A FLEXIBILIDADE DE CÁLCULO MULTIPLICATIVO: UM ESTUDO NO 3.º ANO

Sónia Santos[1], *Margarida Rodrigues*[2]
[1]Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa, sonyadeus@gmail.com
[2]Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa, UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, margaridar@eselx.ipl.pt

Resumo. *Esta comunicação apresenta um estudo realizado numa turma de 3º ano de escolaridade, cujo objetivo é compreender o modo como os alunos desenvolvem a flexibilidade de cálculo multiplicativo num contexto de ensino exploratório, tendo sido delineadas três questões de investigação: i) Quais as estratégias usadas pelos alunos quando resolvem tarefas de multiplicação?; ii) Como evoluem as estratégias usadas pelos alunos? e iii) Como é que os alunos usam de forma flexível o cálculo multiplicativo?*

O estudo insere-se no paradigma interpretativo de natureza qualitativa, tendo sido realizada uma experiência de ensino cujo foco foram dois pares de alunos. A recolha de dados recorreu às seguintes técnicas: observação direta e participante e recolha documental.

Os resultados deste estudo revelam que: i) em situações de proporcionalidade, os alunos evidenciaram o uso de uma estratégia aditiva em combinação com o uso de estratégias multiplicativas escalares e funcionais; e ii) relativamente à flexibilidade de cálculo multiplicativo, os alunos: a) estabeleceram relações numéricas; b) usaram estratégias que incluem o uso de propriedades da multiplicação; e c) utilizaram factos básicos por si dominados na origem de diferentes estratégias.

Abstract. *This communication presents a study carried out in a third-grade class. This study aims to understand how the students develop the flexibility of multiplicative calculation in a context of exploratory teaching. Based on the purpose of the study, three research questions were outlined: i) What are the strategies used by students when solve tasks of multiplication?; ii) How the strategies used by the students evolve? and iii) How do the students use flexibly the multiplicative calculation?*

The study adopts a qualitative methodology within an interpretive paradigm having been held a teaching experience which had focused on two pairs of students. The data collection took place through the following techniques: direct and participant observation and documentary collection.

The results of this study show that: i) in regard of situations of proportionality, students showed the use of an additive strategy in combination with the use of multiplicative scalar and functional strategies; iii) in what concerns the flexibility of multiplicative calculation, students: a) established numerical relationships; b) used strategies that include the use of properties of multiplication; and c) used basic facts at the origin of different strategies.

Palavras-chave: *multiplicação; estratégias de cálculo; ensino exploratório; flexibilidade de cálculo.*

Introdução

A aprendizagem dos números e das operações constitui um processo complexo para as crianças. Assim, é fundamental que elas conheçam e utilizem relações numéricas nos cálculos que efetuam (NCTM, 2007).

Para Heirdsfield, Cooper, Mulligan e Irons (citados por Brocardo, 2014), a flexibilidade no cálculo mental é vista como o uso de estratégias eficientes que são escolhidas de acordo com as combinações numéricas que inspiram a escolha da estratégia. Threlfall (2009) refere que a estratégia não é escolhida, defendendo que os alunos chegam à solução através de um processo que não é totalmente consciente, envolvendo uma ligação entre o que os alunos reparam nos números apresentados numa dada tarefa e o que eles sabem acerca dos números e das operações.

A flexibilidade de cálculo é o aspeto central da investigação conduzida pela primeira autora (Santos, 2016). O estudo teve como objetivo compreender o modo como os alunos desenvolvem a flexibilidade de cálculo multiplicativo num contexto de ensino exploratório.

Esta comunicação apresenta alguns resultados relativos às estratégias de cálculo multiplicativo usadas e sua evolução ao longo de uma tarefa, assim como a flexibilidade de cálculo evidenciada pelos alunos. Foca-se nas primeira e segunda partes de uma tarefa, *Pãezinhos*, que integra a sequência de tarefas aplicada no estudo.

A multiplicação e as estratégias de cálculo multiplicativo

A aprendizagem da multiplicação deve ser feita numa perspetiva de desenvolvimento de sentido de número (Mendes, Brocardo, & Oliveira, 2013). A multiplicação deve ser ensinada e trabalhada gradualmente para que os alunos apreendam e coloquem em prática estratégias cada vez mais sofisticadas e eficientes na resolução de problemas. Fosnot e Dolk (2001) alegam que as propriedades são "grandes ideias" associadas à multiplicação, sendo importante usar estratégias que as mobilizem. Partilhando desta perspetiva, Mendes et al. (2013) consideram que existem ideias essenciais associadas à multiplicação: o compreender um grupo como uma unidade (*unitizing*); a propriedade distributiva da multiplicação, em relação à adição e à subtração; a propriedade comutativa da multiplicação; os padrões de valor de posição associados à multiplicação por dez e a propriedade associativa da multiplicação. Também a interligação entre a multiplicação e a divisão é um aspeto fundamental que não pode ser ignorado. McIntosh, Reys e Reys

(1992) reiteram que ter consciência da relação entre as operações, especificamente, entre a multiplicação e a divisão, é um dos aspetos contemplados no conhecimento e destreza com as operações, componente do sentido de número.

