A TAREFA COMO INSTRUMENTO DE DESENVOLVIMENTO DA FLEXIBILIDADE DE CÁLCULO

Lurdes Serrazina, Margarida Rodrigues
Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa
Unidade de Investigação do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
lurdess@eselx.ipl.pt, margaridar@eselx.ipl.pt

Resumo: Este artigo insere-se no Projeto *Pensamento numérico e cálculo flexível: Aspetos críticos* e situa-se no âmbito de um dos seus objetivos: o design de tarefas, tendo em conta o conhecimento atual sobre números e operações. Começa por discutir teoricamente o constructo de flexibilidade de cálculo bem como os fundamentos subjacentes ao design de tarefas. Seguidamente, apresenta uma tarefa envolvendo a estrutura aditiva e discute dois níveis diferentes de desenvolvimento do pensamento numérico a que correspondem duas abordagens diferentes de exploração da tarefa pelos alunos. Visa-se articular o conhecimento sobre a evolução dos conhecimentos numéricos dos alunos e a caracterização das suas trajetórias de aprendizagem, com o suporte profissional dos professores para práticas que favoreçam essa mesma evolução. Esta hierarquização de diferentes desempenhos dos alunos é suportada por resultados empíricos obtidos com a condução de entrevistas clínicas individuais a quatro alunos, dois do 1.º ano e dois do 2.º ano. Assim, o presente artigo apresenta o processo cíclico inerente ao design de uma tarefa em particular: (1) a tarefa pensada como adequada para desenvolver o cálculo mental flexível e adaptativo dos alunos; (2) análise do que as crianças reparam nos números e como usam o seu conhecimento numérico e operatório para resolver a tarefa em causa ao longo das entrevistas clínicas; e (3) reformulação da tarefa.

Palavras-chave: design de tarefas, raciocínio aditivo, cálculo flexível, relações numéricas

Introdução

Esta comunicação insere-se no Projeto *Pensamento numérico e cálculo flexível: Aspetos críticos* que está a ser desenvolvido por docentes das Escolas Superiores de Educação de Lisboa, Setúbal e Portalegre, tendo como objetivos: (i) Identificar os conhecimentos conceptuais dos alunos que estão em jogo nos diferentes níveis de compreensão das operações/relações numéricas; (ii) Analisar se e como estes conhecimentos lhes permitem usar flexivelmente o cálculo mental e (iii) Retirar implicações para a construção e exploração de tarefas, a formação de professores e a avaliação diagnóstica do desenvolvimento do cálculo mental. Incide, em particular, numa das dimensões do 3.º objetivo do Projeto: a construção de tarefas. Assim, começamos por discutir as diferentes perspetivas sobre flexibilidade de cálculo no que se refere à adição e subtração, presentes na literatura, e também a problemática da construção e adaptação de tarefas úteis para o seu desenvolvimento. Seguidamente, apresentamos uma tarefa concebida para trabalhar de modo flexível a estrutura aditiva e respetivos níveis diferenciados de desempenho, discutindo os aspetos que foram considerados no seu design, com base no enquadramento teórico bem como nos resultados empíricos obtidos em entrevistas clínicas individuais realizadas a quatro alunos, onde foi proposta para exploração a referida tarefa.

Cálculo flexível

O NCTM (2000) afirma que ser proficiente num domínio complexo como a Matemática implica a capacidade de usar o conhecimento de modo flexível, aplicando, de modo apropriado, o que é aprendido numa situação, numa outra. A ideia de flexibilidade aparece associada ao cálculo mental e à resolução de problemas aritméticos, devendo a escola elementar promover o seu desenvolvimento em todos os alunos (Anghileri, 2001; NCTM, 2000). Um problema aritmético pode ser resolvido mentalmente de diferentes formas, designadas normalmente por estratégias. Flexibilidade estratégica em cálculo mental refere-se ao modo como o problema resolvido é afetado pelas circunstâncias, sejam elas relacionadas com as características das tarefas específicas, ou com as características individuais, ou ainda com as variáveis contextuais (Threlfall, 2009). Por exemplo, um aluno que use uma determinada estratégia de modo variável dependendo dos números envolvidos no problema revela possuir flexibilidade estratégica.

Star e Newton (2009) definem flexibilidade como conhecimento de múltiplas soluções assim como a capacidade e tendência para escolher a mais adequada para um dado problema e um objetivo particular de resolução de problemas. Estes autores afirmam ainda que flexibilidade existe num *continuum*; quando os alunos ganham flexibilidade eles podem primeiro mostrar um maior conhecimento de múltiplas estratégias, depois preferências particulares e por último o uso adequado da estratégia preferida. O termo adequado refere-se à estratégia mais eficiente, isto é, aquela que exige o menor número de passos intermédios de cálculo para chegar ao resultado.

