

MÚTIPLAS REPRESENTAÇÕES NUM PERCURSO DE APRENDIZAGEM DOS NÚMEROS RACIONAIS

Helena Gil Guerreiro

Agrupamento de Escolas Braamcamp Freire; Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

hg@campus.ul.pt

Cristina Morais

Externato da Luz; Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

cristina.morais@campus.ul.pt

Lurdes Serrazina

Escola Superior de Educação de Lisboa; Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

lurdess@eselx.ipl.pt

João Pedro da Ponte

Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

jpponte@ie.ulisboa.pt

Resumo: Neste artigo pretendemos compreender como a valorização de múltiplas representações e o uso de modelos podem contribuir para a aprendizagem dos números racionais pelos alunos do 1.º ciclo do ensino básico. Este estudo, realizado no contexto de um grupo de trabalho colaborativo entre professores, integra uma Investigação Baseada em Design em que foi construído um percurso de aprendizagem dos números racionais, realizado com alunos do 3.º ano de escolaridade. Os dados foram recolhidos através de gravações áudio das sessões do grupo de professores, de recolha documental dos registos escritos das professoras e dos alunos, bem como de registos fotográficos do trabalho em sala de aula. Analisamos três tarefas focando a aprendizagem dos números racionais dos alunos, na perspetiva das professoras, através da discussão e reflexão no grupo colaborativo. Os resultados evidenciam que o uso de representações ativas e icónicas na sala de aula, usadas como modelos de forma regular, parecem ter apoiado uma compreensão interligada das representações simbólicas por parte dos alunos. Além disso, os resultados destacam também o papel essencial que o grupo colaborativo teve para fazer chegar a investigação à sala de aula.

Palavras-chave: Números racionais, representações, aprendizagem, trabalho colaborativo.

Introdução

Na investigação em Educação Matemática, os números racionais são considerados um tópico complexo e cuja aprendizagem, com compreensão, assume a maior importância (Behr, Lesh, Post, & Silver, 1983; Tian & Siegler, 2017). Atualmente, em Portugal, a aprendizagem dos números racionais inicia-se no 2.º ano de escolaridade, sendo indicada a fração como representação a privilegiar. No entanto, Monteiro e Pinto (2006) consideram que o estudo dos aspetos formais relativos aos números racionais é introduzido demasiado cedo, associado a uma excessiva preocupação com os procedimentos em detrimento da compreensão dos conceitos. A sua complexidade está relacionada com o facto de os números racionais poderem assumir diferentes representações e múltiplos significados. Apesar de a investigação fornecer evidências sobre como diferentes representações podem ser articuladas, com compreensão, numa etapa inicial da aprendizagem destes números (e.g., Moss & Case, 1999), essa informação parece ter pouca expressão nos programas oficiais e na sala de aula.

Nesta comunicação procuramos compreender, num contexto de trabalho colaborativo entre professoras, de que modo ideias sustentadas em investigação sobre a valorização de múltiplas representações e modelos (Guerreiro, Serrazina & Ponte, 2018; Morais, Serrazina, & Ponte, 2018) podem contribuir para a aprendizagem dos números racionais de alunos do 3.º ano.

Múltiplas representações na aprendizagem dos números racionais

Na aprendizagem dos números racionais¹, os alunos devem compreender que um mesmo número racional pode ser expresso através de diferentes representações simbólicas, nomeadamente numeral decimal, percentagem ou fração. Para além destas, representações ativas e icónicas (Bruner, 1999), bem como a linguagem oral e escrita (Ponte & Serrazina, 2000) constituem representações igualmente importantes na construção de um conhecimento conceptual de número, permitindo estabelecer relações e fazer inferências à medida que os alunos pensam e estruturam a resolução de um problema.

