FLEXIBILIDADE DE CÁLCULO NUMA TURMA DE 2.º ANO

Sara Pereira*
Margarida Rodrigues**

Externato Santa Maria de Belém, Escola Superior de Educação de Lisboa*
Instituto Politécnico de Lisboa, UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa **

*sara.filipa51@gmail.com, **margaridar@eselx.ipl.pt

Resumo

Esta investigação proveio da intervenção pedagógica efetuada numa turma de 2.º ano durante oito semanas e o objetivo deste estudo foi compreender como alunos de 2.º ano mobilizam estratégias diferentes na resolução de tarefas que visam o desenvolvimento da flexibilidade de cálculo aditivo.

Para tal, foram implementadas quatro tarefas de natureza aditiva com todos os alunos da sala, durante o Tempo de Estudo Autónomo, e foram utilizados os dados de oito alunos escolhidos aleatoriamente, divididos em dois grupos. Para a realização do estudo, como técnicas de recolha de dados, foram utilizadas a observação direta e participante e a recolha documental; as fontes de informação para esta recolha foram os registos áudio e as produções dos alunos.

Ao analisar os dados recolhidos, foi possível concluir que os alunos diversificavam as estratégias utilizadas, e que os alunos se apropriavam das estratégias uns dos outros, à medida que estas eram discutidas em pequeno grupo, o que permite inferir que existe uma possível influência do ambiente e das interações sociais na utilização das estratégias. Ao nível da flexibilidade de cálculo, esta ficou evidenciada pelo facto de os mesmos alunos utilizarem estratégias diversificadas e por serem usados resultados numéricos anteriores para estabelecer relações para operações cujos valores fossem semelhantes. Assim, verificou-se que a maioria dos alunos demonstrou flexibilidade de cálculo.

Palavras-chave: cálculo aditivo; flexibilidade de cálculo; cálculo mental; sentido de número.

INTRODUÇÃO

O presente estudo insere-se no Projeto "Flexibilidade de cálculo e raciocínio quantitativo" desenvolvido por docentes das Escolas Superiores de Educação de Lisboa, Setúbal e Portalegre. O projeto teve como objetivos: (i) caracterizar o desenvolvimento do raciocínio quantitativo e da flexibilidade de cálculo dos alunos desde os 6 aos 12 anos; e (ii) descrever e analisar as práticas dos professores que facilitam esse desenvolvimento.

O estudo realizado surge no sentido de potenciar a flexibilidade de cálculo dos alunos com que a primeira autora estagiou numa sala de 2.º ano do 1.ºCEB, uma vez que se revelou como uma fragilidade detetada. Assim, no âmbito do projeto de intervenção implementado, foi promovido o desenvolvimento, ao nível individual, de atividades que potenciassem o desenvolvimento dessa competência bem como momentos de partilha de estratégias e lógicas de pensamento que auxiliassem os alunos a reparar nos números e a estabelecer relações numéricas. A pertinência do estudo justifica-se pelo seu contributo para a compreensão do modo como os alunos efetuam um cálculo flexível, competência esta essencial para a proficiência matemática dos alunos (NCTM, 2007). Assim, este estudo tem como objetivo compreender como alunos de 2.º ano mobilizam estratégias na resolução de tarefas que visam o desenvolvimento da flexibilidade de cálculo aditivo, procurando responder às seguintes questões: (1) Que tipo de estratégias é que os alunos mobilizam na resolução das tarefas?; (2) Como é que os alunos utilizam o cálculo aditivo de forma flexível?

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

De acordo com Buys (2008), o cálculo mental é um cálculo hábil e flexível que tem por base as relações numéricas estabelecidas e as características conhecidas dos números. Noteboom, Bokhove e Nelissen (2008) acrescentam que o cálculo mental é um cálculo pensado, não mecanizado, sobre as representações mentais dos números envolvidos, utilizando relações e factos numéricos.

De modo a calcular mentalmente, é fundamental recorrer a estratégias, isto é, recorrer à exploração de relações entre números, adotando uma abordagem, seja esta de visualização do número, de contagem ou de exploração de relações conhecidas (Threlfall, 2009).

Threlfall (2009) distingue três tipos de estratégias: a) estratégia de transformação de números, b) estratégia de cálculo e c) estratégia de contagem. A primeira diz respeito ao processo que o aluno utiliza para a transformação de números favorável à operação; a segunda refere-se às relações numéricas que o aluno estabelece aquando do processo de resolução da tarefa e a terceira corresponde à transformação de números, considerando os sucessivos passos de contagem, para cima ou para baixo, na sequência de números naturais.

Morais (2013) apresenta uma categorização específica, baseada em literatura holandesa – Beishuizen – para a caracterização das estratégias aditivas, como se apresenta na Tabela 1. Sobre este tema, Beishuizen (citada em Morais, 2011) apresentou os resultados referentes a um estudo com 256 crianças com 11 anos, cujo objetivo era compreender as estratégias utilizadas pelos alunos em operações de caráter aditivo e multiplicativo. Neste estudo, a autora concluiu que as estratégias aditivas mais utilizadas foram as do tipo N10, 1010 e 10S, sendo que as duas últimas tiveram uma taxa de sucesso inferior.

Thompson e Smith (1999) realizaram um estudo em 1999 com o objetivo de compreender que estratégias eram mais facilmente mobilizadas, com 18 escolas de Newcastle, com 144 alunos entre os 8 e os 10 anos. Estes autores chegaram à conclusão que as estratégias do tipo 1010 e 10S tinham sido mais utilizadas na adição e as do tipo N10 e do tipo N10C tinham sido as mais utilizadas na subtração.

