INSTITUTO POLITÉCNICO DE LISBOA

ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO DE LISBOA

O ENSINO/APRENDIZAGEM DA DIVISÃO COM COMPREENSÃO
UM ESTUDO COM O 4º ANO DE ESCOLARIDADE

Rita Maria Neves da Cruz

Dissertação apresentada à Escola Superior de Educação de Lisboa para a obtenção de grau de mestre em Educação Matemática na Educação Pré-Escolar e nos 1º e 2º Ciclos do Ensino Básico

2016

O ENSINO/APRENDIZAGEM DA DIVISÃO COM COMPREENSÃO UM ESTUDO COM O 4º ANO DE ESCOLARIDADE

Rita Maria Neves da Cruz

Dissertação apresentada à Escola Superior de Educação de Lisboa para a obtenção de grau de mestre em Educação Matemática na Educação Pré-Escolar e nos 1º e 2º Ciclos do Ensino Básico

Orientadora: Professora Doutora Maria de Lurdes Marquês Serrazina

2016

RESUMO

Os objetivos do estudo são perceber o que os alunos já aprenderam sobre a divisão e como desenvolver o ensino/aprendizagem da divisão com compreensão e incentivar a utilização de estratégias mais sofisticadas em problemas de divisão.

Para tal, colocaram-se as questões: (1) Quais as estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de problemas de divisão? (2) Que compreensão evidenciam de ideias fundamentais relacionadas com a operação da divisão? Que dificuldades revelam? (3) Que papel pode ter o desenvolvimento do cálculo mental? (4) Será que as interações entre professor e alunos e entre alunos contribuem para a compreensão dos aspetos fundamentais sobre a divisão e para o desenvolvimento de estratégias de resolução de problemas mais sofisticadas?

A investigação enquadra-se no paradigma interpretativo, desenvolvida através de uma metodologia do tipo qualitativo, no formato de estudo de caso.

Para a recolha de dados foi organizada uma sequência de 7 tarefas de divisão, desenvolvidas numa sala de aula de 4º ano em 2015/2016.

Recolheram-se dados de dois pares de alunos através diversas técnicas.

Em conclusão verificou-se que inicialmente a estratégia de divisão mais utilizada foram os procedimentos de construção, mas a estratégia preferida acabou por ser os algoritmos alternativos. A única ideia fundamental da divisão de que ambos os pares revelaram algum domínio foi na identificação desta operação em situações de partilha e de medida. Mostraram dificuldade na identificação da relação possível entre situações de medida e partilha, na utilização do modelo retangular, na utilização da relação inversa entre a multiplicação e divisão e na compreensão da influência do resto. Sobre o papel do cálculo mental verificou-se que este esteve presente em quase todas as estratégias desenvolvidas e quase sempre associado à estimativa e tentativa e erro. Relativamente à contribuição das interações, apurou-se que fizeram surgir oportunidades adicionais de aprendizagem sobre aspetos fundamentais da divisão e para o desenvolvimento de estratégias mais sofisticadas.

Palavras-chave: conceito de divisão, sentido do número, ideias fundamentais da divisão, estratégias de cálculo, interações, compreensão.

ABSTRACT

The goals for the present study are the understanding of students' proficiency on the division operation, and how division teaching and learning process can be developed with comprehension and incentivizing the use of more sophisticated resolution strategies.

For this purpose, the following questions were put forth: (1) What are the strategies used by students in division problem resolution? (2) What knowledge and what difficulties they have regarding the big ideas for division? (3) What role can the mental computation strategies development play? (4) Will teacher-student and inter-student interaction contribute to the understanding of the big ideas for division, as well as to the development of more sophisticated problem solving strategies?

This research is framed within the interpretative paradigm and developed under a qualitative methodology in the form of case study.

For data collection purposes, a sequence of 7 division tasks was developed in a 4th grade class throughout 2015-2016. The data were collected over two student pairs, relying on diverse techniques.

The study results show that, at an early stage, the most common division strategy consisted on building procedures, although the overall preferred approaches were alternative algorithms. The only big idea for division that both subject pairs have shown some proficiency was in the identification of the division operation in partitive and quotative situations. Subjects showed difficulties in identifying relationships between partitive and quotative situations, in the use of arrays, in the use of the reverse relationship between multiplication and division, and in the understanding of the influence of the remainder. Mental computation was present in nearly all the developed strategies and generally used in connection with estimation and trial and error. As for the interactions' contribution, the results show they allowed additional learning opportunities regarding the big ideas for division as for the development of more sophisticated division strategies.

Keywords: division concept, number sense, big ideas for division, calculation strategies, interaction, understanding.

AGRADECIMENTOS

Presto o meu sincero agradecimento à minha orientadora, a Professora Doutora Maria de Lurdes Serrazina, pela forma como me ajudou a construir este trabalho, mostrando-se sempre disponível, colaborando com o seu trabalho e guiando-me através dos seus comentários e questões.

À minha família, especialmente à Dª Lourdes Figueiredo e ao Rui, sem o apoio de quem teria sido impossível realizar este trabalho.

A todos os professores de Mestrado e de uma forma especial às professoras Margarida Rodrigues e Cristina Loureiro pela forma gentil como forneceram todo o apoio de que necessitei.

A todos os colegas de Mestrado, e de uma forma especial à Lídia Ferro, Sónia Santos e Aida Pereira, que percorreram comigo parte desta caminhada, tornando-a mais rica e partilhada.

Ao agrupamento, à escola e à turma onde desenvolvi este estudo.

Índice Geral

Índice de figuras

Índice de tabelas

1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo é feita uma introdução ao estudo realizado onde é apresentado o problema, objetivos e questões que serviram como ponto de partida à sua realização e a explicação da sua pertinência. É feita também uma breve descrição do modo como está organizado.

1.1. Problema, objetivo de estudo e questões de investigação

O ensino/aprendizagem das operações aritméticas básicas (adição, subtração, multiplicação e divisão) tem estado tradicionalmente associado ao ensino/aprendizagem dos algoritmos tradicionais correspondentes, através do treino dos procedimentos a eles associados e a posterior aplicação pelos alunos destes algoritmos a qualquer situação que envolva a utilização destas operações. Como afirmam McIntosh, Reys & Reys (1992), inicialmente uma das tarefas do ensino elementar (Básico) era o ensino da aritmética, que unicamente abrangia as tabuadas e os métodos formais de realizar por escrito uma adição, subtração, multiplicação ou divisão.

Devido aos vários problemas que têm vindo a ser associados a este tipo de abordagem educativa e às dificuldades demonstradas pelos alunos na aprendizagem e aplicação dos algoritmos tradicionais, diversa investigação realizada nos campos da Psicologia e da Didática da Matemática tem-se debruçado insistentemente sobre este tema.

Destas várias investigações realizadas, algumas delas apresentadas ou referidas neste estudo, tem surgido uma nova perspetiva sobre o ensino/aprendizagem da Matemática e consequentemente das operações aritméticas básicas e do desenvolvimento das competências de cálculo, preconizada por documentos internacionais de referência como os *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* onde se defende que ser competente na Matemática exige uma relação de equilíbrio entre o conhecimento de factos, a compreensão de conceitos e domínio de procedimentos. Afirmam que os alunos que memorizam factos ou procedimentos sem a devida compreensão têm, diversas vezes, dúvidas sobre quando e como utilizar o que aprenderam e que a aprendizagem com compreensão torna mais fácil a aprendizagem subsequente visto que ideias e conceitos bem fundamentados e eficazmente relacionados são mais facilmente aplicados a novas situações (NCTM, 2007).

O NCTM defende como *Princípio da Aprendizagem* o facto de que “os alunos devem aprender matemática com compreensão, construindo ativamente novos conhecimentos a partir da experiência e de conhecimentos prévios” (NCTM, 2007, p.23).

O presente estudo baseia-se nesta nova perspetiva de ensino/aprendizagem das operações aritméticas e vai tentar perceber qual a compreensão que os alunos do 4º ano já desenvolvem da divisão e tenta dar contributos para um aumento da preocupação com a compreensão no processo de ensino/aprendizagem da divisão.

Desta forma, os objetivos deste estudo são perceber o que os alunos já aprendem sobre a divisão e como se pode desenvolver o ensino/aprendizagem da divisão com compreensão e incentivar a utilização de estratégias mais sofisticadas de resolução de problemas de divisão.

Tendo em vista os objetivos referidos, pretende-se dar resposta às seguintes questões:

1. Quais as estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de problemas de divisão?
2. Que compreensão evidenciam de ideias fundamentais relacionadas com a operação da divisão? Que dificuldades revelam?
3. Que papel pode ter o desenvolvimento do cálculo mental?
4. Será que as interações entre professor e alunos e entre alunos contribuem para a compreensão dos aspetos fundamentais sobre a divisão e para o desenvolvimento de estratégias de resolução de problemas mais sofisticadas?

1.2. Pertinência do estudo

A pertinência do estudo apresenta duas dimensões: uma, pessoal, relacionada com o desenvolvimento profissional. Outra, de contributo para o conhecimento sobre ensino/aprendizagem da matemática no 1º Ciclo, especificamente sobre a divisão.

A dimensão de desenvolvimento profissional relaciona-se com a motivação pessoal para o estudo sobre este tema, decorrente da necessidade de procura de conhecimento sobre o que é ensinar/aprender a divisão com compreensão, indo para além do mero ensino/aprendizagem de procedimentos de cálculo formais e tradicionais.

O estudo pretende também ser um contributo para um maior conhecimento e valorização do ensino/aprendizagem da divisão, com compreensão de conceitos e procedimentos e numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número.

Presentemente, com o Programa de Matemática para o Ensino Básico em vigor, assistimos a uma desvalorização dos aspetos da compreensão no ensino/aprendizagem das operações aritméticas, incluindo a divisão, em detrimento de uma ênfase na memorização e mecanização de procedimentos. Podemos ler no texto de introdução aos conteúdos do domínio dos Números e Operações para o 1º Ciclo, relativamente ao ensino/aprendizagem das quatro operações que "é fundamental que os alunos adquiram durante estes anos fluência de cálculo e destreza na aplicação dos quatro algoritmos, próprios do sistema decimal, associados a estas operações" (Ministério da Educação e Ciência, 2013, p. 6). Advertem que esta fluência não pode ser conseguida sem uma sólida proficiência no cálculo mental.

Neste documento, relativamente à divisão, são definidas como metas de aprendizagem para o 4º ano:

- A capacidade de efetuar divisões inteiras com dividendos de três algarismos e divisores de dois algarismos, nos casos em que o dividendo é menor que 10 vezes o divisor, começando por construir uma tabuada do divisor constituída pelos produtos com os números de 1 a 9 e apresentar o resultado com a disposição usual do algoritmo;
- Efetuar divisões inteiras com dividendos de três algarismos e divisores de dois algarismos, nos casos em que o dividendo é menor que 10 vezes o divisor, utilizando o algoritmo, ou seja, determinando os algarismos do resto sem calcular previamente o produto do quociente pelo divisor.
- Efetuar divisões inteiras com dividendos de dois algarismos e divisores de um algarismo, nos casos em que o número de dezenas do dividendo é superior ou igual ao divisor, utilizando o algoritmo.

- Efetuar divisões inteiras utilizando o algoritmo.
- Identificar os divisores de um número natural até 100.
- Resolver problemas de vários passos envolvendo números naturais e as quatro operações.

Estas orientações vieram mudar o rumo do trabalho de ensino/aprendizagem das operações aritméticas que vinha a ser realizado ao nível do 1º Ciclo baseado no anterior Programa de Matemática para o Ensino Básico onde é referido que:

> "Ao longo dos quatro anos devem ser trabalhadas diversas situações que conduzam à compreensão das operações e das suas relações e a compreensão dos efeitos de uma operação. É importante ainda que os alunos aprendam a operar recorrendo a um amplo conhecimento de estratégias de cálculo e ao conhecimento que têm dos números e que aprendam a realizar algoritmos." (Ministério da Educação, 2007, p. 14).

Esta posição verifica-se também nos objetivos específicos relacionados com o ensino/aprendizagem da divisão que são enunciados para o 3º e 4º ano:
- Usar estratégias de cálculo mental e escrito para as quatro operações usando as suas propriedades.
- Compreender que os divisores de um número são divisores dos seus múltiplos (e que os múltiplos de um número são múltiplos dos seus divisores).
-Utilizar estratégias de cálculo mental e escrito para as quatro operações usando as suas propriedades.
- Compreender a divisão nos sentidos de medida, partilha e razão.
- Compreender, na divisão inteira, o significado do quociente e do resto.
- Resolver problemas tirando partido da relação entre a multiplicação e a divisão.
- Compreender e realizar algoritmos para as operações multiplicação e divisão (apenas com divisores até dois dígitos).
- Realizar estimativas e avaliar a razoabilidade de um dado resultado em situações de cálculo.
- Compreender e usar a regra para calcular o produto e o quociente de um número por 10, 100 e 1000.
- Resolver problemas que envolvam as operações em contextos diversos.

1.3. Organização do trabalho

Este trabalho encontra-se organizado em cinco capítulos.

O primeiro capítulo é a presente introdução.

O segundo capítulo compreende o enquadramento teórico onde são apresentadas as referencias teóricas que orientaram a compreensão, análise e reflexão sobre os fenómenos observados e sobre os dados recolhidos.

No terceiro capítulo são apresentadas e fundamentadas as escolhas realizadas ao nível metodológico. É feita uma contextualização do estudo através da caracterização da escola e da turma onde foi realizado, dos seus participantes e da forma como foram selecionados. É explicado o processo de recolha de dados através da apresentação dos métodos utilizados e da experiência de ensino desenvolvida na sala de aula. No final é realizada uma breve explicação do processo de análise dos dados.

No quarto capítulo é realizada a análise dos dados recolhidos focada em dois pares de alunos. São apresentados e discutidos os dados provenientes do teste diagnóstico e das tarefas da experiência de ensino descritas no capítulo anterior.

No quinto capítulo será realizada uma breve síntese da investigação seguida de uma apresentação das conclusões que surgiram do trabalho realizado, relativamente aos objetivos e às questões inicialmente colocados. Serão depois apresentadas as limitações do estudo e as recomendações para a investigação e para o ensino. No final será realizada uma reflexão sobre o duplo papel de professora/investigadora.

No final deste trabalho podemos encontrar ainda as referências e os anexos.

2. ENQUADRAMENTO TEÓRICO

Neste capítulo são apresentadas as referencias teóricas que orientaram a compreensão, análise e reflexão sobre fenómenos observados e sobre os dados recolhidos.

2.1. Perspetivas sobre o ensino/aprendizagem das operações aritméticas

Durante muito tempo, o ensino/aprendizagem das operações aritméticas fundamentais, nomeadamente da divisão, resumiu-se ao ensino/aprendizagem de procedimentos de cálculo com um algoritmo e à mecanização da utilização do mesmo. Presentemente, vários investigadores defendem que o ensino/aprendizagem do cálculo e das operações aritméticas deve ser mais abrangente e apontam para diversos aspetos que devem ser trabalhados com os alunos no sentido de desenvolverem uma aprendizagem com compreensão dos números e das operações, visando a construção de um conhecimento mais consistente e aprofundado dos mesmos e de uma maior flexibilidade e capacidade de cálculo.

Numa investigação sobre as diferenças dos resultados em testes internacionais de aritmética onde alunos ingleses tinham obtido piores resultados do que os alunos de outros países como a Holanda, Anghileri, Beishuizen e van Putten (2002) identificaram diferenças nos currículos escolares nacionais relativamente às abordagens sugeridas ao ensino/aprendizagem do cálculo escrito que relacionaram com as diferenças de desempenho dos alunos.

Verificaram que na Inglaterra, no documento *National Numeracy Strategy* definido pelo Department for Education and Employment (Dfee) em 1998, é colocado ênfase no cálculo mental nos primeiros anos escolares e proposto que a realização deste trabalho com números maiores necessita da introdução de anotações informais em papel e lápis que se tornam parte da estratégia mental. Considera-se ainda que aos 11 anos os alunos devem saber procedimentos padronizados para cada operação aritmética. Os investigadores verificaram que estes procedimentos padronizados são pouco diferentes dos algoritmos tradicionais.

Na Holanda, confirmaram que o movimento Realistic Mathematics Education (RME) introduziu mudanças radicais nos métodos de ensino dando um enfoque precoce aos métodos mentais e mais tarde ao desenvolvimento de diferentes níveis de cálculo escrito. Deste modo, considera-se que calcular não se baseia no ensino do valor de posição em primeiro lugar, mas desenvolve-se de uma forma gradual através da ampliação das estratégias de contagem.

Verificaram que a pesquisa levou à proposta de trajetórias onde a evolução da aprendizagem é um processo gradual de modificações à medida que os alunos passam por diferentes níveis de compreensão: desde a capacidade de inventar resoluções informais relacionadas com o contexto até à criação de diferentes caminhos e níveis de esquematização. Averiguaram que é considerado um aspeto fundamental da aprendizagem do cálculo escrito a evolução de estratégias informais para estratégias formais mais sofisticadas, o que envolve reflexão na escolha de estratégias numa discussão de toda a turma. Apuraram que a abordagem do RME exige que os alunos resolvam diversos problemas baseados no mundo real orientados por um ensino interativo em vez de uma instrução direta dos algoritmos padrão.

Rocha e Menino (2009) baseando-se no estudo de Anghileri (2001) também sobre os currículos ingleses e holandeses, explicam mais aprofundadamente aspetos das diferenças entre estas duas abordagens. Começando pelo papel da contagem para desenvolver estratégias de cálculo, verifica-se que em Inglaterra, contar é visto como uma atividade mecânica a que não se confere muito valor e cuja utilização para o cálculo é considerada "primitiva", enquanto que na perspetiva holandesa é com base na contagem que é promovida a reinvenção de estratégias informais de cálculo.

Outro aspeto salientado é relativo ao valor de posição que, na perspetiva inglesa, é visto como um princípio muito importante, organizador da Matemática, constituinte da base de vários métodos escritos de cálculo, em particular do algoritmo tradicional. O trabalho sobre o valor de posição inicia-se com a decomposição do número em dezenas e unidades e é nesta decomposição que assenta o desenvolvimento do cálculo. Na perspetiva holandesa não é feita nenhuma referência explicita ao valor de posição, defendendo-se uma abordagem mais holística ao número com o desenvolvimento de estratégias de cálculo escrito que mantêm ao longo dos cálculos, a utilização dos números não de dígitos.

Analisando as perspetivas evidenciadas pelas diferentes abordagens ao ensino/aprendizagem do cálculo e das operações aritméticas verificamos que elas divergem em diversos aspetos, pontos de partida, capacidades valorizadas, tipos de tarefa preconizadas, trajetória de desenvolvimento das aprendizagens, papel do aluno e do professor e aprendizagens objetivadas.

Como afirmam Rocha e Menino (2009) referindo ainda um estudo de 2001 de Anghileri, em vários países, por exemplo em Inglaterra, embora se recomende que não deve ser feita uma introdução precoce dos algoritmos, continua a exigir-se o domínio dos algoritmos tradicionais.

Numa perspetiva diferente, é dado ênfase ao desenvolvimento do sentido do número e das operações, valorizando o espaço para os alunos desenvolverem as suas estratégias de cálculo informais, o cálculo mental e as relações numéricas e o cálculo numérico de representação horizontal.

Como referem ainda os mesmos autores, vários estudos têm defendido que os alunos podem atuar como verdadeiros matemáticos e reinventar procedimentos e algoritmos e que esta atividade irá contribuir para melhorar a sua compreensão matemática.

Fuson (2003) realizou investigação sobre o ensino/aprendizagem do cálculo e das operações aritméticas (especificamente sobre a multiplicação e divisão com números multidígitos) nos EUA e no Canadá onde, como afirma a autora, tradicionalmente os alunos aprendiam em primeiro lugar a calcular com os números inteiros e depois aplicavam o tipo de cálculo. Defende que este tipo de abordagem apresenta diversos problemas visto que, em primeiro lugar, os alunos menos avançados nunca atingem a fase de aplicação, em segundo lugar, os problemas normalmente aparecem no fim de cada seção ou capítulo de cálculo e por isso os alunos nem leem os problemas com atenção, simplesmente aplicam a operação que têm estado a praticar. Considera que esta prática aliada ao ensino de focar os alunos em palavras chave dos problemas em vez de construírem um modelo mental completo da situação problemática leva a uma fraca capacidade de resolução de problemas porque os alunos não aprendem a modelar as situações dos problemas de forma autónoma. Em terceiro lugar, tomar contato com situações problemáticas só após a aprendizagem das operações matemáticas impede os alunos de relacionarem as operações com aspetos das situações problemáticas, o que limita a criação do sentido das operações e a capacidade dos alunos as utilizarem numa variedade de situações.

Fuson (2003) explica que “Aprender e praticar métodos de cálculo são memórias comuns da aprendizagem do séc. XX. No entanto, o ensino e aprendizagem da Matemática do séc. XX eram orientados por objetivos e teorias de aprendizagem que não são suficientes para o séc. XXI” (p.300). Na sua perspetiva, num mundo onde as calculadoras são muito acessíveis, os computadores cada vez mais utilizados e a Internet dá acesso a uma grande variedade de informação, a sociedade necessita de todos os cidadãos uma aprendizagem ao longo da vida, uma abordagem flexível à resolução de problemas e a capacidade de utilizar calculadoras com compreensão. Considera que o séc. XXI necessita de um maior enfoque numa grande variedade de resolução de problemas e de reduzir o enfoque na aprendizagem e prática por repetição de métodos de cálculo tradicionais.

Segundo esta autora, a pesquisa tem indicado que começar (a aprendizagem das operações) com situações problema garante melhores competências de resolução de problemas e iguais ou melhores competências de cálculo. Defende que o desenvolvimento da fluência de cálculo e a aquisição de capacidades de resolução de problemas estão interligadas e devem desenvolver-se ambas com compreensão.

2.2. O sentido de número

No seguimento das modificações dos objetivos e da abrangência da matéria da disciplina de Matemática no Ensino Básico, McIntosh, Reys e Reys (1992) constatam que se dá uma modificação também ao nível do vocabulário.

Explicam que a expressão “sentido de número” ganhou aceitação como aquela que abrange a essência das modificações que têm sido realizadas ao nível do ensino/aprendizagem da Matemática resultantes de uma avaliação do papel e natureza do cálculo no ensino elementar da Matemática, que levam em consideração a pouca necessidade de utilização do cálculo formal escrito por um adulto e o crescente papel da escolha de estratégias de cálculo e da reflexão sobre o processo e resultado da utilização de determinada estratégia.

Referem também os mesmos investigadores que esta expressão está aberta a diferentes interpretações e que no seu entendimento refere-se ao sentido de número básico requerido por todos os adultos independentemente da sua ocupação e cuja aquisição por todos os alunos deve ser o objetivo principal da escolaridade obrigatória. Definem sentido de número como:

> A compreensão geral de um indivíduo sobre os números e as operações juntamente com a capacidade e predisposição para usar essa compreensão de uma forma flexível para fazer juízos matemáticos e para desenvolver estratégias úteis na manipulação dos números e os métodos de cálculo como um meio de comunicação, processamento e tratamento de informação. (McIntosh, Reys & Reys,1992, p. 3)

Relativamente a esta expressão afirma também Mendes (2012) que é utilizada em contextos distintos e que o seu significado é muito amplo e complexo e nem sempre são coincidentes as caraterizações apresentadas.

Sowder (1989) referida por Mendes (2012), na tentativa de definir e caraterizar a expressão sentido de número, realizou uma análise pessoal dos múltiplos entendimentos sobre esta expressão dos participantes na conferência *Establishing foundations for research on nunber sense and related topics* (Sowder & Schapelle, 1989) e verificou que estes incluem, entre outros, o conhecimento dos números e como podem ser utilizados em determinadas situações, a flexibilidade na utilização de estratégias de cálculo mental ou de cálculo aproximado, a capacidade para usar números de referência adequados, a compreensão e utilização das diferentes representações dos números e a compreensão dos efeitos relativos das operações numéricas e das suas propriedades.

Acrescenta Mendes (2012) que o desenvolvimento do sentido de número é tido como essencial por muitos educadores matemáticos, sendo referenciado em documentos de natureza curricular como um dos objetivos principais da aprendizagem da Matemática principalmente nos primeiros anos de escolaridade.

No documento *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (NCTM, 2008) o desenvolvimento do sentido de número é identificado como o ponto-chave da Norma Números e Operações do pré-escolar ao 12º ano.

No documento *Programa de Matemática para o Ensino Básico* (ME,2007) é referido como propósito principal de ensino do tema dos Números e Operações para todo o Ensino Básico, embora o documento curricular presentemente em vigor *Programa e Metas Curriculares de Matemática* (MEC, 2013) revele um abandono deste propósito não havendo em todo o seu texto qualquer referência à expressão “sentido de número”.

McIntosh, Reys e Reys (1992) além de definirem o sentido de número, realizaram uma tentativa de organizar as suas componentes para a construção de um quadro de referência para o examinar. Identificaram três grandes áreas onde o sentido do número desempenha um papel fundamental:

1. O conhecimento e destreza com os números - que inclui o sentido da ordenação dos números, múltiplas representações dos números, sentido das grandezas relativa e absoluta dos números e sistemas de valores de referência.

2. O conhecimento e a destreza com as operações – que inclui a compreensão do efeito das operações, a compreensão das propriedades matemáticas e a compreensão das relações entre as operações.

3. Aplicação do conhecimento e da destreza com os números e as operações em situações de cálculo – que inclui a compreensão para relacionar o contexto de um problema e os cálculos necessários, a consciencialização da existência de múltiplas estratégias, a inclinação para usar uma representação e/ou um método eficaz e a inclinação para rever os dados e a razoabilidade dos resultados.

Através do esquema da Figura 1, tentam descrever a forma como as grandes componentes do sentido do número estão interconectadas, influenciando-se mutuamente.

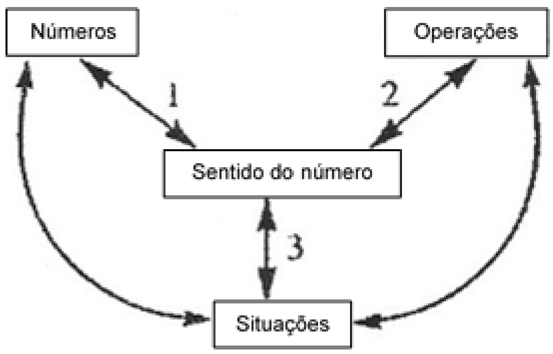


Figura 1. Interconexões entre as grandes componentes do sentido de número

Estes investigadores afirmam que a aquisição do sentido de número é um processo gradual e evolutivo que começa muito antes do início da educação formal. Consideram o sentido de número altamente personalizado e que está relacionado com as ideias sobre o número que se vão estabelecendo e também com a forma como essas ideias são estabelecidas.

2.3. O ensino/aprendizagem da divisão com compreensão

Como afirma Mendes (2013), "a aprendizagem da divisão é, muitas vezes confundida com a mecanização das regras associadas ao algoritmo não deixando espaço para o desenvolvimento de um trabalho com os alunos em torno da compreensão desta operação." (p.6). Na perspetiva desta investigadora, aprender a dividir significa reconhecer esta operação em diferentes situações, ser capaz de compreender e usar a relação entre a divisão e a multiplicação e desenvolver uma teia de relações numéricas que permita uma flexibilidade de cálculo baseada nas propriedades destas operações.

Também Rocha, Rodrigues e Menino (2007), baseados na perspetiva de Treffers e Buys (2001), identificam dois pressupostos essenciais para a aprendizagem da divisão, nomeadamente a importância e intencionalidade dos contextos das tarefas e a progressão de níveis, considerando que estes níveis não são estanques. Referem ainda que a aprendizagem da divisão deve ser feita em estreita relação com a da multiplicação.

2.3.1. Grandes ideias da divisão

A expressão "grandes ideias" utilizada por Fosnot e Dolk (2001) em referência a Schifer e Fosnot (1993), é uma designação para "as ideias organizadoras centrais da Matemática – princípios que definem a ordem matemática.” (p. 10). Explicam que elas estão profundamente relacionadas com as estruturas matemáticas e são também características das mudanças no pensamento de quem aprende, na perspetiva, na lógica, nas relações matemáticas que elas estabelecem. Estão ligadas a relações de parte/todo, à estrutura do pensamento em geral. Consideram estas ideias “grandes” porque são críticas/fundamentais para a Matemática e porque correspondem a grandes saltos de desenvolvimento no raciocínio dos alunos/crianças.

Fosnot e Dolk (2001) tentando responder às questões “Como é que as crianças conseguem desenvolver estratégias (de divisão) mais eficientes? Que “grandes ideias” devem primeiro construir? Como podemos facilitar e assegurar este desenvolvimento?” (p.52), salientam que é essencial a compreensão da ligação entre a multiplicação e a divisão para a compreensão das relações parte/todo na estrutura multiplicativa, e para o desenvolvimento das estratégias de divisão. Destacam também a necessidade de exploração de vários contextos dos diferentes sentidos da divisão, acrescentando a necessidade da exploração da relação entre o sentido de partilha e medida.

Sintetizando as ideias destes investigadores com as de Mendes (2012) e de Rocha, Rodrigues e Menino (2007), podemos identificar como algumas das grandes ideias da divisão, questões relacionadas com o contexto e com a ligação entre a divisão e a multiplicação. São estas ideias fundamentais que vão servir de base à investigação realizada.

2.3.1.1. O contexto

Relativamente ao contexto, salientam-se aspetos específicos da operação da divisão, nomeadamente:

- os diferentes sentidos que esta operação pode apresentar - medida, partilha e razão;

- a relação entre situações de partilha e de medida;

- os sentidos que devem ser dados ao resto.

2.3.1.1.1. Os sentidos da divisão

Sobre os sentidos da divisão, explicam Fosnot e Dolk (2001) que no sentido de medida (quotative) encontramos situações em que o tamanho do grupo está especificado no problema e temos que determinar o número de grupos. Como exemplo, temos a situação de um hotel com 240 quartos, 24 por cada andar e queremos determinar quantos andares tem o hotel. No sentido de partilha (partitive) encontramos situações que envolvem descobrir que quantidade está no grupo quando o número de grupos é conhecido. Como exemplo, temos a situação de um hotel com 240 quartos e 24 andares e queremos determinar quantos quartos haverá em cada andar. Relativamente ao sentido de razão, explicam Rocha, Rodrigues e Menino (2007) que se refere a situações que envolvem a determinação de uma razão em vez de um nº de objetos. Indicam como exemplo a situação do pai do João que ganha 1000 euros e o pai do Francisco que ganha 500 euros e onde é pedido para se fazer uma comparação entre os dois vencimentos.

Os mesmos autores referem relativamente aos sentidos da divisão que os alunos devem perceber que dividir não está unicamente associado à situação de partilhar igualmente. Identificam os problemas de divisão com o sentido de razão como os que envolvem situações mais complexas e que só posteriormente devem ser apresentados aos alunos.

2.3.1.1.2. A relação entre situações de partilha e de medida

Fosnot e Dolk (2001) reconhecem as situações de sentido de partilha como as que inicialmente trazem mais dificuldades de resolução aos alunos devido ao tipo de estratégias que estes intuitivamente utilizam para a sua resolução. Afirmam que as abordagens iniciais dos alunos aos contextos de divisão são feitas através da distribuição um a um (nas situações de partilha) ou por adições e subtrações sucessivas (nas situações de medida). Estes diferentes procedimentos dificultam aos alunos a compreensão de que estas duas situações estão relacionadas.

Consideram, tal como Rocha, Rodrigues e Menino (2007), que a distinção entre contextos de partilha e de medida é crítica. Isto porque de forma geral os alunos inicialmente são influenciados pelas características específicas dos seus contextos e resolvem os dois tipos de situação de forma diferente, o que dificulta a compreensão de que ambas as situações são de divisão.

2.3.1.1.3. O resto

Relativamente ao resto, Fosnot e Dolk (2001) referem que na vida real muitos problemas que envolvem divisão possuem resto, ao qual temos de dar sentido tendo em conta o contexto e, por isso, os alunos devem contactar com várias situações em que o contexto afeta o resto de forma diferente, identificando três tipos de situações: arredondamento para cima, para baixo e equitativo. Afirmam estes investigadores que alunos que habitualmente resolvam estes problemas encontram formas de matematicamente pensar sobre a sua vida, não desenvolvem procedimentos que não lhes façam sentido e conseguem tratar o resto em função do contexto.

Rocha, Rodrigues e Menino (2007), encaram o resto como uma dificuldade acrescida do estudo da divisão considerando importante que desde cedo os alunos sejam confrontados com situações em que a divisão não é exata.

2.3.1.2. A relação entre a divisão e a multiplicação

A exploração da relação entre a divisão e a multiplicação é apontada por Fosnot e Dolk (2001) e Mendes (2013) como indispensável para a evolução das estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de problemas de divisão.

Como explicam Nunes, Campos, Magina e Bryant (2005) conceptualmente a divisão e a multiplicação referem-se ao mesmo tipo de raciocínio, o multiplicativo, que se caracteriza por envolver duas variáveis numa relação constante.

Fosnot e Dolk (2001) referem que as situações multiplicativas podem ser resolvidas tanto através da divisão como da multiplicação e que a construção do raciocínio multiplicativo vai lhes fornecer uma ferramenta poderosa que podem utilizar no desenvolvimento de estratégias de multiplicação ou divisão e, desta forma, compreender as relações parte/todo.

Mendes (2013), referindo Treffers e Buys (2008), considera importante a abordagem da divisão através da sua relação com a multiplicação, podendo a divisão surgir informalmente como inversa desta operação, a partir de uma exploração da própria multiplicação. Referindo também Greer (2012), explica que a relação inversa entre multiplicação e divisão tem implicações significativas no cálculo eficiente e flexível e na verificação da compreensão conceptual dos alunos.

Robinson e LeFevre (2012) afirmam que a compreensão e a utilização da relação inversa entre a multiplicação e a divisão desenvolvem-se relativamente devagar. Tal como Dubé e Robinson (2009), referem que existe pouca pesquisa sobre o desenvolvimento da compreensão das relações entre a multiplicação e a divisão.

Dubé e Robinson (2009) explicam ainda que o alcance da análise dos resultados da realização de problemas/tarefas sobre o conceito de inversão está a ser debatido visto que alguns investigadores (Baroody & Lai, 2007; Vilette, 2002) acreditam que pode levar a uma avaliação excessiva do conhecimento conceptual visto ser necessário haver uma confirmação posterior à resolução, da utilização deste conhecimento. Por outro lado, afirmam que outros investigadores (Gilmore & Spelke, 2008) descobriram que pode também levar à subestimação deste conhecimento por parte dos alunos visto que alguns entendem o conceito de inversão mesmo antes de conseguirem aplicar esse conhecimento.

2.3.1.3. O modelo retangular

Segundo Mendes (2005), na aprendizagem da multiplicação e divisão, o modelo retangular é considerado por diversos autores (Barmby, Bilsborough, Harries & Higgins, 2009; Battista, Clements, Arnoff, Battista & Borrow, 1998) como uma das representações mais potentes, que suporta a evolução do raciocínio multiplicativo.

Rocha, Rodrigues e Menino (2007), em referência a Treffers e Buys (2001), afirmam que o recurso à disposição retangular como demonstração clara da divisão e multiplicação como operações inversas. Outro aspeto que salientam como importante para a aprendizagem da divisão é a sua capacidade de atenuar as diferenças entre problemas de medida e partilha, uma vez que a sua simetria tende a desvanecer esta distinção.

Jacob e Mulligan (2014) destacam o facto de o modelo retangular permitir a visualização simultânea das três quantidades envolvidas nas situações de multiplicação e de divisão com números inteiros: o todo, o número de grupos iguais e a quantidade em cada grupo. Consideram que o modelo retangular pode ser utilizado para auxiliar os alunos a estruturar a compreensão da multiplicação e divisão, nomeadamente na compreensão e coordenação das quantidades envolvidas, na compreensão da relação entre a multiplicação e divisão e da comutatividade e na compreensão da ligação destas operações a uma variedade de situações e representações.

Fosnot e Dolk (2001) afirmam que o modelo retangular pode ser utilizado tanto na multiplicação como na divisão, inicialmente como um modelo das estratégias dos alunos, podendo depois transformar-se numa poderosa ferramenta para pensar e realizar cálculos.

