O Modelo de Agente Representativo

Orlando Gomes

- Abril 2012 -

Abstract

A teoria económica contemporânea assenta grande parte do seu raciocínio na ideia de que é possível compreender o comportamento dos agentes económicos e a complexidade das relações que entre eles se estabelecem reduzindo esse comportamento às escolhas de um agente representativo. Este agente procura maximizar a utilidade do consumo perante determinada restrição de recursos que ele, ou o sistema económico como um todo, enfrenta. Apesar de esta ideia não estar isenta de possível crítica e de o caminho da modelização ser cada vez mais o de considerar agentes heterogéneos em interação, a verdade é que se trata de um conceito poderoso, que permite compreender mecanismos lógicos relevantes, num contexto que é frequentemente assumido como dinâmico e intertemporal. Neste capítulo, caracterizam-se os pilares fundamentais do modelo de agente representativo.

1 Introdução

Na impossibilidade de perceber com rigor e pormenor todos os padrões de interação que se estabelecem entre milhões de indivíduos que todos os dias tomam decisões racionais com vista à defesa do seu interesse próprio ou do interesse de determinado grupo onde se integram, os economistas encontraram uma ferramenta lógica relativamente simples que possibilita entender o comportamento dos agentes e, a partir daí, o funcionamento do sistema económico. Esta ferramenta conceptual assenta na ideia de que se todos os indivíduos são racionais, então eles farão escolhas da mesma forma. Na prática, todos os agentes procuram maximizar a respetiva utilidade e, por conseguinte, analisar o comportamento 'representativo' é suficiente para entender o funcionamento da economia no seu conjunto.

O conceito de agente representativo está subjacente a grande parte do pensamento neoclássico que tem dominado a ciência económica desde as décadas de 1960 / 1970. Obras de referência que fizeram avançar esta área do saber, como Stokey e Lucas (1989) ou Barro e Sala-i-Martin (1995), fazem uso abundante do referido conceito. Através dele, a ciência económica foi capaz de explicar o processo de crescimento económico, o impacto das políticas orçamental e monetária sobre a atividade económica e as flutuações cíclicas nos negócios, entre outros fenómenos conexos.

A noção em si apresenta algumas deficiências, como apontado por Kirman (1992). É difícil conceber uma economia em que todos se comportam de igual forma, pois isso significaria a inexistência do elemento fundamental que faz a economia funcionar: as trocas. À ideia de agente representativo subjaz a noção de que todos os agentes partilham as mesmas preferências, a mesma informação, as mesmas expectativas e as mesmas capacidades. E esta visão é, de facto, demasiado simplista. Assumindo-a à letra seria impossível explicar as ineficiências no mercado de trabalho, a necessidade do Estado enquanto garante da equidade económica ou a volatilidade observada nos mercados (nos mercados em geral e nos mercados financeiros em particular).

Modelos mais sofisticados consideram a existência de agentes heterogéneos. Por exemplo, em Brock e Hommes (1997, 1998), admite-se que dois tipos de agentes interagem – aqueles que conhecem bem o funcionamento do mercado e que possuem informação relevante, os quais podem ser designados como fundamentalistas (conhecem os fundamentos da decisão económica), e aqueles que se limitam a seguir as flutuações de mercado – os quais se designariam por seguidores de tendência. A mera interação entre estes dois grupos é suficiente para explicar padrões de evolução dos indicadores económicos, que estão ausentes quando um só agente representativo é tomado, e que se aproximam mais daquilo que efetivamente a realidade nos revela.

Mesmo tendo presente que o comportamento coletivo está muitas vezes longe de poder ser associado à soma dos comportamentos individuais ou ao comportamento médio daí resultante, o paradigma do agente representativo é importante para compreender o funcionamento do sistema económico, pelo menos numa primeira fase. A ideia é que sobre este paradigma podem então ser construídas estruturas teóricas mais complexas onde a heterogeneidade e a interação estarão presentes. Assim sendo, faz sentido começar por olhar para o comportamento e para as escolhas de um agente representativo, num cenário que os economistas construíram como sendo eminentemente dinâmico.

Este capítulo está organizado do seguinte modo. A secção 2 apresenta a estrutura fundamental do modelo, considerando que o agente vive dois períodos de tempo. Na secção 3, as implicações da formalização apresentada são exploradas. Na secção 4 evolui-se para uma análise intertemporal, que considera uma sucessão eventualmente ampla de períodos de tempo. O modelo intertemporal de referência é sofisticado, nas secções 5 e 6, primeiro introduzindo um novo argumento na função de utilidade, nomeadamente o lazer, e, depois, considerando uma restrição intertemporal que tem em conta a capacidade da economia em acumular capital. A secção 7 aborda o papel do consumo público no modelo de escolha intertemporal. A secção 8 conclui.

2 Estrutura base do modelo

Comecemos por considerar um agente que vive dois períodos de tempo, $t = 1, 2$, e que tem como objetivo maximizar a utilidade do seu consumo. Seja $c_t \geq 0$ o nível de consumo no período t, e defina-se a seguinte função de utilidade

$$U(c_1, c_2) = u(c_1) + \beta u(c_2) \tag{1}$$

A expressão (1) indica que a utilidade conjunta do consumo nos dois períodos é igual à soma das utilidades em cada uma datas consideradas. A utilidade no segundo período vem ponderada por um valor $\beta \in (0,1)$, que será um fator de desconto da utilidade do consumo futuro. Este parâmetro mede o grau de impaciência revelado pelo agente. Um valor de β elevado, ou seja próximo da unidade, indica que o indivíduo é paciente (a utilidade futura é valorizada de forma próxima relativamente àquilo que é a valorização do consumo presente); β próximo de zero traduz forte impaciência (ou seja, o consumo futuro tem pouco valor para o agente hoje).

Podemos apresentar o fator de desconto como $\beta = \frac{1}{1+\rho}$, em que ρ será a taxa de desconto. Nos casos extremos, uma taxa de desconto nula ou um fator de desconto igual a 1 ($\rho = 0, \beta = 1$) representa uma situação em que o consumo futuro não é descontado para o presente; por outro lado, quando a taxa de desconto tende para infinito, e portanto o fator de desconto é nulo ($\rho \to \infty, \beta = 0$), o consumo futuro pura e simplesmente não é valorizado pelo agente.

No que respeita à função de utilidade instantânea, isto é, à função de utilidade para cada um dos períodos de tempo, esta considera-se contínua e diferenciável. A primeira derivada será positiva, $u' > 0$, indicando que a utilidade cresce com o consumo, mas a segunda derivada é negativa, $u'' < 0$, o que implica que a função de utilidade é côncava e que, em consequência a utilidade marginal do consumo é decrescente: incrementos no nível de consumo fazem aumentar a utilidade mas a um ritmo progressivamente menor. Uma classe de funções de utilidade que preenche as referidas condições genéricas é a que corresponde às funções de utilidade com elasticidade de substituição intertemporal constante (CIES),

$$u(c) = \frac{c^{1-\theta} - 1}{1-\theta}, \quad \theta \in (0, +\infty)\backslash\{1\} \quad \text{ou} \quad u(c) = \ln c \tag{2}$$

A elasticidade de substituição intertemporal define-se como $-\frac{u'(c)}{c.u''(c)}$. É imediato verificar que a elasticidade é constante nos dois casos apresentados: 1^o) $-\frac{u'(c)}{c.u''(c)} = \frac{1}{\theta}$;$2^o$) $-\frac{u'(c)}{c.u''(c)} = 1$.

Tendo caracterizado as preferências do agente representativo, torna-se necessário olhar para a respetiva dotação de recursos. O indivíduo terá acesso a determinados níveis de rendimento em cada um dos períodos de tempo considerados. O rendimento no momento $t = 1$ será $y_1 > 0$ e o rendimento no período $t = 2$ vem $y_2 \geq 0$. Em relação a este segundo valor, assume-se a possibilidade de ele ser igual a zero, o que significaria, nesse caso, que o período 2 de vida do agente corresponderia ao seu período de reforma, no qual não obteria quaisquer rendimentos do trabalho. Para além do rendimento em cada um dos períodos, podemos considerar que o agente detém também um nível inicial de riqueza $Q \geq 0$.

Conhecendo a dotação de recursos do agente e o uso que lhes pretende dar, podemos escrever, para cada um dos períodos, uma restrição orçamental que limita as suas escolhas de consumo e o nível de utilidade que pode alcançar. A restrição orçamental do agente no período 1 será:

$$y_1 + Q = c_1 + s \tag{3}$$

A restrição (3) tem a seguinte interpretação: do lado esquerdo da equação temos os recursos do agente no período 1, o rendimento do seu trabalho e a riqueza com que nasce. Do lado direito figura o consumo que o agente pretende realizar e uma nova variável, a poupança, s. A poupança a efetuar no período $t = 1$ tem um propósito bem definido, que é o de reservar recursos para consumo futuro ($t = 2$). Note-se que o valor de s pode ser negativo. O agente pode pedir emprestado para consumo em $t = 1$, sobre o rendimento a adquirir em $t = 2$ (y_2).

Ao introduzir a possibilidade de poupança torna-se necessário ter também em conta a taxa de juro. Como simplificação considere-se que a taxa de juro para poupança e para contração de empréstimos é idêntica, r. Na posse desta taxa, torna-se imediato a apresentação da restrição orçamental para $t = 2$:

$$y_2 + (1 + r)s = c_2 \tag{4}$$

Em (4), encontramos agora do lado esquerdo o rendimento obtido neste período e o resultado da poupança efetuada em $t = 1$. Como o indivíduo não vive para além de $t = 2$, todo o rendimento disponível tem como o destino o consumo neste segundo período.

As duas restrições orçamentais, (3) e (4), podem ser consolidadas numa única restrição orçamental intertemporal. Para chegar a esta, basta resolver (3) em ordem a s e substituir na expressão da outra restrição, (4). Obtém-se,

$$y_1 + \frac{y_2}{1 + r} + Q = c_1 + \frac{c_2}{1 + r} \tag{5}$$

Na restrição orçamental intertemporal (5), o valor global dos recursos financeiros disponíveis, valorizado em $t = 1$, terá correspondência no consumo total dos dois períodos, também avaliado no primeiro período, $t = 1$. Nesta perspetiva não existe desperdício: todo o rendimento é utilizado para consumo (uma visão mais abrangente poderia considerar um sinal de maior ou igual em alternativa a um sinal de igual na restrição). A principal indicação que a restrição orçamental fornece é que, na ausência de restrições à poupança e ao crédito, a separação entre os dois períodos de tempo não é decisiva; independentemente do período em que o nível de rendimento é obtido, o agente pode escolher a afetação do consumo no tempo da forma que mais lhe convier, isto é, de forma a obter o maior nível de utilidade possível.