Tabela 1. Estratégias de cálculo de natureza aditiva

Estratégias		Adição (exemplo 65 + 27 = 92)	Subtração (exemplo 74-38=36)
N10	N10	Adicionar primeiramente as dezenas e de seguida as unidades 65 + 20 = 85 , 85 + 7 = 92	Subtrair primeiramente as dezenas e de seguida as unidades 74 – 30 = 44, 44-8=36
	N10C	Ao valor, adicionar as unidades que faltam de modo a alcançar mais uma dezena, e *à posteriori*, voltar a subtraí-las 65 + 30 = 95 , 95 – 3 = 92	Ao valor, adicionar as unidades que faltam de modo a alcançar mais uma dezena e, depois, voltar a subtraí-las 74-40= 34, 34+2=36
	A10	Do valor a adicionar, adicionar as unidades necessárias para alcançar um múltiplo de 10 e, de seguida, adicionar o que falta 65 + 5 = 70 , 70 + 22 = 92	Do valor a subtrair, retirar as unidades necessárias para alcançar um múltiplo de 10 e, de seguida, retirar o que falta 74-4=70, 70-34=36
1010	1010	Adicionar as dezenas de ambos os números, adicionar as unidades de ambos os números e, no fim, adicionar ambos os valores 60 + 20 = 80 , 5 + 7 = 12 , 80 + 12 = 92	Subtrair as dezenas de ambos os números, subtrair as unidades de ambos os números e, no fim, adicionar ambos os valores 70-30=40, 4-8=-4, 40-4=36
	10S	Adicionar as dezenas de ambos os números e, de seguida, adicionar as unidades de ambos os números, uma de cada vez de forma sucessiva 60 + 20 = 80 , 80 + 5 = 85 , 85 + 7 = 92	Subtrair as dezenas de ambos os números e, de seguida, adicionar as unidades primeiro número e subtrair as unidades do segundo 70-30=40, 40+4=44, 44-8=36
Fonte: Adaptado de Morais (2013)			

Morais (2011) realizou um estudo com alunos do 1.º ano de escolaridade, em que pretendia compreender de que modo os alunos desenvolviam estratégias de cálculo mental, num contexto de resolução de problemas de adição e subtração. A autora concluiu que, na resolução de problemas de adição, os alunos utilizaram maioritariamente estratégias do tipo 1010 e na resolução de problemas de subtração, os alunos utilizaram preferencialmente estratégias do tipo 1010 e do tipo A10.

Kraemer (2007) hierarquizou diferentes estratégias aditivas de modo a compreender se as estratégias mobilizadas pelos alunos estão a complexificar-se ou a simplificar-se, considerando, assim, diferentes níveis de sofisticação matemática.

Tabela 2. Hierarquização das estratégias aditivas

<table>
<tr><th colspan="5">Hierarquização das estratégias aditivas</th></tr>
<tr><th>Níveis</th><th>Saltar</th><th>Decompor</th><th>Deduzir</th><th>Nível de formalização</th></tr>
<tr><td>I– Figurativo [com conjuntos de objetos]</td><td>Representando com objetos</td><td></td><td></td><td>Figurativo</td></tr>
<tr><td rowspan="5">II- Contextual [utilizando as relações entre números]</td><td>Contando objetos [desde o início]</td><td></td><td></td><td>Ordinal figurativo</td></tr>
<tr><td>Por contagem dupla</td><td></td><td></td><td>Ordinal</td></tr>
<tr><td>Linear-decimal para um múltiplo de 10 [grupos de 10]
45+5=50
50+10=60
60+10=70
70+10=80
80+1=81</td><td>Com grupos de 10 e unidades
40+10=50
50+10=60
60+10=70
5+6=11
70+11=81</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Linear-decimal para grupos de 10 [dezena]
45+10=55
55+10=65
65+10=75
75+6=81</td><td>Combinado com o cálculo em linha
40+30=70
70+5=75
75+6=81</td><td>Reconstruindo a operação
(25-12=13)
10+10=20
2+2=4
12+12=24
36 é +1 do que 35; logo, é 81</td><td>Semi-cardinal</td></tr>
<tr><td>Por estruturação
45+30=75
75+6=81</td><td>Por decomposição e recomposição
40+30=70
5+6=11
70+11=81</td><td>Por decomposição e compensação
(100-48=52 porque 52+48=100)
50+50=100
48 é -2 que 50
Logo, é +2 que 50</td><td>Cardinal</td></tr>
<tr><td>III- Sistemático [utilizando as propriedades e equivalências</td><td>Estanderizado
(100-48=52)
48+2=50,
50+50=100
50+2=52</td><td>Algorítmico</td><td>Numérico
Analogia: 40–24 ≡ 400-240
(se 40-24 é 16. então 400-240 é 160)</td><td>Formal</td></tr>
<tr><td colspan="5">Fonte: Kraemer (2007)</td></tr>
</table>

Segundo Threlfall (2009), flexibilidade no cálculo mental diz respeito ao modo como a resolução do problema é afetada pelas circunstâncias, pelas características específicas da tarefa, pelas características individuais ou variabilidades do contexto. Threlfall (2009) atenta que a flexibilidade no cálculo mental constitui uma forma de pensar com números, o que acaba por ter implicações para a aprendizagem de outros conteúdos e para o desenvolvimento de outras competências matemáticas. Por outro lado, cálculo mental flexível é valorizado não tanto para facilitar a eficiência da criança no cálculo, mas como o início ou evidência de algo mais aprofundado do que a aquisição de conhecimento factual e processual.

