A Integração Curricular da Demonstração

Margarida Rodrigues
Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Lisboa

Resumo: Neste artigo, são discutidos os conceitos de demonstração e de esquema demonstrativo, bem como a relevância curricular da demonstração e os contextos favoráveis à sua aprendizagem. Alguns dos resultados do estudo, relativamente ao papel da demonstração no currículo, bem como ao modo como se desenvolveu o processo demonstrativo, são apresentados e discutidos. A metodologia adotada no estudo teve uma natureza interpretativa e os participantes no estudo foram uma turma de 9.º ano e a respetiva professora de Matemática. As conclusões do estudo apontam para o facto de os alunos tenderem a usar exemplos particulares para validar as suas afirmações matemáticas. Apontam ainda para as múltiplas funções da demonstração nas tarefas em que esta surgiu como um meio de descoberta da solução do problema. Sugerem também que a introdução e a negociação da importância da demonstração implicam uma intervenção curricular, na qual a professora detém um papel fundamental.

Palavras-chave: demonstração, esquema demonstrativo, currículo de Matemática

Abstract: This paper discusses the concepts of proof and proof scheme, and also the importance of proof in mathematics curricula and the favorable contexts to its learning. Some findings, relative to the role of proof as well the way the proving process is carried out, are presented and discussed. The methodology had a qualitative nature and the participants were a class of 9th grade pupils and their mathematics teacher. The study conclusions point to the fact that the students use specific examples to validate their statements. They point also to the multiple functions of proof in the tasks where the proof was the way of discovering the solution to the problem. They suggest also that the introduction and the negotiation of proof relevance imply a curricular intervention in which the teacher plays a fundamental role.

Key words: proof, proof scheme, mathematics curricula

Rodrigues, Margarida (2012). A Integração Curricular da Demonstração. *Da Investigação às Práticas, II (II)*. 53-77.

Contacto: Margarida Rodrigues, Departamento em Educação em Matemática, Ciências e Tecnologia, Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Lisboa, Portugal / margaridar@eselx.ipl.pt

Résumé:

Dans cet article, nous discutons les concepts de démonstration et de schéma démonstratif, ainsi que l'importance curriculaire de la démonstration et les contextes favorables à son apprentissage. Nous présentons et discutons aussi quelques résultats relatifs au rôle de la démonstration dans le curriculum et à la façon dont s'est développé le processus démonstratif. La méthodologie adoptée dans l'étude est de nature interprétative et les participants ont été une classe de 9ème année et la respective professeure de Mathématiques. Les conclusions de l'étude indiquent que les élèves sont habitués à utiliser les exemples particuliers pour valider leurs affirmations mathématiques et qu'il existe de multiples fonctions de la démonstration dans les taches où celle-ci a été le moyen de découvrir la solution du problème. Elles suggèrent aussi que l'introduction et la négociation de l'importance de la démonstration impliquent une intervention curriculaire, dans laquelle la professeure a un rôle décisif.

Mots clés: démonstration, schéma démonstratif, curriculum de Mathématiques

INTRODUÇÃO

A investigação apresentada neste artigo (Rodrigues, 2008) teve como objetivo analisar as formas de persuasão e convencimento desenvolvidas pelos alunos e o papel da demonstração na aprendizagem matemática no contexto da sua relação com a prática social da aula de Matemática. As questões que orientaram essa análise foram: 1) qual a natureza da demonstração no contexto escolar, 2) qual o papel da demonstração na atividade matemática escolar, e 3) como se relaciona a concretização da demonstração com a prática social desenvolvida na aula de Matemática.

O artigo começa por apresentar a fundamentação teórica relativamente à integração curricular da demonstração, focando os conceitos de demonstração e de esquema demonstrativo, bem como a relevância curricular da demonstração e os contextos favoráveis à sua aprendizagem. As restantes secções apresentam a metodologia adotada, a discussão de alguns resultados, através da apresentação e análise de dois episódios empíricos, e a síntese conclusiva.

1. A DEMONSTRAÇÃO NO CURRÍCULO

1.1. Demonstração e esquema demonstrativo

Assumindo a demonstração como um encadeamento de argumentos gerais e resistentes, pelo qual uma ou mais conclusões são alcançadas, por meio de raciocínios lógico-dedutivos, a partir de uma hipótese, constituída ou, por axiomas, ou por teoremas anteriormente já demonstrados e aceites como verdadeiros, encaro-a como um caso particular de argumentação, na linha de Toulmin (1969). Este filósofo, ao defender a pluralidade de campos de argumentos, e embora considerando que a argumentação é invariante na sua estrutura (todos os argumentos são constituídos essencialmente por três elementos básicos, designadamente os *dados*, a *garantia* e a *conclusão*), reconhece que a mesma é modelada de diferentes maneiras, consoante o campo particular em que se inscreve. As justificações sustentadoras do discurso argumentativo que permitem avaliar os raciocínios desenvolvidos são fundamentadas pelos saberes e normas de cada um dos campos específicos de argumentos. Isto é, a validade de uma argumentação é interna ao campo a que pertence. Por conseguinte, a demonstração matemática é um argumento que apresenta uma especificidade própria, visando uma validação por meio de uma justificação no interior de um domínio teórico, podendo portanto distinguir-se de uma argumentação comum espontânea, quer pelo modo de funcionamento dos respetivos raciocínios (Duval, 1991), quer pelo facto de a construção dos argumentos demonstrativos requerer o conhecimento de regras e convenções estabelecidas pela comunidade matemática (Balacheff, 1991).

Quando equacionamos a integração curricular da demonstração, há que, em primeiro lugar, atentar nas formas específicas que os alunos utilizam para estabelecer a verdade das afirmações matemáticas:

To understand what happens we have to enter the students' world, and we have to agree to consider the coherence of their own rationales for asserting the truth of a mathematical statement or a result. In other words, we must make our own Copernican revolution. (Balacheff, 1991, p. 175)

De facto, sendo o currículo um projeto formativo resultando da interação entre a intencionalidade planificada e as experiências vividas no contexto escolar (Pacheco, 2001; Sacristán, 1991/2000; e Roldão, 1999), e detendo o professor um papel determinante em todo o processo de gestão curricular, torna-se indispensável que este identifique as formas de validação usadas pelos seus alunos, se o desenvolvimento da capacidade dos alunos em demonstrar fizer parte da sua intencionalidade educativa. É nesta perspetiva compreensiva de demonstração que Harel e Sowder (2007) introduzem o conceito de *esquema demonstrativo* (*proof scheme* no original), sendo a subjetividade a sua principal característica. Harel e Sowder (2007) definem esquema demonstrativo de uma pessoa, ou de uma comunidade, como aquilo que constitui a obtenção de certeza e a persuasão para essa pessoa, ou comunidade. Raramente estes dois processos — a verificação para si próprio e a atividade de convencer os outros — ocorrem separadamente. "Thus, proving emerges as a response to cognitive-social needs, rather than exclusively to cognitive needs or social needs" (Harel e Sowder, 2007, p. 809). Como os esquemas demonstrativos podem variar de pessoa para pessoa, de comunidade para comunidade, de contexto para contexto, etc., os autores classificam-nos do seguinte modo: esquema demonstrativo (a) *de convicção externa,* podendo ser *autoritário, ritual,* ou *simbólico não-referencial*; (b) *empírico,* podendo ser *indutivo* ou *percetivo*; e (c) *dedutivo,* podendo ser *transformativo* ou *axiomático.*

No conceito de esquema demonstrativo, encontra-se, pois, uma conceção abrangente e subjetiva de prova, que inclui as várias formas de os alunos estabelecerem a verdade matemática, em contexto escolar, não se restringindo ao que é considerado demonstrar em matemática (esquema demonstrativo dedutivo axiomático). Hanna (1996) chama a atenção para o facto de que o uso da demonstração (esquema demonstrativo dedutivo), na sala de aula de Matemática, é intrinsecamente antiautoritário, uma vez que a validade da conclusão provém da própria demonstração, e não de uma autoridade externa (esquema demonstrativo autoritário de convicção externa), dada a natureza transparente da demonstração, ao dispor, de forma clara, todas as regras do raciocínio, abrindo-as ao criticismo. "Proof conveys to students the message that they can reason for themselves, that they do *not* need to defer authority" (Hanna, 1996, p. 31, destaque no original).

