

INSTITUTO POLITÉCNICO DE LISBOA
INSTITUTO SUPERIOR DE CONTABILIDADE
E ADMINISTRAÇÃO DE LISBOA



ISCAL

AVALIAÇÃO DE DESEMPENHO
ORGANIZACIONAL NO SETOR
SEGURADOR ATRAVÉS DA
METODOLOGIA DEA

Joana Marques dos Reis

Lisboa, março de 2025

INSTITUTO POLITÉCNICO DE LISBOA
INSTITUTO SUPERIOR DE CONTABILIDADE E
ADMINISTRAÇÃO DE LISBOA

AVALIAÇÃO DE DESEMPENHO
ORGANIZACIONAL NO SETOR
SEGURADOR ATRAVÉS DA
METODOLOGIA DEA

Joana Marques dos Reis n°20211172

Dissertação submetida ao Instituto Superior de Contabilidade e Administração de Lisboa para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Gestão das Instituições Financeiras, realizada sob a orientação científica do Professor Doutor José Manuel de Oliveira Pires, Professor-Coordenador da área científica de Matemática.

Constituição do Júri:

Presidente: Doutora Ana Maria da Silva Barbosa de Sotomayor

Arguente: Doutora Ana Maria Duarte Paias

Vogal: Doutor José Manuel Oliveira Pires

Lisboa, março de 2025

DECLARAÇÃO

Declaro ser a autora desta dissertação, que constitui um trabalho original e inédito. Afirmo que o conteúdo apresentado nunca foi submetido, na sua totalidade ou em qualquer uma das suas partes, a outra instituição de ensino superior para a obtenção de um grau académico ou outra qualificação.

Certifico ainda que todas as citações estão devidamente identificadas e referenciadas ao longo do texto. Declaro, igualmente, ter plena consciência de que o plágio, entendido como a utilização de ideias ou conteúdos de terceiros sem a devida referência ao autor, é uma infração ética grave que poderá levar à anulação desta dissertação.

AGRADECIMENTOS

A palavra "agradecer" expressa a gratidão, carinho e respeito que tenho por todos aqueles que, ao longo do meu percurso, tornaram possível a realização desta dissertação.

Gostaria de iniciar estes agradecimentos pelo meu professor, José Manuel de Oliveira Pires. A sua ajuda ao longo deste ano foi inestimável; agradeço pela disponibilidade do seu tempo, pela orientação e por cada conselho que me deu, permitindo-me alcançar uma melhor realização desta tese.

Aos meus amigos, que compreenderam as minhas ausências frequentes neste período, agradeço pela sinceridade e por nunca deixarem de me transmitir força para concluir este projeto. Agradeço especialmente ao meu namorado, pelo amor e constante motivação. A sua paciência, compreensão e apoio incondicional foram fundamentais durante toda esta etapa.

Ao meu irmão, agradeço por acreditar em mim, pela partilha de conhecimento, pelas reflexões conjuntas, por me incentivar a ser cada vez melhor e por me ajudar a organizar todas as minhas ideias.

Finalmente, aos meus pais, meu profundo agradecimento por estarem presentes em todas as fases da minha vida. Agradeço pela união, amor e carinho incondicional que sempre me proporcionaram. Agradeço pelo encorajamento em cada etapa e decisão da minha vida, e especialmente, por todas as vezes que abdicaram do seu descanso, assumindo tarefas no meu lugar para que eu pudesse dedicar-me a este trabalho.

A todos, o meu mais sincero e profundo agradecimento.

RESUMO

A presente dissertação destina-se a apresentar um estudo sobre o desempenho organizacional no setor segurador utilizando a avaliação clássica e a avaliação cruzada da metodologia DEA (*Data Envelopment Analysis*). Esta metodologia avalia a eficiência relativa de um conjunto de entidades homogéneas, usualmente designadas por DMUs (*Decision Making Units*), que usam múltiplos *inputs* para obter múltiplos *outputs*.

A avaliação clássica consiste num processo de auto-avaliação em que cada DMU escolhe os pesos associados aos *inputs* e aos *outputs* que maximizam a sua eficiência, originando que várias DMUs sejam classificadas como eficientes, não permitindo estabelecer um *ranking* sobre todas as DMUs. A avaliação cruzada é um dos mais populares métodos de *ranking* na DEA que tem revelado um forte poder de discriminação. Na avaliação cruzada cada DMU é avaliada por si própria e pelas restantes DMUs, usando os pesos obtidos na avaliação clássica. Este estudo inclui a aplicação destes dois tipos de avaliação para avaliar o desempenho organizacional de dezanove seguradoras que operavam em Portugal no ano de 2022.

Palavras-chave: DEA, DMUs, eficiência, avaliação clássica, avaliação cruzada, *ranking*, setor segurador.

ABSTRACT

The present dissertation aims to present a study on organizational performance in the insurance sector using both the classic evaluation and cross-evaluation of the DEA (Data Envelopment Analysis) methodology. This methodology assesses the relative efficiency of a set of homogeneous entities, usually called DMUs (Decision Making Units), which use multiple inputs to achieve various outputs.

The classic evaluation consists of a self-assessment process where each DMU chooses the weights associated with the inputs and outputs that maximize its efficiency, resulting in several DMUs being classified as efficient and not allowing for the establishment of a ranking among all DMUs. Cross-evaluation is one of the most popular ranking methods in DEA, demonstrating a strong discriminatory power. In cross-evaluation, each DMU is assessed by itself and the remaining DMUs, using the weights obtained in the classic evaluation. This study includes the application of these two types of evaluations to assess the organizational performance of nineteen insurance companies operating in Portugal in the year 2022.

Keywords: *DEA, DMUs, efficiency, classic evaluation, cross-evaluation, ranking, insurance sector.*

ÍNDICE

1. INTRODUÇÃO	1
2. AVALIAÇÃO DO DESEMPENHO ORGANIZACIONAL NO SETOR SEGURADOR.....	3
2.1. INTRODUÇÃO	3
2.2. METODOLOGIAS DE AVALIAÇÃO NO SETOR DOS SEGUROS	4
2.3. METODOLOGIA DEA	7
2.4. APLICAÇÃO DA DEA NO SETOR DOS SEGUROS	10
3. AVALIAÇÃO CLÁSSICA E AVALIAÇÃO CRUZADA NA DEA	12
3.1. INTRODUÇÃO	12
3.2. AVALIAÇÃO CLÁSSICA	13
3.2.1. <i>Modelo CCR</i>	13
3.2.2. <i>Modelo BCC</i>	16
3.3. AVALIAÇÃO CRUZADA BASEADA NO MODELO CCR	19
3.4. AVALIAÇÃO CRUZADA BASEADA NO MODELO BCC	22
3.4.1. <i>Abordagem baseada em restrições adicionais</i>	24
3.4.2. <i>Abordagem de Lim e Zhu (2015)</i>	25
3.4.3. <i>Abordagem de Asadi, Nasser e Lofti (2020)</i>	30
4. ESTUDO DE CASO PRÁTICO.....	33
4.1. INTRODUÇÃO	33
4.2. SELEÇÃO DE DADOS E ESCOLHA DOS MODELOS PARA APLICAÇÃO PRÁTICA.....	33
4.3. RESULTADOS E RESPECTIVA ANÁLISE.....	36
5. CONCLUSÕES.....	45

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 3.1 - Matriz e índices das eficiências cruzadas para n DMUs.....	20
Tabela 4.1 - Dados relativos aos <i>inputs</i> e aos <i>outputs</i>	36
Tabela 4.2 - Índices de eficiência clássica e de eficiência cruzada e respetivos <i>rankings</i> , obtidos através do modelo CCR/ <i>inputs</i>	38
Tabela 4.3 - Resultados obtidos através do modelo BCC orientado para <i>inputs</i> e das abordagens de Lim e Zhu (2015) e de Asadi et al (2020).....	40
Tabela 4.4 - <i>Rankings</i> obtidos através do modelo BCC/ <i>inputs</i> e das abordagens de Lim e Zhu (2015) de Asadi et al (2020).....	42

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 3.1 - Eficiências cruzadas usando a DMU_d	26
Figura 3.2 - Eficiências cruzadas usando a DMU_B	27
Figura 3.3 - Ineficiência cruzada usando medida de distância	31
Figura 4.1 - Gráfico dos <i>rankings</i> obtidos pelas abordagens de Lim e Zhu (2015) e de Asadi et al. (2020)	43

LISTA DE ABREVIATURAS

ASF - Autoridade de Supervisão de Seguros e Fundos de Pensões

BCC – Banker, Charners e Cooper

CCR – Charnes, Cooper e Rhodes

CRS- *Constant Returns to Scale*

DEA- *Data Envelopment Analysis*

DMUS- *Decisions Make Units*

VRS- *Variable Returns to Scale*

1. Introdução

Em consequência do aumento do ambiente competitivo e dos novos requisitos regulamentares nos mercados financeiros e não financeiros, o ambiente empresarial na última década tem sofrido grandes alterações.

As organizações têm de ter uma boa capacidade de adaptação às condições do mercado atual, caso contrário, poderão estar a dar oportunidade para a entrada da concorrência. Isto poderá significar uma perda de participação e relevância no mercado, comprometendo a produtividade da empresa e consequentemente o declínio dos resultados financeiros da organização. Como tal, para que as empresas consigam obter uma boa performance é necessária a existência de formas mais eficientes de avaliação do seu desempenho.

As organizações nos últimos anos têm gastado recursos significativos para desenvolver técnicas apropriadas de avaliação de desempenho para o mercado em rápida mudança. Inicialmente, eram utilizadas técnicas de Gestão Baseada no Valor, permitindo aos acionistas e gestores informações precisas e confiáveis em relação ao valor criado pelas suas próprias atividades, no entanto para a determinação exata das performances organizacionais estas métricas não são as mais eficazes.

A necessidade de abordagens mais flexíveis e orientadas para o futuro são cada vez mais importantes, como tal, a procura por excelência operacional e adaptabilidade é crucial em setores estratégicos da economia de um país, dos quais, a indústria dos seguros. A indústria de seguros é fundamental para a estabilidade econômica de um país, pois oferece proteção financeira contra vários riscos e contribui para a suavização dos impactos negativos na economia.

No setor segurador as técnicas utilizadas passavam somente pela interpretação de rácios financeiros e análise de demonstrações financeiras. Atualmente, para uma gestão mais eficaz da *performance* da organização foi necessário recorrer a outros tipos de metodologias de avaliação do desempenho, nomeadamente metodologias da fronteira de eficiência, das quais se destaca DEA (*Data Envelopment Analysis*). Esta metodologia foi introduzida por Charnes, Cooper e Rhodes (1978) e, desde então, tem sido objeto de grande investigação e de aplicação à avaliação do desempenho organizacional.

A DEA é uma técnica não paramétrica baseada na programação linear que permite avaliar a eficiência relativa de um conjunto de entidades homogêneas denominadas por DMUs (*Decisions*

Make Units), que poderão ser, por exemplo, bancos, seguradoras, escolas, lojas, entre outras, sendo conhecidos os *inputs* e os *outputs* de cada DMU.

O presente trabalho destina-se a apresentar um estudo sobre a avaliação do desempenho organizacional, através da metodologia DEA e a sua aplicação ao setor segurador.

O presente trabalho está estruturado em cinco capítulos, incluindo o presente capítulo de introdução. No capítulo 2, é abordada a avaliação do desempenho organizacional com enfoque no setor segurador, onde são referidas algumas metodologias com destaque para a metodologia DEA.

No capítulo 3, apresentam-se dois tipos de avaliação no contexto da metodologia DEA, a avaliação clássica realizada através dos modelos clássicos dessa metodologia e a avaliação cruzada realizada também com base nesses mesmos modelos.

No capítulo 4, apresenta-se o estudo de um caso prático em que a avaliação clássica e a avaliação cruzada assim como alguns modelos e abordagens, apresentados no capítulo 3, são usados para avaliar o desempenho e estabelecer um *ranking* de dezanove seguradoras que operavam em Portugal no ano de 2022.

Por fim, no capítulo 5, apresentam-se as principais conclusões a retirar com a realização deste trabalho.

2. Avaliação do desempenho organizacional no setor segurador

2.1. Introdução

Atualmente, o mundo atravessa grandes alterações devido a fatores como, a rápida evolução da tecnologia, o aumento da competitividade, uma economia cada vez mais globalizada e uma indústria progressivamente centralizada. Em consequência dessas transformações é extremamente importante uma maior flexibilidade e adaptabilidade por parte das empresas. Endres (2017) realça que quanto mais desenvolvida estiver a adaptabilidade empresarial, maior se torna a vantagem competitiva da organização, permitindo que ela se ajuste rapidamente às mudanças do mercado, antecipe as necessidades dos clientes e se posicione de forma mais eficaz diante da concorrência em constante evolução.

Isto ocorre devido ao ambiente empresarial atual ser caracterizado por contantes transformações, novas tecnologias e expectativas crescentes dos clientes. Neste contexto, a avaliação do desempenho organizacional revela-se uma importante ferramenta no apoio à tomada de decisões sobre as alterações a realizar. Eccles (1991) critica os sistemas tradicionais de medição de desempenho por se concentrarem predominantemente em medidas de avaliação financeiras, argumentando que essas medidas são insuficientes para abranger a complexidade do desempenho organizacional num ambiente de negócios em rápida mudança. Neste cenário, a adoção de métodos tradicionais, como por exemplo os rácios financeiros, torna-se insuficiente para avaliar e melhorar o desempenho organizacional.

Deste modo, a avaliação do desempenho organizacional deve integrar abordagens mais flexíveis e orientadas para o futuro. Isso permitirá que as organizações se adaptem rapidamente às alterações do mercado, respondam proativamente às necessidades dos clientes e continuem a procurar excelência operacional. Segundo Eccles (1991) para manter vantagem competitiva sustentável, são necessárias abordagens mais dinâmicas, inovadoras e orientadas para o futuro. Este autor defende que as organizações em vez de refletirem apenas o desempenho passado, devem adotar medidas que lhes permitam prever e responder às mudanças no mercado e às necessidades dos clientes, destacando que as empresas devem estar dispostas a atualizar as suas medidas para garantir que permaneçam relevantes e eficazes num ambiente de negócios em constante evolução.

Tendo em consideração estes aspetos, as empresas têm necessidade de realizar a medição do seu desempenho organizacional, de forma a contribuir para o reconhecimento de problemas,

identificação de oportunidades de crescimento e desenvolvimento em conformidade com os quadros da empresa. É imprescindível a aplicação de sistemas, que contribuam para a tomada de decisão, pois só assim será possível à organização assegurar a concretização dos seus objetivos e manter vantagem competitiva em relação à concorrência.

Esta procura pela excelência operacional e adaptabilidade é especialmente importante nos setores estratégicos da economia de um país, como é o caso da indústria dos seguros pelo papel crucial que desempenha. Para além dos seguros fornecerem proteção financeira perante diversos riscos, a indústria seguradora é um pilar fundamental para manter a estabilidade económica de um país. O setor segurador ajuda a suavizar impactos negativos de fenómenos prejudiciais à economia, cobrando e distribuindo os custos relativos aos sinistros. Este setor proporciona um ambiente económico favorável ao investimento, promove poupanças estáveis e, consequentemente, permite aumentar o empreendedorismo, gerar emprego e aumentar significativamente o bem-estar das famílias (Dores & Domingues, 2020).

Como é referido em Kaffash, Azizi, Huang e Zhu (2018), embora o mercado tenha sido altamente lucrativo, a indústria dos seguros é altamente fragmentada e o setor está repleto de desafios. Como os autores também referem, Eling e Luhnen (2010a, 2010b) afirmam que as companhias de seguros competem e operam num ambiente em rápida mutação, o que exige uma medição objetiva e fiável do desempenho e da eficiência.

Este capítulo tem por objetivo apresentar uma abordagem sobre a avaliação do desempenho com enfoque no setor segurador. Assim, na secção 2.2, serão referidas algumas das metodologias que têm sido utilizadas na avaliação de desempenho organizacional, nomeadamente no setor segurador. Na secção 2.3, é feita uma breve apresentação de uma metodologia que tem sido muito usada neste setor, a metodologia DEA. Por fim, na secção 2.4, é feita uma referência à aplicação da DEA no setor segurador.

2.2. Metodologias de avaliação no setor dos seguros

A existência de um mercado cada vez mais competitivo como o atual, implica que as empresas procurem inovar constantemente nos seus processos, utilizando novas metodologias e ferramentas, tendo como finalidade tirar o melhor partido dos seus produtos e serviços de forma a alcançar a excelência.

Segundo Richard, Devinney, Yip e Johnson (2009), a avaliação do desempenho organizacional tem um papel fundamental para o negócio moderno, pois é através desta que uma organização se posiciona em relação à concorrência e avalia a sua atuação e evolução ao longo do tempo.

Os métodos de avaliação de desempenho organizacional têm vindo a sofrer mudanças significativas, com o objetivo de se adaptarem e alinharem com novos modelos de gestão que têm vindo a regular a forma como as organizações funcionam. Tradicionalmente, para a medição e avaliação do desempenho organizacional, eram considerados somente indicadores financeiros e económicos. Eram aplicados métodos que se centravam na capacidade da organização maximizar os lucros de um projeto, em detrimento de qualquer outro critério. Esse ambiente organizacional era caracterizado pela certeza, previsibilidade e estabilidade, o que justificava a aplicação desses métodos.

Entre esses métodos, destacam-se os rácios que sendo uma ferramenta de análise financeira, pode ser usada como uma indicativa para medir o desempenho dos negócios de forma a determinar se uma organização está a progredir, estagnar ou regredir financeiramente ao longo de um determinado período (Jović & Tomašević, 2021). São uma expressão matemática, bastante simples, que medem a relação entre dois indicadores apresentados nas demonstrações financeiras. Estes índices são úteis para a gestão de um negócio, visto que são utilizados para determinar, a rentabilidade de uma organização, a otimização e eficiência na utilização de recursos de uma empresa.

Segundo Kumar (2018), os rácios que têm sido mais utilizados na indústria dos seguros são os seguintes:

- *Loss ratio* (rácio de sinistralidade), que mede o custo dos sinistros em relação às receitas de prémios, indicando a eficácia da subscrição e a gestão de riscos;
- *Expenses ratio* (rácio de despesa), que reflete a eficiência de operações de seguros, permitindo relacionar as despesas operacionais, como custos administrativos e de pessoal, às receitas de prémios;
- *Combined ratio* (rácio combinado), que inclui a sinistralidade e as despesas operacionais, permitindo demonstrar se uma organização é lucrativa ou não.
- *Investment ratio* (rácio de investimento), que analisa o desempenho dos investimentos da empresa.