Um trabalho que envolva diferentes tipos de representação é fundamental na compreensão de que cada representação proporciona uma perspetiva diferente do número racional, sendo que a compreensão dos alunos se desenvolve à medida que essas perspetivas se relacionam, complementando-se (Ponte & Quaresma, 2011; Tripathi, 2008). Gravemeijer (1999) destaca que um modelo emerge do uso que os alunos fazem de representações na interpretação de uma dada situação. Trata-se de um processo de modelação emergente em que as representações são usadas como modelos que permitem apoiar o desenvolvimento de um conhecimento progressivamente mais formal (Gravemeijer, 1999). Assim, a aprendizagem dos números racionais através de modelos, nos primeiros anos do ensino básico, pode constituir um processo dinâmico de grande importância para fazer evoluir o uso de representações e a construção de conhecimento conceptual.

Os contextos em que as representações podem ser percebidas como modelos são fundamentais para compreender e estabelecer relações complexas e significativas (Brocardo, 2010). A reta numérica, o MAB (Multibase Arithmetic Blocks) ou o *decimat* (Roche, 2010), são representações que destacam a estrutura multiplicativa dos números racionais, proporcionando a exploração de relações entre quantidades. Estas representações remetem para os significados de medida e parte-todo, considerados centrais na compreensão dos números racionais, em particular numa fase inicial da aprendizagem destes números (Behr et al., 1983; Lamon, 2012). Post, Cramer, Behr, Lesh e Harel (1993) salientam o papel que as representações assumem na compreensão dos números racionais, associando-a à flexibilidade de realizar transformações entre representações e numa mesma representação. Deste modo, a

¹ Usamos o termo “números racionais” para designar números racionais não negativos.

flexibilidade dos alunos em realizar transformações envolvendo diferentes representações dos números racionais é indicador da compreensão destes números (Post, Wachsmuth, Lesh, & Behr, 1985).

Reconhecer o mesmo número em diferentes representações resulta de uma coordenação global de representações, que traduz e promove o raciocínio matemático (Duval, 2006). As transformações entre representações de números racionais são centrais na atividade matemática (Duval, 2006) e a sua análise constitui uma lente necessária para aceder a processos de raciocínio matemático dos alunos, como as estratégias de resolução e a justificação (Mata-Pereira & Ponte, 2017).

Metodologia

Este estudo segue a modalidade de Investigação Baseada em Design (Cobb, Jackson, & Dunlap, 2016; Ponte, Carvalho, Mata-Pereira, & Quaresma, 2016). O estudo centra-se na aprendizagem dos números racionais por alunos de duas turmas de 3.º ano, no contexto de um trabalho em colaboração (Ponte & Serrazina, 2003), que envolve professoras e investigadoras.

As professoras de ambas as turmas participam num grupo colaborativo de escola, que envolve cinco professoras e que integra também a primeira autora. O grupo reúne semanalmente há cerca de 10 anos para planificar aulas em conjunto. Todas as professoras têm um percurso de alguma forma ligado à investigação, na qual procuram apoiar a sua prática. Dada a preocupação em trabalhar a aprendizagem inicial dos números racionais no 3.º ano, o grupo decidiu construir um percurso de aprendizagem. Assim, também a segunda autora integrou o grupo como investigadora convidada e, em conjunto com a primeira autora, partilharam ideias chave de estudos em curso para serem discutidos no grupo (Guerreiro, Serrazina, & Ponte, 2018; Morais, Serrazina, & Ponte, 2018) e apoiar a construção, realização em aula e reflexão das tarefas. O ambiente relacional positivo vivido no grupo facilitou a naturalidade com que cada elemento assumiu o seu papel – professoras e investigadoras – numa relação de ajuda mútua, tendo em vista um objetivo comum (Ponte & Serrazina, 2003), neste caso a construção de um percurso de aprendizagem adequado aos alunos daquelas professoras integrando os princípios da investigação recente no âmbito dos números racionais.