Como explicam estes investigadores, para matematizar (construir o significado do real através da linguagem matemática), a pessoa vê, organiza e interpreta o mundo através e com modelos matemáticos. Estes modelos começam por ser simplesmente representações de situações ou problemas, elaboradas por cada um de nós.

Defendem os mesmos investigadores que os professores podem utilizar os modelos como uma opção didática para transferir a aprendizagem de soluções informais específicas de um contexto para soluções mais formais e generalizáveis e passar de modelos de pensamento para modelos para o pensamento.

Como explica também Mendes (2013), referindo ideias de Gravemeijer (2005), no início da aprendizagem, os modelos construídos pelos alunos estão muito associados à sua interpretação da situação proposta e emergem da representação da ação, denominando-se por modelos de situação.

O professor pode recorrer ao uso de modelos de estratégias para ilustrar o raciocínio dos alunos, para auxiliar as discussões sobre os procedimentos construídos e, ao mesmo tempo, incentivá-los a recorrer a eles para representar o seu próprio modo de pensar. Deste modo, os modelos de situação evoluem para modelos para pensar, ou seja, modelos matemáticos de relações numéricas.

Fosnot e Dolk (2001), também referindo Gravemeijer, explicam que a mudança de um modelo de pensamento para um modelo para o pensamento coincide com uma mudança na forma dos alunos pensarem sobre a situação do contexto, que inicialmente assume uma forma modelada passando para ser focada sobre as relações matemáticas. Os investigadores consideram esta mudança uma grande etapa no desenvolvimento matemático.

Mendes (2013) refere ainda que os contextos das tarefas têm muita importância para o desenvolvimento de modelos a eles associados, embora nem sempre os alunos as resolvam recorrendo a modelos que o professor antecipou.

Fosnot e Dolk (2001) defendem esta ideia, acrescentando que os modelos não podem ser transmitidos e tal como as estratégias e as grandes ideias, os alunos têm que os construir e que só porque nós planificamos um contexto com um determinado modelo em mente, não significa que todos os alunos o interpretem ou assimilem o contexto desta forma.

2.4. Desenvolvimento do ensino/aprendizagem da divisão

Relativamente à forma como deverá ser desenvolvida a progressão dos alunos na aprendizagem da divisão, Ferreira (2005) afirma que, tal como acontece no ensino/aprendizagem das outras operações, uma excessiva valorização de processos formais, sem que ao aluno seja dado tempo para utilizar processos informais, não favorece o desenvolvimento do sentido da divisão e das capacidades de raciocínio matemático. Salienta a importância da partilha destes processos entre os alunos, visto que tendem a apropriar-se de ideias e procedimentos uns dos outros quando veem neles significado e quando os ajudam a progredir para um nível superior de cálculo.

Fosnot e Dolk (2001) referem que a procura do refinamento e a melhoria da eficácia das estratégias desenvolvidas pelos alunos pode ser encaminhada através da criação de potenciais constrangimentos nos contextos e pela discussão das estratégias informais com os alunos. Mencionam que por mais tentador que seja o encorajamento de todos os alunos na utilização de estratégias eficientes, eles necessitam de tempo para explorá-las e compreendê-las por si próprios.

Afirmam ainda os mesmos investigadores que o desenvolvimento da aprendizagem é complexo. Estratégias, grandes ideias e modelos são aspetos que estão todos envolvidos, todos necessitam ser desenvolvidos pois eles afetam-se mutuamente. Eles são os passos, as mudanças e os mapas mentais da “caminhada”.

2.4.1. Estratégias dos alunos

Como explica Mendes (2013) grande parte das investigações sobre os procedimentos dos alunos na resolução de tarefas de divisão carateriza os procedimentos informais associados a esta operação, existindo também estudos que apresentam categorizações válidas para as quatro operações.

Após a leitura dos estudos que seguidamente vou referir, verifiquei algumas divergências relativamente ao significado de conceitos como estratégias e procedimentos tal como também menciona Mendes (2012).

Segundo Fosnot e Dolk (2001), as primeiras tentativas de resolução de situações de divisão dos alunos são semelhantes às suas tentativas na multiplicação, fazem contagens. As estratégias caraterísticas das primeiras tentativas de divisão são aditivas, partindo do grupo para o todo e envolvem contar várias vezes ou tentativa e erro. Expõem que como os alunos iniciam a resolução deste tipo de problemas com estratégias de contagem “a partir de”, centrando-se no nº de elementos do grupo em vez do grupo e o todo simultaneamente, os problemas de partilha tornam-se mais difíceis. Referem por isso que enquanto as contagens conseguem resolver problemas de medida, os problemas de partilha são inicialmente resolvidos através de tentativa/ erro e que só através da exploração de muitos contextos de partilha e da reflexão sobre a sua ação e resultado os alunos constroem a “dealing out strategy” (estratégia de distribuição). Referem que os alunos matematizam muitas vezes os contextos de divisão através da distribuição um a um nas situações de partilha e por adições e subtrações sucessivas em situações de medida e que quando os alunos já “construíram” a estrutura multiplicativa, têm uma forma poderosa que lhes permite matematizar situações tanto através de estratégias de multiplicação ou divisão.

Num estudo de caso, Jesus (2005) procurou compreender como um aluno seu do 3º ano de escolaridade desenvolveu o sentido de divisão, a partir do seu envolvimento na resolução de problemas onde estava implícito o conceito de divisão. Verificou que o desenvolvimento progressivo do sentido de número e das operações contribuiu para que o aluno se mostrasse confiante para resolver os problemas propostos e progressivamente adquirir o sentido da divisão. Verificou ainda que a compreensão da adição, subtração e multiplicação parecem ter sido decisivas para a apropriação do conceito de divisão e que o uso de estratégias espontâneas parece ter favorecido a compreensão do sentido de divisão dado que, ainda antes de a ter aprendido formalmente, o aluno conseguiu solucionar os problemas a partir de caminhos alternativos.

Ferreira (2005) realizou um trabalho com os seus alunos do 1º ao 4º ano de escolaridade com o objetivo de analisar o modo como os alunos desenvolvem o conceito de divisão e como pode o professor contribuir para a construção e aprendizagem desse conceito. Verificou que desde muito cedo os alunos podem resolver problemas de divisão como medida e partilha e que é importante criar nos alunos a ideia de que a utilização de estratégias pessoais é sempre uma opção importante na resolução de problemas.

Num estudo realizado por Mullingan e Mitchelmore (1997) sobre os modelos intuitivos de multiplicação e divisão construídos por alunos do 2º e 3º anos conseguiram identificar 12 estratégias distintas de cálculo que foram agrupadas em categorias, a partir das quais foram inferidos modelos intuitivos. Os investigadores explicam que consideram um modelo intuitivo como uma estrutura mental interna que corresponde a um tipo de estratégias de cálculo. Referem que a noção de modelos intuitivos parece ter tido origem em Fischbein et al. num estudo de 1985, em que defendem que cada operação aritmética geralmente permanece ligada a um modelo intuitivo inconsciente e primitivo que serve de mediador na procura da operação necessária a resolução de determinado problema. Este modelo intuitivo poderá ser a internalização de uma operação física relacionada com a situação do problema apresentado e por isso existe uma correspondência direta entre o modelo intuitivo e a estrutura semântica.

Fischbein et al. (referidos por Mullingan & Mitchelmore, 1997) descreveram para a divisão, modelos intuitivos correspondentes a estruturas semânticas de partilha e de medida e defendem que a estrutura de um problema determina qual o modelo que é ativado.

Com uma opinião diferente, Kouba (referido por Mullingan & Mitchelmore,1997) investigou estes modelos intuitivos e chegou à conclusão de que os problemas de partilha e medida não geravam estratégias de cálculo diferentes.

Mullingan e Mitchelmore (1997) descobriram que os alunos utilizam fundamentalmente 4 tipos de modelo intuitivo para a divisão: contagem direta, adição sucessiva, subtração sucessiva e a operação multiplicativa que na tabela seguinte são relacionados com o tipo de estratégias associadas.

Tabela 1

*Modelos intuitivos para a divisão. (*Adaptado de Mulligan & Mitchelmore, 1997, p.318)

Tipo de estratégias	Modelo intuitivo
Estratégias baseadas na utilização de modelos concretos combinada com um processo de contagem.	Contagem direta
Estratégias que levam à criação de uma sequência decrescente de múltiplos que começa a partir do dividendo.	Subtração sucessiva
Estratégias que levam à criação de uma sequência crescente de números que levam à "construção" do dividendo.	Adição sucessiva
Estratégias que utilizam a operação de multiplicação.	Operação multiplicativa

Relativamente ao modelo intuitivo em que é utilizada a multiplicação os investigadores referem que nalguns casos a solução foi adivinhada, conjeturada e foi depois verificada pela multiplicação. Noutros casos os alunos procuraram por um múltiplo do divisor que fosse igual ao dividendo, mas sem recorrer a uma sequência inteira de múltiplos.

Mullingan e Mitchelmore (1997) descobriram um paralelo entre os modelos intuitivos na divisão e na multiplicação sendo que 3 deles são comuns às duas operações, a contagem direta, a adição sucessiva e a operação multiplicativa. Consideram o modelo da adição sucessiva mais avançado que a subtração sucessiva, visto que permite a sua utilização em situações tanto de multiplicação como de divisão. Consideram que esta unificação permitirá certamente reduzir a carga cognitiva dos alunos o que levará a uma maior eficiência e a uma mais rápida passagem ao modelo de operação multiplicativa.

Na tabela seguinte referem as diferentes estratégias de cálculo para a divisão que identificaram associadas ao respetivo modelo intuitivo.

Tabela 2

Modelos intuitivos e estratégias de cálculo para a divisão. (Adaptado de Mulligan & Mitchelmore, 1997, p.316)

Modelo intuitivo	Estratégia de cálculo
Contagem direta	Correspondência um para muitos Contagem um a um Partilha Agrupamento através de tentativa e erro
Subtração sucessiva	Contagem decrescente rítmica (ex. simultaneamente à contagem decrescente, há uma contagem do nº de grupos.) Contagem decrescente por saltos Subtração repetida Metade do aditivo (ex. partir o 8 em 2 metades dá 4 mais 4)
Adição sucessiva	Contagem crescente rítmica (ex. simultaneamente à contagem crescente, há uma contagem do nº de grupos.) Contagem crescente por saltos Adição repetida Dobro do aditivo (ex. 3 mais 3 são 6, 6 e 6 dá 12)
Operação multiplicativa	Facto multiplicativo conhecido Facto multiplicativo derivado

Num estudo realizado com alunos do 4º ano de escolaridade, Alcobia (2014) verificou que os alunos recorrem a estratégias aditivas e multiplicativas muito diversificadas na resolução de problemas de divisão. Recorrem também à utilização do valor de posição e à tentativa e erro. Utilizam com maior frequência as estratégias multiplicativas.

Ambrose et al. (2003), referidos por Mendes (2012), efetuaram uma investigação com alunos dos 8 aos 11 anos e identificaram 4 categorias de procedimentos dos alunos para a resolução de tarefas de divisão de partilha e de medida.

A primeira categoria, em que os alunos trabalham com um grupo de cada vez, relaciona-se com a utilização de subtrações sucessivas do número mais pequeno (divisor) a partir do número maior (dividendo), à adição sucessiva do número mais pequeno até perfazer o número maior e ao procedimento distributivo. Inicialmente, os 2 primeiros procedimentos são mais utilizados em problemas que envolvem a divisão por medida, isto porque nas situações de partilha os alunos não sabem à partida o número que podem adicionar ou subtrair repetidamente. O procedimento distributivo é utilizado pelos alunos em problemas de divisão por partilha e consiste em articular o seu conhecimento sobre os números (por exemplo, múltiplos de 10, de 5 ou 2) com representações visuais.

A segunda categoria foi denominada não decompor o dividendo. Nela encontramos procedimentos que correspondem à subtração recorrendo à estrutura decimal e ao uso de múltiplos de 10, sem realizarem a decomposição do dividendo. Por exemplo, para embalar 896 maçãs em embalagens de 35 cada, o aluno pensa em múltiplos de 10 do divisor. Então subtrai duas vezes 350 (10x35) do dividendo, depois duas vezes 70 (2x35) e finalmente 35. Deste modo o quociente é calculado adicionando 10+10+10+2+2+1. Este tipo de procedimentos é utilizado em situações de partilha e medida e embora sejam mais abstratos e flexíveis que os anteriores têm uma flexibilidade limitada.

A terceira categoria foi denominada decompor o dividendo. Diz respeito à utilização de procedimentos que recorrem à decomposição do dividendo em, por exemplo, centenas, dezenas e unidades e à realização de divisões parciais. Na resolução do problema anterior, o dividendo 896, divide-se por partes, 800,90 e 6 por 35, adicionam-se os restos e torna-se a dividir até ser possível fazê-lo. Este tipo de procedimentos é utilizado em situações de partilha e medida e embora não muito eficiente, evidencia compreensão dos alunos da divisão e das suas propriedades.

A quarta categoria foi denominada procedimentos de construção. Este tipo de procedimentos está bastante ligado aos que os alunos inventam para resolver problemas de multiplicação em que um dos fatores é desconhecido. Um exemplo ilustrativo é a divisão de 544 por 17, onde o aluno partiu de 170 (10x17) e adicionou sucessivamente 170 até perfazer o número mais próximo possível do dividendo (o número 510), depois para chegar ao dividendo adicionou 34 (2x17). O quociente foi obtido somando 10+10+10+2. Estes procedimentos são também utilizados em situações de partilha e de medida e embora pareçam pouco eficientes à partida devido à dificuldade de pensar em produtos que se aproximem rapidamente do dividendo, os seus inventores são capazes de os tornar mais rápidos e eficazes nos problemas seguintes. Além disso, permite recorrer ao uso de dobros, mas podem tornar-se mais complexos quando os alunos ultrapassam o valor do dividendo e a seguir têm de compensar.

Anghileri, Beishuizen e van Putten, (2002), no seu estudo realizado com alunos ingleses e holandeses do 5º ano (10-11 anos), identificaram diversas estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de problemas de divisão. Estes investigadores referem uma ideia de 1999 de Neuman em que este afirma que existem muitas estratégias informais que podem ser desenvolvidas incluindo contagem, adição sucessiva, blocos (chunks), multiplicação como inversa, dealing, ajustamento por estimativa, metade repetida, muitas das quais vão ser incorporadas nos procedimentos estruturados para o cálculo da divisão.

As estratégias foram classificadas e agrupadas em 8 tipos diferentes, onde podemos encontrar desde estratégias informais inventadas pelos próprios alunos até à utilização de estratégias formais de cálculo escrito. Nem todas as estratégias são aceitáveis, mas refletem um determinado raciocínio por parte dos alunos.

No primeiro grupo encontramos estratégias como:

- Utilização de traços ou símbolos para cada unidade;
- Adição sucessiva do divisor;
- Subtração repetida do divisor ao dividendo;
- Partilha com imagens de distribuição;

Os investigadores justificam o agrupamento destas estratégias pelo facto de que todas elas envolvem cálculos longos com nenhuma tentativa evidente para ganhar eficiência apesar da dimensão dos números envolvidos.

No segundo grupo encontramos estratégias como:

- Operar com os algarismos de forma independente (por exemplo, dividir 84 por 14 usando 8:1 e 4:4)
- Decompor o dividendo nas suas ordens (por exemplo, dividir 1256 por 6 usando 1000:6, 200: 6, 50: 6 e 6:6).

O agrupamento destas estratégias é justificado pelo facto de envolverem formas de diminuir a grandeza dos números utilizando ideias de valor de posição.

No terceiro grupo encontramos estratégias com baixo nível de “chunking”, por exemplo, adicionando subtotais pequenos (30 em vez de 15) no meio de procedimentos longos utilizando por vezes o dobro ou repetidamente dobrar o divisor. Na perspetiva dos investigadores ao se trabalhar com pequenos múltiplos do divisor há um ganho de eficiência, mas geralmente ainda resulta em cálculos longos.

No quarto grupo encontramos estratégias com alto nível de “chunking” onde são utilizados subtotais eficientes (por exemplo, 150 para a divisão por 15) e procedimentos abreviados. Também foram incluídas neste grupo estratégias onde o cálculo da metade ou do dobro foram muito eficientes (por exemplo, 64 a dividir por 16).

No quinto grupo está a utilização do algoritmo tradicional desenvolvido através do seu esquema formal. Sobre este grupo os investigadores consideraram que, apesar do algoritmo tradicional por vezes envolver anotações informais para dar suporte aos cálculos, estes foram classificados nesta categoria separada visto que as soluções foram estruturadas através da sua abordagem.

No sexto grupo foram incluídas as estratégias que foram consideradas cálculo metal por terem uma resposta sem registo escrito do cálculo.

No sétimo grupo foram incluídas as operações erradas e no oitavo as estratégias não percetíveis.

2.4.2. Desenvolvimento de estratégias de divisão mais eficientes

Fosnot e Dolk (2001) consideram que um objetivo de aprendizagem deve ser o desenvolvimento de estratégias de divisão mais eficientes, mas julgam impossível o objetivo de ter todos os alunos a utilizar a mesma estratégia, obtendo o mesmo conhecimento, ao mesmo tempo. Afirmam que, a verdadeira aprendizagem desenvolve-se através de muitos caminhos durante os quais os alunos necessitam construir várias “grandes ideias” (p.69).

2.4.2.1. O contributo do cálculo mental

McIntosh, Reys e Reys (1997) afirmam que os benefícios de desenvolver e utilizar estratégias mentais de cálculo têm sido bem defendidos por investigadores como Beberman (1959), Brownell (1972), Cobb e Merkel (1989), Kamii (1989), Reys e Barger (1994), Shuard (1987) e Trafton (1978). Como explicam, o objetivo das estratégias mentais é tornar cálculos que não conseguimos realizar em cálculos que conseguimos realizar utilizando relações entre números e operações. Esclarecem que a utilização de estratégias mentais envolve e justapõe-se com outros tópicos também já muito discutidos como o cálculo mental, a estimação e o sentido de número. Afirmam que cálculo mental, estimação e sentido de número têm uma relação muito forte e são difíceis de individualizar.

Também Hartnett (2007) reconhece a ligação entre a utilização de estratégias de cálculo mental e o desenvolvimento do sentido de número e das capacidades de cálculo. Afirma que a utilização de estratégias de cálculo mental de uma forma flexível requer um bom conhecimento do sentido de número e que o desenvolvimento de uma abordagem ao cálculo através do desenvolvimento destas estratégias providencia uma oportunidade dos alunos trabalharem com os números de uma forma flexível que por sua vez também providencia oportunidades de melhorar o seu sentido de número.

Aquela investigadora constatou que tem havido uma discussão na literatura sobre o que é que constitui uma estratégia de cálculo mental. Verificou que as primeiras definições de cálculo mental, defendidas por investigadores como Trafton (1978), Sowder (1988) e McIntosh, Reys e Reys (1997) (referidos por Hartnet, 2007), salientam a não utilização de anotações escritas para o cálculo ou qualquer outra ferramenta externa.

Threlfall (2002), referido por Hartnet (2007), descreve estratégias como uma sequência construída de transformações relativa a um problema de números para chegar a uma solução em oposição a só saber a solução, contar ou fazer uma representação mental de um método de "papel e lápis".

Na sua opinião, Hartnet (2007) considera que algumas situações que têm sido apresentadas até por documentos curriculares como estratégias de cálculo mental (por exemplo, a comutatividade) não são estratégias no sentido de processo pensado como definido por Threlfall (2002). Hartnet (2007) tentou criar um "framework" de categorização de estratégias de cálculo mental, apresentado na tabela 3, com o propósito de informar e providenciar estrutura para o ensino de estratégias de cálculo.

Tabela 3

Categorização de estratégias de cálculo mental. (Adaptado de Hartnett, 2007, p.349)

Categoria	Estratégia de cálculo mental
Contagem progressiva e regressiva	Contagem progressiva para adicionar
	Contagem regressiva para subtrair
	Contagem progressiva para subtrair
	Contagem progressiva para multiplicar
Ajustar e compensar	Ajustar um número e compensar
	Ajustar dois números e compensar
	Ajustar dois números
Dobro e metade	Usar o dobro ou quase dobro para adicionar ou subtrair
	Dobro para multiplicar por 2
	Dobro, dobro para multiplicar por 4
	Dobro, dobro, dobro para multiplicar por 8
	Metade para dividir por 2
	Metade, metade para dividir por 4
	Metade, metade, metade para dividir por 8
	Dobro e metade
"Partir" os números	"Partir" dois números utilizando o valor de posição
	"Partir" dois números utilizando números compatíveis
	Partir" um número utilizando o valor de posição
	"Partir" dois números utilizando números compatíveis
Valor de posição	Pensar em múltiplos de 10
	Foco em posições relevantes

A investigadora explica que os nomes atribuídos às categorias das estratégias identificadas foram mantidos numa linguagem simples e intuitiva visto que é sua intenção que estes nomes sejam utilizados na sala de aula e que sejam uma ajuda para a discussão das estratégias utilizadas pelos alunos e parte das aulas sobre determinadas estratégias.

Buys (2001) refere-se ao cálculo mental através da expressão "aritmética mental" definindo este conceito como "o cálculo hábil e flexível baseado em relações conhecidas entre os números e em características dos números" (p.121). Explica que a aritmética mental é uma capacidade elementar matemática que não está estritamente relacionada a um determinado conjunto de números ou a certas operações, sendo, acima de tudo, uma forma de abordar

os números e a informação numérica na qual os números são tratados de uma forma habilidosa e flexível caraterizada por:
– trabalho com números e não com algarismos/dígitos;
– utilizar as propriedades elementares do cálculo como a propriedade comutativa, distributiva, relações inversas e combinações destas propriedades;
– ser suportada por um bom conhecimento sobre os números e sobre os factos numéricos (primeiro até 20 e depois até 100);
– possibilidade de recorrer a registos escritos intermédios, mas realizada sobretudo, mentalmente. (Buys, 2001, p.122)

Este investigador descreve sub-trajetórias de ensino/aprendizagem para seis áreas de cálculo distintas, tendo como base a aritmética mental. As seis áreas são: aritmética até 100; contagem e subtração até 1000; multiplicação com números grandes; divisão com números pequenos e grandes; multiplicação e divisão com números inteiros e aritmética mental nos níveis mais altos do 1º Ciclo. Realça que na aritmética mental os alunos não têm de chegar todos da mesma forma à solução, muito pelo contrário, uma diferenciação natural é desenvolvida porque os alunos têm liberdade, dentro de certos limites, para seguir as suas próprias abordagens, para utilizar as suas estratégias e números de referência preferidos e para adotar o seu nível de utilização de atalhos (short cuts).

Identifica três formas elementares de aritmética mental:
− Em linha, na qual os números são vistos como objetos na linha numérica onde as operações são consideradas movimentos ao longo da linha: para a frente (adição), para trás (subtração), repetidamente para a frente (multiplicação) ou repetidamente para trás (divisão).
− Por decomposição, na qual os números são vistos como objetos com uma estrutura decimal e onde as operações são realizadas através da separação e processamento dos números baseada nesta estrutura.
− Por estratégias variadas baseadas em propriedades aritméticas, em que os números são vistos como objetos que podem ser estruturados de muitas formas e onde as operações são realizadas através da escolha de uma estrutura adequada e pela utilização das propriedades aritméticas apropriadas.

Explica que estas três formas básicas de cálculo podem ser desenvolvidas em diferentes níveis. Num nível inferior, utilizando modelos como a linha numérica vazia ou dinheiro, num superior, anotando passos intermédios em linguagem aritmética ou só mentalmente. Refere que estas formas elementares de aritmética mental, relacionam-se entre si e a sua aquisição é acompanhada pelo aumento progressivo da compreensão dos números e das operações.

2.4.2.2. O contributo do ambiente da sala de aula

Como afirmam Stein, Engle, Smith e Hughes (2008), fundamentando-se no trabalho de outros investigadores (Cobb et al., 1997, Kazemi & Stipek, 2001, Nathan & Knuth, 2003), as discussões matemáticas são a chave fundamental das perspetivas atuais sobre um efetivo ensino da Matemática. Também Wood (1999) refere que evidências demonstram que a discussão na sala de aula é importante no desenvolvimento das conceções matemáticas dos alunos e que o processo de contradição e resolução é central à transformação do pensamento.

O National Council of Teachers of Mathematics salienta que "tanto investigadores como professores experientes descobriram que quando os alunos dos primeiros anos de escolaridade são encorajados a desenvolver, registar, explicar e criticar as estratégias de resolução de problemas de cálculo dos seus colegas, podem ocorrer vários tipos de aprendizagens importantes". (NCTM, 2007, p.38).

Yackel e Cobb (1996) explicam que surgem oportunidades de aprendizagem adicionais quando as crianças tentam dar sentido às explicações dadas por outros, quando comparam as soluções de outros com as suas e fazem julgamentos sobre semelhanças e diferenças. Além disso, explicando e justificando diferentes soluções, o professor e os alunos conseguem estabelecer significados partilhados.

Cobb, Wood, Yackel e McNeal (1992) na tentativa de clarificar o que significa ensinar matemática para a compreensão e aprender matemática com compreensão realizaram uma investigação sobre duas salas de aula do 1º Ciclo (elementary school) que desenvolviam a sua atividade matemática de forma diferente, no sentido de caracterizar as diferenças entre elas.

A sua análise, desenvolvida em referência ao trabalho de Much e Shewder`s (1978), deu especial atenção às explicações matemáticas e justificações que ocorreram durante as aulas. Verificaram, entre outras diferenças, que numa das salas de aula, o professor e os alunos pareciam consistentemente constituir a Matemática como uma atividade de seguimento de procedimentos no decorrer de interações momentâneas. Na outra sala, o professor e os alunos constituíam verdades matemáticas (tipo de norma cuja consequência de transgressão é cometer um erro), no decorrer das suas interações sociais sendo os atos de explicação e justificação centrais a este processo. Os investigadores adotaram a terminologia proveniente de Richards (1991) para distinguirem os dois tipos de tradição matemática desenvolvidos nas salas de aula, sendo o primeiro caso designado como *matemática escolar (school mathematics)* e o segundo caso, *matemática inquiridora (inquiry mathematics).*

Defendem que alunos que participem numa tradição de sala de aula de *matemática escolar* tipicamente vivenciam compreensão matemática quando conseguem seguir instruções procedimentais com sucesso. Por outro lado, alunos que participem numa tradição de sala de aula de *matemática inquiridora* tipicamente vivenciam compreensão quando podem criar e manipular objetos matemáticos de uma forma que conseguem explicar e, quando necessário, justificar. Desta forma relacionam a tradição de *matemática inquiridora* com uma aprendizagem matemática normalmente designada com compreensão.

Yackel e Cobb (1996) colaboraram com um grupo de professores do 2º e 3º anos de escolaridade tentando ajudá-los a estabelecer tradições de *matemática inquiridora* nas suas aulas. Explicam que a instrução nas salas de aula deste projeto consistiu na condução por parte do professor de discussões no grupo da turma dos problemas propostos, trabalho colaborativo em pequeno grupo entre pares de alunos seguido de discussões com o grupo da turma onde os alunos explicaram e justificaram as interpretações e soluções que desenvolveram. Referem que as tarefas e as estratégias desenvolvidas neste projeto refletem a visão de que a aprendizagem da Matemática é tanto um processo de construção ativa individual, referindo-se a von Glasersfeld (1984), como um processo de aculturação das práticas matemáticas de uma sociedade mais alargada, referindo-se a Bauersfeld (1993).

Explicam que para realizarem a análise do processo através do qual estes professores iniciaram e conduziram o desenvolvimento de normas sociais que suportam as tradições da sala de aula caraterizadas pela explicação, justificação e argumentação sentiram a necessidade definir aquelas que são específicas da Matemática denominando-as como normas *sociomatemáticas*. Dão como exemplo deste tipo de normas, a compreensão normativa do que é considerado matematicamente diferente, matematicamente sofisticado, matematicamente eficaz e matematicamente elegante numa sala de aula. Verificaram que a negociação das normas sociomatemáticas permite aumentar as ocasiões de aprendizagem para os professores e também para os alunos e que esta negociação permite elaborar bases partilhadas para a comunicação.

Apuraram, no seguimento das ideias de Lampert (1990) e Voight (1985) que o papel do professor é facilitar discussões matemáticas, ao mesmo tempo que age como um participante que pode legitimar ou sancionar certos aspetos da atividade matemática dos alunos. Ao mesmo tempo verificaram que estas discussões contribuem para o próprio desenvolvimento da compreensão do professor sobre a atividade matemática e sobre o desenvolvimento conceptual dos seus alunos.

2.4.2.3. Os algoritmos

Segundo Fuson (2003), um algoritmo é "um procedimento geral com vários passos que produz uma resposta para uma determinada classe de problemas" (p. 301). Thompson (1996) explica que os algoritmos tradicionais envolvem a pura manipulação de símbolos (algarismos), sem referência ao seu significado particular que o valor de posição lhes atribui e implicam a realização de um trabalho da direita para a esquerda. Identifica outros algoritmos que denomina de alternativos, que são baseados em métodos utilizados por alunos aos quais não foram ensinados os algoritmos tradicionais.

O papel dos algoritmos no ensino/aprendizagem das operações aritméticas, incluindo a divisão, não é presentemente consensual. Durante muito tempo estes ocuparam um papel central neste domínio. Como explica Clarke (2005), diversos investigadores Plunkett (1979), Thompson (1997), Usiskin (1998) apontam razões para que o ensino e a prática regular dos algoritmos tradicionais tenham assumido um papel tão proeminente:

- Têm sido um conteúdo matemático da edução básica, já há muitos anos, em diversas partes do mundo;

- São poderosos na resolução de certo tipo de problemas, particularmente quando o cálculo envolve muitos números;
- São contraídos, reduzindo várias linhas de equações;
- São automáticos, sendo passíveis de ser ensinados e realizados sem necessitar de analise das suas bases matemáticas;
- São um caminho rápido e direto à resposta;
- Providenciam um registo escrito do cálculo que permite a identificação de erros;
- Para o professor são fáceis de desenvolver e avaliar.

Por outro lado, como refere ainda Clarke (2005), investigadores como Kamii e Dominick (1998), McIntosh (1998); Northcote e McIntosh (1999), Thompson (1997) e Usiskin (1998) identificaram alguns perigos em potencial no ensino dos algoritmos tradicionais a crianças do 1º Ciclo referindo, por exemplo que encorajam a não utilização do seu próprio pensamento; que podem levar a uma falta de capacidade crítica dos procedimentos de cálculo a utilizar e que podem levar a uma falta de capacidade crítica dos resultados obtidos.

Brocardo, Serrazina e Kraemer (2003) opõem-se à introdução precoce dos algoritmos salientando que "trabalhar as operações introduzindo estratégias de cálculo mental, tendo por base a composição e a decomposição dos números, utilizando as caraterísticas de estarmos a lidar com um sistema de numeração de posição, parece-nos tarefa crucial a fazer antes da introdução dos algoritmos formais" (Brocardo, Serrazina e Kraemer, 2003, p.15).

Defendem que a introdução precoce dos algoritmos, não dando aos alunos a oportunidade para desenvolver o sentido do número e de pensar de um modo crítico sobre o sentido das operações, tem como consequência o não desenvolvimento de outras estratégias de cálculo.

Reconhecem, no entanto, algumas das suas potencialidades. Referem a sua generalidade, sendo as mesmas regras de cálculo válidas para quaisquer números e a sua eficácia, considerando que um algoritmo pode sempre conduzir a uma resposta certa desde que sejam utilizadas corretamente as suas regras.

Keiser (2012), uma professora do (2º/3º ciclo) com mais de 3 décadas de experiência, afirma que os alunos podem ser eficientes, precisos e flexíveis ao nível do cálculo sem utilizarem os algoritmos tradicionais. Acredita que é gasto demasiado tempo no ensino e prática destes algoritmos com efeitos negativos para uma verdadeira aprendizagem e proficiência de cálculo.

Fuson (2003) explica que cada algoritmo tem as suas vantagens e desvantagens, que alguns algoritmos são mais passíveis de serem compreendidos do que outros e que a compreensão pode ser aumentada pela utilização de materiais manipuláveis ou desenhos que ajudem o aluno a perceber os significados dos números, notações e passos do algoritmo. Na sua opinião, esta compreensão não entra em conflito com o desenvolvimento da fluência de cálculo, mas é fundamental para ela. Considera que as decisões que podem ser tomadas na sala de aula sobre a fluência de cálculo dizem respeito, em parte, aos algoritmos que podem ser trabalhados e são também a base para a escolha desses algoritmos.

Refere que os algoritmos de divisão mais utilizados são métodos complexos e não são fáceis de perceber nem de realizar visto que nestes algoritmos o sentido e o “andaime” dos passos intermédios foram sacrificados para a utilização do mínimo espaço. O algoritmo da divisão usa métodos de alinhamento que mantêm os passos organizados através do correto valor de posição, não requerendo nenhuma compreensão do que realmente está a acontecer às unidades, dezenas e centenas. Identifica no algoritmo tradicional americano (figura 2) dois aspetos que criam dificuldades aos alunos. Primeiro, requer que determinem exatamente o número máximo de cópias que podem fazer do divisor, a partir do dividendo e os alunos têm dificuldade em estimar exatamente quantas são possíveis pelo que é comum fazerem tentativas pela multiplicação como cálculos auxiliares até encontrarem a resposta. Segundo, não cria o sentido de grandeza das respostas que os alunos estão a escrever porque estão sempre a fazer multiplicação de números com um algarismo. Desta forma têm dificuldade em conseguir estimar a correta grandeza das respostas. A investigadora expõe alguns algoritmos da divisão com números multidígitos que considera serem mais acessíveis (figura 3, 4 e 5).

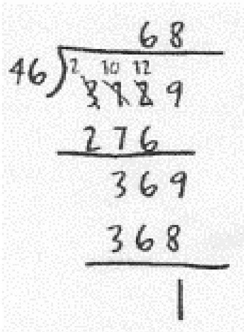


Figura 2. Modelo Tradicional

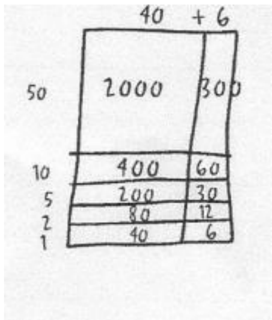


Figura 3. Modelo abreviado: construir cópias do 4

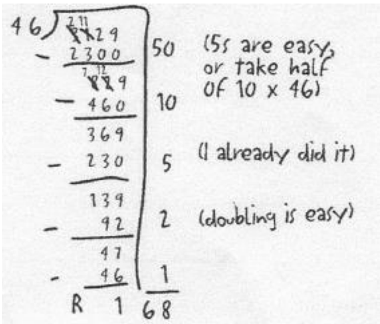


Figura 4. Algoritmo acessível precocemente: retirar cópias do 46 até não restar nenhuma

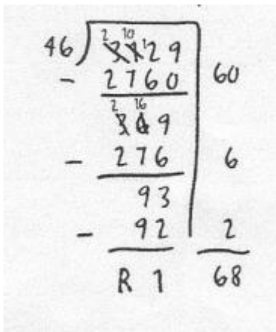


Figura 5. Versão seguinte com menos passos

Monteiro, Loureiro, Nunes e Gonçalves (2007) afirmam que a reflexão sobre a utilização de algoritmos torna-se mais complexa no caso da operação da divisão. Explicam que este facto se deve a uma contextualização de cálculos que é também mais complexa, o sentido da operação mais difícil para os alunos e os cálculos envolvidos também mais difíceis. Consideram por isso, que as decisões de ensinar algum algoritmo, quando o ensinar e qual ensinar se tornam mais polémicas e para isso, afirmam que é essencial que os professores conheçam melhor os algoritmos da divisão.

Explicam que os problemas de divisão com o sentido de medida podem ajudar a construir o algoritmo da divisão a partir de processos dos próprios alunos e que para isso é importante que os problemas sejam pensados com números favoráveis, dando o exemplo de agrupar objetos ou pessoas em conjuntos de igual número de elementos.