3 Problema de maximização e respetiva solução

Na secção anterior, constatou-se que o agente tem um objetivo, maximizar a sua utilidade, perante uma determinada restrição orçamental. Nesta secção aborda-se este problema de forma integrada e determina-se uma solução para o mesmo. A solução corresponde à distribuição ótima de níveis de consumo entre os dois momentos de tempo que estão em consideração.

O problema do agente consiste em escolher níveis de consumo em $t = 1$ e $t = 2$ que permitam maximizar a utilidade,

$$\underset{c_1,c_2}{Max}\left\{u(c_1) + \beta.u(c_2)\right\} \text{ sujeito a (5)} \tag{6}$$

No sentido de simplificar a notação, seja $W := y_1 + \frac{y_2}{1+r} + Q$. De acordo com a restrição (5), podemos apresentar o nível de consumo no momento $t = 1$ como $c_1 = W - \frac{c_2}{1+r}$. Substituindo este valor no problema de maximização elimina-se a restrição e ficamos com uma única variável de controle no problema, ou seja, uma única variável para a qual se pretende determinar um valor ótimo, que é c_2,

$$\underset{c_2}{Max}V_1 = \underset{c_2}{Max}\left\{u\left(W - \frac{c_2}{1+r}\right) + \beta.u(c_2)\right\} \tag{7}$$

- A condição de ótimo respeitante ao problema (7) obtém-se igualando a derivada da expressão a zero,

$$\frac{dV_1}{dc_2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\beta u'(c_2)}{u'(c_1)} = \frac{1}{1+r} \tag{8}$$

A condição (7) é interpretável do seguinte modo: o agente maximiza a sua utilidade igualando a taxa marginal de substituição entre consumo futuro e consumo presente $\left(\frac{\beta u'(c_2)}{u'(c_1)}\right)$ ao custo relativo do consumo futuro face ao consumo presente $\left(\frac{1}{1+r}\right)$. Podemos concretizar o resultado ótimo para as funções de utilidade específicas que foram consideradas atrás. Em concreto,

$$u(c) = \frac{c^{1-\theta} - 1}{1-\theta} \Rightarrow c_2^* = \left[\beta.(1+r)\right]^{1/\theta}.c_1^* \tag{9}$$

$$u(c) = \ln c \Rightarrow c_2^* = \beta.(1+r).c_1^* \tag{10}$$

Foquemos atenção em $u(c) = \ln c$. A partir de (5) e (10) é possível apresentar os valores ótimos de consumo em cada um dos períodos e da poupança, c_1^*, c_2^* e s^*, como funções dos níveis de rendimento e riqueza:

$$c_1^* = \frac{1}{1+\beta}.\left(y_1 + \frac{y_2}{1+r} + Q\right) \tag{11}$$

$$c_2^* = \frac{\beta.(1+r)}{1+\beta}.\left(y_1 + \frac{y_2}{1+r} + Q\right) \tag{12}$$

$$s^* = y_1 + Q - c_1 = \frac{\beta}{1+\beta}.(y_1 + Q) - \frac{y_2}{(1+r).(1+\beta)} \tag{13}$$

Os níveis ótimos de consumo e poupança apresentados em (11), (12) e (13) permitem caracterizar com rigor e pormenor aquilo que é a escolha ótima do agente representativo. Ele escolherá consumir uma fração $\frac{1}{1+\beta}$ do seu rendimento e riqueza total W em $t = 1$ e poupar o restante para consumir em $t = 2$. Note-se que quanto maior o rendimento em $t = 1$, relativamente a y_2, mais elevada é a poupança (o que é lógico, uma vez que esta representa a transferência de rendimento de $t = 1$ para $t = 2$).

A solução ótima, encontrada analiticamente, pode ser ilustrada graficamente. A intenção será representar a restrição orçamental (5) no referencial (c_1, c_2), o que exige escrever a expressão sob a seguinte forma,

$$c_2 = (1+r).W - (1+r).c_1 \tag{14}$$

Observe-se que o declive da relação é $1 + r$ e, portanto, quanto maior a taxa de juro, maior a inclinação - em valor absoluto - da restrição orçamental. Quanto mais elevado for o valor de r, maior o impacto que uma variação em c_1 tem sobre c_2, ou seja, uma maior taxa de juro implica que a renúncia a consumo presente produz mais consumo futuro, uma vez que a poupança será melhor remunerada. Podemos então definir $\frac{\Delta c_2}{\Delta c_1} = 1 + r$ como a taxa de substituição intertemporal entre consumo presente e consumo futuro.

*** *fig. 1* ***

No que concerne às preferências, estas representam-se através de curvas de indiferença. As curvas de indiferença correspondem ao conjunto de pontos para os quais o agente é indiferente entre quaisquer planos de consumo, isto é, são coleções de pares de valores consumo hoje - consumo amanhã que representam um mesmo nível de utilidade. Admita-se um qualquer nível de utilidade V^0; para este, a respetiva curva de indiferença é dada por

$$u(c_1) + \beta u(c_2) = V^0 \tag{15}$$

No caso específico de utilidade logaritmica, $u(c) = \ln c$, a curva de indiferença pode ser apresentada, no referencial (c_1, c_2), do seguinte modo

$$c_2 = \exp\left(\frac{V^0 - \ln c_1}{\beta}\right) \tag{16}$$

Considere-se um exemplo numérico; seja $V^0 = 1$ e $\beta = 0.95$. Para estes valores de utilidade e do fator de desconto, obtemos os seguintes pares, que representam combinações de consumo presente e futuro que são indiferentes do ponto de vista da utilidade,

c_1	c_2
1	$2,865$
2	$1,381$
3	$0,901$
...	...

Considerando todos os pares (c_1, c_2) tais que $V^0 = 1$, pode-se desenhar a correspondente curva de indiferença, conforme apresentada na figura 2.

*** *fig. 2* ***

A observação da figura 2 permite constatar que a curva de indiferença é convexa. Este é um resultado comum a qualquer função de utilidade que exiba utilidade marginal decrescente, uma vez que o consumo de parte dos recursos disponíveis em cada um dos momentos de tempo é preferível, do ponto de vista da utilidade, à concentração do consumo num dos períodos. Para níveis de utilidade diferentes de V^0, é possível desenhar outras curvas de indiferença e, quanto mais longe da origem se situar a curva de indiferença, maior o nível de utilidade que ela representará. O conjunto de curvas de indiferença designa-se mapa de indiferença.

Para confirmar a convexidade da curva de indiferença, poder-se-ia também calcular a segunda derivada da expressão da curva; se esta for positiva, a curva de indiferença é convexa:

$$\begin{aligned} \frac{dc_2}{dc_1} &= -\frac{c_2}{\beta . c_1} < 0 \text{ (curva de indiferença é negativamente inclinada);} \\ \frac{d^2 c_2}{dc_1^2} &= \frac{(1+\beta).c_2}{(\beta . c_1)^2} > 0 \text{ (curva de indiferença é convexa).} \end{aligned}$$

Juntando restrição orçamental e mapa de indiferença, poder-se-á analisar o resultado ótimo do ponto de vista gráfico, o que é feito através da figura 3. O par ótimo de consumo intertemporal (c_1^*, c_2^*) corresponde ao ponto tangente entre a restrição orçamental e a curva de indiferença de mais alto nível que é possível atingir. O agente pretenderá obter o maior nível de utilidade possível, mas encontra-se constrangido pela sua restrição; deste modo, de acordo com a forma específica da restrição e das preferências temos um único par de valores de consumo capaz de maximizar a utilidade do agente.

*** *fig. 3* ***

Considere-se agora eventuais alterações no valor de algumas das variáveis centrais do modelo que o agente não controla, nomeadamente no rendimento / riqueza e na taxa de juro. Comece-se por admitir uma alteração nos montantes de rendimento ou riqueza. Recuperando os valores ótimos do consumo em cada um dos períodos e da poupança, (11), (12) e (13), pode-se calcular as seguintes derivadas parciais:

$$\frac{\partial c_1}{\partial Q} = \frac{\partial c_1}{\partial y_1} = \frac{1}{1+\beta} > 0; \frac{\partial c_1}{\partial y_2} = \frac{1}{(1+\beta).(1+r)} > 0 \tag{17}$$

$$\frac{\partial c_2}{\partial Q} = \frac{\partial c_2}{\partial y_1} = \frac{\beta.(1+r)}{1+\beta} > 0; \frac{\partial c_2}{\partial y_2} = \frac{\beta}{1+\beta} > 0 \tag{18}$$

$$\frac{\partial s}{\partial Q} = \frac{\partial s}{\partial y_1} = \frac{\beta}{1+\beta} > 0; \frac{\partial s}{\partial y_2} = -\frac{1}{(1+\beta).(1+r)} < 0 \tag{19}$$

A partir do conjunto de derivadas apresentadas, é possível retirar várias conclusões. Por um lado, verifica-se que o aumento da riqueza inicial e do rendimento em $t = 1$ fazem aumentar o consumo hoje, a poupança e o consumo no próximo período. Por outro lado, o aumento do rendimento no segundo período, y_2, faz aumentar o consumo em ambos os períodos, mas reduz a poupança. Admita-se que o rendimento sofreu uma variação de y_1 para $y_1' > y_1$; como resultado, a restrição orçamental deslocar-se-á para a direita, o que significa que uma curva de indiferença de mais alto nível será atingida e, em consequência, o consumo aumenta nos 2 períodos. Este processo encontra-se ilustrado na figura 4.