Quando um novo problema surge e os números são considerados para decidir o que fazer, estamos na presença de uma abordagem com uma estratégia de transformação numérica associada. De acordo com Threlfall (2009), este tipo de estratégia baseia-se na perceção e conhecimento dos números e das suas relações. Observar essas características não é suficiente para decidir sobre uma sequência de cálculo, mas leva a cálculos parciais exploratórios que podem sugerir o raciocínio a seguir e a construção de uma dada estratégia.

METODOLOGIA

De modo a dar resposta às questões definidas, a investigação enquadra-se no paradigma interpretativo, utilizando uma metodologia de investigação de caráter qualitativo. Erikson (citado por Lessard-Hébert, Goyette & Boutin, 1990) utiliza a expressão investigação interpretativa para se referir a uma abordagem cujo fundamento se prende com o significado atribuído pelo investigador às ações dos participantes no estudo, resultando num produto de um processo de interpretação.

Este estudo foi realizado com alunos do 2.º ano do 1º CEB, numa turma composta por 16 alunos. Foram analisadas quatro tarefas que foram concebidas pela equipa do Projeto (em anexo), tendo sido realizadas em Tempo de Estudo Autónomo por dois grupos de quatro alunos. Entre os alunos deste grupo, seis são do sexo masculino e dois do sexo feminino, com idades compreendidas entre os 6 e os 8 anos de idade. Por motivos éticos, foram utilizados nomes fictícios para garantir a confidencialidade.

As principais técnicas de recolha de dados foram a observação direta participante e a recolha documental – de produções de alunos e de registos áudio.

A observação, segundo Ketele e Roegiers (1993), é um processo que tem como objetivo recolher informação sobre o objeto tido em consideração. Neste processo, é fundamental que o observador, dentro do campo percetivo de que dispõe, selecione um pequeno número de informações pertinentes entre um grande conjunto de informações possíveis, recorrendo a um mecanismo de seleção que advém de experiências anteriores. No caso do presente estudo, o investigador é um ator social que pretende aceder às perspetivas dos alunos em observação, partilhando as mesmas situações em sala de aula. Esta técnica é, portanto, adequada para um investigador que pretenda compreender o meio social em que se encontra integrado. Nesta investigação, corroborando a perspetiva de Evertson e Green (citados por Lessard-Hébert et al., 1990), recorreu-se a uma participação mais ativa na medida em que a estagiária e simultaneamente investigadora se encontrava envolvida nos acontecimentos e recorria ao registo escrito após o acontecimento ter tomado lugar.

Depois de recolhidos os dados, é fundamental proceder à sua análise, sendo que, tal como sugerido por Quivy e Campenhoudt (1992), é nesta fase que se interpretam os factos e se colocam as hipóteses. Para realizar esse processo, utilizaram-se categorias analíticas vindas do quadro teórico de Threlfall (2009), apresentadas na Tabela 3.

Tabela 3. Categorias analíticas no âmbito da flexibilidade de cálculo

Categoria	Descrição
Processo de reparar	Reparar nos números e nas relações que se pode estabelecer entre eles.
Cálculos exploratórios parciais	Os cálculos exploratórios parciais decorrem do conhecimento pessoal dos alunos acerca dos números e das propriedades das operações quando este é usado para derivar.
Relações numéricas	O modo de relacionar os números para resolver o problema e alcançar a solução das situações de cálculo.
Estratégias de cálculo	O modo de relacionar as operações e usar as suas propriedades para resolver o problema e alcançar a solução das situações de cálculo.
Fonte: Santos e Rodrigues (2017, p. 248)	

No que respeita à categoria *Estratégias de cálculo*, foram definidas subcategorias correspondentes às estratégias de cálculo, previamente apresentadas.

RESULTADOS

1ª Tarefa: Mais ou menos?

Os alunos, para as diferentes operações, recorreram a estratégias de contagem de um a um – na reta e com os dedos – e a diferentes estratégias de decomposição do aditivo ou do subtrativo para facilitar os saltos.

Nas transcrições que se seguem é notório que o Simba, o Rafiki e o Pumba recorreram a *estratégias* do tipo A10, algo que aconteceu em todas as situações propostas.

> Sara: Então eu já tenho 23 berlindes, mas perdi 5. Fiquei com quantos?
> Simba: Eu sei! 17!
> Sara: É? Como é que fizeste?
> Simba: Então é assim. Eu tinha 23. Primeiro tirei os 3 e depois tirei mais 2.
> Sara: Então, tiraste 3 e ficaste com quantos?
> Simba: 20.
> Sara: E depois tiraste 2 e ficaste com…
> Simba: 18! É 18!
> […]
> Rafiki: Então, 13 menos 6 é 7 porque 13-3 é 10 e 10-3 é 7.
> Sara: Boa! E agora 7+4?
> Pumba: Essa dá 11, porque 7+3 é 10, acrescenta-se 1 e fica 11.

Tanto Simba como Rafiki realizaram *cálculos exploratórios parciais* (5=3+2 e 6=3+3, respetivamente) para alcançarem múltiplos de 10, efetuando subtrações sucessivas. O Pumba começou por *reparar* que 4 é mais 1 do que 3 e usou o seu conhecimento numérico de uma soma igual a 10 ("7+3 é 10") para construir a *estratégia* A10. De acordo com a hierarquização de estratégias elaborada por Kraemer (2007), podemos verificar que os três alunos evidenciaram estratégias linear-decimais para um múltiplo de 10, do tipo saltar.

Nas duas transcrições que se seguem, é possível perceber que outros alunos recorreram a estratégias de decomposição de um dos valores para facilitar os saltos que deram, mas estas não se enquadram em nenhuma das estratégias categorizadas por Beishuinzen (citada em Morais, 2013).

