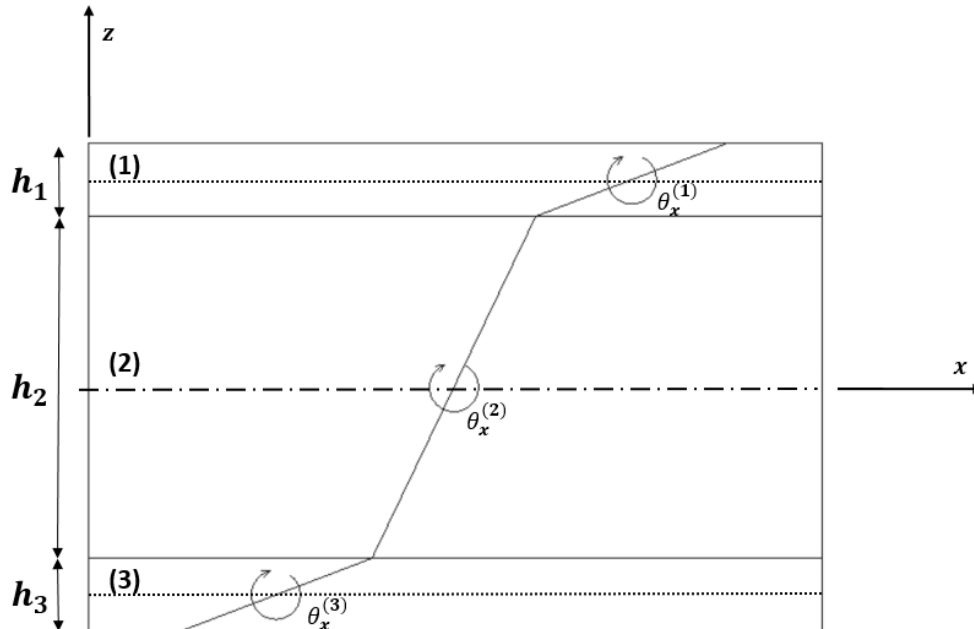




ISEL

INSTITUTO SUPERIOR DE ENGENHARIA DE LISBOA
Departamento de Engenharia Mecânica



Comportamento de estruturas compósitas usando uma abordagem multicamada

MARCO ANDRÉ DOS SANTOS VENÂNCIO
(Licenciado em Engenharia Mecânica)

Trabalho Final de Mestrado para obtenção do grau de Mestre
em Engenharia Mecânica

Orientadora:

Doutora Maria Amélia Ramos Loja

Júri:

Presidente: Doutor João Manuel Ferreira Calado

Vogais:

Doutor José Eugénio Semedo Garção

Doutora Maria Amélia Ramos Loja

Fevereiro de 2017



ISEL

INSTITUTO SUPERIOR DE ENGENHARIA DE LISBOA
Departamento de Engenharia Mecânica

Comportamento de estruturas compósitas usando uma abordagem multicamada

MARCO ANDRÉ DOS SANTOS VENÂNCIO
(Licenciado em Engenharia Mecânica)

Trabalho Final de Mestrado para obtenção do grau de Mestre
em Engenharia Mecânica

Orientadora:

Doutora Maria Amélia Ramos Loja

Júri:

Presidente: Doutor João Manuel Ferreira Calado

Vogais:

Doutor José Eugénio Semedo Garção

Doutora Maria Amélia Ramos Loja

Fevereiro de 2017

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais pela compreensão e apoio durante estes últimos 5 anos. Agradeço ainda à Márcia. Sempre me apoiaram independentemente das minhas escolhas. Obrigado por tudo.

Ao meu orientador de estágio, Sr. António Ribeiro, e ao meu chefe Sr. Vitor Feiteira, pela compreensão em terminar este trabalho.

A todas as pessoas que de certa forma contribuíram para a conclusão desta dissertação o meu sincero agradecimento.

Por último, mas não menos importante, agradeço ao meu orientador científico, a Professora Doutora Maria Amélia Loja do DEM/ISEL, por me ter dado a oportunidade de trabalhar na área dos materiais compósitos e pela orientação prestada ao longo da realização do presente trabalho.

Resumo

A utilização dos materiais compósitos, está cada vez mais difundida pelas várias áreas da engenharia. Esta crescente importância, leva à necessidade do estudo aprofundado destas estruturas. Um dos vários métodos desenvolvidos para o estudo do comportamento destes materiais, baseia-se numa abordagem multicamada. Com o intuito de estudar o comportamento estático e dinâmico, de diferentes estruturas constituídas por estes materiais, foram implementados dois modelos nas aplicações de computação simbólica e numérica, *Maple*[®] e *MatLab*[®]. Os códigos implementados, permitem análises estáticas, análises de vibrações livres, e ainda a aplicação de critérios de falha nomeadamente, o critério de Hashin, Tsai-Hill e Tensão Máxima. A validação das implementações destes modelos, foi realizada recorrendo-se a soluções analíticas e numéricas. Foram realizados a nível estático, e das vibrações livres, diferentes estudos da influência de diferentes parâmetros no comportamento da estrutura. Os códigos implementados, permitem assim obter um campo de tensões e de deformações ao longo da espessura, usando uma abordagem mais precisa comparativamente a metodologias de camada equivalente.

Palavras-chave

Método dos Elementos Finitos; Teoria Layerwise; Estruturas Sandwich; Compósitos Laminados;

Abstract

The use of composite materials, is increasingly widespread in the various areas of engineering. This growing importance, leads to the need for further study of these structures. One of the numerous methods developed to study the behavior of these materials is based on a multilayer approach. In order to study the static and dynamic behavior of different structures comprised of these materials, two models have been implemented in symbolic and numerical computation applications *Maple*[®] and *MatLab*[®]. The implemented code, allows carrying out static analysis, free vibration analysis and also the application of failure criteria, namely Hashin, Tsai-Hill and Maximum Stress criteria. The validation of these models were performed making use of analytical and numerical solutions. Different static and free vibrations studies were performed to analyse the influence of different parameters on the behavior of the structure. The implemented codes allow stress and strain field along the thickness, using a more precise approach when compared to other equivalent single layer methodologies.

Keywords

Finite Element Method; Layerwise Theory; Sandwich structures; Laminated composites;

Índice

Agradecimentos	v
Resumo	vii
Abstract.....	ix
Lista de Figuras	xv
Lista de Tabelas.....	xix
Nomenclatura.....	xxiii
Introdução.....	27
1.1 Importância e enquadramento do tema	27
1.2 Objectivos do trabalho	28
1.3 Descrição da estrutura do trabalho	28
1.4 Materiais compósitos	29
1.4.1 Compósitos laminados.....	31
1.4.2 Compósitos <i>sandwich</i>	32
1.5 Modelação de materiais compósitos	33
Fundamentos Teóricos.....	37
2.1 Estado de Arte	37
2.2 Teoria <i>Layerwise</i>	40
2.2.1 Campos de deslocamentos.....	40
2.2.2 Deformações.....	43
2.2.3 Lei constitutiva da lâmina e respectivas tensões	44
2.2.4 Equações de equilíbrio	46
2.2.5 Formulações de elementos finitos	47
2.2.5.1 Aproximações.....	48
2.2.5.2 Formulação das matrizes	52
2.3 Análise de falha nos laminados	55

2.3.1 Mecanismos de falha	56
2.3.2 Formulação dos critérios de falha a considerar	57
Descrição e apresentação de resultados.....	61
3.1 Testes de convergência.....	62
3.2 Estudos de validação das implementações.....	66
3.2.1 Placa <i>sandwich</i> sujeita a carga transversal uniformemente distribuída.....	67
3.2.2 Placa <i>sandwich</i> sujeita a carregamento sinusoidal	76
3.2.3 Análise dinâmica de vibrações livres	79
3.2.4 Análise dinâmica de vibrações livres para diferentes rácios de rigidez	83
3.2.5 Aplicação de critérios de falha num laminado sujeito a carga transversal uniformemente distribuída.....	85
3.3 Casos de estudo	88
3.3.1 Influência do núcleo na resposta estática e dinâmica numa estrutura <i>sandwich</i> com camadas exteriores compósitas.....	90
3.3.2 Influência das razões geométricas na resposta estática e dinâmica numa placa compósita.....	94
3.3.3 Influência da orientação das fibras na resposta estática e dinâmica numa placa compósita.....	96
3.3.4 Influência do tipo de fibra na resposta estática e dinâmica numa placa compósita	104
3.3.5 Influência do número de GDL e das condições fronteira na resposta estática e dinâmica numa placa compósita.....	117
3.3.6 Aplicação de critérios de falha numa estrutura <i>sandwich</i> com camadas exteriores compósitas	125
Conclusão	129
Desenvolvimentos Futuros	132
Referências Bibliográficas.....	133
Apêndice.....	137

Apêndice A1.1 – Deformação transversal e tensões, com R_f igual a 5, 10 e 15 e incluindo o uso de fator de correção ao corte $K=5/6$	138
Apêndice A1.2 – Deformação transversal, e tensões para um laminado, considerando o uso do fator de correção ao corte, e sujeito a carregamento sinusoidal.....	140
Apêndice A1.3 – Deformação transversal, e tensões para um laminado, em vibração livre, considerando o uso do fator de correção ao corte.	141
Apêndice A2.1.1 – Deformação transversal, tensões e frequências naturais para um compósito vidro-epoxy.....	142
Apêndice A2.1.2 – Deformação transversal, tensões e frequências naturais para diferentes camadas exteriores, e espessura do núcleo, com $K=5/6$	144
Apêndice A2.1.3 – Distribuição da deformação transversal, e frequência fundamental, para diferentes fatores de correção ao corte.	148
Apêndice A2.2 – Deformação transversal, tensões e frequências naturais para diferentes razões geométricas.....	150
Apêndice A2.3 – Deformação transversal, tensões e frequências naturais para diferentes sequências de empilhamento.	154
Apêndice A2.4 – Deformação transversal, tensões e frequências naturais para diferentes tipos de fibras.	160
Apêndice A2.5 – Deformação transversal, tensões e frequências naturais para diferentes condições fronteiras e diferentes formulações.....	162

Lista de Figuras

Fig. 1 – Evolução da importância dos diferentes materiais ao longo do tempo [5].	30
Fig. 2 – Classificação do material compósito quanto ao tipo de matriz. Baseado em [6].	30
Fig. 3 - Classificação do material compósito quanto ao tipo de reforço. Baseado em [6].	31
Fig. 4 – Representação esquemática de uma sequência de empilhamento.....	31
Fig. 5 - Representação esquemática de um painel <i>sandwich</i> . Adaptado de [7].....	32
Fig. 6 – Tipos de núcleos de painéis <i>sandwich</i> . Adaptado de [9].....	33
Fig. 7 – Representação esquemática do MEF.	34
Fig. 8 – Exemplos de diferentes tipos de elementos finitos. Adaptado de [10].	35
Fig. 9 – Bordo deformado e não deformado na teoria FSDT [11].	41
Fig. 10 – Representação esquemática da cinemática de uma abordagem multicamada.	42
Fig. 11 – Representação esquemática dos sistemas de coordenadas do material e do laminado.	46
Fig. 12 – Representação esquemática dos elementos usados.	48
Fig. 13 – Numeração local dos nós num elemento Q4.....	48
Fig. 14 – Numeração local dos nós num elemento Q9.....	49
Fig. 15 – Modos de falha de compósitos unidirecionais sobre tensão plana, baseado em [48].	56
Fig. 16 – Representação esquemática dos procedimentos implementados.	62
Fig. 17 – Representação da malha 12X12 para elemento Lagrange bi-linear Q4.	63
Fig. 18 – Representação da malha 12X12 para elemento Lagrange bi-quadrático Q9. .	63
Fig. 19 – Tempos computacionais em função da malha para análise estática.....	64
Fig. 20 – Tempos computacionais em função da malha para análise de vibrações livres.	65
Fig. 21 – Convergência de resultados do caso de estudo 3.1.1, para $R_f=5$, SSSS, pressão uniforme e $l/h=10$. Deformada transversal normalizada.	65
Fig. 22 - Convergência de resultados do caso de estudo 3.1.3. Frequência fundamental normalizada.	66
Fig. 23 – Erro relativo entre as principais referências bibliográficas e os resultados obtidos, $R_f=5$	71

Fig. 24 – Erro relativo entre as principais referências bibliográficas e os resultados obtidos, $R_f=10$	71
Fig. 25 – Erro relativo entre as principais referências bibliográficas e os resultados obtidos, $R_f=15$	72
Fig. 26 – Convergência da deformada transversal normalizada para $R_f=5$	73
Fig. 27 – Convergência da deformada transversal normalizada para $R_f=10$	74
Fig. 28 – Convergência da deformada transversal normalizada para $R_f=15$	74
Fig. 29 – Erro relativo da deformada transversal normalizada para diferentes R_f	75
Fig. 30 – Convergência de frequência fundamental normalizada.....	80
Fig. 31 – Erro relativo dos primeiros quatro modos de vibração do laminado.....	81
Fig. 32 – Representação dos primeiros oito modos de vibração do laminado.....	82
Fig. 33 – Representação do erro relativo, para diferentes considerações. Diferentes relações E_1/E_2	84
Fig. 34 – Evolução do carregamento que leva à falha de cada camada, ao longo da espessura.....	87
Fig. 35 – Representação esquemática dos pontos onde são normalizados os resultados.....	89
Fig. 36 – Deformada transversal máxima, normalizada das estruturas <i>sandwich</i> em estudo.....	93
Fig. 37 – Frequência fundamental, normalizada das estruturas <i>sandwich</i> em estudo....	93
Fig. 38 – Deformadas transversais normalizadas para $l/h=5$. Diferentes laminados....	100
Fig. 39 - Deformadas transversais normalizadas para $l/h=10$. Diferentes laminados. .	101
Fig. 40 - Deformadas transversais normalizadas para $l/h=20$. Diferentes laminados. .	101
Fig. 41 – Frequências fundamentais normalizadas para $l/h=5$. Diferentes laminados. .	102
Fig. 42 - Frequências fundamentais normalizadas para $l/h=10$. Diferentes laminados. .	102
Fig. 43 - Frequências fundamentais normalizadas para $l/h=20$. Diferentes laminados. .	103
Fig. 44 – Deformada transversal para compósito GE, $l/h=10$	105
Fig. 45 – Deformada transversal para compósito CE, $l/h=10$	105
Fig. 46 – Distribuição de σ_x ao longo da espessura para compósito GE, $l/h=5$	106
Fig. 47 – Distribuição de σ_x ao longo da espessura para compósito CE, $l/h=5$	106
Fig. 48 – Distribuição de σ_y ao longo da espessura para compósito GE, $l/h=5$	107
Fig. 49 – Distribuição de σ_y ao longo da espessura para compósito CE, $l/h=5$	107
Fig. 50 - Distribuição de τ_{xz} ao longo da espessura para compósito GE, $l/h=5$	108

Fig. 51 - Distribuição de τ_{xz} ao longo da espessura para compósito CE, $l/h=5$	108
Fig. 52 – Distribuição de σ_x ao longo da espessura para compósito GE, $l/h=10$	109
Fig. 53 – Distribuição de σ_x ao longo da espessura para compósito CE, $l/h=10$	109
Fig. 54 – Distribuição de σ_y ao longo da espessura para compósito GE, $l/h=10$	110
Fig. 55 – Distribuição de σ_y ao longo da espessura para compósito CE, $l/h=10$	110
Fig. 56 - Distribuição de τ_{xz} ao longo da espessura para compósito GE, $l/h=10$	111
Fig. 57 - Distribuição de τ_{xz} ao longo da espessura para compósito CE, $l/h=10$	111
Fig. 58 – Distribuição de σ_x ao longo da espessura para compósito GE, $l/h=20$	112
Fig. 59 – Distribuição de σ_x ao longo da espessura para compósito CE, $l/h=20$	112
Fig. 60 – Distribuição de σ_y ao longo da espessura para compósito GE, $l/h=20$	113
Fig. 61 – Distribuição de σ_y ao longo da espessura para compósito CE, $l/h=20$	113
Fig. 62 - Distribuição de τ_{xz} ao longo da espessura para compósito GE, $l/h=20$	114
Fig. 63 - Distribuição de τ_{xz} ao longo da espessura para compósito CE, $l/h=20$	114
Fig. 64 – Frequências fundamentais normalizadas para GE e CE.....	115
Fig. 65 - Frequências naturais normalizadas para VE e CE.	116
Fig. 66 – Deformada transversal normalizada para diferentes formulações. SSSS, $l/h=5$, K=1.....	118
Fig. 67 - Deformada transversal normalizada para diferentes formulações. SSSS, $l/h=10$, K=1.....	118
Fig. 68 - Deformada transversal normalizada para diferentes formulações. SSSS, $l/h=20$, K=1.....	118
Fig. 69 – Frequência fundamental normalizada para diferentes formulações. SSSS, $l/h=5$, K=1.....	119
Fig. 70 - Frequência fundamental normalizada para diferentes formulações. SSSS, $l/h=10$, K=1.....	120
Fig. 71 - Frequência fundamental normalizada para diferentes formulações. SSSS, $l/h=20$, K=1.....	120
Fig. 72 - Deformada transversal normalizada para diferentes formulações. CCCC, $l/h=5$, K=1.....	121
Fig. 73 - Deformada transversal normalizada para diferentes formulações. CCCC, $l/h=10$, K=1.....	122
Fig. 74 - Deformada transversal normalizada para diferentes formulações. CCCC, $l/h=20$, K=1.....	122

Fig. 75 - Frequência fundamental normalizada para diferentes formulações. CCCC, $l/h=5$, $K=1$	123
Fig. 76 - Frequência fundamental normalizada para diferentes formulações. CCCC, $l/h=10$, $K=1$	124
Fig. 77 - Frequência fundamental normalizada para diferentes formulações. CCCC, $l/h=20$, $K=1$	124
Fig. 78 - Carregamentos normalizados que levam à falha, para diferentes núcleos e orientações das camadas exteriores.	127
Fig. 79 - Deformada e tensões normalizadas. Camadas exteriores carbono-epoxy.	148
Fig. 80 - Frequências naturais normalizadas. Camadas exteriores carbono-epoxy.....	148
Fig. 81 - Deformada e tensões normalizadas. Camadas exteriores vidro-epoxy.....	149
Fig. 82 - Frequências naturais normalizadas. Camadas exteriores carbono-epoxy.....	149
Fig. 83 - Deformada transversal normalizada vs. h_k . $l/h=5$	151
Fig. 84 - Frequência fundamental normalizada vs h_k . $l/h=5$	151
Fig. 85 - Deformada transversal normalizada vs. h_k . $l/h=10$	152
Fig. 86 - Frequência fundamental normalizada vs h_k . $l/h=10$	152
Fig. 87 - Deformada transversal normalizada vs. h_k . $l/h=20$	153
Fig. 88 - Frequência fundamental normalizada vs h_k . $l/h=20$	153
Fig. 89 - Deformada normalizada para $l/h=5$	155
Fig. 90 - Frequências naturais normalizada para $l/h=5$	155
Fig. 91 - Deformada normalizada para laminados $l/h=10$	156
Fig. 92 - Frequências naturais normalizada para $l/h=10$	157
Fig. 93 - Deformada normalizada para laminados $l/h=20$	159
Fig. 94 - Frequências naturais normalizada para $l/h=20$	159
Fig. 95 -Deformada transversal normalizada para diferentes valores de K e materiais compósitos.....	160
Fig. 96 - Frequência fundamental normalizada para diferentes valores de K e materiais compósitos.....	161

Lista de Tabelas

Tabela 1 – N° de nós e GDL, para as malhas e elementos usados.	64
Tabela 2 - Validação dos resultados obtidos com Q4 e Q9 para $R_f=5$, SSSS, pressão uniforme e $l/h=10$. Todos os valores apresentados foram normalizados.	68
Tabela 3 - Validação dos resultados obtidos com Q4 e Q9 para $R_f=10$, SSSS, pressão uniforme e $l/h=10$. Todos os valores apresentados foram normalizados.	68
Tabela 4 - Validação dos resultados obtidos com Q4 e Q9 para $R_f=15$, SSSS, pressão uniforme e $l/h=10$. Todos os valores apresentados foram normalizados.	69
Tabela 5 – Comparação dos resultados obtidos com diferentes considerações no caso de $R_f=5$	70
Tabela 6 – Comparação dos resultados obtidos com diferentes considerações no caso de $R_f=10$	70
Tabela 7 – Comparação dos resultados obtidos com diferentes considerações no caso de $R_f=15$	70
Tabela 8 - Erro relativo (%) entre diversas soluções e os resultados obtidos	72
Tabela 9 – Validação dos resultados obtidos com elementos Q4 e Q9, SSSS, carregamento sinusoidal e $l/h=10$. Todos os valores apresentados foram normalizados.	77
Tabela 10 - Comparação dos resultados com diferentes considerações, carregamento sinusoidal.	78
Tabela 11 - Erro relativo (%) entre solução exata e os resultados obtidos, carregamento sinusoidal.	78
Tabela 12 - Validação das oito primeiras frequências naturais, obtidas com elementos Q4 e Q9, SSSS, e $l/h=10$. Todos os valores apresentados foram normalizados.	79
Tabela 13 - Comparação dos resultados com diferentes considerações, vibração livre.	80
Tabela 14 - Erro relativo (%) entre diversas soluções e os resultados obtidos. Vibração livre.	81
Tabela 15 – Frequência fundamental normalizada. Diferentes relações de rigidez.	83
Tabela 16 - Erro relativo (%) entre diversas soluções e os resultados obtidos. Diferentes relações E_1/E_2	84
Tabela 17 – Propriedades do material compósito usado nos critérios de falha [63].	85
Tabela 18 – Carregamentos normalizados que levam à falha da primeira camada.	86
Tabela 19 – Propriedades mecânicas dos materiais compósitos em estudo.	88

Tabela 20 – Propriedades mecânicas dos materiais das espumas [1].	88
Tabela 21 – Pontos de avaliação da deformada e das tensões (ilustradas no plano xz).	89
Tabela 22 – Deformada e tensões normalizadas. Camadas exteriores CE, núcleo 10 mm.	90
Tabela 23 – Frequências naturais normalizadas. Camadas exteriores CE, núcleo 10 mm.	91
Tabela 24 – Deformada e tensões normalizadas. Camadas exteriores CE, núcleo 15 mm.	92
Tabela 25 – Frequências naturais normalizadas. Camadas exteriores CE, núcleo 15 mm.	92
Tabela 26 – Deformada transversal e tensões normalizadas vs. rácio l/h.	94
Tabela 27 – Frequências naturais normalizadas vs rácio l/h.	95
Tabela 28 – Deformada e tensões normalizadas para laminados $[\theta^{\circ}/0^{\circ}/\theta^{\circ}]$.	96
Tabela 29 – Frequências naturais normalizadas, para laminados $[\theta^{\circ}/0^{\circ}/\theta^{\circ}]$.	97
Tabela 30 – Deformação transversal e tensões normalizadas para laminados $[-\theta^{\circ}/0^{\circ}/\theta^{\circ}]$.	98
Tabela 31 - Frequências naturais normalizadas, para laminados $[-\theta^{\circ}/0^{\circ}/\theta^{\circ}]$.	98
Tabela 32 – Deformada transversal e tensões normalizadas para laminados $[-\theta^{\circ}/90^{\circ}/\theta^{\circ}]$.	99
Tabela 33 – Frequências naturais normalizadas para laminados $[-\theta^{\circ}/90^{\circ}/\theta^{\circ}]$.	100
Tabela 34 – Deformada transversal e tensões normalizadas. Diferentes fibras.	104
Tabela 35 – Frequências naturais normalizadas. Diferentes fibras.	115
Tabela 36 – Tendência da frequência fundamental normalizada para diferentes rácios l/h.	116
Tabela 37 - Deformada transversal e tensões normalizadas, SSSS. $K=1$.	117
Tabela 38 – Frequências naturais normalizadas, SSSS, $K=1$.	119
Tabela 39 - Deformada transversal e tensões normalizadas, CCCC.	121
Tabela 40 - Frequências naturais normalizadas, CCCC.	123
Tabela 41 – Propriedades das camadas exteriores do material compósito.	125
Tabela 42 – Carregamentos normalizados que levam à falha considerando o critério de Tensão Máxima.	126

Tabela 43 – Resultados obtidos com diferentes tipos de elementos para $R_f=5$, SSSS, pressão uniforme, $l/h=10$ e inclusão de $K=5/6$. Todos os valores apresentados foram normalizados.....	138
Tabela 44 – Resultados obtidos com diferentes tipos de elementos para $R_f=10$, SSSS, pressão uniforme, $l/h=10$ e inclusão de $K=5/6$. Todos os valores apresentados foram normalizados.....	138
Tabela 45 – Resultados obtidos com diferentes tipos de elementos para $R_f=15$, SSSS, pressão uniforme, $l/h=10$ e inclusão de $K=5/6$. Todos os valores apresentados foram normalizados.....	139
Tabela 47 - Resultados obtidos com diferentes tipos de elementos, SSSS, carregamento sinusoidal, $l/h=10$ e inclusão de $K=5/6$. Todos os valores apresentados foram normalizados.....	140
Tabela 48 - Resultados obtidos com diferentes tipos de elementos, SSSS, vibrações livres, $l/h=10$ e inclusão de $K=5/6$. Todos os valores apresentados foram normalizados.....	141
Tabela 48 – Deformada e tensões normalizadas. Camadas exteriores vidro-epoxy, núcleo 10 mm, $K=1$	142
Tabela 49 – Frequências naturais normalizadas. Camadas exteriores vidro-epoxy, núcleo 10 mm, $K=1$	142
Tabela 50 – Deformada e tensões normalizadas. Camadas exteriores vidro-epoxy, núcleo 15 mm, $K=1$	143
Tabela 51 – Frequências naturais normalizadas. Camadas exteriores vidro-epoxy, núcleo 15 mm, $K=1$	143
Tabela 52 – Deformada e tensões normalizadas. Camadas exteriores vidro-epoxy, núcleo 10 mm, $K=5/6$	144
Tabela 53 – Frequências naturais normalizadas. Camadas exteriores vidro-epoxy, núcleo 10 mm, $K=5/6$	144
Tabela 54 – Deformada e tensões normalizadas. Camadas exteriores carbono-epoxy, núcleo 10 mm, $K=5/6$	145
Tabela 55 – Frequências naturais normalizadas. Camadas exteriores carbono-epoxy, núcleo 10 mm, $K=5/6$	145
Tabela 56 – Deformada e tensões normalizadas. Camadas exteriores vidro-epoxy, núcleo 15 mm, $K=5/6$	146

Tabela 57 – Frequências naturais normalizadas. Camadas exteriores vidro-epoxy, núcleo 15 mm, $K=5/6$	146
Tabela 58 – Deformada e tensões normalizadas. Camadas exteriores carbono-epoxy, núcleo 15 mm, $K=5/6$	147
Tabela 59 – Frequências naturais normalizadas. Camadas exteriores carbono-epoxy, núcleo 15 mm, $K=5/6$	147
Tabela 63 – Deformada transversal e tensões normalizadas vs. rácio l/h . $K=5/6$	150
Tabela 64 – Frequências naturais normalizadas vs rácio l/h . $K=5/6$	150
Tabela 65 – Deformada e tensões normalizadas para laminados $[\theta^{\circ}/0^{\circ}/\theta^{\circ}]$. $K=5/6$	154
Tabela 66 – Frequências naturais normalizadas, para laminados $[\theta^{\circ}/0^{\circ}/\theta^{\circ}]$. $K=5/6$	154
Tabela 67 – Deformação transversal e tensões normalizadas para laminados $[-\theta^{\circ}/0^{\circ}/\theta^{\circ}]$. $K=5/6$	156
Tabela 68 – Frequências naturais normalizadas, para laminados $[-\theta^{\circ}/0^{\circ}/\theta^{\circ}]$. $K=5/6$	156
Tabela 69 – Deformada transversal e tensões normalizadas para laminados $[-\theta^{\circ}/90^{\circ}/\theta^{\circ}]$. $K=5/6$	158
Tabela 70 – Frequências naturais normalizadas para laminados $[-\theta^{\circ}/90^{\circ}/\theta^{\circ}]$. $K=5/6$...	158
Tabela 71 – Deformada transversal e tensões normalizadas. Diferentes fibras. $K=5/6$	160
Tabela 72 – Frequências naturais normalizadas. Diferentes fibras. $K=5/6$	160
Tabela 73 - Deformada transversal e tensões normalizadas, SSSS, $K=5/6$	162
Tabela 74 - Frequências naturais normalizadas, SSSS, $K=5/6$	162
Tabela 75 - Deformada transversal e tensões normalizadas, CCCC, $K=5/6$	163
Tabela 76 - Frequências naturais normalizadas, CCCC, $K=5/6$	163

Nomenclatura

São aqui apresentadas as principais nomenclaturas e simbologias utilizadas ao longo deste trabalho:

Acrónimos

CCCC – Encastrado nos quatro bordos;

CDF – *Non-dimensionalized center deflection*;

CE – Compósito constituído por um reforço de fibra de carbono numa matriz epoxy;

CF – Condições fronteira;

CLT – *Classical Laminate Theory*;

ESL – *Equivalent Single Layer*;

FEL – *Failed element*;

FC1 – Fundo da camada 1;

FC2 – Fundo da camada 2;

FC3 – Fundo da camada 3;

FGP – *Failed gauss point*;

FL – *Failed location*;

FLD – *Non-dimensionalized first-ply failure load*;

FPL – *Failed ply*;

FSDT – *First Order Shear Deformation Theory*;

GDL – Grau(s) de liberdade por nó;

GE – Compósito constituído por um reforço de fibra de vidro numa matriz epoxy.

GUF – *Generalized Unified Formulation*;

HSAPT – *High order SANDwich Plate class of Theories*;

HSDT – *Higher Order Shear Deformation Theory*;

LW – *Layerwise*;

MEF – Método dos Elementos Finitos;

PVC – *Polyvinyl chloride*;

Q4 – Elemento finito quadrilátero de 4 nós;

Q9 – Elemento finito quadrilátero de 9 nós;

SSSS – Apoiado nos quatro bordos;

TC1 – Topo da camada 1;

TC2 – Topo da camada 2;

TC3 – Topo da camada 3;

Lista de Símbolos

B_c^k Matriz que relaciona deformações e deslocamentos referentes ao efeito de corte na camada/lâmina k ;

B_f^k Matriz que relaciona deformações e deslocamentos referentes ao efeito de flexão na camada/lâmina k ;

B_{mf}^k Matriz que relaciona deformações e deslocamentos referentes ao efeito de membrana-flexão na camada/lâmina k ;

D Módulo de rigidez à flexão;

E Módulo de elasticidade/Young;

G Módulo de corte;

h Espessura do laminado;

h_k Espessura da camada/lâmina k ;

J Matriz Jacobiana;

l Largura do laminado;

N Funções de forma interpoladoras;

P Pressão do carregamento;

p Número de nós no bordo de um elemento;

p_z Carga sinusoidal;

q Ponto de Gauss;

\bar{Q} Matriz dos coeficientes elásticos reduzidos transformados;

R Resistência ao corte transversal da lâmina na direção 23;

R_f	Relação entre núcleo-peles;
S	Resistência ao corte transversal da lâmina na direção 13;
T	Resistência ao corte no plano da lâmina;
u^k	Deslocamento na direção x da camada k ;
v^k	Deslocamento na direção y da camada k ;
w^k	Deslocamento na direção z da camada k ;
X_C	Resistência à compressão da lâmina unidirecional, paralela à direção da fibra;
X_T	Resistência à tração da lâmina unidirecional, paralela à direção da fibra;
Y_C	Resistência à compressão da lâmina unidirecional, transversal à direção da lâmina;
Y_T	Resistência à tração da lâmina unidirecional, transversal à direção da lâmina;
Z_C	Resistência à compressão da lâmina unidirecional, transversal à lâmina;
Z_T	Resistência à tração da lâmina unidirecional, transversal à lâmina;

Alfabeto grego

ϵ_{xx}^k	Deformação normal unitária da camada/lâmina k na direção x ;
ϵ_{yy}^k	Deformação normal unitária da camada/lâmina k na direção y ;
ξ	Coordenada local segundo a direção x .
γ_{xy}^k	Distorções da camada/lâmina k no plano xy ;
γ_{xz}^k	Distorções da camada/lâmina k no plano xz ;
γ_{yz}^k	Distorções da camada/lâmina k no plano yz ;
ν	Coefficiente de Poisson;
ρ	Massa volúmica;
θ_x^k	Rotação da normal à secção transversal (plano yz) em torno do eixo y ;
θ_y^k	Rotação da normal à secção transversal (plano xz) em torno do eixo x ;
η	Coordenada local segundo a direção y .
ω	Frequência natural;

Subscritos

0	Plano médio;
---	--------------

- k Número da camada/lâmina em estudo;
- m Semiondas dos modos de vibração na direção x ;
- n Semiondas dos modos de vibração na direção y ;

Capítulo 1

Introdução

No presente capítulo é elaborada uma introdução, referindo-se quais são os objectivos desta dissertação, a sua importância e é realizado um enquadramento dos temas de estudo. Apresenta-se ainda a estrutura adotada neste trabalho.

1.1 Importância e enquadramento do tema

Hoje em dia, os materiais compósitos, são usados em diversas áreas da engenharia. Esta utilização, e desenvolvimento de novas aplicações e estruturas, leva à necessidade de estudos cada vez mais aprofundados destes materiais.

O estudo dos materiais compósitos, independentemente da teoria de base, pode ser enquadrado na adoção de uma abordagem de camada única equivalente ou de uma abordagem multicamada. Enquanto no primeiro caso, o compósito é considerado como um todo, como se de uma camada de material único se tratasse, na segunda abordagem cada camada mantém a sua individualidade e propriedades materiais médias.

Uma abordagem multicamada permite de uma forma geral obter uma descrição mais detalhada da cinemática da deformação e assim capturar mais realisticamente os estados de deformação e de tensão que podem ocorrer num compósito. Com este trabalho pretende-se caracterizar o comportamento mecânico de estruturas compósitas nestas diferentes situações, usando uma abordagem multicamada.

Parte do trabalho desenvolvido no contexto desta dissertação, foi objeto de publicação em revista [1].

1.2 Objectivos do trabalho

Este trabalho tem como base o estudo de placas em materiais compósitos, podendo neste caso serem do tipo laminado ou *sandwich*. Procurou-se analisar estas estruturas compósitas, no contexto dos estados de deformação e de tensão usando uma abordagem multicamada nomeadamente, uma Teoria *Layerwise*. São analisadas situações onde a placa do material compósito se encontra sujeita a carregamentos estáticos e outras em vibração livre. Através dos estados de tensão, são ainda aplicados critérios de falha. Portanto, para além de se procurar compreender diversos fenómenos característicos do comportamento estático e dinâmico da estrutura compósita, pretende-se ainda abordar o problema com uma perspectiva de projecto mecânico, através da aplicação dos critérios de falha. Adicionalmente, procurou-se estudar a influência da utilização de diferentes modelações, variando os elementos ao nível do número de nós por elemento e o número de graus de liberdade da estrutura.