4850 : 55

55	4850	
	2200	40
	2650	
	2200	40
	450	
	440	8
	10	88

1	55
10	550
100	5500

Figura 6. Otimização do algoritmo da divisão americano ou de subtrações sucessivas

Apresentam alguns tipos de algoritmo diferentes dos algoritmos tradicionais. No primeiro exemplo (figura 6), trabalha-se com o dividendo e o divisor globalmente e vão sendo subtraídos ao dividendo, múltiplos do divisor até se obter um resto inferior ao divisor. Explicam que este algoritmo é otimizado através da utilização de múltiplos do divisor por potências de 10 ou por composições destas potências.

Consideram que o facto de utilizar múltiplos facilitadores torna mais acessível o cálculo das diferenças. Afirmam que a prática deste algoritmo e a aquisição de destreza no seu uso exige um trabalho de sentido de número muito grande.

485' 0	*55*
440	*8' 8*
450	
440	
10	

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
55	*110*	*165*	*220*	*275*	*330*	*385*	*440*	*495*

Figura 7. Algoritmo da divisão recorrendo a múltiplos do divisor e decompondo o dividendo

Apresentam também o algoritmo da figura 7 em que o divisor é trabalhado na globalidade, mas o dividendo é decomposto em ordens de acordo com as necessidades. São subtraídos a uma parte do dividendo o múltiplo do divisor mais aproximado.

Explicam que este algoritmo evidencia preocupações de eficácia e rapidez que o distinguem do apresentado anteriormente e que originam uma sobrecarga nos cálculos auxiliares dos múltiplos dos divisores. Consideram a sua utilização mais mecanizada e fechada podendo levar a uma perda de noção da ordem de grandeza do dividendo e do sentido dos números envolvidos.

Como explicam Kamii e Dominick (1997), investigadores como Narode, Board e Davenport (1993), Kamii (1994) e McNeal (1995) opõem-se ao ensino de qualquer tipo de algoritmo aos alunos visto considerarem que são prejudiciais ao desenvolvimento do raciocínio numérico. Kamii e Dominick (1997) realizaram um estudo com alunos do 2º, 3º e 4º ano numa escola americana onde existiam alunos que até ao 4º ano não tinham ainda aprendido qualquer algoritmo. Este facto tornou possível a comparação do pensamento dos alunos que tinham aprendido algoritmos com o raciocínio dos que não tinham.

Concluíram que os algoritmos são prejudiciais ao desenvolvimento do raciocínio numérico dos alunos por “desensinarem” o valor de posição e desencorajarem-nos de desenvolver o sentido de número e também por forçarem as crianças a abandonarem o seu próprio pensamento. Explicam que o pensamento natural dos alunos sobre os números é feito da esquerda para a direita e que os algoritmos exigem que seja abandonado este tipo de pensamento e realizar um procedimento da direita para a esquerda e lidar com cada coluna como se fossem unidades.

Consideram que quando tentamos ensinar aos alunos relações sobre os números através do ensino de algoritmos estamos a direcionar a sua atenção não para a tentativa de perceber os números, mas para a memorização de procedimentos.

3. METODOLOGIA DA INVESTIGAÇÃO

No presente capítulo são apresentadas e fundamentadas as escolhas realizadas ao nível metodológico. É feita uma contextualização do estudo através da caracterização da escola e da turma onde foi realizado, dos seus participantes e da forma como foram selecionados. É explicado o processo de recolha de dados através da apresentação dos métodos utilizados e da experiência de ensino desenvolvida na sala de aula. No final é realizada uma breve explicação do processo de análise dos dados.

3.1. Opções metodológicas

Tal como afirma Ponte (2008), um professor confronta-se com vários problemas durante a sua prática, e em vez de aguardar por soluções vindas do exterior, pode investigá-los diretamente. No entanto, defende que é preciso:

> distinguir a investigação realizada pelo professor de outras atividades como a reflexão sobre a prática (…) a investigação começa pela identificação de um problema relevante - teórico ou prático - para o qual se procura, de forma metódica, uma resposta convincente. A investigação só termina quando foi comunicada a um grupo para o qual ela faz sentido, discutida e validada no seu seio. (Ponte, 2008, p.155-156)

É por isso importante enquadrar o presente estudo relativamente à metodologia utilizada por forma a evidenciar que se trata de uma atividade mais aprofundada do que uma reflexão.

As metodologias de investigação desenvolvem-se associadas a um determinado paradigma. Os paradigmas são sistemas "de pressupostos e valores que guiam a pesquisa, determinando várias opções que o investigador terá de tomar no caminho que o conduzirá rumo às "respostas" (…) ao conhecimento". (Coutinho, 2011, p.21)

O enquadramento de uma investigação num determinado tipo de paradigma e de metodologia depende de vários aspetos da própria investigação como a essência dos seus objetivos, as características do plano da investigação e das amostras, a natureza dos dados recolhidos, as relações que se estabelecem com os sujeitos e a forma como é realizada a análise dos dados.

Dadas as suas características, o presente estudo enquadra-se no paradigma interpretativo. Vai ao encontro das ideias de Erickson sobre a investigação em Educação orientada por este paradigma, refletindo-se no tipo de questões que este autor identifica como as colocadas pelo investigador interpretativo: “Quais as condições de significado que alunos e professores poderão criar em conjunto (...) Como se desenvolvem e mantêm estes sistemas de significado?” (Erickson, 1986, p.127)

O estudo será desenvolvido através de uma metodologia do tipo qualitativo visto que “o objeto de estudo são as intenções e situações, ou seja, trata-se de investigar ideias, de descobrir significados nas ações individuais e nas interações sociais a partir da perspetiva dos atores intervenientes no processo.” (Coutinho, 2011, p.26)

O estudo adotará as 5 características descritas por Bogdan e Biklen (1994) como caracterizadoras das metodologias qualitativas:

- a fonte direta dos dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal de recolha de dados;
- os dados obtidos são apresentados de forma descritiva incluindo transcrições de entrevistas, notas de campo, vídeos, documentos pessoais e outros registos oficiais;
- o investigador interessa-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos;
- a análise dos dados é tendencialmente indutiva, não tendo o objetivo de confirmar hipóteses prévias. As conclusões são construídas à medida que os dados recolhidos se vão agrupando;
- o investigador estabelece estratégias e procedimentos que lhe permitem tomar em consideração as experiências do ponto de vista do informador.

O processo de recolha de dados será organizado contemplando técnicas e instrumentos que assistem a uma investigação qualitativa, organizados num design de estudo de caso. Como afirma Yin (1989), no seu sentido mais elementar, o design de um estudo é a sequência lógica que interliga os dados empíricos às questões iniciais do estudo e às suas conclusões. O presente estudo desenvolve-se através de um estudo de caso visto que estes “são a estratégia adotada quando se procuram o “como” e o “porquê”, quando o investigador tem pouco controlo sobre os acontecimentos e quando o objetivo se relaciona com fenómenos em contexto da vida real". (Yin, 1989, p.13)

O estudo de caso é um "plano de investigação que envolve o estudo intensivo e detalhado de uma entidade definida: "o caso". (Coutinho, 2011, p.293) Segundo Yin (1994), Punch (1998), Gomez, Flores e Jimenez (1996), examinam-se os casos "em detalhe, em profundidade, reconhecendo-se a sua complexidade e recorrendo-se para isso a todos os métodos que se revelem apropriados" (Coutinho, 2011, p.293)

Como refere ainda Coutinho (2011), o estudo de caso recorre a várias técnicas de investigação qualitativa como forma de obtenção das diferentes perspetivas dos participantes e de diferentes visões do mesmo fenómeno, permitindo uma triangulação dos dados na fase da sua análise.

3.2. Contextualização do estudo

3.2.1. Caracterização da escola e turma

O estudo foi realizado numa turma do 4º ano de escolaridade de uma escola de um agrupamento do Concelho de Oeiras. Está inserida numa zona de construção recente onde predominam edifícios de baixa altitude e vivendas. É uma zona calma, onde existem bastantes espaços verdes. O nível da socioeconómico da população residente situa-se, de um modo geral, no médio-alto.

A escola é a mais recente do agrupamento, tendo iniciado a atividade letiva em 2006. Inclui 8 salas de aula, sendo 5 do 1º Ciclo e 3 de JI. Relativamente ao enquadramento socioeconómico da comunidade escolar, a licenciatura é o grau académico que predominava nos pais e mães dos alunos (48% e 59%, respetivamente) no ano escolar de 2014/2015. No mesmo ano escolar, o número de alunos apoiados pela Ação Social era de18%.

Relativamente à turma, era constituída por 21 alunos sendo 14 rapazes e 7 raparigas. Existiam 3 alunos com Necessidades Educativas Especiais, estando 2 deles a trabalhar ao nível do 1º ano e um outro a repetir o currículo do 4º ano, sendo estes os únicos alunos com retenções. A turma teve a mesma professora como titular de turma desde o 1º ano de escolaridade que se ausentou no início do 4º ano por licença de maternidade, sendo substituída até fevereiro por mim.

O aproveitamento da turma na área disciplinar de Matemática no final do 3º ano esteve ao nível qualitativo médio do Bom, assim como no 1º período letivo do 4º ano.

Os alunos mostraram-se, de um modo geral, muito interessados e participativos nas atividades escolares.

3.2.2. Participantes e critérios de seleção

Os participantes neste estudo foram os alunos da turma, sendo que 4 dos alunos foram selecionados para desenvolver dois estudos de caso.

Um dos critérios de seleção foi o resultado obtido num teste diagnóstico. A realização deste teste teve como objetivo identificar as estratégias que os alunos utilizavam na resolução de tarefas que envolvem situações de divisão com números com dois ou mais algarismos no quociente, no sentido de partilha e de medida. A seleção e agrupamento dos alunos tomou em consideração a proximidade entre o tipo de cálculos desenvolvidos nas estratégias e entre o modelo intuitivo associado.

Outro critério de seleção foram algumas características pessoais observadas nos alunos no decorrer do trabalho em sala de aula relativamente a aspetos como a utilização do cálculo escrito e do cálculo mental, a flexibilidade na utilização de diferentes tipos de estratégias de cálculo, a atitude perante situações novas, a capacidade de comunicação matemática e a organização do trabalho realizado.

Estes dois critérios visam o agrupamento dos alunos em pares em que embora se procure uma proximidade ao nível dos conhecimentos e capacidades relativamente a situações de divisão, por forma a que os alunos consigam perceber as ideias do seu colega do par, haja alguma heterogeneidade que fomente a discussão e que possibilite a troca de ideias e de saberes.

Outro critério de seleção foi desempenho escolar dos alunos na área disciplinar de Matemática no 3º ano. Foram selecionados alunos com um desempenho ao nível do Bom ou Muito Bom. A utilização deste critério relacionou-se com o facto de se verificar qual o nível de desenvolvimento das ideias fundamentais da divisão em alunos que têm uma boa avaliação nesta área disciplinar.

A investigadora participou no estudo como professora titular da turma e dinamizadora das tarefas realizadas no âmbito do mesmo.

Por questões éticas, todos os nomes dos intervenientes no estudo são fictícios de modo a respeitar a sua identidade, garantindo o respetivo anonimato. Foi solicitada a autorização, por escrito, dos encarregados de educação de todos os alunos da turma (anexo A), para que se efetuasse a recolha de dados, tendo os mesmos sido informados dos objetivos do estudo e procedimentos metodológicos. Foi também solicitada a autorização do Agrupamento de Escolas para o desenvolvimento do estudo (anexo B).

3.2.2.1. Caracterização dos alunos dos estudos de caso

Ângela e Salvador

Ângela tinha 10 anos e frequentava o 4º ano pela primeira vez. Mostrava-se uma aluna concentrada e empenhada durante a realização do trabalho escolar. Revelava uma maior capacidade no cálculo escrito do que no mental. Demonstrava capacidade de resolução de problemas, mas alguma hesitação perante situações novas. Evidenciava pouca flexibilidade de cálculo. Mostrava preocupação com a verificação do trabalho realizado. Evidenciava alguma dificuldade ao nível da comunicação matemática visto que nem sempre conseguiu explicar os seus raciocínios. O seu nível de desempenho na área disciplinar de Matemática no final do 3º ano foi de Muito Bom.

Relativamente às suas capacidades ao nível do trabalho colaborativo, a aluna mostrava ser dialogante, participativa e trabalhadora.

Salvador tinha 9 anos e frequentava o 4º ano pela primeira vez. Durante a realização do trabalho escolar o Salvador evidenciava tempos de concentração curtos e gostava de fazer o trabalho rapidamente. No cálculo escrito revelava tendência para apresentar erros em cálculos intermédios. Demonstrava alguma capacidade de cálculo mental e alguma capacidade de lidar com novas situações. Evidenciava também alguma flexibilidade ao nível do cálculo. Revelava pouca preocupação com a verificação do trabalho realizado. Mostrava alguma capacidade de comunicação Matemática, mas às explicações dos seus raciocínios acrescentava, por vezes, pormenores no momento. O seu nível de desempenho na área disciplinar de Matemática no final do 3º ano foi de Bom/Muito Bom.

Relativamente às suas capacidades ao nível do trabalho colaborativo, o aluno demonstrava alguma dificuldade para ouvir e aceitar as ideias dos colegas, tendo tendência para querer liderar as situações e gerar conflitos.

Andreia e Ricardo

Andreia tinha 10 anos e frequentava o 4º ano pela primeira vez. Demonstrava ser uma aluna concentrada e empenhada na realização do trabalho escolar. Revelava maior capacidade de cálculo escrito do que mental. Demonstrava capacidade de resolução de problemas, mas alguma hesitação perante situações novas. Mostrava pouca flexibilidade de cálculo e muita preocupação com a verificação do trabalho. Demonstrava capacidade de comunicação dos seus raciocínios. O seu nível de desempenho na área disciplinar de Matemática no final do 3º ano foi de Bom/Muito Bom.

Relativamente às suas capacidades ao nível do trabalho colaborativo, a aluna mostrava ser dialogante, participativa e trabalhadora.

Ricardo tinha 9 anos e frequentava o 4º ano pela primeira vez. Demonstrava-se um aluno concentrado e empenhado na realização do trabalho escolar. Evidenciava boa capacidade de cálculo escrito e mental. Apresentava boa capacidade de resolução de problemas e alguma flexibilidade de cálculo. Demonstrava muita preocupação com a verificação do trabalho. Por vezes mostrava dificuldade em verbalizar os seus raciocínios. O seu nível de desempenho na área disciplinar de Matemática no final do 3º ano foi de Muito Bom.

Relativamente às suas capacidades ao nível do trabalho colaborativo, o aluno mostrava ser dialogante, participativo e trabalhador.

3.3. Recolha de dados

3.3.1. Métodos de recolha de dados

A recolha de dados para o estudo foi iniciada através da realização de um teste diagnóstico constituído por 3 tarefas relacionadas com os diferentes sentidos da divisão, que se encontra como o anexo C deste documento. O teste foi realizado por todos os alunos da turma e permitiu não só selecionar os participantes nos estudos de caso como também ajudou a estabelecer um ponto de partida para a elaboração das tarefas e seleção de materiais.

A recolha dos dados foi depois continuada em sessões de trabalho com a turma, durante a realização da sequência de tarefas sobre divisão que constituiu a experiência de ensino.

Para a recolha de dados foram utilizadas várias técnicas e diferentes fontes por forma a obter "como resultado final um retrato mais fidedigno da realidade ou uma compreensão mais completa do fenómeno a analisar." (Coutinho, 2011, p.208)

Utilizei a técnica da observação direta participante, visto que, tal como afirmam Lessard-Hébert, Goyette e Boutin (1990), a observação direta participante permite recolher dados a que um observador exterior não teria acesso porque provêm da interação entre observador e observado. Esta técnica implica o registo dos acontecimentos após o período de observação que realizei através de notas de campo.

Para a observação indireta foram utilizadas as técnicas de registo em vídeo da atividade e interações em grande grupo e de registo áudio das interações entre os pares selecionados para os estudos de caso.

Foi também utilizada a recolha e análise documental dos registos de trabalho realizados pelos alunos dos estudos de caso, durante as diferentes tarefas.

Para a recolha de dados sobre a escola e os alunos foram analisados documentos como os registos de avaliação dos alunos do 3º período do 3º ano e o Projeto Educativo do Agrupamento.

3.3.2. A experiência de ensino

Na perspetiva de Schoenfeld (2002), referido por Mendes (2012), a expressão experiência de ensino está associada à ideia de uma intervenção complexa no contexto do mundo real que é planeada e concretizada, e através da qual são recolhidos dados que documentam ou explicam a existência de acontecimentos relevantes.

Deste modo, para o desenvolvimento da experiência de ensino foram selecionadas 7 tarefas que são apresentadas na Tabela 4.

Tabela 4

Tarefas desenvolvidas na experiência de ensino e ideia fundamental da divisão relacionada

Tarefas	Ideias fundamentais da divisão	Enunciado
Tarefa 1 Pacotes de leite	Divisão por medida	O leite que é oferecido numa escola está guardado em embalagens com 24 pacotes de leite cada. No mês de novembro, nessa escola, os alunos beberam 3072 pacotes de leite. Quantas embalagens de leite foram utilizadas nessa escola no mês de novembro? Tarefa adaptada do CD do Programa de Formação Contínua em Matemática para professores do 1º e 2º Ciclo – multiplicação e divisão
Tarefa 2 Fotógrafo	Divisão por partilha	A escola do João tem 187 alunos. Esta semana o fotógrafo veio à escola e tirou no total 1122 fotografias. Sabendo que tirou o mesmo número de fotografias a todos, quantas fotografias tirou a cada aluno? Tarefa adaptada do CD do Programa de Formação Contínua em Matemática para professores do 1º e 2º Ciclo – multiplicação e divisão
Tarefa 3 Lápis nas caixas	Relação inversa da multiplicação e divisão	Na sala do 1º ano havia falta de lápis de cor. A professora comprou 240 lápis. De que formas diferentes poderá a professora arrumá-los em caixas, de forma que haja a mesma quantidade em todas? Tarefa adaptada de Monteiro, Loureiro, Nunes e Gonçalves (2007)
Tarefa 4 Prédio da Ana	Relação entre contextos de medida e partilha Uso da disposição retangular como modelo	4.1.O prédio da Ana tem 12 andares e 192 janelas. Quantas janelas há em cada andar? 4.2.O prédio da Isabel tem 192 janelas, 12 em cada andar. Quantos andares tem o prédio? Tarefas adaptadas de Fosnot e Dolk (2001)

Tarefa 5 Máquina de sumos	Relação entre contextos de medida e partilha Uso da disposição retangular como modelo	5.1. Uma máquina de sumos do Oeiras Parque leva na totalidade 208 garrafas. Sabendo que cada prateleira de sumos leva 13 garrafas, quantas prateleiras tem a máquina de sumos? 5.2. Existe outra máquina que também leva 208 garrafas de sumo no total. Sabendo que tem 16 prateleiras, quantas garrafas estão arrumadas em cada prateleira? Tarefas adaptadas de Mendes (2012)
Tarefa 6 Festa de final de ano	Resto – arredondamento para cima	Na festa de final de ano de uma escola vão estar presentes 258 pessoas. Sabendo que as bebidas vão ser servidas em jarros que dão para encher 12 copos, quantos jarros terão de ser preparados para que cada convidado beba pelo menos um copo? Tarefa adaptada de Fosnot e Dolk (2001)
Tarefa 7 Jogos da PS4	Resto – arredondamento para baixo	No seu aniversário, o Tomás recebeu 310 euros dos seus familiares. Numa loja encontrou jogos da PS4 à venda por 64 euros. Se quiser gastar o dinheiro todo, quantos poderá comprar? Tarefa adaptada de Fosnot e Dolk (2001)

As tarefas selecionadas foram elaboradas ou adaptadas por mim, tendo como base tarefas já existentes. Considerei importante que as tarefas tivessem contextos familiares aos alunos. Realizei as alterações ao nível dos números utilizados por forma a adequá-las ao nível de desempenho esperado dos alunos (situações de divisão com divisores de 2 algarismos), escolhendo números que não facilitassem nem complicassem demasiado os cálculos e que estivessem adequados à realidade do contexto. Evitei utilizar nos enunciados, palavras como dividir, partilhar ou distribuir, visto que de uma forma geral os alunos associam-nas à divisão, tentando assim valorizar a importância da compreensão dos contextos. Foram sequenciadas tendo em consideração os diferentes aspetos fundamentais da divisão que abordavam.

Tal como afirmam Stein, Engle, Smith e Hughes (2008), é importante que o professor antecipe as estratégias que os alunos irão desenvolver. Esta antecipação pode ajudar a prever essas estratégias com diferentes níveis de sofisticação como possíveis produções dos alunos e também identificar as dificuldades na interpretação do problema ou durante a sua resolução. Pode ainda ajudar o professor a organizar as ideias para a discussão em grande grupo, após o trabalho autónomo (em pequenos grupos) realizado pelos alunos. Por isso, antes da aplicação das tarefas fiz uma antecipação de possíveis estratégias que os alunos poderiam utilizar na sua resolução (

Tabela 5). Uma das estratégias que considerei que os alunos iriam utilizar foram os algoritmos visto que os alunos já haviam trabalhado na sala de aula dois procedimentos deste tipo, um em que trabalhavam com o dividendo e divisor inteiros e outro em que trabalhavam com o dividendo decomposto pelas dezenas.

Tabela 5

Possíveis estratégias ou procedimentos que podem ser utilizados pelos alunos nas tarefas

Tarefas	Estratégias ou procedimentos que podem ser utilizados
Tarefa 1 Pacotes de leite	Usar adições sucessivas Usar subtrações sucessivas Usar produtos conhecidos Usar múltiplos de 10 Decompor o dividendo Usar um algoritmo
Tarefa 2 fotógrafo	Usar adições sucessivas Usar subtrações sucessivas Usar produtos conhecidos Usar múltiplos de 10 Decompor o dividendo Usar um algoritmo
Tarefa 3 lápis nas caixas	Usar esquemas Usar produtos/quocientes conhecidos Usar o algoritmo (divisão/multiplicação) Usar a relação entre a multiplicação e a divisão
Tarefa 4 Prédio da Ana	Usar produtos conhecidos Usar múltiplos de 10 Decompor o dividendo Usar um algoritmo Usar a relação entre a multiplicação e a divisão Relacionar contextos de medida e partilha
Tarefa 5 Máquina de sumos	Usar produtos conhecidos Usar múltiplos de 10 Decompor o dividendo Usar um algoritmo Usar a relação entre a multiplicação e a divisão Relacionar contextos de medida e partilha
Tarefa 6 Festa de final de ano	Não considerar o resto Considerar o resto de forma desadequada Considerar o resto de forma adequada
Tarefa 7 Jogos da PS4	Não considerar o resto Considerar o resto de forma desadequada Considerar o resto de forma adequada

A realização das tarefas foi feita com toda a turma e para cada tarefa houveram três momentos fundamentais:

- Realização da tarefa a pares;
- Apresentação (no quadro e oral) dos resultados dos pares;
- Reflexão coletiva sobre aspetos das resoluções e outros.

As tarefas foram desenvolvidas entre 11/12/2015 e 05/02/2016.

3.4. Análise dos dados

Dado o carácter qualitativo da investigação, a análise dos dados recolhidos foi realizada de forma tendencialmente indutiva, através de técnicas de análise de conteúdo (Bardin, 1977).

Como explica Manuela Esteves (2006), o procedimento central da análise de conteúdo é a categorização, sendo a operação que vai permitir reduzir e classificar os dados recolhidos identificados como pertinentes. Este procedimento vai reconfigurar os dados recolhidos de forma a serem úteis aos objetivos da investigação. As categorias serão provenientes diretamente do enquadramento teórico por procedimentos denominados fechados e/ou provenientes dos próprios dados em procedimentos denominados abertos ou exploratórios.

Foram criadas categorias para agrupamento dos dados considerados relevantes que, numa primeira fase, provieram dos tópicos presentes nas questões da investigação e do enquadramento teórico, dando origem às primeiras tabelas de análise. No anexo D deste trabalho é apresentado um exemplo de uma dessas tabelas. Numa segunda fase, a partir do material recolhido já organizado, emergiram novas categorias.

As categorias elaboradas orientaram a apresentação e análise realizada no capítulo 4 desta investigação.

Para a análise das estratégias de divisão utilizadas pelos alunos foi construída a Tabela 6.

Tabela 6

Tabela de análise das estratégias de divisão utilizadas pelos alunos*. (Adaptado de Hartnett, 2007; Monteiro, Loureiro, Nunes & Gonçalves, 2007; Ambrose et al. referido por Mendes 2012; Anghileri, Beishuizen & van Putten, 2002; Fosnot & Dolk, 2001)*

Categoria	**Procedimentos**
Usar um grupo de cada vez	Subtração
Procedimentos de construção (aditivos + multiplicativos)	Adição sucessiva
	Adição por saltos
	Subtração
	Dobro
	Multiplicação por múltiplos de 10
	Usa pequenos múltiplos do divisor
	Usa grandes múltiplos do divisor
	Usa estimativa
	Usa tentativa/erro
Baseada no modelo retangular	
Usa quocientes conhecidos	
Usa a relação inversa entre a multiplicação e a divisão	Usa estimativa
	Usa tentativa/erro
	Usa múltiplos de 10
Algoritmos alternativos	Não usa decomposição do dividendo
	Usa decomposição do dividendo
	Regista cálculos intermédios
	Não usa decomposição do divisor
	Usa estimativa
	Usa tentativa/erro
	Usa produtos conhecidos

Tal como afirma Manuela Esteves (2006), a categorização é passível de remodelações à medida que novos dados vão sendo considerados, estabelecendo-se um percurso de vaivém do primeiro material à primeira categorização, à incorporação de mais material, à manutenção, ajustamento ou reformulação das categorias, e, assim ciclicamente, até a inclusão de todo o material ser realizada.

As categorias presentes na tabela são um exemplo de uma categorização proveniente do cruzamento do enquadramento teórico e dos dados provenientes do material recolhido. É uma versão final resultante de um processo de modificações que decorreram à medida que os dados foram sendo analisados.

4. APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS RECOLHIDOS

Neste capítulo será realizada a análise dos dados recolhidos focada em dois pares de alunos. Serão apresentados e discutidos os dados provenientes do teste diagnóstico e das tarefas da experiência de ensino descritas no capítulo sobre a metodologia (capítulo 3). É apresentado em primeiro lugar o caso de Ângela e Salvador e seguidamente o caso da Andreia e do Ricardo.

A análise apresentada procura responder às questões do estudo sobre as estratégias de resolução utilizadas, a compreensão e/ou as dificuldades evidenciadas relativamente a ideias fundamentais da divisão, o contributo das interações com o professor e entre alunos para a compreensão das ideias fundamentais da divisão e para o desenvolvimento de estratégias de resolução mais sofisticadas e o papel do cálculo mental.

4.1. O par Ângela/Salvador

Tal como referido, a análise irá iniciar-se pelo estudo das resoluções dos dois problemas do teste diagnóstico.

Observando a estratégia do Salvador (*Figura 8*) na resolução do Problema 1, inicia a mesma por uma adição sucessiva do divisor, na tentativa de perfazer o valor do dividendo. Após realizar uma soma com nove parcelas, passou para a utilização da multiplicação, certamente associada à estimativa, optando pelo cálculo do dobro do resultado já obtido. É presumível que o aluno tenha considerado o procedimento de adição demasiado exaustivo, e por isso tenha optado pela multiplicação.

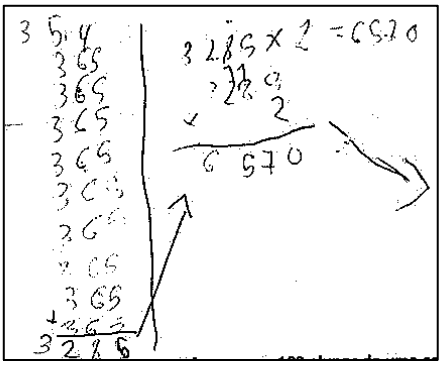


Figura 8. Estratégia de resolução do problema 1 do Salvador

A sua estratégia que parecia revelar inicialmente pouca preocupação em termos de rapidez de resolução, perante o cálculo que tinha de efetuar, é alterada decidindo ir por um caminho mais curto utilizando a multiplicação, embora depois não tenha tido tempo para chegar à resposta final.

Tal como o seu colega, Ângela inicia a sua estratégia com um procedimento pouco eficaz, a adição sucessiva do divisor. Também parece ter refletido sobre o seu procedimento inicial levando-a à utilização da multiplicação associada à estimativa e à tentativa e erro, visto que a aluna tem de escolher o número adequado para multiplicar o resultado que já obteve por forma a conseguir obter o resultado desejado, como se observa na *Figura 9*.

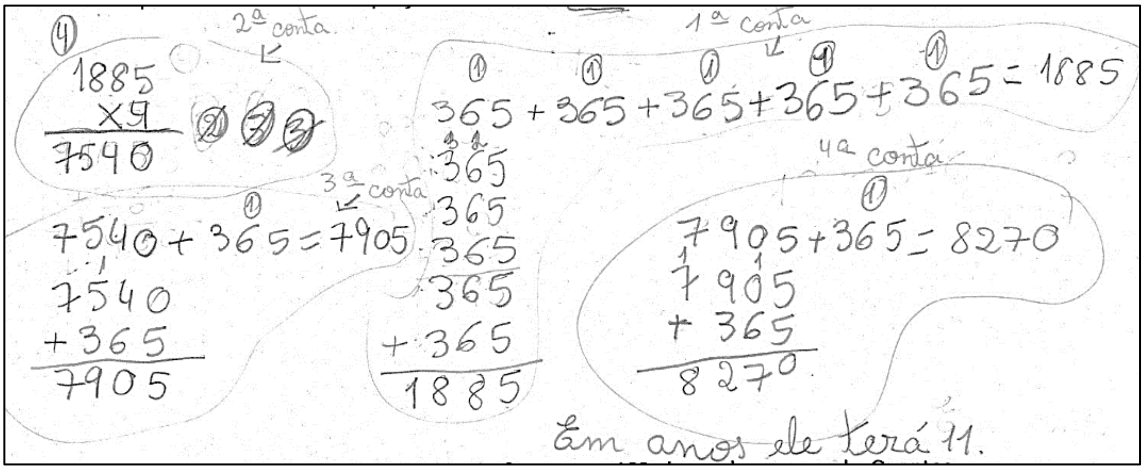


Figura 9. Estratégia de resolução do problema 1 da Ângela

Realiza o cálculo 1885x5 que apaga por obter um resultado superior ao dividendo (8395), optando por 1885x4 que dá um resultado abaixo do dividendo. Como o resultado obtido, 7540, está já próximo, opta por ir somando sucessivamente o divisor e embora a sua estratégia esteja correta, não lhe permitiu chegar ao resultado pretendido (8395) porque todos os seus cálculos têm erros.

A sua estratégia revela uma preocupação com a eficácia na obtenção da resposta final visto que a aluna vai sempre mantendo um registo da contagem dos anos à medida que vai realizando os diferentes cálculos, embora também esta contagem tenha sido incorreta porque, como podemos observar na *Figura 10* , contabiliza como 4 o número de anos resultante do cálculo apresentado quando na realidade deveria ter contabilizado 16 (1885 = 4 anos e 4 anos x 4 = 16 anos).

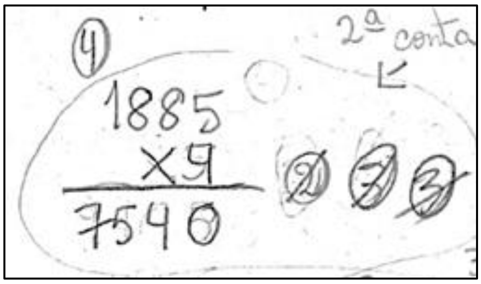


Figura 10. Pormenor da estratégia de resolução do problema 1 da Ângela

Relativamente à resolução do Problema 2 do teste diagnóstico, ambos os alunos revelaram bastante dificuldade na sua resolução. O Salvador não iniciou qualquer tentativa de resolução e a Ângela iniciou uma estratégia de subtração sucessiva do divisor ao dividendo embora até a tenha depois apagado.

As estratégias desenvolvidas por ambos os alunos nos dois problemas do teste diagnóstico evidenciaram alguma proximidade ao nível do tipo de cálculos realizado e do modelo intuitivo associado. Este facto associado a algumas das suas características pessoais já apresentadas levaram a que a Ângela e Salvador fossem selecionados para trabalharem como um par e constituíssem um dos estudos de caso deste estudo, como já referido no capítulo da Metodologia.

Vou agora apresentar e discutir o desempenho deste par durante a experiência de ensino, onde as tarefas foram realizadas a pares. Esta análise vai ser apresentada tarefa a tarefa.

<u>Tarefa 1</u>

Nesta tarefa verifica-se uma validação inicial partilhada da ligação do contexto do problema à operação de divisão.

Salvador (S) – 3072 a dividir por 24 … 3072 a dividir por 24

S – (Começa a ler o enunciado) - Numa escola o leite que é oferecido numa escola está guardado em embalagens com 24 pacotes de leite cada. No mês de novembro, nessa escola, os alunos beberam 3072 pacotes de leite. Quantas embalagens de leite foram utilizadas na escola no mês de novembro?... Primeiro fazemos a conta 3072 : 24…

Ângela (A) – Pois (impercetível) vamos ver quantas vezes é que o 24 cabe no 30.

S – Não. 24 é mais pequeno do que 30, tem de ser 307, não?

Os alunos escolheram como estratégia de resolução um algoritmo. Por sugestão do Salvador, baseada numa justificação que não é válida, decidiram realizar uma decomposição do dividendo pelas dezenas, iniciando assim o procedimento pelo cálculo 307: 24. Para encontrarem o número a colocar no quociente utilizam a multiplicação associada à estimativa e à tentativa e erro, iniciando este processo com a multiplicação por um número facilitador, o 10. Depois de verificarem mentalmente que o resultado de 24 X 10 está ainda distante do número pretendido (307), tentam encontrar um resultado mais próximo através da tentativa e erro e do cálculo mental, como podemos verificar no seguinte diálogo:

Ângela (A) - 24 vezes 10 dá 240.

Salvador (S) – 240 + … não, espera, espera, faz já vezes 10 e depois vezes 5.

A- Vá, faz igual a mim.

S – Então 24 vezes 10 dá 240, 24 vezes 15 dá 360, estás a ver como eu sou tão esperto?

A - Não, mas tem que ser 307.

Podemos verificar que o Salvador apresentou uma primeira proposta de resultado a partir de um cálculo realizado mentalmente que não é validada pela colega que lhe explica porque é que 360 não é aceitável.

S-Ah… 360 a dividir por 12, vezes 12, igual… igual… deixa-me lá pensar 24 vezes 10, 240, 24 vezes 15, 360 e 24 vezes 12 é 288. Já está muito… isto tem que ser…

A- 24 vezes 11

Neste momento foi a Ângela que apresentou uma solução que revela um raciocínio incorreto em relação aos cálculos já efetuados, não sendo a sua proposta validada pelo Salvador que continua os cálculos.

S- Isto tem que ser… 23 …24 vezes 10, 240, 24 vezes 15, 360 e 24 vezes 12 é 288 deixa-me lá pensar 24 vezes 13 é…

A- Isto é 300 e …

S – É 312.

Através deste diálogo, os alunos conseguem estabelecer por tentativa e erro um valor máximo 24 x 15 = 360, que ultrapassa o valor do dividendo. Começam então a realizar outros cálculos de multiplicação do 24 por um número entre o mínimo (10) e máximo (15) já estabelecido, até encontrarem o resultado mais próximo possível de 307 sem ultrapassar. Como podemos observar na *Figura 11* e na Figura 12,alguns destes cálculos não foram registados.