Para outros autores (Baroody & Rosu, 2006; Rathgeb-Schierer & Green, 2013), a flexibilidade de cálculo está relacionada com o facto de os alunos, à medida que vão desenvolvendo o sentido do número, terem estabelecido relações e padrões entre eles, construindo assim uma teia de relações. Por exemplo, os alunos que reconhecem a propriedade comutativa da adição, perante a necessidade de calcular 3+9, sabem que podem fazer 9+3. O modo como esta propriedade é mobilizada, relevando ou não os aspetos contextuais das tarefas, pode variar consoante a idade das crianças. A este respeito, De Corte e Verschaffel (1987) referem que os aspetos semânticos das tarefas influenciam os alunos mais novos na forma como as resolvem. Os alunos que compreendem as várias composições de um número, a partir das suas diferentes partes (e.g., 1 + 7, 2 + 6, 3 + 5, e 4 + 4 = 8…) e decomposições (e.g., 8 = 1 + 7, 2 + 6, 3 + 5, 4 + 4) desenvolvem, provavelmente, formas de raciocínio como os "dobros + 1" (e.g., 7 + 8 = 7 + 7 + 1 = 14 + 1) ou fazer uma "dezena" (e.g., 9 + 7 = 9 + 1 + 6 = 10+6). À medida que aquela teia de relações vai sendo construída, vão adquirindo flexibilidade para usarem essas relações em situações concretas de cálculo, as quais dependem do seu conhecimento dos números e das operações (Rathgeb-Schierer & Green, 2013).

Na nossa perspetiva, o pensamento flexível está focado no desenvolvimento conceptual e refere-se a um pensamento que pode ser flexivelmente adaptado tanto a tarefas familiares como a novas tarefas. O seu foco não é a estratégia de cálculo mas o raciocínio quantitativo. Este tipo de raciocínio consiste na análise de uma situação numa estrutura quantitativa, sendo que esta constitui uma rede de quantidades e de relações quantitativas. Assim, no âmbito do raciocínio quantitativo, o que importa são as relações entre as quantidades (Thompson, 1993).

O desenvolvimento de relações entre a adição e subtração pode partir de situações de composição e decomposição de um número. Segundo Freudhental (1983), os alunos devem caminhar no sentido da compreensão da estrutura da adição e não se ficar pelo ato de juntar. Essa estrutura implica compreender todas as relações expressas em

$a + b = c$ e também por $c - b = a$ (para $b \leq c$)

Num nível superior, implica o conhecimento das propriedades: comutativa, associativa e de equivalência de $a + b = c$ e $c - b = a$. Esta estrutura vai crescendo à medida que se explora N.

Mas a relação $a + b = c$, pode ser estruturada, pensando em c e pedindo a totalidade das soluções para o a e para o b. Por exemplo, o 7 pode ser obtido adicionando diferentes pares de números, conforme apresentamos no esquema seguinte:

$$7 = + \quad \frac{7 \quad 6 \quad 5 \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 0}{0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7}$$

Este esquema apresenta uma estrutura notável de sequências crescente e decrescente e uma simetria central. A procura da resposta ao porquê desta situação ajuda a compreender a estrutura aditiva do N. Também é importante verificar que os pares que são soluções do problema são em número finito e que podem ser determinados até à exaustão.

Outras listas podem ser criadas a partir de $a + b = c$. Fixando o b, que condições para a e c? O $b = c\text{-}a$.

Por exemplo se $b = 3$, que condições para a e c? Neste caso, o 3 pode ser obtido subtraindo uma infinidade de diferentes pares de números (c,a), conforme apresentamos no esquema seguinte:

$$3 = - \quad \frac{3 \quad 4 \quad 5 \quad \ldots}{0 \quad 1 \quad 2 \quad \ldots}$$

Novamente, é importante discutir o porquê.

As crianças que mobilizem as relações numéricas compreendem que: se $a+b=c$, então $c\text{-}b = a$ ou $c\text{-}a = b$; ou se $a+b = c$, então $b+a = c$, isto é reconhecem a propriedade comutativa. Tal como referido por Freudenthal (1983), a estrutura aditiva dos números naturais inclui um conjunto complexo de relações baseadas nas propriedades: comutativa, associativa e equivalência de $a+b = c$ e $c\text{-}b = a$.

Assim, a flexibilidade de cálculo envolvendo a estrutura aditiva passa por desenvolver uma compreensão relacional e flexível, de modo a que o processo de reverter a adição para obter a subtração não seja encarado pelos alunos como um novo processo, possibilitando-lhes *comprimir* (Gray & Tall, 1994) as ideias matemáticas, tornando-as mais simples.