De modo a tornar possível o estudo das referidas estruturas compósitas, usando a abordagem e as modelações pretendidas, torna-se necessário recorrer à implementação de formulações num *software* de computação simbólica e/ou numérica – nomeadamente o *MatLab*[®] e o *Maple*[®]. A utilização deste tipo de programas permite a resolução de problemas com variáveis simbólicas de forma automatizada, sem prejuízo da vertente numérica.

Em adição, ao longo do trabalho pretendeu-se igualmente elaborar diversos estudos de convergência, estudos de influência de propriedades nos resultados obtidos, e respectivas validações, recorrendo-se para tal a referências bibliográficas, para efeitos comparativos.

1.3 Descrição da estrutura do trabalho

Em termos de estrutura, o presente trabalho encontra-se organizado em quatro capítulos, e segue uma sequência lógica, sistematizada da seguinte forma:

O primeiro capítulo, de carácter introdutório, apresenta a importância do tema, a estrutura da dissertação, os objetivos da mesma, e é feita uma breve descrição da abordagem ao problema.

No segundo capítulo, é apresentado o estado da arte onde são indicadas as referências bibliográficas mais relevantes nos últimos anos sobre o tema em estudo, as diferentes abordagens utilizadas no estudo dos laminados e das estruturas *sandwich*, bem como as referências mais relevantes na elaboração desta dissertação. Ainda neste capítulo, incidem os fundamentos teóricos e são explorados os diversos conceitos e metodologias implementadas. São apresentadas todas as ferramentas, metodologias e conceitos utilizados ao longo deste trabalho.

A apresentação dos resultados obtidos, bem como a análise crítica dos mesmos, é realizada no terceiro capítulo. Este está dividido em duas seções principais, sendo que a primeira apresenta os exemplos utilizados para validar os resultados obtidos, e a segunda, apresenta diversos casos de estudo considerados interessantes, e com interesse na aplicação da teoria usada.

Finalmente, o trabalho termina com uma conclusão dos resultados obtidos e discussão do que poderia ter sido feito, se o tempo disponível o permitisse, algumas ideias de desenvolvimento futuro e possíveis seguimentos a este trabalho.

1.4 Materiais compósitos

Tendo em conta que se pretende abordar o estudo de materiais compósitos, é conveniente definir estes materiais. De acordo com a norma ASTM D3878-2015, os materiais compósitos são definidos por: “substância que resulta de dois ou mais materiais, insolúveis entre si, que são combinados de forma a obter um material útil à engenharia com propriedades mecânicas diferentes das suas fases constituintes” [2].

A crescente importância, e utilização dos materiais compósitos na engenharia (Fig. 1), – abrangem áreas desde os meios de transportes a aplicações biomédicas – torna-os fortes candidatos à substituição de materiais tradicionais. Esta preferência, deve-se a estes serem constituídos por dois ou mais materiais diferentes, - uma fase de matriz (garante a ligação com o reforço) e uma fase de reforço (garante a resistência) - e que quando combinados (macroscopicamente) num só material se obtêm propriedades finais superiores às propriedades iniciais dos seus constituintes possibilitando a obtenção de diferentes propriedades através da mistura de diferentes materiais, permitindo o destaque das características chave tendo em conta a aplicação do produto.

Nos dias de hoje, encontram-se compósitos de matriz reforçada por fibras e estruturas *sandwich*, na estrutura de aeronaves, em chassis de veículos desportivos, quadros de bicicletas, em pás de turbinas eólicas, ou mesmo em aplicações onde estas estruturas podem ser aplicadas como sensores e/ou atuadores [3, 4].

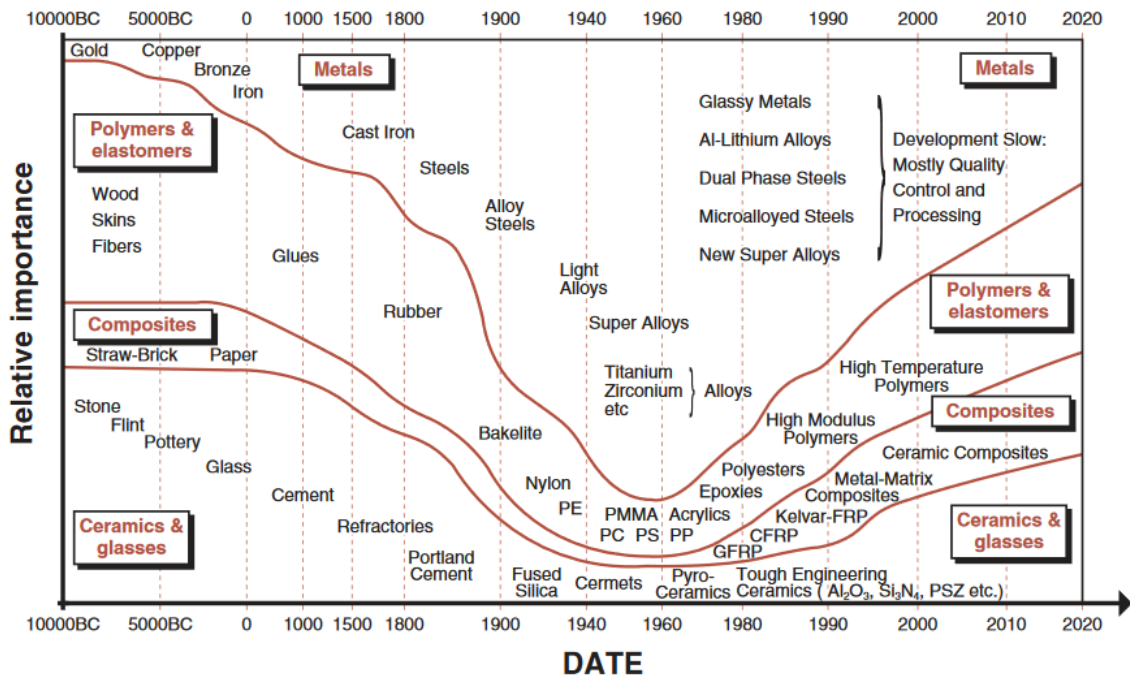


Fig. 1 – Evolução da importância dos diferentes materiais ao longo do tempo [5].

A combinação dos materiais depende da aplicação específica que se pretende do material compósito e a importância relativa de vários factores tais como a resistência à corrosão, rigidez, peso, resistência à fadiga, expansão térmica, propriedades eletromagnéticas, condutibilidade térmica etc....

É usual classificar-se este tipo de materiais em dois níveis distintos. O primeiro nível, diz respeito ao tipo de matriz (fase contínua), e o segundo nível ao reforço (fase descontínua). Dentro destes níveis, os materiais compósitos podem ser classificados segundo os subníveis apresentados na Fig. 2 e na Fig. 3.

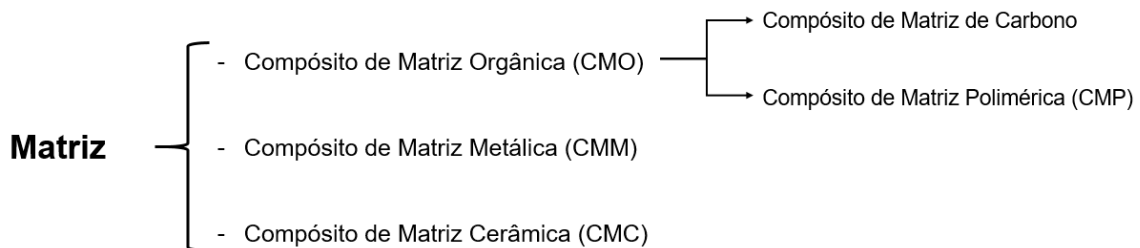


Fig. 2 – Classificação do material compósito quanto ao tipo de matriz. Baseado em [6].

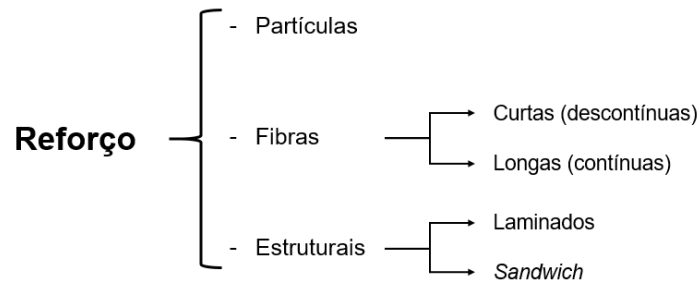


Fig. 3 - Classificação do material compósito quanto ao tipo de reforço. Baseado em [6].

Neste trabalho, foram considerados dois tipos de materiais compósitos, nomeadamente, materiais compósitos laminados, e estruturas *sandwich*. Ambas as estruturas, apresentam uma configuração multicamada, isto é, a configuração de cada placa, é obtida através do empilhamento de diferentes camadas, com o intuito de obter um melhor desempenho, cumprir os requisitos de funcionamento, e garantir um tempo de vida útil satisfatório.

1.4.1 Compósitos laminados

Os compósitos laminados são caracterizados por uma sequência de lâminas (camadas) com o mesmo material ou materiais diferentes, podendo cada uma delas apresentar diferentes orientações das fibras. Na interface das camadas, é assumida uma adesão perfeita, sem escorregamento. O resultado deste empilhamento é designado de laminado (Fig. 4).

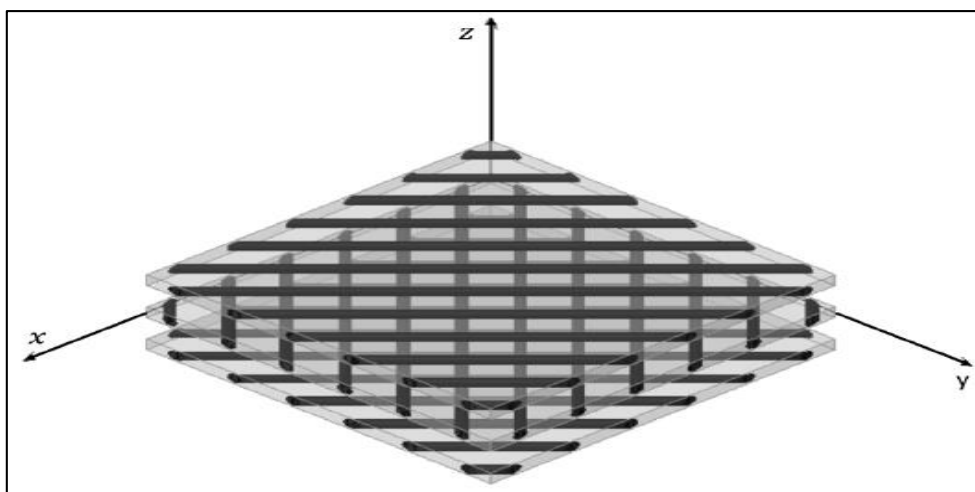


Fig. 4 – Representação esquemática de uma sequência de empilhamento.

Nestas estruturas, as fibras são os elementos de reforço, sendo as principais responsáveis pelas propriedades mecânicas do laminado. As principais fibras utilizadas nestas estruturas são as de vidro, carbono, aramídicas e cerâmicas [6].

Relativamente às matrizes, apesar da sua contribuição principal à estrutura, não ser fornecer propriedades mecânicas, o modo de falha desta, é fortemente afetado pelo tipo de material utilizado na matriz, visto este influenciar a resistência da interface fibra/matriz [6]. À matriz cabe também a responsabilidade de isolar as fibras de modo que possam agir separadamente, fornecer acabamento superficial, e proteger as fibras contra ataques químicos e/ou danos mecânicos como o desgaste.

Dentro dos vários materiais passíveis de serem usados como matriz, as mais recorrentes são as matrizes metálicas, e as resinas (epóxicas, poliésteres, bismaleimidas, poliamídicas, fenólicas, termoplásticas) [6].

1.4.2 Compósitos *sandwich*

Uma estrutura *sandwich*, consiste numa ou mais lâminas com elevada densidade, resistência e rigidez, unidas ao núcleo com ou sem o uso de adesivos, de forma a garantir adesão na interface dos dois. Este núcleo, possui menor densidade, rigidez, e resistência em comparação às camadas exteriores. Na Fig. 5, é apresentada uma estrutura esquemática de um compósito *sandwich*.

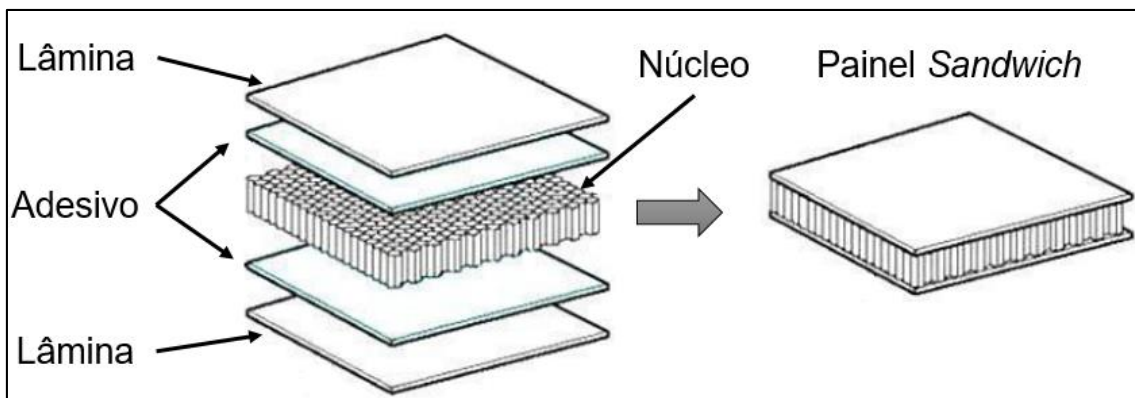


Fig. 5 - Representação esquemática de um painel *sandwich*. Adaptado de [7].

Neste tipo de estruturas compósitas, as lâminas têm como função, suportar os esforços de flexão da estrutura, acabando estas por trabalhar fundamentalmente, à compressão e à tração. O núcleo suporta os esforços de corte e torção permitindo evitar o deslizamento das lâminas.

De forma a suportar os esforços de flexão, as lâminas devem apresentar uma resistência elevada, resistência ao impacto, resistência à corrosão e ao desgaste [8]. Estas características são habitualmente fornecidas pelos materiais metálicos (onde predomina o aço, o aço inoxidável, as ligas de alumínio e cobre) e não metálicos (madeira e materiais compósitos reforçados com fibras) [8].

De acordo com [9], os núcleos dos painéis *sandwich* podem ser divididos em dois grupos: núcleos homogêneos e núcleos não homogêneos ou estruturados, conforme ilustra a Fig. 6.

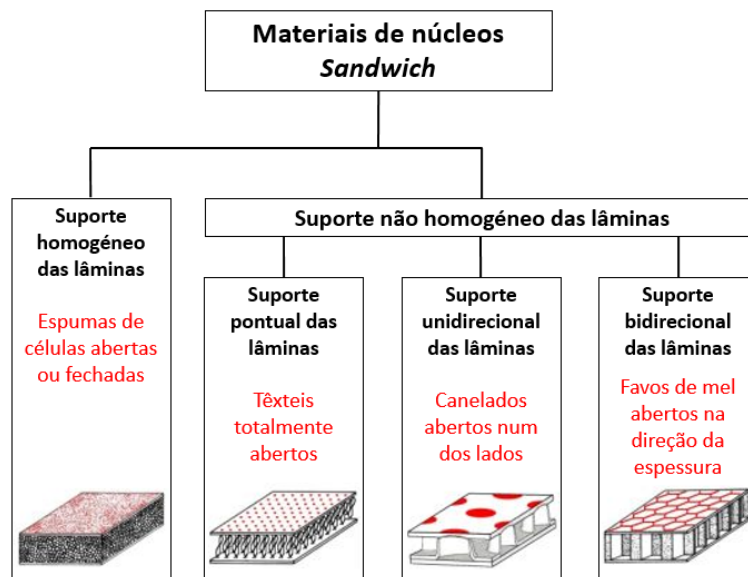


Fig. 6 – Tipos de núcleos de painéis *sandwich*. Adaptado de [9].

Os materiais usados como adesivos têm uma importância crucial no comportamento do painel *sandwich*. São estes materiais que garantem ligação entre o núcleo e as lâminas na interface, devendo ser o elemento mais forte da estrutura, e possuir propriedades mecânicas que não variem durante os processos de fabricação do compósito, e durante o serviço do mesmo de forma a manter a integridade estrutural.

1.5 Modelação de materiais compósitos

A versatilidade apresentada pelos materiais compósitos, desperta a atenção de vários investigadores, devido ao constante surgimento de novos materiais, novos processos de fabrico, e a evolução dos recursos computacionais. A evolução da mecânica computacional, tem grande importância no projeto de estruturas e soluções otimizadas, e na modelação de materiais complexos tais como os materiais compósitos. Esta evolução,

permite o uso de algoritmos mais exigentes computacionalmente, a manipulação de uma maior quantidade de dados, e uma maior discretização do modelo, permitindo uma análise micromecânica mais aprofundada do compósito. Com o intuito de diminuir este custo computacional, habitualmente é realizada uma homogeneização de um volume representativo da estrutura em estudo. Esta simplificação, permite quantificar as propriedades médias de um volume e extrapolar estes resultados numa escala maior, considerando uma abordagem de equivalência média na escala real.

Actualmente, o Método dos Elementos Finitos, é o que aparece em maior destaque, comparativamente aos diversos métodos de modelação computacional. Esta é uma metodologia que tem vindo a ganhar bastante terreno em indústrias competitivas e justifica-se para tal a existência de diversos programas comerciais, tais como *SolidWorks*®, *Ansys*®, *Abaqus*®, *Nastran*® entre outros, que visam satisfazer as necessidades existentes.

De uma forma simples, pode-se dizer que o MEF, é um método numérico, para resolução de equações às derivadas parciais, do tipo de problemas de valores de fronteira que passam pela aproximação de um domínio em análise, através de um número finito de subdomínios com formas mais simples, os elementos finitos. No interior de cada elemento, são assumidas funções simples de forma a aproximar as variáveis em estudo. A solução aproximada consiste numa combinação linear destas funções. Os pesos desta combinação, passam a ser as variáveis do problema. A facilidade na discretização do domínio faz com que o MEF possa ser utilizado para resolver praticamente qualquer problema suscetível de ser representado matematicamente por equações às derivadas parciais, com quaisquer condições de fronteira. Esta metodologia é esquematicamente apresentada na Fig. 7.

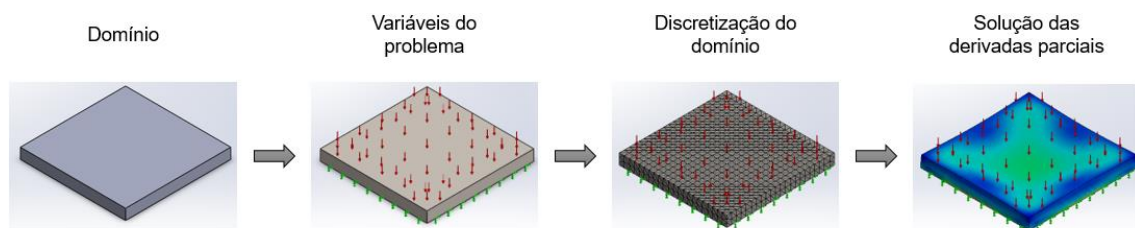


Fig. 7 – Representação esquemática do MEF.

O problema pode ser abordado de diferentes formas. Uma delas, consiste na identificação do tipo de elemento(s) mais correcto para o caso em estudo. Assim, o

problema poderá ser resolvido por elementos de uma, duas ou três dimensões dependendo das simplificações consideradas e desejadas.

Existem vários tipos de elementos, sendo alguns apresentados na Fig. 8.

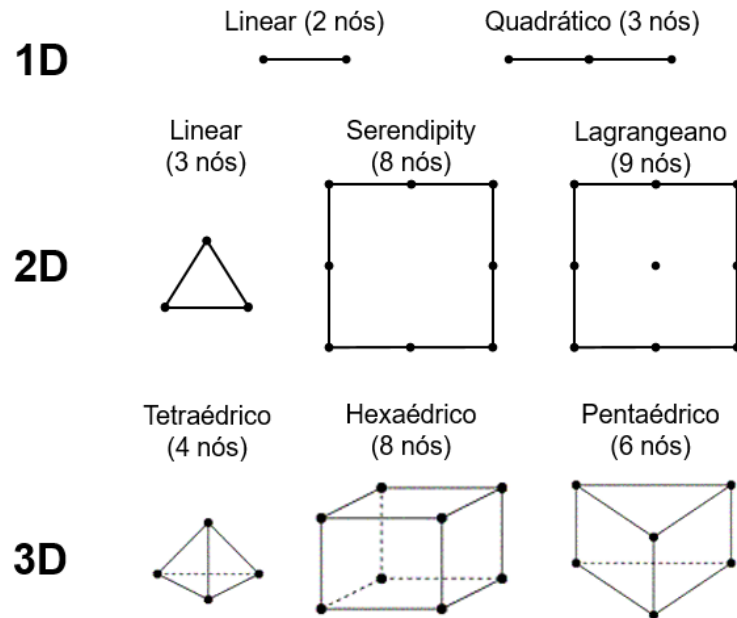


Fig. 8 – Exemplos de diferentes tipos de elementos finitos. Adaptado de [10].

Apesar do surgimento dos programas comerciais de MEF ter impulsionado a utilização destes métodos, estes programas apresentam algumas lacunas quanto às formulações dos tipos de elementos e do número de GDL a considerar. Assim, é necessária a utilização de teorias mais complexas como a abordagem multicamada, abordada neste trabalho. Neste contexto, destaca-se o livro de J.N. Reddy [11], referência incontornável para aqueles que se iniciam no estudo dos materiais compósitos e das estruturas construídas com estes materiais.

Capítulo 2

Fundamentos Teóricos

No presente capítulo é apresentado um breve estado de arte onde são abordadas teorias utilizadas, no estudo de materiais compósitos multicamada. Adicionalmente, são apresentados os fundamentos teóricos e são explorados conceitos, considerações e metodologias usadas na Teoria *Layerwise*, abordada neste trabalho.

2.1 Estado de Arte

As teorias *layerwise*, surgiram devido à necessidade de estudar estruturas laminadas ou estruturas tipo *sandwich*, em que a necessidade de uma descrição mais realista dos estados de tensão e de deformação, é mais premente.

O estudo de estruturas compostas por materiais compósitos, independentemente da teoria de deformação ao corte usada, pode ser realizado adotando uma metodologia de ESL, ou multicamada (*layerwise*). A adoção de uma metodologia em detrimento da outra, depende da precisão que se pretende no campo de deslocamentos e a subsequente descrição das tensões ou frequências, por exemplo.

Relativamente à abordagem ESL, no campo dos laminados ou das estruturas *sandwich*, é possível encontrar variadíssimos trabalhos publicados. Entre estes, encontram-se trabalhos baseados em diferentes teorias, desde a Teoria Clássica dos Laminados (CLT), até às teorias de deformação de corte de ordem superior (HSDT), por exemplo, Reissner [12], estudou o efeito das deformações de corte transversais em placas anisotrópicas simétricas em relação ao seu plano médio. Relacionado com este trabalho, Whitney [13], desenvolveu a teoria de flexão para laminados simplesmente apoiados, tendo incluído deformações de corte transversais. Mais tarde, Lo et al. [14], apresentaram

uma teoria de ordem superior, dedicada ao estudo da deformação de placas laminadas, comparando os resultados obtidos com soluções da elasticidade. Pandya e Kant [15], desenvolveram um modelo HSDT, para análise da flexão de placas *sandwich* simétricas. Esse modelo, assume uma variação não linear dos deslocamentos no plano, embora constantes no sentido transversal para fora do plano. Ainda relativamente às abordagens ESL, Bernardo et al. [16], apresentaram um estudo do comportamento estático e dinâmico de placas com gradientes funcionais. Para tal, foi implementada a teoria de deformação de corte de primeira ordem (FSDT), e usados elementos Lagrangeanos, e elementos de Kriging, através de uma abordagem *meshless* (sem malha), com funções de base radial. Loja et al. [17], analisaram o comportamento dinâmico de estruturas *sandwich*, constituídas por um núcleo metálico, e as camadas exteriores por materiais com gradientes funcionais. As propriedades de um compósito metálico-cerâmico, foram estimadas usando o esquema de Mori-Tanaka, tendo sido considerado nas análises dinâmicas a FSDT, e teorias de ordem superior, implementadas com elementos Kriging. A resposta dinâmica destas estruturas, foi obtida através do método de Bossak-Newmark. Viola et al. [18], propuseram uma formulação e analisaram dinamicamente laminados e painéis moderadamente espessos, duplamente curvados. Nesta formulação, uma HSDT foi considerada, e uma geometria diferencial foi usada de forma a definir a forma arbitrária da superfície média de painéis e cascas com diferentes curvaturas. Continuando ainda nas abordagens ESL, mas passando agora para abordagens não lineares, é de referir o trabalho desenvolvido por Reddy [19], onde foi proposta uma HSDT, tendo sido consideradas as deformadas não lineares de von Kármán. Ferreira e Barbosa [20], apresentaram um modelo de elemento finito, para a análise de estruturas compósitas de casca, usando uma análise geométrica não linear. As equações de equilíbrio incrementativas não lineares, foram estabelecidas através da formulação do deslocamento total de Lagrange, sendo a solução obtida através do método incremental/iterativo de Newton-Raphson, com métodos de comprimento de arco. Recentemente, Dehkordi et al. [21], procedeu à análise dinâmica de uma placa *sandwich*, com um núcleo flexível, e as camadas exteriores laminadas, embebidas em fios de liga com memória. Este estudo foi baseado em modelos *layerwise* mistos e ESL (LW/ESL), desenvolvidos no âmbito da *Unified Formulation* de Carrera. É igualmente importante mencionar, o trabalho desenvolvido por Thai e os seus colegas [22-26] no contexto da análise de estruturas laminadas isogeométricas.

A importância e a adequação de uma abordagem multicamada em relação às abordagens ESL, em estruturas laminadas e *sandwich*, tem sido alvo de várias discussões, estudos e revisões, nomeadamente os realizados por Carrera [27, 28]. Em [27], é apresentada uma revisão histórica de teorias zig-zag, desenvolvidas com o intuito de analisar estruturas multicamada, com foco nas teorias que apresentam campos de deslocamentos contínuos e continuidade interlaminar das tensões transversais na interface de cada camada. Em [28], foi apresentada uma revisão da obtenção das equações de governo, e as matrizes de elementos finitos de algumas das teorias de placas mais relevantes. Adicionalmente, é feita uma comparação entre diversas avaliações numéricas e a validação dos resultados. Num estudo abrangente, Demasi et al. [29] avaliou a precisão da análise da variação assintótica das placas e das cascas, comparativamente a diferentes teorias de ordem superior, zig-zag e teorias *layerwise*, geradas através da estrutura axiomática invariante conhecida como GUF (*Generalized Unified Formulation*). Os modelos axiomáticos foram igualmente comparados às soluções da elasticidade desenvolvidas, para os casos de estruturas *sandwich* com elevado rácio de rigidez entre as lâminas e o núcleo. Ferreira em [30], combinou uma teoria *layerwise*, com uma discretização multiquadrática, com o intuito de analisar placas laminadas e *sandwich*. Para tal, usou funções de base radial de forma a aproximar as equações governativas diferenciais e as condições fronteira. Nosier em [31], considerou a teoria *layerwise* de Reddy, com o intuito de estudar as vibrações livres de laminados, tendo os resultados obtidos sido comparados com os obtidos através de uma análise da elasticidade tridimensional e várias teorias ESL. O uso de abordagens multicamada, com o intuito de estudar o comportamento dinâmico de estruturas amortecidas, tem ainda sido usado por alguns investigadores, nomeadamente Sainsbury e Zhang [32], Daya e Potier-Ferry [33], e Araújo et al. [34]. Sainsbury e Zhang [32], propuseram um elemento finito para estruturas viga em *sandwich* amortecidas, combinando as funções de forma polinomiais convencionais, com funções ortogonais de Galerkin. Foram considerados deslocamentos compatíveis nas interfaces entre as diferentes camadas. Daya e Potier-Ferry [33], propuseram um método numérico para soluções exatas de problemas não lineares de vetores próprios. Este método, associa técnicas numéricas homotópicas e assintóticas, tendo sido aplicado no cálculo das frequências naturais, e nos fatores de perda de amortecimento viscoelástico de estruturas *sandwich*. Mais recentemente, Araújo et al. [34], estudaram e otimizaram parâmetros dos quais as frequências são dependentes, em

estruturas *sandwich* amortecidas, com núcleo viscoelástico. Para tal, um modelo de elemento finito misto *layerwise*, e uma abordagem complexa de forma a modelar o comportamento do material viscoelástico foram necessários. Importa ainda frisar, as *Higher Order Sandwich Panel Theory* (HSAPT). De acordo com estas teorias, as camadas exteriores e o núcleo, são analisadas separadamente com diferentes campos de deslocamentos, para cada componente, sendo alguns trabalhos apresentados por Santiuste et al. [35], Mantari et al. [36], entre outros.

2.2 Teoria *Layerwise*

2.2.1 Campos de deslocamentos

Como se referiu, no presente trabalho, é adotada uma abordagem multicamada, ou *Layerwise*, com o intuito de descrever de forma mais realista a cinemática da deformação de um laminado, ou de uma estrutura *sandwich*. Nesta abordagem, cada camada é modelada individualmente pela Teoria de Deformação de Corte de Primeira Ordem (FSDT).

A FSDT, relativamente às hipóteses de Kirchhoff, possui a particularidade de considerar uma normal ao plano médio da placa indeformada, esta permanecer reta, mas não necessariamente normal ao plano médio da placa deformada. Esta condição permite incluir as extensões de corte ϵ_{xz} e ϵ_{xy} . O campo de deslocamentos é assim definido por [11]:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) + z\theta_x(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) + z\theta_y(x, y, t) \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (1)$$

onde u e v são os deslocamentos nas direções x e y , u_0 e v_0 são os deslocamentos nessas direções, de um ponto pertencente ao plano médio; w representa a flecha ou o deslocamento transversal; θ_x e θ_y são as rotações das normais do plano médio segundo a direção y e x respetivamente. No caso de placas finas, θ_x e θ_y são consideradas como sendo função da deflexão transversal (Teoria Clássica).

$$\theta_x = -\frac{dw_0}{dx}, \theta_y = -\frac{dw_0}{dy} \quad (2)$$

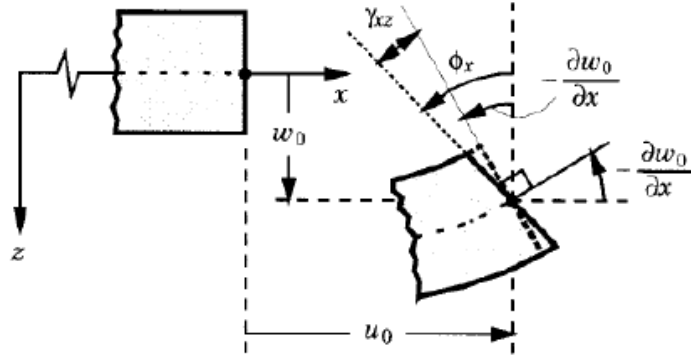


Fig. 9 – Bordo deformado e não deformado na teoria FSDT [11].

As deformações associadas à teoria de deformação de corte de primeira ordem, são dadas de acordo com a equação (3)

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^{(0)} \\ \epsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \\ \gamma_{yz}^{(0)} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^{(1)} \\ \epsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \\ \gamma_{xz}^{(1)} \\ \gamma_{yz}^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{du_0}{dx} \\ \frac{dv_0}{dy} \\ \frac{du_0}{dy} + \frac{dv_0}{dx} \\ \frac{dw_0}{dx} + \theta_x \\ \frac{dw_0}{dy} + \theta_y \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \frac{d\theta_x}{dx} \\ \frac{d\theta_y}{dy} \\ \frac{d\theta_x}{dy} + \frac{d\theta_y}{dx} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3)$$

Como indicado anteriormente, na abordagem adotada neste trabalho, são adotadas em cada camada, as premissas da teoria FSDT, e é imposta a continuidade dos deslocamentos nas interfaces entre as camadas. Não foram considerados constrangimentos, relativamente à continuidade das tensões de corte transversais, tal como considerado por outros autores como Barkanov et al. [37], Araújo et al. [34] e Ferreira [38] entre outros. A previsão das tensões de corte transversais, em cada camada, apresenta um valor constante, de acordo com as relações constitutivas, conduzindo assim a um perfil de distribuições em degrau, camada a camada. No entanto, tal como verificado noutras abordagens, é possível obter uma distribuição contínua, se forem usadas as equações do equilíbrio da elasticidade, numa fase de pós-processamento.

De forma a ilustrar um caso específico de uma estrutura *sandwich*, independentemente da natureza dos seus materiais constituintes, é apresentada na Fig. 10, um compósito com

três camadas onde a cinemática de uma abordagem multicamada é esquematicamente apresentada, neste caso respeitante ao deslocamento segundo x (u).

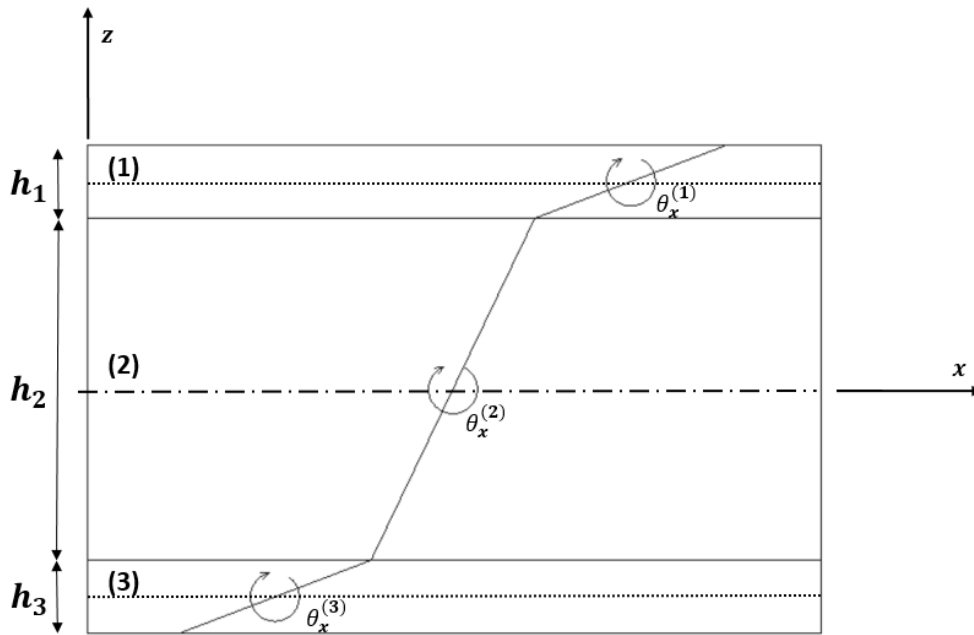


Fig. 10 – Representação esquemática da cinemática de uma abordagem multicamada.