Três professoras colocaram em prática este percurso de aprendizagem, mas apenas duas, Hélia e Sandra, participaram ativamente nas sessões do grupo consideradas nesta comunicação, sendo por isso participantes neste estudo. As sessões de trabalho do grupo colaborativo decorreram uma vez por semana de acordo com o calendário escolar, entre fevereiro e junho de 2018. O foco do trabalho colaborativo foi a aprendizagem dos alunos na perspetiva das professoras, tendo por base os seus relatos e os trabalhos escritos dos alunos.

A importância de interligar diferentes representações simbólicas de números racionais, apoiadas por várias representações usadas como modelos, constituiu-se como um dos princípios orientadores do percurso de aprendizagem construído e implementado nesta Investigação Baseada em Design.

Este percurso privilegiou as representações simbólicas de percentagem (Etapa 1), numeral decimal (Etapa 2 e 3) e fração (Etapa 4), nos significados medida e parte-todo, de acordo com a sequência apresentada na Figura 1.

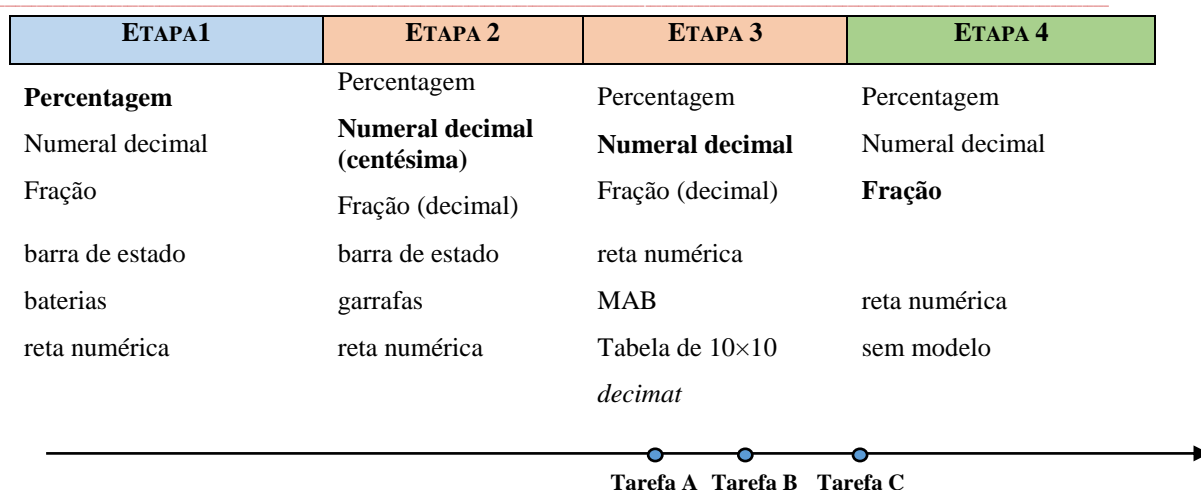


Figura 1 – Percurso de aprendizagem dos números racionais realizado

Embora não sendo linear, dado que cada representação simbólica foi emergindo em interligação com as outras e retomada sempre que oportuno, o percurso de aprendizagem realizado teve subjacente a sequência *porcentagem – numeral decimal – fração*. Esta sequência privilegiou, na Etapa 1, a porcentagem, como representação que permite maximizar os conhecimentos que os alunos trazem dos números inteiros de 1 a 100 e raciocinar proporcionalmente com quantidades (Guerreiro, Serrazina, & Ponte, 2018; Moss & Case, 1999). Na Etapa 2, em articulação com a porcentagem, foi introduzida a representação em numeral decimal, na relação com a fração decimal, permitindo apelar a transformações dentro e entre representações, contribuindo para uma conceptualização da unidade (Morais, Serrazina, & Ponte, 2018). Finalmente, na Etapa 3, foi trabalhada a fração, em articulação com as outras representações, procurando um entendimento da grandeza do número, de forma independente da sua representação.