Apesar das vantagens e oportunidades proporcionadas pelos indicadores financeiros tradicionais, as análises somente com base nesses indicadores revelam ser insuficientes e não adequadas para avaliar a eficiência organizacional, na medida que o desempenho operacional é um processo complexo que requer mais do que um único critério para classificá-lo (Zhu, 2009). Neely (1999), enumera algumas lacunas provenientes da utilização de rários financeiros para a análise do desempenho organizacional:

- Incentivam os resultados a curto prazo ao invés da perspectiva a longo prazo;
- Não possibilitam atuar de imediato, visto que existe pouca informação para soluções de problemas, não são fornecidos dados sobre qualidade, capacidade de resposta e apresentam flexibilidade limitada;
- Distorcem a construção da estratégia, como no caso do uso excessivo do retorno sobre o investimento ou *Return On Investment* (ROI);
- Encorajam a otimização local;
- Apenas relatam acontecimentos passados, enquanto os gestores desejam medidas preditivas, ou seja, não dão qualquer indicação para desempenhos futuros;
- Falta de informação relativamente à *performance* da concorrência e à satisfação e exigências dos consumidores.

Os rários financeiros não permitem ter uma visão global do desempenho organizacional, devido a concentrarem-se exclusivamente na ótica financeira. Para ultrapassar esta limitação, as seguradoras estão, atualmente, a incorporar métodos mais completos, tendo em consideração fatores como a satisfação do cliente, inovação no mercado, conformidade regulatória e sustentabilidade.

Desta forma começou a ser considerado, na década de 70, a necessidade de incorporar os indicadores financeiros com os não financeiros, ou seja, os métodos de avaliação de desempenho, baseados exclusivamente em relatórios económicos e financeiros, tornaram-se incompletos para medir a performance de uma organização moderna. Desde então, surgiram os Sistemas de Medição do Desempenho ou *Performance Measurement Systems* (PMS), passaram a ser considerados sistemas baseados em ativos intangíveis.

Segundo Tangen (2004), um sistema de desempenho organizacional eficiente deve ter as seguintes características:

- Auxiliar nos objetivos estratégicos, direcionando os processos-chave;
- Deverá ser flexível, o sistema de desempenho deve estar sempre em conformidade com os objetivos estratégicos da organização, na medida que se houver um ajuste ou mudança de estratégia, algumas medidas de desempenho também devem ser alteradas;
- Possuir um equilibrado apropriado., pois é essencial haver um balanço entre as medidas de desempenho, ou seja, deve incluir indicadores financeiros e não financeiros, inter-relacionados entre si por relações de causa efeito;
- Conter um número limitado de medidas de desempenho, uma vez que mais métodos de avaliação de performance requer mais custos e tempo de análise, sendo por isso importante definir as medidas de desempenho que não tenham interesse para os objetivos organizacionais;
- Implementar um sistema de informações facilmente acessível que permita uma fácil compreensão e acessibilidade;
- O sistema de avaliação de desempenho deverá conter medidas e objetivos claros e concisos de forma a não existirem equívocos na sua compreensão.

Em suma, para medir e avaliar o desempenho organizacional é essencial que as empresas possuam um sistema de avaliação de desempenho multidimensional equilibrado, utilizando indicadores financeiros e não financeiros, com o propósito de auxiliar no alcance dos objetivos estratégicos da organização.

De acordo com Kaffash, Azizi, Huang e Zhu (2018), entre as várias metodologias que têm sido desenvolvidas para a avaliação do desempenho no setor segurador, surgem a DEA (Data Envelopment Analysis) e a SFA (Stochastic Frontier Analysis) com destaque para a DEA pela grande aceitação que tem tido, a qual será apresentada na próxima secção. São metodologias de fronteira de eficiência e a principal diferença entre elas está no facto de que nesta última a fronteira de eficiência é definida *a priori*, enquanto na primeira é definida a partir dos dados relativos aos *inputs* e aos *outputs*.

2.3. Metodologia DEA

A DEA é uma metodologia relativamente recente, orientada para os dados, destinada a avaliar a eficiência relativa de um conjunto de entidades homogéneas, que podem ser do mais diverso tipo, denominadas DMUs (*Decision Making Units*). Uma DMU é caracterizada como uma

entidade que converte múltiplos recursos (*inputs*) em múltiplos produtos (*outputs*) (Cooper, Seiford, & Zhu, 2011).

A DEA foi formalmente introduzida com o trabalho de Charnes, Cooper e Rhodes (1978) no âmbito da tese de doutoramento de Rhodes e surgiu como resposta à incapacidade de técnicas de regressão e correlação estatísticas em tratar, de modo satisfatório, múltiplos *inputs* e múltiplos *outputs* (Cooper W. W., 2005).

Devido a esta incapacidade e às inadequações geradas na medição de múltiplos *inputs* e *outputs* surgiu a necessidade de desenvolver modelos mais eficazes para avaliar o desempenho das organizações. Como se refere em Sengupta (2012), Farrell (1957) foi o primeiro autor a consciencializar esta necessidade, desenvolvendo as ideias básicas da DEA. No seu trabalho, Farrell (1957) substituiu o conceito de produtividade por um conceito mais geral de eficiência produtiva ou eficiência técnica. Nesse trabalho, Farrell introduziu também o conceito de fronteira não paramétrica, definida a partir dos dados, em que apenas as combinações de *inputs* e *outputs* situadas nessa fronteira seriam consideradas eficientes. As que não se encontrassem nessa fronteira seriam consideradas ineficientes.

A DEA é uma técnica não paramétrica baseada na programação linear que, a partir dos dados relativos aos *inputs* e aos *outputs*, permite, entre um conjunto de DMUs em avaliação, identificar as DMUs que exibem as melhores práticas e resultados. Estas DMUs são consideradas eficientes e definem a fronteira de eficiência. Para as restantes DMUs, consideradas ineficientes, permite medir o nível de ineficiência por comparação com a fronteira de eficiência, assim como identificar o subconjunto de DMUs eficientes que são referência para que as mesmas se tornem eficientes.

A eficiência obtida pela DEA é normalmente uma medida na escala de zero a um, em que o valor um é obtido pelas DMUs consideradas eficientes e um valor inferior a um é obtido pelas DMUs consideradas ineficientes. Para além de fornecer um valor para a eficiência, a DEA permite identificar as alterações (melhorias) a realizar nas quantidades dos *inputs* e/ou dos *outputs* de modo que as DMUs consideradas ineficientes se tornem eficientes, o que constitui uma importante ferramenta de apoio à tomada de decisão.

A informação anterior é obtida através da resolução de um modelo de programação linear e do correspondente dual. O primeiro modelo, proposto por Charnes, Cooper e Rhodes (1978), considera retornos constantes de escala e é denotado por modelo CCR. Este modelo foi mais

tarde generalizado por Banker, Charnes e Cooper (1984), denotado por modelo BCC, por forma a considerar retornos variáveis de escala. Estes modelos são normalmente referidos como modelos clássicos da DEA e serão apresentados mais à frente, no capítulo 3. Como se verá também nesse capítulo, nestes modelos a eficiência é atingida através da redução dos valores dos *inputs* mantendo um determinado nível de *outputs* ou, através da expansão dos *outputs* sem aumentar o nível de *inputs*.

De acordo com Liu, Lu, Lu, e Lin (2013) existe uma grande variedade de indústrias que adotam a DEA por diversas razões e que, segundo Golany e Roll (1989), a DEA pode ser aplicada para:

- Identificar origens de ineficiência;
- Estabelecer *ranking* sobre as DMUs;
- Avaliar a gestão;
- Avaliar a eficiência de programas ou políticas;
- Criar uma base quantitativa para realocação de recursos, etc.

Os modelos tradicionais da DEA oferecem uma ferramenta adequada para avaliar a eficiência relativa das DMUs, fornecendo informações relevantes para a tomada de decisões e identificação de melhores práticas. Em contrapartida, a utilização destes modelos apresenta limitações, como é o caso de, em geral, identificarem várias DMUs como eficientes, nomeadamente quando o número de DMUs é pequeno relativamente ao número de *inputs* e de *outputs*. A fim de minimizar este problema, Cooper, Seiford e Tone (2007), sugeriram uma relação que deve ser verificada entre aqueles parâmetros, dada pela expressão

$$n \geq \max \{m \times s, 3(m + s)\},$$

onde n é o número de DMUs, m e s são o número de *inputs* e de *outputs*, respetivamente. Contudo, a verificação desta relação não impede que, em geral, várias DMUs sejam consideradas eficientes, impedindo assim, um *ranking* sobre todas elas.

Deste modo, vários métodos e modelos de *rankings* têm sido propostos na literatura da DEA, como se pode verificar nos trabalhos desenvolvidos por Alder, Friedman e Snuany-Stern (2002) e por Aldamak e Zolfaghari (2017). Nesses métodos encontra-se o método da eficiência ou da avaliação cruzada que, conjuntamente com a avaliação clássica, constituem o tema deste trabalho. Os modelos da eficiência clássica e o método da avaliação cruzada baseada naqueles modelos serão apresentados no capítulo 3.

2.4. Aplicação da DEA no setor dos seguros

Através da DEA é possível identificar áreas de melhoria, otimizar recursos e definir metas de desempenho. Esta metodologia tem-se revelado uma ferramenta essencial para avaliar como as seguradoras estão a alcançar os seus objetivos, fornecendo informações valiosas sobre o desempenho na indústria de seguros.

Como é referido por Cooper, Seiford e Tone (2007) existe uma ampla variedade de aplicações da DEA para a avaliação do desempenho de inúmeros tipos de entidades, tanto do setor público (hospitais, lares, universidades, prisões, entre outros) quanto do setor privado (bancos, seguradoras, comércio, entre outros).

O primeiro trabalho de aplicação da DEA ao setor segurador foi desenvolvido por Fecher et al. (1993) para avaliar a eficiência de 84 seguradoras do ramo vida e 243 do ramo não vida em França entre 1984 e 1989. Desde então, inúmeras aplicações da DEA à indústria dos seguros têm surgido na literatura. Kaffash, Azizi, Huang e Zhu (2018), num trabalho de revisão sobre aplicações da DEA na indústria dos seguros entre 1993 e 2018, referem que foram realizados 132 estudos de aplicação da DEA na indústria dos seguros. Relativamente a estes estudos, os autores referem que apenas 15% daqueles estudos foram publicados até 2000, 42% foram publicados entre 2010 e 2016 e que em 2018 existe um crescente número de aplicações, o que confirma o crescente interesse na aplicação da DEA na indústria dos seguros. Este interesse é também mostrado nos trabalhos de revisão que usam metodologias de fronteira de eficiência para avaliar a eficiência no setor segurador, apresentados por Cummins e Weiss (2000), por Eling e Luhn (2010) e por Cummins e Weiss (2013).

Liu, Lu, Lu e Lin (2013), no seu estudo sobre aplicações da DEA entre 1978 e 2010, consideram as 24 áreas onde tem existido maior aplicação da DEA, sendo que a área dos seguros surge em décimo primeiro lugar com 44 aplicações durante aquele período.

Relativamente aos modelos/métodos mais usados nas aplicações da DEA ao setor segurador, os modelos clássicos, CCR e BCC, têm sido os mais usados para avaliar a eficiência técnica, de escala e de custo, ou para estimações de alterações na produtividade total. Em particular o índice de produtividade de Malmquist tem sido muito usado na avaliação das seguradoras (Kaffash, Azizi, Huang, & Zhu, 2018). Este índice representa o crescimento da Produtividade Total dos Factores (PTF) de uma DMU, na medida em que reflete (1) o progresso ou a regressão da

eficiência juntamente com (2) o progresso ou a regressão da fronteira entre dois períodos de tempo sob estrutura de múltiplos *inputs* e múltiplos *outputs* (Cooper, Seiford, & Tone, 2007).

Uma variante da DEA que tem sido usada na indústria dos seguros é a *Network* DEA que surgiu como resposta ao facto de uma DMU ser vista como uma *black box* que transforma *inputs* em *outputs*, sem ter em conta a sua estrutura interna, não permitindo identificar as origens da ineficiência nas DMUs ineficientes. Na *Network* DEA, cada processo inerente a uma DMU é composto de vários subprocessos nos quais uma estrutura em rede é usada para desenhar a relação entre esses subprocessos.

Hwang e Kao (2006) foram os primeiros a usar a *Network* DEA para avaliar o desempenho de 24 companhias de seguros do ramo não vida em Taiwan. Estes autores dividiram o processo de produção inerente a uma seguradora em dois subprocessos: aquisição de prémio e geração de lucro. No primeiro subprocesso, foram consideradas como *inputs* as despesas de funcionamento e as despesas de seguro e, como *outputs*, os prémios de seguro direto e prémios de resseguro. Estes dois *outputs* foram seguidamente utilizados como *inputs* no segundo subprocesso onde o lucro operacional e o lucro de investimento foram considerados como *outputs*. Este caso em que o processo é decomposto em dois subprocessos é o mais simples e é usualmente referido como *Network Two-Stage* DEA. Como se refere em Kaffash, Azizi, Hwang e Zhu (2018), vários outros autores têm utilizado a *Network* DEA.

3. Avaliação clássica e avaliação cruzada na DEA

3.1. Introdução

Na metodologia DEA, a avaliação clássica é feita através dos modelos clássicos, também conhecidos por modelos básicos, mais especificamente através dos modelos CCR e BCC. O modelo CCR considera retornos constantes de escala, isto é, uma variação nos *inputs* produz uma variação proporcional nos *outputs*, sendo, por isso, muitas vezes referido como modelo CRS (*Constant Returns to Scale*). O modelo BCC é uma extensão do modelo CCR para retornos variáveis de escala, em que, para além da variação proporcional, uma variação nos *inputs* produz uma variação nos *outputs* maior ou menor do que o proporcional, sendo, por isso, muitas vezes referido como modelo VRS (*Variable Returns to Scale*).

Nos modelos clássicos, cada DMU escolhe os pesos associados aos *inputs* e aos *outputs* que lhe são mais favoráveis sujeito a um conjunto de restrições, uma para cada DMU, que impõem um limite para o valor da eficiência. Trata-se de um processo de auto-avaliação que permite grande flexibilidade na escolha dos pesos, a qual, por sua vez, possibilita que várias DMUs sejam consideradas eficientes, não conseguindo discriminá-las e, conseqüentemente, estabelecer um *ranking* completo sobre todas as DMUs. Para ultrapassar esta limitação, vários métodos de *rankings* na DEA têm sido propostos na literatura da especialidade (ver, por exemplo: Adler, Friedman e Sinuany-Stern, 2002; Aldamak e Zolfaghari, 2017). Um desses métodos é o método da eficiência cruzada (*Cross-efficiency*) que, devido ao seu forte poder de discriminação, tem-se tornado muito popular no estabelecimento de *rankings* na DEA.

O método da eficiência cruzada, ou avaliação cruzada, foi inicialmente proposto por Sexton, Silkman e Hogan (1986) e posteriormente desenvolvido por Doyle e Green (1994), tendo por base o modelo clássico CCR. A principal ideia do método da eficiência cruzada consiste em utilizar a avaliação realizada por cada DMU (autoavaliação) conjuntamente com a avaliação realizada pelas restantes DMUs (avaliação pelos pares), obtendo-se assim uma avaliação de conjunto em vez de uma avaliação individual como acontece na avaliação clássica da DEA.

Este capítulo tem por objetivo apresentar um estudo sobre a avaliação clássica e a avaliação cruzada com enfoque nesta última. Assim, na secção 3.2, começa-se por apresentar os modelos clássicos da DEA que servem de base para a avaliação cruzada apresentada nas secções seguintes. Na secção 3.3, descreve-se o método da eficiência cruzada considerando retornos constantes de escala, mais especificamente, usando o modelo CCR. Na secção 3.4, o método é

aplicado considerando retornos variáveis de escala, mais especificamente, usando o modelo BCC e mostra-se que neste caso podem existir eficiências cruzadas negativas quando o modelo é orientado para *inputs*. Para ultrapassar este problema são apresentadas algumas abordagens, mais concretamente, a abordagem baseada em restrições adicionais, proposta por Meza, Mello, Gomes e Neto (2004) e Wu, Liang e Chen (2009) e as abordagens baseadas na interpretação geométrica da avaliação cruzada propostas por Lim e Zhu (2015) e por Asadi, Nasserli e Lofti (2020).

3.2. Avaliação clássica

Como se referiu anteriormente, a avaliação clássica é realizada através dos modelos clássicos CCR e BCC. Cada um destes modelos pode ser orientado para *inputs* ou para *outputs*. No primeiro caso, a eficiência é atingida através da redução dos *inputs*, garantindo um determinado nível de *outputs*. No segundo, a eficiência é atingida através da expansão dos *outputs* sem aumentar o nível de *inputs*. A seleção da orientação destes modelos é, em geral, feita de acordo com o controle que o decisor tem sobre os *inputs* e *outputs* e do contexto económico.

Para descrever matematicamente os modelos clássicos, que são apresentados nas subsecções seguintes, assume-se que existe um conjunto de n DMUs que se pretendem avaliar e que cada DMU usa m *inputs* para produzir s *outputs*. Mais especificamente, cada DMU_j ($j = 1, \dots, n$) utiliza a quantidade x_{ij} do *input* i ($i = 1, \dots, m$) para produzir a quantidade y_{rj} do *output* r ($r = 1, \dots, s$). Assume-se, ainda, que $x_{ij} \geq 0$, $y_{rj} \geq 0$ e que para cada DMU existe, pelo menos, um *input* e um *output* com valores positivos. Adicionalmente, admitindo que a DMU_k é a DMU em avaliação, considerem-se as variáveis de decisão, não negativas, v_{ik} ($i = 1, \dots, m$) e u_{rk} ($r = 1, \dots, s$) que representam os pesos (multiplicadores) associados aos *inputs* e aos *outputs*, respetivamente.