> Sara: Então, agora temos 19 berlindes. Mas perdemos 5.
> Timon: Dá 14! Porque eu tirei 3 e deu 16. Depois juntei mais 2 e deu 14.

Para a última situação proposta com os quadrados brancos, Timon também realizou o *cálculo exploratório parcial* (5=3+2) para efetuar subtrações sucessivas.

Na parte da tarefa com quadrados pretos, a maioria dos alunos usou uma abordagem similar à usada na primeira parte, fazendo cálculos sucessivos.

> Scar: 15 + 8? Dá 23!
> Sara: Como é que pensaste?
> Scar: Pensei que tinha 15, juntava 4 e dava 19. Restavam-me 4, juntava o 4 e dava 23.
> Rafiki: Tenho outra estratégia, Sara! [*para realizar a operação 13-6+4*]
> Sara: Então qual é?
> Rafiki: Então, se 13 – 6 são 7, como 4+2 são 6, é só tirar 2 aos 13 e fica logo 11.

Scar *reparou* no 8 como dobro de 4, decidindo adicionar 4 de forma sucessiva, e ignorou o quadrado preto. Só Rafiki é que estabeleceu *relações numéricas* entre os ganhos e as perdas de berlindes, conseguindo fazer o balanço global dos dois jogos de berlindes, em que o jogador, no final, fica com menos dois berlindes ("é só tirar 2 aos 13 e fica logo 11"). É notório que o Rafiki compreendeu que não era necessário efetuar todas as operações, embora tenha começado a operar 13-6=7. O aluno exprimiu que bastava encontrar uma relação entre o -6 e o +4, obtendo logo o resultado final da operação.

2ª Tarefa: Cartões

A Nala revelou uma grande facilidade em realizar todas as operações que impliquem, no mínimo, um valor múltiplo de 10 ou metades de múltiplos de 10. O Mufasa realizou todas as operações com recurso à reta numérica exposta, sendo que revela encontrar-se no segundo degrau do nível II da estratégia de saltos, dos níveis de hierarquização das estratégias aditivas de Kraemer (2007), denominado de contagem dupla, ainda que só tenha contado unitariamente os traços da reta referentes a um dos valores, isto é, não realizou uma contagem de ambas as parcelas.

O Simba, consoante a operação do cartão, utilizou estratégias diferentes:

> Sara: 25+11, sabemos logo o resultado?
> Simba: Sim! É 35. 36! É 36!
> Sara: É 36? Porquê?
> Simba: Eu fiz assim: Vi que estava aqui um 1 [*apontando para o algarismo das dezenas do número 11*] e juntei ao 25 e deu 35. Mas depois faltava 1 e deu 36.

Neste exemplo, o aluno evidencia claramente a utilização de uma *estratégia* do tipo N10, tendo *reparado* que 11 é mais 1 do que 10.

> Sara: Agora temos 25+25. Sabemos?
> Simba: Sim! É 50.

> Sara: Porquê?
> Simba: 20+20 é 40; 5+5 é 10. 40,50! [*implicitamente o aluno adiciona as somas parciais*].

Neste exemplo, o aluno demonstra utilizar uma estratégia do tipo 1010, parecendo não dominar o facto de 25 ser metade de 50.

> Sara: Então e 100-48?
> Simba: Dá 52.
> Sara: Como fizeste?
> Simba: Fiz 100-40, deu 60. Depois lembrei-me de que 10-8 é 2, por isso tirei 8 ao 60 e deu 52.

No cartão 100-48, Simba evidencia utilizar uma estratégia do tipo N10, sendo notório o recurso a um facto numérico que o aluno considera pertinente ("10-8 é 2") para a resolução da operação, revelando, assim, flexibilidade de cálculo, na medida em que *repara* nos números com que está a trabalhar para conseguir estabelecer *relações numéricas*, neste caso a relação de entre 50 e 60 existir uma dezena, pelo que, a subtrair 8 a 60, possa subtrair 8 a 10 e adicionar 50.

Nas seguintes transcrições, podemos observar que os alunos utilizam muito frequentemente estratégias do tipo N10 e do tipo 1010.

> Pumba: Eu não fiz assim, Sara!
> Sara: Como fizeste, então?
> Pumba: [*cartão 25+21*] 25+1 é 26. 26+10 é 36 e +10 é 46.
> […]
> Sara: Agora temos 25+26.
> Scar: Eu fiz! Dá 51!
> Sara: Muito bem. Como fizeste?
> Scar: 20+20 é 40 e depois 6+5 é 11. 40+10 é 50 e +1 é 51.
> […]
> Sara: E agora, que temos 100-72?
> Nala: Eu fiz 100-70 na reta, dá 30, e depois -2.

Nestas transcrições é evidente a utilização das estratégias referidas, isto é, no primeiro exemplo, o Pumba usou uma estratégia do tipo N10, no segundo exemplo, o Scar utilizou uma estratégia do tipo 1010 seguida de uma estratégia do tipo N10 e a Nala, no último exemplo, utilizou uma estratégia do tipo N10.

Nas transcrições seguintes, apresentamos intervenções de diferentes alunos que deduzem os valores dos cartões, *relacionando-os* com os cartões anteriores.

> Sara: Então e 25+21?
> Timon: Eu sei!
> Sara: Sabes? Então, é quanto?
> Timon: 46!
> Sara: Boa! Como fizeste?
> Timon: 25+25 era 50. Agora é -4.
> […]
> Nala: Ah! Mas se 25+25 é 50, este é -4! Dá 46!.
> Pumba: [*cartão 100-72*] Eu fiz diferente! Se 100-70 era 30, -2 é 28.

