O PAPEL DA PARTICULARIZAÇÃO NO PROCESSO DE DEMONSTRAR

Margarida Rodrigues
Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Lisboa
margaridar@eselx.ipl.pt

Resumo

A presente comunicação enquadra-se no âmbito da investigação que desenvolvi, conducente à dissertação de doutoramento, e que teve como objectivo analisar as formas de persuasão e convencimento desenvolvidas pelos alunos e o papel da demonstração na aprendizagem matemática no contexto da sua relação com a prática social da aula de Matemática. A metodologia adoptada no estudo tem uma natureza interpretativa e os participantes no estudo foram uma turma de 9.º ano e a respectiva professora de Matemática.

Nesta comunicação, vou focar o papel crucial dos exemplos particulares no processo demonstrativo, incidindo a atenção na evolução do seu estatuto e do seu carácter, através da apresentação e da discussão de alguns dos resultados do estudo.

Palavras-chave: esquema demonstrativo, particularização e generalização.

Introdução

A investigação que desenvolvi no âmbito da tese de doutoramento (Rodrigues, 2008) incidiu na problemática da demonstração na prática social da aula de Matemática: sua natureza, funções e relação com essa mesma prática. O seu objectivo primordial consistiu em identificar as formas como os alunos validam os resultados matemáticos, relacionando-as com a prática social desenvolvida na aula. Focando-se nos significados dos participantes — uma turma de 9.º ano, de onde foi seleccionado um grupo de quatro alunos para alvo de registo vídeo e áudio, e a respectiva professora —, o estudo foi conduzido numa perspectiva interpretativa e as suas questões foram: 1) qual a natureza da demonstração no contexto escolar, 2) qual o papel da demonstração na actividade matemática escolar, e 3) como se relaciona a concretização da demonstração com a prática social desenvolvida na aula de Matemática.

A relevância da integração curricular da demonstração em Matemática, desde os níveis mais básicos de escolaridade, tem sido sublinhada por vários autores do campo da educação matemática. Os mais recentes documentos curriculares de vários países têm-lhe reservado um lugar destacado, embora o modo como surge integrada seja diferenciado: nalguns a demonstração surge como tópico independente, a par dos temas mais habituais, como os Números e a Geometria, como é o caso do Reino Unido (Healy e Hoyles, 2000); noutros surge como algo a desenvolver transversalmente em conjunto com os vários tópicos em estudo, como é o caso dos Estados Unidos da América (NCTM, 2000), da França (Guimarães e Brocardo, 2006) e de Portugal. Relativamente ao currículo prescrito português, a demonstração surge com alguma visibilidade no Currículo Nacional do Ensino Básico (DEB, 2001) e no programa de Matemática A para o ensino secundário (DES, 2001; 2002a; 2002b). A sua importância é reconhecida explicitamente no Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007), homologado recentemente, sendo-lhe dado um lugar de relevo. Neste programa, a demonstração surge integrada numa das capacidades transversais eleitas como capacidades a dar uma especial atenção, o raciocínio matemático.

Entre as razões invocadas para a justificação do ensino da demonstração, destacam-se duas: (a) a compreensão pelos alunos da natureza da matemática (de Villiers, 2004; Hanna, 2000; Hanna e Jahnke, 1993; 1999), uma vez que a forma de a matemática encarar a demonstração é essencialmente distinta das outras ciências; e (b) a promoção da compreensão matemática (Hanna, 2000; Hanna e Jahnke, 1999; Hersh, 1993; 1997), facultada pela função primordial da demonstração na matemática escolar, a função explicativa. Não obstante a importância que tem sido reconhecida à demonstração, quer nos textos enquadrados na educação matemática quer nos textos curriculares de vários países, os resultados da investigação que conduzi e de muitos outros estudos empíricos incidentes nesta temática são consonantes na dificuldade manifesta dos alunos em compreender a necessidade da demonstração, por um lado, e em construir demonstrações, por outro lado.

No presente artigo, focar-me-ei unicamente na primeira e na segunda das questões da investigação. Discutirei sobretudo o modo como os alunos evoluem, numa mesma tarefa, no seu processo demonstrativo, equacionando o papel que os exemplos particulares têm em todo o processo, em estreita relação com a função da demonstração na aula de Matemática.

Algumas ideias teóricas

A particularização e a generalização

A particularização e a generalização são processos inversos um do outro, embora em constante interacção no pensamento matemático (Burton, 1984; Mason, Burton e

Stacey, 1984). Enquanto o primeiro estuda uma questão geral através de exemplos particulares, o segundo parte da análise de exemplos particulares para estabelecer propriedades comuns a um universo geral, através da identificação de um padrão, o que implica reparar nos aspectos comuns a vários casos e ignorar outros aspectos dos mesmos casos. No que respeita à particularização, é importante que a escolha dos exemplos seja feita de forma sistemática, e não aleatória, pois a sistematização facilita a generalização, tornando o padrão mais evidente.