Tal como sustentado por Sfard (1991) e Tall (2013), os processos e os objetos matemáticos são duas faces da mesma moeda. De acordo com Gray e Tall (1994), é essencial considerar a combinação cognitiva de processo e conceito, propondo o constructo *proceito* (*procept* no original) enquanto amálgama de três componentes: (1) *processo* que produz um dado objeto; (2) *objeto* matemático produzido pelo processo; e (3) *símbolo* representativo do processo ou do objeto.

O pensamento *proceptual* inclui o modo flexível como o simbolismo pode ser visto na representação simultânea de processo e objeto, isto é, de uma ação procedimental ou de um objeto mental que, num nível mais elevado, pode ser manipulado, decomposto ou recomposto (Gray & Tall, 1994). Quando o aluno retira a de c, para obter o b que falta, pode fazê-lo através da contagem, ou através de um raciocínio inverso – a subtração é a operação inversa da adição. Por outro lado, o $a+b$ é c, ou seja a soma de a com b é c. Assim, $a+b$ pode ser visto ou como o processo de adição de dois números ou como o conceito de soma (Gray & Tall, 1994). Podemos assim referir-nos ao proceito c, que para estes autores engloba o processo de contar c e um conjunto de outras representações como as diferentes decomposições de c. "Todos estes símbolos são considerados pelos alunos como representando o mesmo objeto, embora obtidos através de diferentes processos. Mas podem ser decompostos e recompostos numa maneira flexível" (Gray & Tall, 1994, p. 7).

Design de tarefas

É através da resolução de tarefas, mais do que de qualquer outra forma, que as oportunidades para aprender são disponibilizadas aos alunos (Anthony & Washaw, 2007; Stein & Smith, 1998). As tarefas devem ter em conta as competências dos alunos, mas simultaneamente a sua resolução deve constituir um desafio. O contexto da tarefa não é apenas para motivar os alunos, mas para lhes proporcionar uma situação de aprendizagem que é experiencialmente real e que pode ser usada como um ponto de partida para uma compreensão avançada (Gravemeijer, 1997). A tarefa assume, assim, a par de outros fatores como a sua implementação pelo professor, um papel relevante no ensino e aprendizagem da Matemática (Felício & Rodrigues, 2010). Stein e Smith (1998) alertam para o facto de a natureza das tarefas poder mudar radicalmente quando passam da fase de *apresentação* (nos manuais ou outros materiais auxiliares) para a fase de *implementação,* podendo manter ou não o seu nível de exigência conceptual. Esta questão remete para a importância de o professor assumir plenamente um papel criativo de um profissional crítico que utiliza a sua autonomia, no que respeita à participação nas decisões curriculares. E no que respeita à implementação de tarefas na sala de aula, "um professor criativo não é apenas aquele que procura novas tarefas ou as realiza de modo pessoal, é também o que possui os fundamentos das tarefas que concretiza" (Rodrigues, 2008, p. 178). Será a consciência reflexiva dos fundamentos das tarefas propostas nas aulas de Matemática que dotará o professor da capacidade de manter o nível elevado de exigência conceptual numa tarefa concebida com esse fim.

Grevholm, Millman e Clarke (2009) afirmam mesmo que o que os alunos aprendem é, em larga medida, definido pelas tarefas que lhes são propostas. À partida, uma tarefa desenhada para mobilizar um pensamento matemático de elevado nível cognitivo terá maior probabilidade de produzir esse tipo de pensamento nos alunos do que uma tarefa desenhada para um pensamento de baixo nível cognitivo como o envolvido em exercícios de treino procedimental. No entanto, a exploração cabal das potencialidades de uma tarefa depende da forma como o professor monitoriza a sua realização na aula e do modo como promove a sua discussão (Stein & Smith, 1998). De acordo com Grevholm et al. (2009), o envolvimento dos alunos na atividade matemática é suscitado pelo desafio colocado pela tarefa: esta deverá ser suficientemente desafiante mas não comportar um nível excessivo de desafio de tal modo que o aluno não seja capaz de lidar com o mesmo. Estes autores explicitam três aspetos associados às tarefas e fundamentais na implementação do que o professor pretende enfatizar: a função, a forma e o foco. As tarefas têm um objetivo em relação à aprendizagem que se espera que os alunos desenvolvam, têm "uma forma para inspirar, desafiar e motivar os estudantes, e têm focos específicos escolhidos pelos construtores da tarefa” (Grevholm et al., 2009, p. 1).

