitivos com que os mesmos desenvolvem o seu pensamento matemático (Gravemeijer, 2004; NCTM, 2007; Ponte & Serrazina, 2000). Assim, a análise de dados empíricos incidente nas representações visa apoiar a discussão das inferências que fazemos do raciocínio dos alunos mas também o seu papel no desenvolvimento pelos alunos desse mesmo raciocínio.

Raciocínio quantitativo aditivo

Enfatizando a distinção entre quantidade e número, Thompson (1993) define o raciocínio quantitativo como a análise de uma situação numa estrutura quantitativa, envolvendo as relações entre quantidades. Segundo o autor, uma quantidade é compreendida pelo indivíduo concebendo uma qualidade de um objeto de tal modo a compreender a possibilidade de a medir, mesmo na ausência de valores numéricos resultantes dessa medição. O autor clarifica, ainda, a noção de estrutura quantitativa enquanto uma rede de quantidades e de relações quantitativas.

Focando as operações quantitativas da estrutura aditiva, Thompson (1993) refere a comparação aditiva de duas quantidades para encontrar o excesso de uma em relação à outra, sendo que o resultado dessa operação constitui a diferença quantitativa, isto é, o excesso obtido. Trata-se de operações conceptuais intimamente ligadas ao raciocínio ancorado no significado (Thompson & Saldanha, 2003).

Esta perspetiva enquadra-se na investigação desenvolvida por outros educadores matemáticos, entre os quais se inclui Vergnaud (2011, 2009, 1996) que, no âmbito da sua teoria dos campos conceptuais, enquanto conjuntos de situações e de conceitos, apresenta uma categorização de relações aditivas bastante diversas e com diferentes graus de dificuldade: (i) composição; (ii) transformação; (iii) relação; (iv) composição de duas transformações; (v) transformação de uma relação; e (vi) composição de duas relações. De acordo com Vergnaud (1996), a partir destas seis relações é possível criar todos os problemas envolvendo a adição e a subtração da aritmética comum. No que respeita à relação de transformação de uma quantidade inicial, que envolve a dimensão temporal (presente nas situações de ganho ou perda de dinheiro, de berlindes, gasto de dinheiro em compras, etc.), podem ser criadas seis classes de problemas, visando encontrar: (i) o estado final, aumentando a quantidade inicial; (ii) o estado final, diminuindo a quantidade inicial; (iii) a transformação, quando o estado final é maior do que o inicial; (iv) a

transformação, quando o estado final é menor do que o inicial; (v) o estado inicial, aumentando o estado final; e (vi) o estado inicial, diminuindo o estado final (Vergnaud, 2009).

Segundo Vergnaud (2011), a procura de um estado inicial é uma situação delicada para muitas crianças até aos 8 anos de idade por implicar uma transformação inversa. Nunes, Bryant, Evans, Bell e Barros (2012) distinguem entre cálculo numérico e cálculo relacional. Consideram como Vergnaud (2009) que cálculo relacional significa a transformação e composição de relações dadas numa situação. Por exemplo, as duas situações exigem o mesmo cálculo numérico (24-6) e só a segunda exige efetivamente um cálculo relacional: “Tinha 24 euros, gastei 6. Quantos euros tenho agora?” e “A minha avó deu-me 6 euros e eu fiquei com 24 euros”. Quantos euros tinha eu antes?”. A primeira situação corresponde a “retirar” e normalmente exige pouco ou nenhum cálculo relacional. A segunda corresponde a um raciocínio aditivo e para os alunos a perceberem como um problema de subtração, têm de pensar na transformação que teve lugar (a minha avó deu-me 6 €) e considerar qual a transformação que repõe a quantidade de dinheiro no estado inicial, isto é, a transformação inversa. Nunes et al. (2012) consideram que a relação inversa entre adição e subtração é um aspeto importante quer do cálculo numérico quer do relacional. Também Greer (2012) sublinha a importância central da inversão na aritmética dos números naturais e das quatro operações básicas envolvendo estes números.

Representações matemáticas

Em sentido amplo, uma representação é uma configuração que pode representar alguma coisa de alguma forma (Goldin, 2008). O termo “representação” refere-se tanto ao processo de representar como ao resultado desse processo. Em educação matemática, as representações são ferramentas privilegiadas para os alunos exprimirem as suas ideias matemáticas, funcionando ainda como auxiliares na construção de novos conhecimentos (NCTM, 2007). Contudo, uma representação matemática não pode ser compreendida ou interpretada isoladamente, pois apenas faz sentido enquanto parte integrante de um sistema mais abrangente e estruturado no qual diferentes representações estão relacionadas (Goldin & Shteingold, 2001).