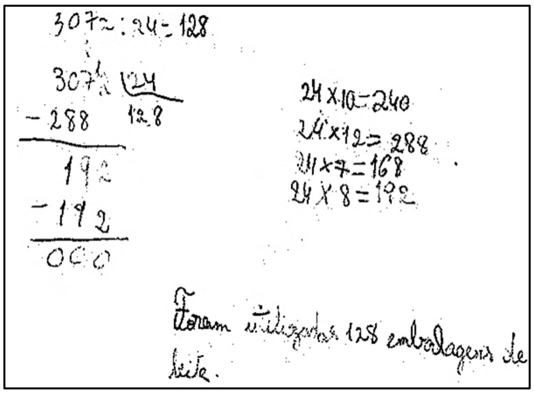


Figura 11. Registo da Ângela da resolução da tarefa 1

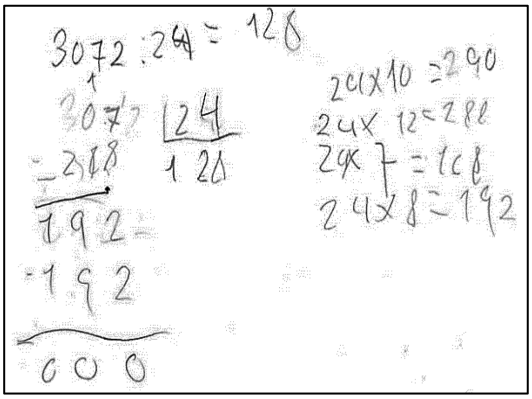


Figura 12. Registo do Salvador da resolução da tarefa 1

Os alunos colocam o número encontrado (12) no quociente do algoritmo e continuam este procedimento, fazendo o registo do cálculo intermédio (307-288= 19). Para continuar o cálculo, procuram novamente através de estimativa e tentativa e erro o número pelo qual vão multiplicar o divisor (24) para ficarem o mais próximo possível de 192. Certamente baseados nos cálculos já realizados anteriormente, conseguem logo à primeira tentativa (24x7=168) aproximar-se bastante do número pretendido. Finalizam o cálculo e elaboram uma resposta correta de acordo com a situação do problema.

Durante a realização do algoritmo Salvador evidencia pouco domínio sobre os procedimentos de resolução do mesmo como podemos constatar pelo seguinte diálogo.

> Salvador (S) – É 22, 22, olha 2 menos 0, 2, 7 menos 8, 1 … ah não, não, sabes que eu sou assim… 7 menos 8 …
>
> Ângela (A) – Não é, estás a fazer mal!
>
> S – 7 menos 8 dá quanto?
>
> A - 7 menos 8 não dá!
>
> S- Pois, por isso é que eu estou a acrescentar um 1, por isso fica dez … 17 menos 8.
>
> A- Dá (impercetível). Depois agora é quê? Depois agora é quanto?
>
> (…)
>
> S- 192
>
> A- Agora vês quantas vezes é que o 24 cabe no 192.
>
> S – Não, não, não agora pões o 2 no 192 e depois fica 1922, 1922 a dividir por 24
>
> (passados alguns minutos)
>
> S- Temos que fazer 3072 : 24, igual a 3072 : 24, por isso temos que fazer 3072…
>
> A- Tens que fazer com conta, tens que fazer com conta.

Verificamos que a Ângela vai corrigindo e dando indicações ao Salvador sobre a forma correta de realizar os cálculos, mas este evidencia não estar muito confiante nesta estratégia de resolução e parece querer procurar um modo de cálculo alternativo. Acaba por ser dissuadido pela sua colega.

Na apresentação da resolução aos seus colegas, os alunos estabelecem uma correta ligação entre os números presentes nos cálculos e a situação do problema, como podemos verificar na interação que se segue.

> Ângela (A) – Fizemos …
>
> (Entretanto o Salvador começa também a querer falar)
>
> Salvador (S) – Oh! Deixa ver…

Investigadora (I) - Olha Salvador, já combinaste com a Ângela o que é que cada um ia explicar, não foi?

A -… 3072, que era o número de pacotes de leite a dividir por 24 que era o número de embalagens, depois fizemos …ah… quantas vezes é que o 24…

S – (interrompe a colega) pois, 24 vezes 10 é igual a 240. 24 vezes 12 … não 24 vezes 10 dava 240, mas ainda era muito longe do 307. Depois fizemos 24 vezes 12 que deu 288, depois pensávamos que ainda podia dar mais um e experimentámos 24 vezes… não, esqueçam… e depois pusemos o 288 (aponta para o algoritmo registado no quadro).

No seguimento da explicação da estratégia e da forma como iniciaram a resolução do algoritmo, omitem a menção dos cálculos que não estavam registados sendo por isso questionados por mim.

Investigadora (I) - Olhem, e como é que vocês sabiam que tinham que parar aí no 24 x 12?

Salvador (S) - Nós fizemos outro cálculo, mas esta menina apagou.

I- E qual foi o outro cálculo que fizeram?

Ângela (A) - 24 x 13.

I- Vocês não devem apagar nada, está bem? Olha, fizeram 24x13 para quê?

A - Para se ver…

S – Eu explico! Eu explico! Para verificarmos se havia mais um para depois dar 307. Experimentámos e não deu.

I – Se havia mais um…?

S- Se juntássemos mais um 24 ao 288, e depois nós vimos e dava mais que 307, por isso ficou vezes 12 e pusemos aqui (aponta para baixo do dividendo) 288 e 12 (aponta para o quociente). Depois fizemos 307 menos 288 e ficou 192. Depois tínhamos que… nós fizemos 24 x 7 e dava 168 e depois fizemos 24 x 8 e dava 192. E depois estava certo e pusemos 8 (aponta para o quociente).

Respondendo à minha questão, os alunos conseguem explicar o seu raciocínio de forma correta e mais completa. No entanto, na explicação dos cálculos realizados para a resolução do algoritmo, Salvador comete um erro que passou despercebido ao afirmar que 307 menos 288 são 192. Este erro evidencia que o aluno continua a ter pouco domínio no desenvolvimento desta estratégia de cálculo.

Tarefa 2

Na tarefa 2, após os alunos realizarem a leitura do enunciado do problema, tal como aconteceu na tarefa anterior, há um momento de validação inicial partilhada da ligação do contexto do problema à operação de divisão que demonstra a formação de uma base partilhada para a comunicação.

Ângela (A) – Podemos começar?
Investigadora (I) – Podem começar, sim.
A – 1122 a dividir por 187.
Salvador (S) – Espera, vai fazendo a conta. Vai começando enquanto eu escrevo a (impercetível).

Os alunos começaram por registar o cálculo 1122:187 e iniciaram a sua resolução através do algoritmo da divisão, mas possivelmente devido à natureza dos números que impedem a realização de um algoritmo com decomposição do dividendo sem recorrer à decomposição também do divisor (estratégia que nunca foi apresentada aos alunos), trabalham com o dividendo e o divisor por inteiro fazendo assim com que a estratégia de resolução seja na realidade a multiplicação associada à estimativa e tentativa e erro, transformando o registo vertical do algoritmo da divisão numa mera representação da situação como se pode observar na *Figura 13* e na *Figura 14*.

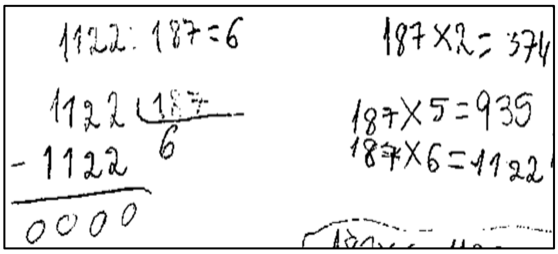


Figura 13. Registo da Ângela da resolução da tarefa 2

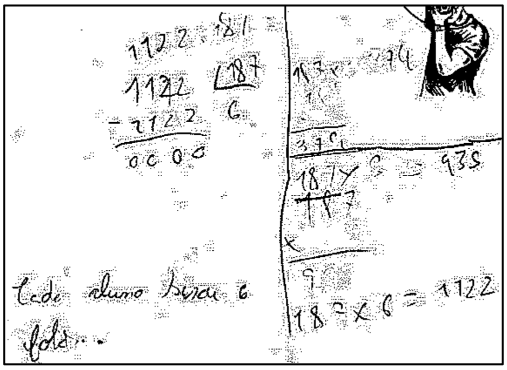


Figura 14. Registo do Salvador da resolução da tarefa 2

Por sugestão de Ângela os alunos iniciam os cálculos fazendo o dobro do divisor, evidenciando alguma falta de reflexão que resulta numa fraca estimativa dado que o resultado deste cálculo fica ainda distante do número pretendido.

Ângela (A) – 187 x 2 igual a 374.

Salvador (S) - Não apagues, tens de deixar a conta. Faz já vezes 5.

Com a sugestão de Salvador conseguem depois melhorar bastante a sua estimativa, e realizando mais dois cálculos (187x5 e 187x6) chegam ao resultado. Completam a representação vertical da divisão com o quociente encontrado (128) e elaboram uma resposta de acordo com a situação do problema.

Ambos os alunos consideraram esta tarefa mais fácil do que a anterior, o que no caso de Salvador se poderá dever ao facto de não envolver a resolução de um algoritmo como o utilizado na tarefa anterior.

Na apresentação da resolução à turma, os alunos conseguiram apresentar de forma correta e explicita a sua resolução, fazendo a associação dos números presentes nos cálculos à situação do problema, não tendo sido colocada nenhuma questão por mim ou pelos colegas.

<u>Tarefa 3</u>

A resolução da tarefa 3 é iniciada de forma individual por Ângela, utilizando a divisão como estratégia de cálculo. Os alunos vão encontrando as respostas possíveis, ou identificando situações de divisão do número 240 que sabem previamente serem exatas e que conhecem o seu quociente, ou identificando possíveis divisores que são confirmados através de cálculos de divisão utilizando um algoritmo ou usando a multiplicação. O modo como os alunos foram selecionando alguns dos possíveis divisores não é evidente nem nos registos realizados nem nas interações durante a realização da tarefa. Os registos que podemos observar na *Figura 15* e na *Figura 16* constituem as respostas encontradas por ambos os alunos.

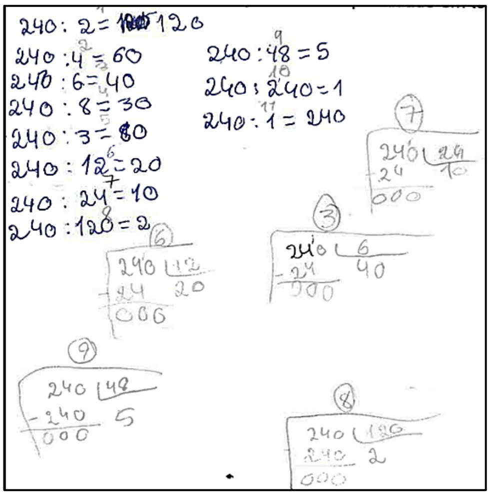


Figura 15. Registo da Ângela da resolução da tarefa 3

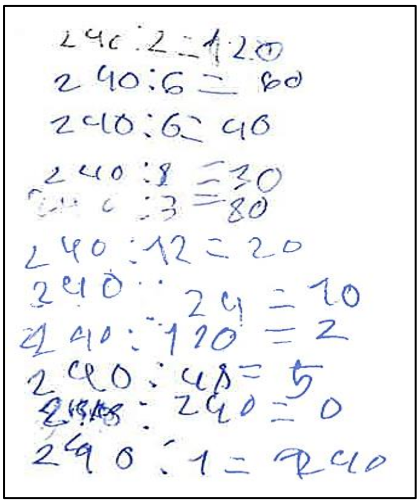


Figura 16. Registo do Salvador da resolução da tarefa 3

Como se pode confirmar pelo diálogo que se segue, Salvador não conseguiu inicialmente perceber a tarefa e após algum tempo depois de Ângela ter começado a descobrir algumas respostas, resolve finalmente interpelá-la, tentando perceber o que deve fazer.

> Salvador (S) - Deixa-me ver! 240 a dividir por 3 dá, dá quanto? Dá quanto? 80. Qual é a pergunta, tem de dar 240? Quanto é que tem de dar, temos de fazer isto até dar quanto? Diz!
>
> Ângela (A) - Até dar zero.
>
> S- Até dar zero? Correto. Só que eu não percebo, nem consigo fazer.
>
> A- Temos que fazer isto até dar zero, até não dar para dividir mais.

A resposta da colega não é muito esclarecedora visto que não explica a situação da tarefa nem a estratégia que está a utilizar. Verifica-se que tenta explicar o objetivo da mesma embora também não o faça muito claramente. De qualquer forma, possivelmente por observar o tipo de cálculos que Ângela já realizou, Salvador consegue propor duas soluções, o 24 e o 240.

Durante a apresentação da estratégia de resolução da tarefa à turma, os alunos foram questionados por mim e por um colega sobre a forma como foram conseguindo selecionar números que fossem possíveis divisores de 24.

Vítor (V)- Porque é que vocês fizeram 240 a dividir por 2, 240 a dividir por 4 e não fizeram 240 a dividir por 5?

Investigadora (I) - Olha, boa pergunta, eu também iria perguntar isso. Vocês não explicaram porque é que foram esses números que vocês…

V- Porque é que tu passaste logo do 4 para o 6, a dividir por 4 logo para o 6 e não tentaram fazer também com 5?

Salvador (S) - Porque foi ela que fez essa parte.

I - A, queres acrescentar alguma coisa ao que o S está a dizer?

(A não responde)

Perante as dificuldades demonstradas pelos alunos em dar alguma explicação, refiz a questão colocada.

I - Bom, agora eu punha a mesma pergunta que o V está a fazer, mas de uma maneira um bocadinho diferente, porque é que foram esses números que vocês escolheram para fazer a divisão do 240? E a pergunta é para a A.

A- Fui experimentando vários …

Considerando que a aluna teria pensado que os números pares seriam prováveis divisores do 240, por este ser também um número par, tentei trazer esta ideia para a discussão.

I - Mas porque é que, por exemplo, experimentaste com o 2 e com o 4 e não experimentaste com o 5 ou com o 3. O 3 apareceu mais tarde…

(A não responde)

I - Não sabes explicar. S, sabes explicar?

S- Sim. (…) Fizemos isto porque, então, primeiro fizemos a dividir por 2, porque 240 a dividir por dois já sabíamos que dava este número.

I - Mas porque é que escolheram o dois?

S- Foi o primeiro que veio à cabeça.

I - E não foi por razão nenhuma, foi porque foi o primeiro que veio à cabeça, pronto. E o 4?

S- Porque 2 é metade de 4, e se dois é a metade de quatro, isto (aponta para o quociente da divisão 240 por2) também ia ser o dobro disto (aponta para o quociente da divisão 240 por4).

Verifica-se que Salvador consegue explicar uma relação que se pode estabelecer entre os dois cálculos para facilitar a sua resolução, mas que não explica a escolha dos números em si. De qualquer forma, Salvador não sabia a ideia que levou à escolha destes dois números visto que esta escolha, tal como se pode verificar nos registos da realização da tarefa, foi feita por Ângela sem partilhar com o colega a razão das suas escolhas.

A discussão da estratégia de resolução dos alunos continuou com uma questão colocada por um colega que levou à explicação por este de uma estratégia de resolução mais sofisticada, utilizando a ligação entre a multiplicação e a divisão como operações inversas, como se pode verificar no diálogo seguinte.

Fábio (F)- Ali naquelas contas que vocês fizeram, vocês não têm só o resultado… em cada conta vocês têm 2 resultados porque, por exemplo, naquela 240 a dividir por 2 que dá 120, dá para dividir por 2 e também por 120 que vai dar 2.

Vítor (V) - V- Mas eles também fizeram dessa maneira…

(…)

F- Mas por exemplo ali no 48 na resposta não puseram 5.

(…)

Salvador(S) - Nós não pusemos o 5 porque não estava ali o 5. Não chegámos a fazer porque não tivemos tempo.

F- Mas está ali o 48.

S-Aonde?

F- A 240 a dividir por 48, é 48 e 5. Essa conta tem os dois resultados, entre aspas, porque…

S – (começa a escrever no quadro)

I- Olha, não vais acrescentar agora nada.

S- Tens imensa razão, está certo!

I - Tem imensa razão? Tu sabes que ele tem razão?

Neste momento coloquei esta questão tentando que o aluno explicitasse o que tinha compreendido da explicação do colega para tentar avaliar o seu nível de compreensão da ideia exposta.

S-Tem, então…

I- Como é que tu sabes que ele tem razão?

S-Porque…como ele disse…

(Alguns colegas manifestam concordância com o que F disse)

F- A resposta…, a pergunta, pergunta quantas possibilidades é que há, e numa só conta tu tens duas porque se dividires o resultado pelo 240 vai dar ao mesmo.

S- Sim…eu sei…está bem, eu já percebi.

I - Pronto, o F está aqui a levantar a questão que quando vocês encontraram aí um divisor, depois, a partir do resultado que essa divisão desse, depois conseguiam fazer também outra divisão utilizando o resultado, o quociente…

S- Está bem, mas não tivemos tempo!

No fim deste diálogo não ficou evidente se Salvador realmente compreendeu a ideia apresentada pelo seu colega Fábio visto que em resposta às questões colocadas, o aluno limitou-se a mostrar a sua concordância com a mesma e a afirmar que tinha percebido, não havendo qualquer retorno, por suas palavras, da ideia explicada. Ficou, no entanto, evidente que o par de alunos não utilizou de uma forma explicita a ligação entre a multiplicação e a divisão como operações inversas na sua estratégia de resolução.

<u>Tarefa 4</u>

Relativamente à tarefa 4, os alunos identificaram a situação do primeiro problema (4.1) desta tarefa como uma situação de divisão e utilizaram um algoritmo para a sua resolução como podemos observar na Figura 17 e na Figura 18.

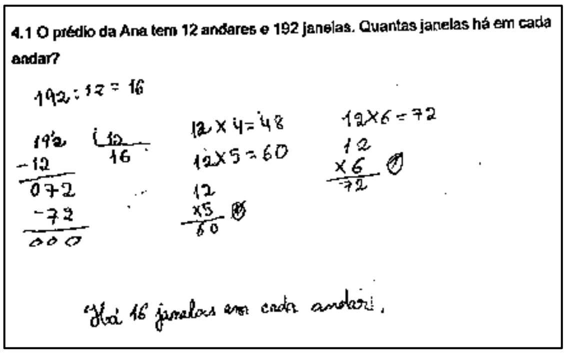


Figura 17. Registo da Ângela da resolução do problema 4.1

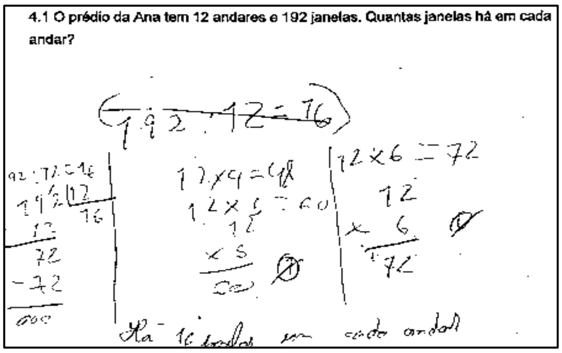


Figura 18. Registo do Salvador da resolução do problema 4.1

Para a realização do algoritmo utilizaram a decomposição pelas dezenas do dividendo e trabalharam com o divisor por inteiro. Os cálculos intermédios de subtração são explicitados no próprio algoritmo e foram também realizadas à parte algumas multiplicações para o cálculo dos números a colocar no quociente. Conseguiram chegar ao resultado correto e elaboraram uma resposta de acordo com a situação do problema.

A resolução do segundo problema (4.2) desta tarefa é feita através da multiplicação associada à estimativa e à tentativa e erro. Multiplicando o divisor (12) por um número escolhido, tentaram chegar ao valor do dividendo (192). Começaram por multiplicar o divisor por 10 e depois por 20, conseguindo assim estabelecer um valor “mínimo” e “máximo” para o quociente (10 < x < 20). Continuam a experimentar números dentro deste intervalo, calculando seguidamente 12x15 e por fim conseguem chegar ao número procurado através do cálculo 12X16. Podemos observar os registos da resolução deste problema na *Figura 19* e na *Figura 20*.

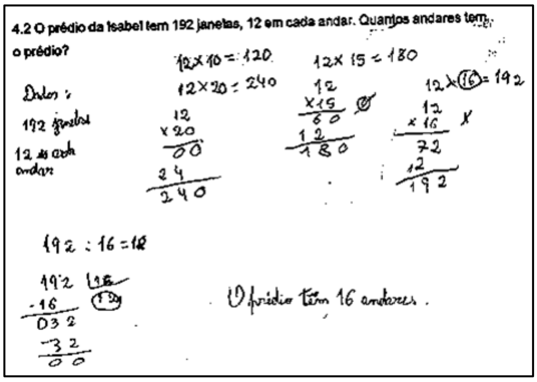


Figura 19. Registo da Ângela da resolução do problema 4.2

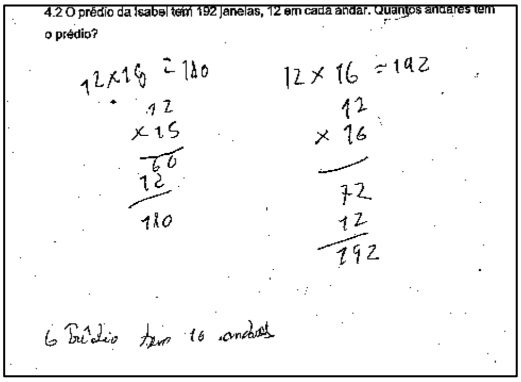


Figura 20. Registo do Salvador da resolução do problema 4.2

No registo realizado por Ângela (*Figura 19*) podemos observar ainda o cálculo 192:16 realizado através de um algoritmo. A aluna explicou na apresentação da resolução para a turma que este cálculo foi realizado posteriormente à resolução do problema e que serviu como verificação do resultado obtido.

Ângela (A)- Haviam 192 janelas e 12 andares, e eu fui ver um número que quando fosse multiplicado por 12 desse 192. E o número foi o 16. Depois fiz 192 a dividir por 16 para verificar se a conta estava certa e deu 12.
Investigadora (I)- E no fim respondeste que…
A - O prédio tem 16 andares.
(explicações laterais)
I - Ninguém tem nenhum comentário para fazer à resolução que os colegas fizeram? Então diz lá Ricardo, qual é o comentário que queres fazer?
Ricardo (R) - Porque é que fizeram o 192 a dividir pelo 16?
A- Foi para verificar se a conta estava certa.

A partir desta análise da resolução da tarefa 4, verifica-se que os alunos não conseguiram estabelecer qualquer relação entre um contexto de medida e um de partilha baseados na mesma relação parte/todo. Os alunos não identificaram que a resolução dos dois problemas se referia ao mesmo cálculo, tendo desenvolvido duas estratégias distintas para a sua resolução. Podemos observar que no problema 4.2 embora tenham ainda realizado uma divisão como confirmação do resultado obtido, este cálculo não corresponde à divisão realizada para a resolução do problema 4.1. nem é estabelecida qualquer ligação com os valores obtidos no cálculo anterior.

Durante a apresentação da resolução à turma, os alunos são confrontados com a intervenção de um colega que chama a atenção para o facto de existir uma ligação entre as duas situações que podia ter sido aproveitada para facilitar os cálculos.

> Investigadora (I) - Eu pergunto assim, não há alguém que tenha outro comentário a fazer e agora, …, G o que é que tu querias comentar?
>
> Gustavo (G)- A Ângela foi fazer a conta de vezes sabendo que na outra, como eu fiz, porque é que ela foi fazer de vezes se já sabia se o anterior era 12 andares e quantas janelas eram… eram 12 andares e em cada um eram 16. Porque é que ela,…, se são 16 janelas em cada 12 andares, se fizermos ao contrário… é igual.
>
> I- Tenta lá resumir isso que tu disseste por outras palavras mais rápidas. E fala um bocadinho mais alto, se faz favor.
>
> G- Na conta do Salvador já sabemos que são 12 andares e em cada 16 e se na da A, nós formos ver, é o contrário, são 16 andares com 12 janelas. Se nós já sabíamos que os 12 andares davam 16 janelas então, se em cada andar haviam 12 janelas então eram 16 andares, nós já sabíamos (…)

Ângela e Salvador não fizeram nenhum comentário à explicação do colega revelando mais uma vez que não se tinham apercebido de qualquer ligação entre os dois problemas.

Nesta tarefa, após a resolução dos 2 problemas, foi pedido aos alunos que tentassem relacionar duas grelhas dadas, que pretendiam representar modelos retangulares, com a situação de cada problema. Os alunos evidenciaram muita dificuldade em estabelecer alguma relação entre os modelos retangulares das grelhas e as situações dos problemas. Como podemos observar na *Figura 21* e na *Figura 22*, acabaram por conseguir encontrar uma parte da relação estabelecida em cada situação.

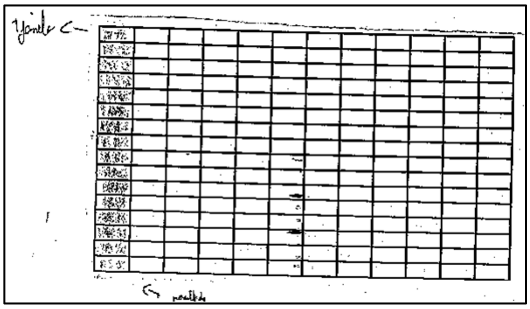


Figura 21. Registo no modelo retangular relativo ao problema 4.1

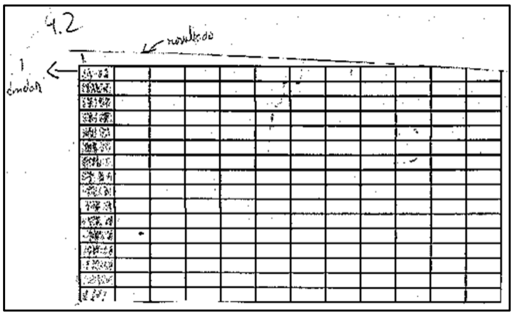


Figura 22. Registo no modelo retangular relativo ao problema 4.2

Os alunos conseguiram identificar no modelo retangular uma das quantidades envolvidas nas situações dos dois problemas, correspondendo a uma das quantidades que era indicada no enunciado do problema. No problema 4.1, os alunos identificaram no modelo retangular a quantidade de cada grupo, neste caso o número de janelas em cada andar. No problema 4.2, os alunos identificaram no modelo retangular o número de grupos, ou seja, o número de andares do prédio.

Visto não terem conseguido relacionar de forma completa o modelo retangular com a situação do problema e com as quantidades envolvidas na situação, este modelo também não foi útil aos alunos no sentido de verificarem a ligação entre as situações dos dois problemas. Os alunos puderam observar estas relações na apresentação para a turma das descobertas de outros alunos, como podemos verificar no seguinte diálogo.

> Investigadora (I) - Bom, então o Vítor (V) se não se importa vai explicar ali à frente o que é que ele fez na outra parte que eu pedi. (…)
>
> V- Eu primeiro fui ver quantos quadrados haviam na horizontal e na vertical para ver o total de quadrados que existiam na grelha e vi que eram 192 e depois vi que cá em cima estavam 12 quadrados e que aqui estavam 16. E percebi que aqui eram os andares e aqui eram as janelas em cada andar. Aqui (gesticula representando a totalidade da grelha) estavam as 192 janelas, todas as janelas.
>
> I- O total de janelas.
>
> V- Depois aqui estavam 12, que eram os tais 12 andares e depois fui ver que aqui estavam os tais 16 andares, ah, janelas que estavam em cada andar.

I- Pronto, e no de baixo?

V- No de baixo, eu ah…vi que os12 eram as janelas de cada andar e depois estavam cá os …

I – Mas estás a falar de quê? Podes utilizar uns termos que se calhar dizem melhor do que é que tu estás a falar.

V- Fui ver que aqui na conta dizia que há 12 janelas em cada andar e eu fui ver que aqui…

I- Aí, o quê? Mas isso é o quê?

V- Ah, numa linha estavam 12 que eram as janelas de cada andar, depois fui aqui estava ao todo o total de janelas.

I -192 também, não é?

V- Depois fui ver na coluna estavam os 16 andares que tinha o prédio.

Após a explicação do aluno, tentei induzi-lo para que introduzisse no seu discurso os termos linha e coluna. Estes termos já são conhecidos de todos os alunos no contexto das tabelas e apelam a uma forma de visualização que é também útil para a compreensão do modelo retangular.

Tarefa 5

A tarefa 5, tal como já explicado no capítulo da metodologia surge no seguimento da tarefa 4. Na sua resolução, os alunos identificaram a situação do primeiro problema (5.1) desta tarefa como uma situação de divisão e utilizaram um algoritmo para a sua resolução semelhante ao utilizado na resolução do problema 4.1. Como anteriormente, na resolução do algoritmo utilizam a decomposição pelas dezenas do dividendo e trabalham com o divisor por inteiro. Os cálculos intermédios de subtração são explicitados no próprio algoritmo e são também realizadas à parte algumas multiplicações para o cálculo dos números a colocar no quociente.

Como podemos observar na *Figura 23* e na *Figura 24*, no registo não é evidente a forma de resolução adotada pelos alunos. Durante a sua realização não houve troca de ideias entre o par.

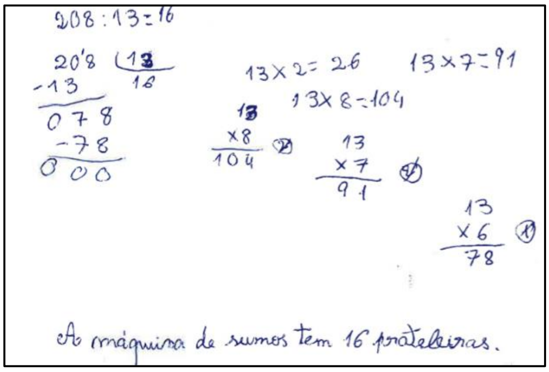


Figura 23. Registo da Ângela da resolução do problema 5.1

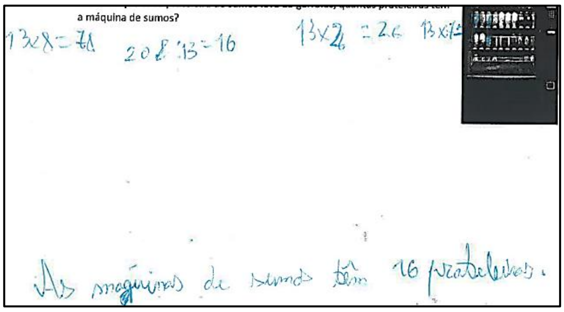


Figura 24. Registo do Salvador da resolução do problema 5.1

No entanto, na apresentação para a turma ficou confirmada a estratégia utilizada que é também confirmada pela análise das interações do par.

> Ângela (A) - Havia 208 garrafas e cada prateleira levava 13 garrafas. Depois fiz 208 a dividir por 13 para ver quantas prateleiras dava ao todo e deu 16. A maquina de sumos tem 16 prateleiras.

A estratégia de resolução do segundo problema desta tarefa (5.2) foi também semelhante à utilizada no problema 4.2 visto que é feita através da multiplicação associada à tentativa e erro. Multiplicando o divisor (16) por um número escolhido, tentam reconstituir o valor do dividendo (208). Começaram por mentalmente multiplicar o divisor por 10 e depois por 20, conseguindo assim estabelecer um valor "mínimo" e "máximo" para o quociente (10 < x < 20). Continuam a experimentar números dentro deste intervalo, calculando seguidamente 16x12 e por fim conseguem chegar ao número procurado através do cálculo 16X13. Podemos observar os registos da resolução deste problema na *Figura 25* e na *Figura 26*.

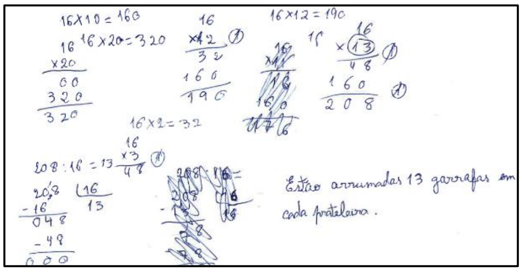


Figura 25. Registo da Ângela da resolução do problema 5.2

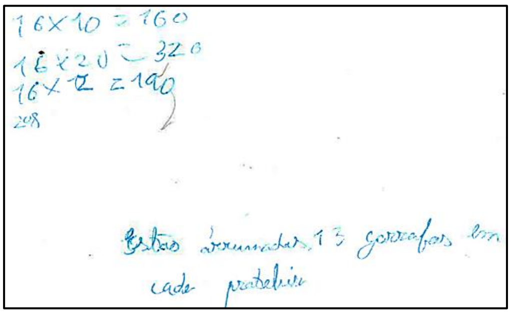


Figura 26. Registo do Salvador da resolução do problema 5.2

Verificamos que o registo do aluno Salvador (*Figura 26*) se encontra incompleto visto não ter anotado o cálculo que possibilitou a resolução do problema (16x13).

No registo realizado por Ângela (*Figura 25*) podemos observar ainda o cálculo 208:16 realizado através de um algoritmo e tal como já tinha acontecido no problema 4.2, a aluna explicou na apresentação da resolução para a turma que o realizou para verificação do resultado obtido.

> Ângela (A) - Experimentámos fazer o 16 várias vezes até chegar a uma que desse 208 para ver quantas garrafas chegavam, para saber quantas garrafas estavam arrumadas em cada prateleira. Depois fizemos vezes 13 e deu 208 e depois fizemos para verificar se estava bem 208 a dividir por 16 e deu 13.

Na tarefa 5, semelhante na forma e objetivos à tarefa 4, e apesar de toda a reflexão realizada em torno dos problemas da tarefa anterior, os alunos continuaram a não conseguir estabelecer relações entre as duas situações apresentadas como podemos observar na *Figura 27*.

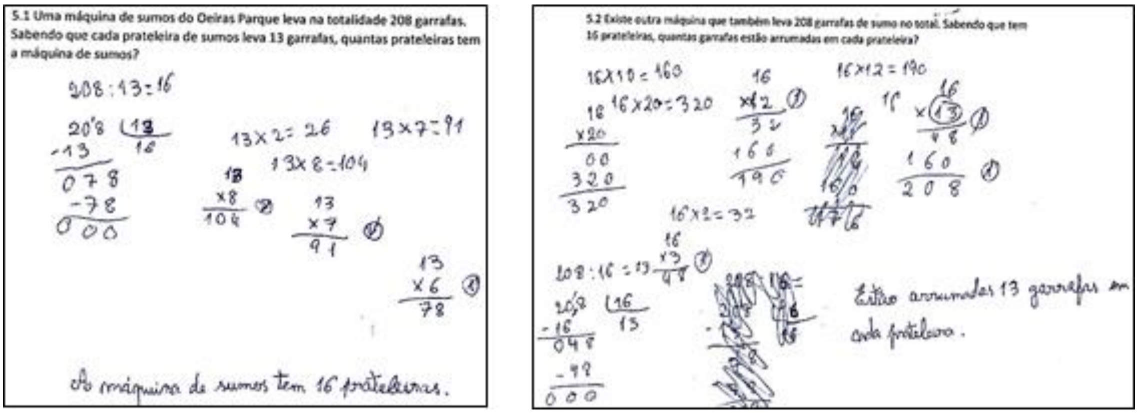


Figura 27. Registos da resolução da tarefa 5

As estratégias de resolução destes dois problemas correspondem exatamente às estratégias utilizadas para a resolução dos problemas da tarefa 4 que embora tenham conduzido os alunos a respostas corretas, evidenciam falta de capacidade de reflexão que leva ao desenvolvimento de uma estratégia pouco sofisticada e à realização de trabalho desnecessário.

Mais uma vez, no momento de apresentação à turma, os alunos são confrontados com a intervenção de um colega que chama a atenção para o facto de existir uma ligação entre as duas situações que podia ter sido aproveitada para facilitar os cálculos.

> Investigadora (I) - Bom então algum dos outros grupos tem algum comentário a fazer às resoluções que os colegas fizeram? Todos vocês resolveram da mesma forma como os vossos colegas fizeram? Eu vi aí grupos que fizeram coisas diferentes.
>
> (…)
>
> Paulo (P) - Nós na 5.2 em vez de fazermos de vezes fizemos a dividir.
>
> I- Então, mas… foram buscar o resultado logo a dividir, é isso?

Neste momento tentei levar o aluno a clarificar a estratégia utilizada visto verificar que a sua explicação não correspondia à mesma.