Consideramos existir um processo cíclico inerente ao *design* de tarefas com três fases: (1) a tarefa pensada como adequada para desenvolver determinadas competências matemáticas; (2) análise do conhecimento matemático das crianças e de como raciocinam ao resolver a tarefa em causa ao longo de entrevistas clínicas; e (3) reformulação da tarefa. No âmbito do Projeto, as três fases deste processo cíclico estão focadas na flexibilidade de cálculo: (1) a tarefa pensada como adequada para desenvolver o cálculo mental flexível e adaptativo dos alunos; (2) análise do que as crianças reparam nos números e como usam o seu conhecimento numérico e operatório para resolver a tarefa em causa ao longo de entrevistas clínicas; e (3) reformulação da tarefa (ver Figura 1; Brocardo, 2014).

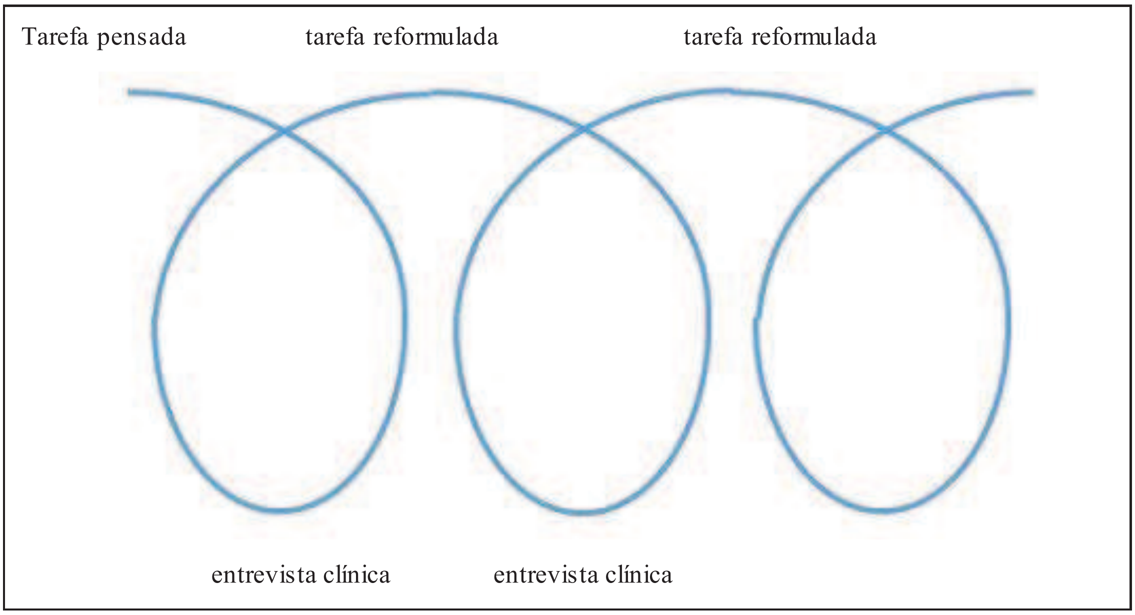

Figura 1: O processo cíclico de *design* de tarefas

De acordo com Hatano (1982), os três princípios globais do *design* de tarefas relacionam-se com a variabilidade inerente (1) ao contexto da tarefa, (2) aos procedimentos usados pelo indivíduo na exploração da tarefa na entrevista clínica, e (3) à explicação que é dada pelo entrevistado.

Metodologia

Este estudo segue uma metodologia qualitativa dentro do paradigma interpretativo. O seu objetivo é descrever e interpretar um fenómeno educacional (Erickson, 1986).

Para esta comunicação, descrevem-se resultados obtidos através de entrevistas clínicas a quatro alunos: dois do 1.º ano, Ana e Rui, e dois do 2.º ano, João e Diogo. Trata-se de uma técnica dirigida pelo investigador que procura uma descrição da forma de pensar dos entrevistados (Tavares, 2000; Zazkis & Hazzan, 1999) e que começa pela apresentação de uma tarefa a ser explorada pelo entrevistado, cujo contexto deve ser realístico para as crianças (Hunting, 1997). Assim, a entrevista clínica surge como uma oportunidade de construção de um modelo do conhecimento matemático dos alunos (Hunting, 1997) e os resultados obtidos com este método são usados na reformulação da tarefa explorada na entrevista, no âmbito do *design* de tarefas, atrás descrito.

Segundo Hunting (1997), a entrevista clínica é um diálogo e pressupõe que os alunos entrevistados individualmente expliquem as ações realizadas ou as soluções apresentadas. Esta explicação é fundamental para a compreensão do seu pensamento. Um aspeto central neste método é o reconhecimento do papel da linguagem. Daí que seja importante clarificar o significado dos discursos, seja do entrevistador, seja do entrevistado. As questões colocadas pelo entrevistador devem ser suficientemente abertas para permitir aos alunos escolherem o seu próprio processo de resolução e explorarem livremente a tarefa, e devem maximizar a oportunidade de diálogo potenciador da revelação dos processos de pensamento dos alunos. O entrevistador deve ter a preocupação em encorajar as crianças a explicitar o que pensaram, mantendo sempre um tom neutro relativamente à correção das suas respostas.