Os contextos presentes nas tarefas de multiplicação também têm um papel importante na aprendizagem da multiplicação. Foxman e Beishuizen (2002) mencionam a diferença existente na taxa de sucesso dos alunos quando resolvem problemas, distinguindo os problemas com números em contexto daqueles que não estão em contexto. Desta forma, concluem que no segundo caso, a taxa de sucesso é mais reduzida. Além dos contextos, as autoras referem, ainda, as características dos números e a estrutura semântica do problema como fatores que podem influenciar o desempenho dos alunos.

> Usar estratégias de cálculo mental com flexibilidade requer sentido de número e ao usar uma abordagem de estratégias de cálculo, em vez de se focarem em algoritmos processuais, os alunos têm oportunidades para trabalhar com os números de forma flexível, o que por sua vez, oferece oportunidades para melhorar o seu sentido de número. (Hartnett, 2007, p. 345)

As estratégias de cálculo multiplicativo pressupõem, assim, a mobilização das propriedades da multiplicação e o estabelecimento de relações numéricas. Estudos empíricos incidentes neste domínio têm documentado uma extensa categorização de estratégias de cálculo multiplicativo. De acordo com diversos autores (por exemplo, Baek, 2006; Foxman & Beishuizen, 2002; Hartnett, 2007; e Mulligan & Mitchelmore, 1997), os alunos, ao longo da aprendizagem da multiplicação, evidenciam a aplicação de diferentes estratégias de cálculo, como por exemplo: a) adição repetição; b) cálculo da divisão; c) partição de números em produtos/em somas; d) compensação com uso de relações multiplicativas entre os fatores; e) uso complexo de dobros e f) troca da ordem dos fatores. A primeira refere-se à adição constante do mesmo número. A segunda prende-se com o uso da divisão como operação inversa da multiplicação. A terceira consiste na decomposição do multiplicador ou do multiplicando, ou de ambos, estando subjacente o uso da propriedade associativa (no caso da decomposição em produtos) ou da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição (no caso da decomposição em somas). A quarta tem por base o estabelecimento de relações multiplicativas (dobro e metade; quádruplo/quarta parte; …) entre os fatores de um mesmo produto, de modo a que a alteração efetuada num fator seja compensada, de forma inversa, no outro fator, garantindo, assim, a invariância do produto. A aplicação deste tipo de relações permite usar factos básicos conhecidos dos alunos, facilitando o cálculo. A quinta remete para a composição do multiplicador a partir de dobros sucessivos do multiplicando usando, implicitamente, as propriedades associativa e distributiva da multiplicação em relação à adição. A última resume-se à troca da ordem dos fatores para obter um produto parcial que facilite o restante cálculo, estando subjacente o uso da propriedade comutativa.

Segundo Vergnaud (2014), o isomorfismo de medidas corresponde a situações de proporcionalidade presentes nas relações multiplicativas. Ao lidarem com este tipo de situações, os alunos podem usar estratégias de natureza aditiva (Fernández, Llinares, Dooren, Bock & Verschaffel, 2010) baseadas na adição ou subtração repetida no interior de cada uma das variáveis, ou de natureza multiplicativa (Cramer & Post, 1993). Neste último caso, é possível distinguir as estratégias escalares, em que os alunos estabelecem relações entre os valores das mesmas grandezas, e as funcionais, em que as relações são estabelecidas entre as duas grandezas distintas (Vergnaud, 2014).

A flexibilidade de cálculo

Segundo Threlfall (2009), o cálculo mental flexível refere-se ao modo como a utilização de uma estratégia na resolução de um problema específico pode ser afetada pelas características específicas da tarefa, ou pelas características individuais dos alunos ou ainda pelas variáveis contextuais.

Para resolver um problema, usando o cálculo mental, os alunos podem: (i) lembrar-se de, ou 'saber', um facto numérico, (ii) usar um procedimento de contagem simples, em que a sequência numérica é recitada enquanto mantêm o controlo da contagem, (iii) fazer uma representação mental de um método em que usam 'papel e lápis' e (iv) construir uma sequência de transformações dos números envolvidos no problema para chegarem a uma solução (Threlfall, citado por Brocardo, 2014). Também em Threlfall (2009), são apresentadas as "estratégias de abordagem" do cálculo mental. Uma estratégia de abordagem em cálculo mental é uma forma geral de cognição matemática utilizada no problema — por exemplo contar, ou recordar ou aplicar um método aprendido, ou a visualização de um processo, ou a exploração de relações conhecidas entre os números.