A razão principal para a adoção da FSDT em cada camada, explica-se pelo seu baixo custo computacional, quando comparada com outras teorias. Se forem adotados campos de deslocamentos de ordens superiores em teorias ESL ou *layerwise*, a dimensão do problema aumenta para dimensões significativamente superiores. Adicionalmente, o uso de abordagens com FSDT, já provou bons resultados, tal como é demonstrado por Ferreira [38, 39], e Sainsbury et al. [32]. Embora se possa considerar o cálculo das tensões de corte e da normal transversal, camada a camada, através das equações do equilíbrio, neste trabalho, foram apenas usadas as relações constitutivas. Por essa razão, independentemente da sua importância nos casos de análise de falha, a componente normal transversal não será aqui determinada.

Considerando uma configuração com três camadas, de acordo com os pressupostos já enunciados, as componentes do deslocamento da camada interior (núcleo), $u^{(2)}$, $v^{(2)}$, $w^{(2)}$, respetivamente ao longo das direções x , y , z , são descritas como:

$$\begin{aligned}
u^{(2)}(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) + z^{(2)}\theta_x^{(2)}(x, y, t) \\
v^{(2)}(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) + z^{(2)}\theta_y^{(2)}(x, y, t) \\
w^{(2)}(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t)
\end{aligned} \tag{4}$$

onde u e v são os deslocamentos do plano médio, em qualquer ponto caracterizado pelas coordenadas (x, y, z, t) num instante de tempo genérico t , u_0 e v_0 são os deslocamentos no plano médio $(x, y, 0, t)$; w representa a flecha ou o deslocamento transverso; $\theta_x^{(2)}$ e $\theta_y^{(2)}$ são as rotações das normais do plano médio segundo a direção y e x respetivamente, para a camada 2. Após a imposição da continuidade dos deslocamentos entre as interfaces das camadas ser apresentada, os campos de deslocamento para as camadas exteriores, camada 1 e 3, são dados por:

$$\begin{aligned}
u^{(1)}(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) + \frac{h_2}{2}\theta_x^{(2)}(x, y, t) + \frac{h_1}{2}\theta_x^{(1)}(x, y, t) + z^{(1)}\theta_x^{(1)}(x, y, t) \\
v^{(1)}(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) + \frac{h_2}{2}\theta_y^{(2)}(x, y, t) + \frac{h_1}{2}\theta_y^{(1)}(x, y, t) + z^{(1)}\theta_y^{(1)}(x, y, t) \\
w^{(1)}(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t)
\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
u^{(3)}(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - \frac{h_2}{2}\theta_x^{(2)}(x, y, t) - \frac{h_3}{2}\theta_x^{(3)}(x, y, t) + z^{(3)}\theta_x^{(3)}(x, y, t) \\
v^{(3)}(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - \frac{h_2}{2}\theta_y^{(2)}(x, y, t) - \frac{h_3}{2}\theta_y^{(3)}(x, y, t) + z^{(3)}\theta_y^{(3)}(x, y, t) \\
w^{(3)}(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t)
\end{aligned} \tag{6}$$

2.2.2 Deformações

Considerando as relações cinemáticas da elasticidade, para pequenas deformações, obtém-se de uma forma genérica, para um número de camadas k (omitindo a dependência das coordenadas espaciais e temporais):

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^{(k)} \\ \epsilon_{yy}^{(k)} \\ \gamma_{xy}^{(k)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u^{(k)}}{\partial x} \\ \frac{\partial v^{(k)}}{\partial y} \\ \frac{\partial u^{(k)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(k)}}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^{m(k)} \\ \epsilon_{yy}^{m(k)} \\ \gamma_{xy}^{m(k)} \end{Bmatrix} + z^{(k)} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^{f(k)} \\ \epsilon_{yy}^{f(k)} \\ \gamma_{xy}^{f(k)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^{mf(k)} \\ \epsilon_{yy}^{mf(k)} \\ \gamma_{xy}^{mf(k)} \end{Bmatrix} \tag{7}$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^{(k)} \\ \gamma_{yz}^{(k)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u^{(k)}}{\partial z} + \frac{\partial w^{(k)}}{\partial x} \\ \frac{\partial v^{(k)}}{\partial z} + \frac{\partial w^{(k)}}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial x} + \theta_x^{(k)} \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} + \theta_y^{(k)} \end{Bmatrix}$$

Os componentes de flexão (sobrescrito f) e de membrana (sobrescrito m) são expressos como:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^{f(k)} \\ \epsilon_{yy}^{f(k)} \\ \gamma_{xy}^{f(k)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_x^{(k)}}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y^{(k)}}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_x^{(k)}}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y^{(k)}}{\partial x} \end{Bmatrix} ; \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^{m(k)} \\ \epsilon_{yy}^{m(k)} \\ \gamma_{xy}^{m(k)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

e os componentes de membrana-flexão (sobrescrito mf), para as camadas exteriores são dados por:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^{mf(3)} \\ \epsilon_{yy}^{mf(3)} \\ \gamma_{xy}^{mf(3)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{h_2}{2} \frac{\partial \theta_x^{(2)}}{\partial x} - \frac{h_3}{2} \frac{\partial \theta_x^{(3)}}{\partial x} \\ -\frac{h_2}{2} \frac{\partial \theta_y^{(2)}}{\partial y} - \frac{h_3}{2} \frac{\partial \theta_y^{(3)}}{\partial y} \\ -\frac{h_2}{2} \left(\frac{\partial \theta_x^{(2)}}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y^{(2)}}{\partial x} \right) - \frac{h_3}{2} \left(\frac{\partial \theta_x^{(3)}}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y^{(3)}}{\partial x} \right) \end{Bmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^{mf(1)} \\ \epsilon_{yy}^{mf(1)} \\ \gamma_{xy}^{mf(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{h_2}{2} \frac{\partial \theta_x^{(2)}}{\partial x} + \frac{h_1}{2} \frac{\partial \theta_x^{(1)}}{\partial x} \\ \frac{h_2}{2} \frac{\partial \theta_y^{(2)}}{\partial y} + \frac{h_1}{2} \frac{\partial \theta_y^{(1)}}{\partial y} \\ \frac{h_2}{2} \left(\frac{\partial \theta_x^{(2)}}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y^{(2)}}{\partial x} \right) + \frac{h_1}{2} \left(\frac{\partial \theta_x^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y^{(1)}}{\partial x} \right) \end{Bmatrix} \quad (10)$$

Sendo o vetor dos graus de liberdade, generalizados dado por:

$$q^T = [u_0, v_0, w_0, \theta_x^{(1)}, \theta_y^{(1)}, \theta_x^{(2)}, \theta_y^{(2)}, \theta_x^{(3)}, \theta_y^{(3)}] \quad (11)$$

2.2.3 Lei constitutiva da lâmina e respectivas tensões

Uma estrutura compósita laminada, é obtida através do empilhamento de lâminas de diferentes materiais, que podem ser por exemplo, materiais compósitos ortotrópicos com fibras unidirecionais pré-impregnadas, ou materiais isotrópicos, entre outras possibilidades. Em adição à sobreposição das lâminas, são assumidas algumas

considerações, nomeadamente, a existência de adesão entre as fases constituintes do material, bem como entre lâminas adjacentes, a inexistência de impurezas e espaços residuais, a continuidade dos deslocamentos, e a validade de um regime linear elástico.

Considerando desprezável a tensão normal transversal, $\sigma_z^{(k)}$ em cada camada k , pode-se escrever, para a situação mais genérica (material ortotrópico), as relações tensão-deformação para um laminado com k camadas, no sistema coordenado local (material) [11]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1^{(k)} \\ \sigma_2^{(k)} \\ \tau_{12}^{(k)} \\ \tau_{23}^{(k)} \\ \tau_{31}^{(k)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^{(k)} \\ \varepsilon_2^{(k)} \\ \gamma_{12}^{(k)} \\ \gamma_{23}^{(k)} \\ \gamma_{31}^{(k)} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

onde os índices 1 e 2 representam respetivamente, as direções das fibras e a normal às fibras, sendo ainda a direção 3 a direção normal ao plano. $Q_{ij}^{(k)}$, representa os coeficientes de rigidez elástica reduzidos da camada k , sendo estes obtidos por:

$$\begin{aligned} Q_{11}^{(k)} &= \frac{E_1^{(k)}}{1 - \nu_{12}^{(k)} \nu_{21}^{(k)}}; & Q_{22}^{(k)} &= \frac{E_2^{(k)}}{1 - \nu_{12}^{(k)} \nu_{21}^{(k)}}; & Q_{12}^{(k)} &= \nu_{12}^{(k)} Q_{22}^{(k)}; \\ Q_{66}^{(k)} &= G_{12}^{(k)}; & Q_{44}^{(k)} &= G_{23}^{(k)}; & Q_{55}^{(k)} &= G_{31}^{(k)}; \end{aligned} \quad (13)$$

onde $E_1^{(k)}$, $E_2^{(k)}$, $\nu_{12}^{(k)}$, $G_{12}^{(k)}$, $G_{23}^{(k)}$, e $G_{31}^{(k)}$ são as propriedades elásticas do material na respectiva camada k .

Não são considerados $\sigma_3^{(k)}$ e $\varepsilon_3^{(k)}$ na lei constitutiva da lâmina, visto utilizar-se a FSDT.

Devido ao facto de cada lâmina poder ter diferentes orientações, como é possível observar na Fig. 11, torna-se necessária uma transformação de forma a que a análise de todo o laminado seja possível.

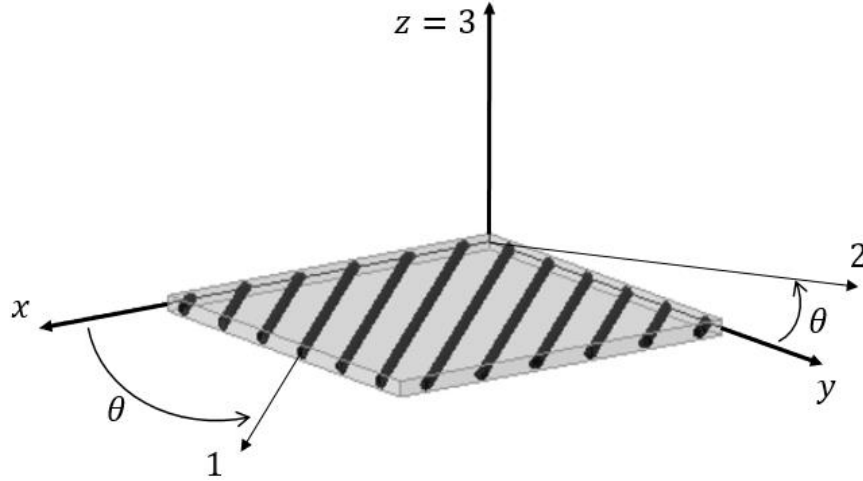


Fig. 11 – Representação esquemática dos sistemas de coordenadas do material e do laminado.

O ângulo θ que caracteriza o ângulo da orientação da fibra, é medido entre os sentidos positivos da direção 1 e x . Através da transformação de coordenadas [11], as relações constitutivas no sistema de coordenadas xyz , podem ser obtidas por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^{(k)} \\ \sigma_{yy}^{(k)} \\ \tau_{xy}^{(k)} \\ \tau_{yz}^{(k)} \\ \tau_{zx}^{(k)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11}^{(k)} & \bar{Q}_{12}^{(k)} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{12}^{(k)} & \bar{Q}_{22}^{(k)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{66}^{(k)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44}^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{55}^{(k)} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(k)} \\ \varepsilon_{yy}^{(k)} \\ \gamma_{xy}^{(k)} \\ \gamma_{yz}^{(k)} \\ \gamma_{zx}^{(k)} \end{Bmatrix} \quad (14)$$

onde $\bar{Q}_{ij}^{(k)}$, representa os coeficientes de rigidez elástica reduzidos transformados, associados a cada camada k .

2.2.4 Equações de equilíbrio

As equações de equilíbrio que permitem realizar uma análise linear estática, ou de vibração livre do laminado ou estrutura *sandwich*, podem ser obtidas pelo princípio de Hamilton [11], o qual pode ser escrito da seguinte forma:

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta U - \delta V + \delta W) dt = 0 \quad (15)$$

onde U, V, W , representam respetivamente a energia elástica de deformação, a energia cinética, e o trabalho realizado pelas forças exteriores aplicadas no sistema. Cada um destes parâmetros é genericamente dado por:

$$\delta U = \int_{\Omega} (\delta \epsilon^T \sigma) d\Omega \quad ; \quad \delta V = \int_{\Omega} (\rho \delta \dot{q}^T \dot{q}) d\Omega \quad ; \quad \delta W = \int_A (P \delta q) dA \quad (16)$$

com Ω , e A , sendo o volume da placa e a área de aplicação do carregamento; ϵ , e σ , são os vetores de deformação e tensão generalizados. A densidade é representada por ρ , e a pressão do carregamento é dada por P . Após a construção das matrizes e dos vetores do elemento, e a sua conseqüente montagem, considerando um domínio discreto, é possível escrever a equação do equilíbrio da seguinte forma:

$$Kq + M\ddot{q} = F \quad (17)$$

onde $[K]$, $[M]$ e F , representam, respetivamente, a matriz de rigidez elástica global, a matriz de massas global, e o vetor de carregamentos. q , e \ddot{q} , são os vetores do deslocamento e de aceleração generalizados, respetivamente.

Assumindo um caso de vibração livre e vibrações livres harmónicas, obtém-se:

$$(K - \omega_i^2 M)q_i = 0 \quad (18)$$

com ω_i representando a i -ésima frequência natural, associada ao i -ésimo modo de vibração q_i . Para um problema de análise estático linear, a equação do equilíbrio fica reduzida a:

$$Kq = F \quad (19)$$

Em qualquer caso, a resolução das equações do equilíbrio só é possível, após a imposição das condições de fronteira associadas ao problema em estudo.

2.2.5 Formulações de elementos finitos

Neste subcapítulo, são apresentados os elementos finitos usados na caracterização dos materiais compósitos estudados no capítulo 3.

Os elementos utilizados, pertencem à família de Lagrange. A formulação e o código implementados, permitem a refinação da malha aplicada ao compósito através de duas formas, pela quantidade de elementos inseridos na estrutura, ou através do número de nós presentes em cada elemento, isto é, utilizando elementos bilineares (4 nós) ou biquadráticos (9 nós). Neste trabalho, foram considerados dois elementos denominados por Q4 e Q9 que correspondem respetivamente a elementos de 4 nós, e 9 nós, ilustrados na Fig. 12.

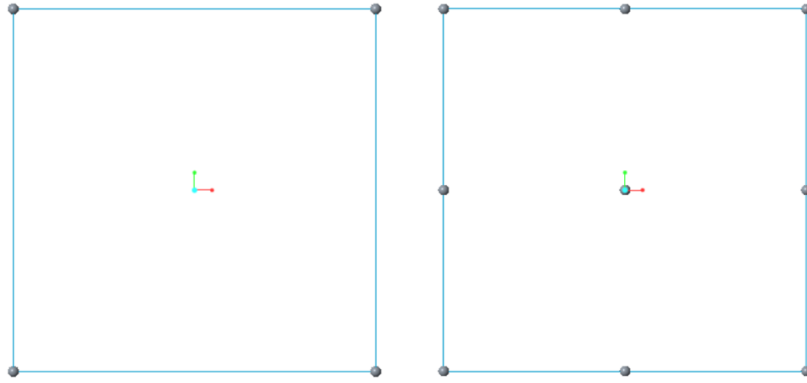


Fig. 12 – Representação esquemática dos elementos usados.

2.2.5.1 Aproximações

A utilização das funções de Lagrange, requer uma correcta numeração dos nós constituintes de cada elemento, de forma a respeitar a sequência das funções de forma, e a garantir uma numeração no sentido direto, permitindo assim interpolar os nós adequados segundo a numeração local do próprio elemento. Estando perante dois tipos de elementos com diferente número de nós, são requeridos diferentes algoritmos de automatização de numeração de todos os nós.

A numeração dos nós utilizada para os elementos Q4 encontra-se de acordo com a numeração apresentada em [40]. E correspondente à apresentada na Fig. 13.

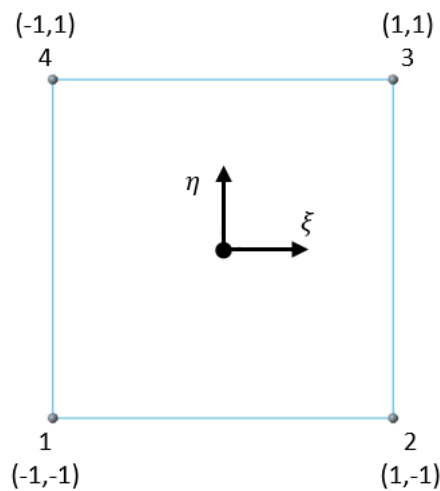


Fig. 13 – Numeração local dos nós num elemento Q4.

Relativamente aos elementos Q9, os princípios de geração da malha para Q4, podem ser extrapolados para o elemento Q9, visto que a numeração global do elemento é obtida

da mesma forma. No que respeita à numeração dos nós no referencial do elemento, esta segue a sequência ilustrada na Fig. 14.

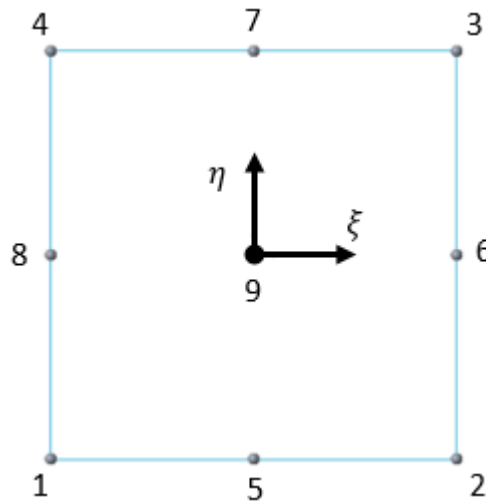


Fig. 14 – Numeração local dos nós num elemento Q9.

O procedimento de cálculo das funções de forma, de uma forma genérica, implica selecionar em cada caso, um adequado conjunto de termos no triângulo de Pascal. De cada conjunto de termos, resulta uma distinta formulação do elemento finito. Nas situações mais comuns, já existem formulações que permitem obter bons resultados, sendo uma delas os elementos pertencentes à família Lagrange.

Interpolação das coordenadas

Os elementos da família de Lagrange, tal como o nome indica, utilizam como funções interpoladoras, polinómios de Lagrange. Os elementos Q4 e Q9 considerados, são elementos bidimensionais quadriláteros com p^2 nós, sendo p o número de nós de um bordo. Estes elementos são relacionados em coordenada locais $[\xi, \eta]$ com as coordenadas globais $[x, y]$, através de uma combinação linear:

$$x = \sum_{i=1}^n N_i x_i ; y = \sum_{i=1}^n N_i y_i ; \quad (20)$$

onde, N_i são as funções de forma interpoladoras resultantes da multiplicação das funções de Lagrange associadas a uma dimensão, e n , o número total de nós do elemento a interpolar. Estas funções são obtidas segundo:

$$N_i(\xi, \eta) = l(\xi)l(\eta) \quad (21)$$

onde,

$$l(\xi) = \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{\xi - \xi_j}{\xi_i - \xi_j} ; l(\eta) = \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{\eta - \eta_j}{\eta_i - \eta_j} \quad (22)$$

A equação (16) ilustra a forma de obtenção da função linear de interpolação de Lagrange em cada direção $[\xi, \eta]$ do elemento. Obtêm-se assim, através das funções de forma em coordenadas locais $[\xi, \eta]$, relativas ao elemento Q4, as funções polinomiais na equação (18), [40].

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= l_1(\xi)l_1(\eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \\ N_2(\xi, \eta) &= l_2(\xi)l_1(\eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \\ N_3(\xi, \eta) &= l_2(\xi)l_2(\eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \\ N_4(\xi, \eta) &= l_1(\xi)l_2(\eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \end{aligned} \quad (23)$$

No caso do elemento Q9, as funções de forma são obtidas pela mesma metodologia, com a nuance de neste caso, a interpolação ser aplicada a 3 pontos $[-1, 0, 1]$, em cada direção $[\xi, \eta]$ do elemento, resultando a seguinte equação.

$$l(\xi) = \sum_{j=1, j \neq 1}^n \frac{(\xi - \xi_j)(\xi - \xi_{j+1})}{(\xi_i - \xi_j)(\xi_i - \xi_{j+1})} ; l(\eta) = \sum_{j=1, j \neq 1}^n \frac{(\eta - \eta_j)(\eta - \eta_{j+1})}{(\eta_i - \eta_j)(\eta_i - \eta_{j+1})} \quad (24)$$

Resultando desta interpolação, as seguintes funções de forma.

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= l_1(\xi)l_1(\eta) = \frac{1}{4}\xi\eta(1 - \xi)(1 - \eta) \\ N_2(\xi, \eta) &= l_3(\xi)l_1(\eta) = -\frac{1}{4}\xi\eta(1 + \xi)(1 - \eta) \\ N_3(\xi, \eta) &= l_3(\xi)l_3(\eta) = \frac{1}{4}\xi\eta(1 + \xi)(1 + \eta) \\ N_4(\xi, \eta) &= l_1(\xi)l_3(\eta) = -\frac{1}{4}\xi\eta(1 - \xi)(1 + \eta) \\ N_5(\xi, \eta) &= l_2(\xi)l_1(\eta) = -\frac{1}{2}(1 + \xi)(1 - \xi)\eta(1 - \eta) \\ N_6(\xi, \eta) &= l_3(\xi)l_2(\eta) = \frac{1}{2}\xi(1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \eta) \\ N_7(\xi, \eta) &= l_2(\xi)l_3(\eta) = \frac{1}{2}(1 + \xi)(1 - \xi)\eta(1 + \eta) \\ N_8(\xi, \eta) &= l_1(\xi)l_2(\eta) = -\frac{1}{2}\xi(1 - \xi)(1 + \eta)(1 - \eta) \\ N_9(\xi, \eta) &= l_2(\xi)l_2(\eta) = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2) \end{aligned} \quad (25)$$

Interpolação dos deslocamentos

Tendo em conta uma formulação isoparamétrica, da mesma forma que é obtida a interpolação das coordenadas, obtém-se a interpolação dos deslocamentos, generalizados.

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^n N_i u_i ; v = \sum_{i=1}^n N_i v_i ; \\ w &= \sum_{i=1}^n N_i w_i ; \phi_x = \sum_{i=1}^n N_i \phi_{xi} ; \phi_y = \sum_{i=1}^n N_i \phi_{yi} ; \end{aligned} \quad (26)$$

Para possibilitar o cálculo das matrizes B, bem como o posterior cálculo das matrizes K, M e do vetor de forças distribuídas, é necessário definir as derivadas $\frac{dN}{dx}$ e $\frac{dN}{dy}$.

Aplicando a regra da dedução em cadeia, obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dx} &= \frac{dN}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} + \frac{dN}{d\eta} \frac{d\eta}{dx} \\ \frac{dN}{dy} &= \frac{dN}{d\xi} \frac{d\xi}{dy} + \frac{dN}{d\eta} \frac{d\eta}{dy} \end{aligned} \quad (27)$$

Representando de uma forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \frac{dN}{d\eta} \\ \frac{dN}{d\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{dx}{d\xi} & \frac{dy}{d\xi} \\ \frac{dx}{d\eta} & \frac{dy}{d\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dN}{dx} \\ \frac{dN}{dy} \end{bmatrix} \quad (28)$$

Desta forma, define-se uma relação entre $\begin{bmatrix} \frac{dN}{dx} \\ \frac{dN}{dy} \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} \frac{dN}{d\xi} \\ \frac{dN}{d\eta} \end{bmatrix}$ através de uma matriz de transformação designada de matriz Jacobiana. Desta forma, define-se:

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dx} &= J^{-1} \frac{dN}{d\xi} \\ \frac{dN}{dy} &= J^{-1} \frac{dN}{d\eta} \end{aligned} \quad (29)$$

A equação (24), permite transformar as coordenadas locais em coordenadas globais através do operador Jacobiano que relaciona as coordenadas. É necessário referir que J^{-1} apenas existe caso exista uma relação injetiva entre as coordenadas locais e as globais do elemento. Nos elementos muito distorcidos, podem ocorrer singularidades nesta transformação do Jacobiano [40], inviabilizando a aplicação do método.

2.2.5.2 Formulação das matrizes

Matrizes que relacionam deformação com deslocamento

As designadas matrizes [B] são definidas em termos das componentes de membrana, flexão, acoplamento membrana-flexão e corte transversal, por cada camada k . O cálculo destas matrizes assenta em duas premissas [40]:

- A relação deformada-deslocamento é definida na forma $\epsilon = Bu^{(e)}$;
- As matrizes [B] dependem do tipo de elemento e do número de graus de liberdade por nó (GDL), tendo em conta o número de funções de forma;

Tendo em consideração o vetor dos GDL generalizados, a matriz [B] de membrana (sobrescrito m) é idêntica para todas as camadas, sendo definida por:

$$B_m = \begin{bmatrix} \frac{dN}{dx} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{dN}{dy} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{dN}{dy} & \frac{dN}{dx} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (30)$$

A matriz [B] de flexão (sobrescrito f) para a camada 1 é definida por:

$$B_f^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{dN}{dx} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{dN}{dy} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{dN}{dy} & \frac{dN}{dx} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (31)$$

Para a camada 2 é definida por:

$$B_f^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{dN}{dx} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{dN}{dy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{dN}{dy} & \frac{dN}{dx} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (32)$$

E para a camada 3 por:

$$B_f^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{dN}{dx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{dN}{dy} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{dN}{dy} & \frac{dN}{dx} \end{bmatrix} \quad (33)$$

As matrizes de acoplamento membrana-flexão (sobrescrito mf), para as três camadas, são definidas por:

$$B_{mf}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{h_1}{2} \frac{dN}{dx} & 0 & \frac{h_2}{2} \frac{dN}{dx} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{h_1}{2} \frac{dN}{dy} & 0 & \frac{h_2}{2} \frac{dN}{dy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{h_1}{2} \frac{dN}{dy} & \frac{h_1}{2} \frac{dN}{dx} & \frac{h_2}{2} \frac{dN}{dy} & \frac{h_2}{2} \frac{dN}{dx} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$B_{mf}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{h_1}{2} \frac{dN}{dx} & 0 & 0 & 0 & \frac{h_3}{2} \frac{dN}{dx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{h_1}{2} \frac{dN}{dy} & 0 & 0 & 0 & \frac{h_3}{2} \frac{dN}{dy} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{h_1}{2} \frac{dN}{dy} & -\frac{h_1}{2} \frac{dN}{dx} & 0 & 0 & \frac{h_3}{2} \frac{dN}{dy} & \frac{h_3}{2} \frac{dN}{dx} \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$B_{mf}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{h_2}{2} \frac{dN}{dx} & 0 & -\frac{h_3}{2} \frac{dN}{dx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{h_2}{2} \frac{dN}{dy} & 0 & -\frac{h_3}{2} \frac{dN}{dy} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{h_2}{2} \frac{dN}{dy} & -\frac{h_2}{2} \frac{dN}{dx} & -\frac{h_3}{2} \frac{dN}{dy} & -\frac{h_3}{2} \frac{dN}{dx} \end{bmatrix} \quad (36)$$

Finalmente, as matrizes [B] para o corte transversal (sobrescrito c) são definidas por:

$$B_c^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{dN}{dx} & N & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{dN}{dy} & 0 & N & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$B_c^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{dN}{dx} & 0 & 0 & N & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{dN}{dy} & 0 & 0 & 0 & N & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$B_c^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{dN}{dx} & N & 0 & 0 & 0 & N & 0 \\ 0 & 0 & \frac{dN}{dy} & 0 & N & 0 & 0 & 0 & N \end{bmatrix} \quad (39)$$

Habitualmente, quando é considerada uma abordagem ESL com a FSDT, é necessário o uso de factores de correção ao corte. A utilização destes factores, permite superar os valores constantes das tensões de corte transversais, através da espessura, e assim, aproximar a resposta do modelo, às distribuições das tensões de corte de acordo com a elasticidade 3D. Esta abordagem multicamada, tal como indicado anteriormente, considera o uso da FSDT em cada camada, permitindo assim, definir as rotações em cada camada de forma independente. Tendo em conta estas condições, e de acordo com outros autores, não é necessário o uso de factores de correção de corte [38, 39] tal como normalmente acontece em teorias de ordens superiores. Este aspeto será abordado nos exemplos de validação no capítulo 3.

Definição da matriz de rigidez

A matriz de rigidez de cada elemento, é obtida considerando as contribuições de membrana, flexão, membrana-flexão e corte. A matriz de rigidez global do elemento, é assim calculada segundo:

$$K^{(e)} = K_f^{(e)} + K_m^{(e)} + K_{mf}^{(e)} + K_c^{(e)} \quad (40)$$

onde, e é o e -ésimo elemento, $K_f^{(e)}$ é a matriz de rigidez dos componentes de flexão, $K_m^{(e)}$ a matriz de rigidez dos componentes de membrana, $K_{mf}^{(e)}$ a matriz de rigidez dos componentes de membrana-flexão, e a $K_c^{(e)}$ a matriz de rigidez dos componentes de corte. No caso dos elementos da família Lagrange, utilizados na presente implementação de elementos finitos, cada uma das submatrizes na equação (40), é dada por:

$$\begin{aligned} K_f^{(e)} &= \sum_{i=1}^n B_f^T \frac{h_k^3}{12} C_f B_f w_i \det(J) \\ K_m^{(e)} &= \sum_{i=1}^n B_m^T h_k C_f B_m w_i \det(J) \\ K_{mf}^{(e)} &= \sum_{i=1}^n B_{mf}^T C_f B_{mf} w_i \det(J) \\ K_c^{(e)} &= \sum_{i=1}^n B_c^T h C_c B_c w_i \det(J) \end{aligned} \quad (41)$$

onde h_k é a espessura da camada em estudo; C_f e C_c são respetivamente os componentes de flexão e de corte da matriz dos componentes de rigidez reduzidos; B_f , B_m , B_{mf} e B_c correspondem às matrizes que relacionam a deformação com o deslocamento respetivamente à deformação obtida por flexão, por efeito de membrana, membrana-flexão e por corte; w_i corresponde aos pesos da integração de Gauss, e $\det(J)$ corresponde ao determinante do Jacobiano. O efeito de bloqueio ao corte (“shear locking”) é tido em consideração, sendo este minimizado através da integração reduzida no cálculo das componentes de corte.

Definição da matriz de massa

A matriz de massas do elemento ($M^{(e)}$), depende da distribuição da massa específica ao longo da espessura, sendo obtida, conforme se indica:

$$M^{(e)} = \sum_{i=1}^n N^T \left(\int_{-\frac{h_k}{2}}^{\frac{h_k}{2}} \rho(z) dz \right) N w_i \det(J) \quad (42)$$

onde $\rho(z)$ corresponde à distribuição da massa específica ao longo da espessura, podendo, no entanto, ser constante.

2.3 Análise de falha nos laminados

O processo de falha de estruturas compósitas e as cargas máximas que estas podem suportar, antes da falha ocorrer, é um tema com enorme importância no projeto destas estruturas.

Actualmente, estes critérios ainda apresentam bastantes limitações, não conseguindo prever com exactidão, através da transferência das cargas entre as camadas, qual será o primeiro modo de falha a surgir. Exemplo disso, é o último exercício mundial [41], destinado a estabelecer qual o estado da arte dos critérios de falha para materiais compósitos reforçados com fibras. Reddy e os seus colaboradores [42, 43] utilizando o MEF, baseado numa formulação FSDT, calcularam as cargas, que levam à falha da primeira camada, com base em vários critérios de falha fenomenológico. Kam et al. [44-46], estudaram também as cargas, que de acordo com análises lineares e não lineares, levam à falha da primeira camada, probabilidade de falha na primeira camada, e o último carregamento antes da falha. Todos estes estudos, têm-se centrado na análise de falha da

primeira camada de laminados finos. Relativamente à falha em laminados moderadamente espessos, não existem muitas referências na literatura.

Antes de se proceder à aplicação de critérios de falha, é necessário primeiramente compreender como são solicitadas as camadas, os mecanismos de falha das estruturas em estudo, e a aplicabilidade das previsões de falha. Este cuidado, tem especial importância nos compósitos, devido à sua complexidade, estando a falha dependente de diferentes parâmetros, por exemplo, o comportamento elástico e plástico do compósito, bem como a existência de defeitos originados no fabrico das estruturas compósitas, ou durante o seu serviço.

Por falha, entende-se quando a estrutura cessa a sua aptidão, para cumprir algumas funções para as quais foi projetada. De uma forma geral, estas funções são: resistência, rigidez, tempo de vida útil, capacidade de absorver energia, peso reduzido, e custo [47].

2.3.1 Mecanismos de falha

Nos materiais compósitos, verifica-se a falha quando existem danos no reforço (rotura do reforço), danos na matriz (rotura da matriz), delaminação, entre outros, dependendo a gravidade que esta apresenta, do carregamento a que a estrutura está sujeita, das propriedades dos seus constituintes (reforço e matriz) e da interface entre os mesmos. A Fig. 15, ilustra os modos de falha de compósitos unidireccionais.