**** fig. 4 ****

Quanto à taxa de juro, se o valor desta sofre uma determinada perturbação, para o caso da função de utilidade logarítmica um aumento na taxa de juro reduz o consumo em $t = 1$ aumentando a poupança e o consumo em $t = 2$, como se constata calculando as respetivas derivadas,

$$\frac{\partial c_1}{\partial r} = -\frac{1}{1+\beta}.\frac{y_2}{(1+r)^2} < 0 \tag{20}$$

$$\frac{\partial c_2}{\partial r} = \frac{\beta}{1+\beta}.(y_1 + Q) > 0 \tag{21}$$

$$\frac{\partial s}{\partial r} = \frac{y_2}{(1+r)^2.(1+\beta)} > 0 \tag{22}$$

Graficamente, o declive da restrição orçamental vai alterar-se: se $r' > r$, a restrição orçamental torna-se mais inclinada, conforme evidenciado na figura 5. O gráfico segue o exemplo da função logarítmica: c_1 diminui e c_2 aumenta. No entanto, o consumo pode aumentar ou diminuir em ambos os períodos dependendo do declive da restrição orçamental.

**** fig. 5 ****

Por fim, considere-se a possibilidade de imposição de restrições ao crédito. Restrições ao crédito impõem uma restrição adicional ao modelo, nomeadamente $s \geq 0$. O agente perde a possibilidade de antecipar consumo - ele pode transferir consumo no momento corrente para o momento futuro mas o contrário torna-se inviável, com este novo pressuposto.

Seja (c_1^*, c_2^*, s^*) a escolha ótima de consumo na ausência da restrição ao crédito. Se $s^* \geq 0$, a escolha ótima é a mesma com e sem restrição ao crédito (se o agente pretende poupar, ele não será prejudicado pela incapacidade em pedir emprestado). Se $s^* < 0$ no problema sem restrição, o indivíduo pretenderia pedir emprestado para consumir mais em

$t = 1$ mas não pode trazer nenhum do rendimento do segundo período para o primeiro, através de um empréstimo. Neste caso, o melhor resultado que consegue é

$$c_1 = y_1 + Q; c_2 = y_2; s = 0$$

A incapacidade para pedir emprestado leva a uma perda de bem-estar. Recupere-se a restrição orçamental (3); se $c_1 \leq y_1 + Q$, $s \geq 0$ e a restrição orçamental aplica-se. Se $c_1 > y_1 + Q$, $s < 0$ a restrição orçamental já não se aplica. A restrição intertemporal sob restrições ao crédito terá a forma apresentada na figura 6. Com a possibilidade de pedir emprestado, o agente atingiria a curva de indiferença V^1. A restrição impede-o de atingir tão elevado nível de utilidade; o máximo que pode atingir é o nível de utilidade V^0 correspondente a $(c_1, c_2) = (y_1 + Q, y_2)$.

*** *fig. 6* ***

4 Maximização da utilidade sob um horizonte infinito

O problema de maximização da utilidade do consumo de 2 períodos é agora, nesta secção, ampliado para múltiplos períodos. Tendo em conta que a utilidade futura é descontada para o presente, é razoável considerar-se mesmo um horizonte infinito, dado que, assimptoticamente, o consumo longe no futuro será valorizado de forma negligenciável no presente.

Seja a_t a riqueza (activos financeiros) detida pelo agente. A restrição que o agente enfrenta será:

$$a_{t+1} = y_t + (1 + r).a_t - c_t, \quad a_0 \text{ dado (riqueza inicial)} \tag{23}$$

A equação (23) é uma equação às diferenças (equação dinâmica em tempo discreto). Esta equação considera que rendimento em t mais riqueza acumulada em t menos consumo em t vão compor a riqueza disponível no início do período $t + 1$. Alternativamente, poder-se-á considerar $a_t = y_t + (1 + r).a_{t-1} - c_t$, ou seja, a riqueza acumulada até $t - 1$ mais o rendimento deste período pode ser consumida ou acumulada neste período. As diferenças em termos de análise dinâmica das duas especificações não são relevantes; trata-se apenas de uma questão de interpretação dos períodos temporais em causa. O fundamental é ter presente que a riqueza cresce em função do rendimento obtido no período e da remuneração da riqueza e que diminuirá com os recursos entretanto consumidos.

O objetivo do agente será o de maximizar a utilidade intertemporal, a qual pode ser expressa do seguinte modo,

$$\begin{aligned} U(c_0, c_1, c_2, ...) &= u(c_0) + \beta u(c_1) + \beta^2 u(c_2) + ... \Leftrightarrow \\ U(c) &= \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t.u(c_t) \end{aligned} \tag{24}$$

Em (24), a utilidade total do agente corresponde à soma da utilidade em todos os momentos de tempo, de $t = 0$ até infinito. A utilidade futura é descontada a uma taxa constante (com β o fator de desconto), o que significa que quanto mais longe no futuro se estiver menos valorizado será no presente o consumo correspondente a esse período futuro. O problema que o agente enfrenta poder-se-á representar do seguinte modo:

$$\underset{c_t}{Max} U(c) \text{ sujeito a eq. (23)}$$

Neste problema de otimização estão envolvidas três variaveis: y_t, que é uma variável exógena ou exterior à análise, c_t, que é a variável de controle, ou seja, aquela que o agente pode manipular no sentido de atingir o seu objetivo, e a_t, que é a variável de estado, isto é, a variável endógena que é determinada pela dinâmica de funcionamento do sistema económico. A solução do problema de maximização será uma trajetória ótima de consumo no tempo, $c_0^*, c_1^*, c_2^*, ...$, ou seja, a sucessão de valores de consumo ao longo do tempo que permitem obter o melhor resultado possível do ponto de vista da utilidade do consumo, dada a restrição orçamental que o agente enfrenta e dado o modo como ele desconta a utilidade futura para o presente.

Para resolver o problema de maximização intertemporal aplicam-se técnicas de otimização dinâmica em tempo discreto.[1] Em particular, recorre-se ao Princípio de Pontryagin que, de uma forma muito sintética, exige percorrer os seguintes passos:

1) Começa-se por escrever o Hamiltoniano ou função Hamiltoniana, que corresponde à soma da função de utilidade com o valor descontado dos activos detidos pelo agente no período seguinte, isto é,

$$H(a_t, c_t) = u(c_t) + \beta p_{t+1}.(y_t + ra_t - c_t) \tag{25}$$

Em (25), a variável p_t designa-se variável de co-estado ou preço-sombra da variável de estado (a_t).

2) Determinam-se as condições de primeira ordem:

$$\frac{\partial H}{\partial c_t} = 0 \Rightarrow u'(c_t) = \beta p_{t+1} \tag{26}$$

$$\beta p_{t+1} - p_t = -\frac{\partial H}{\partial a_t} \Rightarrow (1 + r).\beta p_{t+1} = p_t \tag{27}$$

3) Toma-se também a condição de transversalidade:

$$\lim_{t \to \infty} p_t \beta^t a_t = 0 \tag{28}$$

A condição de transversalidade indica que o valor dos activos do agente (quantidade a_t vezes preço p_t) deverá aproximar-se de zero, à medida que o tempo se aproxima de infinito. A intuição é que os agentes não pretendem deter qualquer riqueza no final do horizonte

[1] Para uma análise pormenorizada de aplicação de técnicas de controle óptimo à economia, ver Walde (2011).

definido. A condição de transversalidade evita *ponzi-games* (esquemas em pirâmide), ou seja, que a dívida dos agentes vá crescendo progressivamente no tempo sem limite. Não haverá quem possa pedir emprestado sistematicamente porque a condição de transversalidade evita que haja quem esteja disposto a emprestar (e, portanto, deter indefinidamente activos sobre terceiros).

Recupere-se a função de utilidade $u(c_t) = \ln c_t$; neste caso, a condição (26) vem:

$$\frac{1}{c_t} = \beta p_{t+1} \tag{29}$$

Substituindo (29) em (27) e avançando um período, obtém-se uma equação que caracteriza a dinâmica intertemporal do consumo que emerge do comportamento ótimo do agente representativo,

$$c_{t+1} = \beta.(1+r).c_t \tag{30}$$

Ao analisar a equação (30), constata-se que o resultado para dois períodos é um caso particular deste. A equação basicamente indica que o consumo cresce no tempo à taxa constante $\frac{c_{t+1}-c_t}{c_t} = \beta.(1+r) - 1$. A razão de ser deste padrão de crescimento resulta diretamente do facto de a riqueza do agente também crescer a uma taxa constante, uma vez que a poupança acumulada é remunerada à taxa r, a qual é também ela constante.

A referida taxa de crescimento do consumo pode ser nula, positiva ou negativa. No caso em que $\beta = \frac{1}{1+r}$, ou seja, o mercado desconta o rendimento futuro à mesma taxa que os consumidores descontam a utilidade futura, $r = \rho$, o consumo é constante no tempo: $c_{t+1} = c_t, \forall t = 0, 1, ...$ Se $\beta > \frac{1}{1+r}$, então o agente é paciente e a taxa de juro é relativamente elevada ($r > \rho$). Como o agente é paciente, não se importará de adiar o consumo e sendo a taxa de juro alta poupar compensa. Como resultado, a taxa de crescimento do consumo é positiva. Finalmente, no cenário $\beta < \frac{1}{1+r}$, o agente é impaciente e a taxa de juro é baixa ($r < \rho$). A impaciência e o facto da poupança ser pouco atrativa resultam numa taxa de crescimento negativa do consumo (o consumo presente será superior ao consumo futuro).