> (I e P dirigem-se ao quadro)
>
> I- Ó P, tu como és alto, aqui neste espacinho vais pôr aqui o que vocês fizeram.
>
> P - Nós não fizemos algoritmo porque eu percebi a resposta a partir da primeira pergunta.
>
> I- Olha P. explica lá isso um bocadinho melhor, vá.
>
> P- Eu fiz logo o 208 a dividir por 16, não fiz o algoritmo porque eu percebi que se 208 a dividir por 13 dava 16, 208 a dividir por 16 deveria dar 13.
>
> (P escreve no quadro 208 a dividir por 16 igual a 13.)
>
> P - Ponho a resposta?
>
> I - Sim, podes pôr, mas podes também pôr isso que tu explicaste agora oralmente. Antes disto, disseste mais qualquer coisa. Antes disto, pensaste qualquer coisa que estava relacionada com o que estava em cima.
>
> P-Ah!
>
> (P escreve no quadro 208 a dividir por 13 igual a 16.)

Ao pedir ao aluno que registasse no quadro os dois cálculos, tentei que se tornasse mais clara para os colegas a ligação entre os cálculos nas duas situações e que observassem que em ambas as situações estão presentes as mesmas quantidades.

Prossegui a discussão tentando que os alunos agora identificassem e compreendessem as diferenças entre os dois cálculos.

I - Já agora, porque é que isto acontece, porque é que acontece aquela troca de fatores, aquela troca entre o quociente e o divisor, por que é que acontece? Diz lá G.

Gustavo (G) - Neste caso é 208 a dividir por 16 igual a 13, se nós … é igual,… isto acontece por ser… esquece.

Vítor (V) - Eu já não me lembro, já me disseram como é que se chama, tem um nome qualquer.

I- Mas eu não quero que tu me digas nome, podes-me explicar por palavras tuas, porque é que tu achas que aquilo acontece? O que é que aqueles números têm de especial para se poder fazer aquela relação, P?

Paulo (P) - Neste caso, os números estão relacionados.

I- Pois, pois estão. Mas estão relacionados com o quê ou o que é que os relaciona? E agora estamos a pensar ali nos cálculos, já não estamos a pensar nas situações dos problemas.

P- Se tu trocares o divisor pelo quociente vai dar-te o número que estava no divisor.

Fábio (F) - Mas porquê?

Neste momento vários alunos estavam a participar na discussão e um deles, o Fábio, perante a afirmação do colega Paulo que constata a relação entre os dois cálculos, sente a necessidade de haver uma explicação de porque é que esta relação se estabelece

P- Diz lá, F.

F- Porque o 16 e o 13 são divisores um do outro.

I- O 16 e o 13 são divisores um do outro?

(Faz-se silêncio)

Perante a afirmação incorreta do aluno, retornei a sua afirmação, mas agora em forma de questão tentando levar os alunos a refletir sobre o que o Fábio disse. Visto não ter havido nenhuma resposta, senti a necessidade de reformular a questão.

I- O 16 e o 13 são divisores de que número?

F- Do 208.

I- Além de serem os dois divisores do 208 …

F- São pares a dividir o 208.

I- São pares a dividir, não…

F- Se dividir o 208 por um, vai dar o outro.

I- Pois, isso nós estamos a ver, mas por que é que isso vai acontecer? Isso vai acontecer porque outra coisa acontece também obrigatoriamente.

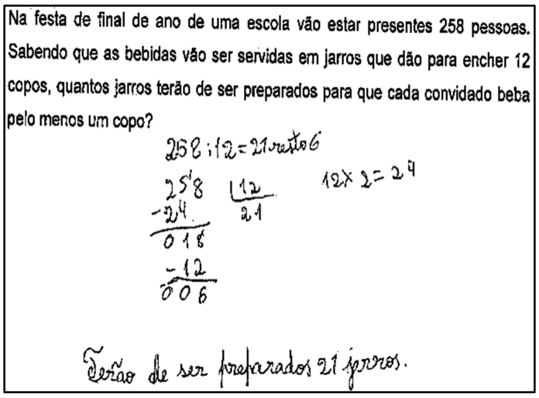
P- Porque 16 vezes 13 dá 208.

I- Exatamente, porque 16 vezes 13 dá 208. Estes números são divisores que fazem par para darem o 208, portanto eu posso alternar um deles no divisor que vai me dar o outro porque eles os dois juntos é que multiplicados dão o 208. Isto se calhar vocês estão fartos de saber isto e isto é uma coisa muito simples, às vezes o difícil é ver estas coisas noutras situações, não é?

Através desta discussão com os alunos Fábio e Paulo realizada a partir do confronto das suas próprias estratégias de resolução com a apresentada pelo par, foi possível para a Ângela e Salvador contactarem com estratégias de resolução mais sofisticadas que a sua e verificarem a ligação existente entre os dois problemas da tarefa.

<u>Tarefa 6</u>

Relativamente ao prolema da tarefa 6, os alunos identificaram logo à partida a situação como de divisão, realizando o cálculo da resposta através de um algoritmo já anteriormente utilizado, decompondo o dividendo pelas dezenas e utilizando o divisor por inteiro, como se verifica na *Figura 28* e na *Figura 29*.

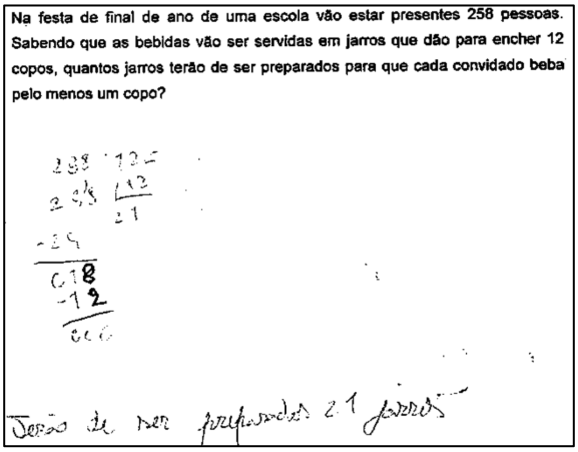

Na festa de final de ano de uma escola vão estar presentes 258 pessoas. Sabendo que as bebidas vão ser servidas em jarros que dão para encher 12 copos, quantos jarros terão de ser preparados para que cada convidado beba pelo menos um copo?

258 : 12 = 21 resto 6

12 x 2 = 24

Terão de ser preparados 21 jarros.

Figura 28. Registo da Ângela da resolução da tarefa 6


Na festa de final de ano de uma escola vão estar presentes 258 pessoas. Sabendo que as bebidas vão ser servidas em jarros que dão para encher 12 copos, quantos jarros terão de ser preparados para que cada convidado beba pelo menos um copo?

Terão de ser preparados 21 jarros

Figura 29. Registo do Salvador da resolução da tarefa 6

Embora os alunos desenvolvam uma estratégia válida e realizem os cálculos de forma correta, a resposta dada não está certa visto que a situação do problema implicava que o resto da divisão fosse considerado para a resposta. Apesar de os alunos terem considerado a tarefa fácil, pela análise da sua resolução, que podemos observar na *Figura 28* e na *Figura 29*, verificamos que os alunos ignoraram o resto obtido na divisão realizada, não conseguindo assim elaborar uma resposta correta. A resolução realizada evidencia que, apesar do resto até ser registado pela Ângela na indicação da divisão realizada, os alunos não fizeram uma reflexão necessária sobre o resto obtido em função da situação do problema. Isto acontece apesar de já terem anteriormente trabalhado e refletido na sala de aula sobre situações em que o resto influenciava a resposta final.

Na apresentação da sua resolução à turma, os alunos demonstraram conseguir associar de forma correta as quantidades presentes no cálculo efetuado, mas mais uma vez, ignoram o resto.

> Investigadora – Salvador (S) não te importas de explicar então o que é que tu fizeste? Relembra lá a tarefa, o problema.
>
> S- (Lê o enunciado do problema). Nós fizemos 258 a dividir por 12 porque eram 258 pessoas e cada jarro dava para encher 12 copos e deu 21.
>
> I-21…
>
> S- Copos…jarros.

Após esta apresentação são confrontados por colegas que lhes chamam a atenção para este facto, como podemos observar no seguinte diálogo.

> Investigadora (I) - Então e quem é que tem algum comentário a fazer relativamente ao que o Salvador (S) e a Ângela (A). fizeram? Quem é que quer dizer alguma coisa?
>
> Fábio (F) - Quando sobrou 6 vocês estavam a tirar números ao total de pessoas e como sobrou 6, essas 6 pessoas…
>
> (…)
>
> S - Mas para cada jarro são 12.
>
> F-Sim, mas podes fazer um que sobre ou cheio até meio.
>
> António (A2) - Há 6 pessoas que não beberam, mas têm de beber todas.
>
> (S. começa a apagar o 1 do 21 do quociente)
>
> A2- Não, isso está bem! A conta está bem-feita.
>
> F- Como 6 é a metade de 12, era mais outro jarro só que cheio até meio e assim toda a gente bebia.

O facto de Salvador querer alterar o quociente diretamente no algoritmo parece evidenciar alguma precipitação e falta de reflexão sobre o significado do quociente e também alguma dificuldade na compreensão e no registo da situação que lhe é apresentada pelos colegas, em que o resto interfere na resposta final.

<u>Tarefa 7</u>

A tarefa 7 envolvia também uma situação de divisão com resto, embora neste caso o resto não interferisse na resposta final. Os alunos desenvolveram uma estratégia de resolução válida e elaboraram uma resposta de acordo com a situação do problema como podemos verificar na *Figura 30* e na *Figura 31*.

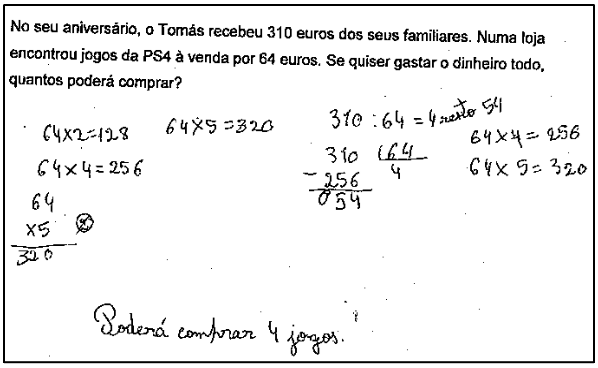


Figura 30. Registo da Ângela da resolução da tarefa 7

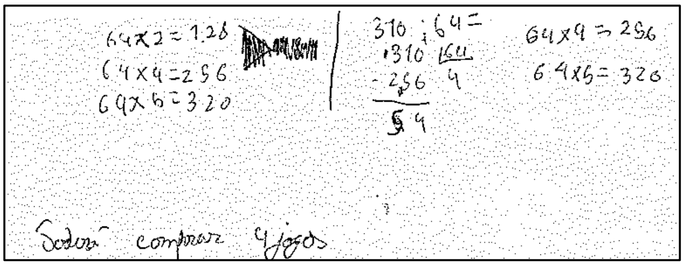


Figura 31. Registo do Salvador da resolução da tarefa 7

Para a resolução do problema da tarefa 7, os alunos utilizaram em primeiro lugar a multiplicação aliada à tentativa e erro. Multiplicando o divisor (64) por um número escolhido, tentaram chegar o valor do dividendo (310). Começaram por calcular multiplicando por 2, depois por 4 e, visto já estarem próximos do número pretendido, multiplicam ainda por 5, ultrapassando o resultado pretendido.

Como se pode observar os alunos fazem ainda o registo de um segundo cálculo, um algoritmo da divisão. Como podemos constatar pelo diálogo seguinte, à partida os alunos consideram este cálculo como uma verificação do resultado.

> Salvador (S)- Então, primeiro fazemos esta e depois fazemos a outra. E se der o mesmo está certa. Faz da tua maneira e eu faço da minha e depois juntamos as duas e se as duas derem igual…
>
> Ângela (A) - Porque é que não fazes 64 vezes 5, se der um maior…
>
> S- E agora, depois, se der, fazemos esta que eu estou a dizer e depois fazemos a tua de dividir e depois se der o mesmo resultado está certa.
>
> A- Mas eu não fiz a de dividir.
>
> S- Está bem. Já vais perceber.

No entanto, na apresentação à turma, os alunos consideraram o cálculo do algoritmo como a sua estratégia de resolução do problema como podemos confirmar no diálogo que se segue. Esta foi a única estratégia que explicaram e que registaram no quadro, o que pode evidenciar que consideram esta estratégia mais válida ou mais sofisticada.

Ângela (A)- Leio o problema?

Investigadora (I) - Sim, se fazes favor.

A- (Lê o enunciado do problema). Vi que ele tinha 310 euros e cada jogo era 64 euros então fiz 310 a dividir por 64 para ver quantos jogos é que ele podia comprar e podia comprar 4 jogos.

Devido à natureza do problema, não é claro se os alunos conscientemente perceberam que o resto neste caso não afetava a resposta final ou se simplesmente o ignoraram. No registo das interações entre o grupo verifica-se que não é feita qualquer referência ao resto. Na apresentação da sua resolução à turma, os alunos voltam a não fazer nenhuma referência ao resto, como podemos verificar no seguinte diálogo.

Ângela (A) - Leio o problema?

Investigadora (I) - Sim, se fazes favor.

A- (Lê o enunciado do problema). Vi que ele tinha 310 jogos e cada jogo era 64 euros então fiz 310 a dividir por 64 para ver quantos jogos é que ele podia comprar e podia comprar 4 jogos.

I - Alguém quer fazer algum comentário sobre a resolução da colega, da A.? Ninguém quer dizer nada? Então S. e A. podem se sentar, se faz favor.

Perante as evidencias, verifica-se que os alunos mais uma vez não fizeram nenhuma reflexão sobre a influência do resto na resposta ao problema. Não senti necessidade de lhes colocar questões sobre este assunto visto que previ que com a apresentação da estratégia de resolução do outro par, as devidas questões, explicações e reflexões sobre o papel do resto iriam surgir tal como se verifica nas páginas 112 e 113.

4.1.1. Síntese do caso Ângela e Salvador

Seguidamente será realizada uma síntese da análise efetuada relativamente a todos os aspetos observados nos dados recolhidos.

A Tabela 7 sintetiza as estratégias utilizadas pelos alunos, na resolução do problema 1 do teste diagnóstico.

Tabela 7

Tabela síntese das estratégias utilizadas pelos alunos Ângela e Salvador para o problema 1 do teste de diagnóstico

Nome do aluno / Estratégia		Ângela	Salvador
Procedimentos de construção (aditivos + multiplicativos)	Adição do divisor	X	X
	Adição por saltos		
	Subtração		
	Usa pequenos múltiplos do divisor	X	
	Usa grandes múltiplos do divisor		
	Dobro		X
	Multiplicação por múltiplos de 10		
	Multiplica o divisor por outro número		
	Usa estimativa	X	
	Usa tentativa e erro	X	X

Esta síntese permite verificar que os dois alunos utilizaram estratégias semelhantes, do tipo procedimento de construção em que realizaram uma combinação de cálculos por adição e multiplicação. Verifica-se também que ambos utilizaram a tentativa e erro.

Seguidamente é apresentada uma tabela que sintetiza o tipo de estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de todas as tarefas realizadas a pares.

Tabela 8

Tabela síntese das estratégias utilizadas para a resolução das tarefas pelos alunos Ângela e Salvador

Estratégias		**Tarefas**								
		T1	**T2**	**T3**	**T4**		**T5**		**T6**	**T7**
					4.1	**4.2**	**5.1**	**5.2**		
Usa quocientes conhecidos				X						
Usa a relação entre a multiplicação e a divisão	Multiplica o divisor por outro número					X		X		X
	Usa estimativa					X		X		X
	Usa tentativa e erro					X		X		X
	Usa múltiplos de 10					X		X		
	Usa produtos conhecidos					X		X		X
Algoritmos alternativos	Não usa decomposição do dividendo		X							
	Usa decomposição do dividendo	X		X	X		X		X	
	Regista cálculos intermédios	X	X		X		X		X	
	Não usa decomposição do divisor	X	X	X	X		X		X	
	Usa estimativa	X	X		X		X		X	
	Usa tentativa e erro	X	X		X		X		X	
	Usa produtos conhecidos	X								

Observando a tabela e comparando os seus dados com os da Tabela 7 verificamos que os alunos abandonaram completamente as estratégias aí utilizadas de procedimentos de construção mais baseados na adição para passarem a utilizar ou a relação entre a multiplicação e a divisão ou algoritmos alternativos, o que evidencia uma evolução na sofisticação das estratégias utilizadas.

A prevalência da utilização de um algoritmo é visível dado que dos 9 problemas trabalhados, em 6 deles verifica-se a sua utilização como estratégia de resolução.

O algoritmo mais usado, em 5 dos problemas, envolveu a decomposição do dividendo pelas dezenas e utilização do divisor por inteiro. Na resolução da tarefa 2 foi utilizado um algoritmo diferente, visto que os alunos utilizaram tanto o divisor como o dividendo por inteiro. Como verificámos na análise anterior da tarefa, esta situação deveu-se certamente à natureza dos números envolvidos que não permitiam o procedimento anterior.

A utilização da relação entre a multiplicação e a divisão aparece nas situações em que os alunos realizaram mais do que uma tarefa/problema na mesma sessão (T4, T5 e T6/7) e onde optaram sempre por utilizar esta estratégia no segundo problema realizado, não sendo clara a razão desta escolha.

Verifica-se que todas as estratégias desenvolvidas pelos alunos envolveram procedimentos de estimativa e tentativa e erro.

Realizando uma síntese relativamente à situação da Ângela e do Salvador relativamente à compreensão e/ou dificuldades evidenciadas relativamente a ideias fundamentais da divisão, verifica-se que sobre os sentidos da divisão os alunos evoluíram relativamente ao desempenho nos problemas do teste diagnóstico e de um modo geral já associam tanto as situações de medida como de partilha diretamente à operação de divisão, embora em alguns casos a divisão apareça como um cálculo para a confirmação do resultado obtido através da utilização da multiplicação. Na Tabela 9 podemos observar o mesmo tipo de análise relativamente a todas as tarefas realizadas pelos alunos a pares.

Tabela 9

Tabela síntese do desempenho dos alunos Ângela e Salvador relativamente à identificação do sentido de divisão presente nos problemas resolvidos a pares

Tarefa	T1	T2	T3	T4		T5		T6	T7
				4.1	4.2	5.1	5.2		
Sentido da divisão	medida	partilha	partilha	partilha	medida	medida	partilha	medida	medida
Associam diretamente à divisão	X	X	X	X		X		X	
Usam divisão como confirmação do resultado					X		X		X

Verifica-se que de um modo geral os alunos associaram tanto as situações de medida como de partilha à operação de divisão, embora no caso dos problemas 4.2, 5.2 e na tarefa 7, a divisão apareça como um cálculo para a confirmação do resultado obtido através da utilização da multiplicação.

Verificou-se a partir dos dados recolhidos da tarefa 4 e 5, que os alunos não conseguiram estabelecer qualquer relação entre problemas de medida e de partilha baseados na mesma relação parte/todo. Inclusivamente verifica-se que nas duas tarefas os alunos utilizaram estratégias de cálculo diferentes para os dois problemas. A utilização do modelo retangular também não os auxiliou nesta tarefa dado que não conseguiram identificar no mesmo as três quantidades envolvidas nas situações dos problemas.

Sobre a relação inversa entre a multiplicação e a divisão, verifica-se que os alunos já desenvolveram conhecimentos sobre esta relação visto que utilizam a multiplicação como operação inversa como estratégia de resolução de 3 problemas. No entanto, não há evidencias que o façam de forma explicita, tendo consciência de que estão a resolver uma situação de divisão utilizando a multiplicação e de que compreendam que tal é possível porque são operações inversas. Na tarefa 3, os alunos evidenciaram dificuldade em aplicar conhecimentos já trabalhados anteriormente relativos à relação inversa entre a multiplicação e a divisão, nomeadamente sobre as relações entre as partes e o todo nestas operações que lhes permitiriam o desenvolvimento de estratégias mais sofisticadas.

Relativamente ao resto, apesar de na sala de aula estas situações serem trabalhadas no sentido de os alunos refletirem sobre a influencia do mesmo, os alunos demonstraram ignorar a sua presença não realizando nenhuma reflexão sobre isso na resposta aos problemas.

Sobre a utilização do cálculo mental podemos concluir que foi utilizado em cálculos realizados na maioria dos problemas resolvidos. Não foi utilizado no problema realizado do teste diagnóstico e na tarefa 2, possivelmente devido às situações envolverem cálculos com números maiores do que 100, que os alunos não terão conseguido decompor em cálculos com números de grandeza menor, e também no problema 5.1 da tarefa 5.

A Tabela 10 sintetiza sobre as diferentes situações em que os alunos utilizaram o cálculo mental.

Tabela 10

Tabela síntese da utilização do cálculo mental pelos alunos Ângela e Salvador nas diferentes tarefas

Tarefa / **Papel do cálculo mental**	**T1**	**T3**	**T4**		**T5**	**T6**	**T7**
			4.1	**4.2**	**5.1**		
Cálculo intermédio num algoritmo	X		X			X	X
Cálculo direto de respostas		X					
Cálculo por aproximação				X	X		
Relacionado com o uso da estimativa e tentativa e erro	X		X	X	X		X

Pela análise da Tabela 10 podemos verificar que o papel do cálculo mental na resolução dos problemas não foi sempre o mesmo, dependendo do tipo de estratégia desenvolvida pelos alunos, mas também, tendo em conta os dados expostos anteriormente, da grandeza dos números envolvidos nos cálculos.

Verifica-se também que na maioria das estratégias foi utilizado o cálculo mental em relação com o uso da estimativa e tentativa e erro.

Relativamente à contribuição das interações entre os alunos do par para a compreensão dos aspetos fundamentais sobre a divisão e para o desenvolvimento de estratégias de resolução de problemas mais sofisticada verifica-se que a tarefa em que houveram mais interações entre o par foi a tarefa 3, o que poderá ter sido originado pelo facto de se tratar de uma tarefa de investigação.

As interações entre o par relacionaram-se fundamentalmente com aspetos da elaboração e desenvolvimento das estratégias de resolução e dos cálculos realizados neste âmbito. Não existiram interações explicitas sobre aspetos fundamentais da divisão.

As interações surgiram principalmente da necessidade de compreensão da tarefa a realizar, da exposição de ideias para elaborar uma estratégia comum, da explicitação dos cálculos realizados, da identificação de erros nos cálculos, da ajuda na realização de um determinado cálculo.

Estas interações permitiram aos alunos o desenvolvimento de estratégias de resolução que na maioria das tarefas realizadas levaram a uma resposta correta e permitiram a troca de ideias entre o par sobre estratégias de cálculo mais sofisticadas desenvolvidas por um dos alunos ou a ajuda de um dos alunos no desenvolvimento pelo colega de uma estratégia mais sofisticada que este ainda não dominava totalmente. A identificação de erros cometidos por um dos alunos do par obrigou à reformulação de ideias ou a revisão de cálculos pelo outro, feita em todos os casos com a ajuda do colega.

As interações entre mim, a Ângela e o Salvador ocorreram quase exclusivamente por minha iniciativa e durante as interações em grande grupo. Surgiram principalmente da minha necessidade, como professora /investigadora, de pedir aos alunos para explicitarem aspetos das suas estratégias que não tinham sido explicados pelos mesmos, de conduzir e instigar a discussão entre eles sobre as estratégias ou sobre os aspetos fundamentais da divisão, de pedir a clarificação das ideias apresentadas, de sistematizar e validar as ideias apresentadas por eles e de colocar questões que levassem à reflexão sobre determinada ideia.

Da análise das interações entre os alunos em grande grupo verifica-se que partiram da explicitação das estratégias desenvolvidas pelo par, de acordo com a situação dos problemas e que levaram à explicação e justificação das ideias e dos cálculos realizados, à explicitação de semelhanças e diferenças entre estratégias realizadas, à validação das ideias e cálculos apresentados, à identificação de erros e apresentação de propostas de resolução dos mesmos, e à explicitação de estratégias mais sofisticadas.

Na discussão das estratégias apresentadas surgiram questões colocadas por colegas ou por mim que levaram ao debate em redor de aspetos fundamentais sobre a divisão.

4.2. O par Andreia/Ricardo

Da análise da estratégia de Andreia no Problema 1 do teste diagnóstico, apresentada na *Figura 32*, verificamos que a aluna utiliza logo à partida a multiplicação realizando o cálculo 365 x 12. Pressupõe-se que a aluna usou a estimativa para pensar no número pelo qual deveria multiplicar o 365, embora o resultado fique ainda distante do valor pretendido (8395).

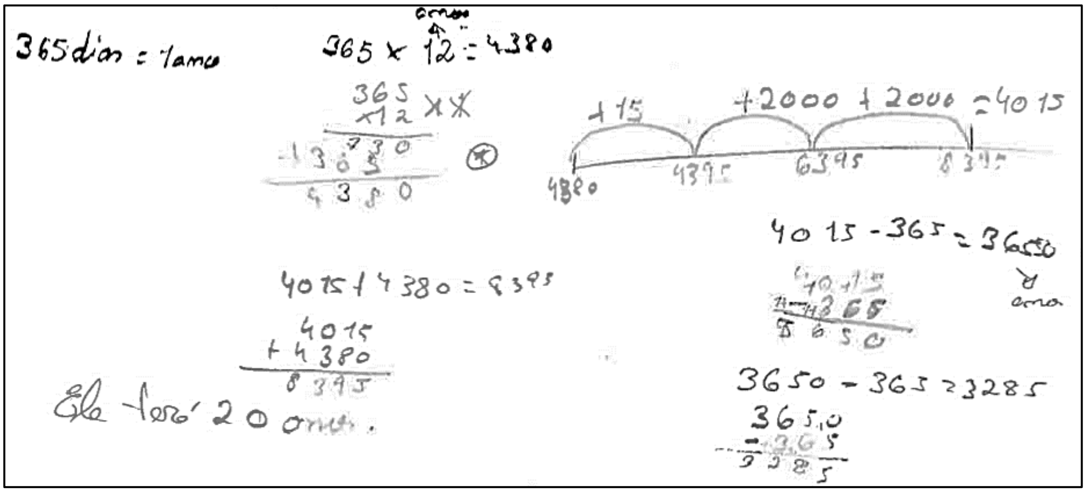


Figura 32. Estratégia de resolução do problema 1 da Andreia

A aluna tenta então aproximar-se mais através de uma adição por saltos realizada por cálculo mental, fazendo 4880 + 15 + 2000 + 2000 = 8395, mas enquanto que no procedimento anterior tinha conseguido identificar no cálculo realizado o número que necessitava para a sua resposta (12 anos), neste procedimento não consegue. Isto porque os valores que são utilizados correspondem a dias e não houve uma preocupação por parte da aluna de paralelamente manter uma contagem dos anos. Parece tentar fazê-lo depois através de uma subtração sucessiva do número de dias de um ano, embora não seja claro que tenha percebido bem o que estava a fazer visto não haver um registo claro da contagem dos anos e não ter finalizado a resolução.

O Ricardo desenvolveu uma estratégia apresentada na *Figura 33* que demonstra logo de início preocupações com rapidez, iniciando os seus cálculos com a multiplicação associada à estimativa e tentativa e erro. Realiza mentalmente duas multiplicações iniciais do valor do divisor por um número facilitador dos cálculos, o 10. Depois adiciona os produtos destas multiplicações ficando com um resultado já muito próximo do pretendido.

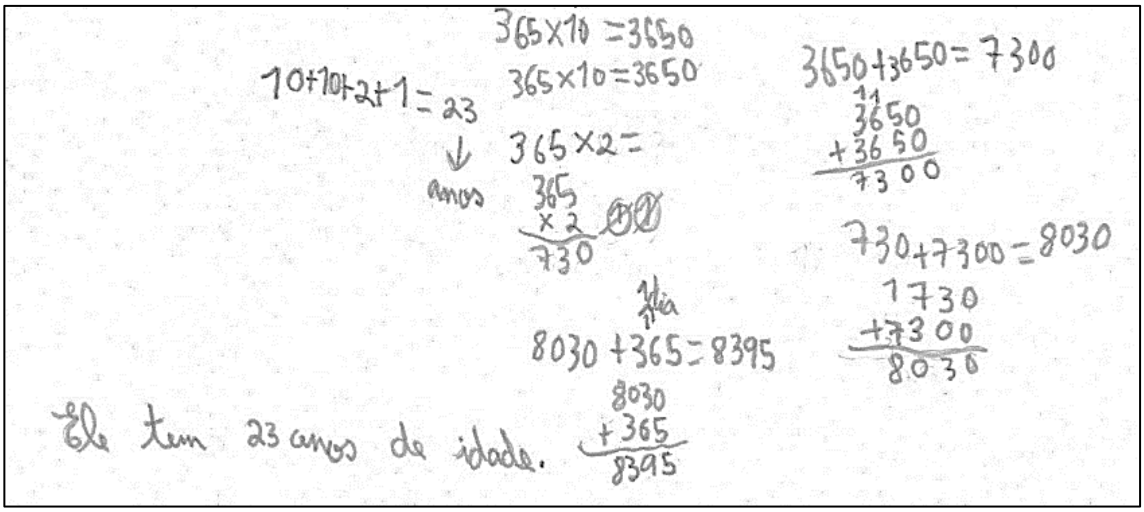


Figura 33. Estratégia de resolução do problema 1 do Ricardo

Começa então a trabalhar com múltiplos do divisor mais pequenos, adicionando primeiro o dobro e por fim realiza uma adição única do divisor, conseguindo chegar ao número pretendido, 8395. Conseguiu realizar a contabilização dos anos fazendo o cálculo 10 + 10 + 2 +1 = 23, chegando assim à resposta correta.

Relativamente ao Problema 2 do teste diagnóstico, a Andreia começa a sua tentativa de resolução utilizando a subtração do divisor (183) ao dividendo (732), como podemos observar na *Figura 34*,mas realiza esta operação uma única vez. O seu procedimento evidencia que não conseguiu atribuir um significado correto à operação realizada possivelmente porque não percebeu que teria que manter uma contagem paralela que lhe indicaria o número de bilhetes entregues a cada aluno. A resposta dada evidencia pouca reflexão sobre a situação apresentada e os números envolvidos.

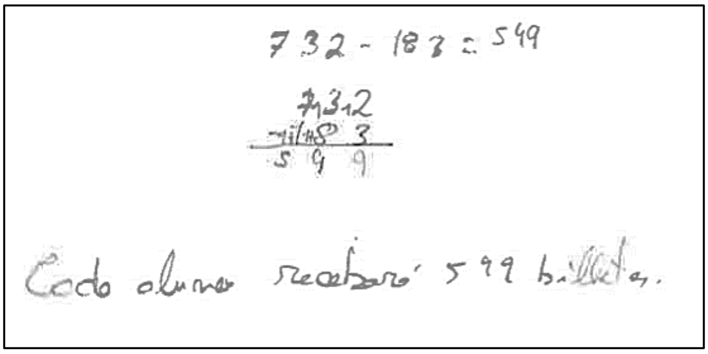


Figura 34. Estratégia de resolução do problema 2 da Andreia

O Ricardo utiliza também neste problema uma estratégia do tipo procedimento de construção como podemos observar na *Figura 35*. Partindo do divisor (183) e utilizando as operações de multiplicação e adição e com a ajuda da estimativa e tentativa e erro, chegar ao dividendo. Revela uma boa capacidade de estimativa pois o seu primeiro cálculo, 183 x 3, aproxima-o bastante do resultado pretendido, necessitando seguidamente só de somar mais uma única vez o divisor para obter o dividendo (732). Consegue dar um sentido aos cálculos realizados pois paralelamente faz uma contagem do número de vezes que utilizou o divisor nos cálculos (3+1=4). Este cálculo fornece-lhe o número procurado para a resposta. O aluno elabora uma resposta correta de acordo com a situação do problema.

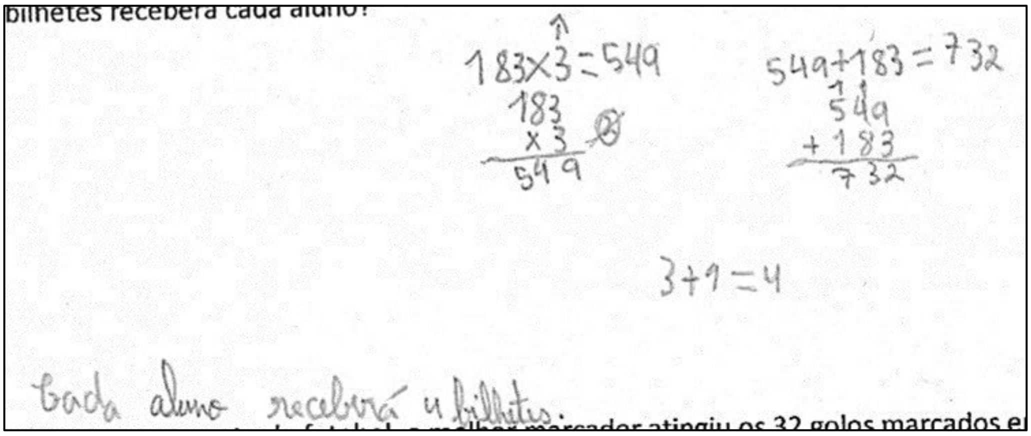


Figura 35. Estratégia de resolução do problema 2 do Ricardo

Tendo em conta as estratégias desenvolvidas por ambos os alunos nos dois problemas do teste diagnóstico onde evidenciaram alguma proximidade ao nível do tipo de cálculos realizado e do modelo intuitivo associado e também algumas das suas características pessoais, Ricardo e Andreia foram selecionados para constituírem o segundo estudo de caso.

Tarefa 1

A tarefa 1 foi distribuída aos alunos que a realizaram a pares. De nota, uma validação inicial partilhada da ligação do contexto do problema à operação de divisão:

Andreia (A) – Então começas tu a ler?

Ricardo (R) – Ok. O leite que é oferecido numa escola está guardado em embalagens com 24 pacotes de leite cada. No mês de novembro, nessa escola, os alunos beberam 3072 pacotes de leite. Quantas embalagens de leite foram utilizadas nessa escola no mês de novembro?

A – Então pomos 3072 a dividir por 24.

R – Sim.

Embora os alunos registem a indicação da divisão de 3072 por 24 e façam a sua representação vertical, como se pode observar na *Figura 36* e na *Figura 37*, a estratégia de resolução desenvolvida acaba por ser basicamente a multiplicação associada à estimativa e tentativa e erro, visto que utilizaram o dividendo e o divisor por inteiro. Os alunos realizaram o cálculo do quociente procurando o número que multiplicado pelo divisor (24) tivesse como resultado o dividendo (3072).

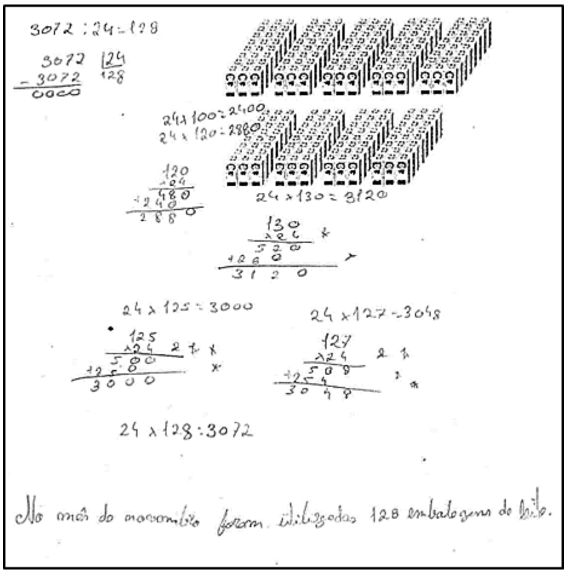


Figura 36. Estratégia de resolução da tarefa 1 da Andreia

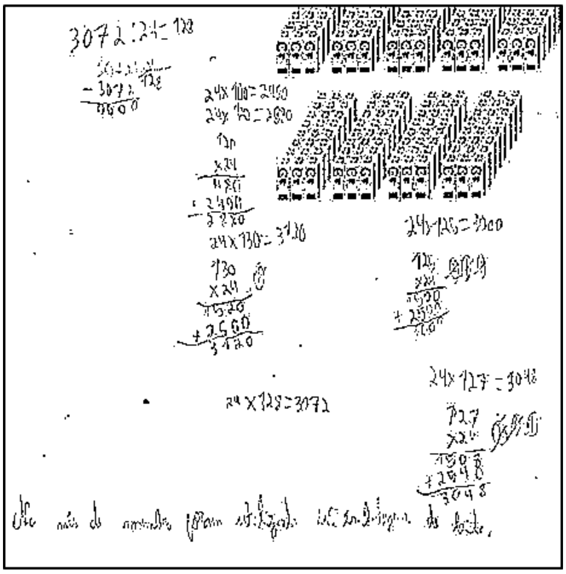


Figura 37. Estratégia de resolução da tarefa 1 do Ricardo

Por sugestão do Ricardo, iniciaram os cálculos com a multiplicação por um número facilitador, o 100, que lhes permite realizar mentalmente o cálculo, mas cujo resultado (2400) se encontra ainda distante do pretendido. Prosseguiram então com o mesmo procedimento, utilizando ainda números facilitadores do cálculo como o 120, 130 e 125, embora estes cálculos já não consigam realizar mentalmente. Os alunos vão paralelamente realizando estes cálculos utilizando um algoritmo da multiplicação e no final de cada, confirmam o resultado entre si, como podemos verificar pelo seguinte diálogo.