> […]
> Rafiki: [*cartão 100-72*] Essa é fácil! Já fizemos 100-52, era 48. Agora é -20, dá 28.

Nos exemplos apresentados, é evidenciada outra estratégia que os alunos utilizaram recorrentemente, isto é, recorrer a operações previamente realizadas para efetuar a operação em causa. Assim, Timon e Nala *relacionaram* a soma 25+21 com 25+25, ao *reparar* que 21 é menos 4 que 25, usando a *estratégia* da compensação ("25+25 era 50. Agora é -4"). Pumba e Rafiki deduzem 100-72, *relacionando* esta diferença com 100-70 e 100-52, respetivamente. Pumba *reparou* que 70 é menos 2 que 72 e Rafiki *reparou* que 52 é menos 20 que 72. Assim, enquanto Pumba *compensou* com menos dois, Rafiki *compensou* com menos 20, alcançando ambos o valor 28.

3ª Tarefa: Berlindes

Dos 8 alunos que realizaram a tarefa, 7 compreenderam a dinâmica da inversão associada ao jogo de berlindes, ainda que alguns alunos se tenham enganado na realização de alguns cálculos.

> Sara: Então, agora a Maria perdeu 5 berlindes. O que aconteceu ao Tiago?
> Kiara: Ganhou 5.
> Sara: Muito bem! Então e ficou com quantos?
> Kiara: Tinha 11 e ficou com 12, 13, 14, 15, 16. 16!
> Sara: Exatamente. Como fizeste?
> Kiara: Contei os lápis.

Assim, podemos verificar, que, segundo a hierarquização das estratégias aditivas de Kraemer (2007), a aluna Kiara encontrava-se no nível 1 em que, para a realização das operações, necessitou da representação com objetos, os lápis de cor. A transcrição seguinte apresenta a resolução de Pumba:

> Pumba [*partindo de 7*]: Então, agora o Tiago ganhou mais 4 e ficou com 11.
> Sara: Porquê?
> Pumba: Então, porque 7+3 é 10 e +1 é 11. E a Maria perdeu 4.
> Sara: E ficou com…
> Pumba [*partindo de 12*]: 8. Porque 12-2 é 10 e -2 é 8.

O Pumba voltou a demonstrar a utilização de uma estratégia A10, uma vez que em ambas as operações, o aluno adicionou ou subtraiu as unidades suficientes até chegar a um múltiplo de 10, adicionando ou retirando as restantes unidades que lhe restava.

4ª Tarefa: Aranhas

Pela transcrição que se segue, é possível verificar que o Simba realiza uma adição por dígitos no exemplo do número 24, tendo já 12 unidades, realizando, pois, um cálculo algorítmico.

> Simba: 12+12 é 24, não é?
> Sara: Não sei. É?
> Simba: Sim. Porque 1+1 é 2 e 2+2 é 4.

O Mufasa teve alguma dificuldade na resolução da tarefa, ainda que tenha tido facilidade na realização dos cálculos, como podemos verificar no seguinte diálogo:

> Sara: Temos uma menina que tem na mão um cartão com o número 34. Esse número [*34*] separa-se em um número mais outro. Neste caso é 24 mais qualquer coisa. Quanto é que falta somar a 24 para dar 34?
> Mufasa: 10!
> Sara: Boa! Porquê?
> Mufasa: Porque 24 mais uma dezena dá 34.

Verifica-se a utilização da *estratégia* N10 por Mufasa, revelando dominar já as somas de um dado número com uma dezena. Vejamos agora as estratégias de Kiara e Nala, no exemplo do 36, tendo já 13 unidades.

> Kiara: Eu não sei quanto falta aqui.
> Sara: Vamos ver, então.
> Kiara: Eu sei que 13+10 é 23.
> Sara: Boa! Já chegámos a 36?
> Kiara: Não. Mais 10 dá 33. Ah! Mais 3 dá 36. 10+10+3 é… 23! É 23!
> […]
> Nala: 13 + 23 é 36. É 23 que falta!
> Sara: Como é que sabes?
> Nala: Usei a reta [*exposta*]. 13+7 é 20. Depois do 20 para o 30 é fácil: são 10. Depois são mais 6. 7+10 é 17. 17+6 é 23.

No primeiro caso, da Kiara, pode verificar-se a utilização de uma *estratégia* N10, enquanto no caso da Nala, a *estratégia* utilizada é do tipo A10. Assim, de acordo com os níveis de Kraemer (2007), podemos observar que a estratégia da Nala é menos complexa, na medida em que é uma estratégia linear-decimal para um múltiplo de 10 e a estratégia da Kiara é uma estratégia linear-decimal para grupos de 10.

Ao determinarem os valores em falta, os alunos estabeleceram, por um lado, *relações numéricas* entre a parte e o todo, e por outro, a *relação* entre as operações adição e subtração como operações inversas.

Visão global das estratégias usadas ao longo da sequência de tarefas

Tendo em conta as estratégias categorizadas por Beishuinzen (citada em Morais, 2013), apresenta-se de seguida as frequências absolutas das estratégias aditivas utilizadas por cada aluno em cada tarefa.