Os processos de conjecturação e de demonstração, por sua vez, alimentam-se da particularização e da generalização: a conjecturação processa-se a partir da fase inicial da generalização, que decorre da particularização feita anteriormente, e desenvolve-se através da testagem feita por recurso à particularização; a demonstração depende de mais generalizações, permitindo que a generalização passe do domínio pessoal para o domínio público, através da produção de justificações para as afirmações feitas (Mason et al., 1984).

Tal como referido por de Villiers (2004), são muitos os exemplos da história da matemática que ilustram o processo de conjecturação como sendo baseado na investigação numérica, na intuição, na construção geométrica e na medição. E os matemáticos podem, por vezes, aceitar certas conjecturas, confirmadas indutivamente, como se se tratassem de teoremas, mesmo na ausência de demonstrações rigorosas, especialmente se forem um campo importante de investigação (de Villiers, 2004).

Embora particularização e generalização façam parte integrante do processo de pensar matematicamente, é a generalização que constitui a essência do que é a matemática. Resultados específicos podem ser úteis por si próprios mas só o resultado geral é que é caracteristicamente matemático.

Esquema demonstrativo

Segundo Balacheff (1991), é importante proceder a uma revolução copernicana no sentido de deslocar o nosso foco de análise daquilo que é considerado desejável que os alunos façam para aquilo que efectivamente fazem, bebendo na prática social da aula de Matemática fontes que nos permitam compreender as suas formas de validação dos resultados matemáticos, as suas formas de se convencerem da veracidade de algo e de persuadirem os outros acerca dessa mesma veracidade. Esta é também a perspectiva de

Harel e Sowder (2007) que, numa tentativa de descrever as diversas formas de validação usadas pelos alunos, sistematizaram-nas e classificaram-nas. A classificação adoptada pelos autores tem por base o conceito de *esquema demonstrativo* e assume grandes semelhanças (e também algumas diferenças) com classificações propostas neste âmbito por outros autores, como é o caso de Balacheff (1988).

O esquema demonstrativo de uma pessoa ou de uma comunidade é definido por Harel e Sowder (2007) como aquilo que constitui a obtenção de certeza e a persuasão para essa pessoa, ou comunidade. Com base em estudos empíricos centrados nos esquemas demonstrativos dos alunos, os autores classificaram esses esquemas essencialmente do seguinte modo: esquema demonstrativo (a) de convicção externa, podendo ser autoritário, ritual ou simbólico não-referencial; (b) empírico, podendo ser indutivo ou perceptivo; e (c) dedutivo, podendo ser transformativo ou axiomático. O esquema demonstrativo dedutivo transformativo possui três características: generalidade, pensamento operacional e inferência lógica. O pensamento operacional é usado quando o indivíduo forma objectivos e sub-objectivos e tenta antecipar os seus resultados durante o processo.

Abordagem metodológica

Embora se possa distinguir enquadramento filosófico de paradigma de investigação, ambos se relacionam entre si, já que o modo de ver o mundo se relaciona com o modo de conhecer esse mesmo mundo. Em Rodrigues (2008), optei por uma abordagem metodológica interpretativa, de natureza qualitativa, por ser a mais adequada à problemática em questão. O respectivo enquadramento filosófico subjacente está em consonância com as minhas próprias assunções acerca da existência de múltiplas realidades construídas socialmente, e mediadas pela interpretação, e da noção de verdade enquanto resultante de um acordo condicionado social e historicamente (Smith e Heshusius, 1986). Trata-se de uma investigação que se centra sobretudo nos processos de ocorrência dos acontecimentos, partindo dos significados particulares dos alunos envolvidos no estudo, sendo esta uma característica importante de uma investigação qualitativa (Bogdan e Biklen, 1991/1994).

Só se torna possível abarcar a complexidade do fenómeno em estudo se estudarmos todos os seus componentes de uma forma holística já que todos eles se influenciam reciprocamente. Esta perspectiva de investigação em que os componentes de um fenómeno não podem ser estudados isoladamente é alcançada através de uma abordagem qualitativa (Merriam, 1991). O estudo que desenvolvi visa a explicação das relações dialécticas entre elementos mutuamente constitutivos: natureza da demonstração, o papel da demonstração na aula de Matemática e a prática social. Enquanto a investigação quantitativa realça a medida e a análise das relações causais entre variáveis, a investigação qualititativa enfatiza os processos e significados (Campbell, 1998; Denzin e Lincoln, 1994; Merriam, 1991).