Ricardo (R) - Cento e vinte. 24 vezes 20 e …

Andreia (A) - Mais vale fazer a conta…, a conta do algoritmo.

(impercetível)

A -Deu-te quanto?

R- A mim deu-me … 2880.

A- A mim também.

A – Então vamos fazer mais … p´raí 130?

R- 130. 4 vezes 3, 12 e aí vai um, 5 …

A- Já dá mais. Agora não apagues. Agora vamos fazer menos, menos quanto? 130 e quê?

Ao realizarem o cálculo 24 x 130 = 3120, obtiveram um resultado superior ao número desejado e conseguiram perceber que tinham que utilizar números menores, experimentando seguidamente o cálculo 24 x 125 = 3000, onde obtêm novamente um resultado abaixo do número pretendido. Conseguiram desta forma estabelecer um valor "mínimo" e "máximo" para o número pretendido (130 < x < 125). Continuaram o seu procedimento de tentativa e erro agora com o cálculo 24X127 e seguidamente com 24X128. Por sugestão do Ricardo, este cálculo é realizado mentalmente, como podemos verificar no diálogo seguinte.

Ricardo (R)- Agora mais, 128.

Andreia (A) - 128.

R- Mas não é preciso fazer dessa…, não é preciso fazer para baixo.

A- Porquê?

R- Porque é só preciso fazer 3048 +24. Vai dar, acho eu. Sim, vai dar.

A- Vai dar 3072.

R- Então ali é 128.

Através do cálculo 3048 + 24 = 3072, os alunos conseguem verificar que 128 é o número que procuravam. Completam a representação vertical da divisão com o quociente encontrado (128). Seguidamente releem o enunciado do problema e elaboram uma resposta correta de acordo com a situação do problema.

Na apresentação da resolução aos seus colegas, começam a exposição da sua estratégia pela apresentação do primeiro cálculo sem fazerem uma ligação à situação do problema, sendo por isso interpelados por mim no sentido de evidenciar a necessidade de estabelecer esta ligação, como podemos seguidamente verificar.

Andreia (A) – Primeiro nós fizemos 24 x 100 para saber quanto é que falta para chegar a 3072.

Investigadora (I) – Mas fizeram 24 x100 porquê?

Ricardo (R) - Para já estar mais perto do… (aponta para o 3072)

I- Mas o que é que vocês precisavam de saber?

R- Quantas embalagens é que eles utilizaram no mês de novembro.

I- E o que é que vocês já sabiam sobre isso?

R – Que cada embalagem trazia 24 pacotes, 24 pacotes de leite.

I- Cada embalagem trazia 24 pacotes de leite e …

A – E no mês de novembro os alunos beberam 3072 pacotes de leite.

À medida que os alunos vão respondendo às questões colocadas por mim, vão recentrando a sua explicação na situação do problema e começando a estabelecer uma ligação entre o cálculo feito, a situação do problema e os números envolvidos na mesma.

Investigadora (I) - Então porque é que apareceu aí o 24? (referindo-se ao cálculo apresentado pelos alunos)

Andreia (A) – Ah… foi as embalagens que, o número de embalagens que eram 24.

I – O número de pacotes em cada embalagem, não é?

A – E fizemos o número 100 para ver quanto é que faltava para 372…

I- Para três...

A e Ricardo (R) – 3072.

Os alunos continuaram a explicação dos restantes cálculos que realizaram para chegar à resposta e no final, questionei-os sobre o primeiro cálculo realizado.

Investigadora (I) – Então e porque é que vocês começaram pelo 100?

Ricardo (R) - Porque 24 x100 dava 2400, para saber um número mais perto de 3072.

I – Foi um número que vocês… é um cálculo que vocês se lembraram que seria mais próximo.

Vítor (V) – É um número fácil e é próximo do resultado. (responde um colega de turma)

I – Sim, já é da ordem dos milhares, não é?

Coloquei estas questões na tentativa de fazer perceber aos alunos quais os aspetos que devem ser valorizados e referidos na explicação das suas estratégias, nomeadamente uma explicitação inicial da ligação entre os cálculos realizados, a estratégia desenvolvida e a situação do problema e uma explicação das opções tomadas e das ideias desenvolvidas.

Verifica-se que na apresentação dos alunos não foi feita nenhuma menção à operação de divisão e que o primeiro cálculo que foi registado pelos alunos (3072:24) não foi apresentado, o que originou uma questão colocada por mim.

Investigadora – Olhem, e este cálculo aqui? (aponto para o algoritmo da divisão registado no quadro)

Andreia - Foi da divisão... depois pusemos o número para ver quanto é que dava.

A resposta dada não corresponde ao real papel que este cálculo teve na estratégia dos alunos visto que na realidade é a partir do cálculo 3072:24 que os alunos desenvolvem a sua estratégia. É provável que a ligação entre este cálculo e os restantes cálculos realizados se tenha tornado inexistente para os alunos visto que todos os cálculos que realizaram não tiveram mais nenhuma ligação à representação vertical da divisão a não ser no final, quando o quociente já estava encontrado, daí considerarem que estavam a fazer uma confirmação do resultado.

Após a apresentação das estratégias de resolução deste problema dos dois pares do estudo de caso, verifiquei ser importante realizar uma reflexão final de comparação das mesmas visto que uma delas se mostrava mais sofisticada do que a outra.

> Investigadora (I) – (…) há aqui diferenças entre a resolução do Ricardo e da Andreia e a resolução da Ângela e do Salvador, quais são as diferenças que existem entre a resolução do Ricardo e da Andreia e da Ângela e do Salvador?
>
> Ângela (A) – A deles foi o número inteiro.
>
> I – Foi o número inteiro aonde?
>
> A - Eles fizeram logo o 3072 a dividir pelo 24 e nós fizemos pelas centenas…dezenas.
>
> I- Exatamente, vocês não trabalharam logo com o número inteiro, trabalharam só com uma parte do número (…)
>
> Salvador (S) – Eles fizeram isto aqui, isto mais isto (apontando para 307 e para o 2 do dividendo).

Os alunos do outro caso conseguiram identificar uma diferença importante nos cálculos desenvolvidos pelos dois pares. Continuei a discussão tentando que os alunos explicitassem razões relacionadas com a diferença identificada.

> Investigadora (I) – Pronto, eles foram logo ver o 24 quantas vezes cabia no 3072 e vocês começaram por ver só … continua…
>
> Salvador (S) – No 307 porque achámos que era mais fácil, mais simples.
>
> I – Porquê? Porque é que era mais simples?

S- Porque tinha menos números.

Ângela (A) - Porque o número era muito grande.

I- Porque o número é mais pequeno, portanto facilita os cálculos que se têm que fazer.

Os alunos do primeiro par conseguem explicar por que razão tinham realizado os cálculos de uma forma diferente de Andreia e Ricardo e conseguem demonstrar aos outros colegas que a sua estratégia de resolução pode ser mais rápida e mais simples, por envolver cálculos com números de menor grandeza, o que a torna mais sofisticada.

<u>Tarefa 2</u>

Os alunos associaram logo inicialmente a situação do problema à operação de divisão. Começaram por registar o cálculo 1122:187 e iniciaram a sua resolução através do algoritmo da divisão, como se pode observar na Figura 38 e na *Figura 39*. Como trabalharam com o dividendo e o divisor por inteiro, repetiu-se a situação do problema anterior, acabando por a multiplicação associada à estimativa e tentativa e erro ser a verdadeira estratégia de resolução, transformando o registo vertical do algoritmo da divisão numa mera representação da situação.

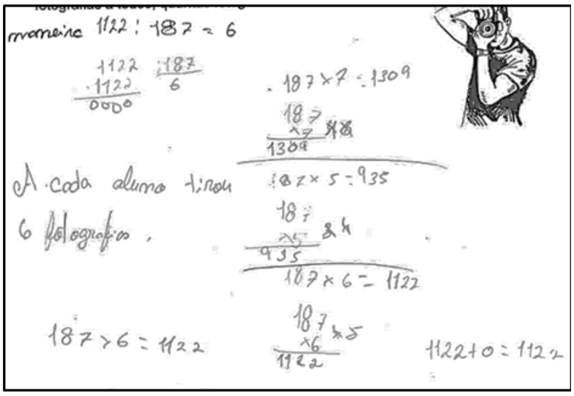


Figura 38. Registo da Andreia da resolução da tarefa 2

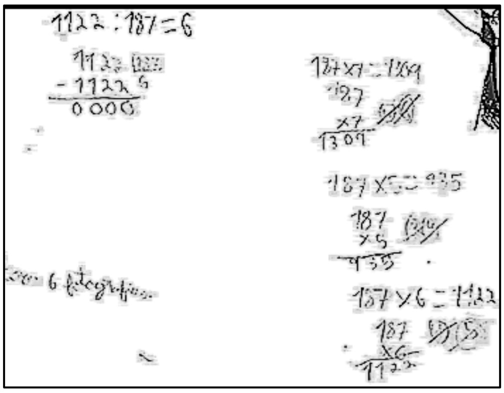


Figura 39. Registo do Ricardo da resolução da tarefa 2

Os alunos iniciaram a estratégia de cálculo do quociente tentando encontrar o número que multiplicado pelo divisor (187) desse como resultado o dividendo (1122). O primeiro cálculo (187x10) foi realizado mentalmente e não foi registado. Este cálculo evidencia alguma falta de reflexão que resulta numa fraca estimativa dado que o seu resultado fica ainda distante do número pretendido. No entanto, serviu para os alunos estabelecerem um limite máximo para o número procurado e para perceberem que terão que experimentar a multiplicação por números menores. Usando um algoritmo, calculam seguidamente 187x7 e depois 187x5 onde já obtêm um resultado menor do que pretendido. Por fim calculam 187x6 e obtêm o número pretendido (1122).

Completam a representação vertical da divisão com o quociente encontrado (6) e elaboram uma resposta de acordo com a situação do problema.

Na apresentação da estratégia à turma, ao contrário do que havia acontecido na apresentação do problema da tarefa 1, Ricardo evidencia preocupação em relacionar os cálculos realizados e a estratégia desenvolvida com a situação do problema e demonstra claramente associar a operação de divisão à estratégia de resolução do problema, como podemos verificar.

> Ricardo - Então o fotógrafo tinha tirado 1122 fotografias e eram ao todo 187 alunos. E como no problema estava a dizer que o número de fotografias era o mesmo para cada aluno, então nós fizemos 1122 a dividir por 187 (apontando para o algoritmo registado no quadro). Depois como se fosse vezes 10 (187 x 10) já ia dar mais que 1122, fizemos vezes 7 que deu 1309. Depois fizemos vezes 5 para ver se já dava certo e deu 935. E como 7 não dava, 7 era maior e cinco era menos, fizemos com o 6 e deu 1122.

No final da apresentação não foram colocadas questões.

<u>Tarefa 3</u>

Nesta tarefa, após os alunos realizarem a leitura do enunciado do problema, há um momento de validação inicial partilhada da ligação do contexto do problema à operação de divisão, como se pode verificar no seguinte diálogo.

> Ricardo (R) – (Lê o enunciado). Então fazemos 240 a dividir por … a dividir por…

Andreia (A) – Mas há bué… A dividir por quê?

R- Por uma caixa, 240 lápis a dividir por uma caixa.

A- Ahn? 240 a dividir por uma caixa?

R- Sim. Poderá arrumar um lápis em cada caixa.

Conseguiram também logo perceber que existem várias possibilidades de resposta à situação apresentada. Ricardo consegue logo descobrir uma resposta possível, mas ao explica-la a Andreia, não apresenta a situação de uma forma correta.

A- A sério?

R- Não…sim…não…poderá arrumar 240 lápis numa caixa e 240 a dividir por um que é igual a 240. Uma forma.

A- OK.

Perante a dúvida da Andreia, Ricardo reflete sobre a sua afirmação e consegue reformulá-la corretamente. Os alunos continuam o diálogo e aparentemente seguem a ordem da sequência numérica para encontrarem as respostas possíveis.

R- Agora 240 a dividir por dois.

A- 240 a dividir por 2 que é igual a 120. Outra maneira.

A – Fazemos a dividir por três?

R- Espera aí, agora temos que pôr aqui à frente (impercetível), e depois temos que fazer aqui, em baixo desta 120 + 120.

A- 120 + 120.

Por proposta de Ricardo, os alunos começam a realizar a confirmação dos cálculos das divisões através de outra operação, neste caso realizaram mentalmente a divisão de 240 por 2 obtendo o quociente 120, resultado que foi depois confirmado pela adição de 120 + 120.

Os alunos continuam a sua estratégia de resolução e realizam seguidamente o cálculo de 240:3. Aparentemente tentam realizar este cálculo através da divisão, mas não conseguem. Ricardo recorre depois ao cálculo mental utilizando a multiplicação e a tentativa e erro, como se pode observar na interação entre os alunos.

Ricardo (R) -Vamos preencher este papel de maneiras. 240 a dividir por 3.

Andreia (A)- Que é igual a?

R- Vamos fazer as contas.

A- Primeiro 0 a dividir por 3 dá 0.

R – Espera…

A- Depois 4 a dividir por 3 dá …

R- Mais vale fazer 3 vezes… então… 3 vezes 7 é igual a 21, não é vezes…

A- Acho que não existe.

R- Existe, existe, eu sei qual é!

A- Só se der vírgula tais.

R- É 8, é 8 que dá 24. Estás à espera de quê, faz! Pões 0, que não dá zero e dá 80.

Como se pode verificar na *Figura 40* e na Figura 41, os alunos registam este cálculo num algoritmo e realizam depois a confirmação do resultado com uma adição (80 + 80 + 80).

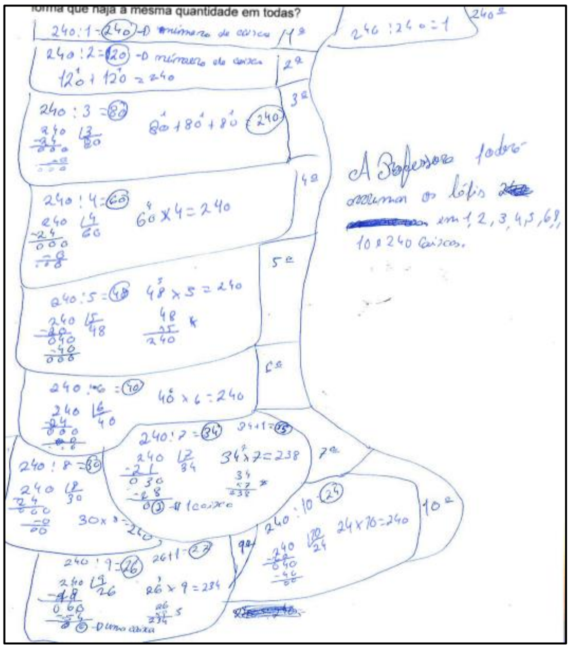


Figura 40. Registo da Andreia da resolução da tarefa 3

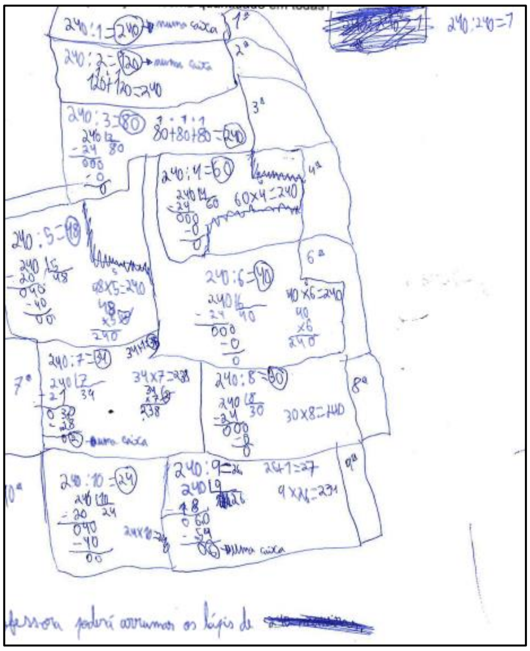


Figura 41. Registo do Ricardo da resolução da tarefa 3

Os alunos continuam à procura de possíveis respostas, respeitando o critério inicial da sequência numérica. Realizam através de um algoritmo a divisão de 240 por 4, de onde obtêm o quociente 60. Para confirmarem este resultado acabam por trocar a estratégia da adição pela multiplicação provavelmente porque o cálculo já envolve mais parcelas e torna-se mais trabalhoso. Ricardo consegue realizá-lo através de uma estratégia de cálculo mental, como podemos verificar.

Andreia (A)- Agora vamos ver se 60 mais 60…

Ricardo (R) - Faz vezes 4.

A- Ok.

R- 60 x 4 igual a 240

A – Não sabes!

R – É porque 60 + 60 dá 120.

Continuando a sua estratégia descobrem também que o 5 e o 6 são duas respostas possíveis. Experimentam depois o 7 e começam a surgir dúvidas.

Andreia (A)- Agora 240 a dividir por 7.

Ricardo (R) - Acho que não vai dar certo.

(…)

R-Isto não vai dar todas, não cabe todas assim.

A – Vezes 7 não dá 24.

Os alunos verificaram que não conseguiam realizar o cálculo 240:7 por não existir nenhum número (inteiro) que multiplicado por 7 desse como resultado 24 (e por consequência também 240). Neste momento os alunos apercebem-se de uma ideia que supostamente deveria estar presente nos seus raciocínios desde o início da resolução do problema visto já terem trabalhado na sala de aula o conceito de divisor, nomeadamente a ideia de que há números inteiros que não dividem o 240. Curiosamente, não aceitam que o 7 não possa ser uma solução e resolvem ignorar um dos critérios designados no enunciado do problema de que todas as caixas devem ter o mesmo número de lápis.

Ricardo (R) - Pois não, mas dá 21. Não dá certo. 30, não dá certo.

Andreia (A) – E depois, 28.

R - 28 é menos 4, dá 34 para 28. Ai não, dá. Ai não sobra 2, aqui sobra 2. Esta caixa, e há uma caixa que fica com dois. Faz assim uma seta e a dizer última caixa, no 2.

(…)

A- Ah! Não… Nós aqui no sete, espera aí, aqui no sete, aqui falta uma caixa por isso temos que adicionar 34 + 1. Dá 35.

R- Não, isto é, isto é uma caixa.

A- Mais uma caixa!

Desta forma, os alunos resolvem considerar que 7 pode ser uma resposta, mas não se sentem agora muito seguros com a sua estratégia e começam a conversar com outros grupos.

Andreia (A) - Agora é 240 a dividir por … bolas, isto não vai acabar nada…

(conversas laterais)

Vítor (V) - Vocês estão a fazer cálculos, não dá, nem todas dão.

Ricardo - O sete não dá.

Paulo - Nem todas dão.

V- Não podem dizer!

Ricardo demonstra estar muito confuso relativamente à resolução do problema e em conversa com os colegas, faz algumas afirmações que não leva em consideração na sua própria estratégia.

(Aparentemente mostram a folha um ao outro)

(…)

Ricardo (R)- E como é que vocês sabem que isso tudo dá 240? Não dá tudo! Sabes que não dá tudo 240?

Catarina (C) - Não pensámos nisso…

R- Vocês puseram 240 a dividir por 7? Que deu 240… quer dizer, que deu o resultado certo?

Diogo (D) - Até agora todas deram.

R-Não, não deram, o 7 não dá, o 9 não dá.

D- Nós não pusemos nem o 9. Nós pusemos…

R- Mas têm de pôr todas, as possíveis,…daqui a um ano…

D-A sobrar? Até a sobrar?

R- Iá.

D- Vocês puseram todas…

R- (interrompe o colega) O que sobra é uma caixa.

Os alunos continuam a estratégia e consideram como resposta possível, o 8 e o 9. Andreia e Ricardo começam a considerar a estratégia muito trabalhosa, como podemos verificar no seguinte diálogo.

Andreia (A) – (…) Vamos só fazer até ao 10 não vamos?

Ricardo (R) - Não, até ao 240.

(conversas laterais)

R- Isto é esquisito…100, 101, 102, 103,104,105,106… isto não vai dar tempo para a resposta.

Depois de várias trocas de ideias com colegas dos outros pares, onde afirmam sempre que a estratégia correta é experimentar os cálculos com todos os números até ao 240, um dos colegas de outro grupo resolve questionar-me.

Ricardo (R) - São 240.

Diogo (D) - Ahn?

R- São 240 maneiras.

Andreia (A) - Iá. Tens de fazer 240 maneiras.

D- É 240 maneiras??? Pode dar um número com sobra? (dirigindo-se a mim)

Investigadora – Eu não vou responder a essa pergunta, vocês têm de fazer como acham que é.

Visto que nem com os colegas nem comigo conseguiram esclarecer as suas dúvidas e também por acharem muito fastidioso o trabalho de realizar cálculos com todos os números até 240, passam para a elaboração de uma resposta.

Ricardo (R) -A professora poderá arrumar os lápis…

Andreia (A) - Em…

R-Não.

A- Sim, em não sei quantas caixas.

R- Não, de 240 maneiras.

A- Ah! De 240 maneiras. Já está. Acabámos professora.

Os alunos continuam a conversar com os outros pares e numa destas conversas, o Ricardo toma consciência de que não pode aceitar todos os números como resposta, só aqueles que permitirem dividir os 240 lápis por caixas com o mesmo número de lápis.

Vítor (V) - Sabes que há mais de 20.

Ricardo (R)- O máximo é 240.

V- Ahn?

R- Então o resto é mais uma caixa.

V- (resposta impercetível)

R- (após a conversa com V) Tem de ter a mesma quantidade em todas.

Andreia (A)- Ahn?

R- Tem de ter a mesma quantidade em todas, porque é que eu apaguei esta conta.

A-A sério? Não pode restar resto nenhum?

Os alunos alteraram a sua resposta, passando a considerar unicamente os números que através dos cálculos tinham verificado dividir o 240 sem obter resto. Das 20 respostas possíveis, os alunos conseguiram descobrir 9.

Na apresentação à turma da sua estratégia, os alunos não fazem menção às dificuldades que sentiram durante a realização do problema nem às alterações que fizeram, como se pode seguidamente verificar.

Ricardo (R) - Nós primeiro fizemos 240 a dividir por 1 que deu 240. Depois fizemos 240 a dividir por 2 que dava 120. Para verificarmos fizemos 120 +120 que dava 240. Este 1 (aponta para um nº 1 registado sobre o nº 120) são as caixas, que é 120 lápis numa caixa, aqui. Depois fizemos 240 a dividir por 3 para ver se dava e deu 80. Pusemos 80 + 80 + 80 e deu 240 que é 80 em cada caixa. Depois fizemos 240 a dividir por 4 que deu 60. Depois 60 x 4 que dava 240. E 60 eram os lápis que haviam numa caixa. Depois fomos continuando a fazer por ordem e fizemos 240 a dividir por 5 que deu 48. Fizemos para verificar, fizemos 48 x 5 que deu 240. Desta maneira também dava. Depois fizemos 240 a dividir por 6 que deu 40. Para verificar se estava certo fizemos 40 vezes 6 que deu 240.

Andreia (A) - Nós pensámos se 240 a dividir por 7 se dava número certo, mas não deu porque deu 34 mas deu resto 2. Depois fizemos 240 a dividir por 8 que deu 30, e para verificar se a conta estava certa fizemos 30 vezes 8 igual a 240. Depois pensámos também que o 240 a dividir por 9 também dava, mas sobrou 6 por isso já não deu. Depois pensámos no 240 a dividir por 10 e deu-nos 24, que era como óbvio, e depois fizemos 240 a dividir por 240 que deu 1.

R- E fizemos assim porque estávamos a fazer por ordem.

Dado que, no momento da realização desta discussão não conhecia as dificuldades que os alunos tinham tido durante a resolução da tarefa, e depois de já ter sido discutida na apresentação da mesma tarefa pela Ângela e o Salvador a questão da utilização dos conhecimentos sobre a multiplicação como operação inversa da divisão no desenvolvimento de uma estratégia mais sofisticada de resolução (pp. 69-71) achei que era interessante que os alunos comparassem esta estratégia de resolução com a dos colegas do outro par do estudo de caso e coloquei esta questão para a turma. Houve uma discussão coletiva na qual se chegaram a algumas conclusões, nomeadamente de que Andreia e Ricardo haviam seguido uma ordem na realização dos seus cálculos começando a dividir o 240 por 1 e a sua intenção era dividirem por todos os números até 240 enquanto que a Ângela e o Salvador só utilizaram para a divisão do 240 os números que, por uma razão que não conseguiram explicar, acharam que o dividiam. Os alunos acharam que a estratégia da Andreia e

Ricardo levaria muito tempo a completar, mas que seria aquela que daria mais garantias de se descobrirem todas as soluções possíveis.

Tarefa 4

Relativamente à tarefa 4, os alunos identificaram a situação do primeiro problema (4.1) desta tarefa como uma situação de divisão e utilizaram um algoritmo para a sua resolução como podemos observar na *Figura 42* e na *Figura 43*.

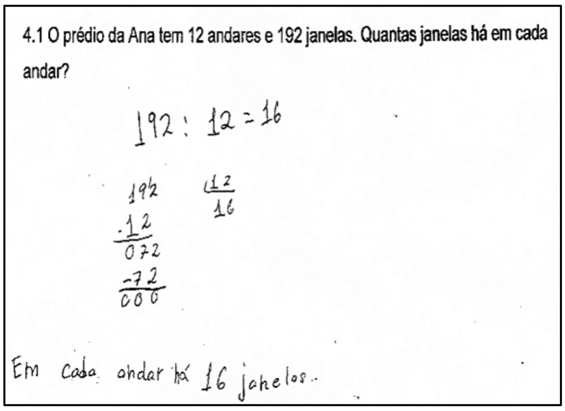


Figura 42. Registo da Andreia da resolução do problema 4.1.

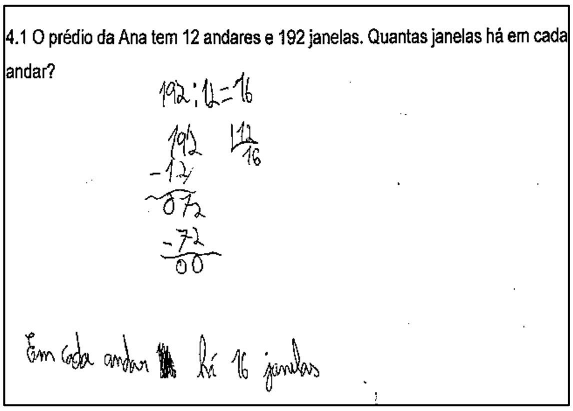


Figura 43. Registo do Ricardo da resolução do problema 4.1.

Para a realização do algoritmo usaram a decomposição pelas dezenas do dividendo e trabalharam com o divisor por inteiro. Ricardo inicia sozinho o procedimento, conseguindo realizar todos os cálculos intermédios através do cálculo mental como podemos verificar no registo seguinte das interações entre os alunos.

Andreia (A) - Vá, vamos começar a fazer.

Ricardo (R) - 192 a dividir por 12. … para 19 dá 1… e vai 7, sobram 7… 7 para o 12… 12 vezes 2 dá 24, 24 vezes 2 dá 48, 48 mais 12 dá 60, 60 mais 12 dá 72, é vezes 6 … vezes 6.

A- Já estás aonde?

R- Em cada andar …

Os cálculos intermédios de subtração foram registados no próprio algoritmo. Os alunos chegaram ao resultado correto e elaboraram uma resposta de acordo com a situação do problema.

A situação do segundo problema desta tarefa é inicialmente mal interpretada pelos alunos, como podemos verificar no seguinte diálogo.

R- Ok. (começa a ler o enunciado da segunda parte da tarefa) O prédio da Isabel tem 192 janelas, 12 em cada andar. Quantos andares tem o prédio?

A – Então agora é 12 a dividir por 192.

R- 12 a dividir por 192.

Verifica-se que os alunos perceberam que há uma situação que se inverte do problema 4.1. para o problema 4.2., mas não conseguem interpretar corretamente essa inversão visto que ela não se repercute nos cálculos, mas sim na resposta.

Porque os alunos já tinham estado a trabalhar na sala de aula a divisão de números mais pequenos por maiores no contexto do cálculo de dízimas, o facto de terem de dividir 12 por 192 aparentemente não lhes causou nenhum constrangimento, como podemos verificar no seguinte diálogo.

Ricardo (R) - Agora transforma o 12 em 1200.

Andreia (A) - Não ponhas 1200!

R- Tem de ser.

A- Ah, iá.

Este facto revela pouca reflexão por parte dos alunos sobre o cálculo que estão a efetuar e sobre o resultado que vão obter desse cálculo relativamente à situação apresentada no problema, visto que este cálculo aplicado à mesma traduz-se numa situação inverosímil.

Para efetuar o cálculo, os alunos realizaram um procedimento já trabalhado de acrescentar casas decimais ao dividendo, transformando-o em 1200 : 192, acertando depois as casas decimais no quociente e resto. Descobriram, através de tentativa e erro, o número que multiplicado por 192 dava o resultado mais aproximado de 1200. Revelaram alguma capacidade de estimativa pois após experimentarem o 8, descobriram o número procurado, o 6. Visto que a divisão efetuada dá resto, os alunos acrescentam mais uma casa decimal tentando efetuar um cálculo onde não obtivessem resto. Usando o mesmo procedimento anterior de tentativa e erro, prosseguem a divisão, mas continuam a obter resto. No final, fazem um acerto incorreto das casas decimais considerando que obtêm como quociente 62, como podemos verificar no seguinte diálogo.

Ricardo (R) - Dá 62 o resultado.
(impercetível)
R- Como é que se faz agora?
Andreia (A)- Então, agora tens de fazer estas casas decimais menos estas que dá 3.
R- Então, 62.
A- Sim!
R- Não!
A- Sim, estas menos estas.

Novamente os alunos demonstram falta de reflexão sobre os cálculos efetuados e o resultado obtido, na medida em que não se apercebem de que deveriam ter obtido um número menor do que a unidade

Seguidamente os alunos elaboraram a resposta ao problema onde, por sugestão do Ricardo, é acrescentado mais um andar ao quociente obtido que representa o resto da divisão.

Nesta tarefa, após a resolução dos 2 problemas, foi pedido aos alunos que tentassem relacionar duas grelhas dadas, que pretendiam representar modelos retangulares, com a situação de cada problema. Em pouco tempo Ricardo e também Andreia conseguiram verificar a ligação, como podemos verificar pelo diálogo entre os alunos.

Ricardo (R)- Isto é o prédio, isto é o prédio! Eu já sabia, vê-se logo.
(os alunos aparentam fazer contagens nas grelhas)
Andreia (A) - Eu estou a fazer o cálculo…16…Dá 192, isto tem 192!

R- 192 quê?

A-Quadradinhos.

(…)

A- São 192 janelas, por isso é tudo janelas aqui. Há quantos andares? 12.

Os alunos representaram com facilidade a situação do problema 4.1. que podemos observar na *Figura 44*, em que os alunos realizam em cada coluna uma contabilização dos 12 andares, de cima para baixo, como num prédio e na primeira linha em cima são contabilizadas as 16 janelas de um andar.

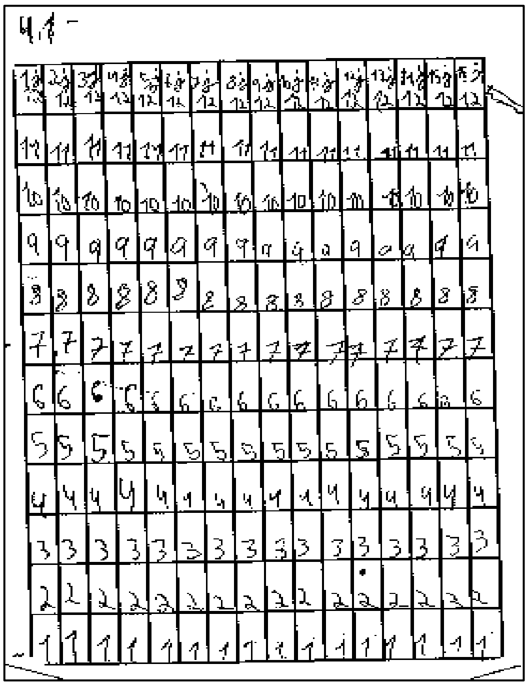


Figura 44. Registo no modelo retangular relativo ao problema 4.1

Já a representação do problema 4.2. através do modelo retangular faz surgir algumas questões que foram discutidas.

A- São 192 janelas, por isso é tudo janelas aqui. Há quantos andares? 12.

A- Nós fizemos o quê? Fizemos as janelas a dividir pelos andares. Temos de fazer os andares a dividir pelas janelas. É por isso que é assim!

R-Não, não é, porque isto é um prédio, isto são 12 andares. Isto é um andar! Então é um andar.

A- Não, não é, porque aqui estão 12 e aqui estão 16.

R- Então, por isso mesmo, por isso mesmo, cada andar… por isso mesmo, 12, há 12. Então este aqui nós temos de colar (impercetível), deixa ver, 12 em cada andar.

Os alunos realizam uma representação correta da situação do problema 5.2. no modelo retangular como podemos verificar na *Figura 45*.

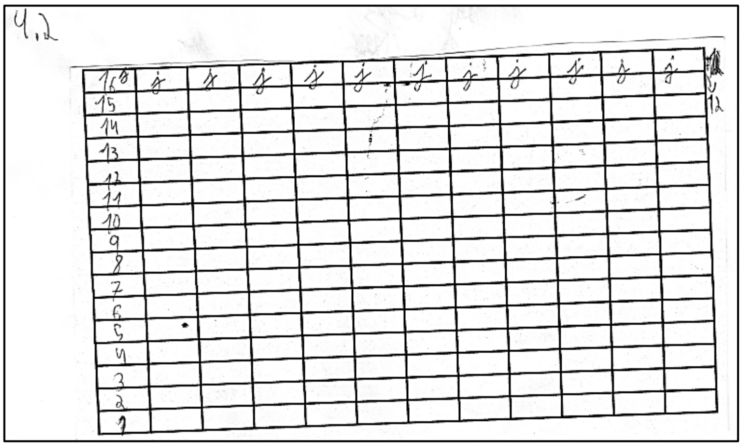


Figura 45. Registo no modelo retangular relativo ao problema 4.2

Os alunos apercebem-se que não tinham interpretado de forma correta a situação do problema e riscam os cálculos que realizaram, como podemos verificar na Figura 46 e na Figura 47.