Os dados foram recolhidos através de gravações áudio das sessões do grupo, recolha documental dos registos escritos das professoras, dos trabalhos escritos dos alunos (trazidos pelas professoras para as sessões), bem como de registos fotográficos das professoras na sua sala de aula. Os princípios de honestidade e transparência foram garantidos no decurso desta investigação, tendo-se obtido o consentimento informado de participação das professoras neste estudo e salvaguardado o seu anonimato e privacidade (IE–UL, 2016).

Nesta comunicação centramo-nos em três tarefas, resolvidas pelos alunos, que decorreram na Etapa 3 do percurso de aprendizagem realizado, analisando o uso de representações como modelos, bem como a mobilização de diferentes representações simbólicas, de forma interligada.

Resultados

Tarefa A. Anteriormente à Tarefa A, foi pedido aos alunos que enchessem e vazassem cinco garrafas de modo a estabelecer relações entre as suas capacidades, e a associar a cada garrafa etiquetas escritas na representação em numeral decimal, relativas à sua capacidade (Figura 2).



Figura 2 – Tarefa de colocar etiquetas em garrafas

Entre as garrafas, existiam duas iguais, com a mesma capacidade, e foram dadas duas etiquetas com 0,5l e 0,50l. Na sessão de preparação da tarefa seguinte, as professoras identificaram a necessidade de levar os alunos a justificar a igualdade entre as representações 0,5 e 0,50:

- Hélia: Agora que acabámos o [a tarefa] encher recipientes e eles ficaram no ponto que cinco décimas é igual a cinquenta centésimas mas não sabem porquê . . . Pronto, íamos por aí...
- Helena: Para a equivalência com diferentes representações.
- ...
- Hélia: Portanto vou perguntar por que é que cinquenta centésimas é o mesmo ponto que cinco décimas, porque quero que me justifiquem...

Embora Sandra tenha sugerido o uso da barra de estado como representação de suporte a esta tarefa, o grupo, em discussão, concluiu que seria importante promover o recurso à reta numérica, reconhecendo a necessidade de evoluir para uma representação mais formal.

Sandra, remetendo para os seus alunos, sugere que a reta numérica dupla fosse apresentada com a marcação correspondente às décimas e, eventualmente, às centésimas:

- Sandra: . . . Na minha turma... Eu foco muito a sua [alunos] atenção em "Em quantas [partes] está [a unidade] dividida? Então são quantas de quantas?". Por isso é que nós chegámos a isto [proposta de divisão da reta] . . .

Esta sugestão surge devido ao facto de Sandra reconhecer que os seus alunos, ao longo do seu percurso tinham explorado os números racionais sobretudo numa perspetiva de parte-todo, que associam à representação em fração. Hélia recorda que os seus alunos usaram, sobretudo, a fração decimal com denominador cem, devido ao facto de a percentagem, para eles ser uma referência:

- Hélia: O que eu puxo para a fração é sempre a fração decimal em centésimos . . . Porque para eles a percentagem é ... O orientador deles!

Deste modo, ao antecipar de que forma os seus alunos iriam relacionar 0,5 e 0,50, sugere que 50% estivesse já representado na reta numérica dupla:

Hélia: Vamos começar logo por questionar. Eles vão perceber que cinquenta é porque está dividido... As percentagens aqui... eu acho que devia estar ali 50% . . .

Contudo, no grupo sentiu-se que dividir a reta deste modo ou incluir outras representações simbólicas poderia condicionar os alunos na seleção da representação a usar na justificação. Pelo que, o grupo decidiu apresentar apenas a representação em numeral decimal para, por um lado, focar a questão nesta relação de equivalência e, por outro, permitir que os alunos mobilizassem representações por iniciativa própria.

A realização da tarefa pelos alunos evidenciou justificações de natureza diferente. Sandra referiu que os seus alunos justificaram a igualdade entre 0,5 e 0,50 convocando argumentos apoiados no recurso a representações ativas, de acordo com o que tinham vivenciado na experiência de encher e vazar garrafas.

Sandra: Eles chegaram à conclusão que cinco décimas é igual a cinquenta centésimas porque as garrafas têm a mesma capacidade. . .