As entrevistas individuais foram realizadas em janeiro de 2014 pelas autoras desta comunicação, membros da equipa do Projeto. Os quatro alunos estavam pela primeira vez a frequentar os respetivos anos de escolaridade e foram selecionados pelos seus professores, com base nos seguintes critérios, indicados pelas investigadoras: (i) alunos que normalmente expressam o que pensam, e (ii) alunos com um desempenho razoável em Matemática. As entrevistas foram áudio-gravadas e transcritas posteriormente. Realizaram-se numa sala da escola, que não a sala de aula dos alunos e tiveram uma duração de cerca de 15 minutos, tempo adequado a entrevistas a crianças com idades compreendidas entre 5 e 8 anos, para que consigam manter concentração em toda a sua duração (Hunting, 1997). Complementando a áudio-gravação das entrevistas, as investigadoras usaram também a técnica de observação no decurso das entrevistas, registando, após o seu término, o observado em notas de campo. Por razões éticas, os nomes dos alunos foram alterados, de modo a garantir a confidencialidade. Nesta comunicação, vamos analisar apenas uma das duas tarefas resolvidas por cada aluno, a qual apresentamos na secção seguinte.

O conjunto das bolas da tarefa permaneceu visível durante toda a entrevista, de forma que cada aluno fosse capaz de propor várias maneiras de distribuição das bolas pelas duas caixas. Uma folha de papel com duas caixas desenhadas foi disponibilizada aos alunos para que, se quisessem, pudessem desenhar nela as bolas.

Com a tarefa, queríamos compreender o pensamento dos alunos sobre partição flexível (e.g., um conjunto de 9 elementos conceptualizado mentalmente como cinco e quatro, três e seis, etc.). Mais precisamente, queríamos compreender se os alunos conseguiam obter todas as decomposições possíveis, como conseguiam justificar que tinham obtido todas, e como é que conseguiam identificar os aspetos matemáticos envolvidos.

Para a análise dos dados obtidos nas entrevistas clínicas, adotámos categorias provenientes do modelo de Threlfall (2009): abordagem ao problema (reparar nos números; cálculos exploratórios parciais); solução do problema (aplicação de relações numéricas e operatórias).

1ª fase do *design* de tarefas: a conceção da tarefa

A tarefa proposta (inspirada em Cobb, Boufi, McClain & Whitenack, 1997) está relacionada com as decomposições do 9 (Figura 2) e visa generalizar o uso sistemático da propriedade comutativa. Tem, pois, como objetivo que os alunos compreendam a relação entre somas representando as possíveis decomposições de um dado número de objetos.

Era uma vez duas caixas e 9 bolas saltarinas mágicas que passavam a vida a saltar de uma caixa para a outra.

bolas

caixa azul　　　caixa vermelha

As bolas vão continuar a saltar.

Quantas bolas podem estar em cada caixa? (analisar todas as possibilidades)

Figura 2: Tarefa das caixas com bolas

Os alunos têm de estabelecer diferentes decomposições do número 9. Em qualquer caso, têm de perceber que vão dividir o conjunto das bolas em dois subconjuntos (decomposição do 9), mas também, quando definem um dos subconjuntos, por exemplo, de 4 bolas, têm de perceber qual o número de bolas que falta para terem as 9, ou fazer uma subtração direta e perceber que ao tirar 4 a 9, ficam 5. É-lhes solicitado que façam isto para as diferentes decomposições aditivas do 9. Em ambas as situações, os alunos lidam com as duas operações, adição e subtração, como sendo intrinsecamente inversas uma da outra (Greer, 2012).

No contexto desta tarefa, a expressão 4+5 é a notação simbólica que representa simultaneamente o processo operacional de adicionar 4 a 5 e o objeto matemático produzido, a soma.

Identificamos dois níveis de desenvolvimento na forma de abordar esta tarefa:

Nível 1 – Os alunos conseguem registar várias decomposições do 9, utilizando a propriedade comutativa sem exaustão.

Nível 2 –Os alunos relacionam a adição e a subtração e utilizam a propriedade comutativa de modo consciente e exaustivo, justificando ter alcançado todas as possibilidades com a sistematicidade e generalização da propriedade comutativa.