3.2.1. Modelo CCR

Como se referiu anteriormente, o modelo CCR contempla duas versões, uma orientada para *inputs* e outra orientada para *outputs*. Na versão orientada para *inputs*, cujo objetivo é minimizar os *inputs* mantendo os *outputs*, a forma fracionária do modelo CCR que permite avaliar a eficiência da DMU_k ($k \in \{1, \dots, n\}$) é dada pelo seguinte modelo de programação linear fracionária:

$$e_{kk}^* = \max \frac{\sum_{r=1}^s y_{rk} u_{rk}}{\sum_{i=1}^m x_{ik} v_{ik}} \quad (3.1a)$$

$$s. a. \frac{\sum_{r=1}^s y_{rj} u_{rk}}{\sum_{i=1}^m x_{ij} v_{ik}} \leq 1 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.1b)$$

$$v_{ik} \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.1c)$$

$$u_{rk} \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.1d)$$

Neste modelo, o índice de eficiência da DMU_k, e_{kk}^* , é obtido através da maximização do quociente entre a soma ponderada dos *outputs* e a soma ponderada dos *inputs* da DMU_k, sujeito a um conjunto de restrições (3.1b) que indicam que um quociente similar para cada uma das DMUs, incluindo a DMU_k, é não superior a 1. As restrições (3.1c) e (3.1d) indicam a natureza, não negativa, das variáveis de decisão.

Como se refere em Cooper, Seiford e Zhu (2011), o modelo (3.1) permite um número infinito de soluções, uma vez que se (u^*, v^*) é solução ótima então $(\alpha u^*, \alpha v^*)$ é também solução ótima, para todo $\alpha > 0$. Contudo, usando a transformação de Charnes e Cooper (1962) é possível selecionar uma dessas soluções e obter um modelo de programação linear equivalente. Então, igualando a 1 o denominador da função objetivo (3.1a), o modelo anterior é equivalente ao seguinte modelo de programação linear:

$$e_{kk}^* = \max \sum_{r=1}^s y_{rk} u_{rk} \quad (3.2a)$$

$$s. a. \sum_{i=1}^m x_{ik} v_{ik} = 1 \quad (3.2b)$$

$$-\sum_{i=1}^m x_{ij} v_{ik} + \sum_{r=1}^s y_{rj} u_{rk} \leq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.2c)$$

$$v_{ik} \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.2d)$$

$$u_{rk} \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.2e)$$

O modelo (3.2) é conhecido por forma dos multiplicadores do modelo CCR orientado para *inputs*: A solução ótima deste modelo, dada por v_{ik}^* ($i = 1, \dots, m$) e u_{rk}^* ($r = 1, \dots, s$), fornece o valor dos pesos associados aos *inputs* e aos *outputs*, respetivamente, para a DMU_k e o correspondente valor ótimo, e_{kk}^* , fornece o índice de eficiência para essa DMU_k.

De referir, que pelo modelo anterior tem-se $e_{kk}^* \leq 1$, pelo que o índice de eficiência da DMU_k é medido na escala de zero a um. Se esse índice é igual a um com os pesos ótimos associados aos *inputs* e aos *outputs* todos positivos, a DMU_k diz-se (fortemente) eficiente. Caso contrário, isto é, se o índice de eficiência é menor do que um ou é igual a um com pesos iguais a zero, a DMU_k diz-se ineficiente.

Na versão orientada para *outputs*, cujo objetivo é maximizar os valores dos *outputs* sem que tal implique um incremento nos valores dos *inputs*, a forma fracionária do modelo CCR é dada pelo seguinte modelo de programação linear fracionária:

$$f_{kk}^* = \min \frac{\sum_{i=1}^m x_{ik} v_{ik}}{\sum_{r=1}^s y_{rk} u_{rk}} \quad (3.3a)$$

$$s. a. \frac{\sum_{i=1}^m x_{ij} v_{ik}}{\sum_{r=1}^s y_{rj} u_{rk}} \geq 1 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.3b)$$

$$v_{ik} \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.3c)$$

$$u_{rk} \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.3d)$$

Neste modelo, pretende-se determinar os pesos associados aos *inputs* e aos *outputs* da DMU_k que minimizam o quociente entre a soma ponderada dos *inputs* e a soma ponderada dos *outputs* dessa DMU_k, sujeito a um conjunto de restrições (3.3b) que garantem que um quociente similar é maior ou igual a 1 para cada uma das DMUs. Mais uma vez, as restrições (3.3c) e (3.3d) indicam a natureza, não negativa, das variáveis de decisão.

Também nesta versão, a forma dos multiplicadores é obtida da forma fracionária através da transformação de Charnes e Cooper (1962) e é dada pelo seguinte modelo de programação linear:

$$f_{kk}^* = \min \sum_{i=1}^m x_{ik} v_{ik} \quad (3.4a)$$

$$s. a. \sum_{r=1}^s y_{rk} u_{rk} = 1 \quad (3.4b)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} v_{ik} - \sum_{r=1}^s y_{rj} u_{rk} \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.4c)$$

$$v_{ik} \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.4d)$$

$$u_{rk} \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.4e)$$

Neste caso tem-se $f_{kk}^* \geq 1$, pelo que a eficiência é dada na escala de maior ou igual a 1. No entanto, considerando a eficiência dada por $1/f_{kk}^*$, garante-se que a mesma pertence ao intervalo]0,1], isto é, que é uma medida na escala de 0 a 1. Se o valor ótimo do modelo anterior é igual a 1 e os pesos associados aos *inputs* e aos *outputs* são todos positivos, a DMU_k diz-se eficiente. Caso contrário, a DMU_k diz-se ineficiente e será tanto mais ineficiente quando maior for esse valor.

3.2.2. Modelo BCC

Na forma fracionária e na forma dos multiplicadores, o modelo BCC difere do modelo CCR pelo facto de incluir uma variável real que indica o tipo de retorno de escala (crescente, decrescente ou constante) sob o qual a DMU em avaliação opera. A forma fracionária da versão orientada para *inputs* do modelo BCC, para avaliação da DMU_k, é então dada pelo seguinte modelo:

$$\theta_{kk} = \max \frac{\sum_{r=1}^s y_{rk} u_{rk} + u^k}{\sum_{i=1}^m x_{ik} v_{ik}} \quad (3.5a)$$

$$s. a. \frac{\sum_{r=1}^s y_{rj} u_{rk} + u^k}{\sum_{i=1}^m x_{ij} v_{ik}} \leq 1 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.5b)$$

$$v_{ik} \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.5c)$$

$$u_{rk} \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.5d)$$

$$u^k \in \mathbb{R} \quad (3.5e)$$

O modelo 3.5 pode ser convertido através da transformação de Charnes e Cooper (1962), no seguinte modelo de programação linear, conhecido por forma dos multiplicadores do modelo BCC orientado para *inputs*:

$$\theta_{kk} = \max \sum_{r=1}^s y_{rk} u_{rk} + u^k \quad (3.6a)$$

$$s. a. \sum_{i=1}^m x_{ik} v_{ik} = 1 \quad (3.6b)$$

$$\sum_{r=1}^s y_{rj} u_{rk} + u^k - \sum_{i=1}^m x_{ij} v_{ik} \leq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.6c)$$

$$v_{ik} \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.6d)$$

$$u_{rk} \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.6e)$$

$$u^k \in \mathbb{R} \quad (3.6f)$$

Para além dos pesos ótimos associados aos *inputs* e aos *outputs* da DMU_k, a solução ótima deste modelo permite obter informação quanto ao tipo de retorno de escala em que essa opera, dada por u^{k*} . Assim, $u^{k*} > 0$ indica que a DMU_k opera sob retorno crescente de escala; $u^{k*} < 0$ indica que a DMU_k opera sob retorno decrescente de escala; e $u^{k*} = 0$ indica que a DMU_k opera sob retorno constante de escala.

A forma fracionária da versão orientada para *outputs* do modelo BCC é dada por:

$$\rho_{kk} = \min \frac{\sum_{i=1}^m x_{ik} v_i + v^k}{\sum_{r=1}^s y_{rk} u_r} \quad (3.7a)$$

$$s. a. \frac{\sum_{i=1}^m x_{ij} v_{ik} + v^k}{\sum_{r=1}^s y_{rj} u_{rk}} \geq 1 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.7b)$$

$$v_{ik} \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.7c)$$

$$u_{rk} \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.7d)$$

$$v^k \in \mathbb{R} \quad (3.7e)$$

Usando novamente a transformação de Charnes e Cooper (1962), o modelo anterior pode ser convertido no seguinte modelo de programação linear, conhecido como forma dos multiplicadores do modelo BCC orientado para *outputs*:

$$\rho_{kk} = \min \sum_{i=1}^m x_{ik} v_{ik} + v^k \quad (3.8a)$$

$$s. a. \sum_{r=1}^s y_{rk} u_{rk} = 1 \quad (3.8b)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} v_{ik} + v^k - \sum_{r=1}^s y_{rj} u_{rk} \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.8c)$$

$$v_{ik} \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.8d)$$

$$u_{rk} \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.8e)$$

$$v^k \in \mathbb{R} \quad (3.8f)$$

Similarmente ao que acontece na versão orientada para *inputs*, para além de permitir obter os pesos ótimos associados aos *inputs* e aos *outputs* da DMU_k, a solução ótima deste modelo permite também obter o tipo de retorno de escala em que essa opera, dado por v^{k*} . Neste caso, $v^{k*} > 0$ indica que a DMU_k opera sob retorno decrescente de escala; $v^{k*} < 0$ indica que a DMU_k opera sob retorno crescente de escala; e $v^{k*} = 0$ indica que a DMU_k opera sob retorno constante de escala.

As versões orientadas para *inputs* e para *outputs* dos modelos CCR e BCC admitem uma outra forma, designada de forma do envelope, dada pelo dual da forma dos multiplicadores. O conjunto das soluções admissíveis dos modelos nesta forma define o conjunto de possibilidades de produção. A solução ótima permite obter informação quanto às DMUs que são referência para que uma DMU ineficiente se torne eficiente (ver, por exemplo, Cooper, Seiford & Zhu, 2011). Neste trabalho optou-se por apresentar apenas a forma fracionária e a forma dos multiplicadores por serem as que são comuns a ambos os tipos de avaliação, clássica e cruzada.

3.3. Avaliação cruzada baseada no modelo CCR

Como se referiu anteriormente, o método da avaliação cruzada, introduzido por Sexton, Silkman e Hogan (1986) e por Doyle e Green (1994), assenta na ideia de uma avaliação de conjunto em que cada DMU é avaliada por si própria (auto-avaliação) e pelas restantes DMUS em avaliação (avaliação pelos pares).

Este método é geralmente apresentado como um processo de duas fases. Na primeira fase (auto-avaliação), é usado o modelo CCR orientado para *inputs*, para obter os pesos ótimos associados aos *inputs* e aos *outputs* bem como o correspondente índice de eficiência para cada DMU. Na segunda fase (avaliação pelos pares), esses pesos ótimos são usados para calcular as eficiências cruzadas das restantes $n-1$ DMUs e obter um índice de eficiência cruzada para cada DMU (Cook e Zhu, 2015).

Então, a primeira fase do método da avaliação cruzada consiste em obter, através do modelo (3.2), n conjuntos, um para cada DMU, de pesos ótimos associados aos *inputs* e aos *outputs*.

A segunda fase consiste em usar esses pesos ótimos para obter a eficiência cruzada da DMU_{*j*} quando avaliada pela DMU_{*k*}, dada por:

$$e_{kj} = \frac{\sum_{r=1}^s y_{rj} u_{rk}^*}{\sum_{i=1}^m x_{ij} v_{ik}^*} \quad k, j = 1, \dots, n \quad (3.9)$$

A expressão (3.9) define uma matriz quadrada de ordem n , designada por matriz das eficiências cruzadas, cujos elementos assumem valores maiores do que zero e menores ou iguais a um, uma vez que esses valores são obtidos usando o modelo CCR orientado para *inputs*. Para os elementos da diagonal principal, isto é, para $j = k$, a expressão anterior fornece a eficiência da DMU_{*k*} usando os seus próprios pesos, e_{kk} , ou seja, a eficiência obtida pelo modelo CCR para aquela DMU_{*k*}. Para os restantes elementos, isto é, para $j \neq k$, a referida expressão fornece a avaliação feita pela DMU_{*k*} a cada uma das restantes $n-1$ DMUs, fixando k , e a avaliação feita à DMU_{*j*} por cada uma das restantes $n-1$ DMUs, fixando j . Por outras palavras, em cada linha k da referida matriz, tem-se a eficiência obtida pela auto-avaliação da DMU_{*k*} e as eficiências cruzadas para as restantes $n-1$ DMUs quando avaliadas pela DMU_{*k*}; em cada coluna j , tem-

se a eficiência da auto-avaliação da DMU_j e as eficiências desta DMU quando avaliada pelas restantes $n-1$ DMUs.

Para cada DMU_j ($j = 1, \dots, n$), o índice de eficiência cruzada, \bar{e}_j , é normalmente definido por:

$$\bar{e}_j = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e_{kj} \quad j = 1, \dots, n \quad (3.10)$$

Então, o índice de eficiência cruzada de uma DMU_j é dado pela média aritmética dos índices de eficiência obtidos pela autoavaliação e pela avaliação feita pelas restantes DMUs. Os índices de eficiência cruzada obtidos em (3.10) são usados para comparar o desempenho das DMUs em avaliação, sendo que quanto maior for esse índice melhor é o desempenho. Em geral, os índices obtidos para as diversas DMUs são diferentes permitindo deste modo estabelecer um *ranking* sobre todas as DMUs.

De acordo com Cook e Zhu (2015), cada eficiência individual e_{kj} obtida em (3.9) é designada de eficiência cruzada, o mesmo acontecendo com a média obtida em (3.10). No entanto, em geral, a designação de eficiência cruzada refere-se à média definida em (3.10) e não aos valores individuais definidos em (3.9).

A matriz das eficiências cruzadas definida em (3.9) e os índices de eficiência cruzada definidos em (3.10) podem ser representados através da Tabela 3.1.

Tabela 3.1 - Matriz e índices das eficiências cruzadas para n DMUs.

DMU	1	2	...	n
1	e_{11}	e_{12}	...	e_{1n}
2	e_{21}	e_{22}	...	e_{2n}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	e_{n1}	e_{n2}	...	e_{nn}
	\bar{e}_1	\bar{e}_2	...	\bar{e}_n

Fonte: Adaptado de Cook e Zhu (2015).

Atendendo a que os índices de eficiência cruzada foram obtidos usando um modelo orientado para *inputs*, cada um desses índices é não superior a um. É igual a um, para uma determinada

DMU, quando for igual a um na fase de auto-avaliação e na fase da avaliação pelos pares. Então, uma DMU é eficiente através da avaliação cruzada se for eficiente na avaliação que faz a si própria e na avaliação feita por cada uma restantes DMUs.

De referir que, em geral, os valores da eficiência cruzada e_{kj} ($k \neq j$) e, conseqüentemente, os índices de eficiência cruzada \bar{e}_j não são únicos devido à frequente existência de soluções ótimas múltiplas fornecidas pelo modelo (3.2). Deste modo, os índices de eficiência cruzada são obtidos de forma arbitrária por dependerem da solução ótima obtida por um determinado *software* o que constitui uma desvantagem deste método. Contudo, esta desvantagem pode ser ultrapassada usando modelos de objetivo secundário que têm por objetivo escolher um entre os múltiplos conjuntos de pesos ótimos. Sexton, Silkman e Hogan (1986) seguidos de Doyle e Green (1994), foram os primeiros a propor tal tipo de modelos designados de benevolente e agressivo. A ideia dos modelos benevolentes é a de determinar os pesos que maximizam não só a eficiência de uma DMU mas também a eficiência média das restantes DMUs. Por outro lado, nos modelos agressivos a ideia é a de determinar os pesos que maximizam a eficiência de uma DMU e minimizam a eficiência média das restantes DMUs. Vários modelos deste tipo têm sido propostos na literatura da DEA entre os quais se referem os modelos propostos por Liang, Wu, Cook e Zhu (2008) e por Wang e Chin (2010a). Os modelos benevolente e agressivo obrigam a que decisor tenha de optar por um deles, uma opção nem sempre fácil de tomar. Para ultrapassar esta dificuldade, alguns modelos de objetivo secundário neutro têm sido propostos por Wang e Chin (2010b), por Wang, Chin e Jiang (2011) e por Nasseri e Kiaei (2018).

O método da eficiência cruzada pode similarmente ser aplicado usando o modelo CCR orientado para *outputs*. Sendo v_{ik}^* ($i = 1, \dots, m$) e u_{rk}^* ($r = 1, \dots, s$) os pesos ótimos associados aos *inputs* e aos *outputs*, respetivamente, da DMU_k na solução ótima do modelo CCR orientado para *outputs*, descrito em (3.4) e considerando a escala de maior ou igual a 1, a eficiência cruzada da DMU_j usando a DMU_k, f_{kj} , é dada por:

$$f_{kj} = \frac{\sum_{i=1}^m x_{ij} v_{ik}^*}{\sum_{r=1}^s y_{rj} u_{rk}^*} \quad k, j = 1, \dots, n \quad (3.11)$$

O índice de eficiência cruzada para uma DMU_j é obtido usando adequadamente a expressão (3.10), isto é, substituindo, nessa expressão, \bar{e}_j por \bar{f}_j e e_{kj} por f_{kj} . De notar que nesta escala,

contrariamente ao que acontece na escala de 0 a 1, uma DMU terá melhor *ranking* quanto menor for o seu índice de eficiência cruzada.

Como se viu, o método da eficiência cruzada pode ser aplicado usando o modelo CCR com orientação para *inputs* ou para *outputs*. Contudo, o mesmo não acontece quando se considera o modelo BCC e a orientação para *inputs* como se verá na seção seguinte.

3.4. Avaliação cruzada baseada no modelo BCC

Apesar da popularidade adquirida na determinação de *rankings* no âmbito da DEA, devido ao seu forte poder de discriminação, o método da eficiência apresenta uma importante limitação quando usa diretamente o modelo BCC orientado para *inputs*, motivada pela ocorrência de eficiências cruzadas negativas. Talvez, devido a essa limitação, o trabalho desenvolvido sobre o método da eficiência cruzada tenha usado maioritariamente o modelo CCR e muito pouco trabalho tenha sido desenvolvido com base no modelo BCC. Contudo, existem muitas aplicações onde o aumento de *inputs* não resulta no aumento proporcional de *outputs*, requerendo que se considerem retornos variáveis de escala, pelo que se revela importante a existência de modelos de eficiência cruzada para este tipo de retornos de escala.