Considere-se um pequeno exemplo. Determinado agente tem um horizonte de vida esperado de 80 anos e obtém rendimento ao longo dos primeiros 60 (admite-se que nos primeiros anos de vida os seus progenitores lhe asseguram um rendimento idêntico ao obtido nos anos de trabalho, de modo que não se torna necessário fazer qualquer distinção entre o período pré-entrada no mercado de trabalho e o período em que o indivíduo obtém um rendimento do trabalho). Admite-se que a riqueza inicial é zero e que a taxa de juro também é zero (ou seja, $\beta = 1$). Sendo o rendimento por período 10.000 €, o rendimento total é $60 \times 10.000 = 600.000$ €. O consumo por período será dado por $80 \times c = 600.000 \Rightarrow c = 7.500$ €. Com estes dados, é imediato o cálculo da riqueza do indivíduo em cada período,

$$\begin{aligned}
a_1 &= 10.000 - 7.500 = 2.500 \\
a_2 &= 2.500 + (10.000 - 7.500) = 5.000 \\
a_3 &= 5.000 + (10.000 - 7.500) = 7.500 \\
&\quad ... \\
a_{60} &= 147.500 + (10.000 - 7.500) = 150.000 \\
a_{61} &= 150.000 - 7.500 = 142.500 \\
a_{62} &= 142.500 - 7.500 = 135.000 \\
&\quad ... \\
a_{80} &= 7.500 - 7.500 = 0
\end{aligned}$$

De acordo com este exemplo, o agente escolhe um padrão constante de consumo ao longo do tempo, dada a taxa de juro e a taxa de desconto da utilidade futura, o que vai implicar um acumular de activos durante o período de vida ativa. Esta poupança será então utilizada nos últimos 20 anos da vida do indivíduo, para suportar o mesmo nível de consumo que anteriormente, na ausência de qualquer rendimento. As trajetórias de acumulação de riqueza, rendimento e consumo ao longo do período de vida do agente, neste exemplo, estão representadas na figura 7.

*** *fig. 7* ***

É evidente que o exemplo apresentado é simplista. Considera-se que o agente sabe exatamente quantos períodos de tempo irá viver, de modo que tem a garantia exacta de quanto deverá poupar (durante a vida ativa) e quanto deverá desaforrar (na reforma), de modo a evitar quaisquer flutuações no seu nível de consumo. Na realidade isto não acontece; para além da incerteza quanto ao número de períodos que se irá viver, é também necessário ter presente a incerteza relativa ao rendimento futuro, a possibilidade de a taxa de juro se alterar, os estímulos que podem levar a uma modificação da preferência intertemporal, entre outros fatores. Independentemente de tudo isto, o modelo ajuda a compreender o modo como o agente gere os seus rendimentos no sentido de distribuir o consumo no tempo.

5 Lazer na função de utilidade

O modelo de maximização intertemporal, que se caracterizou nas secções precedentes, pode ser estendido em diversas direções. Uma delas é a consideração da variável lazer na função utilidade. É através da consideração das escolhas trabalho-lazer no modelo de agente representativo que a teoria económica formulou uma influente explicação para a ocorrência de ciclos económicos - a teoria dos ciclos económicos reais, que tem origem no trabalho de Kydland e Prescott (1982), faz uso do modelo de maximização intertemporal da utilidade para sugerir que perante um choque tecnológico existe um incentivo acrescido para trocar lazer por trabalho, o que despoleta um período de expansão. Fases de recessão estariam associados a um menor ritmo de inovação tecnológica, que se concretizariam em períodos em que o agente escolheria de modo ótimo trocar trabalho por lazer (uma vez que o lazer é um argumento da função utilidade, a par do consumo). Nesta perspetiva dos ciclos económicos, não existiria desemprego involuntário, uma vez que o maior ou menor nível de ocupação do tempo do agente corresponderia à solução do seu problema de ótimo.

Considere-se que o rendimento é gerado através de uma função de produção linear no fator trabalho, $y_t = Al_t$. Nesta função de produção, $A > 0$ é o nível de tecnologia e l_t é a variável representativa do fator trabalho. Normalize-se o número de horas de trabalho em cada período t para 1, de modo que se l_t define o número de horas de trabalho, $1 - l_t$ será o número de horas de lazer. O agente vai valorizar o lazer na sua função de utilidade, de modo que se considerará uma função de utilidade com dois argumentos: $u(c_t, 1 - l_t)$; $u_c > 0, u_{cc} < 0, u_{1-l} > 0, u_{1-l,1-l} < 0$. As derivadas parciais indicam que o lazer, tal como o consumo, está sujeito a utilidade marginal decrescente - mais lazer implica sempre mais utilidade, mas os acréscimos de utilidade resultantes dos acréscimos de tempo de lazer serão progressivamente menores. Uma possível forma funcional para a função de utilidade será: $u(c_t, 1 - l_t) = \ln c_t + m. \ln(1 - l_t)$, $m > 0$. O parâmetro m representa o peso relativo do lazer na função de utilidade, em relação ao consumo.

O agente representativo irá resolver o seguinte problema de otimização:

$$\underset{c_t, l_t}{Max} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t . u(c_t, 1 - l_t) \text{ sujeito a } a_{t+1} = Al_t + (1 + r).a_t - c_t,\ a_0 \text{ dado} \tag{31}$$

No problema (31), existem duas variáveis de controle, o que significa que o agente pode fazer duas escolhas. Uma é a já caracterizada entre consumo e poupança - consumir mais hoje implica que não se acumulará activos que possibilitarão um nível maior de consumo no futuro. A outra escolha ou *trade-off* é o que resulta da opção entre trabalho e lazer; o lazer produz utilidade diretamente, mas induz a que utilize menor quantidade de trabalho para gerar rendimento, e como menos rendimento reduzir-se-á também o nível de consumo, sendo que este sim gera diretamente utilidade, tal como o lazer. A variável de estado continua a ser a_t e os restantes elementos do problema são parâmetros que influenciam os resultados a obter.

Para resolver o problema aplica-se o mesmo procedimento que anteriormente. Isto é, começa-se por apresentar a função Hamiltoniana,

$$H(a_t, c_t, l_t) = \ln c_t + m. \ln(1 - l_t) + \beta p_{t+1}.(Al_t + ra_t - c_t) \tag{32}$$

e escrevem-se as condições de primeiras ordem, que são agora mais uma que anteriormente em função da nova variável de controle que se está a tomar,

$$\frac{\partial H}{\partial c_t} = 0 \Rightarrow \frac{1}{c_t} = \beta p_{t+1} \tag{33}$$

$$\frac{\partial H}{\partial l_t} = 0 \Rightarrow A\beta p_{t+1} = \frac{m}{1-l_t} \tag{34}$$

$$\beta p_{t+1} - p_t = -\frac{\partial H}{\partial a_t} \Rightarrow (1+r).\beta p_{t+1} = p_t \tag{35}$$

A condição de transversalidade é:

$$\lim_{t\to\infty} p_t \beta^t a_t = 0 \tag{36}$$

Da combinação das condições de ótimo resulta a mesma taxa de crescimento constante do consumo obtida no caso original: $c_{t+1} = \beta.(1+r).c_t$; e uma equação dinâmica adicional para a fração l_t:

$$l_{t+1} = 1 - \beta.(1+r) + \beta.(1+r).l_t \tag{37}$$

Como apresentado, o modelo conduz a uma solução de canto: no estado de equilíbrio de longo prazo, todo o tempo é afeto a trabalho. O estado de equilíbrio define-se como a situação em que a variável em causa obedece à condição $l^* := l_{t+1} = l_t$, ou seja, trata-se do cenário em que a variável já efetuou o seu caminho de transição e a partir de então permanece constante. Aplicando esta condição a (37), é fácil verificar que $l^* = 1$. O facto de o estado de equilíbrio indicar que neste equilíbrio o agente prescinde de todo o lazer em favor de tempo de trabalho, não significa à partida que tenha de ser este o resultado de longo prazo a obter. Não basta calcular o estado de equilíbrio para poder caracterizar o resultado de longo prazo resultante da formalização sugerida. É também necessário estudar a estabilidade do ponto de equilíbrio, ou seja, averiguar se efetivamente a dinâmica do sistema o empurra para l^* qualquer que seja o estado inicial l_0.

O facto de o equilíbrio ser ou não estável irá depender, novamente, da relação entre β e $1+r$. Os possíveis resultados são os seguintes:

- Se $\beta = \frac{1}{1+r}$, então $l_{t+1} = l_t$ (da mesma forma que $c_{t+1} = c_t$), ou seja, l_t permanece no nível inicial l_0.

- Se $\beta > \frac{1}{1+r}$ (agente paciente, taxa de juro elevada), neste caso há divergência para $l = 0$ (indivíduo renuncia ao trabalho). Como a taxa de juro é elevada, o agente pode optar por viver dos rendimentos financeiros, sendo que neste caso o agente é paciente e portanto está disposto a sacrificar o seu consumo presente em função de consumo futuro.

- Se $\beta < \frac{1}{1+r}$ (impaciência, taxa de juro baixa), então haverá convergência para $l = 1$ (indivíduo renuncia ao lazer). Como taxa de juro é baixa, rendimentos financeiros são escassos para gerar recursos para consumir, e por isso o agente renuncia ao lazer, num contexto em que revela impaciência.

Os dois últimos casos encontram-se graficamente ilustrados nas figuras 8 e 9, respetivamente. Percebe-se que a relação entre β e $\frac{1}{1+r}$ determina o declive da equação dinâmica (37) e o facto de esse declive ser superior ou inferior à unidade impõe o tipo de dinâmica;

haverá divergência face ao ponto de equilíbrio quando o declive é superior a 1 e convergência no caso contrário.

**** fig. 8 ****

**** fig. 9 ****

O estudo da estabilidade também pode ser conduzido analiticamente. Haverá estabilidade (convergência para o equilíbrio) se $\frac{dl_{t+1}}{dl_t}$ se encontra no interior do círculo unitário: (-1,1); haverá instabilidade (divergência face ao equilíbrio) no caso contrário. Como $\frac{dl_{t+1}}{dl_t} = \beta.(1+r) > 0$, há estabilidade se $\beta.(1+r) < 1$ e instabilidade se $\beta.(1+r) > 1$.

Obviamente, se a mesma análise fosse feita com a variável lazer em alternativa à variável trabalho, chegar-se-ia aos mesmos resultados por outra via; rearranjando a equação (37), pode-se escrever

$$1 - l_{t+1} = \beta.(1+r).(1-l_t) \tag{38}$$

Para a nova equação dinâmica, (38), o ponto de equilíbrio é $(1-l)^* = 0$. Há convergência para este ponto se $\beta.(1+r) < 1$; haverá divergência em direção a 1 se $\beta.(1+r) > 1$, o que configura exatamente o mesmo resultado que se obteve quando a variável da análise era a fração de trabalho.