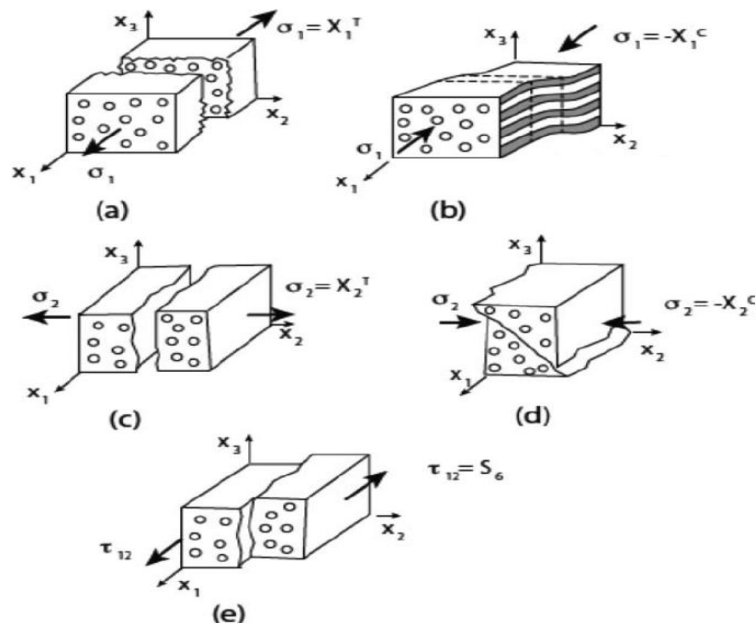


Fig. 15 – Modos de falha de compósitos unidireccionais sobre tensão plana, baseado em [48].

Na Fig. 15, os modos de falha (a) e (b), representam os modos de falha do reforço, enquanto os modos (c), (d) e (e), representam os modos de falha da matriz. Relativamente aos reforços, verifica-se que os modos de rotura estão relacionados com as tensões normais longitudinais de tração e de compressão. Por outro lado, relativamente às matrizes, verifica-se que os modos estão relacionados com a tensão normal de tração e de compressão, e a tensão de corte. Em adição, pode-se constatar que existem duas formas de fratura: fratura normal e fratura devido a efeito de corte, interlaminar.

2.3.2 Formulação dos critérios de falha a considerar

Os critérios de falha caracterizam os estados de tensão em que a falha ocorre. Estes critérios, são formalizados através de expressões matemáticas denominadas funções do critério de rotura (f). Estas funções, são definidas de forma a que, quando nenhuma carga é aplicada, a função toma o valor de 0. No caso de falha do material, a função toma o valor de 1, [49].

O aparecimento de falha pode ser previsto por meio do denominado índice de falha. Este índice, relaciona a tensão gerada pelo carregamento na estrutura e a tensão de rotura do material utilizado para fabricação da estrutura, sendo este dado por [50]:

$$I_F = \frac{\textit{tensão (gerada pelo carregamento)}}{\textit{tensão de rotura}} \quad (43)$$

Ocorrendo a falha, sempre que $I_F \geq 1$. O inverso do índice de falha é denominado de índice de resistência.

$$R = \frac{1}{I_F} = \frac{\textit{tensão de rotura}}{\textit{tensão (gerada pelo carregamento)}} \quad (44)$$

Onde a falha está prevista ocorrer, quando $R \leq 1$.

Os critérios de falha que preveem a falha da lâmina, podem ser divididos em dois grandes grupos: critérios não fenomenológicos e critérios fenomenológicos.

Critérios não fenomenológicos

Os critérios não fenomenológicos, são critérios que não se encontram associados a modos de falha. Isto inclui, todos os critérios polinomiais e tensoriais, que usando expressões matemáticas descrevem a superfície da falha em função da robustez do

material. Estas expressões, são normalmente obtidas através de testes experimentais, que permitem o ajustamento das expressões a curvas. Exemplos destes critérios, são os critérios de Tsai-Hill e Tsai-Wu.

Critérios fenomenológicos

Os critérios fenomenológicos, são critérios que se encontram associados a modos de falha. Estes critérios, têm em conta o facto dos materiais não serem homogéneos, o que pode levar a diferentes modos de falha e têm em consideração a robustez do material, e os diversos modos de falha dos constituintes.

A principal vantagem destes critérios, é a sua capacidade de prever a falha. Este aspecto, permite assim a sua utilização como parte da análise progressiva do dano. Os modos de falha que estes critérios permitem identificar, são: falha da fibra, falha da matriz transversal, e falha da matriz de corte.

Os critérios de falha associados aos modos de falha, podem ainda ser divididos em dois subgrupos: critérios não interativos e critérios interativos.

Critérios não interativos

Estes critérios, não têm em conta a interação existente entre as tensões e as deformações que atuam na lâmina. Esta consideração, pode levar a erros na previsão da robustez quando a estrutura se encontra sujeita a estados multiaxiais de tensão. Exemplos destes critérios, são os critérios de Deformação Máxima, e o de Tensão Máxima.

Critérios interativos

Estes critérios, têm em conta a interação existente entre as tensões e as deformações que atuam na lâmina. Exemplos destes critérios, são: Hashin-Rotem, Hashin, Tsai-Hill e Puck.

Critérios de falha adotados

Neste trabalho, os resultados obtidos com os modelos de elementos finitos implementados são ainda utilizados para o estudo da falha da primeira camada – não são utilizados para prever falhas sucessivas – de placas de materiais compósitos, laminados

esessos. Para isso, três critérios de falha são utilizados, Hashin, Tsai-Hill, e Tensão Máxima.

Hashin

A aplicação do critério de falha de Hashin [51], está relacionada com a falha da fibra e da matriz, as quais se traduzem em quatro modos de falha: falha da fibra em tração, falha da fibra em compressão, falha da matriz em tração, e falha da matriz em compressão. Estes modos de falha, no caso de uma análise 3D, são dados por:

Falha da fibra em tração: ($\sigma_1 \geq 0$):

$$\left(\frac{\sigma_1}{X_T}\right)^2 + \frac{\tau_{12}^2 + \tau_{13}^2}{T^2} = 1 \quad (45)$$

Falha da fibra em compressão: ($\sigma_1 < 0$):

$$|\sigma_1| = X_C \quad (46)$$

Falha da matriz em tração: ($(\sigma_2 + \sigma_3) > 0$):

$$\left(\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{Y_T}\right)^2 + \frac{\tau_{23}^2 - \sigma_2\sigma_3}{R^2} + \frac{\tau_{12}^2 + \tau_{13}^2}{T^2} = 1 \quad (47)$$

Falha da matriz em compressão: ($(\sigma_2 + \sigma_3) < 0$):

$$\left[\left(\frac{Y_C}{2R}\right)^2 - 1\right] \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{Y_C} + \left(\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2R}\right)^2 + \frac{\tau_{23}^2 - \sigma_2\sigma_3}{R^2} + \frac{\tau_{12}^2 + \tau_{13}^2}{T^2} = 1 \quad (48)$$

Onde X_T , é a resistência à tração da lâmina, na direção da fibra, X_C , é a resistência à compressão da lâmina, na direção da fibra, Y_T , é a resistência à tração da lâmina, transversal à direção da lâmina, Y_C , é a resistência à compressão da lâmina, transversal à direção da lâmina, T , é a resistência ao corte no plano da lâmina (plano 12), e R , é a resistência ao corte transversal no plano 23.

Tsai-Hill

O critério de falha Tsai-Hill é um critério quadrático, iterativo, baseado nas tensões que identificam a falha, mas não é realizada uma distinção entre os diferentes modos de falha, devendo-se tal a não existir distinção entre as tensões que provocam tração ou compressão da placa. Logo, este critério apresenta apenas a seguinte formulação:

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\sigma_1}{X}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{Y}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_3}{Z}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{T}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{13}}{S}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{23}}{R}\right)^2 \\
& - \sigma_1\sigma_2\left(\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Z^2}\right) - \sigma_1\sigma_3\left(\frac{1}{X^2} - \frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2}\right) \\
& - \sigma_2\sigma_3\left(-\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2}\right) = 1
\end{aligned} \tag{49}$$

Neste caso, se $\sigma_1 > 0$, então $X = X_T$, caso esta condição não se verifique, teremos $X = X_C$; se $\sigma_2 > 0$, então $Y = Y_T$, caso esta condição não se verifique, teremos $Y = Y_C$; se $\sigma_3 > 0$, então $Z = Z_T$, caso esta condição não se verifique, teremos $Z = Z_C$. Onde Z_T , é a resistência à tração da lâmina, na direção transversal, Z_C , é a resistência à compressão da lâmina, na direção transversal, e S , é a resistência ao corte transversal no plano 13.

Tensão Máxima

Neste critério, é considerado que ocorre falha, quando as tensões excedem um valor máximo admissível. Segundo este critério, é possível verificar três modos de falha, ocorrendo cada um deles quando:

Falha da fibra ocorre quando $\sigma_1 \geq X_T$, ou $|\sigma_1| \geq X_C$.

Falha da matriz ocorre quando $\sigma_2 \geq Y_T$, ou $|\sigma_2| \geq Y_C$.

Falha devido ao corte ocorre quando $|\sigma_{12}| \geq T$, ou $|\sigma_{23}| \geq R$, ou $|\sigma_{13}| \geq S$.

Todas as formulações dos critérios de falha aqui apresentados, dizem respeito a estudos tridimensionais. Em cada caso de estudo presente neste trabalho, as estruturas foram analisadas, como um problema tridimensional.

Capítulo 3

Descrição e apresentação de resultados

No presente capítulo, a descrição dos casos estudados é apresentada de forma sistematizada, sendo igualmente apresentados os resultados obtidos. Pretende-se explicar tudo o que foi feito nos mesmos, a metodologia, justificando escolhas e opções. Deste modo, será possível compreender as assunções associadas a cálculos, o tipo de programação utilizado para desenvolver alguns algoritmos de cálculo numérico e simbólico, com o objectivo de se compreender como foram obtidos os resultados que são apresentados no presente capítulo.

O presente modelo multicamada adotado neste trabalho, é uma generalização do modelo apresentado em [52]. Foram implementados dois elementos, nomeadamente o elemento bi-linear (Q4) e o elemento bi-quadrático (Q9), possuindo cada nó (considerando três camadas), nove ou sete GDL, se se considerar ou não, respetivamente, os GDL da membrana de acordo com a equação (11).

Na figura seguinte, apresenta-se uma representação esquemática do algoritmo adotado na implementação do código, com o intuito de atingir os objetivos apresentados.

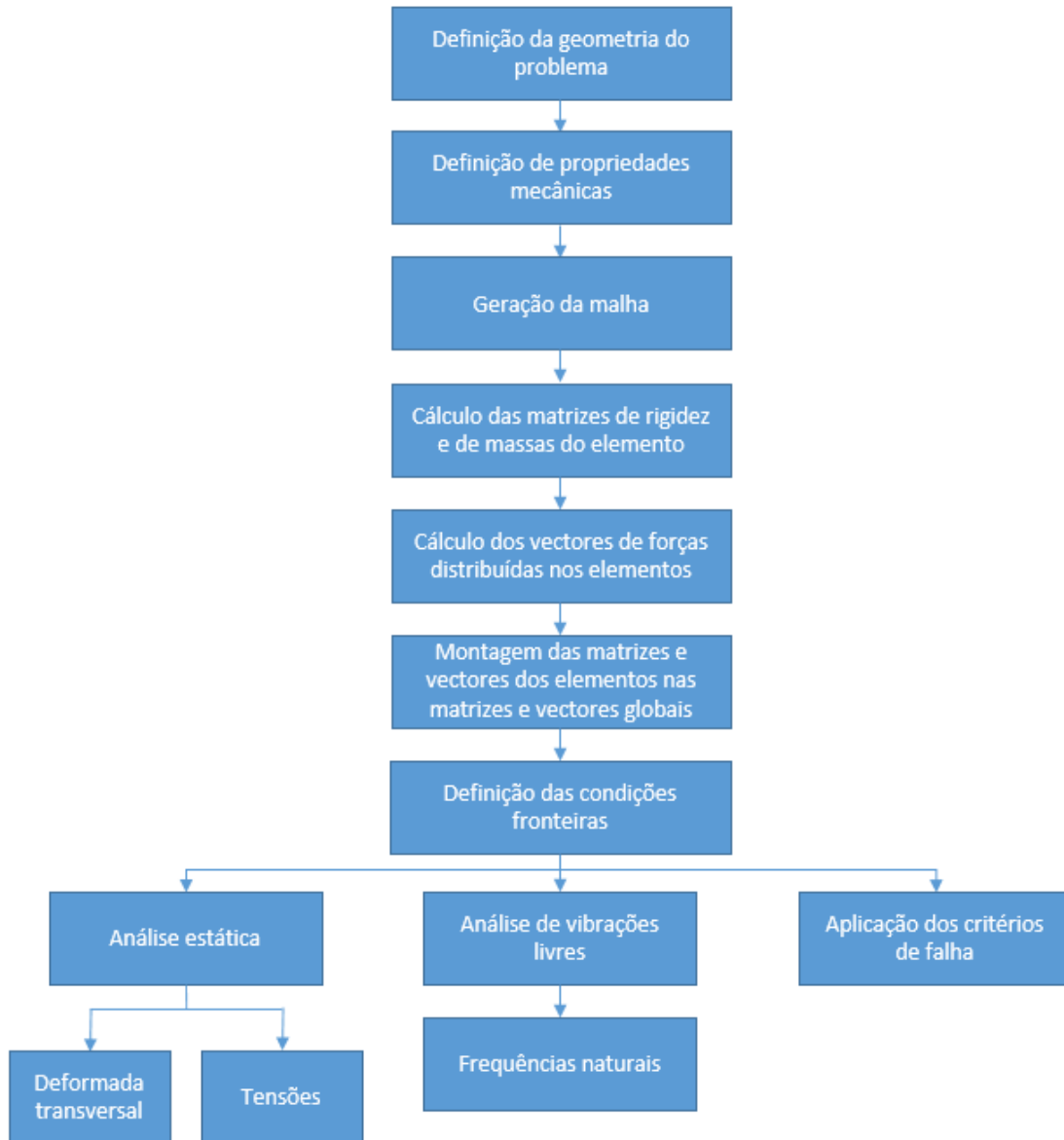


Fig. 16 – Representação esquemática dos procedimentos implementados.

Este algoritmo, foi implementado em duas plataformas de computação simbólica e numérica, nomeadamente o *Maple*[®] e o *MatLab*[®].

3.1 Testes de convergência

Antes de se proceder à apresentação dos casos de estudo, é necessário justificar o uso recorrente da malha 12X12. As Fig. 17 e Fig. 18, apresentam uma malha para uma discretização 12X12, usando respetivamente elementos Q4 e Q9. Pretende-se com a apresentação destas figuras, realizar uma representação gráfica da diferença de custo computacional que existe, para a mesma discretização.

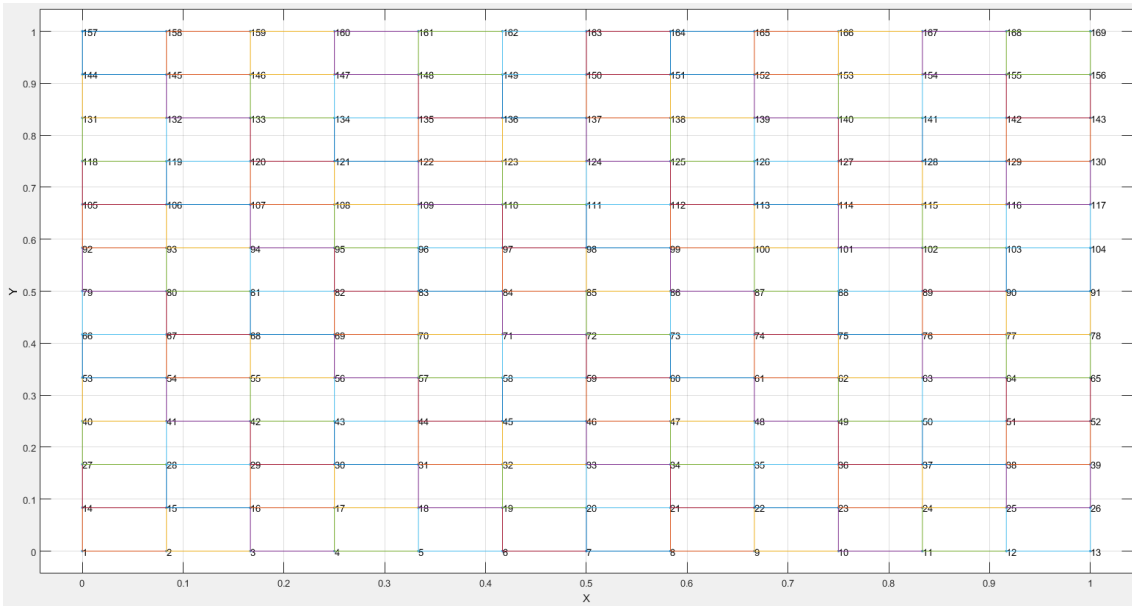


Fig. 17 – Representação da malha 12X12 para elemento Lagrange bi-linear Q4.

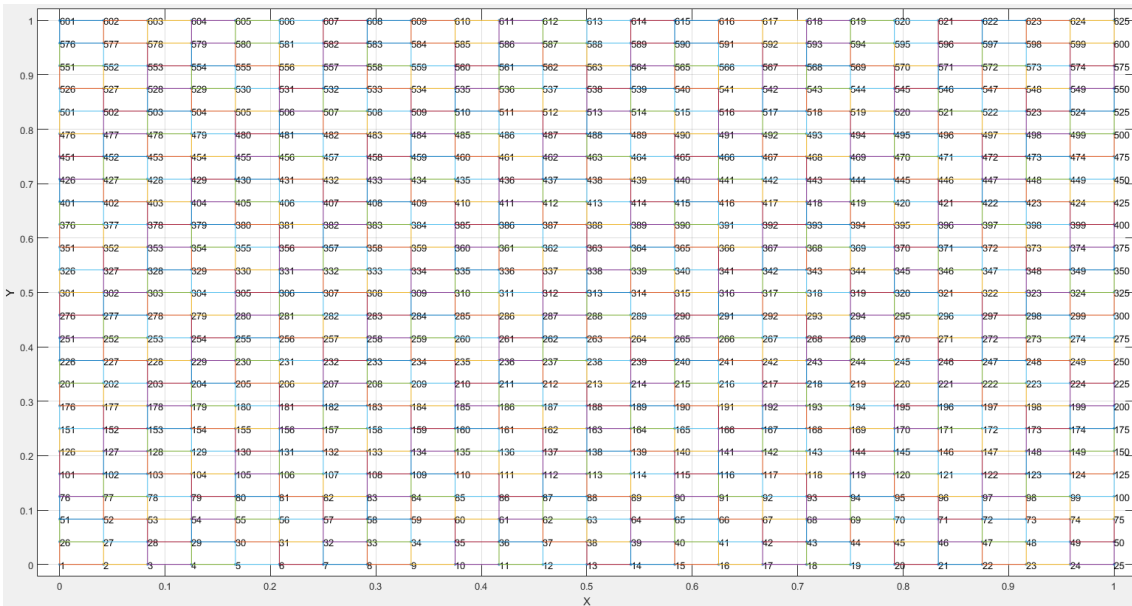


Fig. 18 – Representação da malha 12X12 para elemento Lagrange bi-quadrático Q9.

Na Tabela 1, são apresentados, o número total de nós, e o número total de GDL, considerando quatro malhas, elementos Q4 e Q9, e sete e nove GDL. Analisando esta tabela, constata-se que para um elemento Q9, uma malha 10X10, apresenta exatamente o mesmo número total de nós, e o mesmo número total de GDL, que um elemento Q4, com uma malha 20X20. Apesar desta igualdade, não é possível afirmar que se obteria a mesma precisão de resultados com um elemento Q4, comparativamente a um Q9.

Tabela 1 – N° de nós e GDL, para as malhas e elementos usados.

Malha	Tipo de elemento	Nós por elemento	GDL por nó	N° nós total	N° GDL total
4X4	Q4	4	7	25	175
			9		225
	Q9	9	7	81	567
			9		729
10X10	Q4	4	7	121	847
			9		1 089
	Q9	9	7	441	3 087
			9		3 969
12X12	Q4	4	7	169	1 183
			9		1 521
	Q9	9	7	625	4 375
			9		5 625
20X20	Q4	4	7	441	3 087
			9		3 969
	Q9	9	7	1 681	11 767
			9		15 129

Representando graficamente, os custos em termos de tempo computacional para um determinado exemplo, analisado para a estática e para as vibrações livres, obtém-se os seguintes gráficos.

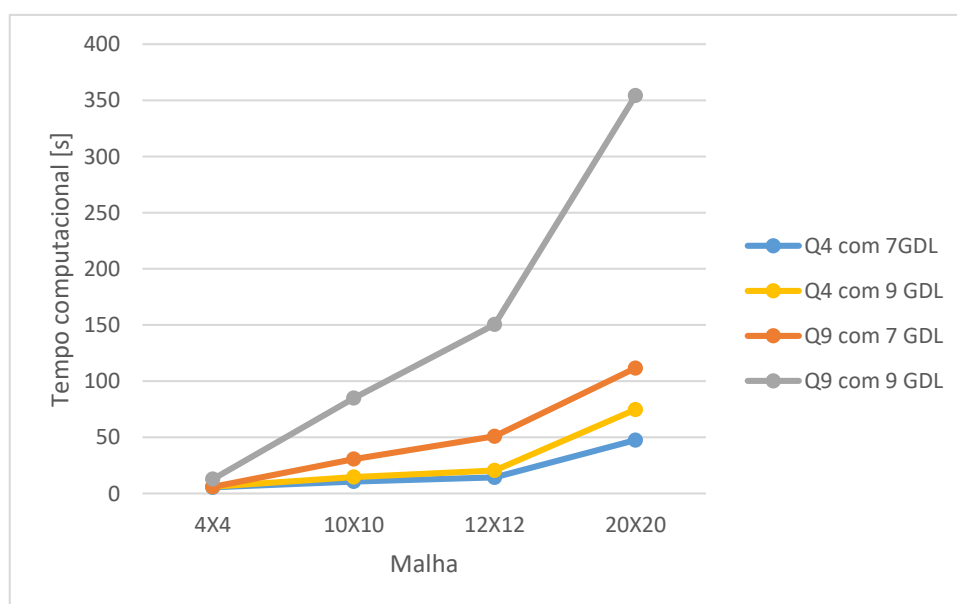


Fig. 19 – Tempos computacionais em função da malha para análise estática.

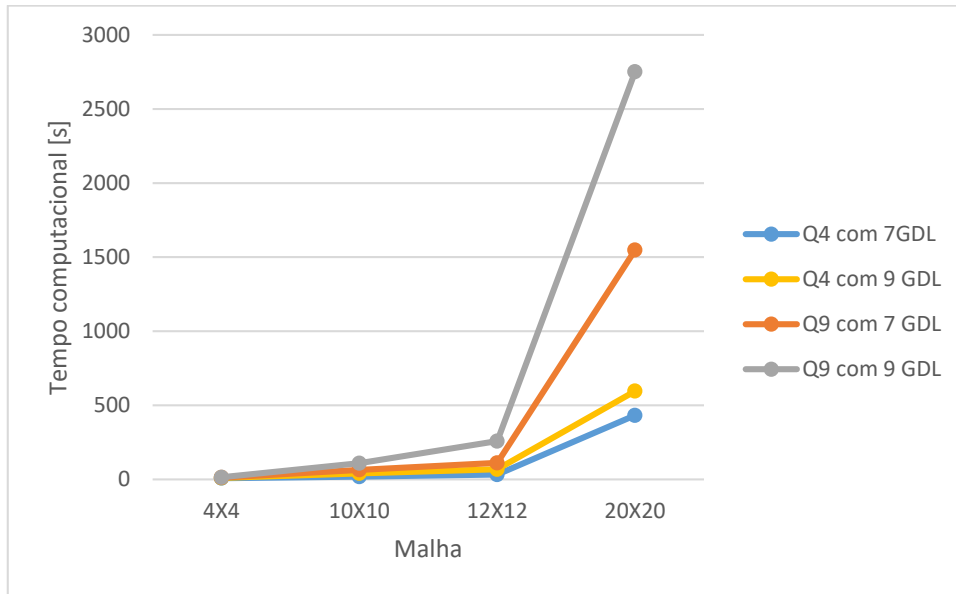


Fig. 20 – Tempos computacionais em função da malha para análise de vibrações livres.

Um elemento que permite uma maior discretização de um domínio, permite obter resultados mais precisos. Logo, o uso de um elemento Q9, apresenta maior precisão que um elemento Q4. Assim, apesar do maior custo computacional que um elemento Q9 apresenta, evidenciado na Fig. 19, e na Fig. 20, com uma malha 12X12, já é possível obter uma boa convergência de resultados (com um custo computacional médio). Esta convergência é verificada na Fig. 21 e na Fig. 22, bem como ao longo dos exemplos de validação. Por esta razão, todos os resultados apresentados nos casos de estudos, a não ser que seja indicado o contrário, são apresentados para uma malha 12X12, com elementos Q9.

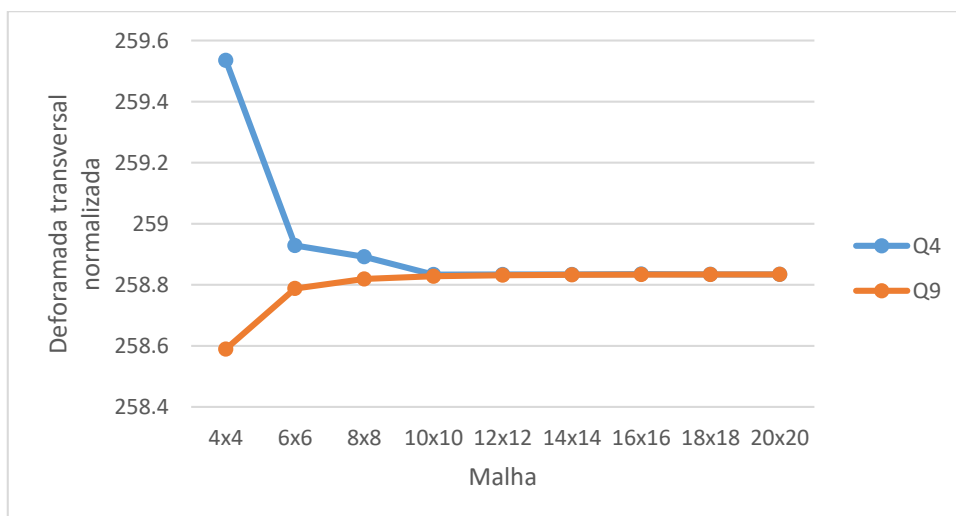


Fig. 21 – Convergência de resultados do caso de estudo 3.1.1, para $R_f=5$, SSSS, pressão uniforme e $l/h=10$. Deformada transversal normalizada.

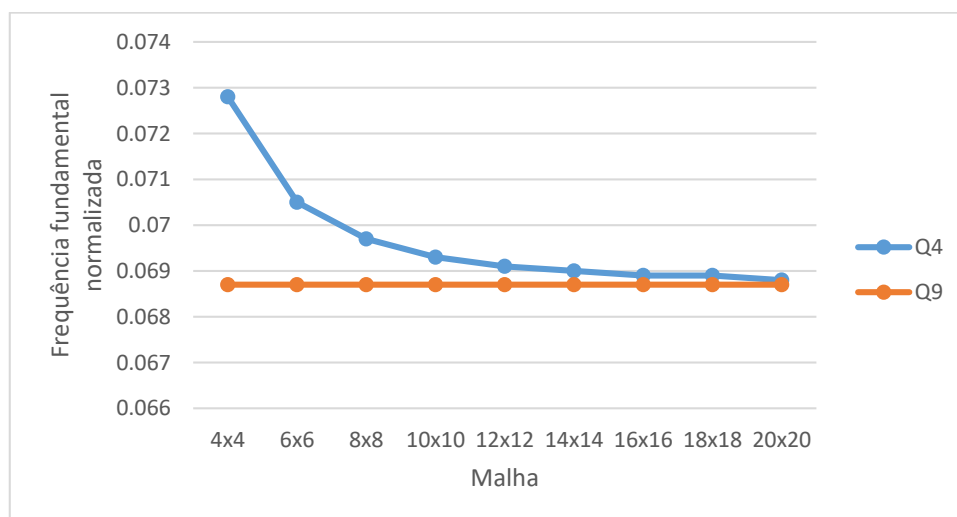


Fig. 22 - Convergência de resultados do caso de estudo 3.1.3. Frequência fundamental normalizada.

3.2 Estudos de validação das implementações

Antes de se desenvolverem estudos usando a formulação implementada, é necessária a validação da mesma. Para tal, são implementados exemplos, presentes em diversas referências bibliográficas, onde os resultados obtidos são comparados com a solução exata do problema, bem como com várias outras teorias.

Os códigos implementados, permitem a solução de diversos tipos de problemas de análise estática e vibrações livres. Relativamente à análise estática, as placas podem ser estudadas quando estas se encontram sujeitas a uma carga transversal uniformemente distribuída, ou a um carregamento sinusoidal. No caso das vibrações livres, o estudo das placas é realizado ao nível das frequências naturais e respectivos modos de vibração.

Adicionalmente, é ainda possível a aplicação de critérios de falhas, nomeadamente os critérios de Tensão Máxima, Tsai-Hill e Hashin. Todos os tipos de estudos, são validados no subcapítulo seguinte.

Alguns dos casos de estudo considerados neste trabalho, foram publicados em [1].

3.2.1 Placa *sandwich* sujeita a carga transversal uniformemente distribuída

O caso de estudo utilizado na validação dos modelos implementados, relativo à análise estática, - uma placa sujeita a carregamento transversal uniformemente distribuído – diz respeito a uma estrutura *sandwich* quadrada, simplesmente apoiada em todos os bordos, com três camadas (camadas exteriores com uma relação de $\frac{h}{10}$ e o núcleo com uma relação de $\frac{8h}{10}$, sendo h a espessura do laminado), e uma relação $\frac{l}{h} = 10$, onde l é a largura da placa.

O núcleo do laminado em estudo, possui os seguintes coeficiente de rigidez elástica [53]:

$$\bar{Q}_{núcleo} = \begin{bmatrix} 0.999781 & 0.231192 & 0 & 0 & 0 \\ 0.231192 & 0.524886 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.62931 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.266810 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.159914 \end{bmatrix} \quad (50)$$

As propriedades das peles são obtidas a partir das propriedades do núcleo, multiplicando-as por uma relação R_f :

$$\bar{Q}_{pele} = R_f \bar{Q}_{núcleo} \quad (51)$$

Neste caso, os resultados foram normalizados da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \bar{w} &= w \left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}, 0 \right) \frac{0.999781}{hq}, \\ \bar{\sigma}_x^1 &= \frac{\sigma_x^{(1)} \left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2} \right)}{q}, & \bar{\sigma}_x^2 &= \frac{\sigma_x^{(1)} \left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}, \frac{h_{núcleo}}{2} \right)}{q}, & \bar{\sigma}_x^3 &= \frac{\sigma_x^{(2)} \left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}, \frac{h_{núcleo}}{2} \right)}{q}, \\ \bar{\sigma}_y^1 &= \frac{\sigma_y^{(1)} \left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2} \right)}{q}, & \bar{\sigma}_y^2 &= \frac{\sigma_y^{(1)} \left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}, \frac{h_{núcleo}}{2} \right)}{q}, & \bar{\sigma}_y^3 &= \frac{\sigma_y^{(2)} \left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}, \frac{h_{núcleo}}{2} \right)}{q}, \\ \bar{\tau}_{xz}^1 &= \frac{\tau_{xz}^{(2)} \left(0, \frac{l}{2}, 0 \right)}{q}, & \bar{\tau}_{xz}^2 &= \frac{\tau_{xz}^{(2)} \left(0, \frac{l}{2}, \frac{h_{núcleo}}{2} \right)}{q} \end{aligned} \quad (52)$$

A apresentação dos valores obtidos normalizados, da deformada transversal e das tensões para diferentes relações R_f (5, 10 e 20), usando os dois elementos, Q4 e Q9, é efectuada nas Tabelas 2-4.

Tabela 2 - Validação dos resultados obtidos com Q4 e Q9 para $R_f=5$, SSSS, pressão uniforme e $l/h=10$. Todos os valores apresentados foram normalizados.

Método	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x^1$	$\bar{\sigma}_x^2$	$\bar{\sigma}_x^3$	$\bar{\sigma}_y^1$	$\bar{\sigma}_y^2$	$\bar{\sigma}_y^3$	$\bar{\tau}_{xz}^1$	$\bar{\tau}_{xz}^2$
HSDT [15]	256.13	62.38	46.91	9.382	38.93	30.33	6.065	3.089	2.566
FSDT [15]	236.1	61.87	49.5	9.899	36.65	29.32	5.864	3.313	2.444
CLT	216.94	61.141	48.623	9.783	36.622	29.297	5.86	4.5899	3.386
Exato [53]	258.97	60.353	46.623	9.34	38.491	30.097	6.161	4.3641	3.2675
<i>Layerwise [54]</i>	258.1795	60.0626	46.3926	9.2785	38.3644	30.0294	6.0059	4.0950	2.0418
Ferreira [30]	257.5231	59.9675	46.2906	9.2581	38.3209	29.974	5.9948	4.0463	2.3901
Ferreira [52]	258.834	60.088	46.372	9.274	-	-	-	3.880	1.731
Q4, (4X4)	259.5352	55.923	42.7778	8.5556	36.8245	28.6415	5.7283	2.9135	1.2510
Q9, (4X4)	258.5895	60.3915	46.942	9.3884	38.6598	30.4271	6.0854	4.0522	1.8705
Q4, (10X10)	258.8336	59.5704	45.9692	9.1938	38.2179	29.8914	5.9783	3.6289	1.5831
Q9, (10X10)	258.8281	60.2736	46.556	9.3112	38.4985	30.127	6.0254	4.0669	1.9366
Q4, (12X12)	258.8338	59.8026	46.1183	9.2237	38.3128	29.9483	5.9897	3.7122	1.6286
Q9, (12X12)	258.8314	60.2689	46.5404	9.3081	38.4972	30.1202	6.024	4.0719	1.952
Q4, (20X20)	258.8342	60.0881	46.3718	9.2744	38.4267	30.0523	6.0105	3.8804	1.7314
Q9, (20X20)	258.8342	60.2607	46.5197	9.3039	38.4959	30.1124	6.0225	4.0841	1.9826

Tabela 3 - Validação dos resultados obtidos com Q4 e Q9 para $R_f=10$, SSSS, pressão uniforme e $l/h=10$. Todos os valores apresentados foram normalizados.