Tabela 4. Estratégias aditivas utilizadas pelos alunos ao longo da sequência

Aluno	Tipo de estratégias						
	N10			1010		Outras	
	N10	N10C	A10	1010	10S	Contagens	Utilização de outras operações
Simba	8		14	14		7	
Mufasa	1					34	
Kiara	5					42	

Timon	8	18	2			22	1
Rafiki	10		18	20		14	1
Scar	12		7	12		26	
Pumba	24		20			11	1
Nala	14		4			23	1
Total	82	18	65	46	0	179	4

Ao analisarmos a tabela, verifica-se que a maior parte das estratégias usadas pelos alunos foram estratégias de contagem. Ainda assim, seis dos alunos utilizaram estratégias bastante diversificadas, sendo que a razão da diversificação prende-se, provavelmente, com o facto de as estratégias terem sido discutidas em grupo após a realização dos cálculos. Neste sentido, é de notar que as estratégias utilizadas por Rafiki, Pumba, Scar e Nala, que se encontravam no mesmo grupo, são semelhantes, sendo que os alunos utilizavam estratégias dos colegas, caso considerassem que lhes fazia sentido. No outro grupo, o Simba apresentava estratégias de cálculo bastante diversificadas, o que se revelava como uma mais-valia aquando da discussão com os colegas. Assim, o Timon começou a utilizar também as do tipo N10. O Mufasa apenas utilizava estratégias de saltos de 1 em 1 ou de 2 em 2, sendo que não beneficiava muito da discussão. No entanto, importa, ainda, referir que o Mufasa e a Kiara, na última tarefa, utilizaram uma estratégia do tipo N10, ainda que não possa ser considerado uma evolução devido ao facto de poder ter ocorrido por influência do contexto.

CONCLUSÕES

Verificou-se, ao longo da implementação das quatro tarefas, dois indicadores de existência de cálculo flexível: (i) o mesmo aluno utilizar estratégias diversificadas de acordo com a situação que lhe é apresentada, fazendo variar a estratégia consoante os números envolvidos; e (ii) os alunos utilizarem resultados numéricos obtidos anteriormente para estabelecerem relações entre os números, deduzindo novos valores, através da compensação, com base em factos numéricos conhecidos. Nesse sentido, apesar de apenas o Simba, o Rafiki e o Scar terem revelado a utilização diversificada de estratégias, de acordo com a situação dada, consideramos que o Timon, a Nala e o Pumba também revelaram cálculo flexível, na medida em que expressaram a utilização de operações previamente resolvidas para calcular outras operações. Assim, quatro dos oito alunos participantes no estudo (Rafiki, Timon, Nala e Pumba) repararam nos números e estabeleceram relações entre eles, ao usarem a estratégia da compensação para deduzirem novos valores a partir dos anteriores. Dois dos alunos participantes, Kiara e Mufasa, não revelaram flexibilidade nos cálculos efetuados, já que os mesmos se basearam, predominantemente, em processos de contagem.

As estratégias mais utilizadas pelos alunos foram as estratégias de tipo N10 e A10. Assim, podemos verificar que estes resultados vão ao encontro dos apresentados no estudo de Beishuizen (citada em Morais, 2011) e de Thompson e Smith (1999), ainda que os alunos não utilizem estratégias de tipo 10S e apenas o Timon tenha mobilizado estratégias do tipo N10C. Por outro lado, estes resultados são díspares dos resultados do estudo realizado por Morais (2011), na medida em que os alunos do presente estudo utilizaram com menor frequência estratégias do tipo 1010.

A sequência das quatro tarefas foi intencional, uma vez que teve como objetivo dar aos alunos oportunidades significativas em que pudessem relacionar estratégias e factos numéricos, desenvolvendo o seu sentido de número e de modo a lidarem com os números de modo flexível. As tarefas implicavam o raciocínio aditivo, sendo que, corroborando a perspetiva de Serrazina e Rodrigues (2014), estas devem ter em conta as características dos alunos para os quais são desenhadas, não sendo excessivamente difíceis, mas constituindo um desafio para os alunos, de modo a potenciar simultaneamente a motivação e a aprendizagem. Segundo Gravemeijer (citado por Serrazina & Rodrigues, 2014), o contexto da tarefa também é de extrema relevância, no sentido em que serve para motivar os alunos e, mais importante ainda, proporcionar situações de aprendizagem experiencialmente reais. Para resolver as tarefas, os alunos atenderam às características dos números com que operavam e às relações que podiam estabelecer entre eles aquando da mobilização da estratégia, como referem Threlfall (2009) e Verschaffel et al (2009), o que revela uso flexível de estratégias, isto é, cálculo aditivo flexível.

REFERÊNCIAS

Buys, K. (2008). Mental arithmetic. In M. Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Children learn mathematics: A learning-teaching trajectory with intermediate attainment targets for calculation with whole numbers in primary school* (pp. 121-146). Netherlands: Sense Publishers.

Dwyer, C., Gallagher, A., Levin, J., & Morleu, M. (2003). *What is quantitative reasoning? Defining the construct for assessment purposes.* Princeton: Educational Testing Service.

Ketele, J.M., & Roegiers, X. (1993). *Metodologia da recolha de dados: Fundamentos dos métodos de observações, de questionários, de entrevistas e de estudo de documentos.* Lisboa: Instituto Piaget.

Kraemer, J. M. (2007). *Tipos de cálculo aditivo*. Manuscrito não publicado.

Lessard-Hébert, M., Goyette, G., & Bouin, G. (1990). *Investigação qualitativa: Fundamentos e prática*. Lisboa: Instituto Piaget.

Morais, C. (2011). *O cálculo mental na resolução de problemas: Um estudo no 1.º ano de escolaridade* (Dissertação de mestrado, Escola Superior de Educação de Lisboa, Lisboa). Consultada em http://repositorio.ipl.pt/handle/10400.21/1211

Morais, C. (2013). Estratégias de cálculo mental utilizadas por alunos do 1.º ano de escolaridade. In Associação de Professores de Matemática (Ed.), *Actas do XXII Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 193-209). Lisboa: APM.

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar.* Lisboa: APM.