6 Acumulação de capital

Imagine-se que em alternativa a ter um rendimento do trabalho e uma riqueza que cresce a uma taxa constante dado certo investimento financeiro, o agente aplica o seu trabalho (uma quantidade constante L) e os seus activos (designe-se estes agora por capital físico, K_t) para produzir um qualquer bem homogéneo que pode ser consumido ou reinvestido na atividade produtiva. A quantidade de capital disponível em $t+1$ será composta por: *i*) a quantidade de capital disponível em t , a que se acrescenta *ii*) a quantidade produzida em t , e se subtrai *iii*) o consumo em t e *iv*) a depreciação do capital em t.

A equação dinâmica que agora nos interessa para descrever a restrição de recursos que o agente representativo enfrenta é

$$K_{t+1} - K_t = Y_t - C_t - \delta K_t, \ \ K_0 \text{ dado} \tag{39}$$

Na equação dinâmica (39), $\delta \in (0,1)$ representa a taxa de depreciação do capital. A variável Y_t corresponde ao rendimento produtivo, o qual é dado por uma função de produção $Y_t = F(K_t, L)$ que exibirá as seguintes propriedades:

1) Rendimentos marginais positivos e decrescentes:

$$\frac{\partial F}{\partial K} > 0; \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0; \frac{\partial F}{\partial L} > 0; \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0.$$

2) Rendimentos constantes à escala (a função de produção é homogénea de grau 1):

$$F(\epsilon K_t, \epsilon L) = \epsilon F(K_t, L),\ \forall \epsilon > 0$$

3) Verificam-se as condições de Inada (1963):

$$\begin{aligned} \lim_{K\to 0}(F_K) &= \lim_{L\to 0}(F_L) = \infty \\ \lim_{K\to\infty}(F_K) &= \lim_{L\to\infty}(F_L) = 0 \end{aligned}$$

A equação às diferenças (39) pode ser escrita em termos intensivos, ou seja, apresentando as variáveis por unidade de trabalho: $k_t := \frac{K_t}{L}$; $y_t := \frac{Y_t}{L}$; $c_t := \frac{C_t}{L}$. Nesta especificação do modelo, considera-se que a quantidade do fator de produção trabalho é constante ao longo do tempo; poder-se-ia admitir que L crescesse a uma taxa constante, mas tal não altera as conclusões a que se pretende chegar. Dada a propriedade de rendimentos constantes à escala:

$$Y_t = F(K_t, L) \Leftrightarrow Y_t = L.F\left(\frac{K_t}{L}, \frac{L}{L}\right) \Leftrightarrow \frac{Y_t}{L} = F\left(\frac{K_t}{L}, 1\right) \Leftrightarrow y_t = f(k_t)$$

A equação (39) pode então ser reapresentada sob a seguinte forma:

$$k_{t+1} = f(k_t) - c_t + (1-\delta).k_t \tag{40}$$

A forma funcional mais comum para a função de produção é a conhecida função de produção Cobb-Douglas, a qual obedece às propriedades genéricas das funções de produção definidas acima. Esta função é a seguinte,

$$Y_t = AK_t^{\alpha} L^{1-\alpha} \tag{41}$$

com A o índice de tecnologia e $\alpha \in (0,1)$ a elasticidade produto-capital; esta representa o peso relativo que o capital tem na produção de bens comparativamente com o outro fator, o trabalho. Sob forma intensiva, a função de produção Cobb-Douglas pode apresentar-se do seguinte modo: $y_t = Ak_t^{\alpha}$.

O problema de otimização intertemporal que está agora sob consideração é .

$$\underset{c_t}{Max} U(c) \text{ sujeito a eq. (40)}$$

Adotando o mesmo procedimento que em ocasiões anteriores, constrói-se a função Hamiltoniana,

$$H(k_t, c_t) = u(c_t) + \beta p_{t+1}.(Ak_t^{\alpha} - c_t - \delta k_t) \tag{42}$$

e apresentam-se as condições de ótimo

$$\frac{\partial H}{\partial c_t} = 0 \Rightarrow \frac{1}{c_t} = \beta p_{t+1} \tag{43}$$

$$\beta p_{t+1} - p_t = -\frac{\partial H}{\partial k_t} \Rightarrow \left(1 + \alpha A k_t^{-(1-\alpha)} - \delta\right).\beta p_{t+1} = p_t \tag{44}$$

Uma vez mais, é ainda necessário considerar a condição de transversalidade: $\lim_{t\to\infty} p_t \beta^t k_t = 0$.

Da combinação das condições de primeira ordem emerge a equação dinâmica que define a trajetória temporal do consumo,

$$c_{t+1} = \beta.\left(1 + \alpha A k_{t+1}^{-(1-\alpha)} - \delta\right).c_t \tag{45}$$

O estudo de dinâmica do modelo exige agora considerar simultaneamente duas equações: a que caracteriza a evolução do consumo, a qual se acabou de apresentar, (45), e a equação representativa da acumulação de capital, (40). O primeiro passo no estudo do comportamento dinâmico do modelo consiste em determinar o estado de equilíbrio, ou seja, os valores de longo prazo para os quais tendem a variável de estado (k_t) e a variável de controle (c_t): $k^* := k_{t+1} = k_t$; $c^* := c_{t+1} = c_t$. O respetivo cálculo permite obter

$$(k^*, c^*) = \left[\left(\frac{\alpha A}{1/\beta - 1 + \delta}\right)^{1/(1-\alpha)}; A k^{*\alpha} - \delta k^*\right] \tag{46}$$

Verifica-se que capital e consumo assumem valores constantes no longo prazo. Pode também constatar-se que a quantidade de capital de equilíbrio aumenta com um maior nível de tecnologia, uma mais baixa taxa de depreciação do capital e maior paciência (β mais alto).

No sentido de estudar a estabilidade do modelo, torna-se necessário analisar o sistema dinâmico (45)-(40) na vizinhança do ponto de equilíbrio. Para tal, constrói-se a matriz Jacobiana do sistema, que terá como elementos as derivadas de cada uma das funções em ordem a cada uma das variáveis endógenas, com estas derivadas avaliadas no respetivo ponto de equilíbrio que se determinou. O cálculo conduz-nos a:

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial k_{t+1}}{\partial k_t}\right|_{(k^*,c^*)} &= \frac{1}{\beta} \\
\left.\frac{\partial k_{t+1}}{\partial c_t}\right|_{(k^*,c^*)} &= -1 \\
\left.\frac{\partial c_{t+1}}{\partial k_t}\right|_{(k^*,c^*)} &= -\varphi \\
\left.\frac{\partial c_{t+1}}{\partial c_t}\right|_{(k^*,c^*)} &= 1 + \beta\varphi
\end{aligned}$$

com $\varphi := \frac{1-\alpha}{\alpha}.\left(\frac{1-\beta}{\beta} + \delta\right).\left[\frac{1-\beta}{\beta} + (1-\alpha).\delta\right]$. A matriz Jacobiana é, então,

$$J = \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta} & -1 \\ -\varphi & 1 + \beta\varphi \end{bmatrix} \tag{47}$$

E o sistema linearizado na vizinhança do equilíbrio pode ser apresentado como:

$$\begin{bmatrix} k_{t+1} - k^* \\ c_{t+1} - c^* \end{bmatrix} = J. \begin{bmatrix} k_t - k^* \\ c_t - c^* \end{bmatrix} \tag{48}$$

Para determinar a estabilidade do ponto de equilíbrio, aplicam-se as respetivas condições de estabilidade,[2]

$$\begin{aligned} i)\ 1 + Tr(J) + Det(J) &> 0 \\ ii)\ 1 - Tr(J) + Det(J) &> 0 \\ iii) \qquad\quad 1 - Det(J) &> 0 \end{aligned}$$

Nas condições apresentadas, $Tr(J)$ e $Det(J)$ representam, respetivamente, traço e determinante da matriz Jacobiana.

Se as três condições forem satisfeitas, os dois valores próprios da matriz Jacobiana encontram-se no interior do círculo unitário e o sistema é estável: qualquer que seja (k_0, c_0), o sistema tende para o estado de equilíbrio (k^*, c^*). Se as condições (i) e (ii) são simultaneamente não satisfeitas ou a condição (iii) é não satisfeita quando as outras duas o são, o sistema é instável (os dois valores próprios estão fora do círculo unitário): há divergência, ou seja, independentemente do valor de (k_0, c_0), o equilíbrio (k^*, c^*) nunca será atingido. Se as condições (i) ou (ii) não são satisfeitas [independentemente de (iii) ser satisfeita ou não], há um equilíbrio ponto-sela (só um dos valores próprios da matriz J se encontra no interior do círculo unitário); neste caso, há uma dimensão estável no sistema bi-dimensional considerado. No caso presente, em que existe uma variável de estado e uma variável de controle, tal é suficiente para garantir convergência: o agente ajustará o nível de consumo de forma a que a trajetória estável seja seguida. A figura 10 resume o raciocínio apresentado, permitindo de forma imediata perceber qual o tipo de estabilidade para os correspondentes valores de traço e determinante da matriz Jacobiana.

**** fig. 10 ****

No caso em apreço, verifica-se que $Tr(J) = \frac{1-\beta}{\beta} + \beta\varphi$; $Det(J) = \frac{1}{\beta}$, e as condições de estabilidade são, em concreto,

$$\begin{aligned} 1 + Tr(J) + Det(J) &= 2.\frac{1-\beta}{\beta} + \beta\varphi > 0 \\ 1 - Tr(J) + Det(J) &= -\beta\varphi < 0 \\ 1 - Det(J) &= -\frac{1-\beta}{\beta} < 0 \end{aligned}$$

Confirma-se, para o caso em estudo, a existência de estabilidade ponto-sela. No diagrama traço-determinante, o sistema considerado encontra-se acima da linha $Det(J) = 1$

[2] Ver, por exemplo, Medio e Lines (2001) para a caracterização e derivação destas condições.

e para a direita de $1 - Tr(J) + Det(J) = 0$, onde o equilíbrio é ponto-sela, conforme se pode confirmar na figura 10.