Nesta seção mostra-se que a aplicação do método de eficiência cruzada usando o modelo BCC orientado para *inputs* pode conduzir à existência de eficiências cruzadas negativas. Igualmente se mostra que este problema não ocorre na versão orientada para *outputs*. Para ultrapassar o problema das eficiências cruzadas negativas, algumas abordagens propostas na literatura são apresentadas nesta seção.

Depois de obtida a solução ótima do modelo BCC orientado para *inputs*, definido em (3.6), para cada DMU_k , o método da eficiência cruzada usa essa solução ótima para obter as eficiências cruzadas das restantes DMUs e, posteriormente, obter o índice de eficiência cruzada para cada DMU. Isto é, se $(u_{1k}^*, \dots, u_{sk}^*; v_{1k}^*, \dots, v_{mk}^*; u^{k*})$ ($k \in \{1, \dots, n\}$) é uma solução ótima do modelo (3.6) então a eficiência cruzada obtida por cada DMU_j usando este conjunto de pesos, denotada por θ_{kj} , é dada por:

$$\theta_{kj} = \frac{\sum_{r=1}^s y_{rj} u_{rk}^* + u^{k*}}{\sum_{i=1}^m x_{ij} v_{ik}^*} \quad k, j = 1, \dots, n \quad (3.12)$$

Para cada DMU_j ($j = 1, \dots, n$), o índice de eficiência cruzada, $\bar{\theta}_j$, é dado por:

$$\bar{\theta}_j = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \theta_{kj} \quad j = 1, \dots, n \quad (3.13)$$

Quando a solução ótima do modelo (3.6) é usada para avaliar a DMU_j , o valor da eficiência cruzada pode ser negativo se $u^{k*} \in \mathbb{R}$ for suficientemente negativo, isto é, se for tal que $\sum_{r=1}^s y_{rj} u_{rk}^* + u^{k*}$ é negativo. Isto significa que a eficiência cruzada de uma DMU_j pode ser negativa quando avaliada pela DMU_k , o que não faz sentido no contexto da DEA onde a eficiência é entendida como uma medida e, por isso, não negativa. Como consequência, o índice de eficiência cruzada de uma DMU pode também ser negativo.

Para ultrapassar o problema das eficiências negativas referidas anteriormente, algumas abordagens têm sido propostas como se verá mais à frente. Antes, analise-se que tal problema não ocorre quando se usa o modelo BCC orientado para *outputs*.

Para se evitar o aparecimento de eficiências cruzadas negativas terá de se incluir nos modelos (3.7) e (3.8) a restrição

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} v_{ik} + v^k \geq 0 \quad (3.14)$$

A restrição (3.8c) pode ser reescrita como

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} v_{ik} + v^k \geq \sum_{r=1}^s y_{rj} u_{rk}$$

Como $u_{rk} \geq 0$ e $y_{rj} \geq 0$ então $\sum_{r=1}^s y_{rj} u_{rk} \geq 0$, pelo que $\sum_{i=1}^m x_{ij} v_{ik} + v^k \geq 0$.

Então a restrição (3.14) já está incluída implicitamente nos modelos (3.7) e (3.8).

Deste modo, tem-se que na versão orientada para *outputs* não existem eficiências cruzadas negativas, pelo que o problema da existência deste tipo de eficiências apenas ocorre na versão orientada para *inputs* daquele modelo.

Na orientação para *outputs*, a eficiência cruzada da DMU_j , obtida usando os valores ótimos dos pesos e do retorno de escala da DMU_k , obtidos por (3.8), é definida por:

$$\rho_{kj} = \frac{\sum_{i=1}^m x_{ij} v_{ik}^* + v^{k*}}{\sum_{r=1}^s y_{rj} u_{rk}^*} \quad k, j = 1, \dots, n \quad (3.15)$$

As eficiências cruzadas obtidas por (3.15) são medidas na escala de maior ou igual a 1. O índice de eficiência cruzada para uma DMU_j é obtido usando adequadamente a expressão (3.10), isto é, substituindo, nessa expressão, \bar{e}_j por $\bar{\rho}_j$ e e_{kj} por ρ_{kj} .

De notar ainda que o problema da existência de eficiências negativas também não se coloca no modelo BCC orientado para *inputs* quando se consideram retornos não decrescentes de escala, uma vez que, neste caso, o valor da variável que indica o tipo de retorno de escala é sempre não negativo.

Nas subsecções que se seguem apresentam-se algumas abordagens que têm sido propostas na literatura da DEA, de modo a evitar a existência de eficiências negativas na avaliação cruzada quando se usa o modelo BCC orientado para *inputs*.

3.4.1. Abordagem baseada em restrições adicionais

Para evitar a existência de eficiências negativas na avaliação cruzada quando se usa o modelo BCC orientado para *inputs*, Meza, Mello, Gomes e Neto (2004) e Wu, Liang e Chen (2009) introduziram nesse modelo, de forma intuitiva e sem qualquer tipo de análise, o seguinte conjunto de restrições adicionais:

$$\sum_{r=1}^s y_{rj} u_r + u^k \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.16)$$

Mello, Meza, Silveira e Gomes (2013) abordaram o problema das eficiências negativas fazendo uma análise ao novo modelo, mais especificamente, às consequências que advém da introdução das referidas restrições adicionais no modelo BCC.

Como os autores referem, uma forma direta de evitar eficiências negativas seria introduzir no modelo BCC orientado para *inputs* a restrição de não negatividade sobre a variável que indica o tipo de retorno de escala, isto é, introduzir a restrição $u^k \geq 0$, uma vez que as eficiências negativas são devidas aos valores negativos desta variável. Nesse caso tem-se um modelo, para retornos não decrescentes de escala. Note-se que as restrições adicionais (3.16) são menos restritivas do que a restrição de não negatividade $u^k \geq 0$, pelo que os índices de eficiência

fornecidos pelo modelo BCC orientado para *inputs* com as restrições (3.16) são mais elevados do que os fornecidos pelo mesmo modelo para retornos não decrescentes de escala, sendo também mais consistente com o modelo BCC.

Mello, Meza, Silveira e Gomes (2013) mostram ainda que a introdução de um novo conjunto de restrições (3.15d) no modelo BCC orientado para *inputs* provoca alterações no respectivo modelo dual, isto é, na forma do envelope do modelo BCC orientado para *inputs*, que podem conduzir a alterações na fronteira de eficiência e, conseqüentemente, em alguns índices de eficiência, *benchmarks*, multiplicadores e fatores de escala, referindo as condições em que tais alterações podem ocorrer. Com base no trabalho desenvolvido por Thanassoulis e Allen (1988), onde se mostra que as restrições sobre os pesos podem ser substituídas por DMUs não observadas ou virtuais, os autores referem que as restrições de não negatividade sobre cada DMU são restrições sobre os pesos e, por isso, podem ser substituídas por DMUs não observadas ou virtuais. Através de um exemplo, os autores analisam as alterações na fronteira de eficiência através da introdução de DMUs não observadas ou virtuais.

3.4.2. Abordagem de Lim e Zhu (2015)

Lim e Zhu (2015) apresentam uma abordagem para contornar o problema das eficiências negativas baseada na interpretação geométrica da avaliação cruzada envolvendo os modelos VRS e CRS. Os autores alegam que a existência de eficiências negativas na avaliação cruzada é causada por situações onde os pesos escolhidos por algumas DMUs não são válidos para a avaliação cruzada de outras DMUs. Para justificar esta alegação, os autores afirmam que a fronteira de eficiência associada com os pesos ótimos escolhidos por uma DMU estende para um ponto que representa a livre produção de *outputs* e, por isso, algum tipo de ajustamento terá de ser feito para que aqueles pesos inválidos possam ser corretamente usados na avaliação cruzada.

Para uma melhor compreensão da existência de eficiências cruzadas negativas e a sua relação com a produção livre de *outputs* quando se usa o modelo BCC orientado para *inputs*, considere-se a Figura 3.1, onde é apresentado exemplo com cinco DMUs com um *input* e um *output* apresentado em Asadi, Nasser e Lotfi (2020) e que é similar ao apresentado em Lim e Zhu (2015).

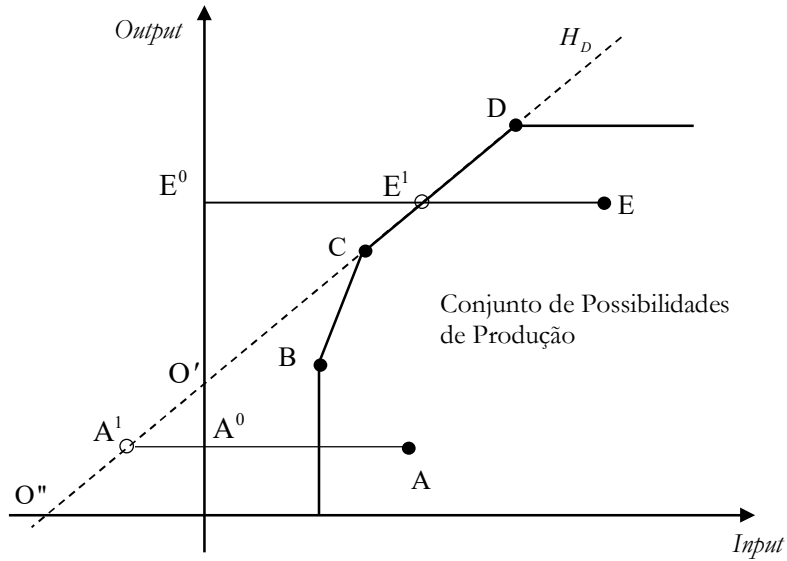


figura 3.1 - Eficiências cruzadas usando a DMU_d

Fonte: Lim e Zhu (2015) e Asadi, Nasser e Lofti (2020)

O hiperplano suporte H_D associado com um conjunto de pesos ótimos escolhidos pela DMU_d é representado na Figura 3.1 pela linha a tracejado. Usando uma medida de distância radial orientada para *inputs*, as eficiências cruzadas das outras $DMUs$ avaliadas pela DMU_D podem ser obtidas com referência a H_D . Por exemplo, a eficiência cruzada da DMU_E é dada por $\overline{E^0 E^1} / \overline{E^0 E}$. À exceção da DMU_A , não existe qualquer problema em determinar a eficiência cruzada das outras $DMUs$ avaliadas pela DMU_D . No caso da DMU_A , a eficiência cruzada desta DMU , dada por $\overline{A^0 A^1} / \overline{A^0 A}$, é negativa devido à posição de A^1 , situado na parte do hiperplano H_D com valores negativos para o *input*. Lim e Zhu (2015) alegam que o conjunto de pesos ótimos escolhidos pela DMU_D não é válido para determinar a eficiência cruzada da DMU_A porque a fronteira associada com esse conjunto de pesos estende para um ponto inaceitável O' que representa uma produção livre de *outputs*. Então o modelo BCC orientado para *inputs* força a DMU_A ser avaliada com referência a uma parte inválida da fronteira de eficiência estendida, constituída pelos pontos do segmento $[O' O'']$.

A análise gráfica acabada de fazer corresponde ao caso em que $u^k < 0$, isto é, ao caso em que prevalecem retornos decrescentes de escala. Para o caso em que $u^k > 0$, isto é, em que prevalecem retornos crescentes de escala, considere-se a Figura 3.2, onde, para o mesmo

exemplo, se mostra o hiperplano associado com o conjunto de pesos ótimos escolhidos pela DMU_B.

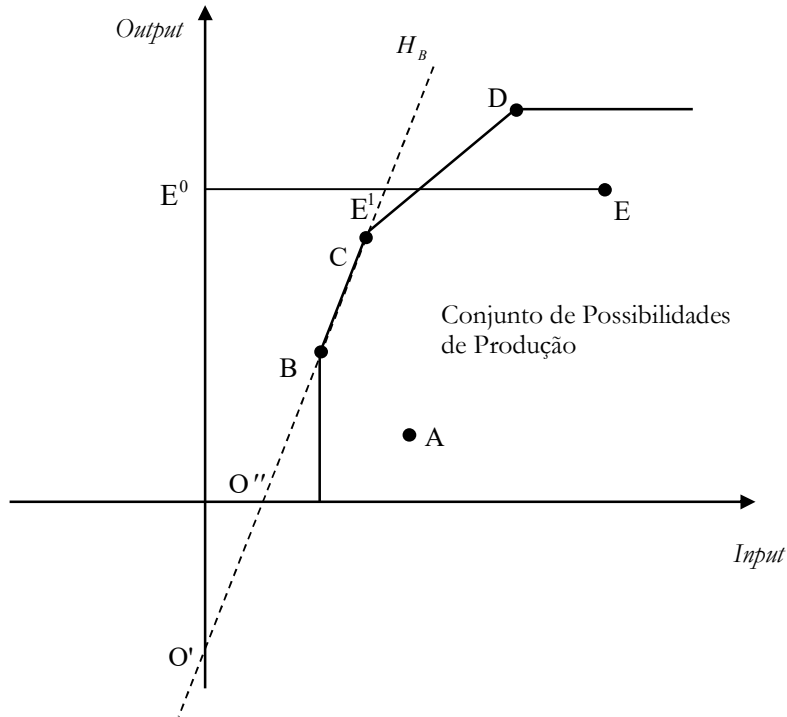


Figura 3.2 - Eficiências cruzadas usando a DMU_B

Fonte: Lim e Zhu (2015) e Asadi, Nasseri e Lofti (2020)

Similarmente, usando novamente uma medida de distância radial orientada para *inputs*, as eficiências cruzadas das outras DMUs quando avaliadas pela DMU_B podem ser obtidas com referência a H_B . Por exemplo, a eficiência cruzada da DMU_E é $\overline{E^0 E^1} / \overline{E^0 E}$. Quando o valor da variável u^k é não negativo, o problema das eficiências cruzadas negativas não ocorre. Por outras palavras, a eficiência cruzada de uma DMU avaliada por outra que exhibe retornos crescentes de escala é sempre positiva.

Segundo Podinovski e Bouzdine-Chameeva (2013), quando uma tecnologia permite a produção de *outputs* positivos com *inputs* iguais a zero é dito que permite a produção livre de *outputs*. Lim e Zhu (2015) estenderam esta definição de modo a incluir a produção de *outputs* negativos com *inputs* iguais a zero e designaram a produção de *outputs* positivos com *inputs* iguais a zero e a produção de *outputs* negativos com *inputs* zero como tipo I e tipo II da produção livre de *outputs*, respetivamente. Na Figura 3.2, o ponto O' representa o tipo II da produção livre de *outputs*.

Apesar do problema de eficiências negativas não ocorrer no tipo II de produção livre de *outputs*, Lim e Zhu (2015) acreditam que a alegação feita no tipo I é ainda aplicada no tipo II (Asadi, Nasseri e Lofti (2020)).

Como se refere em Asadi, Nasseri e Lofti (2020), Lim e Zhu (2015) propuseram fazer a avaliação da eficiência cruzada sob retornos variáveis de escala usando uma série de modelos considerando retornos constantes de escala sob sistemas de coordenadas cartesianas obtidos por translação do sistema inicial. A base científica que estabelece a ligação entre os modelos VRS e CRS é fornecida no teorema que se segue.

Teorema 3.1: Dada uma solução ótima $(u_{1k}^*, \dots, u_{sk}^*; v_{1k}^*, \dots, v_{mk}^*; u^{k*})$ do modelo (3.6) escolhida por uma DMU_k VRS-eficiente, um índice CRS-eficiente da DMU_k, medido sob a translação do sistema de coordenadas cartesianas definido por uma origem ajustada

$$O^* = \left(-\beta_1 u^{k*} / v_1^*, \dots, -\beta_m u^{k*} / v_m^*, -\beta_{m+1} u^{k*} / u_1^*, \dots, -\beta_{m+s} u^{k*} / u_s^* \right),$$

é a unidade, para qualquer $\beta_p \in \mathbb{R}^+$ ($p = 1, \dots, m + s$) tal que $\sum_{p=1}^{m+s} \beta_p = 1$.

O teorema anterior mostra que a localização da origem ajustada obtida por translação do sistema de coordenadas está associada à escolha ótima do conjunto de pesos associados aos *inputs* e *outputs* e do fator de escala.

O teorema 3.1 permite os dois seguintes corolários que fornecem uma ligação entre os pesos ótimos VRS e a livre produção de *outputs*.

Corolário 3.1: O hiperplano de suporte da fronteira de eficiência associado com um conjunto de pesos ótimos no modelo BCC orientado para *inputs*, obtidos por uma DMU VRS-eficiente exibindo retornos decrescentes de escala estende para induzir produção livre de *outputs* do tipo I na tecnologia subjacente.

Corolário 3.2: O hiperplano de suporte da fronteira de eficiência associado com um conjunto de pesos ótimos no modelo BCC orientado para *inputs*, obtidos por uma DMU VRS-eficiente exibindo retornos crescentes de escala estende para induzir produção livre de *outputs* do tipo II na tecnologia subjacente.

De acordo com o teorema e corolários anteriores tem-se que, para qualquer DMU, o modelo VRS pode ser moldado como modelo CRS para a mesma DMU sob uma translação do sistema

de coordenadas cartesianas. Usando o facto de que qualquer hiperplano de suporte da fronteira de eficiência não estende para induzir livre produção de *outputs* no modelo CRS e então é sempre válido o cálculo da eficiência cruzada, os autores propõem que a determinação da eficiência cruzada para o modelo VRS seja feita via uma série de modelos CRS sob a translação do sistema de coordenadas cartesianas. Relativamente ao exemplo ilustrado nas Figuras 3.1 e 3.2, uma conveniente escolha para origem ajustada é, em ambos os casos, o ponto O'' , resultante da interseção dos hiperplanos com o eixo dos *inputs*.

De um modo geral, usando a solução ótima do modelo BCC orientado para *inputs* para a DMU_k , $(u_{1k}^*, \dots, u_{sk}^*; v_{1k}^*, \dots, v_{mk}^*; u^{k*})$, a translação do sistema de coordenadas é definida pela origem ajustada

$$O^* = (-\beta_1 u^{k*} / v_1^*, \dots, -\beta_m u^{k*} / v_m^*, 0, \dots, 0),$$

onde 0 se repete s vezes para as coordenadas associadas aos *outputs*, tal que $\sum_{p=1}^m \beta_p = 1$ e $\beta_p \in \mathbb{R}^+$ ($p = 1, \dots, m$). Sob este novo sistema de coordenadas, a eficiência cruzada CRS da DMU_j avaliada pela DMU_k é determinada por

$$\theta_{kj} = \frac{\sum_{r=1}^s y_{rj} u_{rk}^*}{\sum_{i=1}^m x_{ij} v_{ik}^* - u^{k*}} \quad k, j = 1, \dots, n \quad (3.17)$$

A relação (3.17) é então usada para obter a eficiência cruzada VRS da DMU_j quando avaliada pela DMU_k sob o original sistema de coordenadas. Note-se que esta relação tem a mesma forma que o inverso da relação (3.15) usada para determinar as eficiências cruzadas VRS na orientação para *outputs*.