De acordo com Stylianou (2010), a forma como as representações são usadas na sala de aula tem impacto na aprendizagem dos alunos e isso depende em grande medida do papel do professor. Esta ideia é reforçada por Ponte e Serrazina (2000) quando afirmam que o modo como as ideias matemáticas são representadas influencia de maneira profunda a forma como elas são compreendidas e usadas. Por exemplo, segundo Vergnaud (2009), a transformação inversa pode ser representada por duas representações simbólicas -- a algébrica (Se $T(I)=F$ então $I=T^{-1}(F)$ ⁶) e o diagrama de setas -- considerando, no entanto,

⁶ T - Transformação; I - Estado Inicial; F - Estado Final; T^{-1} - Transformação Inversa.

que enquanto a representação algébrica não é adequada para crianças do ensino elementar, o uso pelo professor da representação do diagrama pode ajudar os alunos a ligar, de imediato, os diferentes componentes da relação, nomeadamente a transformação direta e a transformação inversa, e a conferir significado ao movimento temporal de ir para a frente e para trás. A Figura 1 apresenta um diagrama de setas representativo de subtrair 7 ao estado final na situação "João acabou de ganhar 7 berlindes ao jogar com a Maria; agora ele tem 11 berlindes; quantos berlindes ele tinha antes de começar a jogar?" (Vergnaud, 2009, pp. 86-87). No entanto, apesar de reconhecer a importância desta representação, o autor refere que a compreensão de que $+7$ e -7 são inversos um do outro passa pela exploração de diversos exemplos de situações deste tipo que permita a consciência da reciprocidade das transformações.

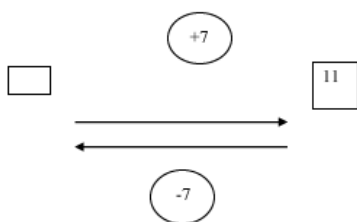


Figura 1: Diagrama de setas (Vergnaud, 2009, p. 87).

Para Ponte e Serrazina (2000), as principais formas de representação usadas no 1.º ciclo do ensino básico são: (i) a *linguagem oral e escrita*; (ii) *representações simbólicas*, como os algarismos ou os sinais das quatro operações e o sinal de igual; (iii) *representações icónicas*, como figuras, gráficos ou diagramas; e (iv) *representações ativas*, como os materiais manipuláveis ou outros objetos. É através da análise das representações usadas pelos alunos que o professor se pode aperceber do raciocínio dos alunos e ajudá-los na construção das representações próprias da linguagem matemática.

Gravemeijer (2004) sustenta que o professor deve ajudar os alunos a modelar a sua atividade matemática informal e que os modelos usados pelos alunos devem evoluir de *modelos de pensar* para *modelos para pensar*, possibilitando um raciocínio matemático mais formal. Na sua perspetiva, modelos são representações usadas para resolver problemas ou explorar relações. Enquanto o modelo de pensar constitui a representação das ações das crianças, apresentando elementos contextuais da situação, o modelo para pensar é um modelo generalizado de estratégias focado nas relações matemáticas. A linha numérica vazia é um exemplo de um modelo para pensar, na medida em que pode funcionar como um modelo para um raciocínio matemático mais sofisticado em que os números deixam de estar ligados a itens específicos contáveis ou a distâncias identificáveis para passarem a ser vistos como objetos matemáticos cujo significado deriva do seu lugar numa rede de relações numéricas. Por exemplo, os alunos podem usar diferentes representações na resolução do seguinte problema: "Um autocarro parte de uma paragem com 2 pessoas. Na paragem seguinte entram 3, na seguinte 2, depois quatro e na

última sai uma. Quantas pessoas continuam a viagem no autocarro?" (Figura 2). Enquanto a primeira imagem é um exemplo de um modelo de pensar, representando a situação concreta, a terceira imagem é um exemplo de modelo para pensar, na medida em que a linha numérica constitui um modelo generalizado de estratégias, independentemente da situação concreta de saídas e entradas de pessoas num autocarro, prevalecendo as relações numéricas.

Confrontando a classificação de representações proposta por Ponte e Serrazina (2000) e a proposta por Gravemeijer (2004), poderemos considerar que um modelo de pensar pode ser uma representação ativa (se envolver a manipulação de objetos) ou icónica (como exemplificado na primeira imagem da Figura 2), usando a terminologia de Ponte e Serrazina (2000). Quanto ao modelo para pensar, exemplificado pela linha numérica, consideramos tratar-se de uma representação simbólica.

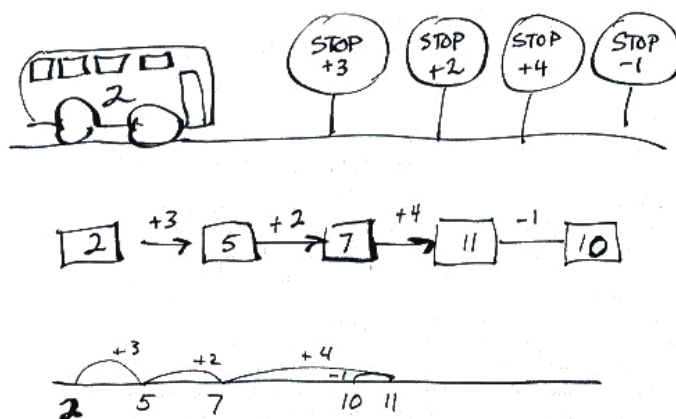


Figura 2: Exemplos de diferentes representações na resolução de um mesmo problema (Fosnot & Dolk, 2001, p. 84).