1.2. A importância da demonstração

Um dos motivos invocados na justificação da importância da integração curricular da demonstração reside na compreensão pelos alunos da natureza da matemática (de Villiers, 2004; Hanna, 2000; Hanna e Jahnke, 1993; 1999; Jahnke, 2010; Veloso, 1998). Trata-se de um motivo de ordem epistemológica, já que a demonstração constitui um aspeto essencial da matemática que a distingue das outras ciências (Balacheff, 2010). No entanto, não se pode supor que os alunos, à partida, tenham esta conceção de demonstração e da natureza da matemática. Por exemplo, Hanna e Jahnke (1999) referem que os estudantes, numa situação em que o professor lhes apresenta uma demonstração de um dado teorema, afirmando que a sua veracidade é alcançada através de dedução pura, continuam a sentir necessidade de proceder a testes empíricos, mesmo no caso de afirmarem que compreenderam a referida demonstração. Aliás, são em elevado número os estudos empíricos (por exemplo, Boavida, 2005; Chazan, 1993; Chazan e Lueke, 2009; Hanna e Jahnke, 1993; Harel e Sowder, 2007; Healy e Hoyles, 2000; Machado, 2005; Recio e Godino, 2001; Rodrigues, 1997; 2000; 2008) que apontam para a tendência de os estudantes dos vários níveis de ensino, desde o ensino básico ao ensino superior, utilizarem esquemas demonstrativos empíricos indutivos na aula de Matemática. Trata-se de uma situação generalizada internacionalmente, mesmo em países que valorizam bastante o ensino da demonstração, ao nível da prescrição curricular, como é o caso do Japão (Harel e Sowder, 2007). De Villiers (2004) advoga que se deve consciencializar todos os alunos, em todos os níveis de ensino, desta diferença fundamental entre a matemática e as outras ciências: enquanto a ciência é baseada em geral nas suas asserções empíricas, as regularidades encontradas em matemática não constituem uma prova. O autor afirma mesmo que "nobody, today, can really be considered mathematically educated or literate, if he or she is not aware of the insufficiency of quasi-empirical evidence to guarantee truth in mathematics, no matter how convincing that evidence may seem" (de Villiers, 2004, p. 412).

Hanna (2000) refere que as múltiplas funções da demonstração em matemática — verificação, explicação, descoberta, sistematização, comunicação e desafio intelectual (de Villiers, 2001) — emergem como produto de um longo desenvolvimento histórico e que no contexto de sala de aula, os alunos começam por lidar com a demonstração nas suas duas funções essenciais: verificação e explicação. No entanto, é à segunda função que a autora confere uma importância primordial, visão partilhada por outros autores, como por exemplo Hersh (1993; 1997), que distingue claramente o papel da demonstração na investigação matemática (o de convencer) do papel da demonstração na sala de aula (o de explicar). Este autor argumenta que, no contexto da aula de Matemática, os alunos ficam facilmente convencidos e que não precisam da demonstração para esse efeito; precisam dela para explicar e compreender por que é que um teorema é verdadeiro. De acordo com Nunokawa (2010), as demonstrações contêm ideias críticas e será importante investigar de que modo é que as mesmas poderão emergir através das interações entre a exploração e a compreensão no decurso do processo justificativo. Assim, segundo esta perspetiva, a principal função da demonstração na sala de aula é a promoção da compreensão matemática. Daí que o maior desafio dos educadores matemáticos seja o de encontrar modos mais efetivos de utilizar a demonstração para este fim, devendo clarificar, junto dos alunos, a interação entre a experimentação e a dedução e a relação entre a matemática e o mundo real (de Villiers, 2010; Hanna, 2000).

A demonstração ocupou, durante muito tempo, um lugar de reduzida importância no currículo, quer a nível prescritivo quer a nível de concretização na prática. Muitos alunos não chegavam a desenvolver a noção do que é uma demonstração matemática, tendo um contacto com um número diminuto de demonstrações. Mais recentemente, tem-se vindo a destacar uma valorização crescente da importância curricular da demonstração por parte da comunidade da educação matemática, o que se refletiu na formulação dos currículos prescritos de vários países, incluindo Portugal. O Programa de Matemática do Ensino Básico (DGIDC, 2007) valoriza explicitamente o raciocínio matemático e a demonstração, em particular, encarando a sua aprendizagem como um processo evolutivo ao longo da escolaridade, de forma transversal a todos os domínios temáticos, em que as crianças começam por justificar as conclusões com base em exemplos particulares, evoluindo para justificações gerais. Também é esta a perspetiva de Schultz-Ferrel et al. (2007), os quais afirmam que a capacidade de raciocínio matemático se desenvolve ao longo do tempo e com experiências repetidas.

No entanto, se nos deslocarmos do nível de prescrição curricular para o nível curricular de ação e para o nível de currículo realizado (Sacristán, 1991/2000), constatamos que o panorama internacional mudou muito pouco significativamente. Harel e Sowder (2007), apresentando o estado de arte atual relativamente à demonstração na educação matemática, referem os resultados obtidos por estudos empíricos (alguns deles quantitativos e outros qualitativos) incidentes nas práticas profissionais dos professores relativamente à demonstração, os quais indicam que a maioria dos professores não reserva tempo das suas aulas ao ensino da demonstração. Evidenciam ainda que a maioria dos docentes não encara a demonstração como sendo central na educação matemática, considerando-a adequada apenas a uma minoria de alunos. E para muitos professores, os esquemas demonstrativos empíricos são os mais dominantes para suportar resultados e afirmações matemáticas (Chazan e Lueke, 2009; Harel e Sowder, 2007), chegando até a serem classificados, pelos professores, como demonstrações matemáticas argumentos que o não são. Encontramos um resultado semelhante em Guimarães (2003): a demonstração "é uma atividade praticamente omissa" (p. 398) das aulas das duas professoras estudadas, embora, para uma delas, a demonstração ocupe um lugar de relevo na matemática, encarando-a como o que faz a matemática distinguir-se das outras ciências. A resistência dos alunos à realização de demonstrações e o facto de não compreenderem a sua importância, bem como a reduzida visibilidade que os programas da altura lhe davam, foram as razões apontadas pelas professoras para essa omissão.

Mesmo em situações curriculares valorativas da demonstração, em que os alunos começam gradualmente a compreender que uma demonstração é um argumento geral (Healy e Hoyles, 2000), os mesmos mantêm dificuldades em construir demonstrações e continuam a usar argumentos empíricos, como meio de prova. Contudo, alguns estudos focados em exemplos de experiências curriculares concebidas com o objetivo de desenvolver nos alunos os esquemas demonstrativos dedutivos, em que os professores intervenientes valorizam o ensino da demonstração, mostram que currículos de Matemática apropriados, em conjunção com uma intervenção adequada do professor, podem ajudar os alunos a desenvolver o raciocínio dedutivo e a lidar, desde muito cedo, com as ideias da demonstração (Harel e Sowder, 2007).

1.3. Contextos favoráveis à aprendizagem da demonstração

Considerando a demonstração como um desempenho público, Herbst e Balacheff (2009) encaram as salas de aula como inteligências coletivas e complexas, em que os indivíduos contribuem para uma cognição distribuída (Pea, 1993) que pode incorporar ideias matemáticas enquanto desempenhos públicos. "Public activity in mathematics classrooms embodies an epistemology, a particular way of knowing, and that is crucial to understand this epistemology in order to inform the development of curriculum, pedagogy, and assessment" (Herbst e Balacheff, 2009, p. 40).

Segundo vários autores, a aprendizagem da demonstração pode ser favorecida pela realização de atividades de exploração e investigação (Boavida, 2005; Fonseca, 2004; Harel e Sowder, 2007; Martins et al., 2002; Oliveira, 2002). Oliveira (2002) considera que a ênfase numa abordagem investigativa nas aulas de Matemática contribui para o desenvolvimento da capacidade de demonstrar, já que a produção de conhecimento novo poderá levar os alunos a sentirem necessidade de validar os resultados alcançados. Este autor considera, pois, importante que, em contextos investigativos, os alunos validem os seus resultados. Aliás, o processo de validação não pode ser separado de toda a atividade envolvida na exploração da tarefa ou na resolução de um problema (Balacheff, 2010). Tal como afirmado por Nunokawa (2010), as explicações providenciadas pelos estudantes, no decurso da resolução de um problema, podem ser formuladas em termos de soluções ou de demonstrações.

No entanto, são vários os estudos empíricos (Brocardo, 2001; Fonseca, 2000; Healy e Hoyles, 2000; Oliveira, 1998; Rodrigues, 1997; 2000; 2008) que evidenciam que os alunos, mesmo nesse tipo de contextos, atribuem o estatuto de conclusão às conjeturas que formulam, não sentindo necessidade de as testar nem de as demonstrar. Daí que o professor tenha um importante papel a desempenhar no desenvolvimento dessa necessidade bem como no desenho de situações didáticas conducentes a uma abordagem teórica da validade, baseada na demonstração (Balacheff, 2010).