Como facilmente se mostra em Lim e Zhu (2015), as eficiências cruzadas θ_{kj} ($k, j = 1, \dots, n$) obtidas pela relação anterior são positivas e menores ou iguais a 1.

O valor da eficiência cruzada de uma DMU_k avaliada pela própria DMU_k obtido por (3.17) difere do valor da eficiência VRS simples obtido através do modelo (3.6), dando origem a $n+1$ valores de eficiência: n eficiências cruzadas e uma eficiência simples. O índice de eficiência cruzada de uma DMU_k é determinado pela média aritmética das n eficiências cruzadas (Lim e Zhu, 2015).

Note-se que, como se viu, a abordagem de Lim e Zhu (2015) altera o conjunto de possibilidades de produção e o sistema de coordenadas. Na próxima subsecção, apresenta-se uma abordagem, proposta por Asadi, Nasseri e Lofti (2020), também baseada na interpretação geométrica da eficiência cruzada mas que não altera nem o conjunto de possibilidades de produção nem o sistema de coordenadas.

3.4.3. Abordagem de Asadi, Nasseri e Lofti (2020)

Asadi, Nasseri e Lofti (2020) propõem uma abordagem baseada também na interpretação geométrica da eficiência cruzada mas usando um ponto de vista diferente do proposto por Lim e Zhu (2015). Nessa abordagem, cada eficiência cruzada é substituída por uma medida de distância equivalente que pode ser considerada como uma medida de ineficiência. Para uma melhor compreensão desta abordagem, os autores recorrem à representação gráfica apresentada na Figura 3.3 para um exemplo com 5 DMUs com um *input* e um *output*, sob retornos variáveis de escala, considerado na subsecção anterior.

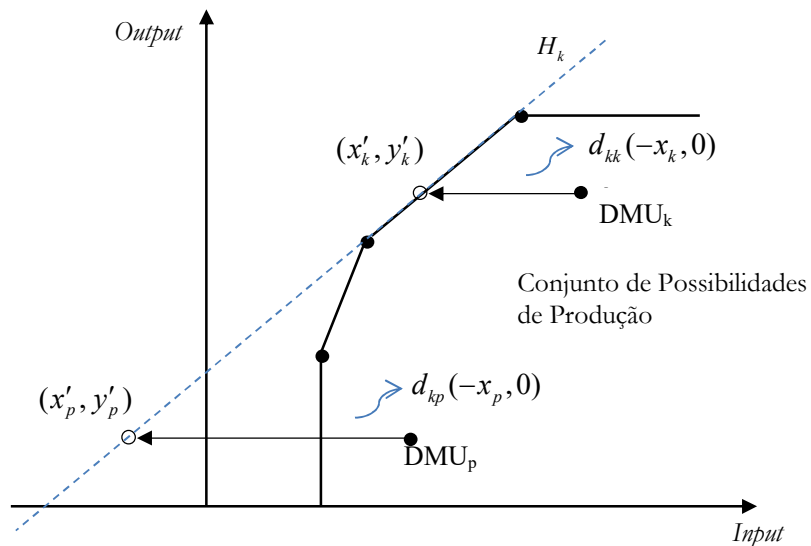


Figura 3.3 - Ineficiência cruzada usando medida de distância

Fonte: Asadi, Nasseri e Lofti (2020)

Seja (u_k^*, v_k^*, u^{k*}) , com $u_k^* = (u_{1k}^*, \dots, u_{sk}^*)^T$ e $v_k^* = (v_{1k}^*, \dots, v_{mk}^*)^T$, uma solução ótima do modelo (3.6) para a DMU_k. Então

$$H_k = \{(x, y) | u_k^{T*} y - v_k^{T*} x + u^k = 0\}$$

é um hiperplano de suporte do conjunto de possibilidades de produção, sobre o qual a DMU_k é projetada. Este hiperplano está representado a tracejado na Figura 3.3.

Considere-se a medida de distância d_{kk} para quantificar a distância entre a DMU_k definida por (x_k, y_k) e a sua projeção no hiperplano H_k definida através de

$$(x'_k, y'_k) = (x_k, y_k) + d_{kk}(-x_k, 0) \quad (3.18)$$

onde (x'_k, y'_k) é a projeção da DMU_k sobre o hiperplano H_k na direção do vetor $(-x_k, 0)$.

De acordo com a definição, d_{kk} pode ser considerada como uma medida de ineficiência da DMU_k uma vez que quanto maior for o seu valor mais ineficiente é a DMU_k . Da Figura 3.3, é óbvio que $0 \leq d_{kk} \leq 1$ e que quanto mais próximo de 0 estiver o valor de d_{kk} mais eficiente será a DMU_k e, reciprocamente, quanto mais próximo de 1 estiver o valor de d_{kk} mais ineficiente será a DMU_k .

De acordo com os autores, a relação entre a eficiência cruzada θ_{kj} e a distância d_{kj} é estabelecida através do teorema que se segue:

Teorema 3.2: Seja θ_{kj} a eficiência cruzada da DMU_j avaliada pela DMU_k , de acordo com (u_k^*, v_k^*, u^{k*}) , com $u_k^* = (u_{1k}^*, \dots, u_{sk}^*)^T$ e $v_k^* = (v_{1k}^*, \dots, v_{mk}^*)^T$. Além disso, seja d_{kj} a medida da distância que satisfaz a igualdade $(x'_j, y'_j) = (x_j, y_j) + d_{kj}(-x_j, 0)$, onde (x'_j, y'_j) é a projeção da DMU_j sobre o hiperplano $H_k = \{(x, y) \mid u_k^{T*} y - v_k^{T*} x + u^k = 0\}$. Então $\theta_{kj} = 1 - d_{kj}$ para todo $j = 1, \dots, n$.

De acordo com o teorema anterior, verifica-se que a razão para a existência de eficiências cruzadas negativas deve-se ao facto de que apesar de d_{kj} ser não negativo para todas as $DMUs$, não é necessariamente menor do que um para todas elas. Então θ_{kj} pode ser negativo para algum $j \in \{1, \dots, n\}$, isto é, a eficiência cruzada pode ser negativa para algumas $DMUs$. Tal pode ser visto no exemplo ilustrado na Figura 3.3 onde a medida de distância d_{kp} correspondente à DMU_p é maior do que um, pelo que θ_{kp} é negativo.

Atendendo a que a referida medida de distância pode ser considerada como um índice de ineficiência, a mesma pode ser usada diretamente como uma medida de *ranking*. Então, denotando por d_{kj} a ineficiência cruzada da DMU_j avaliada pela DMU_k, os autores propõem um método, que será descrito de seguida, para tratar com as eficiências negativas, baseado no método clássico da eficiência cruzada usando o modelo BCC orientado para *inputs*:

Método de ineficiência cruzada VRS:

Passo 0. Resolver o modelo de programação linear (3.6), isto é, o modelo BCC orientado para *inputs*, para cada DMU_k, $k = 1, \dots, n$. Seja $(u_{1k}^*, \dots, u_{sk}^*; v_{1k}^*, \dots, v_{mk}^*; u^{k*})$ uma solução ótima para essa DMU_k.

Passo1. Obter as ineficiências cruzadas $\hat{\theta}_{kj}$ a partir da relação

$$\theta_{kj} = \frac{\sum_{r=1}^s y_{rj} u_{rk}^* + u^{k*}}{\sum_{i=1}^m x_{ij} v_{ik}^*} \Rightarrow \hat{\theta}_{kj} = 1 - \theta_{kj}$$

Passo 2. Calcular o índice de ineficiência cruzada para cada DMU_j

$$\hat{\theta}_j = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \hat{\theta}_{kj} \quad j = 1, \dots, n \quad (3.19)$$

Passo 3. Estabelecer um *ranking* para as DMUs usando os índices de ineficiência $\hat{\theta}_j$ ($j = 1, \dots, n$) em que ao maior valor de $\hat{\theta}_j$ corresponde a DMU_j com pior *ranking*.

De referir que no modelo BCC também é frequente a existência de soluções ótimas alternativas, pelo que as eficiências cruzadas e, consequentemente, o índice de eficiência cruzada, obtidos a partir desse modelo, não são, em geral, únicos, por dependerem da solução ótima obtida por determinado *software*. Para ultrapassar esta desvantagem, recorre-se ao uso de modelos de objetivo secundário à semelhança do que acontece com o modelo CCR e que foi referido na secção 3.3.

4. Estudo de caso prático

4.1. Introdução

No capítulo 3 foi apresentado um estudo teórico sobre a avaliação clássica e a avaliação cruzada no âmbito da metodologia DEA, em que foram apresentadas as principais características e os principais modelos relativos a esses dois tipos de avaliação. Este capítulo tem por objetivo apresentar um estudo prático que consiste em avaliar o desempenho organizacional de 19 instituições seguradoras que operavam em Portugal no ano de 2022, usando a DEA, mais especificamente, usando a avaliação clássica e a avaliação cruzada dessa metodologia. Deste modo, pretende-se ter uma ideia mais precisa das diferenças entre estes dois tipos de avaliação e entre os modelos envolvidos, nomeadamente quanto ao facto de a avaliação cruzada permitir discriminar as várias seguradoras classificadas como eficientes pela avaliação clássica e, conseqüentemente, estabelecer um *ranking* sobre todas as seguradoras, algo que, em geral, não é possível através da avaliação clássica.

Assim, na seção 4.2, são apresentados os *inputs* e *outputs* selecionados para a realização deste estudo prático e a forma como esses *inputs* e *outputs* foram obtidos. Os dados relativos aos *inputs* e *outputs* de cada seguradora, são também apresentados nessa secção, na qual são ainda referidos os modelos e as abordagens utilizados neste estudo prático. Na seção 4.3, são apresentados os resultados obtidos para cada tipo de avaliação considerando retornos constantes de escala e retornos variáveis de escala e é feita uma análise a esses resultados.

4.2. Seleção de dados e escolha dos modelos para aplicação prática

Para a realização do presente estudo prático, foi essencial obter dados relativos a instituições do setor segurador ativas em Portugal durante o ano de 2022. Neste contexto, a fonte de informação primordial e confiável utilizada foi a Autoridade de Supervisão de Seguros e Fundos de Pensões (ASF). A ASF desempenha um papel crucial como a entidade responsável pela regulação e supervisão de todas as atividades relacionadas com a indústria dos seguros em Portugal, tendo a responsabilidade de garantir que as seguradoras, fundos de pensões e outras entidades relacionadas com o setor operem de acordo com as regulamentações e as leis aplicáveis.

No decorrer deste estudo prático foram utilizados dados retirados das demonstrações financeiras dos Relatórios e Contas de diversas companhias de seguros relativos ao ano de 2022.

Estes dados estão disponibilizados pelas próprias seguradoras nas suas páginas de *Internet*, garantindo transparência e acesso público aos dados financeiros relevantes para a análise de cada entidade.

A indústria de seguros divide-se em dois segmentos distintos: o do ramo Vida e o do ramo Não Vida. O ramo Vida abrange seguros relacionados com a proteção de indivíduos e suas famílias (ou seja, oferece benefícios em caso de falecimento, invalidez ou doença grave), enquanto o ramo Não Vida engloba todas as outras categorias, como seguros de propriedades e seguros pessoais (ou seja, oferece proteção financeira contra perdas e danos relacionados com automóveis, propriedades, saúde, responsabilidade civil e outros eventos inesperados). Neste estudo prático, consideram-se as seguradoras que atuam em qualquer um dos ramos ou em ambos.

A seleção dos *inputs* e *outputs* é crucial para a precisão e relevância dos resultados da análise DEA, pelo que a mesma teve em conta os *inputs* e *outputs* mais usados na aplicação da DEA à indústria dos seguros no período de 1993 a 2018, referidos em Kaffash, Azizi, Huang e Zhu (2020), bem como os indicadores disponibilizados pela ASF. Assim, foram selecionados os seguintes *inputs*:

- *Input* 1: Número de colaboradores;
- *Input* 2: Capital próprio;
- *Input* 3: Investimentos líquidos.

O número de funcionários representa a capacidade de uma seguradora alocar os seus recursos humanos para manter a eficiência operacional. Para evitar custos elevados ou recursos subutilizados é essencial ter o número adequado de colaboradores, pelo que este *input* se revela importante na avaliação do desempenho. Relativamente ao capital próprio, este indicador reflete a estabilidade financeira de uma organização, neste caso, de uma seguradora. Representa o valor líquido do património, ou seja, tudo o que uma seguradora possui e as obrigações financeiras. O investimento líquido reflete o valor líquido dos recursos que a companhia de seguros utilizou para melhorar, expandir ou atualizar, após a dedução de todos os custos relacionados com esses investimentos. Este *input* ajuda a avaliar o quanto a organização está a investir no seu crescimento e desenvolvimento, tendo em conta os custos adicionais.

Relativamente aos *outputs*, foram selecionados os seguintes:

- *Output 1*: Retorno dos investimentos;
- *Output 2*: Resultado líquido do exercício;
- *Output 3*: Prémios brutos emitidos de seguro direto.

O retorno dos investimentos representa o quanto o investimento foi rentável. É uma métrica financeira de desempenho que demonstra o quanto a seguradora ganhou, ou perdeu, com os investimentos realizados. O resultado líquido do exercício reflete o lucro ou o prejuízo financeiro que a seguradora alcançou durante um determinado período, normalmente um ano. É calculado pela diferença entre as receitas e as despesas ocorridas nesse período. Este *output* representa um indicador imprescindível da saúde financeira de uma companhia de seguros. Os prémios brutos emitidos representam o valor total que uma seguradora recebe dos seus segurados antes de quaisquer descontos ou custos.

De referir que no trabalho de revisão sobre aplicações da DEA na indústria dos seguros no período de 1993 a 2018, desenvolvido por Kaffash, Azizi, Huang e Zhu (2018), os *inputs* 1 e 2 foram usados, respetivamente, em 60,72% e 37,70% das aplicações, sendo o primeiro e o terceiro dos quatro *inputs* mais usados naquelas aplicações. Relativamente aos *outputs*, os mesmos autores referem que os *outputs* 1 e 3 foram usados, respetivamente, em 21,31% e 50,82% das aplicações, tendo sido o quarto e o primeiro entre os quatro *outputs* mais usados nas referidas aplicações.

Na Tabela 4.1 estão apresentados os dados relativos aos *inputs* e aos *outputs* de cada seguradora. Nas duas primeiras colunas dessa tabela identificam-se as seguradoras, nas três colunas seguintes estão apresentados os valores dos *inputs* e, nas três últimas, os valores dos *outputs*, para cada seguradora. À exceção dos valores do *input* 1, que estão apresentados em unidades, os valores dos restantes *inputs* assim como os valores de todos os *outputs* estão apresentados em milhares de euros.

Neste estudo prático foram utilizados os modelos CCR e BCC orientados para *inputs*, nos dois tipos de avaliação realizada: avaliação clássica e avaliação cruzada. Para contornar o problema das eficiências cruzadas negativas, que podem surgir quando o método da eficiência cruzada é aplicado usando diretamente o modelo BCC orientado para *inputs*, foram usadas as abordagens propostas por Lim e Zhu (2015) e por Asadi, Nasser e Lofti (2020), apresentadas no capítulo anterior.

Tabela 4.1 - Dados relativos aos *inputs* e aos *outputs*.

	DMUs (Seguradoras)	Input 1	Input 2	Input 3	Output 1	Output 2	Output 3
01	Aegon Santander Portugal Não Vida	82	23450	63831	616	11654	95260
02	Aegon Santander Portugal Vida	82	39333	139160	1178	20279	119822
03	BPI Vida e Pensões	67	150773	4793850	53361	12391	40850
04	Caravela	139	57183	206475	1423	4049	97018
05	Companhia de Seguros Allianz Portugal	631	103182	1348590	20806	36364	581449
06	COSEC	125	49516	142520	983	8066	39312
07	Crédito Agrícola Vida	55	83165	788262	11306	47733	236071
08	Fidelidade	8003	2553597	20249171	434574	220475	3245824
09	GamaLife	87	276051	9443297	37569	102612	65615
10	Generali Seguros	1070	135900	2791354	44364	49490	1187049
11	Lusitania Vida	32	31427	952204	18445	7518	91025
12	Mapfre Seguros de Vida	83	47704	332407	7775	1403	28988
13	Mapfre Seguros Gerais	248	47402	216414	3378	2120	107626
14	Mútua dos Pescadores, Mútua de Seguros, C.R.L.	40	13471	45770	922	1065	11804
15	Real Vida Seguros	123	31490	392769	5531	10356	46363
16	Santander Totta Seguros	39	106465	3671896	66255	14611	25962
17	Vitoria Seguros de Vida	84	23511	221650	4447	843	30825
18	Vitória Seguros	211	44104	159231	1310	2187	97937
19	Zurich - Companhia de Seguros Vida	68	28987	1388577	25216	5356	50812

4.3. Resultados e respetiva análise

Nesta seção são apresentados e analisados os resultados obtidos pela avaliação clássica e pela avaliação cruzada considerando retornos constantes de escala e retornos variáveis de escala, usando os dados, os modelos e as abordagens selecionados. Para obter os pesos ótimos e o

correspondente valor ótimo dos modelos CCR e BCC orientados para *inputs* foi utilizado o *software* MaxDEA (versão gratuita em <http://maxdea.com/>). Como se viu no capítulo 3, os pesos usados nas abordagens de Lim e Zhu (2015) e de Asadi, Nasser e Lofti (2020) são os obtidos pelo modelo BCC orientado para *inputs*. As eficiências cruzadas foram obtidas através do *software* de folha de cálculo Microsoft Excel.