A trajetória-sela ou trajetória estável pode também ser desenhada no diagrama (k_t, c_t), o que se faz na figura 11. Para tal, considere-se o sistema linearizado:

$$k_{t+1} - k^* = \frac{1}{\beta}.(k_t - k^*) - (c_t - c^*) \tag{49}$$

$$c_{t+1} - c^* = -\varphi.(k_t - k^*) + (1 + \beta\varphi).(c_t - c^*) \tag{50}$$

Considere-se também as retas para as quais $k_{t+1} = k_t$ e $c_{t+1} = c_t$ (as quais se podem designar por isoclinas):

$$\frac{1-\beta}{\beta}.(k_t - k^*) - (c_t - c^*) = 0 \Leftrightarrow c_t - c^* = \frac{1-\beta}{\beta}.(k_t - k^*) \tag{51}$$

$$\beta\varphi.(c_t - c^*) - \varphi.(k_t - k^*) = 0 \Leftrightarrow c_t - c^* = \frac{1}{\beta}.(k_t - k^*) \tag{52}$$

Observe-se que:

- $\frac{\partial k_{t+1}}{\partial k_t} = \frac{1}{\beta} > 0$: esta condição significa que o capital tende a aumentar à direita da respetiva isoclina (o que se representa através das setas horizontais na figura 11);
- $\frac{\partial c_{t+1}}{\partial k_t} = -\varphi < 0$: esta condição significa que o capital tende a diminuir à direita da respetiva isoclina (o que se representa através das setas verticais na figura 11).

**** fig. 11 ****

A trajetória estável ou trajetória-sela é aquela que segue um caminho de convergência para o ponto de equilíbrio, dadas as setas direccionais. É isso que se encontra representado na figura 12. Confirma-se que a trajetória-sela tem inclinação positiva: dado um qualquer valor inicial para o consumo, o agente vai ajustar esse nível de consumo, colocando-o sobre a trajetória-sela, a qual é seguida até o resultado de equilíbrio ser alcançado. Na convergência para o equilíbrio, capital e consumo evoluem no mesmo sentido.

**** fig. 12 ****

A este modelo de escolha intertemporal dá-se por vezes a designação de modelo de Ramsey, em referência ao trabalho de Ramsey (1928). A adaptação do modelo para as escolhas consumo - acumulação de capital foi essencialmente feita por Cass (1965) e Koopmans (1965).

7 Despesa pública e crescimento de longo prazo

Um último apontamento neste capítulo relaciona-se com a inclusão do consumo público no modelo de agente representativo. Se o consumo público for financiado com impostos não distorcedores (impostos *lump-sum*), tal significa que é irrelevante considerar a forma de financiamento da despesa pública, o que permite tornar muito simples a forma como podemos incluir a despesa do Estado neste modelo.

Seja $g_t \geq 0$ o nível de consumo público. O problema de controle ótimo toma agora a seguinte forma,

$$\begin{aligned} & \underset{c_t}{Max} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t . u(c_t, g_t) \\ \text{sujeito a} & : \\ k_{t+1} &= Ak_t^{\alpha} - c_t - g_t + (1-\delta).k_t, \quad k_0 \text{ dado} \end{aligned} \tag{53}$$

De acordo com a apresentação do problema, sobre o nível de produto $y_t = Ak_t^{\alpha}$ o indivíduo paga impostos t_t que são diretamente utilizados para financiar despesa pública g_t. Para além disso, a despesa pública gera eventualmente utilidade para o consumidor, de modo que surge como argumento na função de utilidade. A função de utilidade pode ser do tipo $U(c_t, g_t) = \ln c_t + \gamma . \ln g_t$, $\gamma \geq 0$.

Se c_t e g_t surgem de idêntica forma no modelo, porquê separá-los em duas variáveis? Porque apesar de o consumidor representativo retirar utilidade de ambas as formas de consumo (eventualmente mais do consumo privado do que do consumo público: $\gamma < 1$), só c_t é variável de controle; g_t é um valor exógeno para o agente, uma vez que o problema de controle ótimo considerado é um problema do consumidor privado. O facto de ser exógeno e, portanto, fora do controlo do agente não significa que o consumo público não produza utilidade; os bens públicos (segurança, defesa, alguma educação e alguma saúde) só podem ser fornecidos pelo Estado mas satisfazem necessidades primárias dos indivíduos e, por conseguinte, criam utilidade.

O problema de ótimo resolve-se como em ocasiões anteriores, obtendo-se o seguinte sistema de equações às diferenças:

$$\left\{ \begin{array}{l} k_{t+1} = Ak_t^{\alpha} - c_t - g_t + (1-\delta).k_t \\ c_{t+1} = \beta . \left(1 + \alpha A k_{t+1}^{-(1-\alpha)} - \delta \right) .c_t \end{array} \right. \tag{54}$$

O estado de equilíbrio da variável capital é o mesmo que na ausência de despesa pública:

$$k^* = \left(\frac{\alpha A}{1/\beta - (1-\delta)} \right)^{1/(1-\alpha)} \tag{55}$$

enquanto que o resultado de equilíbrio para o consumo privado será:

$$c^* = Ak^{*\alpha} - g^* - \delta k^* \tag{56}$$

O consumo privado de equilíbrio vem diminuído da despesa pública de equilíbrio. A matriz Jacobiana é também a mesma do problema original, de modo que as propriedades de estabilidade serão idênticas: a convergência para o equilíbrio far-se-á através de uma trajetória-sela (trajetória estável uni-dimensional), a qual se constatou ter declive positivo: na convergência para o equilíbrio, a acumulação de capital é acompanhada por variações positivas de consumo.

A análise que a despesa pública permite é essencialmente uma análise do modo como o equilíbrio de longo prazo é perturbado; este estudo pode ser realizado recuperando o diagrama de fases do modelo de Ramsey. Recupere-se as isoclinas (51) e (52) e considere-se $\Delta g > 0$. Esta variação não afeta o declive das isoclinas, mas desloca-as paralelamente para baixo / direita (dado que c^* diminui), de modo a permitir um novo equilíbrio para idêntico k^* e menor c^*, o que se pode verificar na figura 13. O gráfico confirma a intuição de que se o consumo público aumenta, menores recursos ficarão disponíveis para consumo privado, numa economia em que os impostos em nada distorcem a capacidade produtiva (e, portanto, a quantidade de capital permanece constante).

**** fig. 13 ****

A transição de um ponto de equilíbrio para o outro exige a formação de uma nova trajetória-sela ou trajetória de equilíbrio (recorde-se que a trajetória-sela é uma reta com inclinação positiva maior que a da isoclina $k_{t+1} = k_t$ e menor que a da isoclina $c_{t+1} = c_t$). A expressão da trajetória-sela pode ser obtida analiticamente; ela é dada por

$$c_t - c^* = \frac{p_{21}}{p_{11}}.(k_t - k^*) \tag{57}$$

com p_{11} e p_{21} os elementos do vetor próprio associado ao valor próprio da matriz Jacobiana que se encontra dentro do círculo unitário (e, portanto, correspondente à dimensão estável do modelo). Os valores próprios da matriz Jacobiana podem determinar-se do seguinte modo:

$$\lambda_i = \frac{Tr(J)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{Tr(J)}{2}\right)^2 - Det(J)} \tag{58}$$

Apesar de não ser possível encontrar uma expressão simples para os valores próprios, as condições de estabilidade analisadas atrás já permitiram identificar a existência de um valor próprio dentro do círculo unitário e de outro fora do círculo unitário. Seja λ^s o valor próprio correspondente à dimensão estável $[\lambda^s \in (-1, 1)]$. O respetivo vector próprio será $(1/\beta - \lambda^s).p_{11} - p_{21} = 0 \Rightarrow \frac{p_{21}}{p_{11}} = 1/\beta - \lambda^s$. Assim, determina-se a expressão da trajetória estável:

$$c_t - c^* = (1/\beta - \lambda^s).(k_t - k^*) \tag{59}$$

A inclinação da trajetória-sela é positiva e encontra-se entre $\frac{1}{\beta} - 1$ e $\frac{1}{\beta}$. Assim sendo, $\frac{1}{\beta} - 1 < \frac{1}{\beta} - \lambda^s < \frac{1}{\beta} \Leftrightarrow -1 < \lambda^s < 1$. Logo, confirma-se que $\lambda^s \in (-1, 1)$. O declive da trajetória estável não se irá alterar com variações em g (recorde-se que λ^s apenas depende dos parâmetros α, β e δ). De modo que apenas se altera a ordenada na origem; perante um aumento em g, reduz-se c^*, donde a trajetória estável se desloca paralelamente para a direita. Este resultado encontra-se ilustrado na figura 14.

**** fig. 14 ****

8 Conclusão

O modelo de agente representativo, apesar de se lhe poder apontar várias limitações, é um referencial de modelização bastante poderoso. Ao longo deste capítulo foi possível perceber que o modelo permite explicar as escolhas entre consumo e poupança, num cenário de dois períodos ou num cenário intertemporal muito mais vasto. Esta estrutura teórica possibilita também introduzir muitas outras componentes importantes para a perceção das decisões de um agente racional; em concreto, verificou-se que é possível analisar as escolhas trabalho-lazer, a relação entre otimização do consumo e acumulação de capital, e também o modo como a despesa pública pode perturbar as decisões do agente privado.

O paradigma do agente representativo não pode nem deve ser visto como a referência para a explicação de todo e qualquer fenómeno económico mas é certamente um primeiro passo para desenvolver um raciocínio analítico sobre os fundamentos do funcionamento do sistema económico.

Referências

Barro, Robert J. e Xavier Sala-i-Martin (1995). *Economic Growth.* New York: McGraw-Hill.

Brock, William A. e Cars H. Hommes (1997). "A Rational Route to Randomness." *Econometrica*, vol. 65, pp.1059-1095.

Brock, William A. e Cars H. Hommes (1998). "Heterogeneous Beliefs and Routes to Chaos in a Simple Asset Pricing Model." *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 22, pp. 1235-1274.

Cass, David (1965). "Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation." *Review of Economic Studies*, vol. 32, pp. 233-240.

Inada, Ken-Ichi (1963). "On a Two-Sector Model of Economic Growth: Comments and a Generalization." *Review of Economic Studies*, vol. 30, pp. 119-127

Kirman, Alan P. (1992). "Whom or What Does the Representative Individual Represent?" *Journal of Economic Perspectives*, vol. 6, nº 2, pp. 117-136.

Koopmans, Tjalling C. (1965). "On the Concept of Optimal Economic Growth." em *The Econometric Approach to Development Planning.* Amsterdam: North Holland.