Os dados analisados foram recolhidos numa escola do ensino básico, numa turma de 9º ano, durante o ano lectivo de 2005/06, nas suas aulas de Matemática, sendo este ambiente natural a fonte directa dos dados, dada a necessidade de analisar as situações contextualmente. Foi seleccionado, na turma, um grupo de quatro alunos para constituir o alvo da pesquisa e foi o trabalho desenvolvido pelo mesmo que foi videogravado. Foram utilizadas as seguintes técnicas de recolha de dados: entrevistas semiestruturadas videogravadas (à professora e a cada um dos alunos do grupo-alvo), observação participante e naturalista, e análise de documentos. Os documentos utilizados como fontes de informação incluem: (a) os registos vídeo e (b) os trabalhos de todos os alunos da turma escritos.

Em todo o processo investigativo, existiu sempre uma forte interacção entre o campo teórico e o campo empírico que se foi estreitando à medida do aprofundamento da análise de dados. Assim, alguns dos constructos teóricos constituíram-se em importantes instrumentos analíticos.

Discussão de alguns resultados

Os resultados, que apresento em seguida, reportam-se à exploração, por parte do grupo-alvo, de uma tarefa que visava a determinação do número de eixos de simetria em polígonos regulares, incluindo a seguinte tabela para os alunos preencherem:

N.ºde lados do polígono regular	3	4	5	6	7	8	...	n
N.ºde eixos de simetria								

Tabela 1. Tabela de correspondência entre o número de lados e o número de eixos de simetria

Era acompanhada de uma folha com vários polígonos regulares, desde o de 3 lados ao de 8 lados, dispostos por outra ordem e em posições fora do habitual (anexo 1). Foram também distribuídos espelhos.

Conjecturando

A inclusão da Tabela 1 levou naturalmente os alunos a conjecturar o número de eixos de simetria para o polígono regular de *n* lados. O grupo-alvo foi preenchendo a tabela à medida que ia fazendo o traçado dos eixos. A Sara formulou a conjectura oralmente assim que acabou de preencher a tabela para o número de eixos do triângulo e do quadrado: "Estou a ver que o número de lados e o número de eixos vai ser sempre igual". Trata-se da observação de um padrão, percepcionado apenas com dois exemplos particulares, que foi logo depois generalizado e expresso pela conjectura. Desde esse momento que o grupo depositou uma grande confiança na conjectura. Foi esta confiança que fez com que a Sara e a Maria oferecessem tanta resistência à possibilidade de um exemplo que a refutasse — o pentágono ter 6 eixos de simetria — levando-as a contar por várias vezes os eixos traçados no hexágono, que elas supunham tratar-se do pentágono, por se encontrar numa posição pouco habitual e logo a seguir ao quadrado. E só depois de procederem a várias contagens se dispuseram a escrever 6, na célula da tabela, por baixo do 5. Como entretanto, o Ricardo rectificou tratar-se de um pentágono, a conjectura voltou a assumir uma renovada força, sucessivamente confirmada pelos restantes polígonos. Aliás, ela acabou por ser assumida como uma conclusão cuja veracidade os alunos consideraram como completamente estabelecida, dispensando qualquer acto demonstrativo.

Produzindo uma demonstração narrativa

O enunciado da questão "Em cada um dos polígonos regulares, expliquem como são os eixos de simetria em relação aos vértices e aos lados. (Por onde passam os eixos?)" conduziu os alunos a uma nova generalização e, posteriormente, à justificação da conjectura. Os exemplos particulares foram olhados de novo, mas agora por um outro prisma: para ver por onde passam os eixos e para compreender que é o facto de os polígonos terem um n.º de lados par ou ímpar que faz com que os eixos passem de modo diferente. A professora, em diálogo com os alunos do grupo, fê-los incidir a atenção no traçado dos eixos de simetria do triângulo, do quadrado e do pentágono. E, no final, o Ricardo proferiu: "Stora, então os ímpares é vértice-lado e os pares vértice-vértice, lado-lado.".