É também fundamental que as afirmações matemáticas dos alunos não sejam avaliadas da sua validade de modo imediato pelo professor. Pelo contrário, essas afirmações deverão ser postas à consideração e discussão dos alunos para que sejam eles próprios a deter a responsabilidade de decidir acerca da sua validade através da demonstração, da refutação, de contraexemplos, etc. (Alibert e Thomas, 1991; Balacheff, 1991; Harel & Sowder, 2007; Schultz-Ferrel et al., 2007). "No one can claim to know without a commitment to and a responsability for the validity of the claimed knowledge" (Balacheff, 2010, p. 126). Na experiência de ensino documentada em Alibert e Thomas (1991), as demonstrações eram produzidas através das interações entre os alunos e eram endereçadas, não ao professor, mas aos outros colegas estudantes, visando o seu convencimento. Numa fase final deste processo de trabalho, as afirmações dos alunos validadas por demonstração tornavam-se teoremas enquanto as incorretas eram preservadas como afirmações falsas com um contraexemplo correspondente. Os autores afirmam que um dos resultados deste método de ensino foi de os alunos deixarem de encarar as ideias erradas como falhas para as verem como um evento científico normal e até produtivo. Neste contexto, a demonstração está ligada a motivos sociais de convencimento dos colegas acerca da validade de determinadas afirmações matemáticas, afirmações estas que decorrem de todo um trabalho exploratório conducente à formulação de conjeturas e à validação das mesmas (de Viiliers, 2004; Hanna, 2000).

Assim, um ambiente de aprendizagem em que seja comum os alunos explicitarem as suas formas de pensar e argumentarem e contra-argumentarem em torno dos seus raciocínios, ao invés de ser o professor a ajuizar sobre a correção de uma dada afirmação, proporciona que os alunos desenvolvam diferentes esquemas demonstrativos (Harel e Sowder, 2007; Schultz-Ferrel et al., 2007). É, pois, importante que o professor indague sempre sobre o porquê da resposta dada pelo aluno, seja ela correta ou incorreta (Schultz-Ferrel et al., 2007; Thompson, 1996), sem colocar na entoação da voz qualquer juízo avaliativo da mesma, e que direcione a discussão matemática para o seio da turma, levando os alunos a argumentar uns com os outros.

2. METODOLOGIA

Embora enquadramento filosófico e paradigma de investigação sejam coisas distintas, ambos se relacionam entre si, já que o modo de ver o mundo se relaciona com o modo de conhecer esse mesmo mundo. Campbell (1998) distingue-os referindo-se ao paradigma de investigação como as teorias e métodos através dos quais se obtém conhecimento acerca de determinadas coisas, e ao enquadramento filosófico como o conjunto particular de perspetivas filosóficas que estão subjacentes aos paradigmas de investigação. As perspetivas filosóficas estão ligadas aos valores, atitudes e crenças do investigador, envolvendo os motivos deste, os meios pelos quais é aplicado um paradigma de investigação e o modo como são interpretados os resultados. Assim, as convicções do investigador situam-se no âmbito da ontologia (isto é, da natureza do ser humano e da realidade), da epistemologia (isto é, da relação entre o investigador e o objeto de estudo) e da metodologia (isto é, do modo como podemos obter conhecimento acerca do mundo) (Denzin e Lincoln, 1994).

No paradigma de investigação interpretativo, de tipo qualitativo, o propósito central é a compreensão dos fenómenos sociais a partir das perspetivas dos participantes envolvidos e, para tal, o investigador tem de ficar imerso no fenómeno em estudo de forma a conseguir apresentar as definições da situação desses mesmos participantes (Bogdan e Biklen, 1991/1994; Firestone, 1987; Patton, 2002). "Para o investigador qualitativo divorciar o acto, a palavra ou o gesto do seu contexto é perder de vista o seu significado" (Bogdan e Biklen, 1991/1994, p. 48). Assim, este paradigma não lida com uma amostragem geral, podendo incidir o seu estudo numa pequena parte da população relacionada com o objeto de estudo já que o foco central deste tipo de investigação reside na interpretação de significados de ações locais e de processos decorridos em situações específicas (Erickson, 1986). Este paradigma de investigação está, pois, baseado numa filosofia fenomenológica, substancialmente distinta da filosofia positivista, uma vez que assume a existência de múltiplas realidades construídas socialmente e mediadas pela interpretação. De acordo com Merriam (1991), um fenómeno altamente subjetivo, como é a realidade construída em função da interação pessoal, necessita de ser interpretado em vez de medido. Nesta perspetiva, a verdade resulta de um acordo condicionado social e historicamente (Smith e Heshusius, 1986). O significado é, portanto, algo que é atribuído; não são os objetos ou as situações que têm um significado próprio. Segundo Smith e Heshusius (1986), numa investigação conduzida sob este paradigma, existe uma circularidade tanto no processo hermenêutico como no processo epistemológico por os mesmos não possuírem pontos de início e de chegada perfeitamente definidos e definitivos. Estes autores sustentam ainda que, no processo epistemológico, o investigador apenas pode oferecer interpretações das interpretações dos outros.

A metodologia adotada no estudo teve uma natureza interpretativa, visando a compreensão subjetiva dos modos de ser qualitativos que não podem ser quantificáveis, dada a respetiva adequação com a problemática investigada incidente na forma como os alunos constroem as suas demonstrações na aula de Matemática, na forma como validam as suas conjeturas e na forma como se relaciona essa mesma construção com a prática social desenvolvida em sala de aula. Trata-se, pois, de uma investigação que se centra sobretudo nos processos de ocorrência dos acontecimentos, partindo dos significados particulares dos alunos envolvidos no estudo. Por outro lado, só se torna possível abarcar a complexidade do fenómeno de validação do conhecimento por parte dos alunos, se estudarmos todos os seus componentes — natureza da validação, o papel da demonstração na aula de Matemática e a prática social — de uma forma holística já que todos eles se influenciam reciprocamente. Esta perspetiva de investigação em que os componentes de um fenómeno não podem ser estudados isoladamente é, precisamente, alcançada através de uma abordagem qualitativa (Merriam, 1991). Para além da fundamentação atrás apresentada, no que respeita à adequação da abordagem de investigação qualitativa relativamente ao problema em estudo, poderei ainda afirmar que o respetivo enquadramento filosófico subjacente está em consonância com as minhas próprias assunções acerca da realidade e com o modo de olhar para a noção de verdade. No entanto, o que sobretudo importa sublinhar é o facto de que, para a prossecução do objetivo do presente estudo, só uma abordagem de natureza qualitativa seria viável.

Os participantes no estudo foram uma turma de 9.º ano e a respetiva professora de Matemática. Era a única turma que a professora tinha de 9.º ano, e tratava-se de uma turma que não tinha sido sua nos anos anteriores, caracterizando-se, globalmente, no início do ano letivo, pela má relação com a Matemática, pela falta de hábitos de trabalho bem como pelas dificuldades de aprendizagem nesta disciplina. Os dados foram recolhidos durante o ano letivo de 2005/06, nas aulas de Matemática em que foram exploradas tarefas, escolhidas por mim e acordadas com a professora, num total de 15 blocos de 90 minutos. A professora usava, frequentemente, nas suas aulas, a modalidade de trabalho de grupo, pelo que a formação dos grupos foi feita no início do ano letivo, tendo a escolha da sua composição sido da responsabilidade dos alunos e mantida em todo o ano. De entre esses grupos de quatro alunos, foi selecionado um grupo para constituir o alvo da pesquisa e foi o trabalho desenvolvido pelo mesmo que foi videogravado. O critério de seleção do grupo foi o de ser um grupo caracterizado por os seus elementos habitualmente discutirem entre si as suas ideias, para facilitar o acesso às suas formas de raciocinar e ao modo como as mesmas evoluem em interação com os colegas. Se eu tivesse que os interrogar constantemente sobre os processos usados, ou tivesse que manter constantemente a minha presença junto do grupo, tal poderia traduzir-se numa excessiva intrusão da minha parte na dinâmica do grupo, o que retiraria a naturalidade à vivência usual do grupo e inter-relações entre os respetivos membros. Com o objetivo de observar os princípios éticos de anonimato dos alunos participantes no estudo, foram usados pseudónimos para os alunos do grupo-alvo selecionado e foi obtido consentimento informado de todos os intervenientes.