Na Tabela 4.2, apresentam-se os índices de eficiência obtidos na avaliação clássica e na avaliação cruzada para retornos constantes de escala, através do modelo CCR orientado para *inputs*, assim como os correspondentes *rankings*. Nessa tabela, da esquerda para a direita, nas duas primeiras colunas identificam-se as seguradoras em avaliação, nas duas colunas seguintes apresentam-se os índices de eficiência e o respetivo *ranking* da avaliação clássica e nas duas últimas apresentam-se os índices de eficiência e os respetivos *rankings* da avaliação cruzada feita com base no modelo CCR orientado para *inputs*. Relativamente aos *rankings*, de notar que o valor 1 refere-se à seguradora com melhor desempenho enquanto o valor 19 refere-se à seguradora com pior desempenho. Os pesos ótimos associados aos *inputs* e aos *outputs* de cada seguradora, obtidos pelo modelo CCR orientado para *inputs*, e que constituem a primeira fase do método da avaliação cruzada, estão apresentados no apêndice A, enquanto matriz das eficiências cruzadas construída a partir desses pesos, assim como o índice de eficiência cruzada para cada seguradora, e que constituem a segunda fase do método da avaliação cruzada, estão apresentados no apêndice B.

Da observação da Tabela 4.2, verifica-se que existem nove seguradoras que obtiveram índice de eficiência igual a 1 na avaliação clássica feita pelo modelo CCR orientado para *inputs* e são, por isso, classificadas como eficientes. Essas seguradoras estão identificadas nessa tabela. As restantes dez seguradoras, igualmente identificadas naquela tabela, obtiveram um índice de eficiência inferior a 1, sendo por isso classificadas como ineficientes. Note-se que para estas últimas, o modelo consegue discriminá-las uma vez que os índices obtidos são todos diferentes, o mesmo não acontecendo com as asseguradoras classificadas como eficientes.

Relativamente à eficiência cruzada obtida através do modelo CCR orientado para *inputs*, verifica-se que não existe qualquer seguradora que tenha obtido o valor 1, o que significa que não existe qualquer seguradora que seja eficiente quando avaliada por si própria (auto-avaliação) e quando avaliada pelas restantes (avaliação por pares). Note-se que os índices de eficiência cruzada obtidos são todos diferentes, pelo que os mesmos possibilitam um *ranking* completo sobre todas as seguradoras. Nesse *ranking*, o top 3 das seguradoras com melhor desempenho é constituído pelas seguradoras 11 (Lusitania Vida), 07 (Crédito Agrícola Vida) e 10 (Generali Seguros) que

ocupam, respetivamente, as posições 1, 2 e 3 do *ranking*. Note-se que estas três seguradoras obtiveram o índice de eficiência 1 na avaliação clássica, isto é, na auto-avaliação.

Tabela 4.2 - Índices de eficiência clássica e de eficiência cruzada e respetivos *rankings*, obtidos através do modelo CCR/*inputs*.

	DMUs (Seguradoras)	Ef. clássica		Ef. cruzada	
		CCR	<i>Ranking</i>	CCR	<i>Ranking</i>
01	Aegon Santander Portugal Não Vida	1	1	0,6897	6
02	Aegon Santander Portugal Vida	1	1	0,6131	10
03	BPI Vida e Pensões	0,6103	16	0,4421	15
04	Caravela	0,5417	18	0,2961	17
05	Companhia de Seguros Allianz Portugal	0,9520	11	0,6821	7
06	COSEC	0,4801	19	0,2665	19
07	Crédito Agrícola Vida	1	1	0,7857	2
08	Fidelidade	0,9876	10	0,6477	9
09	GamaLife	1	1	0,2686	18
10	Generali Seguros	1	1	0,7463	3
11	Lusitania Vida	1	1	0,8168	1
12	Mapfre Seguros de Vida	1	1	0,6771	8
13	Mapfre Seguros Gerais	0,8484	14	0,4673	14
14	Mútua dos Pescadores, Mútua de Seguros, C.R.L.	0,9350	13	0,5069	13
15	Real Vida Seguros	0,7897	15	0,5361	12
16	Santander Totta Seguros	1	1	0,7263	5
17	Vitoria Seguros de Vida	0,9410	12	0,6046	11
18	Vitória Seguros	0,5988	17	0,3182	16
19	Zurich - Companhia de Seguros Vida	1	1	0,7285	4

No top 3 das seguradoras com pior desempenho, encontram-se as seguradoras 06 (COSEC), a 09 (GamaLife) e a 04 (Caravela) que ocupam, respetivamente, as posições 19, 18 e 17 do *ranking*. Neste caso observe-se que a seguradora 09 (GamaLife) obteve o índice de eficiência 1 na avaliação clássica, o que significa que, para esta seguradora, existe uma diferença significativa entre a auto-avaliação e a avaliação pelos pares como se pode observar mais pormenorizadamente no apêndice B.

Na Tabela 4.3, apresentam-se os resultados da eficiência clássica e da eficiência cruzada obtidos através do modelo BCC orientado para *inputs*. Nas duas primeiras colunas são identificadas as seguradoras; na terceira são apresentados os índices da eficiência clássica fornecidos pelo modelo BCC; na quarta apresentam-se os índices de eficiência cruzada obtidos pela abordagem de Lim e Zhu (2015); por fim, na quinta e última coluna apresentam-se os índices de ineficiência obtidos pela abordagem de Asadi, Nasser e Lofti (2020). Os pesos ótimos associados aos *inputs* e aos *outputs* de cada seguradora, obtidos pelo modelo BCC orientado para *inputs* estão apresentados no apêndice C. A matriz das eficiências cruzadas construída usando esses pesos ótimos assim como o índice de eficiência cruzada para cada seguradora, usando diretamente o modelo BCC orientado para *inputs* e a abordagem de Lim e Zhu (2015) estão apresentados nos apêndices D e E, respetivamente. No apêndice F apresentam-se a matriz das ineficiências cruzadas e o índice de ineficiência cruzada para cada seguradora obtidos através da abordagem Asadi, Nasser e Lofti (2020).

Os resultados apresentados no apêndice D servem apenas para mostrar a existência de eficiências cruzadas negativas quando o método da eficiência cruzada é aplicado usando diretamente o modelo BCC orientado para *inputs*. Como se pode constatar, existem dez seguradoras com índice de eficiência cruzada negativo. Por outro lado, existem também dez seguradoras que avaliam negativamente outras seguradoras. O maior número de seguradoras com eficiência cruzada negativa (15) ocorre quando as seguradoras são avaliadas com os pesos ótimos da seguradora 09 (GamaLife) e da 10 (Generali Seguros), seguida da 07 (Crédito Agrícola Vida) que avalia 12 seguradoras negativamente.

Da observação da Tabela 4.3, verifica-se que existem onze seguradoras que obtiveram índice de eficiência igual a 1 na avaliação clássica feita pelo modelo BCC orientado para *inputs* e que por isso são classificadas como eficientes. Essas seguradoras estão identificadas na referida tabela. As restantes oito, também identificadas nessa tabela, obtiveram índices de eficiência inferior a 1 e são, por isso, consideradas ineficientes. Também, neste caso de retornos variáveis de escala, a avaliação clássica não permite discriminar as onze seguradoras classificadas como eficientes, um

número superior ao caso de retornos constantes de escala, como seria de esperar, uma vez que o valor da eficiência obtida pelo modelo BCC é não inferior ao obtido pelo modelo CCR. Consequentemente, também neste caso não é possível estabelecer um *ranking* completo sobre todas as seguradoras.

Tabela 4.3 - Resultados obtidos através do modelo BCC orientado para *inputs* e das abordagens de Lim e Zhu (2015) e de Asadi et al (2020).

	DMUs (Seguradoras)	Ef. Classica	Ef. cruzada	Inef. cruzada
		BCC	Lim&Zhu(2015)	Asadi et al.(2020)
01	Aegon Santander Portugal Não Vida	1	0,6036	2,5236
02	Aegon Santander Portugal Vida	1	0,6002	1,4093
03	BPI Vida e Pensões	0,6125	0,4041	0,7725
04	Caravela	0,5494	0,2788	1,8354
05	Companhia de Seguros Allianz Portugal	0,9968	0,6605	0,4133
06	COSEC	0,5093	0,2543	2,0669
07	Crédito Agrícola Vida	1	0,7881	0,1982
08	Fidelidade	1	0,6938	0,3072
09	GamaLife	1	0,2569	0,8260
10	Generali Seguros	1	0,7158	0,3124
11	Lusitania Vida	1	0,7133	0,7430
12	Mapfre Seguros de Vida	1	0,6005	1,3737
13	Mapfre Seguros Gerais	0,8692	0,3966	1,4749
14	Mútua dos Pescadores, Mútua de Seguros, C.R.L.	1	0,4701	5,5331
15	Real Vida Seguros	0,8003	0,4807	1,1732
16	Santander Totta Seguros	1	0,6442	0,6375
17	Vitoria Seguros de Vida	0,9803	0,5127	1,8371
18	Vitória Seguros	0,6000	0,2691	1,8507
19	Zurich - Companhia de Seguros Vida	1	0,6487	0,6669

Relativamente à avaliação cruzada, verifica-se que não existe qualquer seguradora com índice de eficiência cruzada igual a 1 na abordagem de Lim e Zhu (2015) ou com índice de ineficiência igual a 0 na abordagem de Asadi, Nasser e Lofti (2020). Então, não existe qualquer seguradora que seja eficiente na fase de autoavaliação e na fase de avaliação feita pelos pares. Note-se que no processo de autoavaliação, em que cada seguradora se avalia a si própria, existem 11 seguradoras que são eficientes pelo modelo BCC orientado para *inputs*.

Da observação da Tabela 4.3, verifica-se ainda que os resultados obtidos por cada abordagem de avaliação cruzada são diferentes para todas as seguradoras, pelo que cada uma dessas abordagens permite estabelecer um *ranking* completo sobre todas as seguradoras. Esses *rankings* são apresentados na Tabela 4.4, que segue a estrutura da Tabela 4.3, onde o valor 1 se refere à seguradora com melhor desempenho e o valor 19 se refere à seguradora com pior desempenho. Note-se que enquanto na abordagem de Lim e Zhu (2015) o desempenho é tanto melhor quanto maior for o valor do índice da eficiência cruzada, na abordagem de Asadi, Nasser e Lofti (2020) o desempenho é tanto melhor quanto menor for o índice de ineficiência cruzada.

Relativamente à avaliação cruzada, o top 3 das seguradoras com melhor desempenho, isto é, que ocupam as posições 1, 2 e 3, respetivamente, é constituído pelas seguradoras 07 (Crédito Agrícola Vida), 10 (Generali Seguros) e 11 (Lusitania Vida), usando a abordagem de Lim e Zhu (2015), e pelas seguradoras 07 (Crédito Agrícola Vida), 08 (Fidelidade) e 10 (Generali Seguros), usando a abordagem de Asadi, Nasser e Lofti (2020). Note-se que a seguradora 07 (Crédito Agrícola Vida) ocupa a posição 1 em ambos os *rankings*. A seguradora 10 (Generali Seguros) também surge no top 3 de ambos os *rankings* mas em posições diferentes. De referir que as seguradoras do top 3 de cada abordagem obtiveram um índice de eficiência igual a 1 na avaliação clássica, isto é, na auto-avaliação.

No top 3 das seguradoras com pior desempenho, isto é, que ocupam as posições 19, 18 e 17, respetivamente, encontram-se as seguradoras 06 (COSEC), a 09 (GamaLife) e a 18 (Vitória Seguros), na abordagem de Lim e Zhu (2015), e as seguradoras 14 (Mútua dos Pescadores, Mútua de Seguros, C.R.L), 01 (Aegon Santander Portugal Não Vida) e 06 (COSEC) na abordagem de Asadi, Nasser e Lofti (2020). Neste caso, apenas a seguradora 06 (COSEC) surge no top 3 de ambos os *rankings*, mas em posições diferentes. Ainda neste top 3, observe-se que a seguradora 09 (GamaLife) com o *ranking* de 18 na abordagem de Lim e Zhu (2015) obteve o índice de 1 na avaliação clássica, o mesmo acontecendo com a seguradora 14 (Mútua dos Pescadores, Mútua de Seguros, C.R.L) com o *ranking* de 19 na abordagem de Asadi, Nasser e Lofti (2020) e que obteve o índice 1 na avaliação clássica. Isto significa que existe uma diferença

significativa entre a auto-avaliação e a avaliação feita pelos pares como se pode observar nos apêndices E e F, para aquelas duas seguradoras e para aquelas abordagens.

Tabela 4.4 - *Rankings* obtidos através do modelo BCC/*inputs* e das abordagens de Lim e Zhu (2015) de Asadi et al (2020).

DMUs (Seguradoras)	Ef. Classica	Ef. cruzada	
	BCC	Lim&Zhu(2015)	Asadi et al.(2020)
01 Aegon Santander Portugal Não Vida	1	8	18
02 Aegon Santander Portugal Vida	1	10	12
03 BPI Vida e Pensões	16	14	8
04 Caravela	18	16	14
05 Companhia de Seguros Allianz Portugal	12	5	4
06 COSEC	19	19	17
07 Crédito Agrícola Vida	1	1	1
08 Fidelidade	1	4	2
09 GamaLife	1	18	9
10 Generali Seguros	1	2	3
11 Lusitania Vida	1	3	7
12 Mapfre Seguros de Vida	1	9	11
13 Mapfre Seguros Gerais	14	15	13
14 Mútua dos Pescadores, Mútua de Seguros, C.R.L.	1	13	19
15 Real Vida Seguros	15	12	10
16 Santander Totta Seguros	1	7	5
17 Vitoria Seguros de Vida	13	11	15
18 Vitória Seguros	17	17	16
19 Zurich - Companhia de Seguros Vida	1	6	6

Comparando os *rankings* obtidos pelas abordagens de Lim e Zhu (2015) e de Asadi, Nasser e Lofti (2020), verifica-se que apenas duas seguradoras obtiveram o mesmo *ranking* em ambas as abordagens, a seguradora 07 (Crédito Agrícola Vida) que, como se referiu anteriormente, ocupa a posição 1 do *ranking* e a 19 (Zurich – Companhia de seguros Vida) que ocupa a posição 6. A maioria das seguradoras obteve *rankings* diferentes nas duas abordagens em uso. Para uma mais fácil visualização das diferenças entre os *rankings* obtidos por essas abordagens considere-se o gráfico apresentado na figura 4.1.

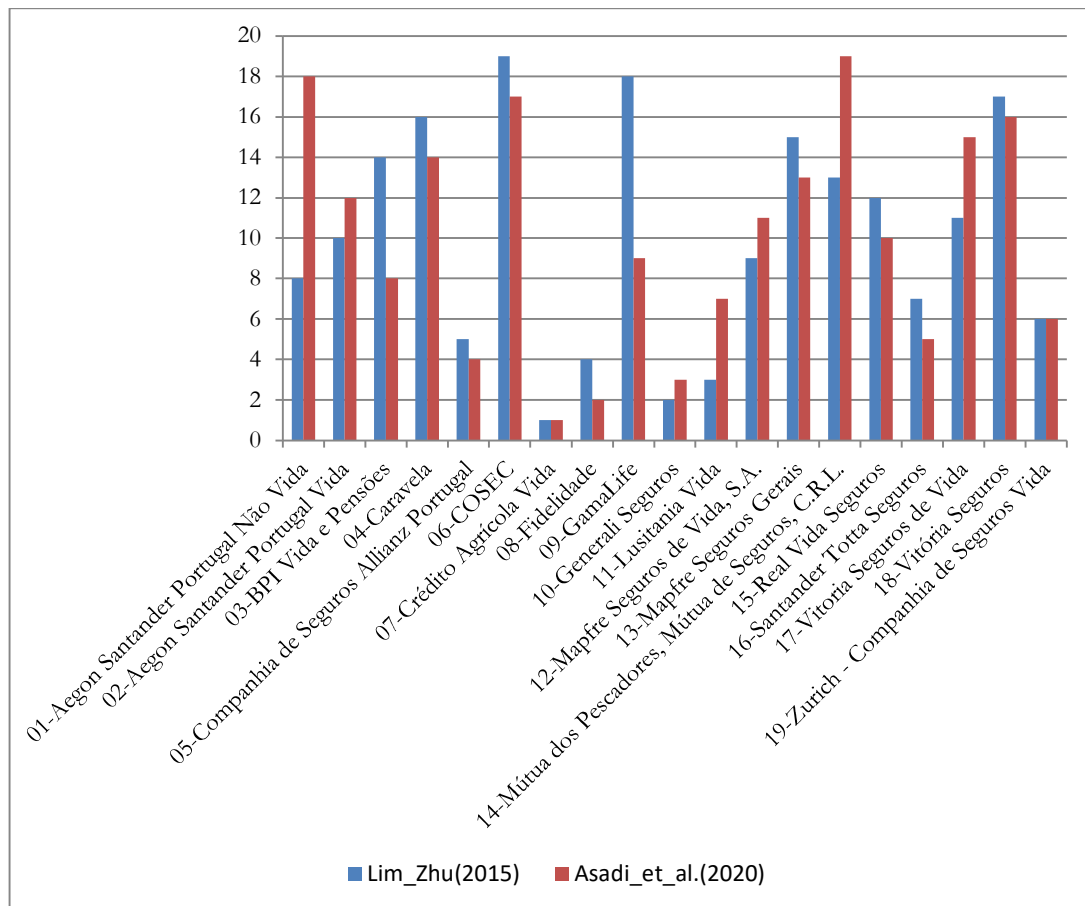


Figura 4.1 – Gráfico dos *rankings* obtidos pelas abordagens de Lim e Zhu (2015) e de Asadi et al. (2020)

Da observação do gráfico, verifica-se que para além das duas seguradoras que obtiveram o mesmo *ranking* em ambas as abordagens, e que foram referidas anteriormente, existem três seguradoras com a diferença de uma posição nos dois *rankings*, a 05 (Companhia de Seguros Allianz Portugal), a 10 (Generali Seguros) e a 18 (Zurich - Companhia de Seguros Vida). Com uma diferença de duas posições nos *rankings* existe oito seguradoras, a 02 (Aegon Santander Portugal Vida), a 04 (Caravela), a 06 (Crédito Agrícola Vida), a 08 (Fidelidade), a 12 (Mapfre

Seguros de Vida), a 13 (Mapfre Seguros Gerais), a 15 (Real Vida Seguros) e a 16 (Zurich - Companhia de Seguros Vida). Note-se que cerca de 68% das seguradoras apresenta uma diferença de *rankings* até duas posições. Em sentido oposto, com a maior diferença de posições nos *rankings* encontra-se a seguradora 01 (Aegon Santander Portugal Não Vida) com uma diferença de 10, seguida da seguradora 09 (GamaLife) com uma diferença de 9. Pelo meio há a registar a existência de duas seguradoras, a 11 (Lusitania Vida) e a 17 (Vitoria Seguros de Vida) com uma diferença de quatro e de outras duas, a 03 (BPI Vida e Pensões) e a 14 (Mútua dos Pescadores, Mútua de Seguros, C.R.L.), com uma diferença de seis.