O NCTM (2007) ressalta ainda o papel das representações idiossincráticas construídas pelos alunos quando estão a resolver problemas e a investigar em matemática, na medida em que podem ajudá-los na compreensão e na resolução de problemas e proporcionar “formas significativas para registar um método de resolução e para o descrever aos outros” (p. 76). Observando estas representações, os professores e os investigadores podem compreender os modos de interpretar e de raciocinar dos alunos.

Metodologia

Este estudo segue uma abordagem qualitativa de carácter interpretativo. A sua metodologia de *design research* inscreve-se numa perspetiva de design da aprendizagem, visando produzir teorias locais de ensino e sequências de ensino que sejam recursos e referenciais disponíveis para informar as práticas dos professores e investigadores (Gravemeijer, 2015).

Os dados foram recolhidos numa turma do 2.º ano numa escola pública de um dos bairros da periferia de Lisboa. A equipa do projeto definiu uma sequência de tarefas com o objetivo de desenvolver a flexibilidade de cálculo em problemas de adição e subtração. O processo de elaboração das tarefas incluiu a testagem prévia de algumas (nomeadamente as focadas nesta comunicação), através de entrevistas clínicas, a alunos do mesmo ano de escolaridade. A sequência de tarefas foi previamente discutida e analisada em encontros com a professora da turma, tendo sido feitos pequenos ajustes.

A recolha de dados foi feita através de gravação em vídeo, posteriormente transcrita, e da observação participante das autoras deste artigo, que elaboraram notas de campo. Foram ainda recolhidos os registos escritos dos alunos. Todos estes dados foram analisados e triangulados.

Por razões éticas, os nomes dos alunos foram alterados, de modo a garantir a confidencialidade.

Nesta comunicação, analisamos a realização de duas tarefas (Figura 3) propostas na mesma aula aos alunos e apresentadas na mesma folha de papel, com espaço para a respetiva resolução. Não foram dispensados aos alunos materiais nem os alunos manifestaram vontade de os usar.

Jogo de berlindes I

A Ana e o Luís jogaram um jogo de berlindes juntos. No início, tinham ambos o mesmo número de berlindes.
A Ana ganhou 3 berlindes do Luís e ficou com 7.
Quantos berlindes tinha o Luís no final do jogo, sabendo que ele não ganhou berlindes?

Jogo de berlindes II

A Ana e o Luís fizeram um jogo de berlindes.
A Ana ganhou 6 berlindes do Luís e ficou com 10 berlindes no final do jogo.
O Luís não ganhou nada e ficou com 3 berlindes no final do jogo.
Compara o número de berlindes da Ana e do Luís antes do jogo e no final do jogo.

Figura 3: Tarefas realizadas.

Estas foram as últimas tarefas de uma sequência de seis tarefas exploradas pelos alunos. Com a exploração anterior de outras tarefas, os alunos já tinham trabalhado a relação entre ganhos e perdas no decurso de um jogo de berlindes, compreendendo que o que um jogador ganha, o outro perde. Todas as tarefas começaram por ser resolvidas a pares. Nesta aula, após todos os pares terem resolvido as duas tarefas, a professora promoveu uma discussão coletiva com toda a turma, a partir das resoluções de seis pares (três em cada tarefa) a quem propôs que fossem ao quadro apresentar os seus trabalhos.

Realização das tarefas

A professora distribuiu a folha com as tarefas pelos alunos e de seguida leu *Jogo de berlindes I* em voz alta. Perguntou depois aos alunos se tinham compreendido. Logo o Alexandre reagiu:

Alexandre: Não pode ser! Não faz sentido.... tem uma rasteira.

Esta reação inicial do Alexandre pode dever-se à estranheza de se desconhecer o número inicial de berlindes.

A professora voltou a ler de forma pausada e propôs aos alunos que resolvessem a tarefa a pares. Os alunos começaram a trabalhar.

Relativamente ao par formado pelo Alexandre e pela Rosa, estes alunos usaram representações simbólicas, começando por registar linhas numéricas representativas do ganho ou perda de berlindes respeitantes a cada um dos jogadores e depois as operações envolvidas na sua disposição horizontal. Alexandre usou as representações reproduzidas na Figura 4, captadas pelo registo vídeo. Rosa fez o mesmo, seguindo tudo o que fora registado pelo Alexandre.

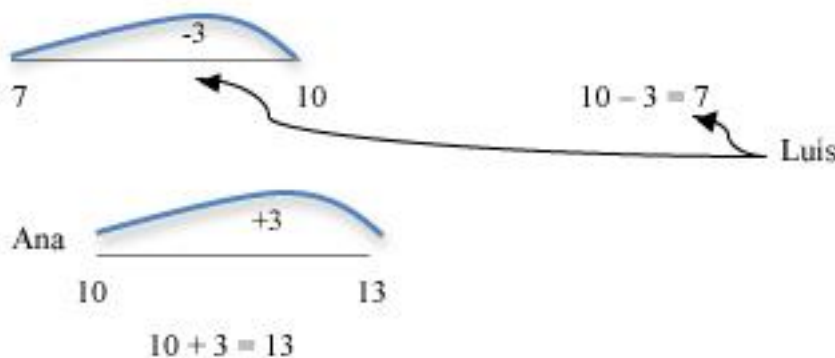


Figura 4: Primeiras representações simbólicas usadas pelo Alexandre em *Berlindes I*.