Foi utilizada a triangulação metodológica, tendo sido utilizadas as seguintes técnicas de recolha de dados: entrevistas semiestruturadas (à professora e a cada um dos elementos do grupo-alvo), videogravadas e realizadas no final do ano letivo, observação participante e naturalista, e análise de documentos. Utilizei entrevistas por querer aceder às perspetivas dos participantes, não captáveis pela observação direta (Merriam, 1991; Patton, 2002), com o propósito de recolher dados relativos às suas perspetivas pessoais sobre diversos domínios, incluindo a forma como os mesmos encaravam, no final do ano letivo, a demonstração na aula de Matemática. A opção pelo seu caráter semiestruturado deve-se ao facto de pretender obter uma certa informação dos participantes, tirando partido da possível inflexão para eventuais novas ideias, no âmbito dos tópicos abordados, ou da maior ou menor profundidade que os entrevistados pudessem dar às questões colocadas (Merriam, 1991). Conduzi uma observação aberta sem definir, rigidamente e *a priori,* os itens de observação, estando, portanto, disponível para captar o que pudesse emergir dessa observação e que tivesse relação com o objetivo do estudo, mesmo que tal não tivesse sido previsto por mim. No entanto, tanto a teoria como as questões impulsionadoras do estudo orientaram os processos de recolha e análise de dados. Os documentos utilizados como fontes de informação incluem: (a) os registos áudio e vídeo, (b) as notas de campo, e (c) os trabalhos de todos os alunos da turma escritos. De acordo com Merriam (1991), os materiais preparados pelo investigador poderão ser considerados documentos se os mesmos lhe possibilitarem refletir, mais tarde, acerca do fenómeno em estudo, ao fornecerem dados detalhados que são complementares aos obtidos por intermédio de outros métodos, como sejam a observação e a entrevista. É neste sentido que englobo como documentos os materiais que foram produzidos para os fins específicos da investigação, como é o caso dos registos áudio e vídeo e das notas de campo.

Na investigação de tipo qualitativo, a análise dos dados é feita, fundamentalmente, de forma indutiva, existindo o propósito de percorrer um processo de exploração e descoberta de aspetos emergentes da própria análise de dados. Nenhuma das questões do estudo foi convertida previamente em hipótese enformada por uma teoria preexistente a ser confirmada pela análise de dados, como acontece no paradigma positivista ao procurar confirmar uma dada teoria. Contudo, quer a dedução quer a indução estiveram presentes na análise qualitativa de dados (Brown e Dowling, 1998; Erickson, 1986; Merriam, 1991), uma vez que a dedução decorrente dos conceitos teóricos, enquanto instrumentos analíticos dos episódios empíricos, relacionou-se dialecticamente com a indução da análise de dados. A análise de dados foi feita essencialmente em três fases. A primeira fase coincidiu com o período de recolha de dados, tendo organizado os dados por tipo de material semelhante (Bogdan e Biklen, 1994). Na segunda fase, após a recolha de dados, procedi a uma redução dos dados e a análise ganhou profundidade, sendo ilustrada detalhadamente com transcrições e citações. Foi nesta fase que, através da identificação de padrões emergentes, foram geradas as categorias de análise, as quais além de descreverem os dados, já os interpretam (Merriam, 1991). As categorias analíticas foram essencialmente sugeridas pelas questões da investigação, e definidas, antecipadamente, com base na revisão da literatura, mas foram também geradas interativamente pelos dados, tomando assim uma especificidade descritiva dos mesmos: (a) formas de encarar diversos tipos de argumentos, (b) esquemas demonstrativos usados pelos alunos, (c) natureza da demonstração (forma algébrica ou narrativa), (d) funções da demonstração, (e) dificuldades na construção de demonstrações e (f) prática social da aula de Matemática. A terceira fase de análise foi uma fase de síntese, na qual foram criadas relações entre as diversas categorias analíticas na procura da compreensão global do fenómeno em estudo, em clara articulação com os conceitos teóricos.

3. APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DE ALGUNS RESULTADOS

Nesta secção, são descritos analiticamente dois episódios ilustrativos da forma como os alunos estabelecem a validação das suas conjeturas e da ação da professora no sentido de negociar a necessidade de demonstração.

3.1. Episódio *Soma de números pares*

Trata-se de um episódio que ocorreu na segunda aula observada. Os alunos foram confrontados com uma tarefa que incluía três situações diferentes de exploração com números, e cada grupo deveria explorar apenas uma das situações. A ficha apresentava uma tabela com três linhas, com as três situações, e duas colunas, a da esquerda, intitulada *Situação*, com a apresentação dos enunciados das situações, e a da direita, intitulada *Demonstração*, encontrava-se em branco, de modo a ser preenchida pelos alunos. A tarefa visava não só que os alunos chegassem a uma resposta à questão colocada mas também que provassem a sua veracidade para a generalidade dos números em causa. Assim, dois dos grupos da turma, incluindo o grupo-alvo, exploraram a seguinte situação: "Como é a soma de quaisquer números pares?". Após a distribuição das fichas pelos grupos, o Ricardo do grupo-alvo questionou a professora acerca do que se pretendia com a demonstração. Esta era a primeira aula em que os alunos contactavam com este termo e se confrontavam com o pedido explícito de elaborarem uma demonstração. E logo de imediato, a professora fez a leitura das três situações e negociou o sentido de *demonstração.*

Professora- Eu vou ler as três situações. Vá! Vamos acompanhar. E diz assim. Reparem que tem uma coluna que tem *situação* e tem outra que diz *demonstração*. (…), a Atividade 1 diz assim: "Como é a soma de quaisquer números pares?" Eu estou a falar de um número em especial?

Alunos - Não.

Professora- Não. Quaisquer é mesmo isso. Eu posso pensar… Por exemplo, um número par…

Aluno – Dois.

Professora- Dois. Posso pensar…

Alunos –(*dizem exemplos de vários números pares)*

Professora- Quatro. Posso pensar… Por aí fora, não é? Não interessa aquele em que eu pensei. Interessa é, para quaisquer números pares, como vai ser a soma desses dois?

Ricardo- Ahhhh! (*impercetível; dá pulinhos no lugar de contentamento, mostrando ter percebido*)

Professora- E vão pensar, podem pensar também para alguns específicos se isso vos der alguma ajuda. Mas depois para quaisquer, tá [sic] bem?

(…)

Professora- (*começa a ler a Atividade III)* O que é que se pode dizer — isto é a três — acerca do número que resulta quando se subtrai um do quadrado de um número ímpar?

Aluna - Dá sempre… par.

Professora– Não sei. É isso que se pretende. Ela perguntou assim: será que dá sempre um número par? Já está a pensar: isto fez-me lembrar que se calhar vai acontecer dar sempre número par.

Aluno – Não.

Professora Será verdade? Então, vamos ver. E se pensam que é verdade ou não que eu quero que cheguem, tá [sic] bem? Então, vá, vamos começar a trabalhar.

A generalidade, característica essencial da demonstração, foi negociada pela professora através do recurso à leitura da primeira atividade, quando a mesma chama a atenção para o facto de a atividade não colocar a questão em torno de números pares particulares mas sim de quaisquer números pares, o que implica associar inequivocamente a generalização à demonstração. A professora recorre à particularização quando pede exemplos concretos de números pares e quando a aponta como recurso para ajudar a pensar acerca de uma questão geral — "podem pensar também para alguns específicos se isso vos der alguma ajuda. Mas depois para quaisquer". O processo de conjeturação é também abordado pela professora a propósito da conjetura formulada por uma aluna — "Dá sempre… par". A aluna manifesta o que pressentiu ser verdadeiro; a pausa que fez revela a procura nesse instante de um padrão; por outro lado, o seu tom de voz não é revelador de total convicção. A professora mantém a conjetura da aluna com esse estatuto pois demite-se de a validar: "Não sei". Mas, de imediato, reforça a ideia que a tarefa visa que os alunos passem por este processo — "É isso que se pretende" — caracterizado pela expressão de um padrão identificado — "vai acontecer dar sempre número par" — e pela averiguação da veracidade da afirmação expressa — "Será verdade? Então, vamos ver". Por fim, a professora negoceia a função de verificação da demonstração quando coloca a fase de demonstração, como a fase seguinte à da conjeturação e objetivo último da tarefa, pela qual os alunos deverão estabelecer a veracidade das afirmações conjeturadas antes: "E se pensam que é verdade ou não que eu quero que cheguem".

No entanto, apesar da negociação inicial da professora em torno do significado de demonstração, os alunos da turma dariam o trabalho por concluído sem qualquer tentativa de elaboração de demonstração. Todos os grupos, perante as várias situações gerais que lhes eram colocadas, estudaram-nas através da particularização. Nenhum dos grupos sentiu necessidade de efetuar uma demonstração que estabelecesse a verdade da conclusão geral enunciada para o universo em causa. Os exemplos particulares foram suficientes para que os alunos tivessem total convicção acerca das generalizações que formularam, tendo usado, portanto, esquemas demonstrativos empíricos indutivos, baseados num número reduzido de exemplos (por exemplo, o grupo-alvo usou apenas quatro exemplos). Tal facto levou a uma nova intervenção da professora, ao longo da exploração da tarefa, conforme se pode verificar no seguinte extrato do seu diálogo com o grupo-alvo:

Ricardo- É sempre, sempre. Sempre. Se é número par, é divisível por dois.