Noteboom, A., Bokhove, J., & Nelissen, J. (2008). Glossary Part I. In M. Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Children learn mathematics: A learning-teaching trajectory with intermediate attainment targets for calculation with whole numbers in primary school* (pp. 89-91). Netherlands: Sense Publishers.

Quivy, R., & Campenhoudt, L. (1992). *Manual de investigação em ciências sociais: Trajectos*. Lisboa: Gradiva.

Santos, S., & Rodrigues, M. (2017). A flexibilidade de cálculo multiplicativo: Um estudo no 3º ano. In L. Menezes, A. Ribeiro, H. Gomes, A. P. Martins, F. Tavares & H. Pinto (Eds.), *Atas do XXVIII Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 242–260). Viseu: APM.

Serrazina, L., & Rodrigues, M. (2014). A tarefa como instrumento de desenvolvimento da flexibilidade de cálculo. In J. Brocardo, A. Boavida, C. Delgado, E. Santos, F. Mendes, J. Duarte, M. Baía & M. Figueiredo (Eds.), *Livro de Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática (EIEM 2014)* (pp. 109–120). Setúbal: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal.

Thompson, I., & Smith, F. (1999). *Mental calculation strategies for addition and subtraction of 2-digit numbers (Report for the Nuffield Foundation).* Newcastle upon Tyne: University of Newcastle upon Tyne.

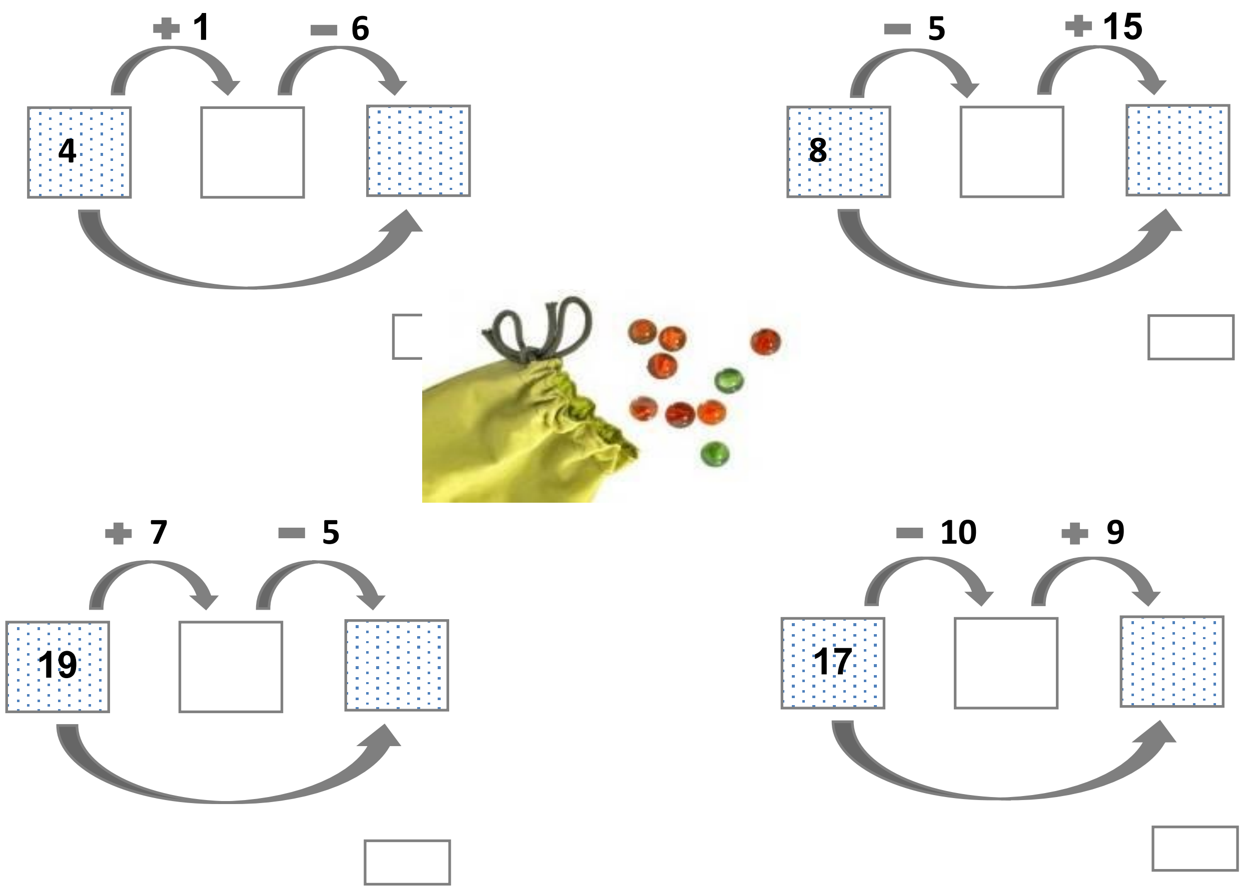
Threlfall, J. (2009). Strategies and flexibility in mental calculation. *ZDM Mathematics Education*, *41*, 541-555.

Verschaffel, L., Luwel, K., Torbeyns, J., & Van Dooren, W. (2009). Conceptualising, investigating and enhancing adaptive expertise in elementary mathematics education. *European Journal of Psychology of Education, 50*(3), 311-334.