De referir que, em conformidade com o que foi mencionado no capítulo 3, os resultados obtidos pela avaliação cruzada podiam ser diferentes caso se utilizasse um *software* diferente, devido à frequente existência de soluções ótimas alternativas obtidas pelos modelos clássicos da DEA.

5. Conclusões

Neste trabalho foi apresentado um estudo sobre a avaliação clássica e a avaliação cruzada no âmbito da metodologia DEA. Esta metodologia permite avaliar a eficiência relativa de um conjunto de DMUs que usam os mesmos *inputs* para obter os mesmos *outputs*. A avaliação clássica, realizada através dos modelos CCR e BCC, usualmente conhecidos por modelos clássicos da DEA, permite que várias DMUs obtenham o valor de eficiência 1 e, em consequência, sejam classificadas como eficientes.

A existência de várias DMUs eficientes que a avaliação clássica não permite discriminar, impossibilita o estabelecimento de um *ranking* sobre o desempenho de todas as DMUs. Para ultrapassar esta desvantagem, vários métodos e modelos de *rankings* têm sido propostos na literatura da DEA, como se pode ver, por exemplo, em Adler, Friedman e Sinuany-Stern (2002) e em Aldamak e Zolfaghari (2017). Um desses métodos, que tem adquirido grande popularidade devido ao seu forte poder de discriminação, é o método da eficiência ou avaliação cruzada.

Na avaliação clássica, cada DMU escolhe os pesos associados aos *inputs* e aos *outputs* que lhe são mais favoráveis, isto é, que lhe permitem obter a eficiência máxima em comparação com as restantes DMUs em avaliação. Trata-se de um processo de auto-avaliação que constitui a primeira de duas fases do método da avaliação cruzada. Na segunda fase, esses pesos são usados para determinar as eficiências cruzadas de cada uma das restantes DMUs, obtendo-se uma matriz de eficiências cruzadas. O índice de eficiência cruzada de cada DMU é obtido através da média das eficiências obtidas na auto-avaliação e na avaliação feita pelos pares, isto é, na avaliação feita pelas restantes DMUs.

Como já foi referido nesta dissertação, o trabalho desenvolvido acerca da avaliação cruzada tem, na sua grande maioria, usado o modelo CCR orientado para *inputs*. Este tipo de avaliação pode igualmente ser aplicado usando a versão orientada para *outputs* do modelo CCR e também do modelo BCC. No entanto, quando aplicado ao modelo BCC orientado para *inputs*, pode gerar eficiências cruzadas negativas, o que constitui uma desvantagem associada a este tipo de avaliação. Para ultrapassar esta desvantagem, algumas abordagens têm sido apresentadas, como se viu no capítulo 3.

Para ter uma ideia mais precisa sobre estes dois tipos de avaliação, modelos e abordagens envolvidos assim como das suas diferenças, foi feita uma aplicação dos mesmos para avaliar o desempenho assim como estabelecer um *ranking* de dezanove seguradoras que operavam em

Portugal no ano de 2022. Nos resultados obtidos existe um número considerável de seguradoras classificadas como eficientes na avaliação clássica. Esse número foi de nove, usando o modelo CCR orientado para *inputs*, e de onze, usando o modelo BCC orientado para *inputs*.

Na avaliação cruzada realizada usando o modelo CCR orientado para *inputs*, os índices de eficiência cruzada obtidos são todos diferentes, permitindo estabelecer um *ranking* sobre todas as seguradoras. Quando este tipo de avaliação foi aplicado usando diretamente o modelo BCC orientado para *inputs*, existem dez seguradoras que obtiveram um índice de eficiência cruzada negativo. Para ultrapassar este problema foram as abordagens de Lim e Zhu (2015) e de Asadi, Nasser e Lofti (2020) que permitiram obter índices de eficiência e de ineficiência cruzada, respectivamente, positivos. Para cada abordagem, esses índices foram diferentes para todas as seguradoras, permitindo um *ranking* sobre todas elas. Comparando os *rankings* estabelecidos pelas duas abordagens, verifica-se que para treze seguradoras (cerca de 68%) existe uma diferença de até duas posições, com duas a obterem a mesma posição, três a obterem uma diferença de uma posição e oito a obterem uma diferença de duas posições.

Referências Bibliográficas

- Adler, N., Friedman, L., & Sinuany-Stern, Z. (2002). Review of *ranking* methods in the data. *European journal of operational research*, 140(2), 249-265.
- Aldamak, A., & Zolfaghari, S. (2017). Review of efficiency *ranking* methods in data. *Measurement*, 106, 161-172.
- Andersen, J. A. (2006). Leadership, personality and effectiveness. *The Journal of Socio-Economics*, 1083.
- Asadi, B., Nasser, S. H., & Lotfi, F. H. (2020). Cross-inefficiency with the Variable returns to scale in DEA. *International Journal of Industrial Mathematics*, 345.
- ASF. (2022). Obtido de Portal da Autoridade de Supervisão de Seguros e Fundos de Pensões : <https://www.asf.com.pt/>
- Banker, R. D., Charnes, A., & Cooper, W. W. (1984). Some Models for Estimating Technical and Scale Inefficiencies in Data Envelopment Analysis. *Management Science*, 30(9), 1079.
- Charnes, A., & Cooper, W. (1962). Programming with Linear Fractional Functionals. *Naval Research Logistics Quarterly*, 181-186.
- Charnes, A., Cooper, W. W., Lewin, A. Y., & Seiford, L. M. (1994). *Data Envelopment Analysis: Theory, Methodology, and Applications*. Boston: Springer.
- Charnes, A., Cooper, W., & Rhodes, E. (1978). Measuring the efficiency of decision making units. *European Journal of Operational Research*, 2(6), 429-444.
- Cook, W. D., & Zhu, J. (2015). DEA Cobb–Douglas frontier and cross-efficiency. *Journal of the Operational Research Society*, 65(2), 265-268.
- Cooper, W. W. (2005). Origins, Uses of, and Relations Between Goal Programming and Data Envelopment Analysis. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, 13, 3-11.
- Cooper, W. W., Seiford, L. M., & Tone, K. (2007). *Data Envelopment Analysis: A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software* (2^a ed.). New York: Springer.
- Cooper, W. W., Seiford, L. M., & Zhu, J. (2011). *Handbook on Data Envelopment Analysis* (2^a ed.). New York: Springer.
- Cummins, J. D., & Weiss, M. A. (2000). *Handbook of insurance*. Dordrecht: Springer.
- Cummins, J. D., & Weiss, M. A. (2013). Systemic Risk and the U.S. Insurance Sector. *The Journal of Risk and Insurance*, 489-527.
- Dores, V., & Domingues, T. (31 de 8 de 2020). *A importância macroeconómica do Ramo Segurador em Portugal: Análise Input-Output*. Obtido de Gabinete de Estratégia e Estudos: <https://www.gce.gov.pt/pt/estudos-e-seminarios/estudos-de-temas-economicos-category/30542-te-88-a-importancia-macroeconomica-do-ramo-segurador-em-portugal-analise-input-output>
- Doyle, J., & Green, R. (1994). Efficiency and Cross-Efficiency in DEA: Derivations, Meanings. *The Journal of the Operational Research Society*, 45(5), 567-578.

- Eccles, R. G. (1991). The Performance Measurement Manifesto. *Harvard Business Review Home*, 131-137.
- Eling, M., & Luhnen, M. (2010). Frontier Efficiency Methodologies to Measure Performance in the Insurance Industry: Overview, Systematization, and Recent Developments. *The International Association for the Study of Insurance Economics*, 217.
- Endres, H. (2017). *Adaptability Through Dynamic Capabilities - How Management Can Recognize Opportunities and Threats*. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden.
- Farrell, M. J. (1957). The Measurement of productive efficiency. *Journal of the Royal Statistical*, 120(3), 253-290.
- Fecher, F., Kessler, D., Perelman, S., & Pertieau, P. (1993). Productive Performance of the French Insurance Industry. *Journal of Productivity Analysis*, 77-93.
- Georgopoulos, B. S., & Tannenbaum, A. S. (1957). A study of organizational effectiveness. *American Sociological Review*, 534-539.
- Golany, B., & Roll, Y. (1989). An application procedure for DEA. *Omega*, 237-250.
- Ho, L.-A. (2008). What affects organizational performance? The linking of learning and knowledge management. *Industrial Management & Data Systems*, 1238-1240.
- Jović, Z., & Tomašević, S. (2021). Traditional vs Modern Approaches to Measuring the Performance of a Company. *FINIZ 2021-Are you Ready for the ContinuousNEXT® after COVID-19*, (pp. 31-33). Belgrade.
- Kaffash, S., Azizi, R., Huang, Y., & Zhu, J. (2018). A survey of data envelopment analysis applications in the insurance industry 1993–2018. *European Journal of Operational Research*.
- Kumar, B. (2018). 588 International Journal of Research in Social Sciences. *International Journals of Multidisciplinary Research*, 589.
- Liang, L., Wu, J., Cook, W. D., & Zhu, J. (2008). Alternative secondary goals in DEA crossefficiency evaluation. *International Journal of Production Economics*, 113(2), 1025-1030.
- Lim, S., & Zhu, J. (2015). DEA cross-efficiency evaluation under variable returns to scale. *The Journal of the Operational Research Society*, 66(3), 476-487.
- Lin, R., & Chen, Z. C. (2017). A directional distance based super-efficiency DEA model handling negative data. *Journal of the Operational Research Society*, 1312.
- Liu, J. S., Lu, L. Y., Lu, W.-M., & Lin, B. (2013). A survey of DEA applications. *The International Journal of Management Science*, 893.
- Mello, J. C., Meza, L. A., Silveira, J. Q., & Gomes, E. G. (2013). About negative efficiencies in Cross Evaluation BCC input oriented models. *European Journal of Operational Research*, 226(3), 732-737.
- Nasseri, S. H., & Kiaei, H. (2018). Allocation of weights using simultaneous optimization of inputs and outputs contribution in cross-efficiency evaluation of DEA. *Yugoslav Journal of Operations Research*, 28(4), 521-538.
- Neely, A. (1999). The performance measurement revolution: why now and what next? *International Journal of Operations & Production Management*, 206.

- Podinovski, V. V., & Bouzdine-Chameeva, T. (2013). Weight Restrictions and Free Production in Data Envelopment Analysis. *Operations Research*, 61(2), 426-437.
- Richard, P. J., Devinney, T. M., Yip, G. S., & Johnson, G. (2009). Measuring Organizational Performance: Towards Methodological Best Practice. *Journal of Management*, 719-723.
- Sengupta, J. K. (2012). *Efficiency Analysis by Production Frontiers*: . California: Kluwer Academic Publishers.
- Sexton, T. R., Silkman, R. H., & Hogan, A. J. (1986). Data envelopment analysis: Critique and extensions. *Nex Directions for program Evaluation*(32), 73-105.
- Tangen, S. (2004). Performance measurement: from philosophy to practice. *International Journal of Productivity and Performance Management*, 726-729.
- Thanassoulis, E., & Allen, R. (1988). Simulating Weights Restrictions in Data Envelopment Analysis by Means of Unobserved DMUs. *Management Science*, 44(4), 586-594.
- Wang, Y. M., & Chin, K. S. (2010a). Some alternative models for DEA cross-efficiency. *International Journal of Production Economics*, 128(1), 332-338.
- Wang, Y. M., & Chin, K. S. (2010b). A neutral DEA model for cross-efficiency evaluation and its extension. *Expert Systems with Applications*, 37(5), 3666-3675.
- Wang, Y. M., Chin, K. S., & Jiang, P. (2011). Weight determination in the cross-efficiency evaluation. *Computers & Industrial Engineering*, 61(3), 497-502.
- Wu, J., Liang, L., & Chen, Y. (2009). DEA game cross-efficiency approach to Olympic rankings. *Omega*, 37(4), 909-918.
- Zhu, J. (2009). *Quantitative Models for Performance Evaluation and Benchmarking*. New york: Springer.

Apêndices

Apêndice A – Pesos obtidos pelo modelo CCR-Inputs

DMUs (Seguradoras)	Pesos					
	<i>Input 1</i>	<i>Input 2</i>	<i>Input 3</i>	<i>Output 1</i>	<i>Output 2</i>	<i>Output 3</i>
01 Aegon Santander Portugal Não Vida	7,00E-03	1,54E-05	1,03E-06	0	0	1,05E-05
02 Aegon Santander Portugal Vida	0	2,37E-05	4,85E-07	0	4,93E-05	0
03 BPI Vida e Pensões	6,60E-04	0	1,99E-07	1,14E-05	0	0
04 Caravela	3,15E-03	0	2,72E-06	1,28E-04	0	3,71E-06
05 Companhia de Seguros Allianz Portugal	0	1,15E-06	6,53E-07	3,34E-05	1,06E-06	3,76E-07
06 COSEC	2,01E-03	0	5,25E-06	2,41E-04	3,02E-05	0
07 Crédito Agrícola Vida	0	1,20E-05	0	0	2,09E-05	0
08 Fidelidade	0	7,12E-08	4,04E-08	2,07E-06	6,55E-08	2,32E-08
09 GamaLife	7,39E-03	0	3,78E-08	4,67E-06	8,03E-06	0
10 Generali Seguros	0	7,36E-06	0	0	0	8,42E-07
11 Lusitania Vida	0	1,97E-06	9,85E-07	5,42E-05	0	0
12 Mapfre Seguros de Vida	2,39E-03	0	2,41E-06	1,29E-04	0	0
13 Mapfre Seguros Gerais	0	4,87E-06	3,55E-06	1,73E-04	0	2,46E-06
14 Mútua dos Pescadores, Mútua de Seguros, C.R.L.	0	0	2,18E-05	9,01E-04	0	8,81E-06
15 Real Vida Seguros	0	7,73E-06	1,93E-06	1,04E-04	2,06E-05	0
16 Santander Totta Seguros	8,71E-04	0	2,63E-07	1,51E-05	0	0
17 Vitoria Seguros de Vida	0	6,91E-06	3,78E-06	1,95E-04	0	2,39E-06
18 Vitória Seguros	0	6,23E-06	4,55E-06	2,21E-04	0	3,16E-06
19 Zurich - Companhia de Seguros Vida	0	3,45E-05	0	3,97E-05	0	0

Apêndice B - Matriz e índices das eficiências cruzadas obtidos pelo modelo CCR-Input

DMUs	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
01	1,0000	0,9515	0,0554	0,4933	0,8254	0,2315	1,0000	0,2933	0,0471	1,0000	0,5648	0,1836	0,4205	0,2320	0,2780	0,0478	0,2746	0,4434	0,2262
02	0,9792	1,0000	0,1036	0,1371	0,5785	0,3200	1,0000	0,1545	0,4550	0,5334	0,3073	0,0535	0,0851	0,1538	0,5450	0,1674	0,0625	0,0960	0,1942
03	0,1054	0,1645	0,6103	0,1224	0,3471	0,1013	0,6684	0,5332	0,2215	0,4017	1,0000	0,7345	0,1867	0,2967	0,3966	1,0000	0,5104	0,0876	0,8964
04	1,0000	0,9337	0,5253	0,5417	0,8507	0,3472	1,0000	0,8408	0,1940	0,9179	1,0000	0,9436	0,6063	0,6448	0,6030	0,8457	0,7861	0,4833	0,8534
05	1,0000	0,7771	0,5478	0,4397	0,9520	0,3740	0,8464	0,9876	0,2140	1,0000	1,0000	1,0000	0,7935	0,8007	0,7278	0,8877	0,9368	0,5352	0,9219
06	1,0000	1,0000	0,5219	0,3406	0,7308	0,4801	0,9789	0,9082	0,2438	0,7237	0,9208	1,0000	0,5361	0,7916	0,7113	0,8459	0,8216	0,3024	0,8382
07	0,8659	0,8983	0,1432	0,1234	0,6140	0,2838	1,0000	0,1504	0,6476	0,6345	0,4168	0,0512	0,0779	0,1377	0,5730	0,2391	0,0625	0,0864	0,3219
08	1,0000	0,7771	0,5478	0,4397	0,9520	0,3740	0,8464	0,9876	0,2140	1,0000	1,0000	1,0000	0,7935	0,8007	0,7278	0,8877	0,9368	0,5352	0,9219
09	0,1586	0,2755	0,5159	0,0378	0,0826	0,0747	1,0000	0,0635	1,0000	0,0755	0,5380	0,0760	0,0178	0,0433	0,1180	1,0000	0,0438	0,0151	0,2898
10	0,4651	0,3488	0,0310	0,1942	0,6451	0,0909	0,3250	0,1455	0,0272	1,0000	0,3316	0,0696	0,2599	0,1003	0,1686	0,0279	0,1501	0,2542	0,2007
11	0,3061	0,2975	0,5763	0,2440	0,7363	0,2239	0,6517	0,9431	0,2068	0,7970	1,0000	1,0000	0,5972	0,6976	0,6678	0,9386	0,9108	0,2913	0,9593
12	0,2263	0,2850	0,5857	0,2204	0,5621	0,1967	0,7156	0,8224	0,2103	0,6142	1,0000	1,0000	0,3896	0,5755	0,5731	0,9525	0,7778	0,1896	0,9238
13	1,0000	0,7267	0,5240	0,4788	0,9488	0,3566	0,7901	0,9836	0,1904	1,0000	0,9635	1,0000	0,8484	0,8248	0,6900	0,8476	0,9351	0,5988	0,8822
14	1,0000	0,6965	0,4626	0,4738	0,8103	0,3958	0,7124	0,9499	0,1669	0,8271	0,8376	1,0000	0,8444	0,9350	0,6285	0,7472	0,8837	0,5874	0,7638
15	1,0000	0,9446	0,5593	0,2760	0,8592	0,4086	1,0000	0,8484	0,2966	0,8779	1,0000	0,8318	0,5053	0,6139	0,7897	0,9126	0,7900	0,2804	0,9446
16	0,1054	0,1645	0,6103	0,1224	0,3471	0,1013	0,6684	0,5332	0,2215	0,4017	1,0000	0,7345	0,1867	0,2967	0,3966	1,0000	0,5104	0,0876	0,8964
17	0,8616	0,6465	0,5485	0,4331	0,9375	0,3242	0,7792	0,9825	0,1991	1,0000	1,0000	1,0000	0,7995	0,7818	0,6990	0,8888	0,9410	0,5397	0,9253
18	1,0000	0,7267	0,5240	0,4788	0,9488	0,3566	0,7901	0,9836	0,1904	1,0000	0,9635	1,0000	0,8484	0,8248	0,6900	0,8476	0,9351	0,5988	0,8822
19	0,0302	0,0344	0,4068	0,0286	0,2318	0,0228	0,1563	0,1956	0,1564	0,3753	0,6747	0,1874	0,0819	0,0787	0,2019	0,7154	0,2174	0,0341	1,0000
Média	0,6897	0,6131	0,4421	0,2961	0,6821	0,2665	0,7857	0,6477	0,2686	0,7463	0,8168	0,6771	0,4673	0,5069	0,5361	0,7263	0,6046	0,3182	0,7285