Professora- Então, vá, vamos lá, uma maneira de provar às outras pessoas que isso seja, quaisquer que forem os números que sejam envolvidos, isso que vocês estão a pensar que vai acontecer… Como é que hão de provar isso?

Ricardo – Por exemplo, seis mais seis igual a doze; doze a dividir por dois é seis…

(…)

Professora- É sempre específico, não é? É sempre um específico, não é? Quando vocês agarram num número e escrevem cada um já estão a particularizar, não estão? Tentem lá escrever isso, um número que não seja particular, uma maneira de escrever que vocês falem mas que não trate dum caso específico, que fale dos números todos nessas condições. O que é que nós usamos na Matemática para falar de todos?

A professora negoceia a necessidade da demonstração — " Como é que hão de provar isso?" — apelando a uma representação algébrica da situação em causa — " Tentem lá escrever isso, um número que não seja particular, uma maneira de escrever (…) que fale dos números todos nessas condições". Como resposta a este apelo, verifica-se uma tentativa de demonstração no trabalho do grupo-alvo:

$\frac{p}{2}$ = números pares divisíveis por 2

$\frac{p}{2} + \frac{p}{2} = \frac{2p}{2}$

Conclusão: a soma de quaisquer números pares vai dar sempre número par, divisível por 2.

Neste registo, verificamos que ao ser assumido *p* como um número par, a expressão $\frac{p}{2}$ parte do número par, descrevendo a sua característica de ser divisível por dois, e consequentemente gera a sequência dos números naturais. É um registo descritivo da propriedade verbalizada pelo Ricardo: "Se é número par, é divisível por dois". A dificuldade em exprimir simbolicamente a estrutura funcional de um número par contribuiu também para a dificuldade na elaboração da demonstração. A obtenção de uma expressão geradora de número par poderia ter sido facilitada pela explicitação de que ser divisível por dois é o mesmo que ser múltiplo de dois, pelo entendimento da divisão e da multiplicação como inversas uma da outra. Por outro lado, se atentarmos nas três características de um esquema demonstrativo dedutivo tarnsformativo, tal como definidas por Harel e Sowder (2007) — generalidade, pensamento operacional e inferência lógica — verificamos que o pensamento operacional teria sido essencial para a consecução da construção do mesmo. Este tipo de pensamento envolve a formação de objetivos e subobjetivos, bem como a antecipação dos seus resultados durante o processo. Efetivamente, teria sido fundamental a clarificação, por parte dos alunos, de que deveriam obter como resultado da demonstração algébrica, uma expressão que revelasse uma estrutura de produto com o fator dois. Seria essa antecipação que os poderia guiar no processo demonstrativo.

3.2. Episódio *Soma das amplitudes de ângulos opostos de um quadrilátero cíclico*

Face à tarefa "Construam um quadrilátero inscrito numa circunferência (todos os seus vértices pertencem à circunferência). O que poderão dizer acerca da soma das amplitudes dos ângulos opostos desse quadrilátero?", o grupo-alvo enveredou por uma demonstração narrativa e informal, apresentando um raciocínio em que relaciona a amplitude do ângulo inscrito com a do arco contido pelo mesmo:

Todos os ângulos opostos dos quadriláteros inscritos numa circunferência somados dão 180°, pois os arcos correspondentes aos ângulos inscritos de cada vértice dão sempre 360°, logo a soma dos dois ângulos inscritos é metade da soma dos seus arcos correspondentes, logo dão sempre 180°.

Os alunos partiram de uma propriedade já aprendida antes e portanto estabelecida como verdadeira — a da relação entre a amplitude do ângulo inscrito e a do arco que o ângulo contém — para deduzir uma outra propriedade relativa à soma dos ângulos opostos de um quadrilátero cíclico através da mesma relação: a soma das amplitudes dos ângulos opostos (inscritos) é também metade da soma das amplitudes dos arcos contidos nos referidos ângulos. Como os dois arcos formam a circunferência, a sua amplitude é conhecida dos alunos, e portanto, estes determinam a metade de 360° como sendo sempre a soma das amplitudes dos ângulos opostos de um quadrilátero inscrito na circunferência. Os alunos conseguem, portanto, por via narrativa, estabelecer uma propriedade matemática para a generalidade do universo em causa. Se analisarmos este mesmo registo escrito, vemos como a generalização está aí bem explícita: "Todos os ângulos opostos"; "logo dão sempre 180°". A soma das amplitudes dos ângulos é constante, seja qual for o ângulo em causa, já que também é constante a soma das amplitudes dos dois arcos, que unidos, formam sempre uma circunferência. Podemos decompor a demonstração efetuada pelos alunos nos três elementos constitutivos de um argumento, à luz do modelo de Toulmin (1969):

Dados
Se tivermos
2 ângulos opostos de um quadrilátero cíclico
e 2 arcos correspondentes aos ângulos

Conclusão
Então a soma das amplitudes dos ângulos opostos de um quadrilátero cíclico é 180°.

Garantia
Porque a amplitude do ângulo inscrito é metade da amplitude do arco que o ângulo contém.

Figura 1. Estrutura da demonstração do grupo-alvo

Vejamos agora, mais detalhadamente, como se processou o desenvolvimento do raciocínio, no seio do grupo-alvo, conducente à produção escrita, citada atrás. Numa primeira abordagem, os alunos deste grupo, assim como outros três grupos da turma, começaram por desenhar um quadrado.

Bernardo- Meter um quadrado lá dentro.

Sara- Tem de ser um quadrado, para bater tudo nos vértices…

Pelas afirmações dos alunos, podemos inferir que estão a considerar que o único quadrilátero que se poderia inscrever na circunferência seria o quadrado, possivelmente por se tratar de um quadrilátero cujos vértices estão a igual distância. A consideração inicial e única do quadrado, como quadrilátero possível de se inscrever numa circunferência, comprometia toda a intencionalidade da tarefa, já que, neste caso, a conclusão da soma das amplitudes dos ângulos opostos decorreria da invariância dos mesmos (ângulos retos) e não do estabelecimento de qualquer tipo de raciocínio dedutivo. Ou seja, a conclusão seria completamente independente do facto de o mesmo se encontrar inscrito na circunferência. E deixaria sem resposta se esta soma apenas diria respeito a este quadrilátero concreto ou se se aplicaria igualmente à generalidade dos quadriláteros inscritos numa circunferência. Por este motivo, incitei os alunos da turma a construírem outros quadriláteros distintos do quadrado. Após a minha intervenção, a Sara apagou o quadrado e os elementos do grupo construíram um outro quadrilátero inscrito na circunferência com ângulos distintos do reto.

Apesar de o registo do grupo-alvo incidir na relação entre a amplitude do ângulo inscrito e a do arco contido pelo mesmo, não foi esta a relação pela qual iniciaram o seu raciocínio, mas sim a relação entre as amplitudes do ângulo inscrito e do ângulo ao centro. Segue-se o extrato transcrito deste momento do trabalho do grupo:

Ricardo (*falando em direção à Sara*)- Se fosse um quadrado, dava cento e oitenta.

Maria- (*impercetível*)

Ricardo- Pode não ser. Não sabemos. *(pausa)* Já sei… Vou procurar uma coisa. (*pega no seu caderno que estava na sua mesa atrás e folheia-o várias vezes para a frente e para trás*). Não encontro!... (*larga o caderno*) É assim… (*olha para a Sara*) Ângulo… Ângulo ao centro… (*aponta para a folha de papel*) É vértice aqui. (*a Maria aponta também*)

Sara- (*impercetível)*

Ricardo- Deixa-me... (*leva as mãos à cabeça*) Deixa-me pensar.

Sara- Não tem nada a ver.

Ricardo- Tem! Tem!

Sara- Como? Explica.

Ricardo- Lembra-te que o ângulo inscrito é sempre metade do ângulo ao centro. Então…

Face ao desconhecimento das amplitudes concretas dos ângulos opostos do quadrilátero, o Ricardo intuiu que seria necessário aplicar alguma propriedade aprendida anteriormente, de modo a relacionar a generalidade dos ângulos naquelas condições, e não unicamente as amplitudes particulares dos ângulos opostos do quadrilátero específico que tinham traçado. Daí que ninguém no grupo se tivesse lembrado de usar o transferidor e medir aqueles ângulos específicos. Ao invés, o Ricardo socorreu-se do recurso do caderno e folheou-o numa tentativa de encontrar uma propriedade relacionada com ângulos em circunferências, já que o quadrilátero estava inscrito numa circunferência. Já tinha passado algum tempo, desde que tinham trabalhado aquele assunto. Aquela era a primeira aula do 3.º Período e as férias da Páscoa poderiam justificar um certo esquecimento. Ao não encontrar o pretendido, o Ricardo, mesmo assim, conseguiu, após algum esforço — “Deixa-me pensar” — enunciar corretamente a propriedade procurada: “o ângulo inscrito é sempre metade do ângulo ao centro”. Vejamos o extrato seguinte:

Maria- Não percebi nada.