Threlfall (2009) apresenta um modelo alternativo ao modelo de escolha de estratégia, proposto por outros autores (por exemplo, Torbeyns et al., citados em Threlfall, 2009): o "zeroing-in", processo que envolve reparar nos números e cálculos exploratórios parciais, ocorrendo em simultâneo até emergir a estratégia e a solução do problema. Threlfall (2009) dá o exemplo do cálculo 64-37 para ilustrar estes dois aspetos. Dependendo da sua compreensão conceptual e do seu conhecimento dos números, os alunos podem reparar nos números envolvidos no cálculo, estabelecendo relações com outros: 64 é menos um que 65; 37 é menos três que 40; 60 é o dobro de 30; 7 é metade de 14; 64 é o dobro de 32; 37 é mais dois que 35, o dobro de 37 é 74; 7 é quatro e três. Este processo de reparar nos números pode conduzir a cálculos exploratórios parciais que o autor ilustra com o mesmo exemplo: 65-35; 64-40; 64-14; 37-32; 74-64; 64-34. Estes cálculos parciais não são suficientes para indicar a estratégia a usar mas sugerem o que fazer a seguir. Por exemplo, em 65-35, os alunos poderão compensar o resultado 30 subtraindo 3. Neste caso, terão construído a estratégia de compensação e simultaneamente alcançado a solução do cálculo. Assim, os alunos teriam estabelecido diferentes relações numéricas na solução alcançada, como sejam 64 é menos um que 65 e 37 é mais dois que 35, e usado a compensação como estratégia de cálculo, relacionando a adição e a subtração, na medida em que uma alteração aditiva no aditivo (64+1=65) tem de ser compensada ao contrário, subtraindo, o que implica retirar 1 ao resultado 30; e uma alteração subtrativa no subtrativo (37-2=35) tem de ser compensada também de forma subtrativa, o que implica retirar 2 ao resultado 30; e assim, retirar o total de 3 a 30. Nesta perspetiva, as estratégias para a aritmética mental são construídas e não selecionadas e aplicadas. Os números do problema não são considerados para decidir qual a estratégia, mas para decidir o que fazer em seguida, por exemplo, a partição, aproximar, combinar ou alterar.

Metodologia de investigação

Considerando o objetivo de compreender o modo como os alunos desenvolvem a flexibilidade de cálculo multiplicativo num contexto de ensino exploratório, o estudo insere-se no paradigma interpretativo de natureza qualitativa (Bogdan & Biklen, 1994). Trata-se de uma abordagem focada na compreensão dos fenómenos e nos significados dos processos vivenciados pelos participantes do estudo. O estudo seguiu a modalidade de experiência de ensino visando o desenvolvimento nos alunos da flexibilidade de cálculo multiplicativo através da exploração de uma sequência de tarefas desenhadas para esse fim.

Contexto

A experiência de ensino realizou-se numa escola de 1º ciclo da cidade de Lisboa, mais precisamente numa turma de 3º ano composta por 24 alunos: 15 rapazes e 9 raparigas. A professora da turma praticava um ensino exploratório, visando a aprendizagem a partir do trabalho que os alunos realizam, o que promove a construção de conhecimento e o surgimento de procedimentos matemáticos com significado, desenvolvendo diferentes competências matemáticas.

O foco do estudo incidiu em quatro alunos que trabalharam sempre a pares, sendo que o presente artigo apenas apresenta resultados relativos ao par Tiago e Anabela.

Para Canavarro (2011), uma aula de tipo exploratório inclui quatro fases distintas: a apresentação da tarefa, a exploração, a discussão e a sistematização. Na primeira fase, procede-se à leitura e interpretação do enunciado da tarefa. Na segunda, os alunos trabalham autonomamente em grupos ou a pares. Na fase da discussão, os alunos apresentam as estratégias aplicadas com a finalidade de comparar e confrontar as mesmas. Na última fase, o professor institucionaliza novas aprendizagens matemáticas que decorreram do trabalho desenvolvido.

Foi implementada uma sequência de sete tarefas entre 25 de novembro de 2015 e 17 de fevereiro de 2016. Relativamente à sua natureza, o grau de desafio é elevado e o grau de estrutura é aberto, permitindo várias possibilidades de resolução (Ponte, 2005).

A tarefa *Pãezinhos* é composta por 4 partes e corresponde à última tarefa da sequência implementada. A subtarefa *Pãezinhos I* foi explorada no dia 1 de fevereiro de 2016 e as restantes subtarefas *Pãezinhos II, III* e *IV* foram exploradas no dia 17 de fevereiro de 2016. No presente artigo, serão apresentados os resultados relativos às subtarefas *Pãezinhos I* e *II.*

Recolha e análise dos dados

Foi usada a técnica de observação participante com gravação vídeo e áudio do trabalho desenvolvido pelos alunos bem como da discussão coletiva. Segundo Yin (2010, p. 92), a observação participante é "um modo especial de observação na qual o investigador não é meramente um observador passivo", na medida em que participa nas atividades observadas, possibilitando observar e verificar pormenores detetáveis pela sua interação com os participantes do estudo.

Por motivos éticos, os nomes dos alunos são fictícios, de modo a garantir o seu anonimato.

Para proceder à análise de dados, foram usadas categorias analíticas provenientes do quadro teórico de Threlfall (2009) que se apresentam em seguida.

Tabela 1. Categorias analíticas no âmbito da flexibilidade de cálculo

Categoria	Descrição
Processo de reparar	Reparar nos números e nas relações que se pode estabelecer entre eles.
Cálculos exploratórios parciais	Os cálculos exploratórios parciais decorrem do conhecimento pessoal dos alunos acerca dos números e das propriedades das operações quando este é usado para derivar.
Relações numéricas	O modo de relacionar os números para resolver o problema e alcançar a solução das situações de cálculo.
Estratégias de cálculo	O modo de relacionar as operações e usar as suas propriedades para resolver o problema e alcançar a solução das situações de cálculo.

No que respeita às estratégias de cálculo, foram consideradas subcategorias analíticas relacionadas com as estratégias usadas em cálculos multiplicativos (Baek, 2006; Fosnot & Dolk, 2001; Foxman & Beishuizen, 2002; Hartnett, 2007; e Mulligan & Mitchelmore, 1997) e em situações de proporcionalidade (Cramer & Post, 1993; Fernández et al., 2010; Vergnaud, 2014).