Os exemplos de polígonos iniciam, nesta fase, a sua transformação relativamente ao seu carácter particular. O triângulo e o pentágono passam a ser representantes de todos os polígonos com número de lados ímpar e o quadrado representa todos os polígonos com número de lados par. Transformam-se em exemplos generalizáveis, já que os alunos começam a incidir a sua atenção nalgumas das propriedades dos polígonos, compreendendo que as mesmas são gerais de toda a classe representada pelo exemplo. Foi necessário, num momento posterior, voltar a olhar os exemplos generalizáveis do triângulo e do quadrado para encontrar uma razão que demonstra a conjectura formulada previamente. Passo a citar a resposta final escrita do grupo-alvo:

> Nos polígonos regulares, os eixos de simetria em relação aos vértices e aos lados é que:
>
> Ímpares- os eixos de simetria passam de vértice-lado, tendo por isso o mesmo nº de eixos de simetria quanto ao [sic] nº de vértices.
>
> Pares- os eixos de simetria passam de lado-lado e vértice-vértice tendo por isso metade de eixos de simetria do que a soma de vértices com os lados.

Foi pelo processo de demonstrar explicativamente uma conjectura que os alunos efectuaram mais generalizações. Neste caso, trata-se da generalização que estabelece a relação entre o número de eixos que passam de um certo modo e o número de lados (ímpar ou par) dos polígonos regulares. No entanto, a generalização efectuada foi apoiada pela particularização: foi olhando para o caso particular do triângulo e do quadrado que a relação geral emergiu. O Ricardo teve, igualmente, necessidade de observar os vários polígonos e, com maior insistência, o octógono, para generalizar que os polígonos têm sempre o mesmo número de lados e de vértices. Ao proferir "Têm sempre o mesmo número de vértices", fê-lo como que falando para si próprio. Esta generalização estava subjacente à sua demonstração da igualdade entre o número de eixos e o número de lados.

A observação dos casos concretos assumiu uma especial relevância. Trata-se de observações reflexivas, já que não se fundamentam apenas na visão, sendo acompanhadas pelo pensamento matemático, visando os aspectos gerais comuns a toda a classe a que pertencem e não os seus aspectos específicos.

Conclusão

Sendo desejável que os alunos adoptem esquemas demonstrativos dedutivos, o que os resultados do estudo que conduzi apontam, porém, bem como muitos outros estudos (Chazan, 1993; Healy e Hoyles, 2000; Machado, 2005; Recio e Godino, 2001; Rodrigues, 1997), é que os alunos tendem maioritariamente a utilizar esquemas demonstrativos empíricos indutivos, apoiando-se em exemplos particulares para estabelecer a verdade acerca das conjecturas que formulam. Esta situação encontra-se generalizada internacionalmente e em todos os níveis de ensino, desde o mais básico ao universitário (Harel e Sowder, 2007).

Uma das condições requeridas na mudança do uso de esquemas demonstrativos empíricos indutivos para a utilização de esquemas demonstrativos dedutivos transformativos é a da transformação da natureza dos objectos matemáticos que têm de deixar de ser encarados como objectos materiais e empíricos para passarem a ser objectos abstractos, objectos do pensamento. Os exemplos particulares foram usados pelos alunos para conjecturar. As conjecturas formuladas são assumidas, desde logo, como conclusões de cuja veracidade os alunos não duvidam, já que apoiadas por esses mesmos exemplos (esquema demonstrativo empírico indutivo). Quando a professora e a própria tarefa conduzem os alunos a uma outra etapa subsequente à da conjecturação, a de explicação dos fundamentos matemáticos por que é verdadeira a conjectura formulada, o enfoque da actividade matemática dos alunos transforma-se: os alunos passam da mera constatação e descrição do padrão observado para o pensamento sobre relações teóricas e gerais.

Sem a observação dos exemplos nas suas propriedades teóricas, nunca os alunos teriam conseguido lidar com uma natureza abstracta dos objectos matemáticos, fazer novas generalizações e construir uma demonstração com uma função explicativa. A reflexão que acompanhou e guiou a própria observação esteve orientada para a generalização respeitante a um dado universo de que um dado caso particular seria um exemplo ilustrativo. Os exemplos particulares transformaram-se, pois, em exemplos generalizáveis.

É neste momento-charneira, em que os exemplos assumem um estatuto genérico, enquanto representantes de todos os elementos da classe a que pertencem, que se processa a transição para esquemas demonstrativos dedutivos. E nessa transição, os exemplos, na sua intervenção ilustradora e generalizável, desempenham uma função primordial.

Em suma, a passagem dos alunos de uma argumentação empírica para a utilização de esquemas demonstrativos dedutivos transformativos implica que os exemplos evoluam, quer no que respeita ao seu papel quer ao seu estatuto, perdendo gradualmente a sua materialidade e tornando-se progressivamente mais genéricos. Assim, as sucessivas generalizações que os alunos vão elaborando complexificam-se progressivamente devido à mudança gradual da natureza da particularização que inicialmente abarca apenas instanciações e depois evolui para uma representação geral. Ou seja, se o desenvolvimento do pensamento matemático visa a generalização, esta necessita de beber da fonte alimentadora da particularização. São, pois, particularização e generalização, processos inseparáveis, cujo desenvolvimento passa pela sua contínua interacção.