Ricardo- Dá-me uma régua. Preciso de uma régua! (*traça na folha o diâmetro da circunferência com o auxílio da régua*)

Sara- O que é que estás a fazer, Silva?

Ricardo- Pensa. Ângulo ao centro… (*passa com os dedos por cima do traçado da circunferência)* trezentos e sessenta, certo? O ângulo inscrito… O ângulo inscrito é sempre metade do ângulo ao centro.

Sara (*fazendo coro com o Ricardo*)- sempre metade desse ângulo ao centro.

Ricardo (*falando diretamente para a Sara e apontando no papel para os pontos da circunferência intersetados pelos ângulos inscritos*)- Então, daqui até aqui é noventa. Daqui para aqui é noventa. Noventa mais noventa é cento e oitenta. Percebeste?

Sara- Não.

Ricardo- Então, descobrimos que a soma dos ângulos opostos é sempre cento e oitenta.

Sara- Não.

Ricardo- Tou [sic] a brincar. Não é assim.

(…)

Sara- Não. Nenhum deles está direitinho. Para ser direitinho, para ser noventa graus, (*traça no papel com o lápis*) tinha de estar aqui.

Ricardo- (*falando ao mesmo tempo que a Sara)* Ya. Eu sei.

O que nenhum dos elementos do grupo conseguiu foi, partindo do enunciado dessa relação, raciocinar no sentido de obter a soma dos ângulos opostos do quadrilátero. O Ricardo viu que a soma das amplitudes dos dois ângulos ao centro era 360º: "Ângulo ao centro… trezentos e sessenta, certo?". O seu gesto de passar com os dedos por cima da circunferência evidencia a sua compreensão de que a soma das amplitudes é a mesma da circunferência. Estava, portanto a um passo de estabelecer a última conclusão dedutiva. Não o fez, provavelmente, porque partiu duma assunção errada de ângulo ao centro correspondente a ângulo inscrito. O diâmetro, traçado, pelo Ricardo, na horizontal, foi apagado, posteriormente, mas na folha de papel ainda se consegue observar o respetivo vestígio, não visível contudo na Figura 2, cuja imagem resulta da digitalização que fiz do trabalho dos alunos.

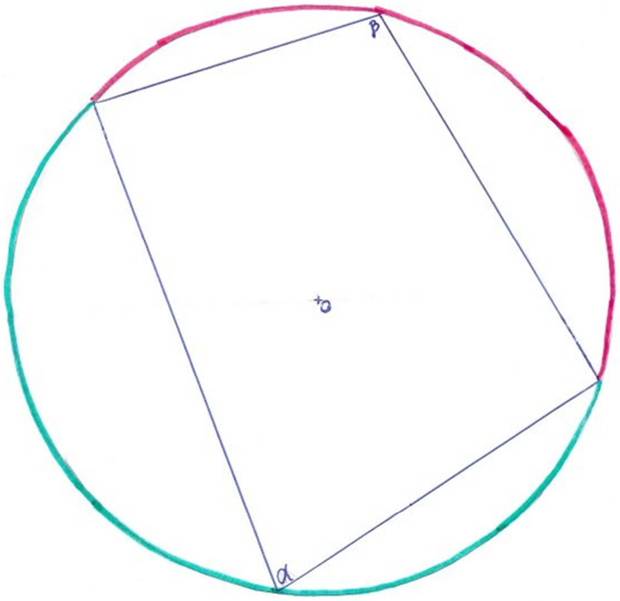

Figura 2. Quadrilátero inscrito na circunferência representado pelo grupo-alvo

O facto de o Ricardo ter traçado o diâmetro como representação de ângulo ao centro evidencia que reteve deste conceito o facto de o vértice do ângulo ao centro ser coincidente com o centro da circunferência, tendo sido esta a característica que verbalizou no seio do grupo: "É vértice aqui.". No entanto, não mobilizou o facto de que só poderia relacionar a amplitude do ângulo inscrito com a do ângulo ao centro, se os mesmos fossem correspondentes. Esta questão não chegou a ser discutida no grupo: ninguém questionou aquela representação de ângulo ao centro. Assim, partindo do diâmetro que formava dois ângulos ao centro de igual amplitude — 180º — o Ricardo concluiu que cada ângulo inscrito mediria metade desse valor, ou seja, 90º. Ao ser contestado pela Sara — "Não" —, o Ricardo deu-lhe razão — "Não é assim.". A justificação, enunciada pela Sara, fundamenta-se na perceção das amplitudes, referentes aos ângulos inscritos: "Não. Nenhum deles está direitinho. Para ser direitinho, para ser noventa graus, tinha de estar aqui.". A Sara afirma que nenhum dos ângulos inscritos é de 90º, baseando-se unicamente na observação dos próprios ângulos que, perceptivamente, são distintos de ângulos retos (esquema demonstrativo empírico percetivo).

Apesar de o Ricardo ter começado a relacionar as amplitudes do ângulo ao centro e do ângulo inscrito, o grupo acabou por abandonar esta ideia, ao não conseguir estabelecer uma dedução dessa relação que o levasse à descoberta da propriedade questionada. Foi por perceber que estavam num impasse que o Bernardo decidiu chamar a professora. Esta, desconhecendo o que já tinham pensado os alunos antes, uma vez que o Ricardo optou por nada dizer a esse respeito, acabou por os orientar para as amplitudes dos arcos, influenciando, assim, o rumo do raciocínio dos alunos do grupo. Ao assinalarem as extremidades dos arcos, o Bernardo assinalou a extremidade esquerda do diâmetro como sendo a extremidade do arco correspondente ao ângulo β, tendo sido corrigido pela professora, enquanto apontava para as extremidades do arco: "Não! É desta ponta a esta.". Logo de imediato, o Ricardo exclamou "Já sei!" e a professora olhou e sorriu para ele. A Maria fez o registo diferenciado dos arcos, passando por cima do traçado de cada um com canetas de diferentes cores. Começou por traçar a caneta o arco correspondente ao ângulo β.

Quando o Ricardo exclama "Já sei!", manifesta o insight que teve no momento em que a professora apontou para o arco maior, desde uma extremidade à outra. Momentos antes, ele próprio tinha acompanhado esse arco com a régua. Precisou de algum distanciamento para ver a união dos dois arcos — "Stora, isto tudo é trezentos e sessenta." — e perceber a relação com a soma das amplitudes dos dois ângulos inscritos correspondentes aos arcos. Apesar de antes, raciocinando com os ângulos ao centro, também ter referido a sua soma como sendo de 360°, o facto de os mesmos não corresponderem aos ângulos inscritos e terem sido traçados como medindo cada um 180°, fez com que se tivesse fixado nesta amplitude específica e ter ignorado a sua soma e o modo como esta se poderia relacionar com a soma das amplitudes dos ângulos inscritos. Analisemos o extrato do momento seguinte ao *insight* do Ricardo expresso em "Já sei!":

Ricardo- Stora, isto tudo é trezentos e sessenta.

Professora- (*levantando-se numa atitude de se afastar do grupo*) Agora escrevam, escrevam que vocês estão habituados a escrever, tá [sic] bem? Para ficar provado, demonstrado que aquilo que tão [sic] a pensar é correto.

A professora afasta-se do grupo.

Ricardo- (*dirigindo-se à Sara)* Então, é assim. Ouve-me! Ouve-me, ouve-me! Senão, eu passo-me! (*leva as mãos à cabeça)*

Sara- Calma!...

Ricardo- Isto tudo dá trezentos e sessenta. (*aponta sucessivamente para cada um dos ângulos inscritos e respetivos arcos correspondentes)* O arco deste ângulo aqui é este. O arco deste ângulo é este.

A Maria passa a caneta por cima do arco menor, compreendido entre os lados do ângulo α

Ricardo- Isto dá tudo trezentos e sessenta. Certo? (*olha para a Sara*)

Sara e Maria- (*em uníssono*) Sim!...

Ricardo- Calma!... Dá trezentos e sessenta, tudo junto.

A Maria apaga o traçado do diâmetro.

Ricardo- Vou usar coisas relativas, ok? Vou usar ângulos relativos. A gente não sabe, faz de conta que aqui é cem (*regista o número perto do arco menor)*, este aqui é duzentos e sessenta (*escreve o número ao pé do arco maior)*. O ângulo inscrito, este (*aponta para o ângulo β*) é sempre metade de duzentos e sessenta, logo… é…

Bernardo- Cento e trinta.

Ricardo- (*fazendo um gesto de concordância em direção ao Bernardo)* Tá [sic] certo!

Sara- Não percebi o que disseste.

Maria- Explica lá outra vez.