A tarefa assume uma forma que foi concebida para cativar as crianças e apelar ao seu mundo imaginário em que objetos inanimados como as bolas tomam uma vida própria e saltam de uma caixa para outra, sem interferência humana. A ideia de movimento foi central no *design* da forma da tarefa para que a mesma possa ligar-se intrinsecamente ao objetivo da tarefa atrás enunciado. Assim, será a consideração da vertente dinâmica desse mesmo movimento que induzirá a criança a explorar diferentes possibilidades de decomposição do 9, já que as bolas não se distribuem estaticamente por duas caixas mas continuam a saltar de uma caixa para a outra, variando em número em cada instante. Um outro aspeto da forma da tarefa ao serviço da função da mesma tem a ver com a atribuição de cores diferentes a cada uma das duas caixas para conduzir à comutatividade das situações exploradas: o par $a+b$ (a bolas na caixa azul e b bolas na caixa vermelha) é distinto do seu comutativo $b+a$ (b bolas na caixa azul e a bolas na caixa vermelha), embora ambos representativos do mesmo número. Por fim, um terceiro aspeto associado à forma da tarefa e também relacionado com a sua função prende-se com o facto de se ter considerado duas caixas e não mais para induzir a estruturação do 9 em dois grupos.

2ª fase do *design* de tarefas: Alguns resultados das entrevistas clínicas

Após a apresentação da tarefa, os dois alunos do 1.º ano, Ana e Rui, escreveram primeiro 5+4, sem recorrer ao desenho das bolas. Perante a pergunta sobre as outras possibilidades, foram escrevendo as diferentes decomposições do 9. No caso da Ana:

Ana: 5+4

Investigadora: E outras possibilidades?

Ana escreveu imediatamente no papel: 2+7, 7+2, 8+1, 1+8, 4+5, 3+6, 6+3.

Ana não fez qualquer outra representação da situação e a folha de papel apenas foi usada para escrever as representações simbólicas indicadas.

Após aqueles registos, Ana acrescentou oralmente que também podia ser 9+0. Perante a pergunta da investigadora se tinha de escrever 2 + 7 e 7 + 2, Ana respondeu: "Dá o mesmo, mas não é o mesmo. Aqui [*apontando para a primeira caixa*] estão 2 e ali 7 [*apontando para a segunda caixa*] e aqui [*7+2*] está ao contrário."

Embora não tendo tido necessidade de desenhar as bolas, parece que ela não conseguiu desligar-se das bolas concretas e olhou para os números como um par ordenado.

No caso do Rui, depois de registar 5+4, a sequência dos registos foi: 4+5, 6+3, 3+6, 8+1, 1+8, 9+0.

Após uma pequena pausa, escreveu no papel: 7+2 e 2+7.

Rui também foi questionado se "6+3 é o mesmo que 3+6", e respondeu: "É. Só que é ao contrário."

Os dois alunos conseguiram visualizar todas as decomposições do 9, mas nenhum deles se abstraiu da situação real – caixas e bolas — embora nenhum dos dois tivesse sentido necessidade de as desenhar nas caixas. Parece que ambos pensaram sobre pares ordenados, tentando escrever todos os pares.

No caso dos alunos do 2.º ano, João, quando lhe foi apresentada a tarefa, escreveu, de imediato, "4+5, 3+6, 2+7, 1+8", e depois parou. Perguntado se não havia mais hipóteses, replicou: "Não, eu podia mudar a ordem dos números, mas era a mesma coisa, a soma é a mesma".

Diogo escreveu no papel: 5+4, 6+3, 8+1, 7+2.

Quando a investigadora perguntou se já tinha escrito todas as possibilidades, disse: "Sim. Se eu trocar, a soma é a mesma, 9".

Os dois alunos do 2.º ano fizeram todas as partições não vazias do 9, não tendo considerado a possibilidade de 9+0 (ou 0+9). Estes alunos parecem ter apenas pensado sobre os números, abstraindo da situação real. Parece-nos ainda que já tinham compreendido a propriedade comutativa da adição.

Podemos afirmar que o contexto da tarefa foi tido em conta pelos alunos do 1.º ano, mas não pelos do 2,º ano, que ignoraram o facto de as parcelas terem papéis diferentes na situação proposta. Os alunos do 1.º ano compreenderam a situação concreta e a forma como pensam parece estar próxima da situação real, tendo considerado pares ordenados de números. Mas já não tiveram necessidade de concretizar a situação, pois nenhum deles desenhou os subconjuntos das bolas nas caixas, embora parecendo raciocinar a partir da situação concreta. No caso dos alunos do 2.º ano, já ultrapassaram a fase das situações concretas, pelo menos neste caso, e pensaram sobre a soma, organizando os diferentes números cuja soma é 9, mas usando a propriedade comutativa para omitir os respetivos pares comutativos.