Estes argumentos parecem evidenciar que os alunos entenderam, nesta tarefa, a representação simbólica de numeral decimal como um rótulo que identifica determinada quantidade de água, entendimento este fortemente ligado ao contexto. O significado que os alunos atribuem à representação simbólica em numeral decimal é neste caso apoiado em representações ativas.

Os argumentos usados pelos alunos de Hélia remetem para um entendimento das representações simbólicas envolvidas sem necessidade de convocar a sua experiência durante a tarefa das garrafas.

Hélia: Quase todos os grupos chegaram à conclusão de que em cinco décimas temos a unidade dividida em dez partes e em cinquenta centésimas temos a unidade dividida em cem partes . . .

O significado que os alunos atribuem à representação simbólica em numeral decimal é apoiado na interpretação da reta numérica e noutras representações, como a fração decimal (Figura 3).

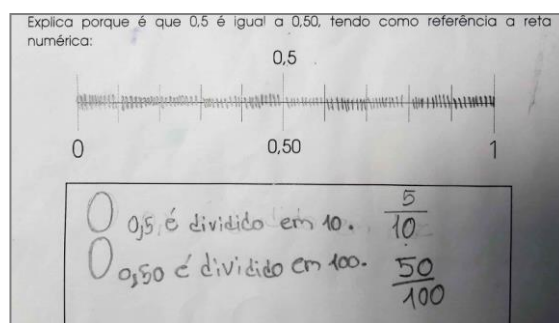


Figura 3 – Registo de um grupo de alunos de Hélia na Tarefa A

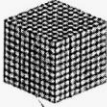
Desta forma, os alunos parecem reconhecer o mesmo número em diferentes representações que mobilizaram para justificar a igualdade entre 0,5 e 0,50. Nesta fase do percurso de aprendizagem para além da representação ativa das garrafas e da representação icónica da reta numérica, o MAB foi uma outra representação privilegiada para a compreensão da representação decimal.


Tarefa B. Inicialmente, durante a construção do percurso de aprendizagem, o recurso ao MAB para o trabalho com os números racionais não foi consensual. O facto de esta representação ter sido usada no trabalho com os números inteiros, parecia oferecer mais constrangimentos do que vantagens no trabalho com os números racionais:


Hélia: Quando tivemos o outro grupo, há 4 anos atrás, nós pensámos “não vamos por aqui”. E porquê? O MAB era ótimo, décima, centésima, milésima, ... mas não vamos porque eles conhecem-no é com números inteiros e só vamos baralhar. E agora não. Agora decidimos ir por aqui. É importante ver o MAB com diferentes unidades.

Os constrangimentos identificados no grupo prendiam-se com a importância que a unidade de referência assume na compreensão dos números racionais. Como referiu Hélia, os alunos usaram o MAB associado aos números inteiros, considerando o cubo mais pequeno como unidade, por associação ao processo de contagem. Contudo, o grupo reconheceu a importância da mudança da unidade e a vantagem do uso do MAB, podendo ser percebido enquanto modelo, numa perspetiva de continuidade entre a aprendizagem dos números inteiros e a dos números racionais.

Deste modo, na segunda fase do percurso, o MAB foi mobilizado num conjunto de tarefas, no qual se incluiu a tarefa B. Nesta tarefa, tendo como unidade de medida o cubo grande, os alunos foram convidados a relacionar as diferentes peças, registando essa relação em diferentes representações simbólicas (Figura 4).