Método	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x^1$	$\bar{\sigma}_x^2$	$\bar{\sigma}_x^3$	$\bar{\sigma}_y^1$	$\bar{\sigma}_y^2$	$\bar{\sigma}_y^3$	$\bar{\tau}_{xz}^1$	$\bar{\tau}_{xz}^2$
HSDT [15]	152.33	64.65	51.31	5.131	42.83	33.97	3.397	3.147	2.587
FSDT [15]	131.095	67.8	54.24	4.424	40.1	32.08	3.208	3.152	2.676
CLT	118.87	65.332	48.857	5.356	40.099	32.079	3.208	4.3666	3.7075
Exato [53]	159.38	65.332	48.857	4.903	43.566	33.413	3.5	4.0959	3.5154
<i>Layerwise [54]</i>	158.9117	64.9927	48.6009	4.8601	43.4907	33.4089	3.3409	3.9803	2.3325
Ferreira [30]	158.3799	64.8462	48.4434	4.8443	43.3989	33.3062	3.3306	3.9237	2.8809
Ferreira [52]	159.476	65.047	48.576	4.858	-	-	-	3.792	1.928
Q4, (4X4)	162.0181	60.543	44.4486	4.4449	41.9587	31.8772	3.1877	2.8323	1.3629
Q9, (4X4)	159.3758	65.4971	49.2619	4.9262	43.932	33.9226	3.3923	3.8726	2.007
Q4, (10X10)	159.6822	64.4631	48.1314	4.8131	43.3636	33.2797	3.328	3.5483	1.747
Q9, (10X10)	159.4047	65.2546	48.782	4.8782	43.6564	33.5212	3.3521	3.9533	2.1755
Q4, (12X12)	159.6097	64.7366	48.2823	4.8282	43.4708	33.3274	3.3327	3.6295	1.8016
Q9, (12X12)	159.4053	65.2476	48.7654	4.8765	43.6535	33.5134	3.3513	3.9621	2.2073
Q4, (20X20)	159.4757	65.0473	48.5758	4.8576	43.5805	33.4408	3.3441	3.7918	1.9279
Q9, (20X20)	159.4058	65.2373	48.7433	4.8743	43.6505	33.5042	3.3504	3.9779	2.2689

Tabela 4 - Validação dos resultados obtidos com Q4 e Q9 para $R_f=15$, SSSS, pressão uniforme e $l/h=10$. Todos os valores apresentados foram normalizados.

Método	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x^1$	$\bar{\sigma}_x^2$	$\bar{\sigma}_x^3$	$\bar{\sigma}_y^1$	$\bar{\sigma}_y^2$	$\bar{\sigma}_y^3$	$\bar{\tau}_{xz}^1$	$\bar{\tau}_{xz}^2$
HSDT [15]	110.43	66.62	51.97	3.465	44.92	35.41	2.361	3.035	2.691
FSDT [15]	90.85	70.04	56.03	3.753	41.39	33.11	2.208	3.091	2.764
CLT	81.768	69.135	55.308	3.687	41.41	33.128	2.209	4.2825	3.8287
Exato [53]	121.72	66.787	48.299	3.238	46.424	34.955	2.494	3.9638	3.5768
<i>Layerwise [54]</i>	121.3474	66.4362	48.0104	3.2007	46.3849	34.9650	2.3310	3.9024	2.4811
Ferreira [30]	120.9883	66.2911	47.8992	3.1933	46.2924	34.8898	2.326	3.8311	3.2562
Ferreira [52]	121.871	66.490	48.000	3.200	-	-	-	3.730	2.019
Q4, (4X4)	125.0593	61.9463	43.5915	2.9061	44.8984	33.3497	2.2233	2.7739	1.4016
Q9, (4X4)	121.8099	67.0141	48.6933	3.2462	46.8978	35.5358	2.3691	3.7749	2.0626
Q4, (10X10)	122.1499	65.8759	47.5395	3.1693	46.2623	34.8631	2.3242	3.4912	1.8158
Q9, (10X10)	121.7767	66.7069	48.2131	3.2142	46.5567	35.1012	2.3401	3.8804	2.3078
Q4, (12X12)	122.0484	66.1709	47.6863	3.1791	46.3774	34.9007	2.3267	3.5712	1.8766
Q9, (12X12)	121.7766	66.6983	48.1976	3.2132	46.5525	35.0931	2.3395	3.8899	2.3516
Q4, (20X20)	121.8709	66.4903	48.0001	3.2	46.4797	35.0191	2.3346	3.7297	2.0192
Q9, (20X20)	121.7765	66.6866	48.1768	3.2118	46.5478	35.0835	2.3389	3.9054	2.433

O método exato [53] presente nas Tabelas 2-4, diz respeito à redução de um problema tridimensional, num problema bidimensional, assumindo uma variação linear *piecewise* dos deslocamentos u e v , um valor constante do deslocamento transversal w ao longo da espessura e usando uma abordagem variacional de forma a derivar as equações diferenciais que regem as condições fronteira.

Através da análise dos resultados obtidos nas Tabelas 2-4, conclui-se que a formulação implementada usando elementos Q4 e Q9 – ambos com nove GDL – apresenta, de uma forma geral, uma convergência de resultados para valores muito próximos aos valores da solução exata [53]. Contudo, os resultados das tensões de corte transversais, apresentam algum desvio, sendo então necessário verificar se a não consideração do fator de correção ao corte está na origem deste desvio. Procedeu-se ao cálculo do exemplo, mas desta vez incluindo o fator de correção na formulação, com $K=5/6$. Adicionalmente, são apresentados os resultados apresentados pela formulação que serviu de base [52], à formulação apresentada neste trabalho. Os resultados apresentados nas Tabela 5-7, são apenas referentes a uma malha 20X20. Os resultados obtidos com as restantes malhas encontram-se presentes no apêndice A1.1.

Tabela 5 – Comparação dos resultados obtidos com diferentes considerações no caso de $R_f=5$.

Método	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x^1$	$\bar{\sigma}_x^2$	$\bar{\sigma}_x^3$	$\bar{\sigma}_y^1$	$\bar{\sigma}_y^2$	$\bar{\sigma}_y^3$	$\bar{\tau}_{xz}^1$	$\bar{\tau}_{xz}^2$
Exato [53]	258.97	60.353	46.623	9.34	38.491	30.097	6.161	4.3641	3.2675
K=5/6, Q4	267.1507	59.9246	45.9070	9.1814	38.7909	30.2055	6.0411	3.8675	1.7430
K=5/6, Q9	267.1177	60.0977	46.0558	9.2112	38.8587	30.2646	6.0529	4.0667	1.9980
Ferreira [52]	258.834	60.088	46.372	9.274	-	-	-	3.88	1.731
Presente Q4	258.8342	60.0881	46.3718	9.2744	38.4267	30.0523	6.0105	3.8804	1.7314
Presente Q9	258.8342	60.2607	46.5197	9.3039	38.4959	30.1124	6.0225	4.0841	1.9826

Tabela 6 – Comparação dos resultados obtidos com diferentes considerações no caso de $R_f=10$.

Método	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x^1$	$\bar{\sigma}_x^2$	$\bar{\sigma}_x^3$	$\bar{\sigma}_y^1$	$\bar{\sigma}_y^2$	$\bar{\sigma}_y^3$	$\bar{\tau}_{xz}^1$	$\bar{\tau}_{xz}^2$
Exato [53]	159.38	65.332	48.857	4.903	43.566	33.413	3.5	4.0959	3.5154
K=5/6, Q4	167.4872	64.7566	47.6721	4.7672	44.2484	33.6886	3.3689	3.7697	1.9447
K=5/6, Q9	167.3863	64.9468	47.8409	4.7841	44.3164	33.7511	3.3751	3.9513	2.2977
Ferreira [52]	159.476	65.047	48.576	4.858	-	-	-	3.792	1.928
Presente Q4	159.4757	65.0473	48.5758	4.8576	43.5805	33.4408	3.3441	3.7918	1.9279
Presente Q9	159.4058	65.2373	48.7433	4.8743	43.6505	33.5042	3.3504	3.9779	2.2689

Tabela 7 – Comparação dos resultados obtidos com diferentes considerações no caso de $R_f=15$.

Método	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x^1$	$\bar{\sigma}_x^2$	$\bar{\sigma}_x^3$	$\bar{\sigma}_y^1$	$\bar{\sigma}_y^2$	$\bar{\sigma}_y^3$	$\bar{\tau}_{xz}^1$	$\bar{\tau}_{xz}^2$
Exato [53]	121.72	66.787	48.299	3.238	46.424	34.955	2.494	3.9638	3.5768
K=5/6, Q4	129.7105	66.1127	46.7050	3.1137	47.4140	35.3295	2.3553	3.6995	2.0400
K=5/6, Q9	129.5865	66.3085	46.8830	3.1255	47.4803	35.3936	2.3596	3.8704	2.4703
Ferreira [52]	121.871	66.49	48	3.2	-	-	-	3.73	2.019
Presente Q4	121.8709	66.4903	48.0001	3.2	46.4797	35.0191	2.3346	3.7297	2.0192
Presente Q9	121.7765	66.6866	48.1768	3.2118	46.5478	35.0835	2.3389	3.9054	2.433

De forma a facilitar a análise dos resultados obtidos nas Tabela 5-7, foram calculados os erros relativos – tendo como referência a solução exata [53], e a solução de Ferreira [52] - sendo estes apresentados graficamente nas Fig. 23-25. Adicionalmente, a consulta dos valores dos erros relativos em questão, poderá ser realizada através da Tabela 8.

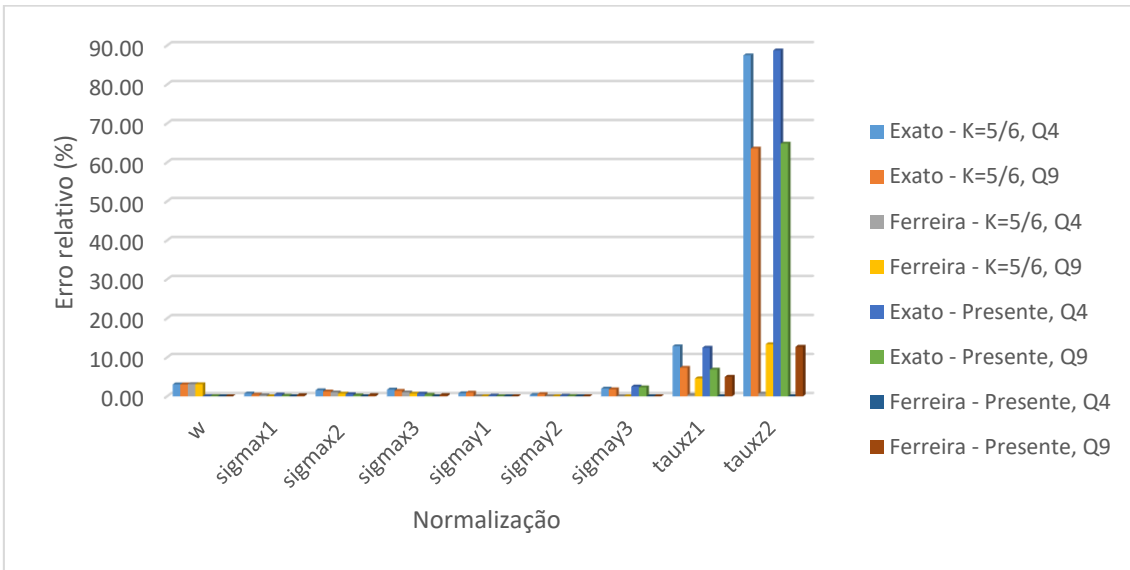


Fig. 23 – Erro relativo entre as principais referências bibliográficas e os resultados obtidos, $R=5$.

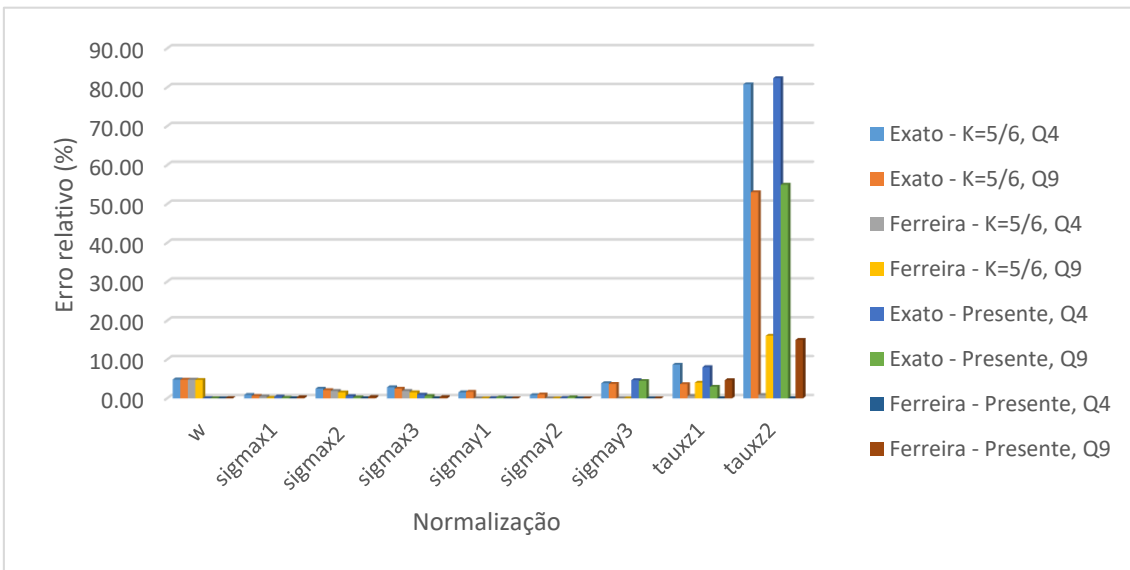


Fig. 24 – Erro relativo entre as principais referências bibliográficas e os resultados obtidos, $R=10$.

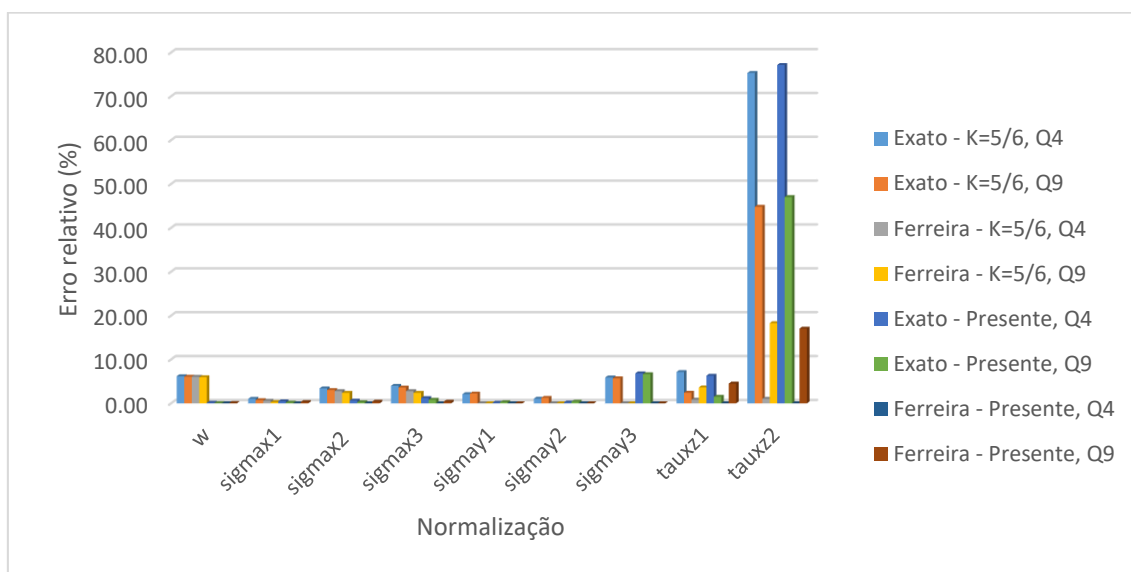


Fig. 25 – Erro relativo entre as principais referências bibliográficas e os resultados obtidos, $R_f=15$.

Tabela 8 - Erro relativo (%) entre diversas soluções e os resultados obtidos

Validação	R_f	Elemento	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x^1$	$\bar{\sigma}_x^2$	$\bar{\sigma}_x^3$	$\bar{\sigma}_y^1$	$\bar{\sigma}_y^2$	$\bar{\sigma}_y^3$	$\bar{\tau}_{xz}^1$	$\bar{\tau}_{xz}^2$
Exato [55] – K=5/6	5	Q4	3.06	0.71	1.56	1.73	0.77	0.36	1.98	12.84	87.46
		Q9	3.05	0.42	1.23	1.40	0.95	0.55	1.79	7.31	63.54
	10	Q4	4.84	0.89	2.49	2.85	1.54	0.82	3.89	8.65	80.77
		Q9	4.78	0.59	2.12	2.49	1.69	1.00	3.70	3.66	53.00
	15	Q4	6.16	1.02	3.41	3.99	2.09	1.06	5.89	7.14	75.33
		Q9	6.07	0.72	3.02	3.60	2.22	1.24	5.70	2.41	44.79
Ferreira [52] - K=5/6	5	Q4	3.11	0.27	1.01	1.01	-	-	-	0.32	0.69
		Q9	3.10	0.02	0.69	0.68	-	-	-	4.59	13.36
	10	Q4	4.78	0.45	1.90	1.90	-	-	-	0.59	0.86
		Q9	4.73	0.15	1.54	1.54	-	-	-	4.03	16.09
	15	Q4	6.04	0.57	2.77	2.77	-	-	-	0.82	1.03
		Q9	5.95	0.27	2.38	2.38	-	-	-	3.63	18.27
Exato [55] – K=1	5	Q4	0.05	0.44	0.54	0.71	0.17	0.15	2.50	12.47	88.72
		Q9	0.05	0.15	0.22	0.39	0.01	0.05	2.30	6.86	64.81
	10	Q4	0.06	0.44	0.58	0.93	0.03	0.08	4.66	8.02	82.34
		Q9	0.02	0.15	0.23	0.59	0.19	0.27	4.47	2.97	54.94
	15	Q4	0.12	0.45	0.62	1.19	0.12	0.18	6.83	6.28	77.14
		Q9	0.05	0.15	0.25	0.82	0.27	0.37	6.63	1.50	47.01
Ferreira [52] – K=1	5	Q4	0.00	0.00	0.00	0.00	-	-	-	0.01	0.02
		Q9	0.00	0.29	0.32	0.32	-	-	-	5.00	12.69
	10	Q4	0.00	0.00	0.00	0.01	-	-	-	0.01	0.01
		Q9	0.04	0.29	0.34	0.33	-	-	-	4.67	15.02
	15	Q4	0.00	0.00	0.00	0.00	-	-	-	0.01	0.01
		Q9	0.08	0.29	0.37	0.37	-	-	-	4.49	17.02

Após análise dos erros relativos obtidos, constata-se que a inclusão do fator de correção ao corte $K=5/6$, melhora ligeiramente os resultados das tensões de corte transversais, quando é considerada a solução exata como referência, mas, por outro lado, os desvios existentes nas restantes tensões aumentam, sendo este aumento mais evidente na deformada transversal. No caso de se considerar como solução de referência a formulação de Ferreira, o uso do fator de correção ao corte, prejudica os resultados obtidos. Relativamente ao elemento que permite obter maior precisão nos resultados, não existe consenso. Se se considerar a solução exata como referência, o melhor elemento é o Q9. No caso de se considerar como solução exata a formulação do Ferreira, o melhor elemento é o Q4.

Considerando a solução exata [53], como a solução de referência, são verificadas as convergências evidenciadas nas Fig. 26-28. Nestas figuras, é verificada a maior aproximação ao resultado exato, quando se usa um elemento Q9, sendo esta mais evidente na Fig. 29, onde se verificam menores desvios com este elemento em relações R_f superiores (aproximação a estruturas *sandwich*), comparativamente à utilização de um elemento Q4. Para relações R_f inferiores, verifica-se uma aproximação entre os resultados obtidos com Q4 e Q9.

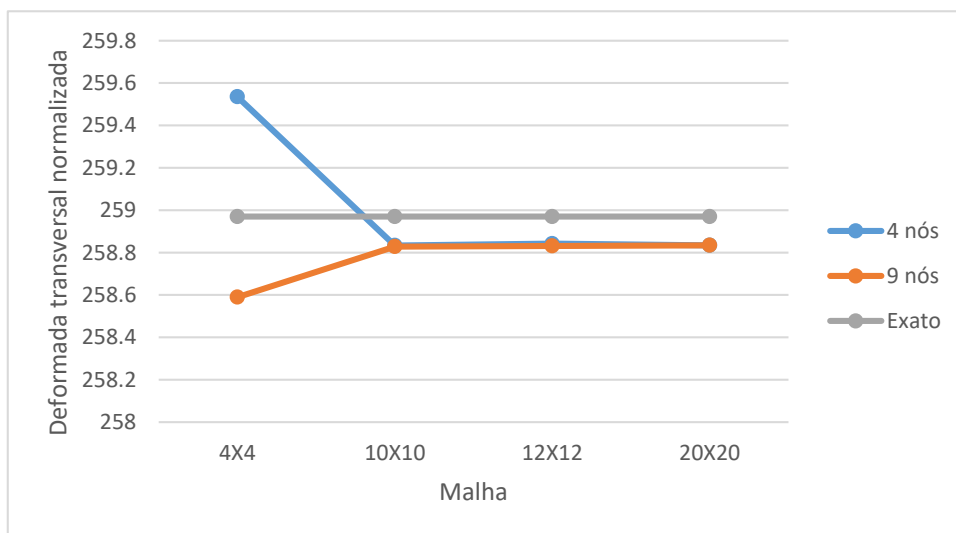


Fig. 26 – Convergência da deformada transversal normalizada para $R_f=5$.

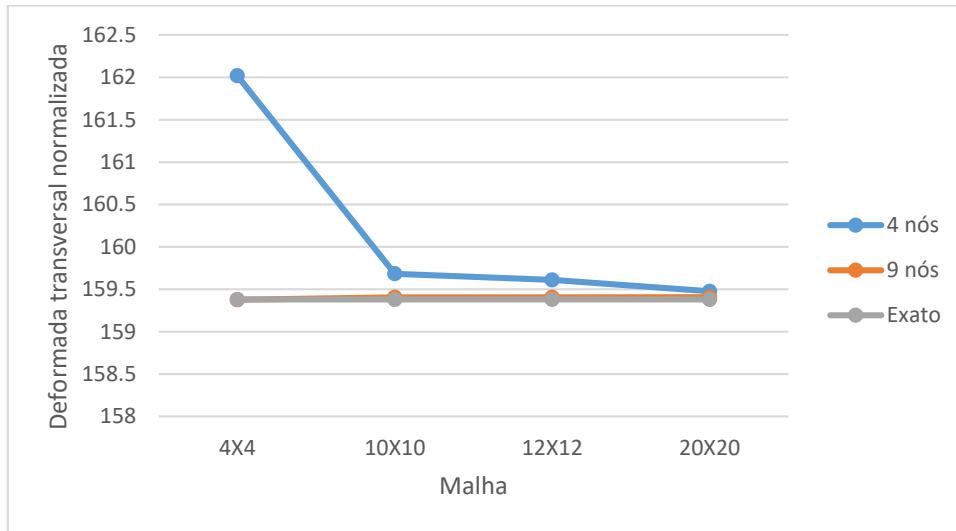


Fig. 27 – Convergência da deformada transversal normalizada para $R_f=10$.

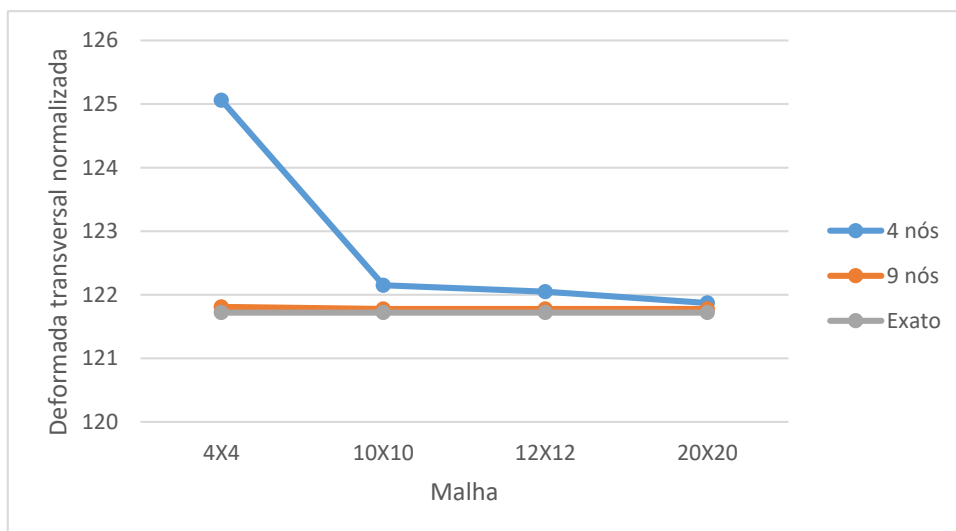


Fig. 28 – Convergência da deformada transversal normalizada para $R_f=15$.

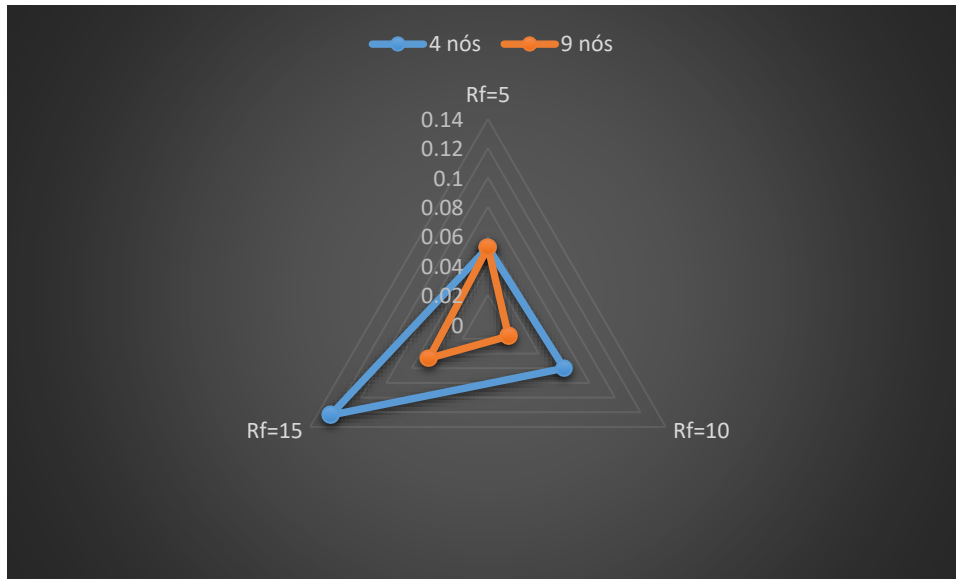


Fig. 29 – Erro relativo da deformada transversal normalizada para diferentes R_f .

Em suma, confirma-se a validade dos elementos implementados. O elemento que apresenta resultados mais próximos em relação à maioria dos métodos alternativos, é o Q9. O uso de uma malha 12X12, permite obter convergências de resultados próximas às verificadas com uma malha 20X20. Verifica-se também que apesar de não se ter adotado um factor de correção ao corte, à semelhança de certos trabalhos já referenciados, os resultados de uma forma geral são satisfatórios. De notar que quando se refere que não se utilizou um factor de correção, tal equivale a considerar na implementação dos modelos um $K=1$.

3.2.2 Placa *sandwich* sujeita a carregamento sinusoidal

Como referido anteriormente, a avaliação de estados de deformação e de tensão, foi igualmente realizada para o caso de uma placa sujeita a carregamento sinusoidal.

O exemplo utilizado para a validação desta formulação, é relativo a uma placa quadrada ortotrópica $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$, simplesmente apoiada em todos os bordos, tendo as três camadas iguais espessuras. O laminado em estudo, possui as seguintes propriedades:

$$E_1 = 25E_2 \quad G_{12} = G_{13} = 0.5E_2 \quad G_{23} = 0.2E_2 \quad \nu_{12} = 0.25 \quad (53)$$

Sendo este laminado sujeito a uma pressão vertical sinusoidal expressa pela seguinte expressão:

$$p_z = P \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{l}\right) \quad (54)$$

O sistema de coordenadas deste exemplo localiza-se no canto inferior esquerdo do plano médio do laminado.

A normalização dos resultados obtidos foi realizada recorrendo às seguintes fórmulas:

$$\bar{w} = \frac{10^2 w_{max} h^3 E_2}{Pl^4} \quad \bar{\sigma}_{xx} = \frac{\sigma_{xx} h^2}{Pl^2} \quad \bar{\sigma}_{yy} = \frac{\sigma_{yy} h^2}{Pl^2} \quad \bar{\tau}_{zx} = \frac{\tau_{zx} h}{Pl} \quad \bar{\tau}_{xy} = \frac{\tau_{xy} h}{Pl} \quad (55)$$

onde, h é a espessura da placa, P o valor da pressão aplicada, e l a largura da placa.

Na Tabela 9, são apresentados os valores obtidos, normalizados da deformada transversal e das tensões, usando os elementos Q4 e Q9. Estes resultados, são comparados com a solução exata tridimensional [56], com uma solução *meshless* proposta por Ferreira [30] e ainda com outros autores.

Tabela 9 – Validação dos resultados obtidos com elementos Q4 e Q9, SSSS, carregamento sinusoidal e $l/h=10$. Todos os valores apresentados foram normalizados.

Método	\bar{w}	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{yy}$	$\bar{\tau}_{zx}$	$\bar{\tau}_{yz}$
Tridimensional (Pagano [56])	0.7530	0.590	0.285	0.357	0.1228
Liou e Sun [57]	0.7546	0.580	0.285	0.367	0.127
Layerwise linear LD1 Carrera [58]	0.7371	0.5608	0.2740	0.3726	0.1338
Mixed layerwise LM4 Carrera [58]	0.7528	0.5801	0.2796	0.3626	0.1249
Reddy [59]	0.7125	0.5684	-	0.1033	-
Ferreira [30]	0.7427	0.5738	0.2810	0.3590	0.0953
Q4, (4X4)	0.9464	0.4911	0.3158	0.3338	0.2023
Q9, (4X4)	0.8355	0.5339	0.321	0.3475	0.2092
Q4, (10X10)	0.8514	0.5201	0.3167	0.3536	0.2131
Q9, (10X10)	0.8347	0.5267	0.3177	0.3557	0.2142
Q4, (12X12)	0.8462	0.5218	0.3168	0.3547	0.2137
Q9, (12X12)	0.8347	0.5264	0.3174	0.3562	0.2145
Q4, (20X20)	0.8388	0.5242	0.3169	0.3563	0.2146
Q9, (20X20)	0.8347	0.5258	0.3172	0.3568	0.2149

A análise da Tabela 9, permite verificar que de uma forma geral, foram obtidos resultados satisfatórios, sendo o maior desvio verificado na tensão de corte no plano YZ. Adicionalmente, é verificado que os valores normalizados, obtidos com os dois elementos são aproximadamente iguais. Observa-se ainda que a previsão da deformada, pelos modelos Q4 e Q9 é menos conservadora quando comparada com os restantes autores, apresentando as tensões um padrão em concordância com este comportamento.

Da mesma forma que no estudo anterior foi realizado o estudo da inclusão do factor de correção de corte $K=5/6$, neste estudo a sua inclusão é igualmente alvo de análise. Os resultados apresentados na Tabela 10, referem-se ao uso de uma malha 20X20, sendo os resultados obtidos para as restantes malhas (considerando $K=5/6$), apresentados no apêndice A1.2. Neste exemplo, o método considerado como sendo o exato, foi a solução apresentada por Pagano [56], visto esta ser uma referência comumente aceite e utilizada.

Tabela 10 - Comparação dos resultados com diferentes considerações, carregamento sinusoidal.

Método	\bar{w}	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{yy}$	$\bar{\tau}_{zx}$	$\bar{\tau}_{yz}$
Tridimensional (Pagano [56])	0.7530	0.590	0.285	0.357	0.1228
Presente Q4	0.8388	0.5242	0.3169	0.3563	0.2146
Presente Q9	0.8347	0.5258	0.3172	0.3568	0.2149
K=5/6, Q4	0.9136	0.5218	0.3396	0.3501	0.2124
K=5/6, Q9	0.9089	0.524	0.3401	0.35	0.2123

Os erros relativos entre os diferentes métodos, e os dois elementos Q4 e Q9, são apresentados na Tabela 11.

Tabela 11 - Erro relativo (%) entre solução exata e os resultados obtidos, carregamento sinusoidal.

Validação	Elemento	\bar{w}	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{yy}$	$\bar{\tau}_{zx}$	$\bar{\tau}_{yz}$
Pagano [56] - Presente	Q4	11.4	11.2	11.2	0.2	74.8
	Q9	10.8	10.9	11.3	0.1	75.0
Pagano [56] - K=5/6	Q4	21.3	11.6	19.2	1.9	73.0
	Q9	20.7	11.2	19.3	2.0	72.9

Analisando as Tabelas 10 e 11, verifica-se que a inclusão do fator de correção ao corte, prejudica os resultados obtidos. Em adição, é ainda verificável, que de uma forma geral, obtém-se menores erros relativos usando um elemento Q9, comparativamente ao uso de um elemento Q4.

3.2.3 Análise dinâmica de vibrações livres

O caso de estudo utilizado na validação de resultados numa análise de vibrações livres, consiste numa placa quadrada $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$, apoiada em todos os bordos, onde cada camada possui igual espessura, e uma relação $l/h = 10$.

O laminado em estudo, possui as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} E_1 &= 173 & E_2 &= 33.1 & G_{12} &= 9.38 & G_{13} &= 8.27 \\ G_{23} &= 3.24 & \nu_{12} &= 0.036 & \nu_{13} &= 0.25 & \nu_{23} &= 0.171 \end{aligned} \quad (56)$$

A normalização das frequências adotada neste exemplo, foi a seguinte:

$$\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\frac{\rho}{E_2}} \quad (57)$$

onde, ω é a frequência, h a espessura total da placa, e ρ a massa volúmica.

Na Tabela 12, são apresentados os valores obtidos normalizados das frequências naturais, relativos aos primeiros oito modos de vibração.

Tabela 12 - Validação das oito primeiras frequências naturais, obtidas com elementos Q4 e Q9, SSSS, e $l/h=10$. Todos os valores apresentados foram normalizados.

Método	(1,1)	(2,1)	(1,2)	(2,2)	(3,1)	(1,3)	(3,2)	(2,3)
Exato [55]	0.0672	0.1281	0.1722	0.2080	-	-	-	-
HSDT [31]	0.0672	0.1282	0.1723	0.2081	-	-	-	-
Layerwise [54]	0.0681	0.1322	0.1762	0.2150	0.2376	0.2954	0.3009	0.3288
Q4, (4X4)	0.0728	0.1534	0.2147	0.2409	0.339	0.3458	0.3471	0.38
Q9, (4X4)	0.0687	0.1277	0.1829	0.2166	0.2263	0.2882	0.3175	0.3397
Q4, (10X10)	0.0693	0.1307	0.1868	0.2206	0.2349	0.2952	0.3264	0.3466
Q9, (10X10)	0.0687	0.127	0.1817	0.2155	0.2195	0.2836	0.3099	0.3286
Q4, (12X12)	0.0691	0.1295	0.1852	0.2191	0.23	0.2916	0.3212	0.3426
Q9, (12X12)	0.0687	0.1269	0.1817	0.2155	0.2194	0.2836	0.3098	0.3281
Q4, (20X20)	0.0688	0.1279	0.1829	0.2168	0.2231	0.2864	0.3138	0.3367
Q9, (20X20)	0.0687	0.1269	0.1817	0.2155	0.2193	0.2835	0.3097	0.3277

Na Fig. 30, é apresentada a convergência da frequência fundamental obtida com o refinamento da malha para Q4 e Q9. Verificou-se que uma malha pouco refinada com um elemento Q9, apresenta uma solução mais aproximada à exata do que a apresentada com um elemento Q4.