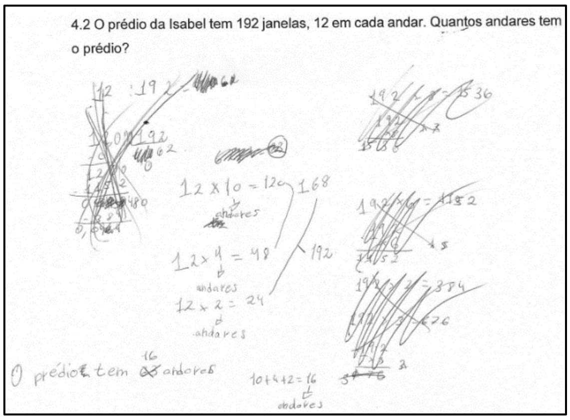


Figura 46. Registo da Andreia da resolução do problema 4.2

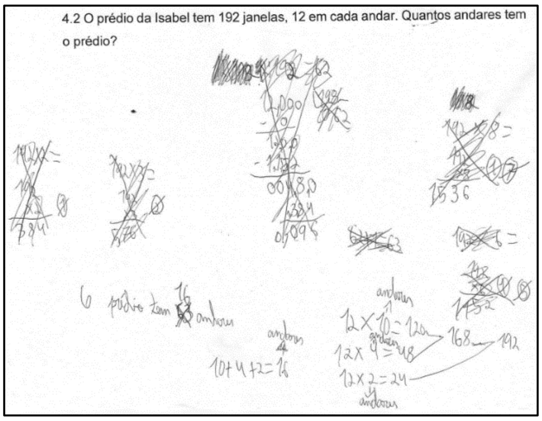


Figura 47. Registo do Ricardo da resolução do problema 4.2

Apoiando-se no modelo retangular onde tinham realizado a representação correta da situação do problema 4.2. e onde verificaram que a resposta correta eram 16 andares, os alunos começam a desenvolver uma nova estratégia. Por sugestão do Ricardo, utilizaram a multiplicação para desenvolver um procedimento de construção do dividendo (192) a partir do divisor, que vão desenvolver utilizando o cálculo mental. Multiplicam o divisor primeiro por 10, depois por 4 e por 2 e adicionam os três produtos obtidos verificando que já obtiveram o número pretendido (192). Realizam depois a adição de 10 + 4 + 2 = 16, que representa a contabilização paralela necessária dos andares.

Embora não se possa considerar esta estratégia como de resolução do problema, visto que os alunos já conheciam antecipadamente o resultado, é uma estratégia válida para a sua resolução.

Mais uma vez, na apresentação das estratégias de resolução à turma, os alunos não fizeram nenhuma menção às dificuldades sentidas na resolução do problema 4.2 e ao papel que o modelo retangular teve na elaboração da estratégia apresentada como de resolução deste problema.

Como no momento da apresentação não me havia apercebido destes factos, a que tive acesso através das gravações áudio e vídeo, a discussão realizada focou-se sobre o modo como os alunos haviam representado as situações dos problemas nos modelos retangulares, indo no seguimento do diálogo já apresentado no caso anterior na (pp. 65-66), onde o colega Vítor explicou a representação realizada nos modelos retangulares das situações dos dois problemas que podemos observar na *Figura 48*.

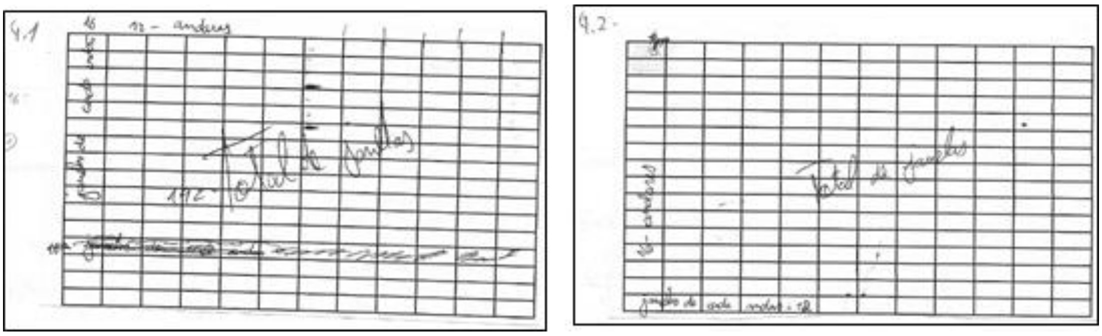


Figura 48. Registos nos modelos retangulares do Vítor relativos aos problemas 4.1. e 4.2.

A discussão com os alunos prosseguiu com a comparação entre os registos do Vítor e os registos realizados pela Andreia e Ricardo no sentido de verificarem quais deles representavam melhor as situações dos problemas.

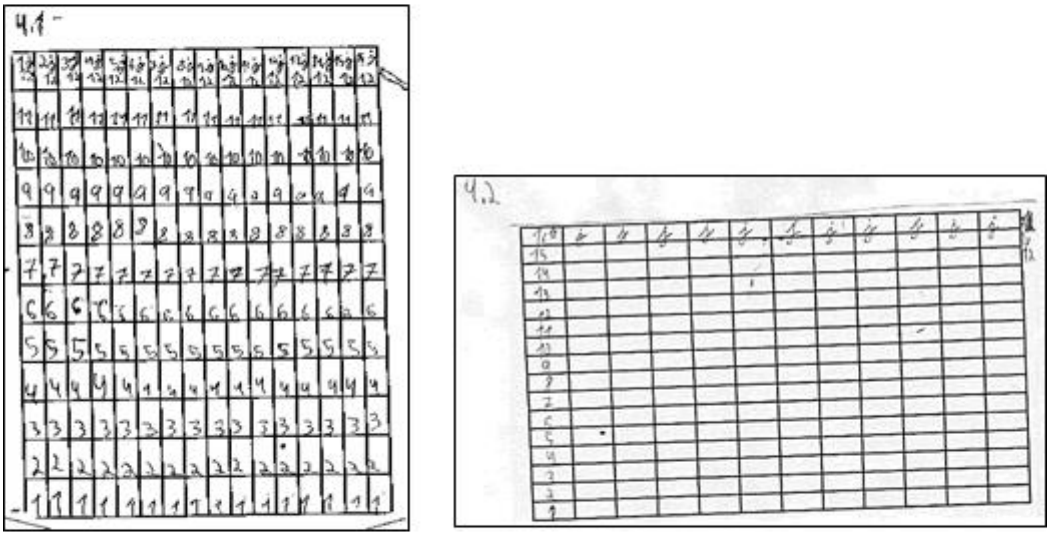


Figura 49. Registos nos modelos retangulares da Andreia e Ricardo relativos aos problemas 4.1. e 4.2.

Dado tratarem-se de situações que envolvem andares e janelas, e tendo em conta a disposição dos mesmos num prédio, os alunos consideraram que os modelos da Andreia e Ricardo, por representarem os andares em coluna e as janelas em linha, apresentavam melhor as situações dos problemas.

<u>Tarefa 5</u>

A tarefa 5, tal como já explicado no capítulo da metodologia surge no seguimento da tarefa 4. Após os alunos realizarem a leitura do enunciado do problema há um momento de validação inicial partilhada da ligação do contexto do problema à operação de divisão, como se pode verificar no seguinte diálogo, depois de lerem o enunciado.

Ricardo - 208 a dividir por 13. Então fazemos primeiro para o vinte que é o …
Andreia – Sim.

Utilizaram um algoritmo para a sua resolução semelhante ao utilizado na resolução do problema 4.1., como se pode verificar na *Figura 50* e na *Figura 51*.

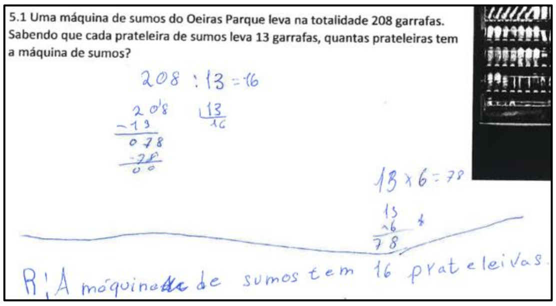


Figura 50. Registo da Andreia da resolução do problema 5.1.

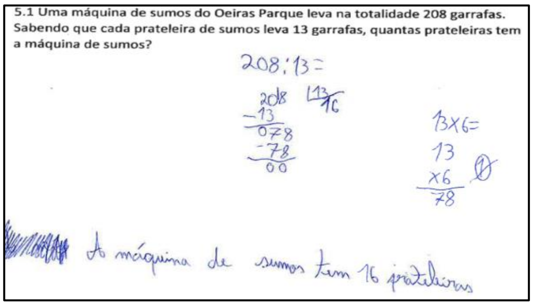


Figura 51. Registo do Ricardo da resolução do problema 5.1.

Como anteriormente, na resolução do algoritmo utilizaram a decomposição pelas dezenas do dividendo e trabalharam com o divisor por inteiro. Os cálculos intermédios de subtração são explicitados no próprio algoritmo e é também realizada à parte uma multiplicação para o cálculo de um número a colocar no quociente, onde mais uma vez o aluno Ricardo revela uma boa capacidade de cálculo mental e de estimativa conseguindo logo perceber que o número que deve multiplicar por 13 para obter 78 é o 6, como comprova o seguinte diálogo.

Andreia (A) - Setenta e oito.

Ricardo (R) - Então, 13 vezes 6. É, eu não sei se isto está certo.

A- Sim, eu sei.

R- Olha, dá mesmo, deu mesmo! Há 16 prateleiras.

Desta forma, os alunos chegaram ao resultado correto e elaboraram uma resposta de acordo com a situação do problema.

No início da realização do segundo problema desta tarefa, os alunos evidenciam relacionar esta situação com a situação do problema 4.2., no entanto, não demonstram ter verificado qualquer ligação entre a situação deste problema (5.2.) e a situação do problema anterior (5.1.), como se verifica no diálogo seguinte.

(Começam a ler o enunciado da segunda parte da tarefa)

Ricardo (R) - Então, fazemos como no outro dia 16 vezes 10 é igual a 160.

Andreia (A) - 16 vezes quanto?

R- 16 vezes 4.

Os alunos utilizaram o mesmo tipo de estratégia de resolução para este problema que tinham já desenvolvido no problema 4.1., nomeadamente um procedimento de construção do dividendo, como podemos verificar na Figura 52 e na Figura 53.

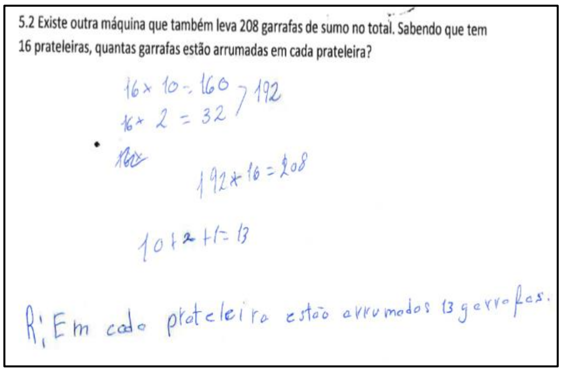


Figura 52. Registo da Andreia da resolução do problema 5.2.

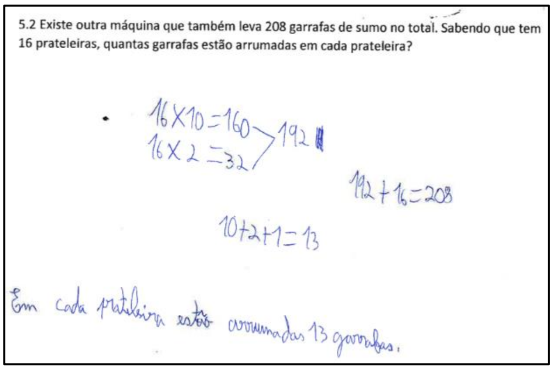


Figura 53. Registo do Ricardo da resolução do problema 5.2.

Confirma-se pela leitura do diálogo anterior que a intenção do Ricardo era desenvolver o procedimento de cálculo multiplicando o divisor (16) em primeiro lugar por 10 e depois por 4. Como podemos verificar no diálogo que se segue, há uma alteração nesta intenção.

Andreia (A) - 16 vezes 4?

Ricardo (R) - Não, 16 vezes… 16 vezes 2. É igual a 32. Agora junta. 192. Agora pomos aqui mais…

A- 16.

R- Espera, agora pomos 192 mais 16 é igual a 208.

Possivelmente por ter verificado mentalmente que o produto de 16 x 4 somado com 16 x 10 iria ultrapassar o número pretendido, o Ricardo altera o cálculo 16 x 10 + 16 x 2 = 192, e somando 16, consegue atingir o total de 208. Realiza depois a adição de 10 + 2 + 1=13, representando o número de vezes que usaram o divisor para “construir” o dividendo, obtendo assim a resposta final. Elaboraram depois uma resposta correta de acordo com a situação do problema.

As estratégias de resolução destes dois problemas correspondem exatamente às estratégias utilizadas para a resolução dos problemas da tarefa 4 que embora tenham conduzido os alunos a respostas corretas, evidenciam falta de capacidade de reflexão que leva ao desenvolvimento de uma estratégia pouco sofisticada e à realização de trabalho desnecessário.

No momento de apresentação à turma, os alunos foram confrontados com a intervenção de um colega que chama a atenção para o facto de existir uma ligação entre as duas situações que podia ter sido aproveitada para facilitar os cálculos e que já foi apresentada no estudo de caso anterior nas páginas 69, 70 e 71.

Tarefa 6

Relativamente ao prolema da tarefa 6, os alunos identificaram logo à partida a situação como de divisão, realizando o cálculo da resposta através de um algoritmo já anteriormente utilizado, decompondo o dividendo pelas dezenas e utilizando o divisor por inteiro, como se verifica na *Figura 54* e na *Figura 55*.

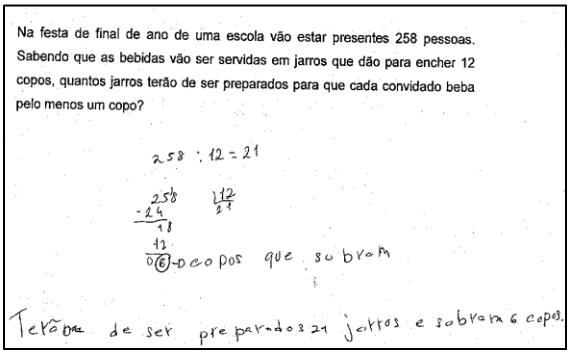


Figura 54. Registo da Andreia da resolução do problema 6

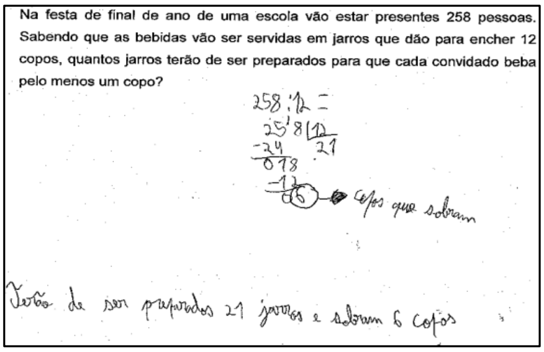


Figura 55. Registo do Ricardo da resolução do problema 6

Devido à facilidade proporcionada pela grandeza dos números envolvidos nos cálculos realizados, os alunos conseguiram desenvolver o procedimento sem necessidade de recorrer à estimativa e tentativa e erro.

Elaboraram uma resposta que demonstra que tomaram em consideração o resto obtido na divisão embora não tenham conseguido atribuir-lhe um significado correto tendo em conta a situação do problema. A resposta evidencia um raciocínio incompleto.

A estratégia de resolução é depois apresentada à turma da seguinte forma.

Andreia (A) - Nós fizemos 258 a dividir por 12. Primeiro dividimos o 25 para ser mais fácil (impercetível). E depois o 6 eram os copos que sobravam. Depois vimos que terão de ser preparados 21 jarros, mas sobram 6 copos.

Na exposição que a aluna fez da estratégia, explicou os cálculos sem fazer referência à situação do problema, mas justifica a escolha da forma como desenvolveram os cálculos do algoritmo, reconhecendo que tentaram torná-los mais fáceis. Após a apresentação da resposta, tentei que os alunos me explicassem o raciocínio que tinha dado origem à resposta.

Investigadora (I) - E o que é o "sobram 6 copos", o que é que tu queres dizer com isso?

Andreia (A) - Não conseguiu alcançar os 12 para encher um jarro, é isso.

I - Mas esses copos sobram como? Ficam a mais, é isso?

A- Sim, porque assim não dão para todas as pessoas, há umas pessoas que bebem mais do que as outras.

As respostas da Andreia demonstram que ela está a atribuir um significado incorreto ao resto. Tentei levá-la a refletir novamente sobre o significado dos 6 copos no resto, fazendo-a reler a pergunta do problema.

Investigadora (I) – Então, mas qual é a pergunta do problema, relembra-me lá A.?

A- (A aluna relê a pergunta do problema) Quantos jarros terão de ser preparados para que cada convidado beba um copo?

I – Então esses 6 copos sobram, mas sobram cheios?

A- Sim.

I- Esses 6 copos sobram cheios.

A- E como é pelo menos um copo por cada pessoa, não podíamos pôr mais dois copos.

I- Quem é que quer fazer comentários? Vítor, tu já tinhas dito que querias dizer alguma coisa.

Visto que a aluna não conseguiu perceber o seu erro, pedi aos outros colegas que interviessem na discussão com as suas ideias.

Vítor (V) - Esse 6 que tu dizes que são copos, são pessoas, porque o 258 não são copos, são pessoas, portanto é isso, em vez de sobrarem copos, sobram pessoas e não podem sobrar, porque diz que cada pessoa tem que beber pelo menos um copo.

Andreia - Então, mas não são pessoas, são copos que sobram porque senão vão dar 2 copos para cada pessoa.

V- Não porque o 258 são pessoas e se tu vais tirando, vais tirando, sobram-te 6, não vão passar a ser copos.

A resposta da aluna evidencia que manteve o seu raciocínio e por isso pedi a um colega de um outro par que tinha conseguido elaborar de forma correta a resposta que registasse a sua estratégia de resolução e resposta no quadro e que as explicasse.

Investigadora (I) - Então explica lá como é que tu pensaste?

Gustavo (G) - Eu pensei (impercetível) e depois pensei 21 eram os jarros e depois faltavam 6 pessoas. Mas todas as pessoas tinham que beber o mesmo, ai…, tinham que beber todas um copo.

I- Pelo menos um copo…

G- Sim, pelo menos um copo. Então ao 21 fui acrescentar mais um, que eram as 6 pessoas, mais um jarro, mais 6 pessoas e deu 22. No total sobram copos, mas isso não interessa, o que interessa é que todas ficam com … (…) bebam um copo.

Visto que o Gustavo menciona na sua explicação que sobram copos, embora com um sentido diferente do que originou a resposta da Andreia e Ricardo, coloquei esta questão ao aluno para que ficassem esclarecidas as diferenças entre as duas afirmações.

Investigadora (I) - Quando tu dizes que te sobram copos dizes nesses 22 jarros que tu disseste que têm de ser preparados, aí é que ainda vão sobrar alguns copos que não vão ser bebidos, não é? Tu concordas com a Andreia quando ela diz ali que aqueles 6 copos são copos que sobram?

Gustavo (G) - Não.

I-Porquê?

G-Porque são … 6 são as pessoas que sobram porque estamos a fazer 258 pessoas a dividir por 12 copos, o que sobra são as pessoas.

I- São as pessoas que ficaram…

G-Sem copos.

O desenvolvimento deste diálogo foi uma nova oportunidade para Andreia e Ricardo observarem o raciocínio de outros colegas que tinham conseguido interpretar de forma válida o resto da divisão de acordo com a situação do problema e que por isso chegaram a uma resposta correta.

Tarefa 7

Relativamente ao problema da tarefa 7, os alunos identificaram logo à partida a situação como de divisão. Realizaram o registo vertical do algoritmo da divisão de 310 por 64 e desenvolveram o cálculo utilizando o dividendo e o divisor por inteiro. Ricardo mais uma vez evidenciou uma boa capacidade de estimativa, iniciando o procedimento com a multiplicação de 64 por 5, cujo resultado embora ultrapasse o número pretendido (310) está muito próximo. Realizando a multiplicação de 64 por 4, conseguem encontrar o resultado mais próximo possível do dividendo (256). Os alunos terminam o procedimento do algoritmo da divisão que apresenta resto de 54 como se verifica na Figura 56 e na Figura 57.

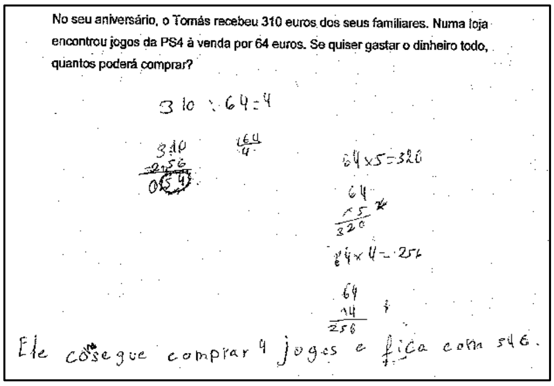


Figura 56. Registo da Andreia da resolução da tarefa 7

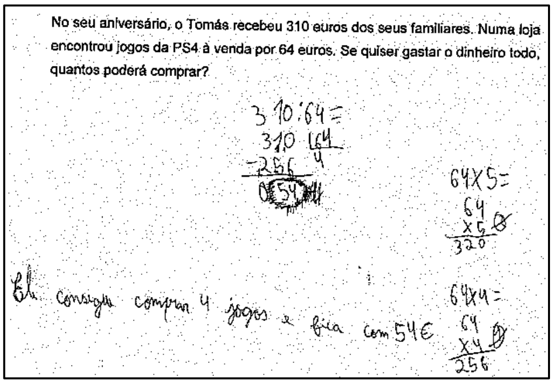


Figura 57. Registo do Ricardo da resolução da tarefa 7.

Na resposta que elaboraram, os alunos demonstram ter refletido sobre o resto, conseguindo atribuir-lhe um significado correto na mesma, tendo em consideração a situação apresentada no problema.

Na apresentação da estratégia à turma, mais uma vez os alunos mencionam o resto, como se pode verificar.

> Ricardo - Nós fizemos 310 a dividir por 64 e primeiro fomos ver 64 vezes 5 que já dava mais do que 310, deu 320. Depois como vimos que era maior, fomos fazer 64 vezes 4 que deu 256 e depois então o resultado era 4 (impercetível) e pusemos na resposta que ele ainda ficou com 54 euros porque os jogos custavam 64 euros.

Após a apresentação dos problemas da tarefa 6 e 7 pelos dois, onde houve uma clarificação do papel do resto nas situações dos problemas destas tarefas, achei que seria pertinente refletir com a turma as diferenças entre o papel do resto nas duas situações.

> Investigadora (I) - Qual é a diferença entre o resto que deu no 1º problema, sem ser a diferença do número em si, já vimos que num é 6 noutro é 54, mas para a situação do problema, qual é que é a diferença entre o resto que deu no problema 6 e o resto que deu no problema 7? Perceberam a pergunta que eu fiz? Para a situação do próprio problema qual é a diferença entre o resto que dá no problema 6, para o próprio problema e depois no problema 7?

Vítor (V) - No problema 6, todas as pessoas tinham que beber, não dizia lá um número máximo de jarros que tinha de ser feito e no problema 7, ele só tinha um certo dinheiro e não podia gastar mais do que aquele, portanto se já passasse, já não dava, só dava para 4.

Gustavo (G) - Quero dizer que a diferença dos… é que os 6 eram as pessoas que tinham de beber e depois, no problema 7 eram os euros que tinham de sobrar. Quer dizer que ele podia comprar os jogos que conseguisse, mas podia sobrar dinheiro, não dizia lá que não podia sobrar dinheiro.

Embora as ideias já apresentadas pelos alunos refletissem diferenças no modo como o resto se relacionava com as duas situações, senti necessidade de tornar ainda mais visível o modo como afetava as respostas dos problemas, isto é, como num caso a resposta é igual ao quociente e no outro não. Por isso coloquei uma nova questão.

Investigadora (I) - No problema 6, o facto de haver aqui um resto altera depois a resposta final ou não?

(…) Então dos meninos que acham que sim, quem é que quer explicar porque é que o resto que deu aqui, alterou a resposta final.

Ricardo (R) - Alterou porque esse resto era um jarro então o resultado não iria ser 21(resultado do quociente), iria ser 22.

I- Esse resto significava mais um jarro.

R- E no problema 7 não ia alterar, não iam ser 5 jogos.

I- Não iam ser 5 jogos porque este dinheiro que sobrou aqui …

R- Não dava para um jogo.

I- Não dava para comprar mais um jogo e nunca poderia dar não é, porque o resto é sempre mais pequeno do que o divisor.

O desenvolvimento deste diálogo foi mais uma oportunidade para os alunos refletirem sobre o significado do resto e a influencia que a situação do problema pode ter na atribuição deste significado.

4.2.1. Síntese do caso Andreia e Ricardo

Seguidamente será apresentada uma síntese relativamente aos aspetos observados nos dados recolhidos para o par Andreia/Ricardo.

Na*Tabela* 11 sintetizo as estratégias utilizadas pelos alunos na resolução dos problemas 1 e 2 do teste diagnóstico.

Tabela 11

Tabela de síntese das estratégias utilizadas pelos alunos Andreia e Ricardo na resolução dos problemas do teste diagnóstico

Estratégia	Nome do aluno	Problema 1		Problema 2	
		Andreia	Ricardo	Andreia	Ricardo
Usar um grupo de cada vez	Subtração			X	
Procedimentos de construção (aditivos + multiplicativos)	Adição do divisor				X
	Adição por saltos	X			
	Subtração	X			
	Dobro		X		
	Multiplicação por múltiplos de 10		X		
	Usa pequenos múltiplos do divisor		X		X
	Usa grandes múltiplos do divisor	X	X		
	Usa estimativa	X	X		X
	Usa tentativa e erro	X	X		X

A tabela permite ver que os dois alunos utilizaram estratégias semelhantes para a resolução do problema 1, do tipo procedimento de construção utilizando a adição e multiplicação, embora Andreia não tenha conseguido completar esta estratégia, tendo depois recorrido à subtração. Verifica-se que ambos utilizaram a estimativa e tentativa e erro.

Para a resolução do problema 2, os alunos desenvolveram estratégias diferentes sendo a estratégia de Ricardo mais sofisticada porque se baseia principalmente no uso da multiplicação para o cálculo, o que diminui o número de cálculos necessários para chegar à resposta e também origina que no próprio cálculo esteja a contabilização do número de vezes que utiliza o divisor.

Seguidamente é apresentada uma tabela que sintetiza o tipo de estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de todas as tarefas realizadas em par.

Tabela 12

Tabela síntese das estratégias utilizadas para a resolução das tarefas pelos alunos Andreia e Ricardo

Estratégias		**Tarefas**								
		T1	**T2**	**T3**	**T4**		**T5**		**T6**	**T7**
					4.1	**4.2**	**5.1**	**5.2**		
Procedimentos de construção (aditivos + multiplicativos)	Adição					X		X		
	Dobro					X		X		
	Multiplicação por múltiplos de 10					X		X		
	Usa pequenos múltiplos do divisor					X		X		
	Usa grandes múltiplos do divisor					X		X		
	Usa estimativa							X		
	Usa tentativa e erro							X		
Usa o modelo retangular						X				
Usa quocientes conhecidos				X						
Usa a relação entre a multiplicação e a divisão	Multiplica o divisor por outro número									
	Usa estimativa									
	Usa tentativa e erro									
	Usa múltiplos de 10									
	Usa produtos conhecidos									
Algoritmos alternativos	Não usa decomposição do dividendo	X	X							X
	Usa decomposição do dividendo			X	X		X		X	
	Regista cálculos intermédios	X	X	X	X		X		X	X
	Não usa decomposição do divisor	X	X	X	X		X		X	X
	Usa estimativa	X	X				X			X
	Usa tentativa e erro	X	X	X						X
	Usa produtos conhecidos	X	X	X	X				X	

Observando a Tabela 12 e comparando os seus dados com os da Tabela 11 verificamos que os alunos, de um modo geral, modificaram as estratégias aí utilizadas de procedimentos de construção para passarem a utilizar principalmente algoritmos alternativos, o que evidencia uma evolução na sofisticação das estratégias utilizadas. No entanto, é de salientar a utilização dos procedimentos de construção na resolução dos problemas 4.2. e 5.2.

A prevalência da utilização de um algoritmo é visível dado que dos nove problemas trabalhados, em sete deles verifica-se a sua utilização como estratégia de resolução.

O algoritmo mais usado, em 4 dos problemas, envolveu a decomposição do dividendo pelas dezenas e utilização do divisor por inteiro. Na resolução da tarefa 1, 2 e 7 foi utilizado um algoritmo diferente, visto que os alunos utilizaram tanto o divisor como o dividendo por inteiro.

Verifica-se que em 5 dos problemas, os alunos utilizaram a estimativa aliada à tentativa e erro. Em 3 dos problemas onde estes procedimentos não foram usados, os alunos recorreram à utilização de produtos conhecidos e em um dos problemas utilizaram a estimativa sem ter de recorrer à tentativa e erro porque fizeram uma estimativa que acertou no resultado logo no resultado.

No que respeita à compreensão e/ou dificuldades relativamente a ideias fundamentais da divisão, verifica-se que sobre os sentidos da divisão os alunos evoluíram relativamente ao seu desempenho no teste diagnóstico e que de um modo geral já associam tanto as situações de medida como de partilha diretamente à operação de divisão. Na Tabela 13 podemos observar o desempenho dos alunos relativamente a este aspeto em todas as tarefas realizadas a pares.

Tabela 13

Tabela síntese do desempenho dos alunos Andreia e Ricardo relativamente à identificação do sentido da divisão presente nos problemas resolvidos a pares

Tarefa	T1	T2	T3	T4		T5		T6	T7
				4.1	4.2	5.1	5.2		
Sentido da divisão	medida	partilha	partilha	partilha	medida	medida	partilha	medida	medida
Associam diretamente à divisão	X	X	X	X	X	X		X	X

Verifica-se que os alunos associaram tanto as situações de medida como de partilha à operação de divisão, embora no caso do problema 5.2. não haja evidencias dessa associação.

Relativamente à ligação entre situações de partilha e de medida decorrentes da mesma relação parte/todo, a partir dos resultados obtidos na tarefa 4 e 5 apura-se que os alunos têm dificuldade em estabelecer esta ligação. Verificou-se na tarefa 4 que a utilização de modelos retangulares ajudou os alunos a estabelecer alguma relação entre os problemas resolvidos e que ajudou os alunos no desenvolvimento de uma estratégia válida para a resolução do segundo problema da tarefa. Na tarefa 5, não houve nenhum reflexo da descoberta realizada com os modelos retangulares sobre a relação entre os dois problemas embora no segundo problema os alunos tenham desenvolvido a estratégia elaborada a partir da observação destes modelos e utilizada na resolução do segundo problema da tarefa 4.

Relativamente à relação inversa entre a multiplicação e a divisão, verifiquei que a Andreia e o Ricardo utilizaram a multiplicação unicamente em estratégias de construção do dividendo, o que não corresponde a uma utilização da multiplicação como operação inversa. Na resolução da tarefa 3, os alunos mostraram dificuldade em aplicar conhecimentos já trabalhados anteriormente relativos à relação inversa entre a multiplicação e a divisão, nomeadamente sobre as relações entre as partes e o todo nestas operações que lhes permitiriam o desenvolvimento de estratégias mais sofisticadas.

Relativamente ao resto, os alunos demonstraram, nas diferentes situações, refletir sobre o seu papel na situação do problema e sobre a sua influência na resposta embora nem sempre tenham conseguido fazê-lo de forma correta.

Sobre a utilização do cálculo mental podemos concluir que foi utilizado em cálculos realizados na maioria dos problemas resolvidos incluindo no problema 1 do teste diagnóstico. Não foi utilizado no problema 2 do teste diagnóstico.

A Tabela 14 apresenta uma síntese das diferentes situações em que os alunos utilizaram o cálculo mental na realização das tarefas da experiência de ensino.

Tabela 14

Tabela síntese das diferentes situações de utilização do cálculo mental pelos alunos Andreia e Ricardo

Tarefa / **Papel do cálculo mental**	**T1**	**T2**	**T3**	**T4**		**T5**		**T6**	**T7**
				4.1	**4.2**	**5.1**	**5.2**		
Cálculo intermédio num algoritmo	X	X	X	X		X		X	X
Cálculo direto de respostas			X		X				
Cálculo por aproximação		X					X		
Relacionado com o uso da estimativa e tentativa e erro	X	X				X	X		X

Pela análise da Tabela 14 podemos verificar que o papel do cálculo mental na resolução dos problemas não foi sempre o mesmo, dependendo do tipo de estratégia desenvolvida pelos alunos, mas também, tendo em conta, como referido anteriormente, a ordem de grandeza dos números envolvidos nos cálculos.

Verifica-se também que na maioria dos casos o cálculo mental foi utilizado em ligação com o uso da estimativa e da tentativa e erro. As situações em que estes dois procedimentos não apareceram associados, como é o caso da tarefa 3, 4 e 6, os cálculos realizados envolveram, de modo geral, números de ordem de grandeza menor e produtos conhecidos.

Relativamente à contribuição das interações entre os alunos do par para a compreensão dos aspetos fundamentais sobre a divisão e para o desenvolvimento de estratégias de resolução de problemas mais sofisticada verifica-se que a tarefa em que houveram mais interações entre os alunos foi a tarefa 3, o que poderá ter sido originado pelo facto de se tratar de uma tarefa de investigação.

As interações entre o par relacionaram-se fundamentalmente com aspetos da elaboração e desenvolvimento das estratégias de resolução e dos cálculos realizados neste âmbito. Não existiram interações explicitas sobre aspetos fundamentais da divisão.

As interações surgiram principalmente da necessidade de compreensão da tarefa a realizar, da exposição de ideias para elaborar uma estratégia comum, da explicitação dos cálculos realizados, da identificação de erros nos cálculos, da ajuda na realização de um determinado cálculo.

Estas interações permitiram aos alunos o desenvolvimento de estratégias de resolução que na maioria das tarefas realizadas levaram a uma resposta correta e permitiram a troca de ideias entre o par sobre estratégias de cálculo mais sofisticadas desenvolvidas por um dos alunos ou a colaboração de um dos alunos para o desenvolvimento, pelo outro colega, de uma estratégia mais sofisticada. A identificação de erros cometidos por um dos alunos do par ou por colegas obrigou à reformulação de ideias ou a revisão de cálculos pelo outro, feita em todos os casos com a ajuda do colega.

Durante a realização de algumas tarefas, em situações que um dos alunos, Ricardo não se sentiu seguro do trabalho que estavam a desenvolver e também não conseguiu uma clarificação das suas dúvidas através da colega Andreia, recorreu a outros colegas na tentativa de esclarecer dúvidas ou confirmar resultados.

As interações entre mim, Andreia e Ricardo ocorreram quase exclusivamente por minha iniciativa e durante as interações em grande grupo. Surgiram principalmente da minha necessidade, como professora /investigadora, de pedir aos alunos para explicitarem aspetos das suas estratégias que não tinham sido explicados pelos mesmos, de conduzir e instigar a discussão entre eles sobre as estratégias ou sobre os aspetos fundamentais da divisão, de pedir a clarificação das ideias apresentadas, de sistematizar e validar as ideias apresentadas por eles e de colocar questões que levassem à reflexão sobre determinada ideia.

Da análise das interações entre alunos em grande grupo verifica-se que partiram da explicitação das estratégias desenvolvidas pelo par, de acordo com a situação dos problemas e que levaram à explicação e justificação das ideias e dos cálculos realizados, à explicitação de semelhanças e diferenças entre estratégias realizadas, à validação das ideias e cálculos apresentados, à identificação de erros e apresentação de propostas de resolução dos mesmos, e à explicitação de estratégias mais sofisticadas.

Na discussão das estratégias apresentadas pela Andreia e Ricardo surgiram questões colocadas por colegas e por mim que levaram ao debate em redor de aspetos fundamentais sobre a divisão.

5. CONCLUSÕES

Neste capítulo será inicialmente realizada uma breve síntese da investigação seguida de uma apresentação das conclusões que surgiram do trabalho realizado, relativamente aos objetivos e às questões inicialmente colocados. As conclusões resultam dum cruzamento entre as referências teóricas e os dados recolhidos do trabalho desenvolvido com e pelos alunos. Serão depois apresentadas as limitações do estudo e as recomendações para a investigação e para o ensino. No final será realizada uma reflexão sobre o duplo papel de professora/investigadora.

5.1. Síntese do estudo

Esta investigação teve como objetivos perceber o que os alunos já aprendem sobre a divisão e como se pode desenvolver o ensino/aprendizagem da divisão com compreensão e incentivar a utilização de estratégias mais sofisticadas de resolução de problemas de divisão.

Por forma a clarificar os seus objetivos, foram colocadas as seguintes questões:

1. Quais as estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de problemas de divisão?
2. Que compreensão que evidenciam de ideias fundamentais relacionadas com a operação da divisão? Que dificuldades revelam?
3. Que papel pode ter o desenvolvimento do cálculo mental?
4. Será que as interações entre professor e alunos e entre alunos contribuem para a compreensão dos aspetos fundamentais sobre a divisão e para o desenvolvimento de estratégias de resolução de problemas mais sofisticadas?