Ricardo- (*olhando para a Sara)* Isto é o ângulo inscrito (*aponta para o ângulo β).* O arco do ângulo inscrito é sempre o dobro. Logo, este ângulo inscrito é metade de duzentos e sessenta, porque o arco é o dobro. Dá números relativos só para tentar perceber. Então, é cento e trinta, certo? (*escreve "130" ao pé do ângulo β*) E este aqui é sempre metade, é cinquenta (*regista "50" na folha de papel ao pé do ângulo α).*

Sara- *(fazendo coro com o Ricardo)* Cinquenta.

Ricardo- Cento e trinta mais cinquenta dá cento e oitenta. (*a professora aproxima-se)* Logo, é cento e oitenta. Seja qual for.

Sara- (*pondo uma mão na fonte da cabeça)* É cento e oitenta, como?

Quando a professora se afastou, o Ricardo tentou, de imediato partilhar o seu *insight* com os colegas do grupo, embora se tivesse dirigido sempre, mais intencionalmente, à Sara, como era seu hábito. A compreensão súbita do Ricardo fundamenta-se numa generalização que relaciona a soma das amplitudes de quaisquer ângulos inscritos de qualquer quadrilátero inscrito numa circunferência com a soma das amplitudes dos respetivos arcos correspondentes. O discurso oral do Ricardo, no grupo, visava a comunicação do que tinha descoberto e que ainda não tivera oportunidade de explicitar nem por escrito nem oralmente. Mas, apesar de o seu raciocínio se ter desenvolvido com base em relações gerais, não o apresentou desse modo aos colegas. Ou seja, não usou a demonstração para comunicar oralmente o seu pensamento. Fê-lo por meio da particularização. A particularização que o Ricardo fez com exemplos concretos de amplitudes de arcos serviu, pois, o único propósito de se fazer compreender pelos colegas. Considerou que o uso de exemplos poderia ajudar a entender o seu raciocínio: "Dá números relativos só para tentar perceber.". Vemos portanto que, neste caso, a particularização não antecedeu a generalização, tendo sido usada como recurso de comunicação. O Ricardo partiu do princípio de que, se os colegas conseguissem perceber a relação com exemplos particulares, facilmente dariam o salto para generalizar para qualquer ângulo. No entanto, apesar da particularização usada pelo Ricardo como forma de facilitar a sua comunicação, este não foi bem sucedido nos seus intentos. E o entendimento da relação dedutiva encontrada pelo Ricardo só foi cabalmente conseguido com nova intervenção nesse sentido da professora, ao chamar a atenção para a soma dos dois arcos, intervenção esta posterior ao extrato transcrito atrás. Assim, na comunicação oral que o

Ricardo fez no seio do grupo, o mesmo optou por usar a particularização como recurso de ilustração, de elucidação do seu pensamento, e ganho de compreensão por parte dos colegas, apesar de a particularização ter estado ausente na génese da demonstração e no modo súbito como o Ricardo compreendeu a relação geral. No momento seguinte de interação entre a professora e o grupo, tanto o Ricardo como a professora exprimiram-se por meio da demonstração, parecendo que uma comunicação, baseada unicamente numa relação geral, teria sido mais efetiva do que uma comunicação que visava chegar a uma relação geral, por intermédio de exemplos particulares.

Nesta tarefa, a demonstração permitiu descobrir uma dada propriedade matemática — a da soma das amplitudes dos ângulos opostos de um quadrilátero inscrito numa circunferência — estabelecendo a respetiva veracidade e explicando a razão por que é a mesma verdadeira, simultaneamente. Por outro lado, foi por meio dela que os alunos comunicaram, por escrito, a descoberta dessa nova propriedade, usando um discurso narrativo habitual na sua forma de comunicar os raciocínios desenvolvidos na aula de Matemática. Assim, nesta tarefa desenvolvida em contexto escolar, a demonstração teve quatro funções: a da verificação, a da explicação, a da descoberta e a da comunicação. Neste caso, a convicção não foi obtida pela testagem em diversos exemplos particulares (esquema demonstrativo empírico). Efetivamente, o quadrilátero construído, em segundo lugar, (sem ângulos retos opostos) passa a ser encarado como objeto do pensamento, geral e abstrato: deixa de ser olhado na sua particularidade. A forma de raciocinar, usando uma relação entre qualquer ângulo inscrito com o arco que o mesmo contém, fez com que os alunos raciocinassem em termos gerais, e não sentissem necessidade de qualquer tipo de verificação empírica. Assim, por meio da demonstração, conseguiram descobrir uma propriedade e, simultaneamente, verificá-la quanto à sua veracidade para a generalidade dos casos. A descoberta da solução da tarefa constitui, ela própria, um meio de produção de novo conhecimento e ao mesmo tempo, o processo demonstrativo fundado numa inferência lógica relativamente a objetos matemáticos gerais.

4. A CONCLUIR

Os resultados do presente estudo mostram que os alunos tendem a apoiar-se em exemplos particulares não só para estabelecer as suas conjeturas, como também a verdade acerca dessas afirmações gerais, constituindo para eles um meio de validação, usando, portanto, esquemas demonstrativos empíricos indutivos, tal como se encontra documentado no episódio *Soma de números pares*. Estes resultados são convergentes com o que tem sido vastamente documentado por inúmeros estudos empíricos.

Mostram também que em tarefas geométricas, cuja resolução esteja ancorada em objetos matemáticos assumidos na sua generalidade, os alunos evidenciam uma maior facilidade na construção de um raciocínio dedutivo expresso de um modo narrativo e informal, tal como se documentou atrás no episódio *Soma das amplitudes de ângulos opostos de um quadrilátero cíclico.* Neste episódio, o esquema demonstrativo dedutivo aglutina, de um modo simultâneo e não faseado, múltiplas funções: descoberta, verificação, explicação, e comunicação. Ao conjugar as funções de descoberta e de verificação num passo único, o esquema demonstrativo dedutivo transformativo fica destituído da característica de pensamento operacional, uma vez que os alunos não chegam a conjeturar, não possuindo, portanto, à partida, qualquer ideia sobre o que virão a demonstrar, ficando, por conseguinte, impossibilitados de antecipar os resultados da demonstração. O esquema elaborado pelos alunos serviu de andaime ao seu pensamento, assumindo um papel ilustrador da classe geral de todos os quadriláteros naquelas condições.

Na atividade de validação dos alunos, existiram motivos cognitivo-sociais (Harel e Sowder, 2007; Leont'ev, 1978), e os processos de verificação para si próprio e de persuasão para os outros ocorreram em conjunção durante a fase de conjecturação, no primeiro episódio, em que os exemplos foram usados pelos alunos para se convencerem da veracidade da conjetura formulada (esquema demonstrativo empírico indutivo), o que é consonante com o afirmado por Harel e Sowder (2007), e também separadamente, no segundo episódio, em que a atividade de autoconvicção, protagonizada pelo Ricardo na elaboração do esquema demonstrativo dedutivo, foi anterior à de persuasão, o que é convergente com os resultados de Fonseca (2004). Neste caso, estas duas atividades têm fundamentos diferentes, já que a de verificação para si próprio foi suportada unicamente por relações dedutivas e gerais, focadas nas propriedades matemáticas, enquanto a de persuasão foi ancorada em exemplos particulares usados como recursos comunicativos e ilustrativos dessas mesmas relações gerais. Assim, não existe evidência de relação entre a prática social e o raciocínio dedutivo desenvolvido pelo Ricardo, já que este foi alcançado, individualmente, e por *insight*. É durante o processo de persuasão, desenvolvido no seio do grupo, através da comunicação e partilha desse mesmo raciocínio demonstrativo, que os significados matemáticos são negociados e vai existindo um crescimento progressivo da posse de significado, relativamente à demonstração efetuada, em todos os elementos do grupo. Assim, apesar de a origem da demonstração se colocar a título individual, ela é depois assumida enquanto prática social do grupo (Wenger, 1998).

Sendo necessária uma intervenção curricular forte no sentido da introdução da demonstração no trabalho escolar e da negociação da sua importância, já que os alunos não podem ser deixados entregues a si próprios para construírem os modos de validação aceitáveis em educação matemática (Yackel e Cobb, 1996), a professora detém um papel fundamental e decisivo nesse processo, ao assumir-se como representante de valores culturais próprios da matemática. É a professora que, na qualidade de mediadora cognitiva e cultural, vai negociando, de uma forma progressiva, com os seus alunos, o estatuto de uma conjetura, a necessidade de procederem a uma demonstração, o estatuto da verificação empírica no que respeita à validação das afirmações matemáticas, e o significado de uma demonstração matemática. Em particular, o hábito de a professora se demitir de validar e legitimar as conclusões dos alunos, quando estes ainda se encontram numa fase de exploração da tarefa, faz com que os alunos não tendam a validar as suas afirmações baseando-se na autoridade da professora (esquema demonstrativo autoritário de convicção externa). O caráter antiautoritário da demonstração (Hanna, 1996) encontra-se bem patente na forma convicta como o Ricardo assumiu a sua descoberta, no segundo episódio, dispensando qualquer tipo de legitimação da professora.