2. Tendo como unidade de medida o cubo grande  indica:

2.1. Quantas barras  cabem no cubo grande? 100 ✓

2.2. A barra  que parte é do cubo grande? Escreve sob a forma de:

a) Percentagem 1%

b) Fração decimal $\frac{1}{100}$ ✓

c) Numeral decimal* 0,01

Figura 4 – Registo de um aluno de Sandra na Tarefa B

Nesta tarefa, o aluno de Sandra estabelece a relação 1/100 entre a barra e o cubo grande, parecendo interpretar com aparente facilidade o cubo grande como a unidade. Essa relação é registada em percentagem, fração decimal e numeral decimal, tal como solicitado. O trabalho com o MAB permitiu compreender as relações entre as diferentes peças de acordo com a unidade considerada. Além disso, possibilitou traduzir essa relação em diferentes

representações simbólicas, destacando-se nesta fase do percurso, a representação em numeral decimal como afirma Sandra:

Sandra: Eles passaram a ver a barra como a centésima, o cubo pequeno a milésima e a placa a décima, a placa representava a décima, então quantas vezes é mais pequena? É passar as relações para os numerais decimais.

Hélia: A partir daqui, foi um transpor das relações para os numerais decimais. Tendo como referência, como unidade de medida, o cubo grande . . .

Este alargamento das relações subjacentes ao sistema de numeração decimal, traduz a perspetiva de continuidade entre a compreensão dos números inteiros e dos números racionais, presente ao longo do percurso de aprendizagem realizado. O MAB revelou-se como representação que permitiu aos alunos estabelecer essa continuidade, tal como destaca Hélia:

Hélia: . . . Tínhamos que fazer mudar a unidade e relacionar as partes da unidade, então fomos buscar o que eles conheciam dos números inteiros, o que é a dezena, a centena, . . . tendo como unidade o cubo pequenino, por exemplo. Isto era o que eles já conheciam e foi o transpor para os numerais decimais.

Deste modo, o uso do MAB como representação ativa no trabalho com os números racionais parece ter contribuído para a construção das relações multiplicativas entre a unidade e as suas partes, décima, centésima e milésima, suportando o uso de diferentes representações simbólicas com compreensão.

O fortalecimento destas relações entre as partes não inteiras do numeral decimal continuou a ser promovido ao longo do trabalho com uma outra a representação, o *decimat*.

Tarefa C. Na Tarefa C foi pedido que os alunos representassem as áreas sombreadas do *decimat*, em percentagem, numeral decimal e fração. O registo apresentado na Figura 5 ilustra como uma aluna de Sandra usou o *decimat* como modelo, na medida em que se apropria da representação, anotando as relações que foi estabelecendo, recorrendo à percentagem.

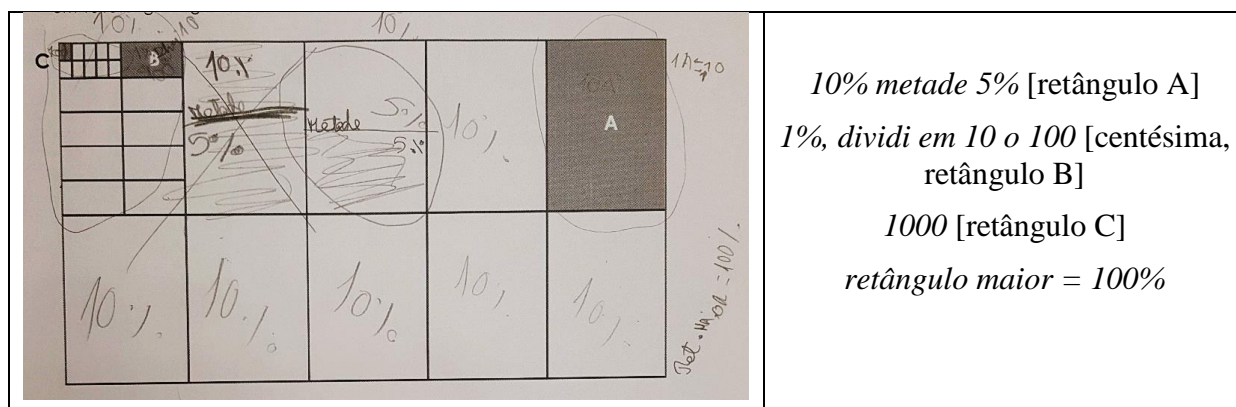


Figura 5 – Registo de uma aluna de Sandra na Tarefa B

A aluna interpretou o *decimat*, que designou por retângulo maior, como 100%, associando cada retângulo A a 10%. Identificou metade de 10% como 5%, que justificou traçando a