Anexo

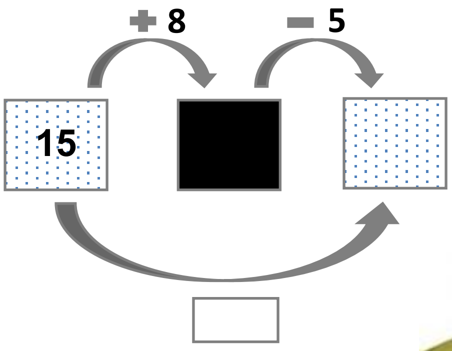
Mais ou Menos?

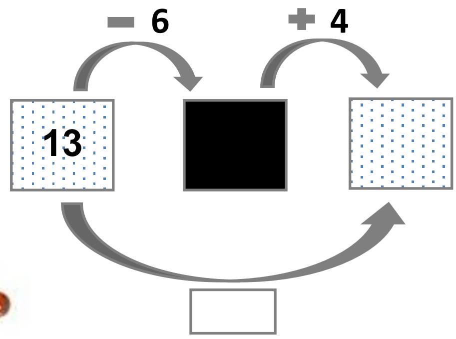
1. Complete os quadrados em branco tendo em conta as operações que deve realizar.

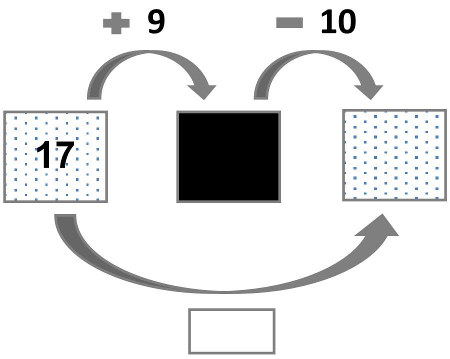


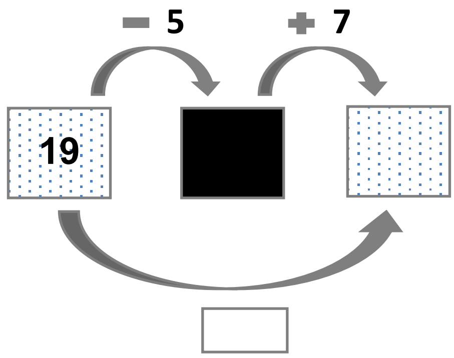
2. Complete os quadrados em **branco** tendo em conta as operações que deve realizar.

Atenção: **Não** escreva nos quadrados pretos.









Cartões

10+25	**50-29**	**52-29**	**100-52**
9+25	**20+25**	**25+25**	**25+26**
11+25	**50-25**	**50-24**	**50-20**
19+25	**25+21**	**52-30**	**50-30**
100-50	**100-48**	**100-50**	**100-51**
100-70	**100-72**	**100-71**	**100-69**

Dos cartões que lhe foram dados, separe os que sabe logo o resultado daqueles que não sabe logo.
Depois, registe-os nesta tabela.

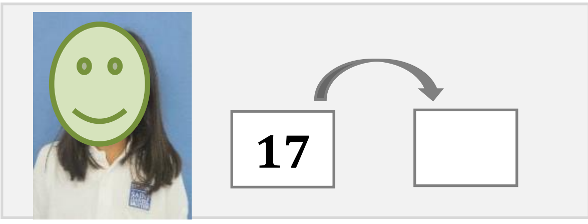
Sei logo o resultado	Não sei logo o resultado

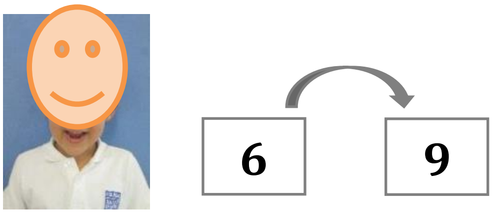
Os Berlindes

A Maria e o António estão a jogar aos berlindes.

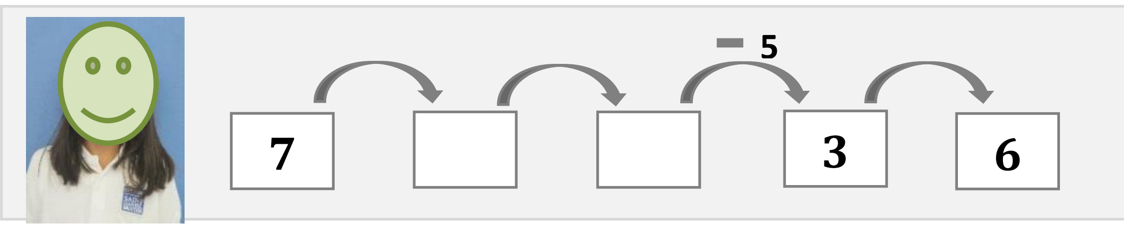
Os berlindes que a Maria ganha são os que o António perde.

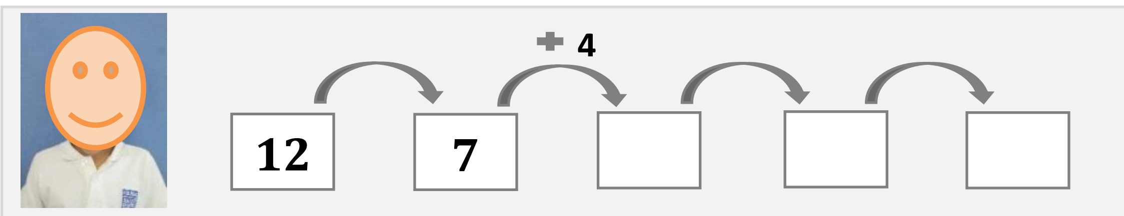
Os berlindes que o António ganha são os que a Maria perde.





Complete a sequência que demonstra o que aconteceu durante o jogo.





Invente agora o que podia acontecer no segundo jogo entre a Maria e o António.