Tabela 2. Subcategorias analíticas das estratégias de cálculo

<table>
<tr><th colspan="2">Subcategorias</th></tr>
<tr><td rowspan="5">Estratégias aditivas para resolver cálculos multiplicativos</td><td>Contagem envolvendo saltos dos múltiplos</td></tr>
<tr><td>Adição repetida</td></tr>
<tr><td>Contagem unitária</td></tr>
<tr><td>Unitizing</td></tr>
<tr><td>Uso de dobros</td></tr>
<tr><td rowspan="7">Estratégias multiplicativas para resolver cálculos multiplicativos</td><td>Cálculo da divisão</td></tr>
<tr><td>Partição de números em produtos</td></tr>
<tr><td>Partição de números em somas</td></tr>
<tr><td>Compensação com uso de relações multiplicativas entre os fatores</td></tr>
<tr><td>Compensação no produto após arredondamento de um fator</td></tr>
<tr><td>Uso complexo de dobros</td></tr>
<tr><td>Troca da ordem dos fatores</td></tr>
<tr><td>Estratégias aditivas para lidar com situações de proporcionalidade</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Estratégias multiplicativas para lidar com situações de proporcionalidade</td><td>Escalar</td></tr>
<tr><td>Funcional</td></tr>
</table>

A exploração e discussão das tarefas

Subtarefa Pãezinhos I”

Após a construção de uma tabela com duas colunas: a primeira referente aos tabuleiros e a segunda aos pãezinhos, o Tiago sugeriu a primeira hipótese, tendo chegado a esta através da estratégia da divisão como operação inversa da multiplicação, revelando assim um raciocínio funcional: "800 a dividir por 10? Dá 8. Tem de ser 8x100, 800 a dividir por 100".

Na sua abordagem inicial, os alunos pensaram em múltiplas decomposições do 800 em produtos de dois fatores, sem pensar se as mesmas fariam ou não sentido no contexto do problema. Ou seja, pensaram de um modo abstrato.

Após o comentário da professora chamando a atenção para o contexto, os alunos apagaram as possibilidades que já tinham na tabela e decidiram trocar a ordem dos fatores das mesmas, colocando tabuleiros que levassem uma grande quantidade de pãezinhos ("tem de ser os números mais pequeninos em tabuleiros"), atendendo a que numa padaria existiria a preocupação de maximizar a ocupação do forno.

> Tiago: Olha, arranjei outra conta…50x16. 50x4 dá 200; 50x8 dá 400, o que quer dizer 50x16.

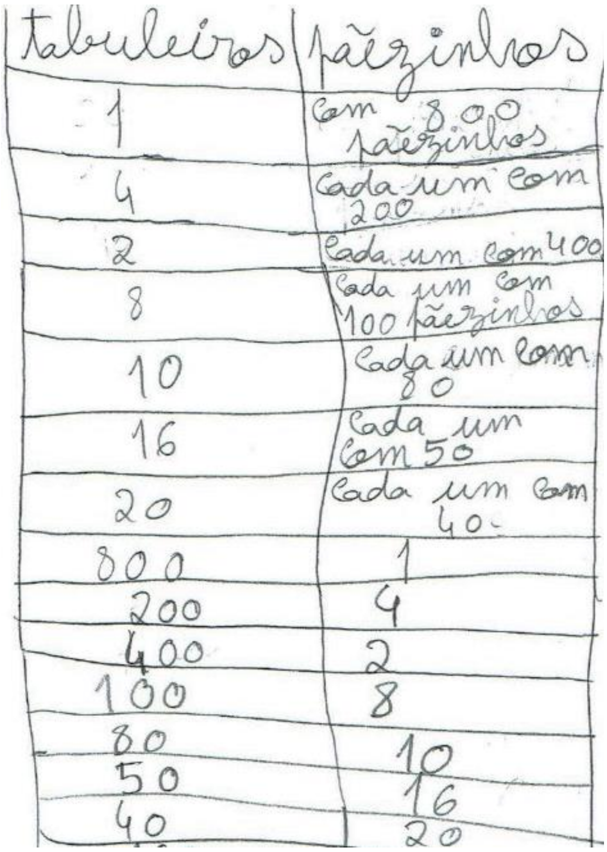
A Anabela ficou na dúvida se esta possibilidade estaria correta. O Tiago explicou: "16x50. Se 8x50 dá 400, o dobro de 8 que é 50x16 dá 800, porque 8 é metade de 16 e dá 400. Quer dizer que pode".

O aluno aplicou a estratégia do uso complexo de dobros, chegando à decomposição do 800 em 50x16 ou 16x50, através da duplicação sucessiva de um fator e do produto. Partindo de um facto básico por si dominado, 50x4=200, Tiago estabelece mentalmente uma cadeia com relações numéricas, aplicando sucessivamente o dobro no segundo fator e consequentemente no produto (mantendo o 50 constante), até chegar ao produto pretendido de 800, obtido com 50x16. Assim, o aluno acaba por compor o 16 como uma potência de base dois (16=4x2x2; isto é, $16=2^4$). Tiago revela flexibilidade de cálculo pelo modo como vai estabelecendo a relação numérica de dobro para obter uma nova decomposição do 800, aplicando intuitivamente a propriedade associativa da multiplicação. Durante a explicação, o Tiago usou a troca da ordem dos fatores.