Kydland, Finn e Edward C. Prescott (1982). "Time to Build and Aggregate Fluctuations." *Econometrica*, vol. 50, pp. 1345-1370.

Medio, Alfredo e Marji Lines (2001). *Nonlinear Dynamics: a Primer.* Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Ramsey, Frank (1928). "A Mathematical Theory of Saving." *Economic Journal*, vol. 38, pp. 543-559.

Stokey, Nancy L. e Robert E. Lucas, com Edward C. Prescott (1989). *Recursive Methods in Economic Dynamics*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Walde, Klaus (2011). *Applied Intertemporal Optimization*. Mainz, Germany: Mainz University Gutenberg Press.

O Modelo de Agente Representativo - Gráficos

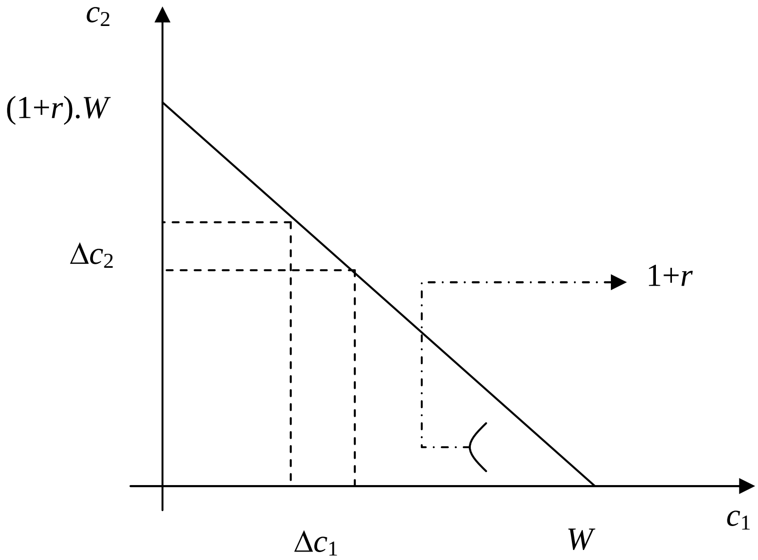


fig. 1

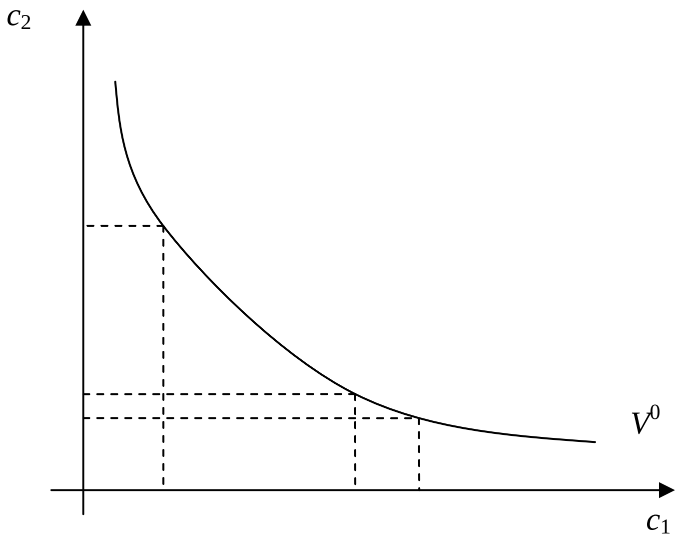


fig. 2

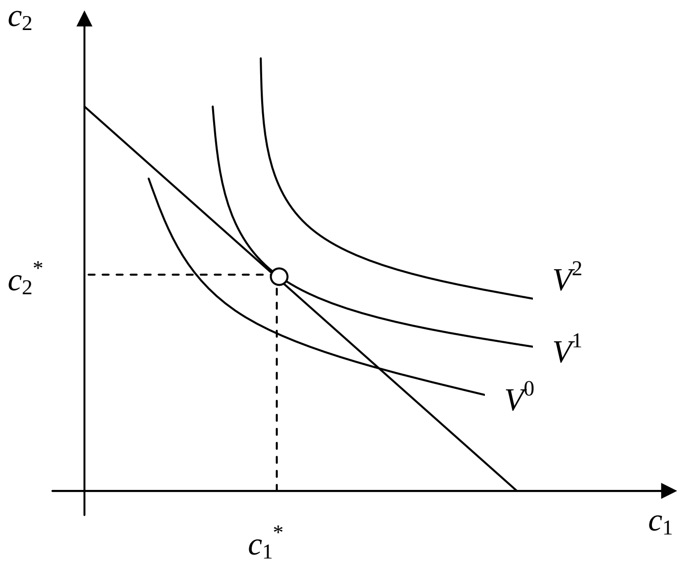


fig. 3