Apêndice C - Pesos obtidos pelo modelo BCC- *Input* através do MaxDEA

DMUs (Seguradoras)	Pesos							u^{k*}
	<i>Input</i> 1	<i>Input</i> 2	<i>Input</i> 3	<i>Output</i> 1	<i>Output</i> 2	<i>Output</i> 3		
01 Aegon Santander Portugal Não Vida	1,07E-02	0,0	1,89E-06	0,0	0,0	5,81E-06	0,4470	
02 Aegon Santander Portugal Vida	0,0	2,40E-05	3,95E-07	0,0	4,77E-05	0	0,0328	
03 BPI Vida e Pensões	1,14E-04	0,0	2,07E-07	1,18E-05	0,0	0	-0,0167	
04 Caravela	4,12E-03	0,0	2,07E-06	9,24E-05	0,0	2,86E-06	0,1405	
05 Companhia de Seguros Allianz Portugal	0,0	0,0	7,42E-07	2,80E-05	4,74E-06	5,78E-07	-0,0952	
06 COSEC	3,00E-03	0,0	4,38E-06	2,01E-04	2,52E-05	0	0,1086	
07 Crédito Agrícola Vida	0,0	0,0	1,27E-06	0,0	3,00E-05	0	-0,4317	
08 Fidelidade	4,10E-05	0,0	3,32E-08	1,96E-06	0,0	4,82E-08	-0,0076	
09 GamaLife	1,04E-04	0,0	1,05E-07	0,0	1,66E-05	0	-0,7044	
10 Generali Seguros	9,35E-04	0,0	0,0	0,0	0,0	9,97E-07	-0,1841	
11 Lusitania Vida	5,06E-04	0,0	1,03E-06	5,76E-05	0,0	0	-0,0624	
12 Mapfre Seguros de Vida	1,31E-03	0,0	2,68E-06	1,49E-04	0,0	0	-0,1619	
13 Mapfre Seguros Gerais	0,0	0,0	4,62E-06	1,97E-04	0,0	2,52E-06	-0,0660	
14 Mútua dos Pescadores, Mútua de Seguros, C.R.L.	2,17E-02	9,69E-06	0,0	0,0	0,0	0	1,0000	
15 Real Vida Seguros	0,0	1,98E-05	9,61E-07	6,18E-05	2,21E-05	0	0,2298	
16 Santander Totta Seguros	1,50E-04	0,0	2,71E-07	1,54E-05	0,0	0	-0,0219	
17 Vitoria Seguros de Vida	0,0	7,92E-06	3,67E-06	1,87E-04	0,0	2,43E-06	0,0737	
18 Vitória Seguros	0,0	5,12E-06	4,86E-06	2,31E-04	0,0	3,41E-06	-0,0365	
19 Zurich - Companhia de Seguros Vida	0,0	3,45E-05	0,0	6,51E-05	0,0	0	-0,6423	

Apêndice D - Matriz e índices das eficiências cruzadas obtidos pelo modelo BCC-Input

DMUs	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
01	1,0000	1,0000	0,0699	0,5370	0,4102	0,4194	0,8730	0,1554	0,0440	0,4380	0,4546	0,4050	0,3493	1,0000	0,6165	0,0811	0,4741	0,3961	0,2210
02	1,0000	1,0000	0,1131	0,1552	0,5868	0,3351	1,0000	0,1521	0,4755	0,5480	0,3460	0,0781	0,1094	0,2446	0,5778	0,1821	0,1119	0,1221	0,2316
03	-0,4190	-0,0745	0,6125	0,0008	0,6506	-0,1174	0,6880	1,0000	0,2170	0,7231	1,0000	0,9571	0,3156	-0,4171	0,5083	1,0000	0,6433	-0,0225	0,9505
04	1,0000	0,9457	0,5081	0,5494	0,6909	0,4245	1,0000	0,6619	0,1907	0,7492	1,0000	0,9140	0,5176	1,0000	0,5940	0,8155	0,7945	0,4519	0,8284
05	0,6840	1,0000	0,4174	0,1307	0,9968	-0,0631	1,0000	1,0000	0,2117	1,0000	0,7229	0,5936	0,4477	-1,6924	0,4664	0,6785	0,3126	0,0724	0,6477
06	1,0000	1,0000	0,5253	0,3755	0,6669	0,5093	0,9896	0,8244	0,2459	0,6648	0,9378	1,0000	0,4966	1,0000	0,7082	0,8506	0,8363	0,3207	0,8441
07	-1,0146	1,0000	-0,0099	-1,1845	0,3852	-1,0496	1,0000	0,2406	0,2209	0,2973	-0,1707	-0,9240	-1,3408	-6,8849	-0,2430	0,0014	-1,4454	-1,8124	-0,1539
08	-0,3314	0,0586	0,6112	-0,0121	0,8660	-0,3850	0,9121	1,0000	0,2182	1,0000	1,0000	0,6244	0,2414	-1,6585	0,3017	1,0000	0,2391	-0,0236	0,9053
09	-33,5377	-15,8873	-0,9776	-17,6342	-0,4846	-20,3990	1,0000	1,0000	1,0000	0,2910	-5,6130	-15,6509	-13,7927	-76,5951	-9,8563	-1,1858	-21,5749	-17,2778	-4,0281
10	-1,1621	-0,8424	-2,2890	-0,6720	0,6714	-1,2400	1,0000	0,4083	1,4590	1,0000	-3,1191	-2,0003	-0,3310	-4,6091	-1,1990	-4,3398	-1,9531	-0,4381	-2,0990
11	-0,2507	0,0293	0,6038	0,0689	0,6634	-0,0275	0,6991	1,0000	0,2144	0,7278	1,0000	1,0000	0,3786	-0,1379	0,5473	0,9843	0,7136	0,0481	0,9462
12	-0,2507	0,0293	0,6038	0,0689	0,6634	-0,0275	0,6991	1,0000	0,2144	0,7278	1,0000	1,0000	0,3786	-0,1379	0,5473	0,9843	0,7136	0,0481	0,9462
13	1,0000	0,7267	0,4754	0,4801	0,8809	0,3436	0,7555	1,0000	0,1716	0,9030	0,8615	1,0000	0,8692	0,6858	0,6273	0,7679	0,8652	0,5955	0,7825
14	0,4976	0,4622	0,3429	0,2797	0,0680	0,3128	0,4997	0,0050	0,2191	0,0407	1,0000	0,4412	0,1709	1,0000	0,3357	0,5322	0,4869	0,1994	0,5685
15	1,0000	0,8229	0,5012	0,3063	0,6950	0,4198	0,8252	0,4570	0,3315	0,7571	1,0000	0,5873	0,4239	1,0000	0,8003	0,8253	0,7722	0,3503	1,0000
16	-0,4190	-0,0745	0,6125	0,0008	0,6506	-0,1174	0,6880	1,0000	0,2170	0,7231	1,0000	0,9571	0,3156	-0,4171	0,5083	1,0000	0,6433	-0,0225	0,9505
17	1,0000	0,7111	0,5403	0,4751	0,9321	0,3855	0,7773	0,9436	0,1970	0,9938	1,0000	1,0000	0,8262	1,0000	0,7217	0,8747	0,9803	0,5958	0,9223
18	1,0000	0,7336	0,5168	0,4805	0,9535	0,3431	0,7943	1,0000	0,1875	1,0000	0,9476	1,0000	0,8582	0,7442	0,6763	0,8357	0,9157	0,6000	0,8651
19	-0,7444	-0,4168	0,5447	-0,2786	0,2002	-0,3385	0,0328	0,3140	0,1895	0,4793	0,5156	-0,0826	-0,2582	-1,2529	-0,2597	1,0000	-0,4348	-0,3661	1,0000
Média	-1,5236	-0,4093	0,2275	-0,8354	0,5867	-1,0669	0,8018	0,6928	0,1740	0,6876	0,2570	-0,3737	-0,4749	-4,5331	-0,1590	0,3625	-0,8371	-0,8507	0,3331

Apêndice E - Matriz e índices das eficiências cruzadas obtidos pelo modelo Lim e Zhu (2015)

DMUs	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
01	1,0000	1,0000	0,0254	0,3927	0,3805	0,1962	0,8383	0,1523	0,0207	0,4225	0,3111	0,1570	0,2383	1,0000	0,1666	0,0218	0,2049	0,2686	0,1013
02	1,0000	1,0000	0,1078	0,1357	0,5822	0,3171	1,0000	0,1517	0,4739	0,5446	0,3265	0,0538	0,0849	0,1644	0,5620	0,1753	0,0649	0,0957	0,2108
03	0,1847	0,2529	0,6189	0,2226	0,6665	0,1914	0,7160	1,0000	0,2236	0,7296	1,0000	0,9646	0,4430	0,3531	0,5817	1,0000	0,7260	0,2092	0,9532
04	1,0000	0,9300	0,5012	0,4757	0,6826	0,3036	1,0000	0,6613	0,1849	0,7457	1,0000	0,9004	0,4665	1,0000	0,5456	0,8121	0,7510	0,3791	0,8204
05	0,8950	1,0000	0,4326	0,4639	0,9971	0,4406	1,0000	1,0000	0,2223	1,0000	0,7558	0,7068	0,6533	0,2922	0,5978	0,6894	0,5647	0,4864	0,6775
06	1,0000	1,0000	0,5228	0,3196	0,6622	0,4495	0,9893	0,8243	0,2439	0,6624	0,9362	1,0000	0,4621	1,0000	0,6923	0,8496	0,8203	0,2603	0,8414
07	0,6818	1,0000	0,0571	0,1751	0,5091	0,3950	1,0000	0,2532	0,2480	0,3736	0,1375	0,0493	0,0900	0,0652	0,3340	0,0861	0,0355	0,1035	0,0732
08	0,4427	0,5183	0,6286	0,3701	0,8791	0,2187	0,9307	1,0000	0,2365	1,0000	1,0000	0,7541	0,4728	0,2204	0,5087	1,0000	0,5537	0,3381	0,9180
09	0,2690	0,4630	0,1695	0,0908	0,6626	0,1829	1,0000	1,0000	1,0000	0,7415	0,1546	0,0312	0,0468	0,0248	0,2268	0,2219	0,0190	0,0489	0,1038
10	0,3645	0,4584	0,1652	0,3082	0,7495	0,1303	1,0000	0,4225	0,2466	1,0000	0,4243	0,1105	0,2582	0,0532	0,1547	0,1174	0,1171	0,2562	0,2047
11	0,2089	0,2740	0,6087	0,2369	0,6752	0,2075	0,7198	1,0000	0,2194	0,7327	1,0000	1,0000	0,4729	0,4087	0,6006	0,9846	0,7671	0,2262	0,9484
12	0,2089	0,2740	0,6087	0,2369	0,6752	0,2075	0,7198	1,0000	0,2194	0,7327	1,0000	1,0000	0,4729	0,4087	0,6006	0,9846	0,7671	0,2262	0,9484
13	1,0000	0,7522	0,4770	0,5138	0,8822	0,4034	0,7598	1,0000	0,1728	0,9035	0,8635	1,0000	0,8773	0,7605	0,6403	0,7688	0,8734	0,6288	0,7847
14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
15	1,0000	0,7632	0,4856	0,1613	0,6725	0,2694	0,8067	0,4552	0,3207	0,7462	1,0000	0,4955	0,2793	1,0000	0,7407	0,8179	0,6553	0,1625	1,0000
16	0,1847	0,2529	0,6189	0,2226	0,6665	0,1914	0,7160	1,0000	0,2236	0,7296	1,0000	0,9646	0,4430	0,3531	0,5817	1,0000	0,7260	0,2092	0,9532
17	1,0000	0,6827	0,5385	0,4411	0,9313	0,3318	0,7726	0,9436	0,1954	0,9937	1,0000	1,0000	0,8146	1,0000	0,7091	0,8741	0,9787	0,5611	0,9212
18	1,0000	0,7442	0,5175	0,4947	0,9538	0,3675	0,7961	1,0000	0,1882	1,0000	0,9480	1,0000	0,8621	0,7727	0,6820	0,8361	0,9181	0,6141	0,8658
19	0,0276	0,0384	0,5947	0,0354	0,3225	0,0272	0,2097	0,3190	0,2407	0,5420	0,6958	0,2213	0,0966	0,0542	0,2084	1,0000	0,1993	0,0394	1,0000
Média	0,6036	0,6002	0,4041	0,2788	0,6605	0,2543	0,7881	0,6938	0,2569	0,7158	0,7133	0,6005	0,3966	0,4701	0,4807	0,6442	0,5127	0,2691	0,6487

Apêndice F - Matriz e índices das ineficiências cruzadas obtidos pelo modelo Asadi et al. (2020)

DMUs	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
01	0,0000	0,0000	0,9301	0,4630	0,5898	0,5806	0,1270	0,8446	0,9560	0,5620	0,5454	0,5950	0,6507	0,0000	0,6527	0,9189	0,5259	0,6039	0,7790
02	0,0000	0,0000	0,8869	0,8448	0,4132	0,6649	0,0000	0,8479	0,5245	0,4520	0,6540	0,9219	0,8906	0,7554	0,4222	0,8179	0,8881	0,8779	0,7684
03	1,4190	1,0745	0,3875	0,9992	0,3494	1,1174	0,3120	0,0000	0,7830	0,2769	0,0000	0,0429	0,6844	1,4171	0,4917	0,0000	0,3567	1,0225	0,0495
04	0,0000	0,0543	0,4919	0,4506	0,3091	0,5755	0,0000	0,3381	0,8093	0,2508	0,0000	0,0860	0,4824	0,0000	0,4060	0,1845	0,2055	0,5481	0,1716
05	0,3160	0,0000	0,5826	0,8693	0,0032	1,0631	0,0000	0,0000	0,7883	0,0000	0,2771	0,4064	0,5523	2,6924	0,5336	0,3215	0,6874	0,9276	0,3523
06	0,0000	0,0000	0,4747	0,6245	0,3331	0,4907	0,0104	0,1756	0,7541	0,3352	0,0622	0,0000	0,5034	0,0000	0,2918	0,1494	0,1637	0,6793	0,1559
07	2,0146	0,0000	1,0099	2,1845	0,6148	2,0496	0,0000	0,7594	0,7791	0,7027	1,1707	1,9240	2,3408	7,8849	1,2430	0,9986	2,4454	2,8124	1,1539
08	1,3314	0,9414	0,3888	1,0121	0,1340	1,3850	0,0879	0,0000	0,7818	0,0000	0,0000	0,3756	0,7586	2,6585	0,6983	0,0000	0,7609	1,0236	0,0947
09	34,5377	16,8873	1,9776	18,6342	1,4846	21,3990	0,0000	0,0000	0,0000	0,7090	6,6130	16,6509	14,7927	77,5951	10,8563	2,1858	22,5749	18,2778	5,0281
10	2,1621	1,8424	3,2890	1,6720	0,3286	2,2400	0,0000	0,5917	2,4590	0,0000	4,1191	3,0003	1,3310	5,6091	2,1990	5,3398	2,9531	1,4381	3,0990
11	1,2507	0,9707	0,3962	0,9311	0,3366	1,0275	0,3009	0,0000	0,7856	0,2722	0,0000	0,0000	0,6214	1,1379	0,4527	0,0157	0,2864	0,9519	0,0538
12	1,2507	0,9707	0,3962	0,9311	0,3366	1,0275	0,3009	0,0000	0,7856	0,2722	0,0000	0,0000	0,6214	1,1379	0,4527	0,0157	0,2864	0,9519	0,0538
13	0,0000	0,2733	0,5246	0,5199	0,1191	0,6564	0,2445	0,0000	0,8284	0,0970	0,1385	0,0000	0,1308	0,3142	0,3727	0,2321	0,1348	0,4045	0,2175
14	0,5024	0,5378	0,6571	0,7203	0,9320	0,6872	0,5003	0,9950	0,7809	0,9593	0,0000	0,5588	0,8291	0,0000	0,6643	0,4678	0,5131	0,8006	0,4315
15	0,0000	0,1771	0,4988	0,6937	0,3050	0,5802	0,1748	0,5430	0,6685	0,2429	0,0000	0,4127	0,5761	0,0000	0,1997	0,1747	0,2278	0,6497	0,0000
16	1,4190	1,0745	0,3875	0,9992	0,3494	1,1174	0,3120	0,0000	0,7830	0,2769	0,0000	0,0429	0,6844	1,4171	0,4917	0,0000	0,3567	1,0225	0,0495
17	0,0000	0,2889	0,4597	0,5249	0,0679	0,6145	0,2227	0,0564	0,8030	0,0062	0,0000	0,0000	0,1738	0,0000	0,2783	0,1253	0,0197	0,4042	0,0777
18	0,0000	0,2664	0,4832	0,5195	0,0465	0,6569	0,2057	0,0000	0,8125	0,0000	0,0524	0,0000	0,1418	0,2558	0,3237	0,1643	0,0843	0,4000	0,1349
19	1,7444	1,4168	0,4553	1,2786	0,7998	1,3385	0,9672	0,6860	0,8105	0,5207	0,4844	1,0826	1,2582	2,2529	1,2597	0,0000	1,4348	1,3661	0,0000
Média	2,5236	1,4093	0,7725	1,8354	0,4133	2,0669	0,1982	0,3072	0,8260	0,3124	0,7430	1,3737	1,4749	5,5331	1,1732	0,6375	1,8371	1,8507	0,6669