A resolução deste par evidencia a inversão do raciocínio como aspeto crítico. O facto de terem começado pelo registo referente ao jogador Luís pode dever-se à questão do problema focada no número de berlindes do Luís no final do jogo. Assim, embora iniciando o registo pelo Luís, provavelmente começaram por interpretar os dados relativos à jogadora Ana, assumindo 10 berlindes iniciais para ambos os jogadores a partir da soma de 3 (berlindes ganhos) com 7. Ou seja, operaram os dados contidos na frase "A Ana ganhou 3 berlindes do Luís e ficou com 7" de um modo linear, não mobilizando um raciocínio inversivo para determinarem o número inicial de berlindes. De referir ainda que embora as curvas representativas dos ganhos ou perdas não contenham setas, elas são assumidas pelos alunos com uma dada orientação já que os números são colocados pela ordem crescente: orientação da direita para a esquerda no caso da subtração e o inverso para a adição.

Ao serem interpelados pela professora, os dois alunos apagaram tudo e fizeram novo registo nas suas folhas de trabalho e que apresentaram no quadro durante a discussão (Figura 5), realizada no final da aula após a realização pelo par das duas tarefas:

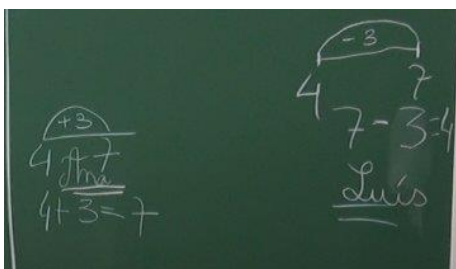


Figura 5: Representação simbólica apresentada no quadro.

Esta nova representação é reveladora da inversão necessária à determinação do número de berlindes iniciais, tendo os alunos conseguido determinar que o número inicial de berlindes era 4 para o caso da Ana. Parecem ter esquecido que o número inicial de berlindes era o mesmo para ambos os jogadores pois na representação alusiva ao Luís, são retirados 3 berlindes a 7. A situação alusiva ao Luís foi retificada no quadro pelo Alexandre, por sua iniciativa, após a apresentação de outros dois pares, apagando a linha alusiva ao Luís e colocando "4-3=1" enquanto explicava oralmente. O facto de ele ter conseguido explicitar à turma de forma clara mostra ter compreendido o problema.

Após algum tempo de exploração da primeira tarefa, a professora pediu a uma aluna para ler a tarefa seguinte *Jogo de berlindes II*, lendo-a também ela própria, e disse para os pares a realizarem assim que acabassem a anterior.

Alexandre e Rosa leram este problema. O Alexandre, olhando para a Rosa, disse:

Alexandre: O Luís começou com 9 e a Ana começou com 4.

De imediato, começaram a registar a resolução, utilizando o mesmo tipo de representação, e de novo começando pelo Luís:

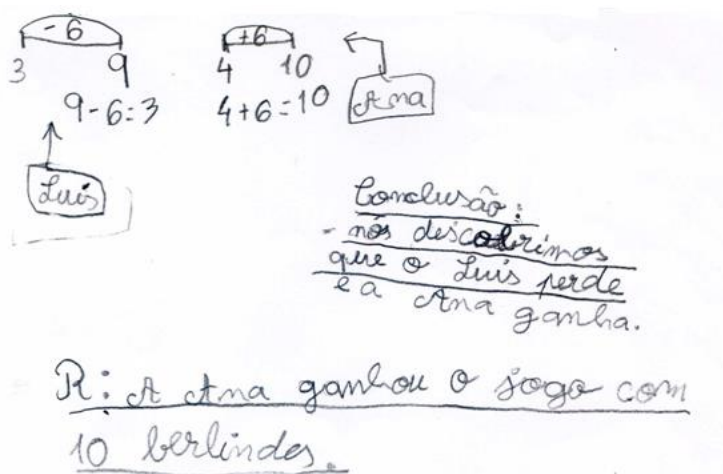


Figura 6: Representação simbólica usada pelo Alexandre em *Berlindes II*.

Enquanto o Alexandre, no primeiro problema, parece reagir à quantidade inicial desconhecida afirmando que não fazia sentido, após ter compreendido o primeiro problema, a quantidade inicial desconhecida do segundo já parece não o perturbar, resolvendo, de modo imediato e mentalmente o problema, através do raciocínio inversivo. Volta a colocar o número inicial de berlindes à direita para o Luís e à esquerda para a Ana. A resposta dos alunos ao pedido de comparação enunciado no problema encontra-se focada no número absoluto de berlindes final da Ana.