Seguidamente, o aluno descobre uma nova possibilidade de distribuição dos pãezinhos: "Já arranjei outra. 20 tabuleiros vezes 40 pãezinhos. 20x4 dá 80, mais um zero, acrescenta-se um zero".

Verifica-se a implementação da estratégia da compensação com uso de relações multiplicativas, recorrendo a um facto básico, visto que o aluno usou um facto conhecido de multiplicação, o 20x4, para encontrar outra possibilidade de distribuição dos pãezinhos. A regra de acrescentar o zero resulta da necessidade de compensar no produto o facto de se ter multiplicado por 10 o fator 4.

Os alunos decidiram, depois, aplicar a estratégia da troca da ordem dos fatores em todas as possibilidades que tinham descoberto. O objetivo do par foi obter uma tabela maior que contemplasse a exaustão das soluções matemáticas da decomposição do 800 em produtos de 2 fatores. Nesta fase, o par desligou-se do contexto da tarefa e centrou-se no sentido numérico e a Anabela deixou de escrever "cada um com" na coluna dos pãezinhos (cf. Figura 1). Assim, registam 800 tabuleiros com 1 pão cada apesar da chamada de atenção da professora de que tal não fazia sentido.



tabuleiros	pãezinhos
1	Com 800 pãezinhos
4	Cada um com 200
2	Cada um com 400
8	Cada um com 100 pãezinhos
10	Cada um com 80
16	Cada um com 50
20	Cada um com 40
800	1
200	4
400	2
100	8
80	10
50	16
40	20

Figura 1. Tabela da Anabela

Seguiu-se uma intervenção da investigadora.

> Investigadora: Diz-me uma coisa. Tu aqui tens 10 tabuleiros que levam 80. Qual é a metade do número de tabuleiros?
> Tiago: 5x160.

O par escreveu na tabela; porém, a Anabela ficou com dúvidas se estaria correto. De forma a mostrar à colega a correção desta possibilidade, o Tiago fez o cálculo na folha, aplicando a estratégia de partição de números (100x5=500; 60x5=300; 500+300=800). No entanto, inicialmente não foi essa a estratégia usada. Quando a investigadora apela à aplicação da relação de metade do fator 10, Tiago imediatamente aplica a relação de dobro no outro fator, 80, chegando a 5x160.

Tiago observou a tabela e através da estratégia do uso de dobros e metades entre os fatores, chegou ao número 32 como dobro de 16 e ao número 25 como metade de 50. Assim, o aluno usou a estratégia multiplicativa escalar em cada uma das variáveis, usando intuitivamente um raciocínio proporcional inverso. No entanto, Anabela não registou esta possibilidade na sua tabela.

No momento da discussão coletiva, a professora solicitou ao Tiago que fosse ao quadro.

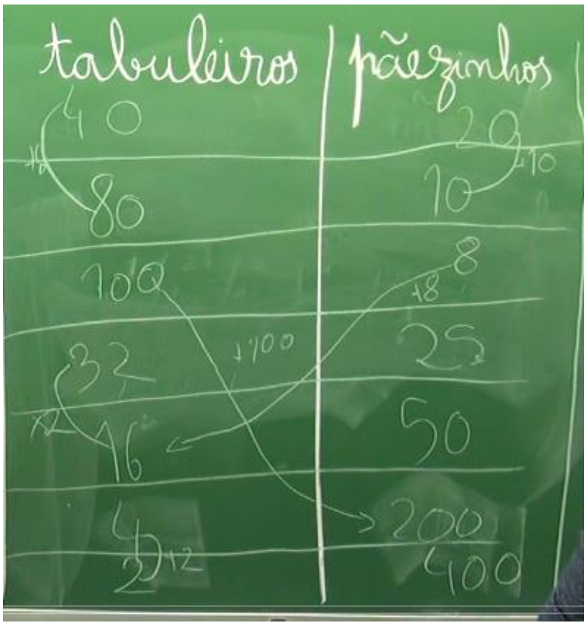


Figura 2. Apresentação do Tiago

De forma a explicitar a tabela (cf. Figura 2), o aluno assinalou relações numéricas de dobro, explicitando-as, por vezes, de forma aditiva, tanto dentro da variável (por exemplo: "+10"), como entre as duas variáveis (por exemplo: "+100"). No entanto, não explicitou as relações inversas aplicadas na exploração da tarefa. Por exemplo, explicitou o 32 como dobro de 16, mas não o 25 como metade de 50. As relações assinaladas são desligadas umas das outras, não evidenciando o raciocínio mobilizado durante a exploração.

O Tiago explicou a resposta 2 tabuleiros com 400 pãezinhos da seguinte forma: "Eu tirei o zero do 20 e pus no 40, deu-me 400x2". Assim, o aluno aplicou a regra da compensação dos zeros, retirando o zero do fator 20 para acrescentar ao fator 40.

Para justificar as possibilidades de 32 tabuleiros com 25 pãezinhos e 16 tabuleiros com 50 pãezinhos, o aluno usou a partição de números, decompondo em somas ambos os fatores, no caso de 32x25, e apenas o 16, no caso de 16x50 (cf. Figuras 3 e 4).