A inclusão do fator de correção de corte $K=5/6$, neste estudo é também analisada. Os resultados apresentados na Tabela 13, referem-se ao uso de uma malha 20X20, sendo os resultados obtidos para as restantes malhas (considerando $K=5/6$), apresentados no apêndice A1.3.

Tabela 13 - Comparação dos resultados com diferentes considerações, vibração livre.

Método	(1,1)	(2,1)	(1,2)	(2,2)
Exato [55]	0.0672	0.1281	0.1722	0.2080
Presente, Q4	0.0688	0.1279	0.1829	0.2168
Presente, Q9	0.0687	0.1269	0.1817	0.2155
K=5/6, Q4	0.0674	0.1243	0.174	0.2067
K=5/6, Q9	0.0673	0.1234	0.1729	0.2056

Na Fig. 30, é apresentada graficamente, a convergência da frequência fundamental para diferentes considerações (inclusão ou não de $K=5/6$), e diferentes elementos (Q4, e Q9). A análise do gráfico, permite concluir que a inclusão do fator de correção ao corte é vantajosa, sendo a formulação com Q9, a que apresenta maior convergência com a solução exata (linha da solução exata encontra-se sobreposta pela evolução de “K=5/6, Q9”).

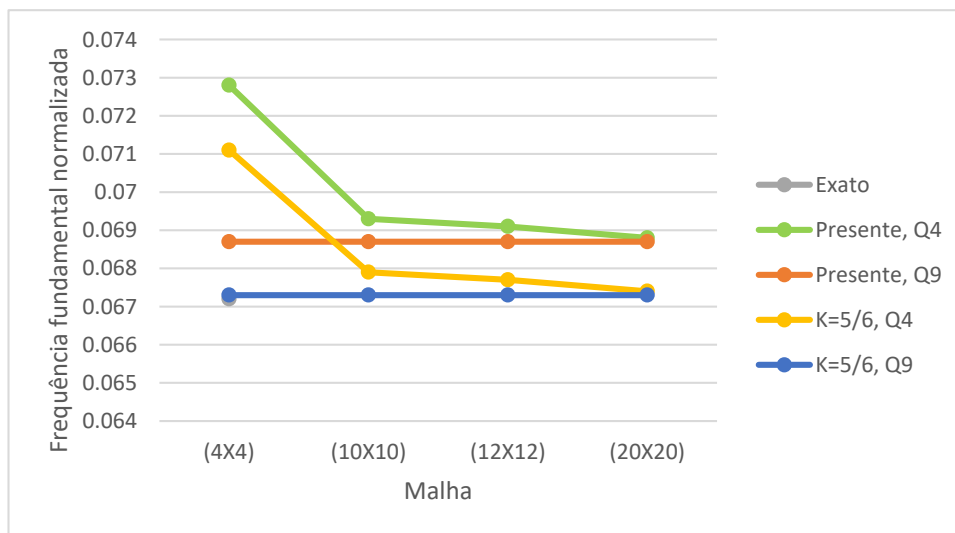


Fig. 30 – Convergência de frequência fundamental normalizada.

Na Fig. 31, os erros relativos são apresentados graficamente. Adicionalmente, a consulta dos valores dos erros relativos em questão, poderá ser realizada através da Tabela 14.

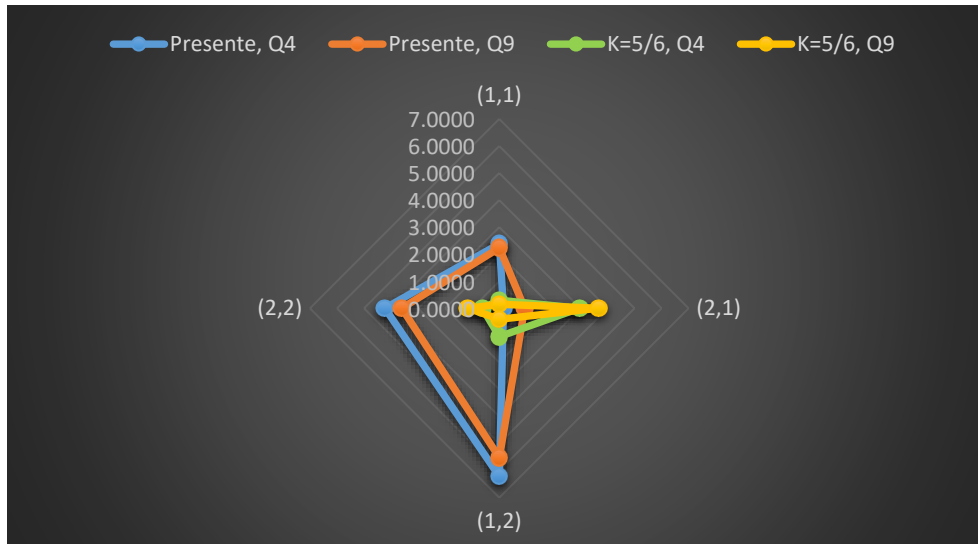


Fig. 31 – Erro relativo dos primeiros quatro modos de vibração do laminado.

Tabela 14 - Erro relativo (%) entre diversas soluções e os resultados obtidos. Vibração livre.

Validação	Elemento	(1,1)	(2,1)	(1,2)	(2,2)
Exato [55] – K=1	Q4	2.3810	0.1561	6.2137	4.2308
	Q9	2.2321	0.9368	5.5168	3.6058
Exato [55] – K=5/6	Q4	0.2976	2.9664	1.0453	0.6250
	Q9	0.1488	3.6690	0.4065	1.1538

Analisando os resultados obtidos com a solução exata, verifica-se que a formulação de análise das vibrações livres, apresenta resultados satisfatórios. Isto é verificado na Fig. 31, onde são apresentados os erros relativos para os primeiros quatro modos de vibração, sendo estes valores inferiores a 10%, os quais são admissíveis. É ainda verificado, que contrariamente ao observado na estática, a inclusão do fator de correção ao corte, é favorável à obtenção de resultados mais próximos da solução exata. Adicionalmente, verificou-se que de uma forma geral, obtêm-se melhores resultados com um elemento Q9 comparativamente a um Q4, tal como expectável.

Em adição, é apresentada a Fig. 32, onde estão representados os oito primeiros modos de vibração correspondentes às frequências naturais.

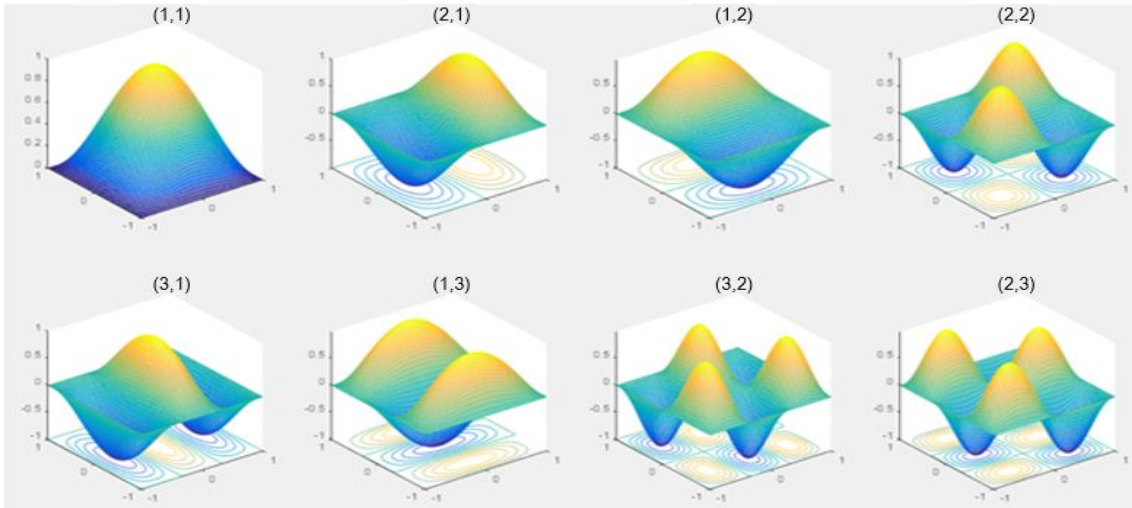


Fig. 32 – Representação dos primeiros oito modos de vibração do laminado.

A representação gráfica dos modos de vibração permite não só a visualização dos mesmos bem como, concluir acerca da existência de modos de vibração simétricos. Estes modos de vibração apresentam frequências de vibração idênticas e devem-se à simetria do laminado nas direções x e y . Este fenómeno pode ser observado entre o 2º e o 3º, o 5º e o 6º, e o 7º e o 8º modo de vibração.

3.2.4 Análise dinâmica de vibrações livres para diferentes rácios de rigidez

O presente caso de estudo, tem como objectivo verificar, se para diferentes relaces de rigidez, de uma placa sujeita a vibraces livres, a inclusão de $K=5/6$, continua a ser vantajosa.

Este estudo considera um laminado quadrado, simplesmente apoiado em todos os bordos, com a seguinte sequência de empilhamento, $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$. Uma relao $l/h=0.2$, e camadas com iguais espessuras foram consideradas. As propriedades do compósito são:

$$\frac{E_1}{E_2} = 10, 20, 30 \text{ ou } 40 \quad G_{12} = G_{13} = 0.6E_2 \quad G_{23} = 0.5E_2 \quad \nu_{12} = 0.25 \quad (58)$$

A Tabela 15, apresenta os resultados obtidos, para a frequência fundamental normalizada usando o seguinte multiplicador:

$$\bar{\omega} = \frac{\omega l^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}} \quad (59)$$

onde, ω  a frequência, h a espessura total, l a largura da placa, e ρ a massa volmica.

Tabela 15 – Frequência fundamental normalizada. Diferentes relaces de rigidez.

K	Método	10	20	30	40
1	Liew et al. [60]	8.2924	9.5613	10.320	10.849
	Khdeir et al. [61]	8.2982	9.5671	10.326	10.854
	Ferreira et al. [62]	8.5846	9.8384	10.5695	10.0649
1	Q4 (11X11)	8.487	9.6286	10.2564	10.6647
	Q4 (15X15)	8.4561	9.6009	10.2318	10.6423
	Q4 (19X19)	8.4434	9.5895	10.2216	10.6331
	Q9 (11X11)	8.4255	9.5735	10.2072	10.62
	Q9 (15X15)	8.4244	9.5724	10.2063	10.6192
	Q9 (19X19)	8.4241	9.5722	10.2061	10.619
5/6	Q4 (11X11)	8.1957	9.1799	9.7074	10.0464
	Q4 (15X15)	8.1677	9.1556	9.686	10.0271
	Q4 (19X19)	8.1562	9.1456	9.6771	10.0191
	Q9 (11X11)	8.14	9.1314	9.6646	10.0078
	Q9 (15X15)	8.1389	9.1305	9.6638	10.0071
	Q9 (19X19)	8.1387	9.1303	9.6636	10.0069

Na Fig. 33 são apresentados graficamente, os erros relativos entre a solução exata [61], e os resultados obtidos com elementos Q4 e Q9, para $K=1$ e $K=5/6$. Estes erros relativos, são apresentados numericamente, na Tabela 16.

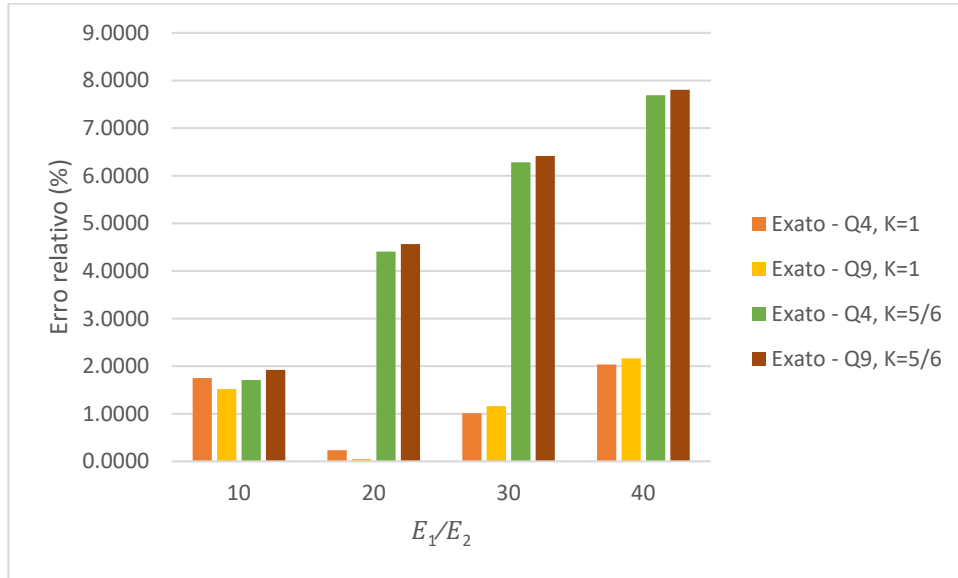


Fig. 33 – Representação do erro relativo, para diferentes considerações. Diferentes relações E_1/E_2 .

Tabela 16 - Erro relativo (%) entre diversas soluções e os resultados obtidos. Diferentes relações E_1/E_2 .

Validação	Elemento	(1,1)	(2,1)	(1,2)	(2,2)
Exato [61] – K=1	Q4	1.7498	0.2341	1.0110	2.0352
	Q9	1.5172	0.0533	1.1611	2.1651
Exato [61] – K=5/6	Q4	1.7112	4.4057	6.2841	7.6921
	Q9	1.9221	4.5656	6.4149	7.8045

Analisando a Fig. 33, constata-se que para uma relação $E_1/E_2=10$, a inclusão do fator de correção de corte, não influencia os resultados de forma significativa, uma vez que os erros relativos em ambos os elementos são aproximadamente iguais aos erros obtidos, quando $K=1$. Por outro lado, quando a relação E_1/E_2 toma valores superiores a 10, verifica-se um aumento cada vez mais acentuado do erro relativo entre a solução exata, e os resultados obtidos considerando $K=5/6$.

Em suma, apesar de no exemplo 3.1.3 se ter verificado que a consideração de $K=5/6$ apresenta melhores resultados, neste exemplo, o mesmo não é verificado para diferentes relações de rigidez. Assim, é novamente verificado que a inclusão de um factor de correção $K=5/6$, não é vantajosa.

3.2.5 Aplicação de critérios de falha num laminado sujeito a carga transversal uniformemente distribuída

Este caso de estudo, tem como objectivo a validação da formulação, relativa à implementação de critérios de falha, nomeadamente os critérios de Tensão Máxima, Tsai-Hill e Hashin. O laminado em estudo, é uma placa retangular com 286x127 mm (axb), possuindo três camadas iguais, com $h_k=0.127$ mm, e uma sequência de empilhamento [45°/-45°/45°]. Neste caso de estudo, uma malha 9X5, é adotada [63]. As propriedades do compósito estudado, são apresentadas na Tabela 17.

Tabela 17 – Propriedades do material compósito usado nos critérios de falha [63].

E_1 (GPa)	$E_2=E_3$ (GPa)	$G_{12}=G_{13}$ (GPa)	G_{23} (GPa)	$\nu_{12}=\nu_{13}$	ν_{23}
132.4	10.76	5.65	3.38	0.24	0.49
X_T (MPa)	X_C (MPa)	$Y_T=Z_T$ (MPa)	$Y_C=Z_C$ (MPa)	R (MPa)	$S=T$ (MPa)
1 513	1 696	43.8	43.8	67.6	86.9

Sendo X_T , a resistência à tração da lâmina unidirecional, paralela à direção da fibra; X_C , a resistência à compressão da lâmina unidirecional, paralela à direção da fibra; Y_T , a resistência à tração da lâmina unidirecional, transversal à direção da lâmina; Y_C , a resistência à compressão da lâmina unidirecional, transversal à direção da lâmina; Z_T , a resistência à tração da lâmina unidirecional, na direção transversal; Y_C , a resistência à compressão da lâmina unidirecional, na direção transversal; T , a resistência ao corte no plano da lâmina (plano 12); S , a resistência ao corte transversal no plano 13; R , a resistência ao corte transversal no plano 23.

O valor do carregamento, que leva à falha da primeira camada, foi normalizado da seguinte forma:

$$FLD = \frac{P}{E_2} \left(\frac{a}{h_k} \right)^4 \quad (60)$$

onde, P é a carga transversal uniformemente distribuída aplicada, a é o comprimento da placa, h_k é a espessura da camada que falha, e E_2 é o módulo de elasticidade na direção da largura. Os valores obtidos usando os critérios de falha considerados, são apresentados na Tabela 18.

Tabela 18 – Carregamentos normalizados que levam à falha da primeira camada.

Critério de falha	FLD	FEL	FGP	FPL
Tensão Máxima [63]	2 690 141.4	35	3	3
Tensão Máxima, presente	1 594 154.8	11	2	3
Deformação Máxima [63]	3 418 133.4	11	2	3
Tsai-Hill [63]	2 742 860.1	11	2	3
Tsai-Hill, presente	1 513 706.8	11	2	3
Hoffman [63]	2 695 775	11	2	3
Tsai-Wu [63]	2 915 620.3	11	2	3
Hashin	1 318 929.2	11	2	3

onde, FLD é o carregamento adimensional que leva à falha da primeira camada, FEL é o elemento onde a falha ocorre, FGP é o ponto de Gauss onde a falha ocorre, e FPL é a camada onde a falha ocorre.

O método adotado na referência [63], é um modelo de elemento finito não linear, usando uma abordagem FSDT, com elementos de Lagrange retangulares isoparamétricos, com cinco GDL por nó (u, v, w, θ_x e θ_y).

A análise da Tabela 18, permite verificar que usando uma teoria multicamada, e aplicando os critérios de falha considerados, verifica-se que a primeira camada a falhar é a mesma da referência bibliográfica, mas, o carregamento com o qual esta ocorre, não é o mesmo. No estudo realizado, é necessário um carregamento inferior ao calculado na referência bibliográfica. Contudo, é possível afirmar que os resultados obtidos são menos conservadores que os observados na referência, o que de certa forma é satisfatório.

Adicionalmente, considerou-se interessante apresentar a evolução do carregamento que leva à falha de cada camada. Os pontos em análise considerados, foram as zonas mais propícias à falha nomeadamente, os topos e os fundos de cada camada, ou seja, as superfícies exteriores, e as zonas de interface.

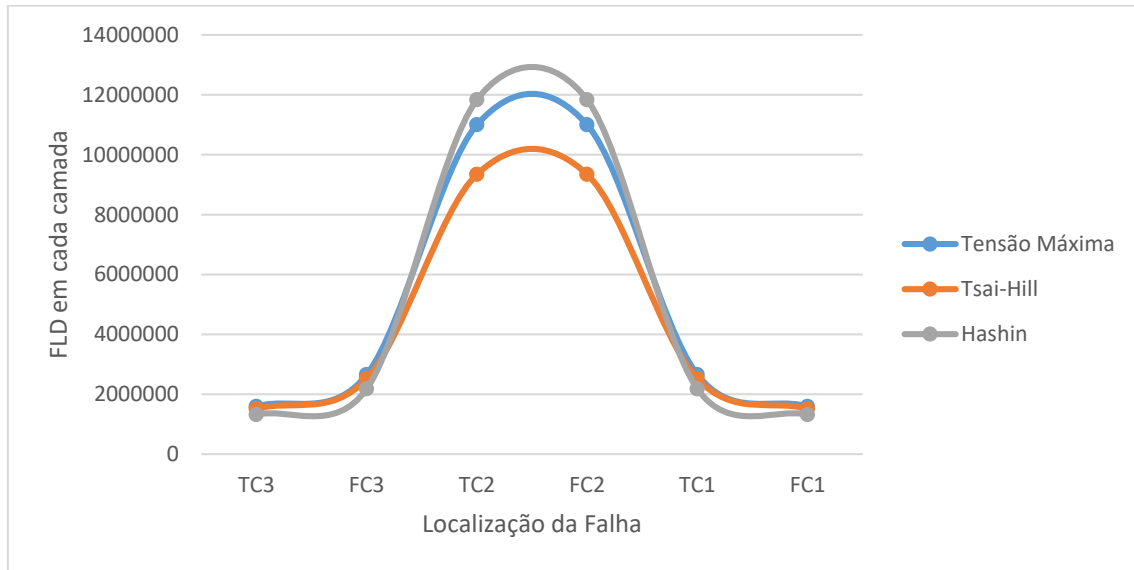


Fig. 34 – Evolução do carregamento que leva à falha de cada camada, ao longo da espessura.

onde, TC3 é o topo da camada 3, FC3 é o fundo da camada 3, TC2 é o topo da camada 2, FC2 é o fundo da camada 2, TC1 é o topo da camada 1, e FC1 é o fundo da camada 1.

A evolução verificada na Fig. 34, vai de encontro ao que é expectável. Isto é, as camadas que falham primeiros são as camadas exteriores, o que é justificado por estas não se encontrarem protegidas por camadas adjacentes numa das faces, e devido também, a ser aí que se verificam os maiores valores de tensões devidas à flexão, bem como às tensões de corte (conforme se constatou nalguns dos casos anteriores), sendo assim mais solicitadas.

3.3 Casos de estudo

Após a validação dos modelos implementados de acordo com a teoria multicamada adotada, neste subcapítulo, são abordados diferentes casos de estudo. Estes casos de estudo, têm como objectivo o estudo da influência da variação das propriedades dos materiais constituintes das camadas, a variação de diferentes parâmetros geométricos e a apresentação de aspetos característicos da teoria usada. Os estados de tensão e de deformação das placas em estudo, são analisados a nível estático e das vibrações livres. Nalguns casos de estudo, procura-se apenas analisar a falha.

As placas laminadas ou estruturas *sandwich* consideradas nos estudos realizados, possuem três camadas, podendo estas serem divididas em dois tipos. O primeiro tipo, possui camadas exteriores ortotrópicas, e um núcleo constituído por espuma. Relativamente ao segundo, todas as suas camadas constituintes são ortotrópicas. Em ambos os tipos de placas, foi considerada uma fração de fibras longas reforçadas de 60%, sendo considerados dois tipos de fibras, carbono e fibra de vidro, embebidas numa resina epoxy. A Tabela 19 e a Tabela 20, apresentam as propriedades usadas nos presentes estudos.

Tabela 19 – Propriedades mecânicas dos materiais compósitos em estudo.

Vf=60%	E ₁ (GPa)	E ₂ (GPa)	G ₁₂ (GPa)	ν ₁₂	ρ (kg/m ³)
Vidro - Epoxy	45.0	12.0	4.5	0.3	2080
Carbono - Epoxy	134.0	7.0	4.2	0.25	1530

Tabela 20 – Propriedades mecânicas dos materiais das espumas [1].

	H35	H45	H60	H80	H100	H130	H160	H200	H250
Módulo de Young (MPa)	49	55	75	95	130	175	205	250	320
Coefficiente de Poisson	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4
Massa específica (kg/m³)	38	48	60	80	100	130	160	200	250

As normalizações adotadas, tal como os multiplicadores utilizados nos diferentes casos em estudo, são os seguintes:

$$\begin{aligned}\bar{w} &= \frac{w\left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}, 0\right)}{q}, \quad \bar{\sigma}_x^1 = \frac{\sigma_x^{(1)}\left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}, \frac{h}{2}\right)}{q}, \quad \bar{\sigma}_x^2 = \frac{\sigma_x^{(1)}\left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}, \frac{h_{nucleo}}{2}\right)}{q}, \quad \bar{\sigma}_x^3 = \frac{\sigma_x^{(2)}\left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}, \frac{h_{nucleo}}{2}\right)}{q}, \\ \bar{\sigma}_y^1 &= \frac{\sigma_y^{(1)}\left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}, \frac{h}{2}\right)}{q}, \quad \bar{\sigma}_y^2 = \frac{\sigma_y^{(1)}\left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}, \frac{h_{nucleo}}{2}\right)}{q}, \quad \bar{\sigma}_y^3 = \frac{\sigma_y^{(2)}\left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}, \frac{h_{nucleo}}{2}\right)}{q}, \\ \bar{\tau}_{xz}^1 &= \frac{\tau_{xz}^{(2)}\left(0, \frac{l}{2}, 0\right)}{q}, \quad \bar{\tau}_{xz}^2 = \frac{\tau_{xz}^{(2)}\left(0, \frac{l}{2}, \frac{h_{nucleo}}{2}\right)}{q}, \quad \bar{\omega} = \omega h \sqrt{\frac{\rho}{E_2}}\end{aligned}\tag{61}$$

Os pontos onde estas quantidades são “recolhidas”, bem como a correspondência espacial na placa, pode ser exemplificada na Fig. 35. Na Tabela 21, as coordenadas apresentadas são exemplificadas para uma placa, onde as camadas possuem espessuras iguais.

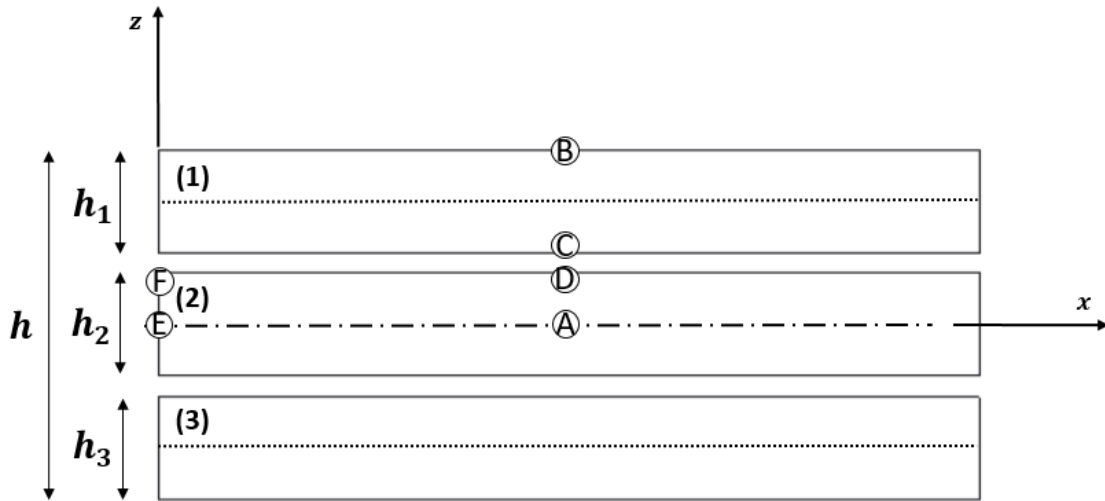


Fig. 35 – Representação esquemática dos pontos onde são normalizados os resultados.

Tabela 21 – Pontos de avaliação da deformada e das tensões (ilustradas no plano xz).

A	B	C	D	E	F
$w\left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}, 0\right)$	$\sigma_x^{(1)}\left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}, \frac{h}{2}\right)$	$\sigma_x^{(1)}\left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}, \frac{h_{core}}{2}\right)$	$\sigma_x^{(2)}\left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}, \frac{h_{core}}{2}\right)$	$\tau_{xz}^{(2)}\left(0, \frac{l}{2}, 0\right)$	$\tau_{xz}^{(2)}\left(0, \frac{l}{2}, \frac{h_{core}}{2}\right)$
	$\sigma_y^{(1)}\left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}, \frac{h}{2}\right)$	$\sigma_y^{(1)}\left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}, \frac{h_{core}}{2}\right)$	$\sigma_y^{(2)}\left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}, \frac{h_{core}}{2}\right)$		

Apesar desta abordagem não requerer um factor de correção (diferente de 1), nos apêndices A2, são apresentados os resultados obtidos com o valor comumente utilizado de $K=5/6$.

3.3.1 Influência do núcleo na resposta estática e dinâmica numa estrutura *sandwich* com camadas exteriores compósitas

Neste caso de estudo, é considerada uma estrutura *sandwich*, sendo o material do núcleo, espumas PVC, com diferentes massas específicas [64]. Este tipo de estruturas, tem despertado interesse, devido a serem estruturas leves, tendo particular aplicabilidade em casos onde o peso é um constrangimento.

Aqui, são estudados os efeitos na estrutura, quando são consideradas diferentes espumas, com diferentes espessuras. As camadas exteriores, foram consideradas como sendo compósitos unidireccionais carbono-epoxy e fibra de vidro-epoxy. As propriedades dos materiais são apresentadas nas Tabela 19 e 20, sendo uma relação de $l/h = 10$ adotada. As placas encontram-se sujeitas a um carregamento transversal uniformemente distribuído de 1Pa. É de referir que este tipo de estrutura, com núcleos desta natureza é expectável que apresente um amortecimento significativo. Contudo neste trabalho, essa influência não é considerada.

A deformada transversal, as diferentes tensões, bem como as frequências naturais, para uma configuração *sandwich*, com camadas exteriores de carbono-epoxy, e um núcleo com 10 mm e 15 mm são apresentadas, respetivamente nas Tabela 22 e 23, e na Tabela 24 e 25. Os resultados apresentados, encontram-se normalizados segundo as expressões da equação (61). A espessura de cada camada exterior é 2 mm em ambos os casos. Os resultados apresentados, foram obtidos recorrendo apenas a elementos de Lagrange Q9, com nove GDL.

Tabela 22 – Deformada e tensões normalizadas. Camadas exteriores CE, núcleo 10 mm.

Id. Núcleo	Id. Material	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x^1$	$\bar{\sigma}_x^2$	$\bar{\sigma}_x^3$	$\bar{\sigma}_y^1$	$\bar{\sigma}_y^2$	$\bar{\sigma}_y^3$	$\bar{\tau}_{xz}^1$	$\bar{\tau}_{xz}^2$
1	H35	3.29E-09	242.4279	2.1549	0.0519	35.944	14.6997	0.1725	3.3174	5.3243
2	H45	3.02E-09	227.6136	2.0737	0.0763	34.6571	15.0985	0.2071	3.4189	5.1694
3	H60	2.41E-09	195.2816	1.8554	0.1532	31.1843	15.5136	0.3133	3.6963	4.8017
4	H80	2.03E-09	176.7683	1.689	0.224	28.5371	15.29	0.4074	3.9104	4.5625
5	H100	1.62E-09	158.5392	1.0746	0.336	25.0792	14.4596	0.5504	4.1923	4.2904
6	H130	1.32E-09	146.2871	0.2029	0.4649	21.9802	13.3054	0.7061	4.4493	4.0717
7	H160	1.19E-09	141.2624	9.8664	0.5442	20.4315	12.6106	0.798	4.5793	3.9681
8	H200	1.04E-09	136.0922	21.2764	0.6565	18.694	11.7073	0.9236	4.7332	3.8489
9	H250	8.85E-10	131.0272	33.3574	0.8203	16.737	10.6192	1.0999	4.9082	3.7148

Através da análise da Tabela 22, é possível observar uma diminuição da deformada transversal, no sentido de H35 para H250. Esta evolução é expectável, uma vez que, de H35 para H250, há um aumento da massa específica da espuma utilizada, logo, é fornecido um aumento da rigidez da placa por parte do núcleo, levando assim a uma menor deformada transversal.

No que diz respeito às tensões, mais concretamente as tensões normais, verifica-se que no ponto C não existe uma tendência evidente. No ponto B, estas diminuem de H35 para H250, e no ponto D verifica-se uma tendência inversa à verificada no ponto B. Relativamente às tensões de corte transversais, no ponto B esta aumenta de H35 para H250. No ponto C, verifica-se uma tendência inversa à verificada no ponto B.

Tabela 23 – Frequências naturais normalizadas. Camadas exteriores CE, núcleo 10 mm.

Id. Núcleo	Id. Material	Modos de Vibração				
		(1,1)	(2,1)	(1,2)	(2,2)	(3,1)
1	H35	0.0303	0.0489	0.0619	0.0723	0.0736
2	H45	0.0316	0.0511	0.064	0.0758	0.0765
3	H60	0.0354	0.0576	0.0707	0.085	0.0859
4	H80	0.0385	0.0629	0.0767	0.0924	0.0944
5	H100	0.0431	0.0703	0.0858	0.1034	0.1067
6	H130	0.0478	0.0777	0.0959	0.1153	0.1193
7	H160	0.0504	0.0817	0.1019	0.1222	0.1263
8	H200	0.0539	0.0869	0.1101	0.1314	0.1354
9	H250	0.0584	0.0934	0.1213	0.1438	0.1469

Em relação às frequências naturais, é verificada uma tendência oposta à observada na deformada transversal (Tabela 22), a qual era expectável, tendo em conta a variação da rigidez da placa em função do núcleo considerado.

Nas Tabela 24 e 25, são apresentados estudos similares, sendo neste caso considerado um núcleo mais espesso (15 mm).

Tabela 24 – Deformada e tensões normalizadas. Camadas exteriores CE, núcleo 15 mm.

Id. Núcleo	Id. Material	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x^1$	$\bar{\sigma}_x^2$	$\bar{\sigma}_x^3$	$\bar{\sigma}_y^1$	$\bar{\sigma}_y^2$	$\bar{\sigma}_y^3$	$\bar{\tau}_{xz}^1$	$\bar{\tau}_{xz}^2$
1	H35	5.02E-09	223.8004	3.1039	0.1905	42.1725	24.5787	0.3403	3.6314	4.8384
2	H45	4.58E-09	212.9325	2.6335	0.2232	40.5168	24.3874	0.3844	3.7209	4.6971
3	H60	3.63E-09	190.2519	1.2968	0.3237	36.092	23.28	0.517	3.9639	4.3609
4	H80	3.04E-09	177.9924	0.3636	0.4142	32.7699	21.9884	0.632	4.1484	4.1422
5	H100	2.41E-09	166.5415	22.1781	0.5562	28.5132	19.9047	0.8044	4.3857	3.8942
6	H130	1.96E-09	159.2437	41.7007	0.719	24.8084	17.7579	0.9917	4.5949	3.6963
7	H160	1.76E-09	156.3435	50.6115	0.8197	23.0198	16.6144	1.1027	4.6977	3.6032
8	H200	1.55E-09	153.3965	60.4687	0.963	21.0433	15.2637	1.2557	4.8164	3.4966
9	H250	1.32E-09	150.4938	70.8404	1.1735	18.8241	13.7762	1.4776	4.9467	3.3774

Analisando a Tabela 24, tal como verificado para um núcleo mais esbelto, observa-se uma diminuição da deformada transversal, com o aumento da massa específica do núcleo.