O par formado pelo Ricardo e pela Anabela também foi alvo de registo vídeo durante a exploração das tarefas. Usou representações simbólicas em *Berlindes I* apresentando as operações envolvidas na sua disposição horizontal (Figura 7) e uma representação mista em *Berlindes II* apresentando a resolução com recurso à linguagem escrita bem como as disposições horizontais das operações (Figura 8).

Figura 7: Representação simbólica usada pela Anabela em *Berlindes I*

No primeiro problema, após algum tempo sem nada realizarem, Anabela escreveu uma expressão simbólica cujo registo vídeo captou ter sido iniciada por 10 e terminando com "=4". Esta expressão foi apagada. O 10 indicia que, tal como o par anterior, Anabela começou por fazer uma transformação direta e não inversa com os dados do problema. Durante a interpelação da professora, também Ricardo refere que "é uma rasteira" mas ambos respondem que os dois jogadores tinham 4 berlindes no início do jogo. Anabela regista uma nova expressão simbólica que apaga e é Ricardo que começa por escrever "Menina", sendo secundado pela Anabela. Nesse momento, terminam a tarefa rapidamente, dando resposta à questão enunciada no mesmo.

No segundo problema, quando a professora passou por perto, o Ricardo disse:

Ricardo: O Luís tem 6, tem 3 e vai perder 6.

O tempo futuro usado pelo Ricardo ("vai perder 6") é revelador da dificuldade associada à transformação inversa, tratando o 3 como estado inicial e não estado final. Após diálogo com a professora, que os questionou sobre o número inicial de berlindes, Anabela começou a redigir a resposta constante na Figura 8, sendo secundada pelo Ricardo.

Figura 8: Representação mista usada pela Anabela em *Berlindes II*.

Enquanto a primeira parte da sua produção, expressa em linguagem escrita apresenta a solução do segundo problema, a segunda parte, em que setas foram colocadas para fazer corresponder as representações escritas às representações simbólicas, apresenta a resposta ao pedido de comparação. Assim, estes alunos compararam o número de berlindes inicial da Ana com o número final do Luís e também o número final de berlindes da Ana com o número inicial do Luís, mostrando que em ambas as situações, existe a mesma diferença quantitativa de um: a Ana tem mais um berlinde do que o Luís em ambas as situações. Usaram traços para unir os elementos que escolheram para comparar.

Passamos a apresentar as representações de outros pares da turma com base nas produções entregues, sendo que não possuímos registos vídeo que documentem o seu processo de resolução.

O par formado pelo Rui e António usou representações simbólicas em *Berlindes I* apresentando uma linha numérica com duas curvas representativas da inversão das operações adição e subtração bem com as operações envolvidas na sua disposição horizontal (Figura 9).

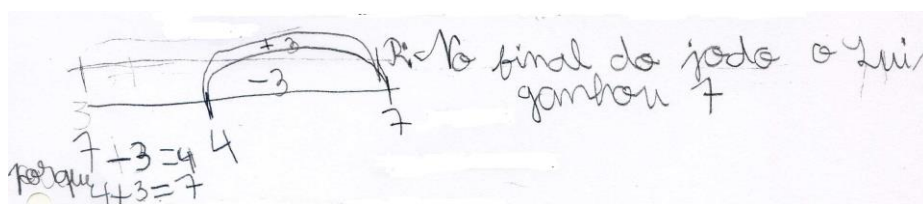


Figura 9: Representação simbólica usada pelo Rui em *Berlindes I*.

Esta representação parece evidenciar a modelação encontrada para a situação da Ana, mostrando o raciocínio inversivo. É de referir a inclusão do termo narrativo "porque", explicitando a inversão usada para determinar o número de berlindes inicial e de certa forma, justificando-a com a inversão das operações adição e subtração. A ordem pela qual foram colocadas as operações na sua disposição horizontal evidencia o processo do raciocínio inversivo: primeiro, determinaram o número inicial de berlindes, compreendendo que, no início do jogo, a Ana teria menos 3 berlindes e depois justificam (ou comprovam) essa inversão com a ordem sucessiva do jogo, representando simbolicamente o ganho de 3 berlindes da Ana relativamente aos 4 iniciais, ficando no final com 7 berlindes. Assim, as curvas com -3 e +3 parecem representar a transformação temporal dos 3 berlindes ganhos da Ana, do final para o início do jogo e do início para o final do jogo, respetivamente. No entanto, aparentemente, assumem aquela modelação também para o caso do Luís, já que respondem "No final do jogo o Luís ganhou 7". É de destacar o facto de o termo "ganhou", na sua resposta, significar o número absoluto de berlindes no final do jogo e não uma diferença quantitativa.

Este par foi o único que, na turma, incluiu uma representação icónica em *Berlindes II*. O par usou uma representação mista apresentando uma representação icónica, uma

representação em linguagem escrita e também uma representação simbólica com a operação na disposição horizontal (Figura 10).