metade de um retângulo A. Interpretou o retângulo B como 1%, justificando-o com a divisão de 100, que parece associar à centésima, em 10. Para além disso, identificou o retângulo C como 1000, que parece revelar que a aluna identifica a relação 1/1000 deste retângulo com o retângulo maior. Deste modo, a aluna pareceu ter compreendido a relação existente entre cada área sombreada no *decimat*.

Hélia corroborou que este modelo permitiu aos seus alunos visualizar e mobilizar diferentes representações simbólicas, facilitando a sua interligação. Tal é evidente, nas palavras de Hélia, ao refletir sobre uma outra situação, semelhante à da Figura 5, em que o *decimat* tinha sombreados três retângulos A:

Hélia: Para os meus alunos foi uma sistematização... Esta construção foi essencial. Por exemplo, os meus alunos olharam para o *decimat* e a maior parte disse que estava lá [pintado] 30%.

Como menciona Hélia, o uso do *decimat*, representação habitualmente relacionada com a representação em numeral decimal, suportou e desencadeou o uso de outras representações como a percentagem. Ao observarem a região sombreada no *decimat*, relativa a três décimas, os alunos de Hélia mobilizaram com prontidão a representação da percentagem. O uso desta representação icónica foi muito valorizado pelas professoras enquanto “representação de sistematização”, como referiu Hélia, considerando a etapa do percurso de aprendizagem para a qual foi pensada.

Considerações finais

Considerando que o nosso objetivo era compreender como a valorização de múltiplas representações pode contribuir para a aprendizagem dos números racionais no 1.º ciclo, este estudo evidencia que um trabalho com compreensão que envolve a articulação entre percentagem, numeral decimal e fração, parece ser promissor na fase inicial da aprendizagem dos números racionais. Destacamos que a compreensão destas representações simbólicas e suas relações é apoiada pelo uso de representações ativas e icónicas (Webb, Boswinkel, & Dekker, 2008), de modo recorrente. O contributo das representações ativas e icónicas traduz-se na sua utilização enquanto modelos levando os alunos a estabelecer relações (Gravemeijer, 2004), entre representações e num mesmo tipo de representação. Deste modo, permitem fazer emergir representações simbólicas com compreensão.

Embora o percurso tenha sido construído de acordo com a sequência de representações simbólicas percentagem – numeral decimal – fração, verificamos que os alunos mobilizaram a representação que consideraram mais adequada para justificar relações de equivalência. Esta capacidade mostra uma aparente confiança no trabalho com números racionais, considerando que os alunos estão numa fase inicial da aprendizagem destes números. Deste modo, o trabalho centrado na compreensão de que um mesmo número pode assumir diferentes representações, não só simbólicas, mas também ativas e icónicas, contribuiu para a sua conceptualização de número racional.

O facto de o grupo de professoras já ter uma rotina de trabalho colaborativo anterior a este estudo, facilitou o ambiente de partilha criado e proporcionou a entrada da investigação na sala de aula. Salientamos a relação entre a teoria e a prática neste estudo: a teoria encontrou um modo de apoiar a prática e a prática forneceu pistas para a problematização da teoria. Por um lado, o percurso de aprendizagem para os números racionais foi baseado em investigação realizada, que enfatiza a articulação crucial entre representações simbólicas de números racionais (Guerreiro, Serrazina, & Ponte, 2018; Moss & Case, 1999; Morais, Serrazina, &

Ponte, 2018; Ponte & Quaresma, 2011; Tripathi, 2008). Por outro lado, a prática informou que não só esta articulação é possível no 1.º ciclo, como também beneficia de um trabalho contínuo que envolve igualmente outros tipos de representações, nomeadamente icónicas e ativas.