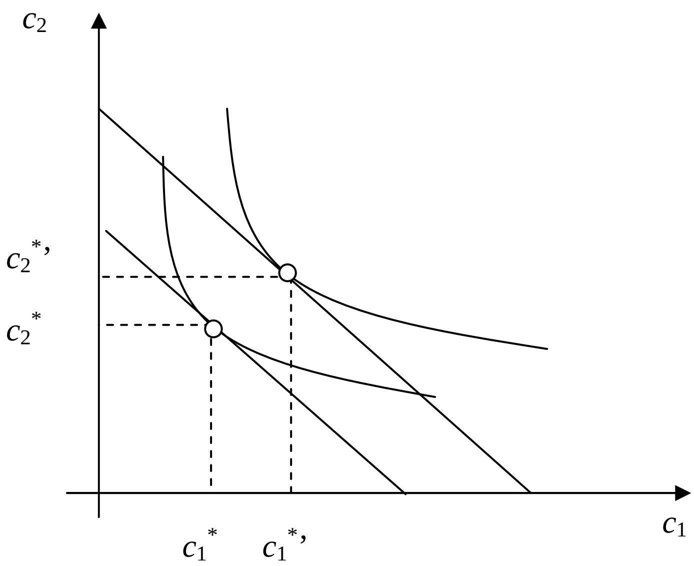


fig. 4

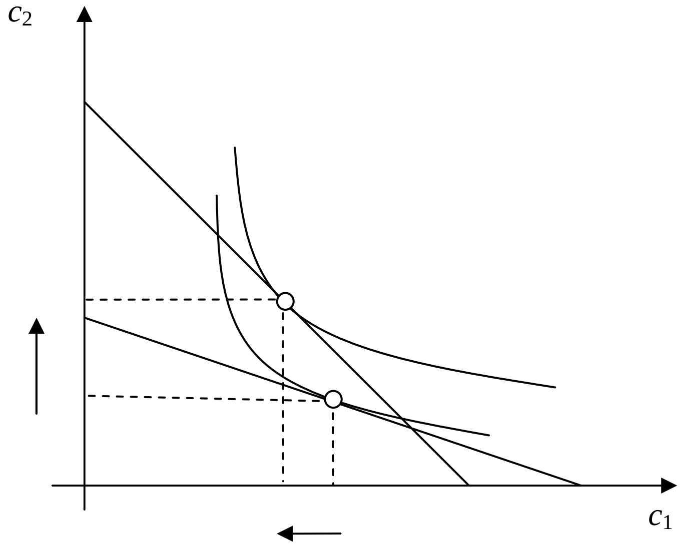


fig. 5

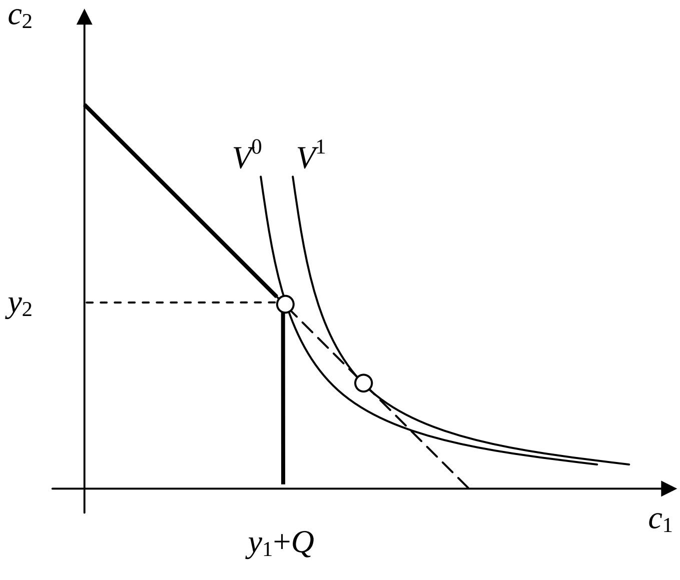


fig. 6

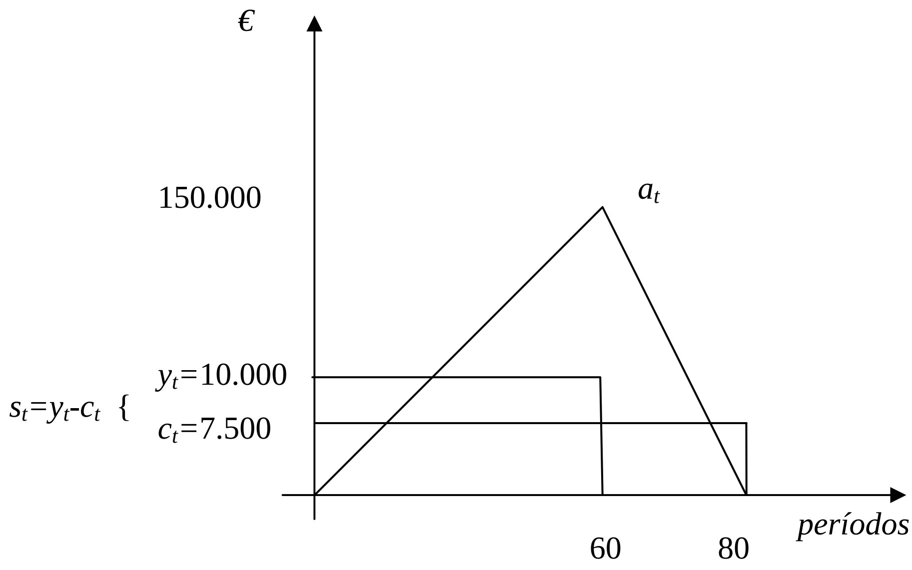

€
150.000
a_t
y_t=10.000
s_t=y_t-c_t {
c_t=7.500
períodos
60
80

fig. 7

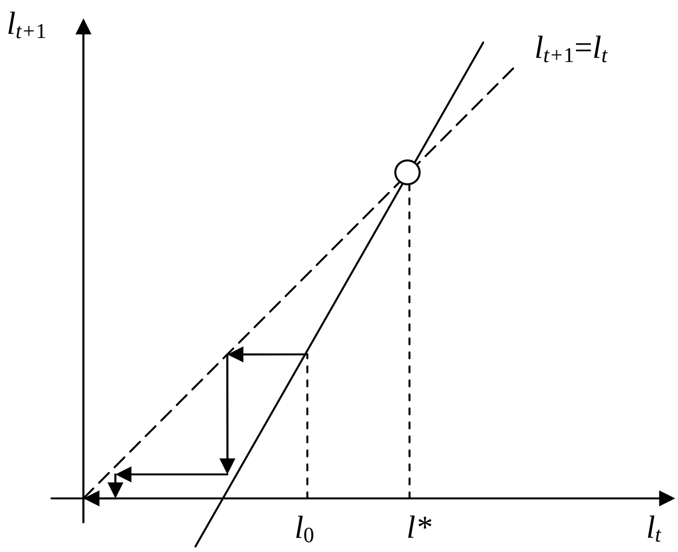
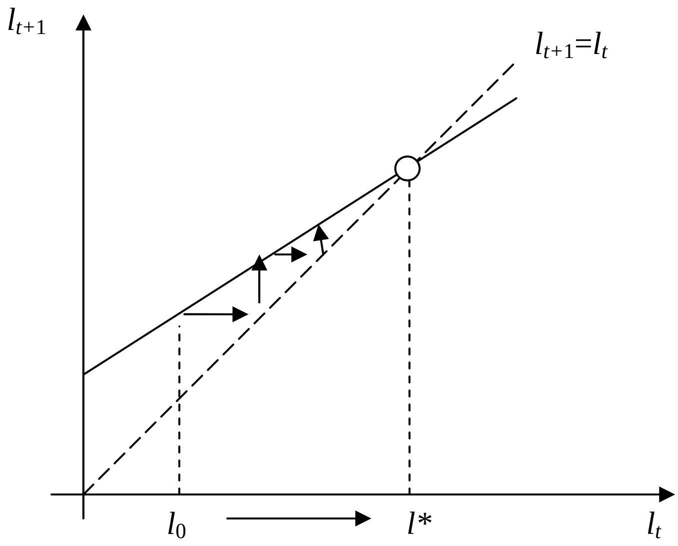
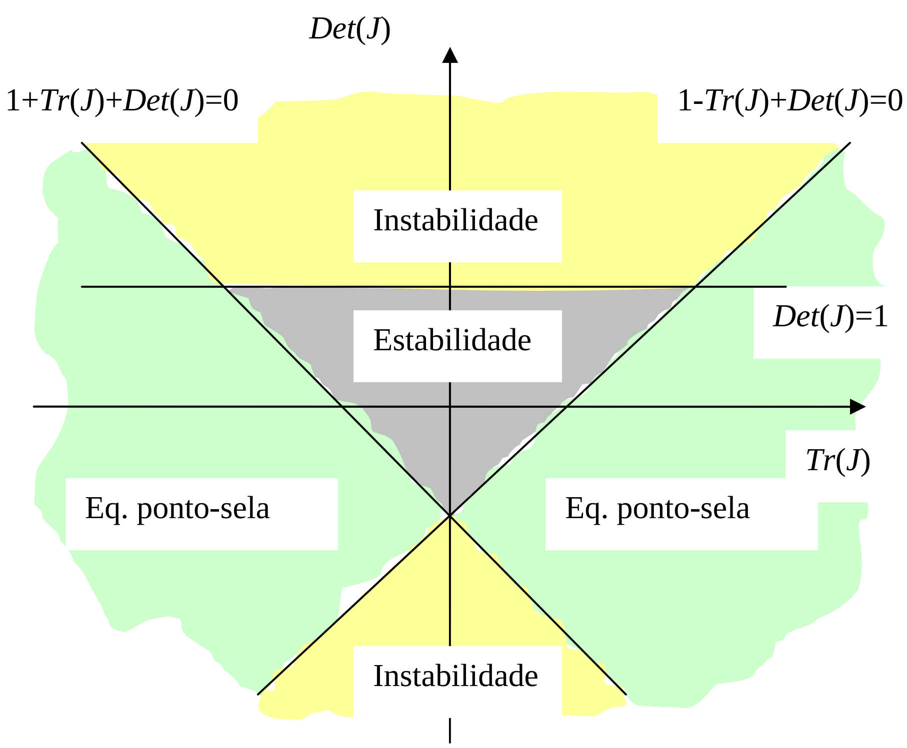

l_{t+1}
l_{t+1}=l_t
l_0
l*
l_t

fig. 8



l_{t+1}
$l_{t+1}=l_t$
l_0
l^*
l_t

fig. 9



Det(J)
1+Tr(J)+Det(J)=0
1-Tr(J)+Det(J)=0
Instabilidade
Estabilidade
Det(J)=1
Tr(J)
Eq. ponto-sela
Eq. ponto-sela
Instabilidade

fig. 10

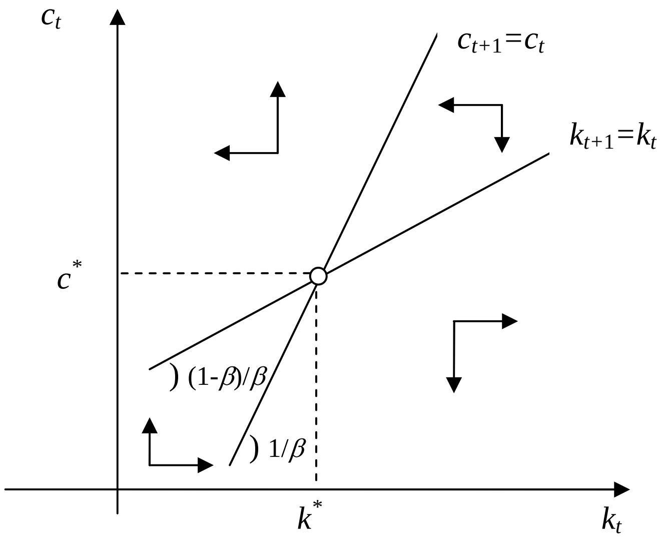


fig. 11

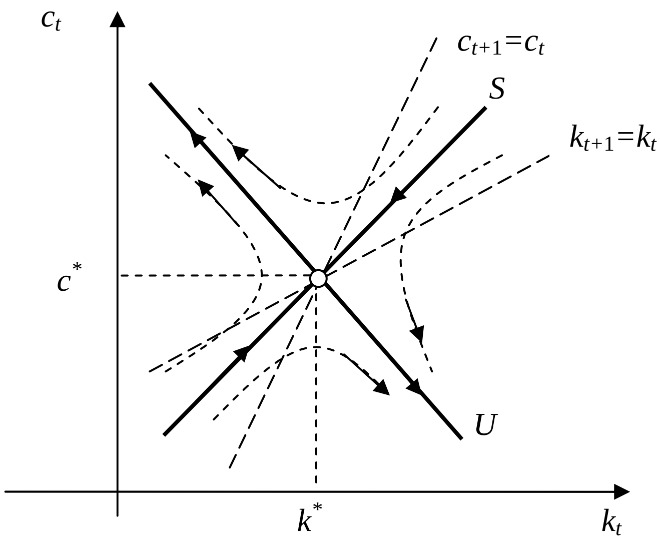


fig. 12

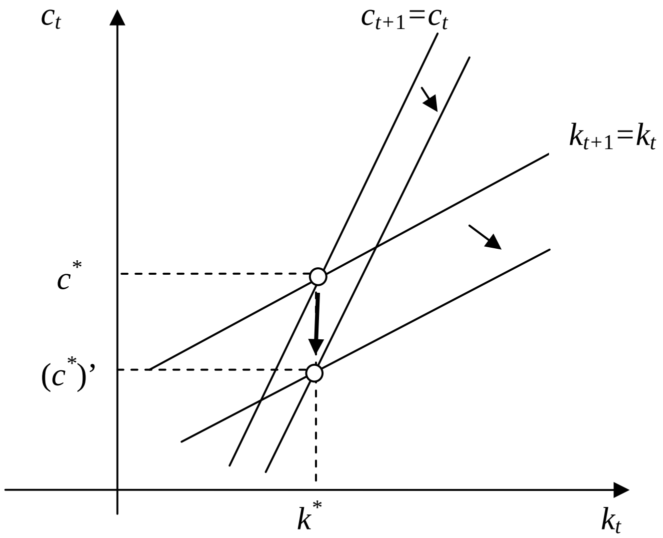


fig. 13

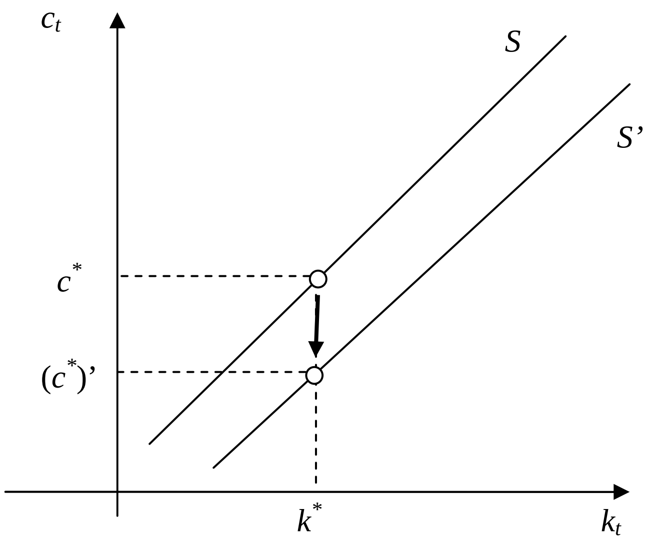


fig. 14