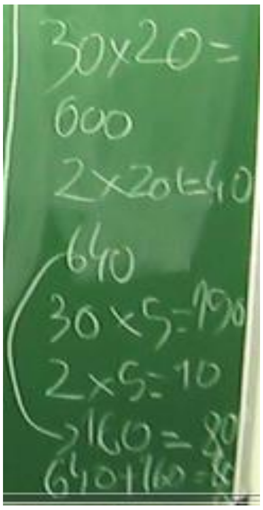


Figura 3. Partição de números para 32x25

Figura 4. Partição de números para 16x50

Embora Tiago tenha revelado flexibilidade estratégica ao aplicar relações escalares de dobro e metade entre os fatores, ao explicar à turma as possibilidades encontradas, não consegue aparentemente explicar o raciocínio desenvolvido, optando por comprovar as possibilidades obtidas com o procedimento mecanizado de partição de números. O mesmo aconteceu quando, na fase da exploração, o aluno explicou à colega como chegou à possibilidade 5x160.

Subtarefa "Pãezinhos II"

Os alunos começaram por adicionar o valor das moedas existentes na tarefa, percebendo que o Bernardo tinha pago 70 cêntimos por 5 pãezinhos. Seguidamente, o par calculou 84-70=14, obtendo o preço de cada pãozinho, 14 cêntimos. Usaram, assim, uma abordagem de natureza aditiva.

Mais tarde, o Tiago e a Anabela optaram por continuar o esquema existente no enunciado da tarefa (cf. Figura 5): 6 pãezinhos custavam 84 cêntimos; 5 pãezinhos custavam 70 cêntimos e assim sucessivamente, mantendo a abordagem anterior de natureza aditiva no interior de cada uma das variáveis, ou seja, subtraindo sempre 14, o valor unitário do preço do pão, ao preço acabado de obter na coluna da direita e subtraindo sempre 1 ao número de pãezinhos, na coluna da esquerda. Contudo, os alunos erraram no cálculo do preço de 4 pãezinhos, o que influenciou os restantes resultados.

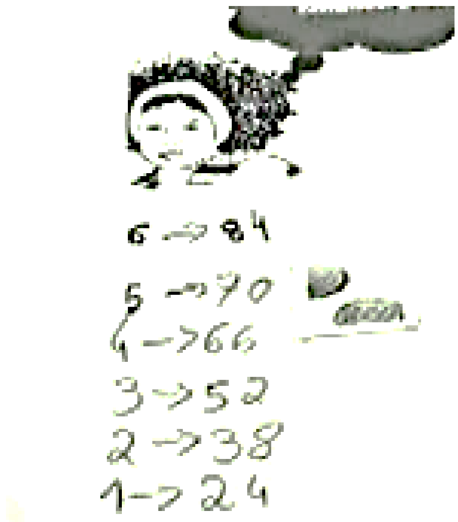


Figura 5. Esquema presente no enunciado a que os alunos deram continuidade

A professora interveio, visto que a Anabela comentou com o Tiago que aquele resultado não fazia sentido.

> Anabela: Mas isto não tem sentido. Se 1 pãozinho custa isto (*apontando para o número 24*), 2 pãezinhos só aumenta 14 cêntimos. Não tem sentido nenhum.
> Professora: Diz lá, Anabela, diz lá o que tens a dizer.
> Anabela: Se este custa 24, porque é que os outros pãezinhos, quando são 2, os pãezinhos custam menos dinheiro cada um?
> Professora: Explica lá o teu raciocínio.
> Anabela: Têm que ter o mesmo número. Têm de ser todos a 24.
> Tiago: Diz mais de 10 cêntimos.
> Anabela: Mas os outros pãezinhos também têm de custar 24 assim.
> Tiago: Não, não pode ser. Têm de custar 14 cêntimos (…) Tá [sic] mal então.

Anabela revela sentido crítico face ao resultado obtido com o esquema, 24 cêntimos por cada pãozinho; porém, não confrontou com a conclusão alcançada anteriormente de 1 pão custar 14 cêntimos e aplicada no completamento do esquema. A aluna questionou a ausência de proporcionalidade que existiria com aqueles preços: “Se 1 pãozinho custa isto (*apontando para o número 24*), 2 pãezinhos só aumenta 14 cêntimos. Não tem sentido nenhum.”. Assim, embora não tenham identificado o seu erro, concluíram que o esquema não estava correto mobilizando um raciocínio proporcional subjacente à situação proposta, o que revela compreensão de que o preço de cada pãozinho tem de ser constante: “Têm de ser todos a 24.”.

O par decidiu apagar o esquema feito. O Tiago recorreu à multiplicação para esclarecer a dúvida do preço de 1 pãozinho. Nesta multiplicação, o aluno utiliza uma relação funcional como forma de verificar se 1 pão custaria 14 cêntimos, tendo aplicado a estratégia da partição de números (cf. Figura 6) no cálculo 14x6. Assim, Tiago confirma que o seu resultado é igual ao indicado no enunciado como preço de 6 pãezinhos, ficando com a certeza de que o preço unitário é 14 e não 24.