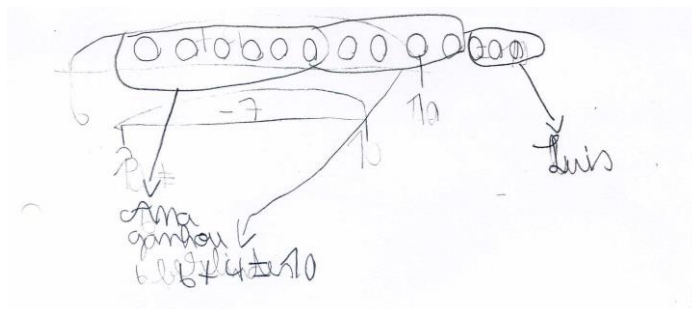


Figura 10: Representação mista usada pelo Rui em *Berlindes II*.

Esta produção apresenta duas linhas numéricas que foram apagadas e que reproduzimos em baixo (Figura 11):



Figura 11: Representações simbólicas apagadas pelo Rui em *Berlindes II*.

A primeira linha parece representar a situação da Ana. Enquanto em *Berlindes I*, as curvas representam as transformações, tanto a direta como a inversa, em *Berlindes II*, a curva representa a adição efetuada para encontrar o estado inicial, tendo os alunos colocado o 6 relativo à transformação à esquerda da linha. A segunda linha tanto pode ser a representação da situação alusiva ao Luís como a da comparação dos números finais de berlindes dos dois jogadores. Deve ter sido a dificuldade em lidar com a situação do Luís que terá motivado os alunos deste par a apagar estes registos e a enveredar por uma representação mais informal, a representação icónica.

Na representação icónica, Rui começou por representar os 6 berlindes ganhos pela Ana, circundando-os com uma linha e explicitando, narrativamente, com uma seta, serem os berlindes que a Ana ganhou. Depois, representou pictoricamente os 4 berlindes iniciais da Ana, circundando-os também com uma linha e apontando com uma seta para a representação simbólica da adição de 6 com 4. É de notar que a ordem das parcelas tem uma ligação estreita com a representação icónica, e conseqüentemente, com o seu processo de resolução. Depois, Rui representa pictoricamente os 3 berlindes finais do Luís mas a sua resolução termina aqui, não conseguindo inverter o raciocínio e determinar o número inicial de berlindes do Luís.

O par formado pelo Tiago e pelo João usou uma representação mista em ambas as tarefas, envolvendo representações simbólicas e em linguagem escrita, sendo que apenas o Tiago apresentou as operações com uma disposição vertical em *Berlindes II* (Figura 13). Durante a discussão desta tarefa, a professora interpelou-o onde é que ele tinha aprendido a fazer aqueles algoritmos, o que vários alunos da turma confirmaram que nunca faziam aquela representação na aula.

Em *Berlindes I* (Figura 12), na representação colocada à esquerda, o par usou uma disposição em tabela, com as colunas para cada um dos dois jogadores e as linhas para os diferentes momentos do jogo, a linha de cima para o início e a de baixo para o final. Foi o único par, na turma, que estabeleceu a diferença entre os números finais de berlindes, apesar de não solicitado no enunciado do primeiro problema.

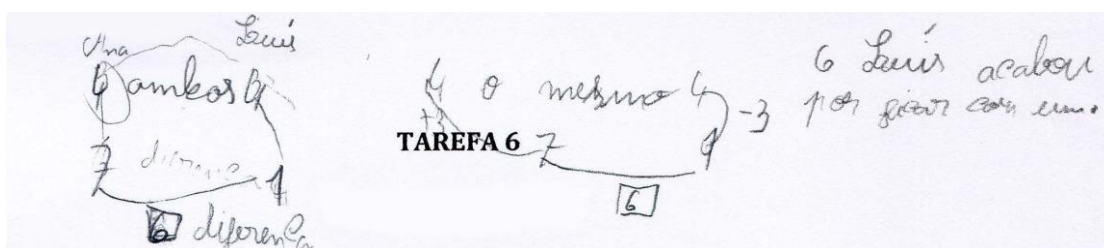


Figura 12: Representação mista usada pelo Tiago em *Berlindes I*.

Em *Berlindes II*, nas disposições horizontais das operações, Tiago circunda os números para lhes atribuir significado, registando narrativamente o jogador e o momento do jogo a que dizem respeito (Figura 13).