3ª fase do *design* de tarefas: Reformulação da tarefa

Esta tarefa revelou-se uma tarefa com potencial para ser explorada na sala de aula com alunos do 1.º ano, na fase inicial de aprendizagem, no sentido de desenvolver a ideia da estrutura aditiva de **N** (Freudenthal, 1983). Parece-nos ser importante, que, na síntese final, após a fase de discussão coletiva com a turma, o professor conduza os alunos à construção coletiva do esquema,

$$9=+\quad \begin{array}{cccccccccc} 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array}$$

focando a sua atenção nas duas sequências crescente e decrescente e na simetria central presente. Já no caso dos alunos do 2.º ano, a tarefa parece ter sido demasiado fácil e pouco adequada na medida em que não lhes colocou desafios cognitivos.

Os resultados obtidos levam-nos a considerar que para a fase inicial de aprendizagem dos alunos de 1.º ano, a tarefa não necessita de reformulação, embora seja pertinente investigar se o uso das cores para as caixas tem influência nas abordagens dos alunos. Já para fases mais avançadas da aprendizagem, nos primeiros dois anos de escolaridade, a tarefa necessita de ser reformulada para números com uma ordem de grandeza superior a 20, explorando outro tipo de contextos, como por exemplo, os passageiros de um autocarro de dois andares.

Considerações finais

Tal como referido por Grevholm et al. (2009), a tarefa proposta tem uma função, uma forma e um foco matemático. Tendo por função generalizar o uso sistemático da propriedade comutativa, a tarefa assume uma forma que, por um lado, cativa as crianças, e por outro, está intrinsecamente relacionada com a sua função. As duas cores das caixas, pensadas para conduzir à exploração da comutatividade, foram irrelevantes para os alunos entrevistados: os alunos de 1.º ano consideraram a ordem das duas caixas mas não deram indícios de repararem nas suas cores, e os alunos de 2.º ano abstraíram-se da situação contextual das caixas. No que respeita ao facto de se ter considerado duas caixas, são vários os fundamentos para esta opção. Para além da pertinência do proceito 9 ser estruturado em dois grupos, e não num número superior de grupos, de modo a que a criança encare $a+b$ como processo (operação) e simultaneamente como produto (isto é, como soma que constitui uma representação não canónica de um número, neste caso, do 9) (Sfard, 1991; Tall, 2013), o uso sistemático da propriedade comutativa através da simetria central das decomposições do 9 é facilitado se a decomposição incidir apenas em dois grupos. No que respeita ao foco matemático da tarefa, este incide na flexibilidade de cálculo alcançada através do uso da propriedade comutativa na estrutura aditiva de N (Freudenthal, 1983), bem como através da compreensão da inversão das operações adição e subtração (Greer, 2012).

Os resultados obtidos com as entrevistas clínicas relativamente à exploração desta tarefa merecem-nos também algumas considerações. Apesar de todos os alunos terem começado com os números 4 e 5 (ou 5 e 4), grupos quase iguais, os alunos do 1.º e do 2.º ano resolveram a tarefa de maneira diferente, correspondendo a diferentes níveis de desenvolvimento. Embora os do 1.º ano não necessitassem de concretizar a situação com materiais manipuláveis ou desenhos, eles resolveram a tarefa muito próxima do seu contexto. Como referem De Corte e Verschaffel (1987), os aspetos semânticos da tarefa influenciam os alunos mais novos na forma como a resolvem. Assim, os alunos do 1.º ano, olharam para pares ordenados de números cuja soma é 9. Conseguiram listar todos os pares, mas de novo, considerando o contexto. Podemos conjeturar que eles estavam certos que tinham obtido todos os pares possíveis, porque usaram alguma organização na apresentação dos pares, escrevendo de uma forma quase consistente pares comutativos (por exemplo, 2+7, 7+2). Pelo contrário, os do 2.º ano, abstraíram da situação concreta e procuraram a soma 9. Libertaram-se da situação concreta e só consideraram o facto que tinham de obter o 9 através de uma soma de duas parcelas. Como já conheciam a propriedade comutativa, embora não de uma forma formal, aplicaram-na para justificar que tinham todos os casos. Portanto, resolveram o problema em termos matemáticos, mas não o problema real proposto, onde deviam ter considerado as duas caixas diferentes e, nesta perspetiva, não é o mesmo ter as bolas na caixa vermelha ou na caixa azul. Embora todos os alunos tenham aplicado a propriedade comutativa, fizeram-no com intencionalidades distintas: enquanto os alunos do 1.º ano a aplicaram para gerar todas as possibilidades, atendendo à semântica da tarefa em que releva a ordem dos números cuja soma é 9 (Ana: "Dá o mesmo, mas não é o mesmo"), os alunos do 2.º ano aplicaram-na para dispensar a apresentação dos pares comutativos, considerando que as partes simétricas seriam as mesmas (Diogo: "Se eu trocar, a soma é a mesma, 9").