No caso das tensões, são verificadas as mesmas tendências observadas para um núcleo mais esbelto, as quais eram expectáveis.

Tabela 25 – Frequências naturais normalizadas. Camadas exteriores CE, núcleo 15 mm.

Id. Núcleo	Id. Material	Modos de Vibração				
		(1,1)	(2,1)	(1,2)	(2,2)	(3,1)
1	H35	0.0285	0.0465	0.0541	0.0659	0.0688
2	H45	0.0298	0.0487	0.0565	0.0689	0.0722
3	H60	0.0335	0.055	0.0639	0.0779	0.0822
4	H80	0.0366	0.06	0.0702	0.0856	0.0906
5	H100	0.0411	0.0671	0.0799	0.0969	0.1024
6	H130	0.0456	0.074	0.0903	0.1089	0.1144
7	H160	0.0481	0.0778	0.0965	0.1158	0.121
8	H200	0.0514	0.0826	0.1048	0.125	0.1295
9	H250	0.0557	0.0887	0.1161	0.1373	0.1403

Relativamente às frequências naturais, é verificada a mesma tendência, observada no núcleo mais esbelto (Tabela 25), a qual era expectável.

Adicionalmente, foi realizado o mesmo estudo apresentado nas Tabela 22-25, mas desta vez, as camadas exteriores são em GE. Os resultados obtidos encontram-se presentes no apêndice A2.1.1. Na Fig. 36 e Fig. 37, são apresentados gráficos de forma a evidenciar que independentemente dos materiais compósitos usados nas camadas exteriores, as tendências enunciadas são sempre verificadas.

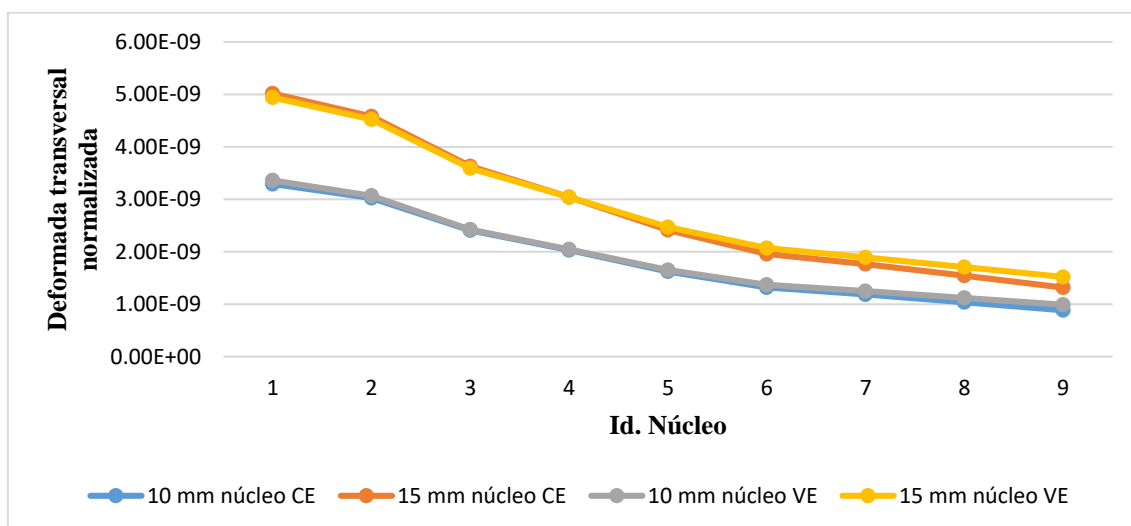


Fig. 36 – Deformada transversal máxima, normalizada das estruturas *sandwich* em estudo.

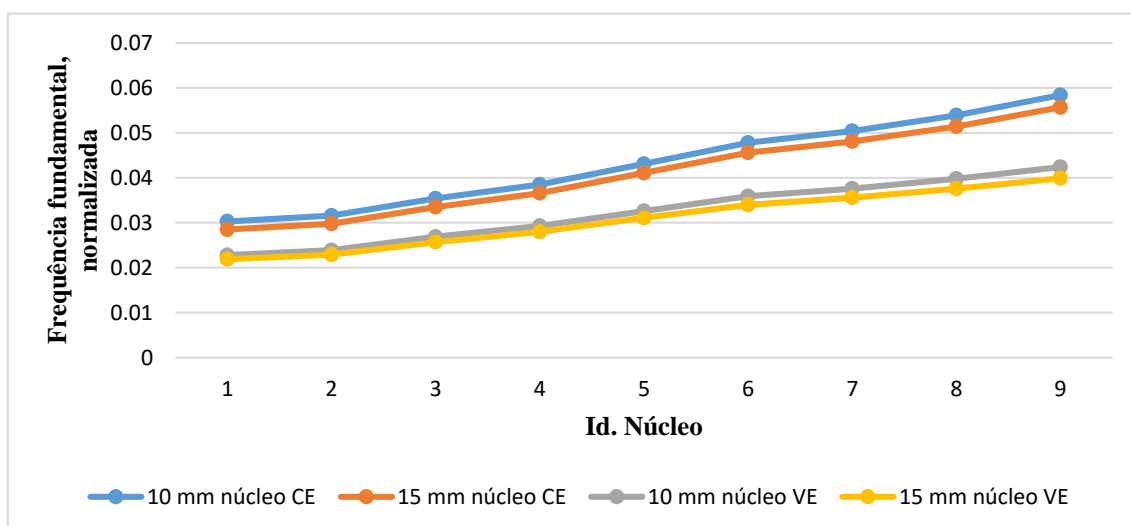


Fig. 37 – Frequência fundamental, normalizada das estruturas *sandwich* em estudo.

Adicionalmente, são apresentados nos apêndices A2.1.2, e A2.1.3, os resultados obtidos, considerando um fator de correção ao corte de $K=5/6$.

Em suma, e comparando as duas configurações *sandwich* com camadas exteriores compostas por diferentes materiais compósitos, e núcleos com espessuras diferentes, observa-se que nos casos onde o núcleo é mais espesso, são obtidas soluções menos rígidas. Este resultado já era expectável, uma vez que, sendo as camadas exteriores, as camadas que fornecem maior rigidez à estrutura – devido às suas propriedades serem muito superiores às do núcleo – e ser nas zonas de interface, onde há um maior desfaseamento entre as tensões, quanto maior for a espessura do núcleo, menos rígida é a estrutura.

3.3.2 Influência das razões geométricas na resposta estática e dinâmica numa placa compósita

Neste estudo, procurou-se verificar a influência do rácio l/h na resposta mecânica de uma placa quadrada, com uma largura unitária, simplesmente apoiada em todos os bordos, uma sequência de empilhamento $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$, sujeita a uma carga transversal uniformemente distribuída (1Pa). Foram considerados três rácios $l/h=5, 10$ e 20 .

O material compósito considerado no estudo, é um compósito CE, encontrando-se as suas propriedades mecânicas, apresentadas na Tabela 19.

Na Tabela 26, são apresentados os resultados obtidos para a deformada transversal e as tensões normalizadas, para os diferentes rácios l/h considerados. Adicionalmente, foi verificada a influência desses rácios, para diferentes espessuras das peles – h_k é a espessura de cada camada exterior, variando o seu valor ao longo do estudo, mas tendo sempre as duas camadas exteriores espessuras iguais. Os resultados apresentados, foram obtidos recorrendo ao elemento Lagrange Q9, sendo considerados nove GDL.

Tabela 26 – Deformada transversal e tensões normalizadas vs. rácio l/h .

l/h	h_k	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x^1$	$\bar{\sigma}_x^2$	$\bar{\sigma}_x^3$	$\bar{\sigma}_y^1$	$\bar{\sigma}_y^2$	$\bar{\sigma}_y^3$	$\bar{\tau}_{xz}^1$	$\bar{\tau}_{xz}^2$
5	h/6	1.48E-09	19.5679	13.0317	0.8189	1.3064	0.7513	11.3281	2.4376	1.2329
	h/5	1.50E-09	18.5382	11.2410	0.7236	1.3899	0.7205	11.1640	2.6190	1.3573
	h/4	1.57E-09	17.5487	9.1203	0.6083	1.5917	0.6740	10.7743	2.8794	1.5397
	h/3	1.72E-09	16.7142	6.2640	0.4399	1.9373	0.5558	9.1840	3.2748	1.8389
10	h/6	1.50E-08	78.2689	52.1422	3.3108	4.8995	3.1501	48.0947	4.8990	2.4775
	h/5	1.51E-08	76.6934	46.1283	2.9489	4.9249	2.8708	44.1609	5.3622	2.7893
	h/4	1.53E-08	75.1630	37.9595	2.4446	4.9481	2.4378	37.7885	5.9820	3.2284
	h/3	1.59E-08	73.8013	25.3755	1.6389	5.4659	1.6997	27.4375	6.8049	3.8884
20	h/6	2.05E-07	313.4683	208.9234	13.3188	19.4379	12.8451	196.9901	9.8338	4.9746
	h/5	2.05E-07	311.7869	187.1772	11.9098	19.1397	11.4128	174.6566	10.8530	5.6574
	h/4	2.05E-07	309.2712	155.0268	9.8104	18.4756	9.2265	141.4401	12.1659	6.5958
	h/3	2.06E-07	304.6326	102.3482	6.3685	19.2816	6.2762	102.4880	13.7655	7.9295

Analisando a Tabela 26 usando uma abordagem mais geral, verifica-se que com o aumento do rácio l/h , a placa torna-se cada vez mais fina, e a deformada transversal normalizada aumenta. No caso das tensões normalizadas, é verificada uma tendência dos resultados, similar à apresentada pela deformada transversal normalizada. Analisando a

mesma tabela, mas agora focalizando nos resultados obtidos para cada rácio l/h , verifica-se que com o aumento da espessura das camadas exteriores, existe também um aumento da deformada transversal normalizada. Esta tendência é igualmente verificada no caso das tensões normalizadas.

O presente estudo, contempla ainda uma vertente das vibrações livres, na qual foram calculadas as quatro primeiras frequências naturais, para as mesmas relações l/h , e espessuras das camadas exteriores. Os resultados obtidos, são apresentados na Tabela 27.

Tabela 27 – Frequências naturais normalizadas vs rácio l/h .

l/h	h_k	(1,1)	(2,1)	(1,2)	(2,2)
5	h/6	0.3811	0.6345	0.8080	0.9135
	h/5	0.3774	0.6037	0.8158	0.8883
	h/4	0.3694	0.5804	0.7996	0.8661
	h/3	0.3535	0.5501	0.7645	0.8537
10	h/6	0.1216	0.2339	0.3189	0.3812
	h/5	0.1211	0.2222	0.3223	0.3631
	h/4	0.1199	0.2054	0.3228	0.3365
	h/3	0.1172	0.1828	0.3005	0.3164
20	h/6	0.0331	0.0725	0.0993	0.1216
	h/5	0.0331	0.0671	0.1024	0.1211
	h/4	0.0330	0.0600	0.1052	0.1090
	h/3	0.0328	0.0513	0.0888	0.1067

Relativamente aos resultados obtidos para as frequências naturais, verifica-se que o aumento do rácio l/h , leva ao decréscimo das frequências naturais. A mesma tendência de decréscimo das frequências naturais, é igualmente verificada com o aumento da espessura das camadas exteriores.

Adicionalmente, são apresentados no apêndice A2.2, os resultados obtidos, mas neste caso, considerando um fator de correção ao corte $K=5/6$.

3.3.3 Influência da orientação das fibras na resposta estática e dinâmica numa placa compósita

A orientação das camadas de um laminado, apresenta um papel preponderante nas respostas estáticas e dinâmicas das estruturas compósitas. Tendo em conta esta importância, é merecido um estudo da influência da mesma nos laminados em estudo.

Neste estudo, são considerados três tipos de laminados, com as seguintes sequências de empilhamento: $[\theta^\circ/0^\circ/\theta^\circ]$, $[-\theta^\circ/0^\circ/\theta^\circ]$ e $[-\theta^\circ/90^\circ/\theta^\circ]$ onde, θ caracteriza o ângulo da orientação da fibra, sendo considerado neste estudo θ igual a 0° , 30° , 45° , 60° ou 90° . Os compósitos em estudo, são os mesmos que foram usados no estudo anterior, bem como os rácios l/h , e a normalização dos resultados – deformada transversal, tensões e frequências naturais. As espessuras das três camadas são iguais. Os resultados obtidos, são apresentados nas Tabela 28-33. Estes foram obtidos, recorrendo ao uso de elementos de Lagrange Q9, sendo considerados nove GDL.

Laminados $[\theta^\circ/0^\circ/\theta^\circ]$

Tabela 28 – Deformada e tensões normalizadas para laminados $[\theta^\circ/0^\circ/\theta^\circ]$.

l/h	Empilhamento	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x^1$	$\bar{\sigma}_x^2$	$\bar{\sigma}_x^3$	$\bar{\sigma}_y^1$	$\bar{\sigma}_y^2$	$\bar{\sigma}_y^3$	$\bar{\tau}_{xz}^1$	$\bar{\tau}_{xz}^2$
5	$[0^\circ/0^\circ/0^\circ]$	2.14E-09	18.8606	2.2167	2.2167	2.5442	0.7787	0.7787	3.0414	1.9686
	$[30^\circ/0^\circ/30^\circ]$	1.70E-09	12.0237	3.3023	4.3633	5.5495	1.3426	0.5884	2.5117	1.6649
	$[45^\circ/0^\circ/45^\circ]$	1.53E-09	8.1046	2.3263	3.4907	8.3541	2.5853	0.5242	2.2195	1.4765
	$[60^\circ/0^\circ/60^\circ]$	1.56E-09	5.1650	1.1668	5.3923	12.4994	3.1178	0.4897	1.9449	1.1327
	$[90^\circ/0^\circ/90^\circ]$	1.72E-09	1.9373	0.5558	9.1840	16.7142	6.2640	0.4399	1.3839	0.6264
10	$[0^\circ/0^\circ/0^\circ]$	1.78E-08	76.2657	20.5571	20.5571	6.5166	2.0940	2.0940	6.8372	3.9905
	$[30^\circ/0^\circ/30^\circ]$	1.60E-08	47.4375	12.7804	27.0856	19.6930	5.5572	2.1496	5.7971	3.3289
	$[45^\circ/0^\circ/45^\circ]$	1.50E-08	30.1627	8.2030	24.8592	30.6463	8.8301	2.3782	5.0787	2.9633
	$[60^\circ/0^\circ/60^\circ]$	1.53E-08	19.5482	5.9614	25.8571	48.5890	15.2072	2.3090	4.5459	2.2036
	$[90^\circ/0^\circ/90^\circ]$	1.59E-08	5.4659	1.6997	27.4375	73.8013	25.3755	1.6389	2.6868	0.9767
20	$[0^\circ/0^\circ/0^\circ]$	2.11E-07	303.6790	96.2366	96.2366	21.9219	7.2265	7.2265	14.1760	7.8875
	$[30^\circ/0^\circ/30^\circ]$	2.06E-07	188.8223	59.9691	129.9897	75.9990	24.3419	8.2395	12.4625	6.7458
	$[45^\circ/0^\circ/45^\circ]$	1.98E-07	118.8191	37.7501	121.8943	119.3034	38.1318	9.3731	11.1544	6.2335
	$[60^\circ/0^\circ/60^\circ]$	2.03E-07	76.3067	24.8855	110.2294	189.6396	62.3118	8.8632	10.8669	4.5299
	$[90^\circ/0^\circ/90^\circ]$	2.06E-07	19.2816	6.2762	102.4880	304.6326	102.3482	6.3685	5.4941	1.7139

Através da Tabela 28, é possível concluir que as estruturas habitualmente apelidadas de “cross-ply”, - laminados compostos apenas por 0° e 90° [2] – apresentam deformadas

transversais mais conservativas para laminados moderadamente espessos ($l/h=10$) e espessos ($l/h=5$). Relativamente às tensões, estas encontram-se em concordância com o verificado nas deformadas transversais.

As frequências naturais normalizadas, relativas a um laminado $[\theta^\circ/0^\circ/\theta^\circ]$, são apresentadas na Tabela 29.

Tabela 29 – Frequências naturais normalizadas, para laminados $[\theta^\circ/0^\circ/\theta^\circ]$.

l/h	Empilhamento	(1,1)	(2,1)	(1,2)	(2,2)
5	$[0^\circ/0^\circ/0^\circ]$	0.3184	0.5296	0.6699	0.8151
	$[30^\circ/0^\circ/30^\circ]$	0.3568	0.5996	0.7204	0.8591
	$[45^\circ/0^\circ/45^\circ]$	0.3759	0.6251	0.7582	0.8795
	$[60^\circ/0^\circ/60^\circ]$	0.3727	0.6052	0.7736	0.8715
	$[90^\circ/0^\circ/90^\circ]$	0.3535	0.5501	0.7645	0.8537
10	$[0^\circ/0^\circ/0^\circ]$	0.1104	0.1660	0.2795	0.2838
	$[30^\circ/0^\circ/30^\circ]$	0.1174	0.1997	0.2832	0.3055
	$[45^\circ/0^\circ/45^\circ]$	0.1212	0.2137	0.2866	0.3167
	$[60^\circ/0^\circ/60^\circ]$	0.1203	0.2082	0.2999	0.3166
	$[90^\circ/0^\circ/90^\circ]$	0.1172	0.1828	0.3005	0.3164
20	$[0^\circ/0^\circ/0^\circ]$	0.0321	0.0464	0.0768	0.1016
	$[30^\circ/0^\circ/30^\circ]$	0.0329	0.0569	0.0900	0.0933
	$[45^\circ/0^\circ/45^\circ]$	0.0336	0.0615	0.0900	0.0949
	$[60^\circ/0^\circ/60^\circ]$	0.0332	0.0601	0.0949	0.0957
	$[90^\circ/0^\circ/90^\circ]$	0.0328	0.0513	0.0888	0.1067

Quando as camadas exteriores não possuem o mesmo ângulo que o núcleo, a frequência fundamental, bem como as frequências naturais superiores aumentam, sendo para o caso onde as camadas exteriores estão a 45° , onde se verificam as frequências superiores. Novamente, este efeito é mais significativo em placas espessas.

Em suma, para um laminado com um empilhamento $[\theta^\circ/0^\circ/\theta^\circ]$, a melhor sequência de empilhamento para uma menor deformada transversal e uma frequência fundamental máxima, verifica-se para um laminado $[45^\circ/0^\circ/45^\circ]$.

Laminados $[-\theta^\circ/0^\circ/\theta^\circ]$

Passando agora para o segundo tipo de laminados em estudo, - laminados simétricos $[-\theta^\circ/0^\circ/\theta^\circ]$ – foram realizados os mesmos estudos, sendo os resultados apresentados nas Tabela 30 e 31.

Tabela 30 – Deformação transversal e tensões normalizadas para laminados $[-\theta^\circ/0^\circ/\theta^\circ]$.

<i>l/h</i>	<i>Empilhamento</i>	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x^1$	$\bar{\sigma}_x^2$	$\bar{\sigma}_x^3$	$\bar{\sigma}_y^1$	$\bar{\sigma}_y^2$	$\bar{\sigma}_y^3$	$\bar{\tau}_{xz}^1$	$\bar{\tau}_{xz}^2$
5	$[-30^\circ/0^\circ/30^\circ]$	1.36E-09	10.6046	2.2560	6.1698	4.5360	0.9185	1.0381	2.2967	1.6094
	$[-45^\circ/0^\circ/45^\circ]$	1.20E-09	7.2749	1.7780	3.3350	7.2567	1.8070	1.4519	1.9979	1.4215
	$[-60^\circ/0^\circ/60^\circ]$	1.31E-09	4.3180	1.2189	2.7765	10.6534	3.4639	1.3589	1.6848	1.1015
10	$[-30^\circ/0^\circ/30^\circ]$	1.18E-08	39.0379	12.3092	21.9477	15.7575	4.7019	3.4992	5.0932	3.5805
	$[-45^\circ/0^\circ/45^\circ]$	1.05E-08	26.9461	10.9467	14.2479	27.2759	11.0915	5.0608	4.4088	3.0320
	$[-60^\circ/0^\circ/60^\circ]$	1.17E-08	15.6310	6.4519	14.7755	40.0437	18.3180	4.6169	3.7081	2.2366
20	$[-30^\circ/0^\circ/30^\circ]$	1.43E-07	154.4374	52.6199	80.4305	59.8252	19.7365	11.5330	10.6298	9.9229
	$[-45^\circ/0^\circ/45^\circ]$	1.29E-07	107.6135	45.2929	59.0214	108.8538	45.8082	16.5644	9.1362	8.0365
	$[-60^\circ/0^\circ/60^\circ]$	1.44E-07	60.4675	25.1479	61.1296	158.0092	71.2223	15.0004	7.7873	5.3613

Através da análise da Tabela 30, verifica-se que quando as camadas exteriores são simétricas, o laminado apresenta um comportamento mais rígido, quando comparado com o primeiro tipo de laminados em estudo $[\theta^\circ/0^\circ/\theta^\circ]$. Adicionalmente, verificou-se que a melhor sequência de empilhamento tendo em conta a menor deformada transversal, é obtida com $[-45^\circ/0^\circ/45^\circ]$.

As frequências naturais normalizadas, para um laminado $[-\theta^\circ/0^\circ/\theta^\circ]$, são apresentadas na Tabela 31.

Tabela 31 - Frequências naturais normalizadas, para laminados $[-\theta^\circ/0^\circ/\theta^\circ]$.

<i>l/h</i>	<i>Empilhamento</i>	(1,1)	(2,1)	(1,2)	(2,2)
5	$[-30^\circ/0^\circ/30^\circ]$	0.3976	0.6774	0.7444	0.9865
	$[-45^\circ/0^\circ/45^\circ]$	0.4220	0.7353	0.7778	1.0323
	$[-60^\circ/0^\circ/60^\circ]$	0.4050	0.6630	0.8061	0.9850
10	$[-30^\circ/0^\circ/30^\circ]$	0.1361	0.2424	0.2994	0.3875
	$[-45^\circ/0^\circ/45^\circ]$	0.1441	0.2859	0.2915	0.4243
	$[-60^\circ/0^\circ/60^\circ]$	0.1368	0.2458	0.3171	0.3849
20	$[-30^\circ/0^\circ/30^\circ]$	0.0393	0.0737	0.0999	0.1216
	$[-45^\circ/0^\circ/45^\circ]$	0.0415	0.0906	0.0914	0.1458
	$[-60^\circ/0^\circ/60^\circ]$	0.0392	0.0757	0.1013	0.1267

Relativamente às frequências naturais, verifica-se que a nível dinâmico, a sequência $[-45^\circ/0^\circ/45^\circ]$ é também a mais vantajosa, visto obterem-se os maiores valores de frequências naturais.

Laminados [-θ°/90°/θ°]

Finalmente, para terminar este estudo, falta apenas apresentar e analisar os resultados obtidos, para laminados com sequências de empilhamento do tipo [-θ°/90°/θ°]. Os resultados obtidos, são apresentados nas Tabela 32 e 33.

Tabela 32 – Deformada transversal e tensões normalizadas para laminados [-θ°/90°/θ°].

<i>l/h</i>	<i>Empilhamento</i>	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x^1$	$\bar{\sigma}_x^2$	$\bar{\sigma}_x^3$	$\bar{\sigma}_y^1$	$\bar{\sigma}_y^2$	$\bar{\sigma}_y^3$	$\bar{\tau}_{xz}^1$	$\bar{\tau}_{xz}^2$
5	[0°/90°/0°]	1.72E-09	16.7142	6.2640	0.4399	1.9373	0.5558	9.1840	3.2748	1.8389
	[-30°/90°/30°]	1.31E-09	10.6534	3.4639	1.3589	4.3180	1.2189	2.7765	2.6221	1.8097
	[-45°/90°/45°]	1.20E-09	7.2567	1.8070	1.4519	7.2749	1.7780	3.3350	2.1744	1.6364
	[-60°/90°/60°]	1.36E-09	4.5360	0.9185	1.0381	10.6046	2.2560	6.1698	1.7903	1.2796
10	[0°/90°/0°]	1.59E-08	73.8013	25.3755	1.6389	5.4659	1.6997	27.4375	6.8049	3.8884
	[-30°/90°/30°]	1.17E-08	40.0437	18.3180	4.6169	15.6310	6.4519	14.7755	5.3656	4.9047
	[-45°/90°/45°]	1.05E-08	27.2759	11.0915	5.0608	26.9461	10.9467	14.2479	4.4455	4.3578
	[-60°/90°/60°]	1.18E-08	15.7575	4.7019	3.4992	39.0379	12.3092	21.9477	3.4952	2.9696
20	[0°/90°/0°]	2.06E-07	304.6326	102.3482	6.3685	19.2816	6.2762	102.4880	13.7655	7.9295
	[-30°/90°/30°]	1.44E-07	158.0092	71.2223	15.0004	60.4675	25.1479	61.1296	10.8575	14.2759
	[-45°/90°/45°]	1.29E-07	108.8538	45.8082	16.5644	107.6135	45.2929	59.0214	9.0321	12.3551
	[-60°/90°/60°]	1.43E-07	59.8252	19.7365	11.5330	154.4374	52.6199	80.4305	7.0534	7.9900

Analisando a Tabela 32 verifica-se, que a sequência de empilhamento mais favorável, é a [-45°/90°/45°].

As frequências naturais normalizadas, para os laminados [-θ°/90°/θ°], são apresentadas na Tabela 33.

Tabela 33 – Frequências naturais normalizadas para laminados $[-\theta^{\circ}/90^{\circ}/\theta^{\circ}]$.

l/h	Empilhamento	(1,1)	(2,1)	(1,2)	(2,2)
5	$[0^{\circ}/90^{\circ}/0^{\circ}]$	0.3535	0.5501	0.7645	0.8537
	$[-30^{\circ}/90^{\circ}/30^{\circ}]$	0.4050	0.6630	0.8061	0.9850
	$[-45^{\circ}/90^{\circ}/45^{\circ}]$	0.4220	0.7353	0.7778	1.0323
	$[-60^{\circ}/90^{\circ}/60^{\circ}]$	0.3976	0.6774	0.7444	0.9865
10	$[0^{\circ}/90^{\circ}/0^{\circ}]$	0.1172	0.1828	0.3005	0.3164
	$[-30^{\circ}/90^{\circ}/30^{\circ}]$	0.1368	0.2458	0.3171	0.3849
	$[-45^{\circ}/90^{\circ}/45^{\circ}]$	0.1441	0.2859	0.2915	0.4243
	$[-60^{\circ}/90^{\circ}/60^{\circ}]$	0.1361	0.2424	0.2994	0.3875
20	$[0^{\circ}/90^{\circ}/0^{\circ}]$	0.0328	0.0513	0.0888	0.1067
	$[-30^{\circ}/90^{\circ}/30^{\circ}]$	0.0392	0.0757	0.1013	0.1267
	$[-45^{\circ}/90^{\circ}/45^{\circ}]$	0.0415	0.0906	0.0914	0.1458
	$[-60^{\circ}/90^{\circ}/60^{\circ}]$	0.0393	0.0737	0.0999	0.1216

Através da análise da Tabela 33, verifica-se uma conclusão similar à verificada na Tabela 32, relativamente à sequência mais favorável a obter as maiores frequências naturais.

Em suma, através da comparação dos resultados obtidos para os três tipos de laminados, foram retiradas várias elações, sendo estas apresentadas conjuntamente com apoios gráficos de forma a facilitar a análise.

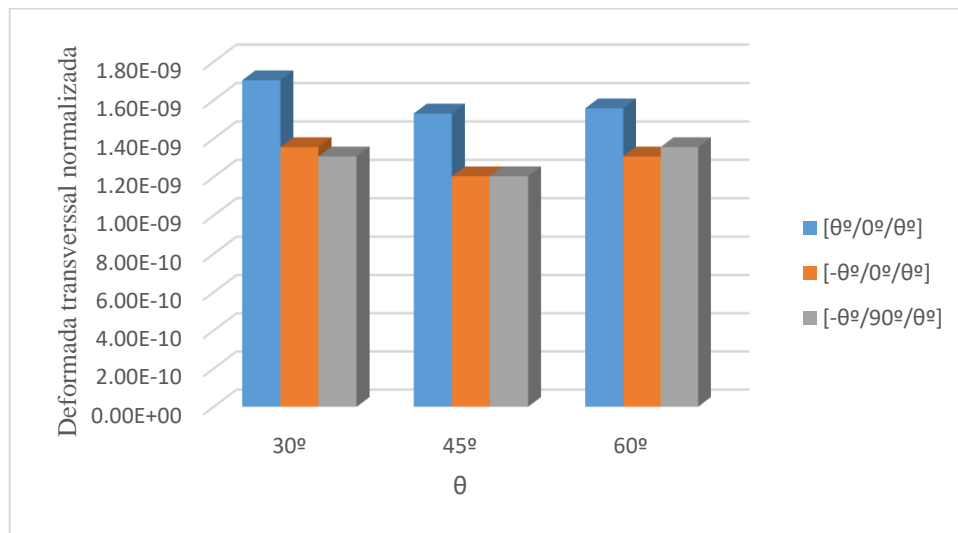


Fig. 38 – Deformadas transversais normalizadas para $l/h=5$. Diferentes laminados.

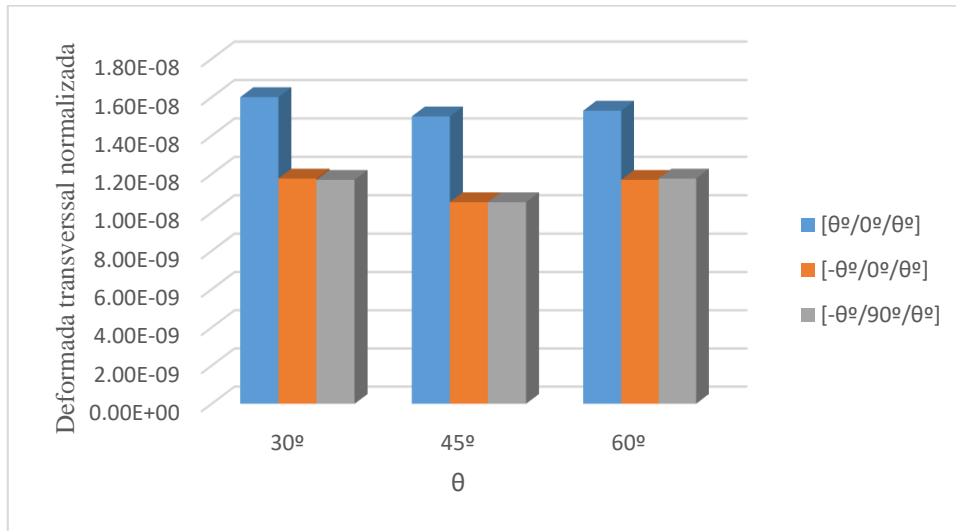


Fig. 39 - Deformadas transversais normalizadas para l/h=10. Diferentes laminados.

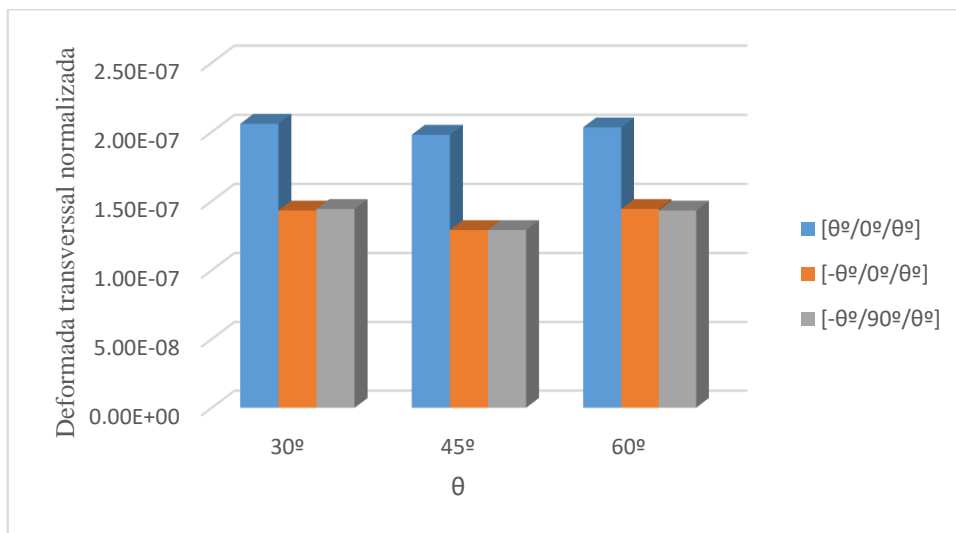


Fig. 40 - Deformadas transversais normalizadas para l/h=20. Diferentes laminados.

Analisando as Fig. 38-40, conclui-se que um laminado com camadas exteriores a 45°, apresenta uma maior rigidez. Dentro do tipo de laminados que possuem camadas exteriores a $\pm 45^\circ$, o laminado com a sequência $[-45^\circ/0^\circ/45^\circ]$, é a estrutura que apresenta a maior rigidez, tendo em conta as consideradas neste estudo.

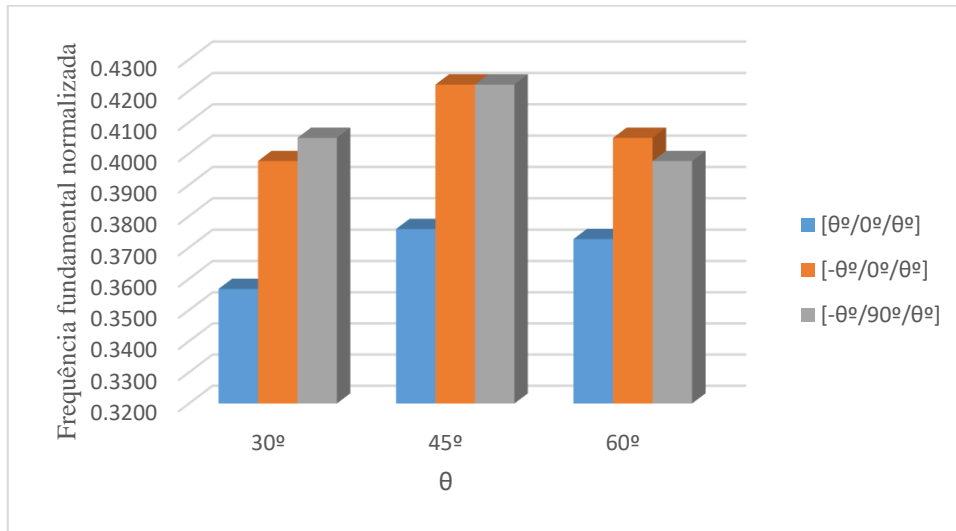


Fig. 41 – Frequências fundamentais normalizadas para l/h=5. Diferentes laminados.