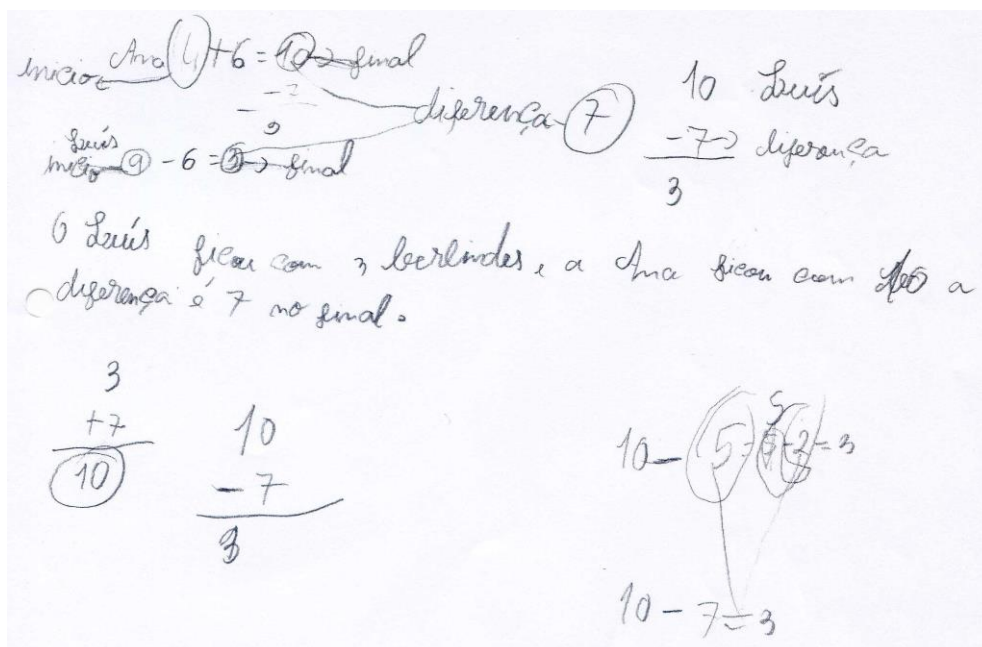


Figura 13: Representação mista usada pelo Tiago em *Berlindes II*.

A ordem com que colocou os termos nas operações seguiu, pois, a ordenação temporal do jogo. Para exprimir a comparação aditiva dos números finais de berlindes usa

disposições verticais tanto da subtração ($10-7=3$) como da adição ($3+7=10$), explicitando que "a diferença é 7 no final" aglutinando, assim, numa mesma expressão representativa da diferença quantitativa, tanto o excesso de 7 para a Ana como o défice de 7 para o Luís, o que revela compreensão dessa situação inversa. Embora não exista registo vídeo do trabalho deste par que suporte a interpretação da representação colocada pelo Tiago em baixo à direita, esta parece indicar a sua preocupação em relacionar as comparações aditivas do final e do início do jogo, já que no início do jogo, é o Luís que tem mais 5 berlindes do que a Ana.

O par formado pelo Vítor e pela Joana conseguiu inverter o raciocínio para o caso da Ana mas a sua resposta indicia falta de compreensão da situação alusiva ao Luís (Figura 14), em *Berlindes I*.

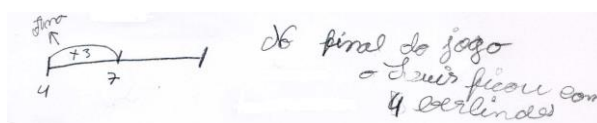


Figura 14: Representação simbólica usada pelo Vítor em *Berlindes I*.

Em *Berlindes II*, este par usou a representação da linha e, contrariamente ao que foi feito pelos colegas da turma, a ordenação seguiu o critério temporal do jogo e não a ordenação crescente dos números na reta (Figura 15).



Figura 15: Representação simbólica usada pelo Vítor em *Berlindes II*.

Ambos os alunos deste par começaram a redigir de forma narrativa a sua resposta à solicitação da comparação aditiva mas acabaram por optar por apagar esses registos.

Conclusões

A transformação inversa foi um aspeto crítico na resolução da primeira destas duas tarefas, convergindo com o referido por Vergnaud (2009). Assim, as primeiras representações usadas pelo Alexandre, um dos alunos do par objeto de registo vídeo, em *Berlindes I*, mostram um raciocínio associado a situações prototípicas da adição que propõem a procura de estados finais e não iniciais. Nesta tarefa, Alexandre usou o 7 final como se se tratasse de um estado inicial, fazendo corresponder a adição à ideia de ganhar berlindes, o que o fez obter 10 e ao qual lhe atribuiu depois um significado de estado inicial comum aos dois jogadores, concluindo, naquela tarefa, que o Luís teria ficado no final com 7 e a Ana com 13 berlindes. No entanto, os alunos parecem lidar mais facilmente com este tipo de transformação na segunda tarefa *Berlindes II* após terem compreendido a inversão envolvida em *Berlindes I*. Exemplo disso é o caso do Alexandre que conseguiu ultrapassar o obstáculo da inversão na segunda tarefa resolvendo-a mentalmente de modo muito rápido.

Apesar da dificuldade inerente à transformação inversa presente nos problemas, as produções dos alunos da turma revelam uma compreensão generalizada de um dos elementos do raciocínio inversivo: o que um jogador ganha, o outro perde. De acordo com Vergnaud (2009), nesta situação, é também importante que os alunos tenham consciência da aplicação da inversão temporal relativamente a cada jogador: "tu perdes o que acabaste de ganhar ou ganhas o que acabaste de perder" (p. 87). Este tipo de consciência tem de ser desenvolvido com uma multiplicidade de situações contextuais, como por exemplo, a consciência de que um crédito é o inverso de um débito, ou o número de passos para a frente é o mesmo dos dados para trás, etc.