A importância da demonstração enquanto instrumento ao serviço de uma maior compreensão matemática (Balacheff, 2010; Herbst e Balacheff, 2009) e a centralidade da ação curricular do professor no que respeita à aprendizagem da demonstração pelos alunos remetem-nos para a inclusão desta vertente na agenda da formação de professores dos vários níveis de ensino, incluindo o ensino básico. Defender a integração curricular da demonstração é, pois, assumir que a demonstração é algo que se espera que a escola faça aprender, objeto da intencionalidade educativa em todas as fases de desenvolvimento do currículo.

REFERÊNCIAS

Alibert, D., & Thomas, M. (1991). Research on mathematical proof. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 215-230). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Balacheff, N. (2010). Bridging knowing and proving in mathematics: A didactical perspective. In G. Hanna, H. N. Jahnke, & H. Pulte (Eds.), *Explanation and proof in mathematics: Philosophical and educational perspectives* (pp. 205-221). New York: Springer.

Balacheff, N. (1991). The benefits and limits of social interactions: The case of mathematical proof. In A. Bishop, S. Mellin-Olsen e J. van Dormolen (Eds.), *Mathematical knowledge: Its growth through teaching* (pp. 175-192). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Boavida, A. (2005). *A argumentação em Matemática: Investigando o trabalho de duas professoras em contexto de colaboração.* Tese de doutoramento apresentada à Universidade de Lisboa, Lisboa.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora. (Obra original em inglês publicada em 1991)

Brocardo, J. (2001). *As investigações na aula de Matemática: Um projecto curricular no 8º ano.* Tese de doutoramento apresentada à Universidade de Lisboa, Lisboa.

Brown, A., & Dowling, P. (1998). *Doing research/reading research: A mode of interrogation for education.* London: The Falmer Press.

Campbell, S. (1998). *Preservice teachers' understanding of elementary number theory: Qualitative constructivist research situated within a kantian framework for understanding educational inquiry.* Tese de doutoramento apresentada à Universidade Simon Fraser, Burnaby.

Chazan, D. (1993). High school geometry students' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics, 24*(4), 359-387.

Chazan, D., & Lueke, M. (2009). Exploring relationships between disciplinary knowledge and school mathematics: Implications for understanding the place of reasoning and proof in school mathematics. In D. Stylianou, M. Blanton e E. Knuth (Eds.), *Teaching and learning proof across the grades: A K-16 perspective* (pp. 21-39). New York: Routledge.

De Villiers, M. (2010). Experimentation and proof in mathematics. In G. Hanna, H. N. Jahnke, & H. Pulte (Eds.), *Explanation and proof in mathematics: Philosophical and educational perspectives* (pp. 205-221). New York: Springer.

De Villiers, M. (2004). The role and function of quasi-empirical methods in mathematics. *Canadian Journal of Science,* 397-418.

De Villiers, M. D. (2001). Papel e funções da demonstração no trabalho com o Sketchpad. *Educação e Matemática, 63*, 31-36.

Denzin, N., & Lincoln, Y. (1994). Introduction: Entering the field of qualitative research. In N. Denzin e Y. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 1-17). Newburry Park: Sage.

DGIDC (2007). *Programa de Matemática do ensino básico.* Lisboa: Departamento da Educação Básica. Ministério da Educação.

Duval, R. (1991). Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(3), 233-261.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (3ª ed.). New York: Macmillan.

Firestone, W. A. (1987). Meaning in method: The rhetoric of quantitative and qualitative research. *Educational Researcher, 16*(7), 16-21.

Fonseca, H. (2000). *Os processos matemáticos e o discurso em actividades de investigação na sala de aula.* Tese de mestrado apresentada à Universidade de Lisboa, Lisboa.

Fonseca, L. (2004). *Formação inicial de professores de Matemática: A demonstração em geometria* (tese de doutoramento, Universidade de Aveiro). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Guimarães, H. (2003). *Concepções sobre a Matemática e a actividade matemática: Um estudo com matemáticos e professores do ensino básico e secundário* (tese de doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Hanna, G. (1996). The ongoing value of proof. In L. Puig e A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 21-34). Valencia: Universitat de Valencia.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics*, *44*(1-2), 5-23.

Hanna, G., & Jahnke, H. N. (1993). Proof and application. *Educational Studies in Mathematics,* 24, 4, 421-438.

Hanna, G., & Jahnke, H. N. (1999). Using arguments from physics to promote understanding of mathematical proofs. In O. Zaslavsky (Ed.). *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 73-80). Haifa: Israel Institute of Technology.

Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 805-842). Charlotte: Information Age Publishing Inc., & NCTM.

Healy, L., & Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31*(4), 396-428.

Herbst, P., & Balacheff, N. (2009). Proving and knowing in public: The nature of proof in a classroom. In D. Stylianou, M. Blanton e E. Knuth (Eds.), *Teaching and learning proof across the grades: A K-16 perspective* (pp. 40-63). New York: Routledge.

Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics, 24*(4), 389-399.

Hersh, R. (1997). *What is mathematics, really?* New York: Oxford University Press.

Jahnke, H. N. (2010). The conjoint origin of proof and theoretical physics. In G. Hanna, H. N. Jahnke, & H. Pulte (Eds.), *Explanation and proof in mathematics: Philosophical and educational perspectives* (pp. 17-32). New York: Springer.

Leont'ev, A. (1978). *Activity, consciousness and personality.* New Jersey: Prentice Hall.

Machado, S. (2005). *A demonstração matemática no 8.º ano no contexto de utilização do Geometer´s Sketchpad.* Tese de mestrado apresentada à Universidade de Lisboa, Lisboa.

Martins, C., Maia, E., Menino, H., Rocha, I., & Pires, M. V. (2002). O trabalho investigativo nas aprendizagens iniciais da matemática. In J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo e A. F. Dionísio (Eds.), *Actividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores* (pp. 59-81). Lisboa: Secção de Educação e Matemática da Sociedade Portuguesa da Ciências da Educação.

Merriam, S. (1991). *Case study research in education: A qualitative approach* (2ª ed.). São Francisco: Jossey-Bass Publishers.

Nunokawa, K. (2010). Proof, mathematical problem-solving, and explanation in mathematics teaching. In G. Hanna, H. N. Jahnke, & H. Pulte (Eds.), *Explanation and proof in mathematics: Philosophical and educational perspectives* (pp. 223-236). New York: Springer.

Oliveira, H. (1998). *Actividades de investigação na aula de Matemática: Aspectos da prática do professor.* Tese de mestrado apresentada à Universidade de Lisboa, Lisboa.

Pacheco, J. (2001). *Currículo: Teoria e práxis* (2ª ed.). Porto: Porto Editora.

Patton, M. (2002). *Qualitative research & evaluation methods* (3ª ed.). Thousand Oaks: Sage.

Pea, R. (1993). Practices of distributed intelligence and designs for education. In G. Salomon (Ed.), *Distributed cognitions: Psychological and educational considerations* (pp. 47-87). Cambridge, Massachusetts: Cambridge University Press.

Recio, A., & Godino, J. (2001). Institutional and personal meanings of mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics*, *48*(1), 83-99.

Rodrigues, M. (1997). *A aprendizagem da Matemática enquanto processo de construção de significado mediada pela utilização do computador* (tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Rodrigues, M. (2000). Interacções sociais na aprendizagem da Matemática. *Quadrante, 9*(1), 3-47.

Rodrigues, M. (2008). *A demonstração na prática social da aula de Matemática* (tese de doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Roldão, M. (1999). *Os professores e a gestão flexível do currículo: Perspectivas e práticas em análise.* Porto: Porto Editora.

Sacristán, J. (2000). *O currículo: Uma reflexão sobre a prática* (3ª ed.). Porto Alegre: Artmed. (Obra original em espanhol publicada em 1991)

Schultz-Ferrel, K., Hammond, B. & Robles, J. (2007). *Introduction to reasoning and proof: Grades Prek-2*. Portsmouth: Heinemann.

Smith, J. K., & Heshusius, L. (1986). Closing down the conversation: The end of the quantitative-qualitative debate among educational inquirers. *Educational Researcher, 15* (1), 4-13.

Thompson, D. (1996). Learning and teaching indirect proof. *The Mathematics Teacher, 89*(6), 474-482.

Toulmin, S. (1969). *The Uses of Argument*. Cambridge: Cambridge University Press.

Veloso, E. (1998). *Geometria: Temas actuais. Materiais para professores.* Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 458-477.