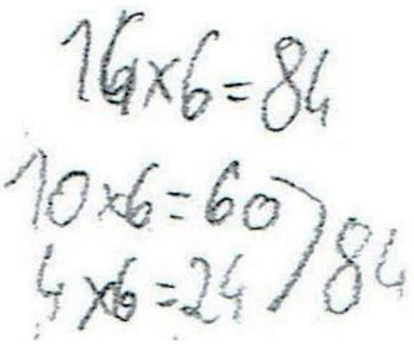


Figura 6. Estratégia de partição de números (Tiago)

A Anabela decidiu refazer o esquema, mas desta vez de baixo para cima. Ao partir do preço de 1 pãozinho, voltou a usar uma abordagem aditiva, adicionando sempre 14 de forma sucessiva. A aluna errou no cálculo do preço de 3 pãezinhos ao obter 32 (cf. Figura 7). O erro foi detetado pelo Tiago.

Figura 7. Erro de cálculo do preço de 3 pãezinhos (Anabela)

Após correção do esquema (cf. Figura 8), a Anabela usou a estratégia do cálculo da divisão como operação inversa da multiplicação (cf. Figura 9) para confirmar que 1 pãozinho custava 14 cêntimos.

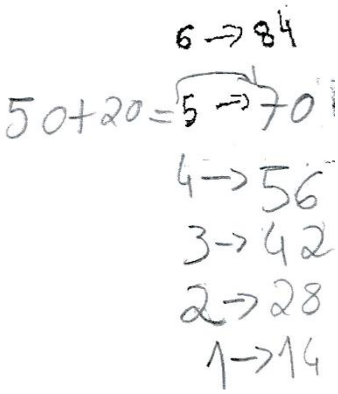


Figura 8. Esquema correto

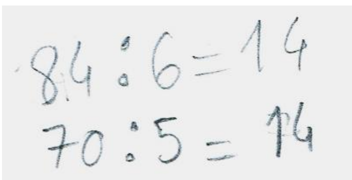


Figura 9. Cálculo da divisão

Ao fazê-lo, Anabela evolui para uma abordagem de natureza multiplicativa estabelecendo uma relação funcional entre as variáveis, o preço e o número de pãezinhos, como forma de verificar a constante da proporcionalidade direta.

A conclusão, escrita pelos alunos -- "um pãozinho custa 14 cêntimos, porque multiplicámos 14 vezes 6 que nos deu 84 e também dividimos" -- apresenta a relação externa funcional entre as variáveis usando ambas as operações, multiplicação (preço =

constante x número de pãezinhos) e divisão (constante = preço ÷ número de pãezinhos). Evidencia também a mobilização da relação inversa entre estas duas operações nesta situação.

Conclusão

No que respeita às estratégias que o par aplicou nas situações de proporcionalidade (Cramer & Post, 1993; Fernández et al., 2010; e Vergnaud, 2014) presentes nas subtarefas, verifica-se a utilização de estratégias de natureza aditiva e multiplicativa. Os alunos usaram a estratégia aditiva no cálculo do preço de 1 pãozinho através da diferença de preços de 6 e de 5 pãezinhos, e na determinação dos restantes preços, em *Pãezinhos II*. Usaram a estratégia multiplicativa escalar (relações numéricas no interior de cada uma das variáveis) através da aplicação do dobro numa variável e da metade na outra variável, em *Pãezinhos I*. A estratégia multiplicativa funcional verifica-se no uso da divisão como operação inversa da multiplicação (i) na compreensão implícita da proporcionalidade inversa presente em *Pãezinhos I*, e (ii) para verificar a correção do preço de cada pãozinho, na compreensão implícita da proporcionalidade direta presente em *Pãezinhos II*. O par usou também a estratégia da troca da ordem dos fatores em *Pãezinhos I* para obter um maior número de decomposições do 800 em produtos de dois fatores.

A evolução evidenciada pelos alunos ao longo da exploração da subtarefa *Pãezinhos II*, marcada pela transição da adoção de estratégias aditivas para as de natureza multiplicativa funcional, parece dever-se ao modo como foi concebida a tarefa e simultaneamente aos erros de cálculo aditivo e subtrativo verificados. O enunciado sugere uma abordagem aditiva, ao apresentar os preços de 6 e de 5 pãezinhos. O facto de os preços calculados através dessa abordagem não respeitarem a constante de proporcionalidade levou os alunos a questionarem criticamente os seus resultados e a evoluírem para uma abordagem multiplicativa funcional, verificando o preço de cada pãozinho. Os alunos revelam, ainda, conhecer e usar a relação existente entre as operações de multiplicação e divisão (McIntosh et al., 1992; Threlfall, 2009).

Para resolver os cálculos multiplicativos que iam propondo, em *Pãezinhos I,* no sentido de verificar se os mesmos compunham o 800, e assim irem preenchendo a tabela, os alunos aplicaram estratégias de natureza multiplicativa: i) partição de números em somas; ii) compensação com uso de relações multiplicativas entre os fatores; e iii) uso complexo de dobros (Baek, 2006; Fosnot & Dolk, 2001; Foxman & Beishuizen, 2002; Hartnett, 2007; e Mulligan & Mitchelmore, 1997).

A partição de números em somas revelou-se um processo mecanizado que os alunos usam não só para resolver um cálculo multiplicativo, através da aplicação da propriedade distributiva (Fosnot & Dolk, 2001), mas sobretudo para verificar se outra estratégia (construída antes de forma flexível) foi usada corretamente, e para mostrar aos colegas a correção do cálculo efetuado. Assim, o uso desta estratégia, em particular, revela pouca flexibilidade de cálculo, parecendo ser um procedimento rotinizado que é aplicado sempre da mesma forma, independentemente dos números envolvidos.