Os alunos parecem ter privilegiado essencialmente duas formas de representação (Ponte & Serrazina, 2000): linguagem oral e escrita e representação simbólica. Apenas um par de alunos utilizou a representação icónica como apoio à representação simbólica. Talvez por se tratar de alunos do 2.º ano, ninguém recorreu à representação ativa.

Entre as representações simbólicas usadas, existiu um predomínio das disposições horizontais dos cálculos, embora o uso da linha numérica vazia tivesse também tido uma expressão significativa. O uso desta última representação parece corresponder ao modelo para pensar proposto por Gravemeijer (2004), aproximando-se do diagrama de setas de Vergnaud (2009), uma vez que as curvas que apresentam correspondem às transformações. A linha numérica vazia foi usada para ajudar a raciocinar sobre as transformações envolvidas nos problemas. Dada a reduzida grandeza dos números envolvidos, os cálculos em si não ofereciam dificuldades e os alunos não precisariam de representar os saltos na linha numérica vazia para efetuar os cálculos. Precisaram desta representação para conseguirem pensar os ganhos e as perdas e a inversão temporal. Enquanto o diagrama de setas apresenta o quadrado do estado inicial sempre à esquerda, na linha numérica vazia, este tanto pode estar à esquerda como à direita, já que os números são colocados pela sua ordenação crescente. Exceção a esta situação é o diagrama usado pelo par Vítor e Joana em que a ordenação dos números na linha seguiu o critério temporal. O uso da disposição em tabela também parece ter constituído um modelo para pensar para o par formado pelo Tiago e pelo João ajudando-os a estruturar e a relacionar os diversos elementos do problema: os dois jogadores e os dois momentos temporais do jogo.

Da análise das produções dos alunos, podemos inferir diferentes níveis de raciocínio quantitativo aditivo. Enquanto a maior parte dos alunos focou as quantidades absolutas de berlindes nas suas respostas, alguns incidiram nas diferenças quantitativas enquanto resultados das operações quantitativas de comparar aditivamente duas quantidades para encontrar o excesso de uma em relação à outra (Thompson, 1993).

As representações usadas pelos alunos tiveram um duplo papel. Por um lado, constituíram janelas para interpretarmos o seu raciocínio. Por outro lado, foram andaimes que os auxiliaram a pensar matematicamente situações exigentes do ponto de vista cognitivo,

atendendo às suas idades. Tal como afirmado por Vergnaud (2009), o desenvolvimento de um campo conceptual envolve não só situações e esquemas mas também instrumentos simbólicos de representação.

Referências bibliográficas

- Fosnot, C., & Dolk, M. (2001). *Young mathematicians at work: Constructing number sense. Addition, and subtraction*. Heinemann: Portsmouth.
- Goldin, G. (2008). Perspectives on representation in mathematical learning and problem solving. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed.) (pp. 176-200). London: Routledge.
- Goldin, G., & Shteingold, N. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. In A. Cuoco & F. Curcio (Eds.), *Roles of representations in school mathematics – 2001 Yearbook* (pp. 1-23). Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.
- Gravemeijer, K. (2004). Local instruction theories as means of support for teachers in reform mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 105-128.
- Gravemeijer, K. (2015). Design research as a research method in education. In A. A. V. Pereira, C. Delgado, C. G. da Silva, F. Botelho, J. Pinto, J. Duarte, M. Rodrigues, & M. P. Alves (Coords.), *Entre a Teoria, os Dados e o Conhecimento (III): Investigar práticas em contexto* (pp. 5-19). Setúbal: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal.
- Greer, B. (2012). Inversion in mathematical thinking and learning. *Educational Studies in Mathematics Education*, 79, 429-438.
- NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (Tradução de Principles and Norms of School Mathematics). Lisboa: APM.
- Nunes, T., Bryant, P., Evans, D., Bell, D., & Barros, R. (2012). Teaching children how to include the inversion principle in their reasoning about quantitative relations. *Educational Studies in Mathematics*, 79, 371-388.
- Ponte, J. P., & Serrazina, M. L. (2000). *Didáctica da Matemática do 1.º Ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.
- Stylianou, D. A. (2010). Teachers' conceptions of representation in middle school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 13, 325-343.
- Thompson, P. W. (1993). Quantitative reasoning, complexity, and additive structures. *Educational Studies in Mathematics Education*, 25, 165-208.
- Thompson, P. W., & Saldanha, L. A. (2003). Fractions and multiplicative reasoning. In J. Kilpatrick, G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *Research companion to the Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 95-114). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Vergnaud, G. (1996). A teoria dos campos conceptuais. In J. Brun (Ed.), *Didáctica das Matemáticas* (pp. 155-191). Lisboa: Instituto Piaget.
- Vergnaud, G. (2009). The theory of conceptual fields. *Human Development*, 52, 83-94.
- Vergnaud, G. (2011). O longo e o curto prazo na aprendizagem da matemática. *Educar em Revista*, 1, 15-27.