Referências bibliográficas

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. In D. Pimm (Ed.), *Mathematics, Teachers and Children* (pp.316-230). London, United Kingdom: Hodder & Stoughton.

Balacheff, N. (1991). The benefits and limits of social interactions: The case of mathematical proof. In A. Bishop, S. Mellin-Olsen, & J. van Dormolen (Eds.), *Mathematical knowledge: Its growth through teaching* (pp. 175-192). Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora. (Obra original em inglês publicada em 1991)

Burton, L. (1984). Mathematical thinking: The struggle for meaning. *Journal for research in mathematics education, 15*(1), 35-49.

Campbell, S. (1998). *Preservice teachers' understanding of elementary number theory: Qualitative constructivist research situated within a Kantian framework for understanding educational inquiry.* Tese de doutoramento, Simon Fraser University, Faculty of Education, Burnaby.

Chazan, D. (1993). High school geometry students'justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics, 24*(4), 359-387.

De Villiers, M. (2004). The role and function of quasi-empirical methods in mathematics. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 4*(3), 397-418.

DEB (2001). *Currículo nacional do ensino básico: Competências essenciais.* Lisboa: Departamento da Educação Básica. Ministério da Educação.

Denzin, N., & Lincoln, Y. (1994). Introduction: Entering the field of qualitative research. In N. Denzin & Y. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 1-17). Newburry Park, USA: Sage.

DES (2001). *Programa de Matemática A, 10º ano.* Acedido em 14 de Maio, 2010, de http://sitio.dgidc.min-edu.pt/recursos/Lists/Repositrio%20Recursos2/Attachments/257/matematica_A_10.pdf.

DES (2002a). *Programa de Matemática A, 11º ano*. Acedido em 14 de Maio, 2010, de http://sitio.dgidc.min-edu.pt/recursos/Lists/Repositrio%20Recursos2/Attachments/258/matematica_A_11.pdf.

DES (2002b). *Programa de Matemática A, 12º ano*. Acedido em 14 de Maio, 2010, de http://sitio.dgidc.min-edu.pt/recursos/Lists/Repositrio%20Recursos2/Attachments/259/matematica_A_12.pdf.

Guimarães, F., & Brocardo, J. (2006). O caso da França. In Centro de Investigação em Educação da FCUL & APM (Eds.), *Programas de Matemática no 3º ciclo do ensino básico: Um estudo confrontando Espanha, França, Irlanda, Suécia e Portugal* (pp. 47-87). Lisboa, Portugal: Centro de Investigação em Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics*, *44*(1-2): Proof in Dynamic Geometry Environments, 5-23.

Hanna, G., & Jahnke, H. N. (1993). Proof and application. *Educational Studies in Mathematics*, *24*(4), 421-438.

Hanna, G., & Jahnke, H. N. (1999). Using arguments from physics to promote understanding of mathematical proofs. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proc. 23rd Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 73-80). Haifa, Israel: PME.

Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 805-842). Charlotte, USA: Information Age Publishing Inc., & NCTM.

Healy, L., & Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31*(4), 396-428.

Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics*, *24*(4), 389-399.

Hersh, R. (1997). *What is mathematics, really?* New York: Oxford University Press.

Machado, S. (2005). *A demonstração matemática no 8.º ano no contexto de utilização do Geometer's Sketchpad.* Tese de mestrado não publicada, Universidade de Lisboa, Faculdade de Ciências, Lisboa.

Mason, J., Burton, L, & Stacey, K. (1984). *Thinking mathematically.* London: Addison-Wesley Publishing Company.

ME (2007). *Programa de Matemática do ensino básico.* Lisboa: Ministério da Educação, DGIDC.

Merriam, S. (1991). *Case study research in education: A qualitative approach* (2ª ed.). São Francisco: Jossey-Bass Publishers.

NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston: NCTM.

Recio, A., & Godino, J. (2001). Institutional and personal meanings of mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics*, *48*(1), 83-99.

Rodrigues, M. (1997). *A aprendizagem da Matemática enquanto processo de construção de significado mediada pela utilização do computador* (tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Rodrigues, M. (2008). *A demonstração na prática social da aula de Matemática.* Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa, Departamento de Educação da Faculdade de Ciências, Lisboa.

Smith, J. K., & Heshusius, L. (1986). Closing down the conversation: The end of the quantitative-qualitative debate among educational inquirers. *Educational Researcher*, *15*(1), 4-13.

Anexo 1