O cálculo flexível diz respeito ao conhecimento e ao uso de relações numéricas, sendo mais rico na medida em que os alunos vão desenvolvendo o seu sentido de número e são capazes de usar a rede de relações que vão construindo (Baroody & Rosu, 2006). A tarefa proposta aos quatro alunos entrevistados, e aqui discutida, indicia a sua potencialidade no desenvolvimento da compreensão da generalização associada à propriedade comutativa e do seu papel na obtenção, pelos alunos, da certeza da exaustão das soluções do problema. Relativamente ao processo cíclico do *design* desta tarefa em particular, a análise da forma como as crianças a resolveram nas entrevistas clínicas sugere que a mesma não carece de reformulação, embora seja pertinente explorar diferentes contextos (formas) para a mesma função e foco matemático, e averiguar da sua influência no desenvolvimento do pensamento flexível dos alunos.

Referências

Anghileri, J. (2001). Intuitive approaches, mental strategies and standard algorithms. In J. Anghileri (Ed.), *Principles and practices in arithmetic teaching* (pp. 79-94). Buckingham: Open University Press.

Anthony, G., & Walshaw, M. (2007). *Effective Pedagogy in Mathematics/ Pàngarau: Best Evidence Synthesis Iteration [BES]*. Wellington, New Zeland: Ministry of Education.

Baroody, A. J., & Rosu, L. (2006). Adaptive expertise with basic addition and subtraction combinations — The number sense view. In A. J. Baroody & T. Torbeyns (chairs), *Developing adaptive expertise in elementary school arithmetic*. Symposium conducted at: The annual meeting of the American Educational Research Association.

Brocardo, J. (2014, September). *Exploring flexibility in mental calculation in the domain of multiplicative reasoning*. Paper presented in ECER, Porto, Portugal.

Cobb, P., Boufi, A., McClain, K., & Whitenack, J. (1997). Reflective Discourse and Collective Reflection. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(3), 258-277.

De Corte, E., & Verschaffel, L. (1987). The effect of semantic structure on first graders' strategies for solving addition and subtraction word problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 18*(5), 363-381.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (3ª ed.). New York: Macmillan.

Felício, C., & Rodrigues, M. (2010). A natureza da tarefa e os desafios da gestão curricular. In Associação de Professores de Matemática (Ed.), *Actas do ProfMat 2010*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Gravemeijer, K. (1997). Instructional design for reform in mathematics education. In M. Beishuizen, K. Gravemeijer & E. van Lieshout (Eds.), *The role of contexts and* *models in the development of mathematical strategies and procedures* (pp. 13-34). Utrecht: Technipress.

Gray, E., & Tall, D. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(2), 115-141.

Greer, B. (2012). Inversion in mathematical thinking and learning. *Educational Studies in Mathematics Education*, *79*, 429-438.

Grevholm, B., Millman, R., & Clarke, B. (2009). Function, form and focus: The role of tasks in elementary mathematics teacher education. In B. Clarke, B. Grevholm & R. Millman (Eds.), *Tasks in primary mathematics teacher education: Purpose, use and exemplars.* New York: Springer.

Hunting, R. (1997). Clinical interview methods in mathematics education research and practice. *Journal of Mathematical Behavior, 16*(2), 145-165.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.

Rathgeb-Schierer, E., & Green, M. (February, 2013). *Flexibility in mental calculation in elementary students from different math classes*. Paper presented in CERME 8, Antalya, Turquia.

Rodrigues, M. (2008). *A demonstração na prática social da aula de Matemática* (tese de doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*(4), 268-275.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics Education*, *22*, 1-36.

Star, J. R., & Newton, K. J. (2009). The nature and development of experts' strategy flexibility for solving equations. *ZDM Mathematics Education*, *41*, 557-567.

Tall, D. (2013). *How humans learn to think mathematically: Exploring the three worlds of mathematics (Learning in doing: social, cognitive and computational perspectives)*. Cambridge: Cambridge University Press.

Tavares, M. (2000). A entrevista clínica. In J. A. Cunha (Org.), *Psicodiagnóstico V* (5ª ed., pp. 45-56). Porto Alegre: ArtMed.

Thompson, P. W. (1993). Quantitative reasoning, complexity, and additive structures. *Educational Studies in Mathematics Education*, *25*, 165-208.

Threlfall, J. (2009). Strategies and flexibility in mental calculation. *ZDM Mathematics Education*, *41*, 541-555.

Zazkis, R., & Hazzan, O. (1999). Interviewing in mathematics education research: Choosing the questions. *Journal of Mathematical Behavior, 17*(4), 429-439.