Referências

- Behr, M. J., Lesh, R., Post, T. R., & Silver, E. A. (1983). Rational-number concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 91–126). New York, NY: Academic Press.
- Brocardo, J. (2010). Trabalhar os números racionais numa perspectiva de desenvolvimento do sentido de número. *Educação e Matemática*, 109, 15–23.
- Bruner, J. S. (1999). *The process of education*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Cobb, P., Jackson, K., & Dunlap, C. (2016). Design research: An analysis and critique. In L. D. English & D. Kirshner (Eds.) *Handbook of international research in mathematics education* (3rd edition, pp. 481–503). New York, NY: Routledge.
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1), 103–131.
- Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical Thinking and Learning*, 1(2), 155–177.
- Gravemeijer, K. (2004). Local instruction theories as means of support for teachers in reform mathematics education. *Mathematical thinking and learning*, 6(2), 105–128.
- Guerreiro, H. G., Serrazina, L., & Ponte, J. P. (2018). A percentagem na aprendizagem com compreensão dos números racionais. *Zetetiké*, 26(2), 354–374.
- IE–UL (2016). *Carta ética para a investigação em educação e formação*. Consultado a 6 de setembro de 2016, em <http://www.ie.ulisboa.pt/pls/portal/docs/1/564658.PDF>.
- Lamon, S. J. (2012). *Teaching fractions and rations for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. (3rd Edition). New York, NY: Routledge.
- Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2017). Enhancing students' mathematical reasoning in the classroom: teacher actions facilitating generalization and justification. *Educational Studies in Mathematics*, 96(2), 169–186.
- Monteiro, C., & Pinto, H. (2006). A aprendizagem dos números racionais. *Quadrante*, 14(1), 89–108.
- Morais, C., Serrazina, L., & Ponte, J. P. (2018). Mathematical reasoning fostered by (fostering) transformations of rational number representations. *Acta Scientiae*, 20(4), 552–570.
- Moss, J., & Case, R. (1999). Developing children's understanding of the rational numbers: A new model and an experimental curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(2), 122–147.
- Ponte, J. P., Carvalho, R., Mata-Pereira, J., & Quaresma, M. (2016). Investigação baseada em design para compreender e melhorar as práticas educativas. *Quadrante*, 25(2), 77–98.
- Ponte, J. P., & Quaresma, M. (2011). Abordagem exploratória com representações múltiplas na aprendizagem dos números racionais: Um estudo de desenvolvimento curricular. *Quadrante*, 20(1), 55–81.

- Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2000). *Didáctica da Matemática para o 1.º ciclo do ensino básico*. Lisboa: Universidade Aberta.
- Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2003). Professores e formadores investigam a sua própria prática: O papel da colaboração. *Zetetiké*, *11*(20), 51–84.
- Post, T. R., Cramer, K. A., Behr, M., Lesh, R., & Harel, G. (1993). Curriculum implications from research on the learning, teaching and assessing of rational number concepts: Multiple research perspective. In T. Carpenter & E. Fennema (Eds.), *Learning, teaching and assessing rational number concepts: Multiple research perspective* (pp. 327–362) Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Post, T. R., Wachsmuth, I., Lesh, R., & Behr, M. J. (1985). Order and equivalence of rational numbers: A cognitive analysis. *Journal for Research in Mathematics Education*, *16*(1), 18–36.
- Roche, A. (2010). Decimats: Helping students to make sense of decimal place value. *Australian Primary Mathematics Classroom*, *15*(2), 4–10.
- Tian, J., & Siegler, R. S. (2017). Which type of rational numbers should students learn first? *Educational Psychology Review*, 1–22.
- Tripathi, P. (2008). Developing mathematical understanding through multiple representations. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *13*(8), 438–445.
- Webb, D. C., Boswinkel, N., & Dekker, T. (2008). Beneath the tip of the iceberg: Using representations to support student understanding. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *14*(2), 110–113.