A utilização, pelo Tiago, das estratégias de compensação com uso de relações multiplicativas entre os fatores e do uso complexo de dobros é reveladora da sua flexibilidade de cálculo (Threlfall, 2009), uma vez que o mesmo estabeleceu relações numéricas (metade e dobro entre os números) e os seus cálculos exploratórios parciais decorrem do seu conhecimento de factos básicos da multiplicação, usando-os para alcançar a solução de um dado cálculo desconhecido (como aconteceu, por exemplo, com o cálculo de 50x16). No entanto, Tiago parece não ter a completa consciência das relações numéricas emergentes associadas à flexibilidade de cálculo, pois, embora as use, não as verbaliza após o seu uso, explicitando a partição dos números em somas (como aconteceu durante a discussão coletiva em *Pãezinhos I*).

São várias as evidências da flexibilidade de cálculo multiplicativo. Os alunos evidenciaram reparar nos números (por exemplo, o 16 encarado, por Tiago, como uma potência de base dois, ao ser gerado pela sucessiva duplicação do fator 2). Os alunos mobilizaram relações entre as operações na confirmação da solução (como aconteceu quando Anabela usou a divisão como operação inversa da multiplicação na confirmação do preço unitário do pão). A flexibilidade de cálculo (Threlfall, 2009) fica, pois, evidenciada pela forma como os alunos atenderam às características dos números e às relações existentes entre estes e também pelas estratégias de cálculo construídas.

Referências bibliográficas

Baek, J. M. (2006). Children's mathematical understanding and invented strategies for multidigit multiplication. *Teaching Children Mathematics, 12*(5), 242-247.

Bogdan, R., & Biklen, S., (1994). *Investigação qualitativa em educação – Uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

Brocardo, J. (2014). Exploring flexibility in mental calculation in the domain of multiplicative reasoning. Paper presented in ECER, Porto, Portugal.

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática*, *115,* 11-17.

Cramer, K., & Post, T. (1993). Connecting research to teaching proportional reasoning. *Mathematics Teacher, 86*(5), 404-407.

Fernández, C., Llinares, S., Van Dooren, W., De Bock, D., & Verschaffel, L. (novembro, 2010). The development of students' use of additive and proportional methods along primary and secondary school. *Hub Research Paper, 32.*

Fosnot, C., & Dolk, M. (2001). *Young mathematicians at work: Constructing multiplication and division.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Foxman, D., & Beishuizen, M. (2002). Mental calculation methods used by 11-year-olds in different attainment bands: A reanalysis of data from the 1987 APU survey in UK. *Educational Studies in Mathematics, 51*(1-2), 41-69.

Gravemeijer, K., & Cobb, P. (2013). Design Research from the learning design perspective. In T. Plomp & N. Nieveen (Eds.). *Education Design Research – Part A: An introduction* (pp. 73-112). Netherlands, Institute for Curriculum Development.

Hartnett, J. (2007). Categorisation of mental computation strategies to support teaching and to encourage classroom dialogue. In J. Watson, & K. Beswick (Ed.), *Mathematics: Essential Research, Essential Practice. Proceedings of the thirtieth annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia. (MERGA-30)* (*I*, pp. 345-352). Hobart: MERGA.

McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics, 12*(3), 2-8,44.

Mendes, F., Brocardo, J., & Oliveira, H. (2013). A evolução dos procedimentos usados pelos alunos: Contributo de uma experiência de ensino centrada na multiplicação. *Quadrante*, *22*(1), 133-162.

Mulligan, J. T., & Mitchelmore, M. C. (1997). Young children's intuitive models of multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(3), 309-330.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Ponte, J.P. (2005). Gestão curricular em matemática. O professor e o desenvolvimento curricular. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Threlfall, J. (2009). Strategies and flexibility in mental calculation. *ZDM Mathematics Education*, *41*(5), 541-555.

Santos, S. (2016). *A flexibilidade de cálculo multiplicativo num contexto de ensino exploratório.* Dissertação de mestrado, Escola Superior de Educação de Lisboa, Instituto Politécnico de Lisboa, Lisboa, Portugal.

Vergnaud, G. (2014). A *criança, a matemática e a realidade*. Paraná: Editora UFPR.

Yin, R. K. (2010). Estudo de caso. Planejamento e métodos. (D. Grassi, Trad.). Porto Alegre: Bookman.

Anexo

Pãezinhos I[1]

Todos os sábados, o padeiro da padaria *Pão Bom* cozinha 800 pãezinhos que dispõe em tabuleiros. Tens uma ideia de quantos tabuleiros precisará? Confirma a tua ideia.

Tabuleiros	Pãezinhos

[1] Conceção da tarefa *Pãezinhos I e II*: Jean Marie Kraemer

Pãezinhos II

A Beatriz está na padaria com o seu colega Bernardo. Ela compra seis pãezinhos e paga oitenta e quatro cêntimos.

- Então – pensou Beatriz – um pãozinho custa mais do que 10 cêntimos!

O Bernardo paga os seus cinco pãezinhos com uma moeda de 50 cêntimos e uma de 20 e não recebe troco.

- Ah! – exclama Beatriz – já sei quanto custa cada pãozinho!