A presente investigação enquadra-se no paradigma interpretativo, desenvolvida através de uma metodologia do tipo qualitativo, no formato de estudo de caso. Não pretende generalizar resultados, mas sim, como afirma Coutinho (2011), investigar ideias, descobrir significados nas ações individuais e nas interações sociais a partir da perspetiva dos atores intervenientes no processo.

Foi realizada numa turma do 4º ano, na qual desempenhei a função de professora titular. Foi inicialmente realizado um teste diagnóstico que serviu de base, em conjunto com observações na sala de aula para selecionar 4 alunos que organizados em dois pares constituíram os estudos de caso.

Para a recolha de dados, foi organizada por mim uma sequência de 7 tarefas sobre divisão, baseadas em tarefas já existentes, que foram depois desenvolvidas como experiência de ensino na sala de aula.

Durante a realização da experiência de ensino, os dados foram recolhidos através da observação participante no duplo papel de professora titular e investigadora, notas de campo, registos áudio das interações dos pares dos estudos de caso, registos vídeo de toda a turma e produções escritas dos alunos

A análise foi estruturada de forma tendencialmente indutiva partindo, numa primeira fase, de categorias elaboradas a partir dos tópicos presentes nas questões da investigação e no enquadramento teórico e numa segunda fase dos dados recolhidos dos casos estudados.

5.2. Conclusões

Estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de problemas de divisão

Relativamente às primeiras estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de problemas de divisão desenvolvidas ainda nos problemas do teste diagnóstico, alguns dos dados recolhidos vão de encontro ao que afirmam Fosnot e Dolk (2001) ao indicarem que estas são aditivas, partindo do grupo para o todo e envolvem contar várias vezes ou tentativa e erro. Este foi o caso das estratégias desenvolvidas pela Ângela e pelo Salvador que inicialmente partiram da adição sucessiva do grupo (divisor) para chegar ao todo (dividendo) através da tentativa e erro. No entanto, os conhecimentos sobre cálculo já desenvolvidos pelos alunos, nomeadamente ao nível da multiplicação permitiram que estes refinassem a sua estratégia, utilizando a multiplicação, confirmando também a afirmação ainda de Fosnot e Dolk (2001) de que a construção do raciocínio multiplicativo fornece aos alunos uma ferramenta poderosa que podem utilizar no desenvolvimento de estratégias de divisão.

No caso da Andreia (no problema1) e do Ricardo (no problema 1 e 2) estes alunos partiram já da utilização de um tipo de estratégia mais sofisticada, em que a multiplicação é utilizada logo à partida embora ainda em conjugação com a adição, com a estimativa e com a tentativa erro em procedimentos de construção que seguem a mesma lógica de chegar ao todo (dividendo) a partir da utilização repetida do grupo (divisor).

Na experiência de ensino realizada, após terem trabalhado na sala de aula situações de divisão com divisores com 2 algarismos utilizando algoritmos alternativos, verifiquei que esta foi a estratégia mais utilizada pelos dois pares para a resolução dos problemas das diferentes tarefas. No caso Ângela e Salvador utilizada na resolução de 6 dos 9 problemas trabalhados e no caso Andreia e Ricardo utilizada na resolução de 7. Este facto e a valorização que os alunos lhe conferem parece confirmar a afirmação de Brocardo, Serrazina e Kraemer (2003) de que a introdução precoce dos algoritmos tem como consequência o não desenvolvimento de outras estratégias de cálculo.

Compreensão e/ou dificuldades evidenciadas pelos alunos de ideias fundamentais relacionadas com a operação da divisão.

Relativamente às ideias fundamentais sobre a divisão abordadas nas tarefas realizadas pelos alunos posso concluir que a situação dos alunos dos dois casos apresentou diferenças quanto à compreensão que evidenciam destas ideias. Verifiquei que a única ideia sobre a qual ambos os casos demonstraram algum domínio foi na identificação da operação da divisão com os sentidos de partilha e de medida. No entanto, nas tarefas 4 e 5 em que foram realizados dois problemas, um com o sentido de medida e outro com o sentido de partilha baseados na mesma relação parte/todo, em ambos os casos analisados os alunos demonstraram dificuldade em fazer esta identificação. Os alunos não conseguiram verificar a ligação existente entre os dois problemas e desenvolveram estratégias de cálculo diferentes no primeiro e segundo problemas. Para o primeiro utilizaram sempre a divisão, para o segundo desenvolveram sempre estratégias de resolução utilizando a multiplicação. No caso de Andreia e Salvador ainda houve uma tentativa da utilização da divisão na resolução da segunda situação da tarefa 4, mas que resultou num cálculo sem qualquer relação com o utilizado na resolução do primeiro problema e que não traduzia a situação de divisão apresentada. Este facto confirma a ideia de Fosnot e Dolk (2001) sobre a dificuldade que os alunos têm na compreensão da relação entre situações de partilha e de medida.

Em relação à utilização pelos alunos do modelo retangular, os dados recolhidos na tarefa 4 vêm confirmar a ideia de Fosnot e Dolk (2001) e de Mendes (2013) de que só porque nós planificamos um contexto com um determinado modelo em mente, não significa que todos os alunos interpretem ou assimilem o contexto desta forma. No caso de Ângela e Salvador, os alunos não conseguiram perceber a ligação entre as situações dos problemas desta tarefa e o modelo retangular dado. Andreia e Ricardo conseguiram estabelecer uma relação entre as situações dos problemas e os modelos dados que os ajudou a desenvolver uma estratégia de resolução para o segundo problema da tarefa 4. Sem esta ajuda, teriam resolvido o problema de forma incorreta, o que confirma a afirmação de Jacob e Mulligan (2014) ao considerarem que o modelo retangular pode ser utilizado para auxiliar os alunos a estruturar a compreensão da divisão, nomeadamente na compreensão da ligação desta operação a uma variedade de situações e representações.

Embora a utilização dos modelos retangulares e a posterior reflexão coletiva realizada em torno desta tarefa tenha possibilitado, tal como afirmaram Rocha, Rodrigues e Menino (2007) em referência a Treffers e Buys (2001), atenuar as diferenças entre problemas de medida e partilha, na tarefa 5 (do mesmo tipo) os alunos voltaram a não estabelecer qualquer relação entre os dois problemas, embora no caso de Andreia e Ricardo tenha sido estabelecida uma relação entre o segundo problema da tarefa 4 e o segundo problema da tarefa 5, e utilizado a mesma estratégia de resolução.

Sobre a relação inversa entre a multiplicação e a divisão, verifiquei algumas diferenças entre os dois casos. Ângela e Salvador revelaram algum conhecimento sobre este assunto ao utilizarem a multiplicação como operação inversa como estratégia de resolução para 3 tarefas. No entanto, não verifiquei evidencias de que o fizessem de forma explicita, tendo consciência de que estavam a resolver uma situação de divisão utilizando a multiplicação e de que compreendam que tal era possível por serem operações inversas.

Andreia e Ricardo utilizaram a multiplicação unicamente em estratégias de construção do dividendo, o que não corresponde a uma utilização da multiplicação como operação inversa. Esta situação poderá relacionar-se com a afirmação de Dubé e Robinson (2009), de que outros investigadores descobriram que pode haver subestimação do conhecimento dos alunos (sobre a multiplicação como operação inversa da divisão) visto que alguns entendem o conceito de inversão mesmo antes de conseguirem aplicar esse conhecimento.

Usaram-na também como cálculo intermédio nos algoritmos, mas esta utilização também não demonstra uma utilização explicita da multiplicação como inversa da divisão dado que os alunos se limitaram a seguir um procedimento aprendido.

Em ambos os casos verifiquei dificuldades em aplicar conhecimentos já trabalhados anteriormente sobre este assunto que permitiriam aos alunos desenvolverem estratégias de resolução mais sofisticadas nomeadamente na tarefa 3, situação que vai de encontro ao afirmado por Robinson e LeFevre (2012) de que a compreensão e a utilização da relação inversa entre a multiplicação e a divisão desenvolvem-se relativamente devagar.

Em relação ao resto, os resultados estão de acordo com o que afirmam Rocha, Rodrigues e Menino (2007), de que se trata de uma dificuldade acrescida no estudo da divisão. Apesar dos alunos já terem trabalhado e refletido na sala de aula sobre o resto e a influência que este pode ter na resolução de um problema, Ângela e Salvador mostraram não considerar nem refletir sobre o resto durante a resolução das tarefas 6 e 7. Andreia e Ricardo mostraram considerar e refletir sobre o papel do resto nas situações apresentadas embora na tarefa 6, onde o resto influenciava a resposta, não tenham conseguido chegar a uma resposta final correta.

Papel do desenvolvimento do cálculo mental

Nas diferentes estratégias desenvolvidas pelos alunos verifiquei um aspeto referido por Anghileri, Beishuizen e van Putten, (2002), no seguimento de uma ideia de Neuman (1999) em que este afirma que muitas estratégias informais que podem ser desenvolvidas incluindo contagem, adição sucessiva, blocos (chunks), multiplicação como inversa, dealing (distribuição) , ajustamento por estimativa, metade repetida, muitas das quais vão ser incorporadas nos procedimentos estruturados para o cálculo da divisão. Observando as estratégias desenvolvidas pelos alunos dos dois casos, começando pelas mais informais, desenvolvidas na resolução dos problemas do teste diagnóstico, verifiquei a presença de procedimentos deste tipo, nomeadamente a adição sucessiva, a utilização de múltiplos pequenos ou grandes do divisor (chunks), dobro, múltiplos de 10, ajustamento por estimativa e tentativa e erro. Durante a experiência de ensino, onde os alunos já utilizaram estratégias de cálculo mais formais e mais sofisticadas, verifiquei o aparecimento de outros procedimentos como a multiplicação como inversa e o abandono progressivo dos procedimentos ligados à adição. Mesmo nos procedimentos mais formais, nomeadamente no cálculo por algoritmos, continuei a verificar a utilização de alguns destes procedimentos na realização dos cálculos intermédios, particularmente a multiplicação como inversa, associada a procedimentos de ajustamento por estimativa e tentativa e erro. Um exemplo desta utilização é um cálculo desenvolvido pelos alunos dos dois casos na resolução da tarefa 1. Ambos casos utilizaram um algoritmo alternativo para o cálculo 3072 : 24, trabalhando com os números inteiros. Para a sua realização, utilizaram a multiplicação para o cálculo do quociente. Como não sabem o número que terão que multiplicar por 24 para obter 3072, fazem-no por estimativa e tentativa erro, sendo a primeira tentativa realizada, o cálculo mental de 24 por 100.

A utilização destes procedimentos de cálculo mental explica o papel importante que este desempenhou nas estratégias que os alunos desenvolveram. Em ambos os casos analisados, o cálculo mental esteve presente nas resoluções de quase todos os problemas.

Na maioria das situações, o cálculo mental foi utilizado associado à estimativa e à tentativa e erro, o que vem confirmar uma ideia de McIntosh, Reys e Reys (1997) de que cálculo mental, estimação e sentido de número têm uma relação muito forte e são difíceis de individualizar. Este foi também utilizado para situações de cálculo direto de respostas.

Contribuição das interações entre professor e alunos e entre alunos para a compreensão dos aspetos fundamentais sobre a divisão e para o desenvolvimento de estratégias de resolução de problemas mais sofisticadas.

Tal como afirmaram Yackel e Cobb (1996), verifiquei que surgem oportunidades de aprendizagem adicionais quando as crianças tentam dar sentido às explicações dadas por outros, quando comparam as soluções de outros com as suas e fazem julgamentos sobre semelhanças e diferenças. Estas oportunidades de aprendizagem surgiram tanto nas interações entre ambos os pares, como nas de grande grupo. Nas interações entre pares os alunos são “obrigados” a explicar e justificar as ideias desenvolvidas e os cálculos realizados ao seu par, por forma a que sejam compreendidos e aprovados ou reprovados e reelaborados. Entre pares surgiram também situações de troca de ideias sobre estratégias de cálculo mais sofisticadas desenvolvidas por um dos alunos ou a colaboração de um dos alunos para o desenvolvimento, pelo outro colega, de uma estratégia mais sofisticada. Um exemplo deste tipo de interação verificou-se durante a resolução da tarefa 1, no caso Andreia e Ricardo, quando os alunos utilizavam o algoritmo tradicional da multiplicação para vários cálculos que tiveram de realizar 24x120, 24x130, 24x125, 24x127. Para a realização do cálculo 24X128, Ricardo explica a Ana que não necessitam fazer pelo algoritmo, basta adicionarem 24 ao produto de 24x127.

No entanto, em nenhum dos pares se verificaram interações sobre aspetos fundamentais da divisão. Estas ocorreram nas discussões em grande grupo, após a apresentação das estratégias desenvolvidas pelos pares, surgindo de questões colocadas por colegas e por mim. Podemos verificar como exemplo desta situação a discussão realizada no âmbito da tarefa 5, sobre a ligação entre os dois problemas desta tarefa, um de medida outro de partilha baseados na mesma relação parte/todo que surge da intervenção de um colega que apresenta uma estratégia de resolução diferente das apresentadas pelos alunos dos casos e que é baseada nesta ligação.

Foi também nas discussões em grande grupo que foi feito o reconhecimento das estratégias mais sofisticadas que surgiram tanto nas apresentadas pelos alunos dos casos como noutras apresentadas por outros colegas. Verifica-se, por exemplo que na discussão das estratégias utilizadas por ambos os casos para tarefa 1, foi reconhecido que a estratégia utilizada por Ângela e Salvador era mais fácil de desenvolver porque envolvia cálculos com números de grandeza menor. No caso da tarefa 5, a resolução mais sofisticada foi exposta por um colega da turma.

Estas situações confirmam as afirmações do NCTM (2007) de que quando os alunos dos primeiros anos de escolaridade são encorajados a desenvolver, registar, explicar e criticar as estratégias de resolução de problemas de cálculo dos seus colegas, podem ocorrer vários tipos de aprendizagens importantes.

As interações comigo enquanto professora/investigadora surgiram principalmente quando pedia aos alunos para explicitarem aspetos das suas estratégias que não tinham sido explicados pelos mesmos. Surgiram também da necessidade de conduzir e instigar a discussão entre eles sobre as estratégias ou sobre os aspetos fundamentais da divisão, para pedir a clarificação das ideias apresentadas, para sistematizar e validar as ideias apresentadas por eles e para colocar questões que levassem à reflexão sobre determinada ideia.

Verifica-se que o modo como eu, como professora/investigadora, organizei e desenvolvi as tarefas realizadas, permitiu aos alunos realizar interações que poderão ter contribuído para a compreensão dos aspetos fundamentais sobre a divisão e para o desenvolvimento de estratégias de resolução de problemas mais sofisticadas embora não haja evidencias que permitam estabelecer uma ligação direta entre determinada ação e determinada aprendizagem.

A partir de algumas interações entre alunos e entre mim e os alunos ficaram evidentes algumas das suas dificuldades relativamente à compreensão dos aspetos fundamentais sobre a divisão e ao desenvolvimento de estratégias de resolução de problemas mais sofisticadas. Um exemplo desta situação verifica-se na tarefa 3 quando peço ao Salvador que me explique porque é que ele considera que um dos seus colegas tem razão numa intervenção que fez a explicar que tendo realizado o cálculo 240 : 48 = 5, deveria ter verificado que através dele obtinha duas respostas relativamente aos divisores de 240, o 48 e o 5. O Salvador não conseguiu elaborar uma resposta que fosse para além de confirmar que achava que o colega tinha razão, o que pode evidenciar uma dificuldade que o aluno tem na compreensão e/ou comunicação da ideia apresentada.

As conclusões referentes às interações entre mim e os alunos reafirmam as ideias de Yackel e Cobb (1996), no seguimento das ideias de Lampert (1990) e Voight (1985), de que o papel do professor é facilitar discussões matemáticas, ao mesmo tempo que age como um participante que pode legitimar ou sancionar certos aspetos da atividade matemática dos alunos. Ao mesmo tempo estas discussões contribuem para o próprio desenvolvimento da compreensão do professor sobre a atividade matemática e sobre o desenvolvimento conceptual dos seus alunos.

5.3. Limitações e recomendações

Como afirma Esteves (2006), cada investigador deve assumir o carácter sempre limitado dos progressos que fez, uma vez que a escolha de determinado percurso metodológico o conduziu a uma das respostas possíveis, não à única resposta, absolutamente certa ou verdadeira.

Uma situação que foi uma limitação ao estudo realizado foram os meus conhecimentos prévios das temáticas nele abordadas. Influenciaram decisões que tomei e que, após a sua aplicação, verifiquei que teria sido mais útil ao estudo fazer de outra forma. Um exemplo desta situação relaciona-se com as tarefas 4 e 5, onde um dos objetivos da aplicação destas tarefas era verificar o modo como os alunos conseguiam relacionar modelos retangulares com as situações das tarefas e como estes os podiam auxiliar a verificar a relação existente entre os dois problemas de cada tarefa. Tomei a decisão de só entregar modelos retangulares em papel na tarefa 4 e não na tarefa 5 visto ter pensado que os alunos iriam facilmente relacionar os modelos com as situações na tarefa 4 e que após uma reflexão coletiva sobre o assunto, iriam transpor as descobertas realizadas para a tarefa 5, o que não aconteceu. Considero que teria sido mais útil ao estudo se na tarefa 5 tivessem também sido entregue aos alunos modelos retangulares em papel.

Outra situação que foi uma limitação foi a minha inexperiência no desenvolvimento da metodologia da investigação nomeadamente na utilização das técnicas de recolha de dados áudio e vídeo visto que em algumas situações perderam-se alguns dados devido a situações que não acautelei devidamente como, por exemplo, o terminar da energia das baterias. Ainda ao nível da recolha de dados, considero que houve algumas perguntas relativas a decisões que os alunos tomaram sobre a utilização de determinada estratégia ou cálculo que não foram devidamente esclarecidas.

Também foi uma limitação o facto de ter de desempenhar o duplo papel de professora e investigadora. Durante a realização das tarefas, não tive muita disponibilidade para observar devidamente o que os alunos estavam a fazer e colocar questões visto que estava a trabalhar com outros alunos que devido ao seu nível de conhecimentos não conseguiam participar no estudo.

O facto de ter a função de professora e de o meu objetivo principal na sala de aula ser o de que os alunos desenvolvam os seus conhecimentos, faz com tivesse dirigido e influenciado as suas respostas principalmente nas situações de reflexão em grande grupo, situação que não deveria ocorrer numa investigação.

Outra limitação a este estudo foi o tempo de que dispus para poder organizá-lo e desenvolvê-lo, devido à minha situação como professora substituta. Todo o andamento das fases iniciais do estudo teve que ser acelerado e a frequência e quantidade de tarefas aplicadas também foi influenciado.

Relativamente às recomendações para a investigação penso que seria útil que fossem feitas ao nível do 1º Ciclo várias investigações mais aprofundadas sobre cada uma das grandes ideias da divisão abordadas neste estudo, construindo-se uma sequencia de tarefas específica para cada uma delas. Considero também útil fazer-se investigação sobre o modo como algumas delas podem estar relacionadas, por exemplo, a influencia da utilização dos modelos retangulares no ensino/aprendizagem da utilização da multiplicação como operação inversa.

Considero também que seria interessante realizar um estudo com a duração temporal do 1º Ciclo sobre o ensino/aprendizagem da divisão com compreensão.

Quanto às recomendações para o ensino considero que este estudo deve levar os professores do 1º Ciclo a refletir sobre a forma como desenvolvem o ensino/aprendizagem das operações aritméticas, sobre qual o seu papel e o dos alunos neste processo e sobre o tipo de situações de aprendizagem que devem desenvolver.

5.4. Reflexão sobre o duplo papel professora/investigadora

Sobre o papel da investigação feita pelos próprios profissionais sobre a sua prática, Ponte (2008) defende que esta pode ser importante por diversas razões, contribui para o esclarecimento e resolução dos problemas, proporciona o desenvolvimento profissional e ajuda a melhorar as organizações em que eles se inserem, pode ainda contribuir para o desenvolvimento da cultura profissional nesse campo de prática e até para o conhecimento da sociedade em geral.

Considero que o papel que desempenhei neste estudo como investigadora contribuiu para melhorar o meu papel enquanto professora e vice-versa. Toda a leitura, elaboração, organização, análise e reflexão realizadas no âmbito deste estudo contribuíram para o meu desenvolvimento profissional ao nível dos conhecimentos sobre os temas nele abordados; ao nível da minha capacidade de organização e desenvolvimento de tarefas; ao nível do conhecimento dos alunos (das suas capacidades, dificuldades e da forma como aprendem) e da capacidade de análise do trabalho que desenvolvem.

Por outro lado, penso que os conhecimentos que já havia adquirido ao longo da minha formação profissional e contínua e da minha experiência profissional contribuíram para melhorar as minhas capacidades enquanto investigadora, tendo em conta o conhecimento que já fui adquirindo dos alunos, do trabalho em sala de aula e sobre os temas da Didática e da Matemática abordados neste estudo.

A realização deste estudo constituiu um momento específico e intenso de trabalho e de aprendizagem no meu percurso profissional, difícil de transpor de forma sistemática para a minha futura prática diária, mas considero que a sua realização me forneceu uma hipótese "única" de observar situações fora do alcance do olhar do professor durante a sua prática e que esta observação contribuiu para um aprofundamento do meu "olhar" enquanto professora.

REFERÊNCIAS

Alcobia, H. (2014) *A divisão no 4º ano de escolaridade*. Dissertação de Mestrado. Escola Superior de Educação de Lisboa, Instituto Politécnico de Lisboa.

Anghileri, J., Beishuizen, M. & van Putten, K. (2002). From informal strategies to structured procedures: Mind the gap! *Educational Studies in Mathematics*, 49(2), 149-170

Bardin, L. (2002). *Análise de conteúdo*. Lisboa: Edições 70.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Brocardo, J. & Serrazina L. (2008) O sentido do número no currículo de Matemática. In Brocardo, J., Serrazina, L., & Rocha, I. *O Sentido do número: Reflexões que entrecruzam a teoria e a prática* (pp.97–115). Lisboa: Escolar Editora.

Brocardo, J., Serrazina, L. & Kraemer, JM. (2003). Algoritmos e sentido do número. *Educação e Matemática*, 75, 11-15.

Buys, K. (2001). Mental arithmetic. In M. Van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Children Learn Mathematics: A Learning-Teaching Trajectory with Intermediate Attainment Targets for Calculation with Whole Numbers in Primary School* (pp. 121-146). Netherlands: Freudenthal Institute, Utrecht University.

Clarke, M. (2005). Written algorithms in the primary years: undoing the “good work”? In *Making mathematics vital: proceedings of the twentieth biennial conference of the Australian association of mathematics teachers*. (pp.93-97) Australian Association of Mathematics teachers.

Cobb, P., Wood, T., Yackel, E. & McNeal, B. (1992) Characteristics of classroom mathematics traditions: an interactinonal analysis. *American Educational Research Journal*. 29, 573-604.

Cobb, P., Yackel, E. & Wood, T. (1992). Interaction and learning in mathematics classroom situations. *Educational Studies in Mathematics*, 23, 99-122.

Coutinho, M. (2011). *Metodologia de investigação em ciências sociais e humanas. Teoria e prática.* Coimbra: Almedina.

Dubé, A. & Robinson, K. (2009). Children`s understanding of the inverse relation between multiplication and division. *Cognitive Development*, 24, 310-321.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. Withrock (Ed.), *Handbook of research on teaching*. Third edition. Newyork: Macmillan.

Esteves, M. (2006). Análise de conteúdo. In J. Ávila de Lima, J. Pacheco (Orgs) (2006), *Fazer investigação: contributos para a elaboração de dissertações e teses.* (pp.106-126). Porto: Porto Editora.

Ferreira, E. (2005). Um percurso na aprendizagem do conceito de divisão no 1º Ciclo. In GTI – Grupo de trabalho e investigação (Org.), *O professor e o desenvolvimento curricular.* (pp 113-138). Lisboa: APM.

Fosnot, C. & Dolk, M. (2001). *Young mathematicians at work: constructing multiplication and division*. Portsmouth: Heinemann.

Fuson, K. C. (2003). Toward computational fluency in multidigit multiplication and division. *Teaching Children Mathematics*, 9(6), 300-305.

Hartnett, J. (2007). Categorisation of mental computation strategies to support teaching and to encourage classroom dialogue. In J. Watson, & K. Beswick (Ed.), *Mathematics: Essential Research, Essential Practice. Proceedings of the thirtieth annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia.* (MERGA-30). I, pp. 345-352. Hobart: MERGA.

Jacob, L. & Mulligan, J. (2014). Using arrays to build multiplicative thinking in the early years. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 19(1), 35-40.

Jesus, A. (2005). Construir o conceito da divisão, resolvendo problemas: um estudo de caso. In GTI – Grupo de trabalho e investigação (Org.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp 91-112). Lisboa: APM.

Kamii, C., Dominick, A. (1997). To teach or not to teach algorithms. *Journal of mathematical behaviour.* 16(1). 56-61.

Keiser, J. (2012). Computational fluency at what price*? Mathematics Teaching in the Middle School*,18 (2), 69-71

Lessard-Hébert, M., Goyette, G., Bouting, G. (1990). *Investigação qualitativa: fundamentos e práticas*. Lisboa: Instituto Piaget.

McIntosh, A., Reys, B. & Reys, R. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics*, 12 (3), 2-8.

McIntosh, A., Reys, R. & Reys, B. (1997). Mental computation in the middle grades: The importance of thinking strategies. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 2 (5), 322-327

Mendes, F. (2013). A aprendizagem da divisão: um olhar sobre os procedimentos usados pelos alunos. *Da investigação às práticas*, 3(2), 5-30.

Mendes, F. (2012). *A aprendizagem da multiplicação numa perspetiva de desenvolvimento de sentido de número: um estudo com alunos do 1º ciclo.* Tese de Doutoramento. Universidade de Lisboa: Instituto de Educação, Lisboa.

Monteiro, A., Loureiro, C., Nunes, F. & Gonçalves, H. (2007). *Multiplicação e divisão (tarefas-1).* Programa de Formação Contínua para professores do 1º e 2º Ciclo. Lisboa: Escola Superior de Educação de Lisboa.

Mulligan, J. & Mitchelmore, M. (1997). Young Children´s Intuitive Models of Multplication and Division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28, (3), 309-330.

Ministério da Educação (2007). *Programa de matemática do Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação. Consultado em http://www.dge.mec.pt

Ministério da Educação e Ciência (2013). *Programa e metas curriculares de matemática - Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação e Ciência. Consultado em http://www.dge.mec.pt

Norton, S. (2012). *The use of alternative algorithms in whole number computation*. Queensland: Griffith University.

Nunes, T., Campos, T., Magina, S. & Bryant, P. (2005). As estruturas multiplicativas: avaliando e promovendo o desenvolvimento dos conceitos de multiplicação e divisão em sala de aula. In T. Nunes, T. Campos, S. Magina, P. Bryant (Eds) *Educação Matemática: Números e operações – Volume 1*(pp 83-117). São Paulo: Cortez Editora.

Ponte, J. (2008). Investigar a nossa própria prática: uma estratégia de formação e construção de conhecimento profissional. *PNA*, 2(4), 153-180.

Rocha, I. & Menino, H. (2009) – Desenvolvimento do sentido de número na multiplicação. Um estudo de caso com crianças de 7/8 anos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 12 (1), 103-134.

Rocha, I., Rodrigues, M. & Menino, H. (2007) – A divisão no contexto do sentido do número. In *Desenvolvendo o sentido do número. Perspetivas e exigências curriculares*, volume II. (pp. 19-22). Lisboa: APM.

Robinson, K. & LeFevre, J. (2012). The inverse relation between multiplication and division: concepts, procedures, and a cognitive framework. *Educational studies in mathematics*, 79, 409-428.

Stein, M., Engle, R., Smith, M. & Hughes, E. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical thinking and learning*, 10, 310-340.

Thompson, I. (1996). “User friendly” calculation algorithms. *Mathematics in School.* 25,5, 42-45.

Wood, T. (1999). Creating a context for argument in mathematics class. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30 (2), 171-191.

Yackel, E. & Cobb, P. (1996). Normas socio matemáticas, argumentação e autonomia em matemática (tradução). *Journal for Research in Mathematics Education*, 27 (4), 458-477.

Yin, R. (1989). *Case study research: design and methods*. Newbury Park: Sage publication.

ANEXOS

Anexo A. Pedido de autorização aos Encarregados de Educação

Caro(a) Encarregado(a) de Educação

No âmbito do curso de mestrado em Educação Matemática no pré-escolar e 1º/2º Ciclos do Ensino Básico que frequento na Escola Superior de Educação de Lisboa, necessito desenvolver durante o ano letivo de 2015/2016 uma investigação para a dissertação de mestrado, a realizar sob a orientação da Professora Doutora Maria de Lurdes Serrazina.

A investigação que pretendo realizar tem como objetivo entender como se processa nos alunos do 4º ano o desenvolvimento da aprendizagem da operação matemática divisão.

Neste sentido, necessitarei desenvolver na sala de aula algumas tarefas previamente planeadas sobre o tema da divisão e fazer registos áudio e vídeo durante a realização das mesmas. Estes registos são absolutamente imprescindíveis para a recolha dos dados necessários para a investigação que me proponho fazer. As imagens daí resultantes assim como os registos áudio e escritos dos alunos não serão divulgadas nem utilizados para quaisquer outros fins e a confidencialidade da escola e alunos participantes será mantida, em cumprimento dos deveres éticos que este tipo de investigação exige.

Venho por este meio solicitar a sua colaboração permitindo que o seu/sua educando (a) participe na investigação.

Agradeço a sua atenção.
Os melhores cumprimentos.
A professora

Autorizo/ Não autorizo a participação do meu/ minha educando (a) ____

O Encarregado(a) de Educação____________________________________

Anexo B. Pedido de autorização ao agrupamento

Exmo. Diretor do Agrupamento
de Escolas [redacted]

No âmbito do curso de mestrado em Educação Matemática no pré-escolar e 1º/2º Ciclos do Ensino Básico que frequento na Escola Superior de Educação de Lisboa, necessito desenvolver durante o ano letivo de 2015/2016 uma investigação para a dissertação de mestrado, a realizar sob a orientação da Professora Doutora Maria de Lurdes Serrazina.

A investigação que levarei a cabo tem como objetivo entender como se processa nos alunos do 4º ano o desenvolvimento da aprendizagem da operação matemática divisão com compreensão.

É meu propósito realizar este estudo durante o presente ano letivo na [redacted], onde atualmente me encontro como professora titular da turma do 4º ano.

Neste sentido, venho por este meio solicitar a Vª Ex.ª autorização para que eu, Rita Maria Neves da Cruz, possa proceder à implementação na sala de aula das tarefas planeadas sobre o tema da divisão e fazer registos áudio e vídeo durante a realização das mesmas. Estes registos são absolutamente imprescindíveis para a recolha dos dados necessários para a investigação que me proponho fazer. Mais declaro, no cumprimento dos deveres éticos deste tipo de investigação, que as imagens daí resultantes não serão divulgadas nem utilizadas para quaisquer outros fins e que a confidencialidade da escola e alunos participantes será mantida.

Também e após a vossa resposta, enviarei informação a todos os Encarregados de Educação da turma, solicitando autorização para os registos áudio e vídeo das aulas referidas.

Desde já agradecida pela atenção, aguardo a resposta ao meu pedido.

Os melhores cumprimentos.

A Professora

Anexo C. Enunciado do teste diagnóstico

Nome:____

Data:____

1.O primo do Luís disse-lhe que já viveu cerca de 8395 dias. Que idade, em anos, terá ele?

2.O circo Chen enviou 732 bilhetes para oferecer aos 183 alunos de uma escola. Quantos bilhetes receberá cada aluno?

3.Num campeonato de futebol, o melhor marcador atingiu os 32 golos marcados enquanto que o segundo melhor atingiu 16. O que podes dizer sobre os golos marcados pelos 2 jogadores?

Anexo D. Exemplo de uma tabela da primeira fase de análise

Tarefa 4

	Ricardo / Andreia	Ângela / Salvador
Estratégias utilizadas	4.1. Algoritmo da divisão pelas dezenas 4.2. Aproximação ao quociente - multiplicação	4.1. Algoritmo da divisão pelas dezenas 4.2. Tentativa/ erro - Multiplicação Confirmação do resultado através da operação inversa
Compreensão evidenciada da ideia fundamental da divisão **Relação entre contextos de medida e partilha**	Não relacionam ambos os contextos.	Não relacionam ambos os contextos
Uso da disposição retangular como modelo	Conseguem utilizar o modelo retangular para modelar a situação do problema e desta forma compreender os erros realizam na estratégia de resolução embora depois não consigam relacioná-lo com a divisão, mas sim com a multiplicação.	Não conseguem relacionar o modelo com a situação de forma correta.
Dificuldades	Inicialmente não conseguiram desenvolver uma estratégia válida para a resolução. Realizam uma divisão onde obtêm um quociente menor que 1 que não é possível para a situação apresentada. Revelam falta de sentido crítico do resultado.	

	Ricardo / Andreia	Ângela / Salvador
Papel do cálculo mental	É utilizado para desenvolver uma estratégia de resolução do problema através da multiplicação utilizando a decomposição de um dos fatores. R- Não, fazemos 12 vezes 10. A- Dá 120. R- Ah, iá. Agora… A- Vá continua, continuando… isto é andares. R-Vezes 4. 12 vezes 4 que é 48. Agora 12 vezes 2. A- 24, dá 24. R- Agora juntamos 10 + 4+ 2 é igual a 16.	É utilizado para a resposta direta a situações de multiplicação mais “simples”, com o número 10 no desenvolvimento da estratégia de aproximação ao quociente por multiplicação.

<table>
<tr><th colspan="2"></th><th>Ricardo / Andreia</th><th>Ângela / Salvador</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Contributo das interações</td><td>Compreensão da ideia fundamental da divisão

Relação entre contextos de medida e partilha</td><td>Explicação da ligação entre as duas situações na discussão em grande grupo</td><td>Explicação da ligação entre as duas situações na discussão em grande grupo</td></tr>
<tr><td>Uso da disposição retangular como modelo</td><td>Partilha da compreensão sobre a utilização do modelo retangular para a modelação da situação entre o pequeno grupo

R- Isto é o prédio, isto é o prédio! Eu já sabia, vê-se logo.
(os alunos aparentam fazer contagens nas grelhas)
A-Eu estou a fazer o cálculo…16…Dá 192, isto tem 192!
R- 192 quê?
A-Quadradinhos.
(Fazem novas contagens)
R- Então nós temos de fazer… pôr assim. Cola aqui por baixo do 4.1.
A- Para depois pormos aqui a outra tabela. Colamos depois, vá, fazemos primeiro o exercício. Então dá quanto?
R- Agora temos de colar. Professora, é para colar?
A- São 192 janelas, por isso é tudo janelas aqui. Há quantos andares? 12.</td><td>Partilha da compreensão sobre a utilização do modelo retangular para a modelação da situação no grande grupo.</td></tr>
<tr><td>Desenvolvimento de estratégias mais sofisticadas</td><td colspan="2">Explicação da ligação entre as duas situações na discussão em grande grupo

P- Eu pergunto assim, não há alguém que tenha outro comentário a fazer e agora, …, G o que é que tu querias comentar?
G2- A A foi fazer a conta de vezes sabendo que na outra, como eu fiz, porque é que ela foi fazer de vezes se já sabia se o anterior era 12 andares e quantas janelas eram… eram 12 andares e em cada um eram 16. Porque é que ela,…, se são 16 janelas em cada 12 andares, se fizermos ao contrário… é igual.
P- Tenta lá resumir isso que tu disseste por outras palavras mais rápidas. E fala um bocadinho mais alto, se faz favor.
G2- Na conta do Santiago já sabemos que são 12 andares e em cada 16 e se na da A, nós formos ver, é o contrário, são 16 andares com 12 janelas. Se nós já sabíamos que os 12 andares davam 16 janelas então, se em cada andar haviam 12 janelas então eram 16 andares, nós já sabíamos, não bastava fazer a conta, era praticamente…</td></tr>
</table>