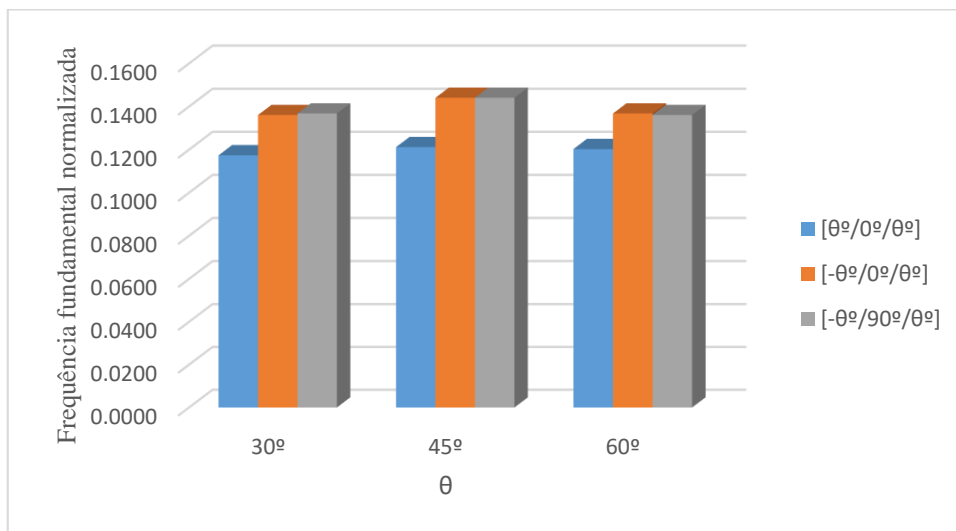


Fig. 42 - Frequências fundamentais normalizadas para l/h=10. Diferentes laminados.

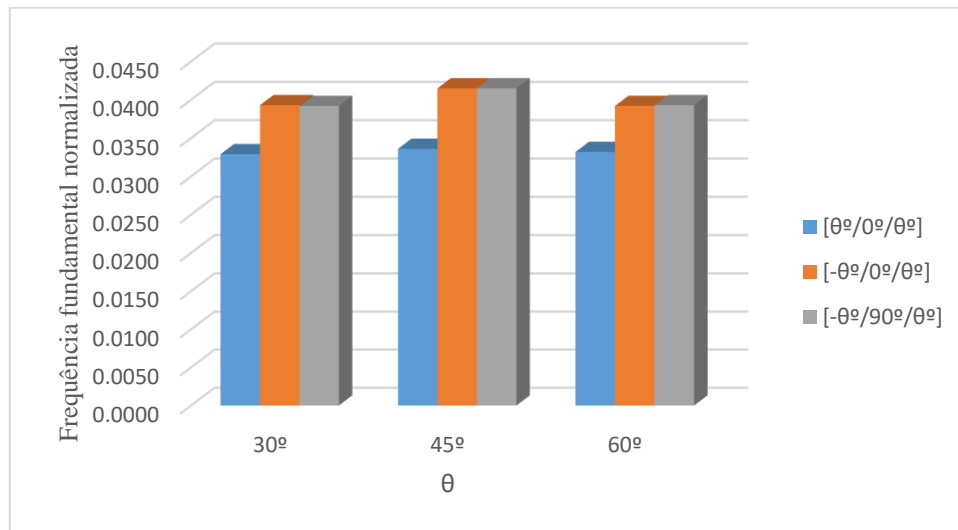


Fig. 43 - Frequências fundamentais normalizadas para $l/h=20$. Diferentes laminados.

Aplicando a mesma análise comparativa adotada na estática, mas desta vez, relativamente às frequências fundamentais, através das Fig. 41-43, chegam-se às mesmas conclusões. Conclui-se assim, que quer a análise seja estática ou dinâmica, para os tipos de laminados estudados, as sequências de empilhamento, $[-45^\circ/90^\circ/45^\circ]$, $[-45^\circ/0^\circ/45^\circ]$, são as que permitem obter melhores desempenhos.

Adicionalmente, são apresentados nos apêndices A2.3, os resultados obtidos, mas neste caso, considerando um fator de correção ao corte comumente usado de $K=5/6$.

3.3.4 Influência do tipo de fibra na resposta estática e dinâmica duma placa compósita

Neste estudo, procurou-se verificar a influência que a escolha do material da fibra, tem na resposta estática e dinâmica de placas reforçadas com fibras, variando o material da fibra (fibra de vidro e fibra de carbono, propriedades na Tabela 19), mantendo a mesma matriz em todos os casos.

Os laminados em estudo, possuem uma sequência de empilhamento $[30^\circ/0^\circ/30^\circ]$, com cada camada com igual espessura. As CF, os carregamentos aplicados, e a normalização dos resultados são os mesmos que foram utilizados nos estudos anteriores. Os resultados obtidos, são apresentados nas Tabela 34 e Tabela 35. Estes resultados, foram obtidos recorrendo ao uso de elementos de Lagrange Q9, sendo considerados nove GDL.

Tabela 34 – Deformada transversal e tensões normalizadas. Diferentes fibras.

$V_f=0.6$	l/h	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x^1$	$\bar{\sigma}_x^2$	$\bar{\sigma}_x^3$	$\bar{\sigma}_y^1$	$\bar{\sigma}_y^2$	$\bar{\sigma}_y^3$	$\bar{\tau}_{xz}^1$	$\bar{\tau}_{xz}^2$
GE	5	2.01E-09	15.5718	8.8353	2.7273	10.4644	6.0754	1.3079	2.3512	1.4542
	10	2.33E-08	60.1291	35.5669	14.5513	37.6171	22.365	5.0361	5.0489	2.9002
	20	3.36E-07	238.11	142.358	61.7848	146.004	87.3974	19.9212	10.4751	5.8138
CE	5	1.70E-09	22.8637	12.0237	3.2305	10.1864	5.5495	0.5884	2.5117	1.6649
	10	1.60E-08	82.0946	47.4375	24.2797	33.8287	19.693	1.922	5.7971	3.3289
	20	2.06E-07	317.675	188.822	108.965	127.656	75.999	7.2027	12.4625	6.7458

Analisando a Tabela 34, é possível concluir, tal como era esperado, que um compósito CE, é mais rígido comparativamente a um laminado GE. Isto deve-se aos ângulos das fibras da sequência de empilhamento, serem muito próximos da direção 1 da fibra, direção a qual onde as fibras de carbono apresentam um módulo de elasticidade muito superior ao das fibras de vidro o que torna as estruturas onde são aplicadas, mais rígidas, quando uma sequência de empilhamento semelhante é adotada. Em adição, verifica-se ainda que com o aumento do rácio l/h , a deformada transversal aumenta. Este comportamento é igualmente verificado no caso das tensões.

Aproveitando este caso de estudo, para apresentar algumas representações gráficas possíveis de serem obtidas através do código implementado, são aqui apresentadas as deformações transversais dos compósitos em estudo para um rácio $l/h=10$.

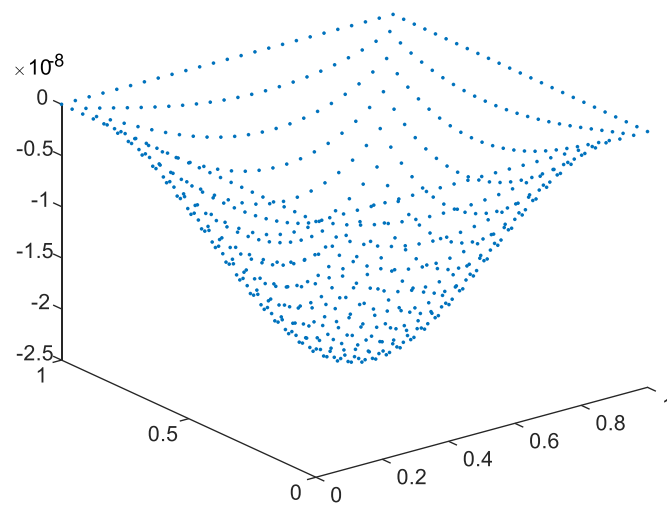


Fig. 44 – Deformada transversal para compósito GE, $l/h=10$.

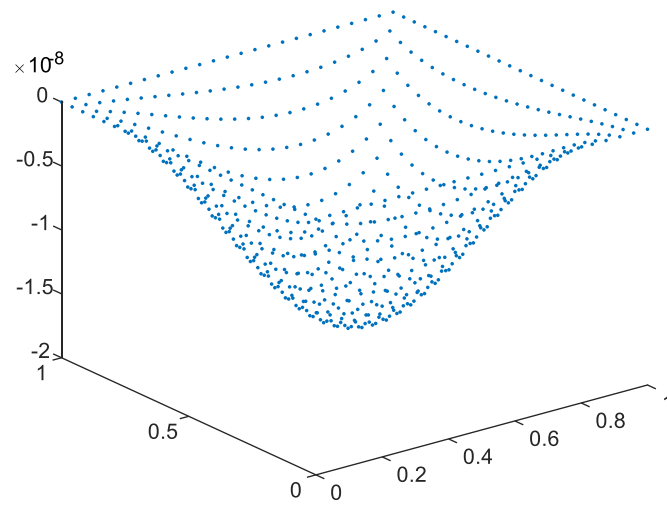


Fig. 45 – Deformada transversal para compósito CE, $l/h=10$.

Relativamente às distribuições das tensões ao longo da espessura, estas são apresentadas nas Fig. 46-63 O ponto de recolha das tensões considerado, situa-se no centro da placa. A nível da malha (12X12), este ponto é o terceiro ponto de Gauss, do elemento 66. A escolha deste ponto, deveu-se a este se situar no centro da placa.

Nas Fig. 46-49, são apresentadas as distribuições das tensões normais em espessura, para um rácio $l/h=5$.

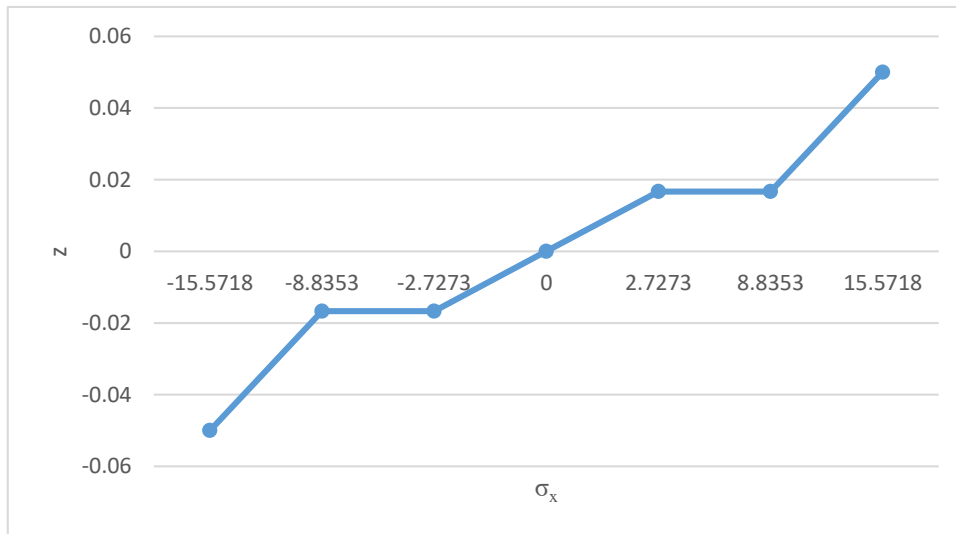


Fig. 46 – Distribuição de σ_x ao longo da espessura para compósito GE, $l/h=5$.

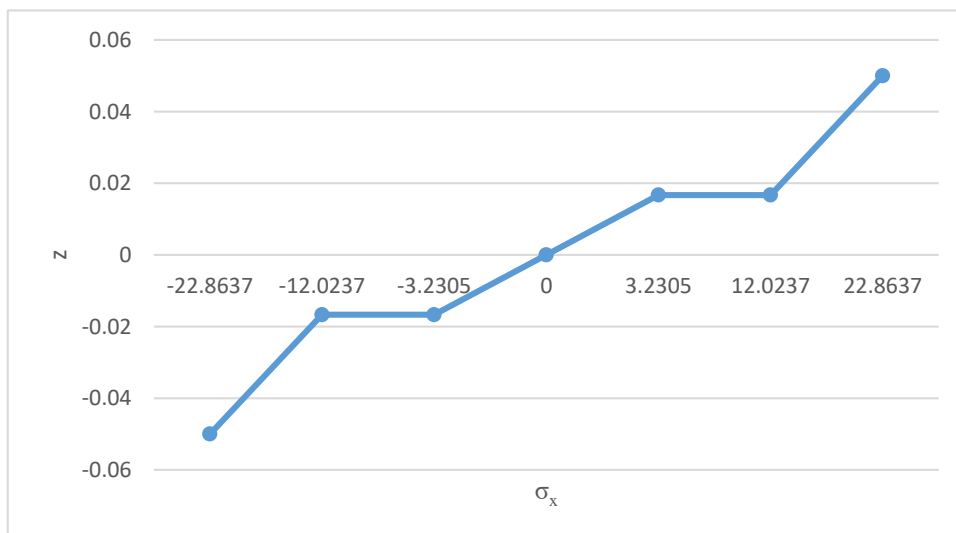


Fig. 47 – Distribuição de σ_x ao longo da espessura para compósito CE, $l/h=5$.

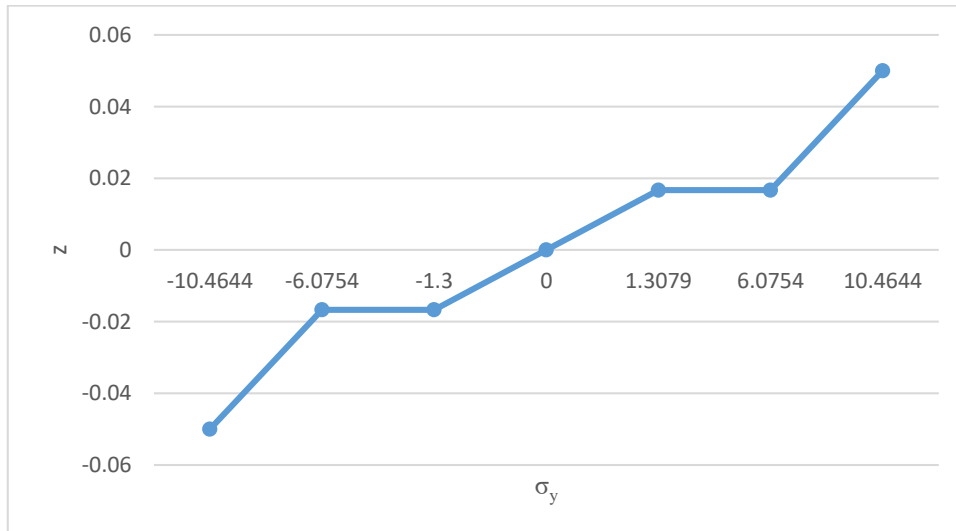


Fig. 48 – Distribuição de σ_y ao longo da espessura para compósito GE, $l/h=5$.

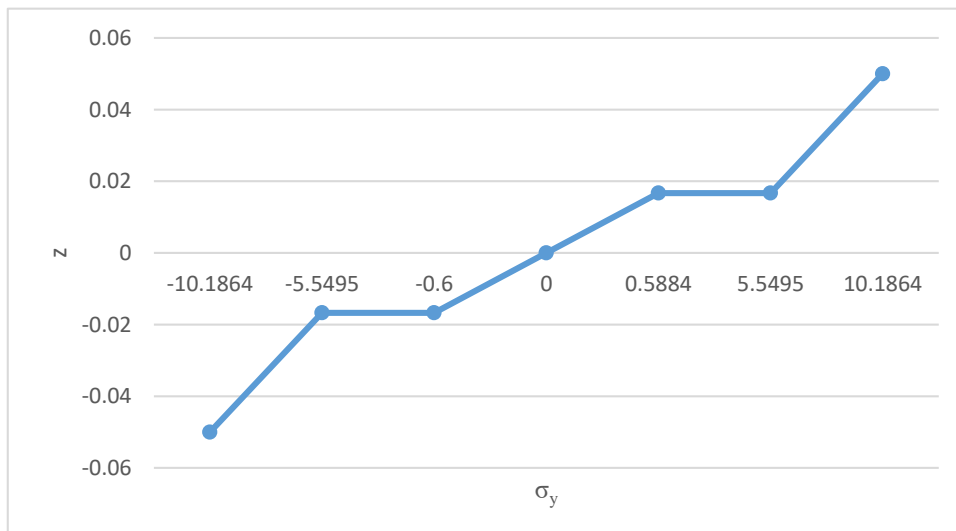


Fig. 49 – Distribuição de σ_y ao longo da espessura para compósito CE, $l/h=5$.

Tal como se observa nas Fig. 46-49, para um rácio $l/h=5$, as distribuições das tensões normais em espessura, apresentam uma evolução linear por troços (camadas), como seria de esperar de acordo com a teoria *layerwise* utilizada.

No que diz respeito às distribuições das tensões de corte interlaminares, estas são apresentadas na Fig. 50 e na Fig. 51, para um rácio $l/h=5$.

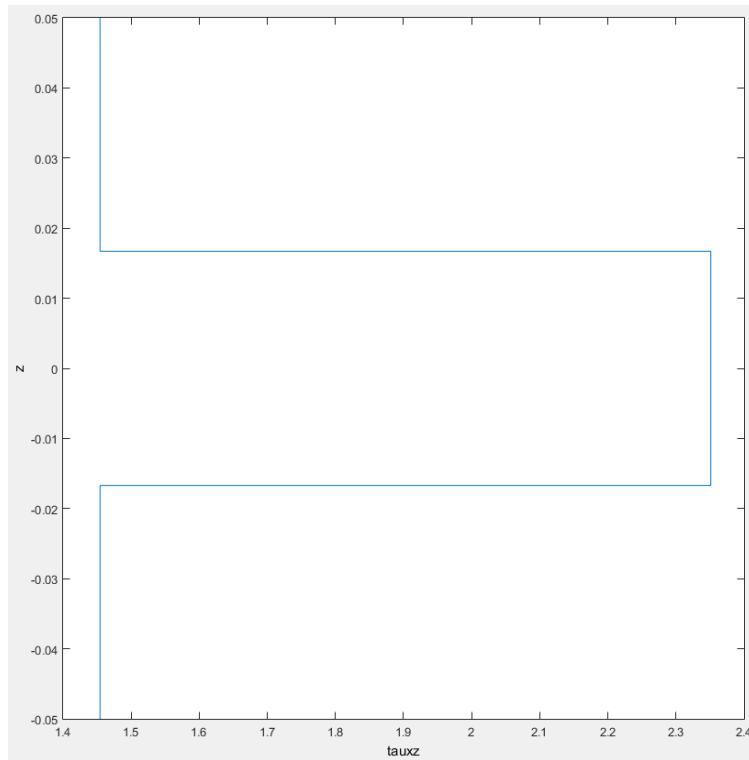


Fig. 50 - Distribuição de τ_{xz} ao longo da espessura para compósito GE, $l/h=5$.

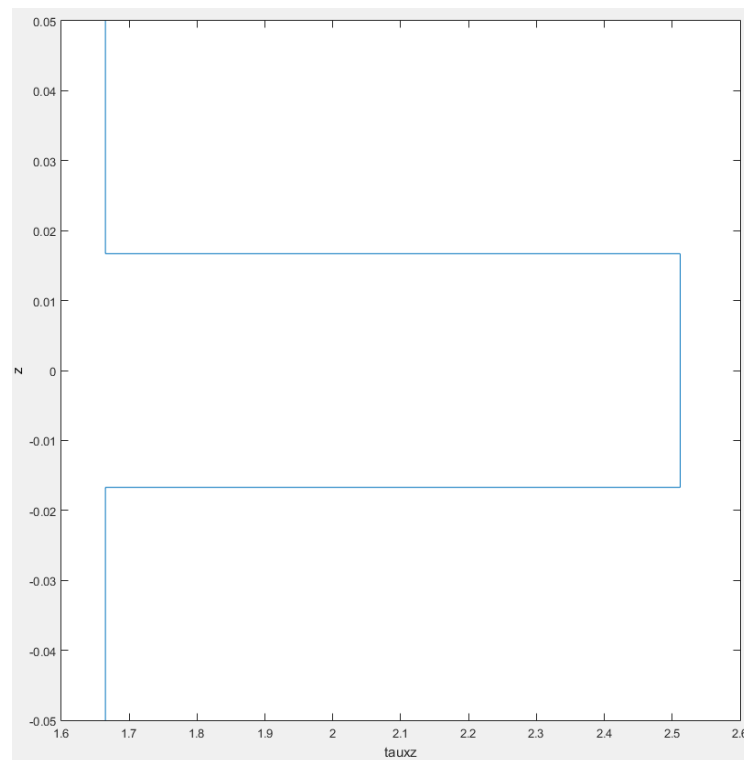


Fig. 51 - Distribuição de τ_{xz} ao longo da espessura para compósito CE, $l/h=5$.

Tal como se observa na Fig. 50 e na Fig. 51, obtém-se um perfil constante em cada troço, tal como a teoria de deformação de corte de primeira ordem prevê.

Relativamente às distribuições obtidas para um rácio $l/h=10$, as distribuições das tensões normais em espessura são apresentadas nas Fig. 52-55.

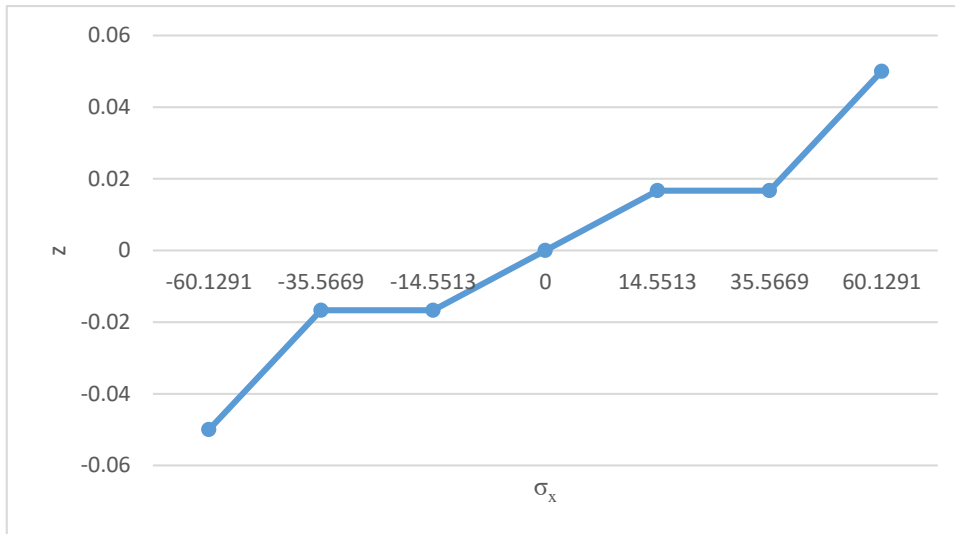


Fig. 52 – Distribuição de σ_x ao longo da espessura para compósito GE, $l/h=10$.

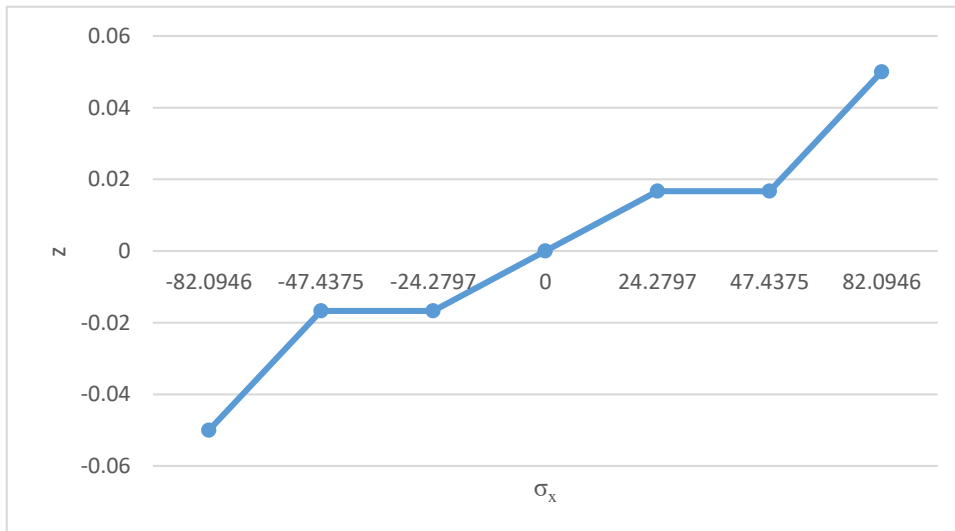


Fig. 53 – Distribuição de σ_x ao longo da espessura para compósito CE, $l/h=10$.

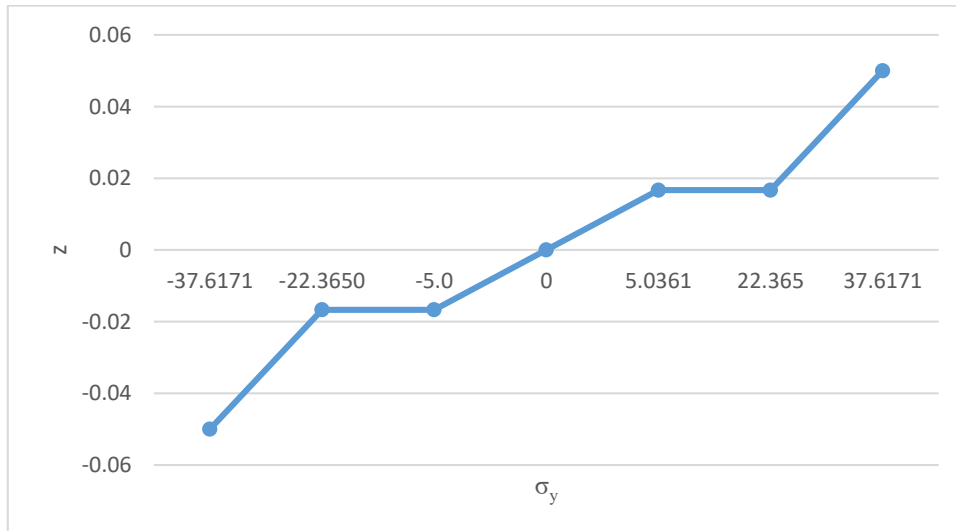


Fig. 54 – Distribuição de σ_y ao longo da espessura para compósito GE, $l/h=10$.

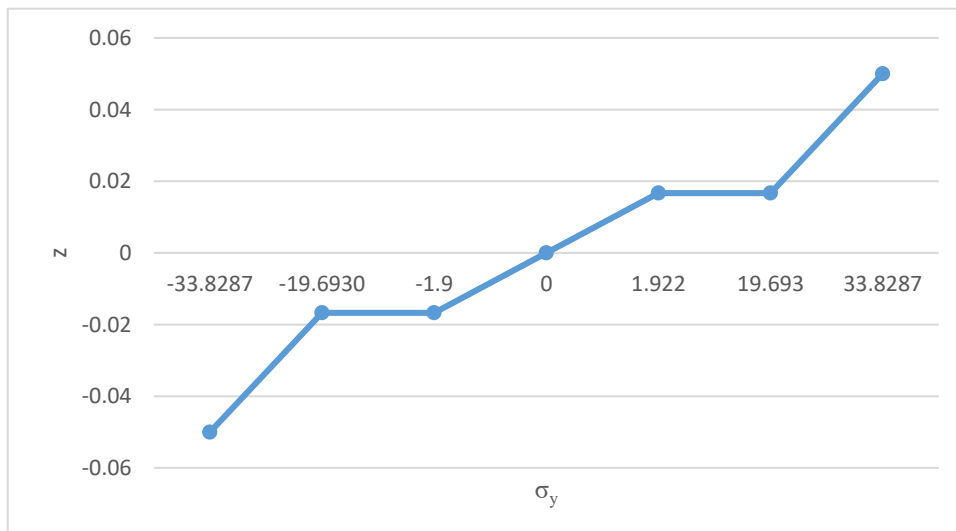


Fig. 55 – Distribuição de σ_y ao longo da espessura para compósito CE, $l/h=10$.

Tal como se observa nas Fig. 52-55, para um rácio $l/h=10$, as distribuições das tensões normais em espessura, apresentam uma evolução linear por troços (camadas), como seria de esperar de acordo com a teoria *layerwise* utilizada.

No que diz respeito às distribuições das tensões de corte interlaminares, estas são apresentadas na Fig. 56 e na Fig. 57, para um rácio $l/h=10$.

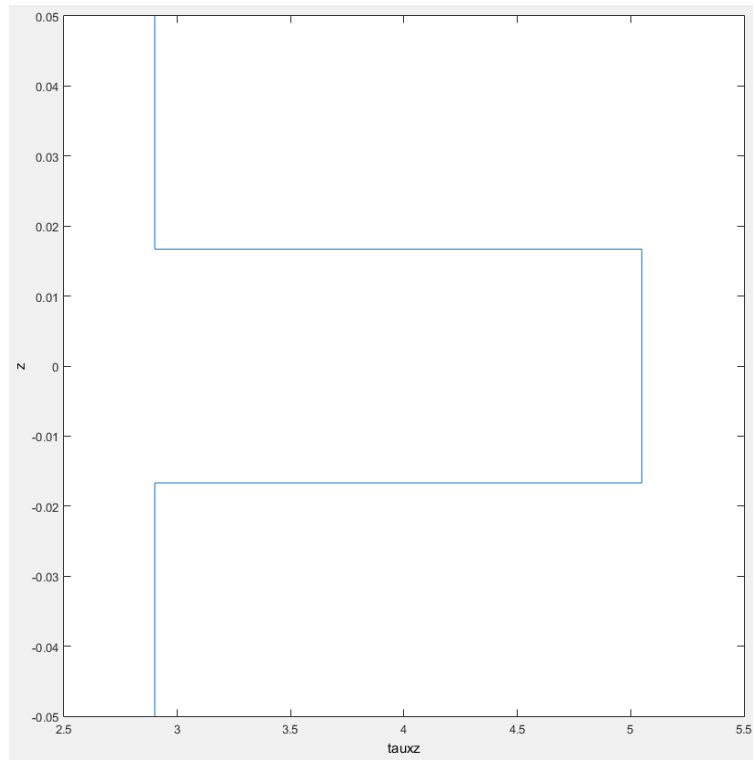


Fig. 56 - Distribuição de τ_{xz} ao longo da espessura para compósito GE, $l/h=10$.

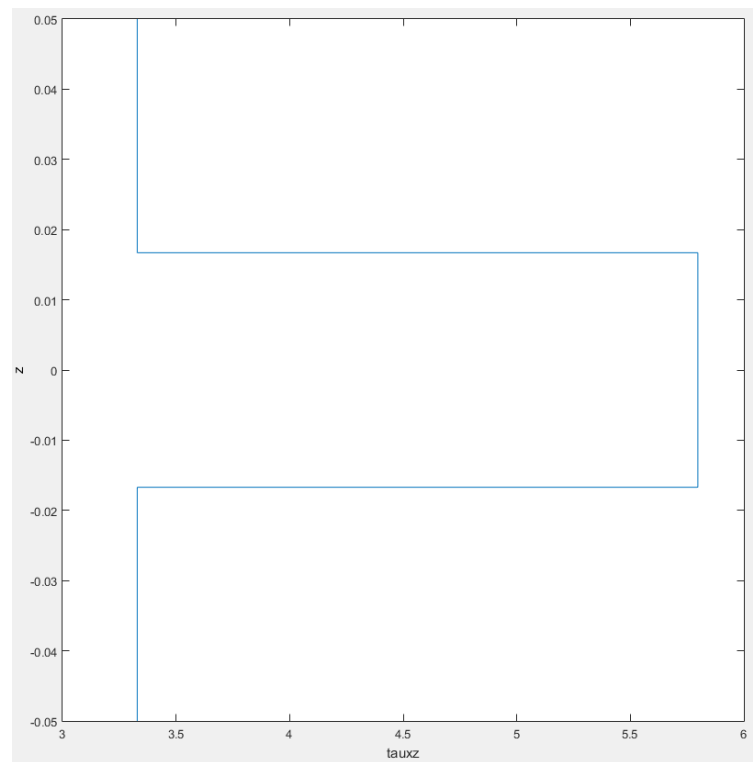


Fig. 57 - Distribuição de τ_{xz} ao longo da espessura para compósito CE, $l/h=10$.

Tal como se observa na Fig. 56 e na Fig. 57, obtém-se um perfil constante em cada troço, tal como a teoria de deformação de corte de primeira ordem prevê.

A apresentação das distribuições obtidas para um rácio $l/h=20$, é realizada nas Fig. 58-61.

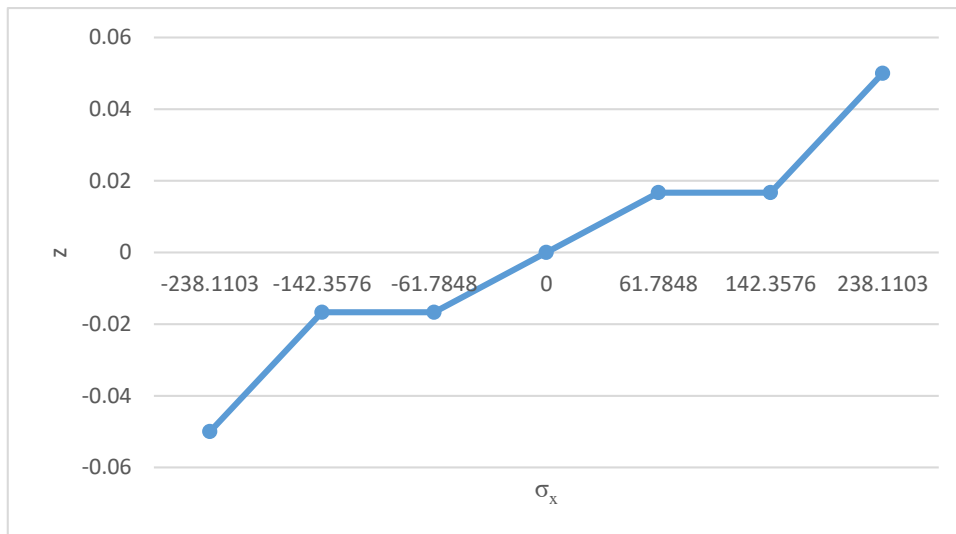


Fig. 58 – Distribuição de σ_x ao longo da espessura para compósito GE, $l/h=20$.

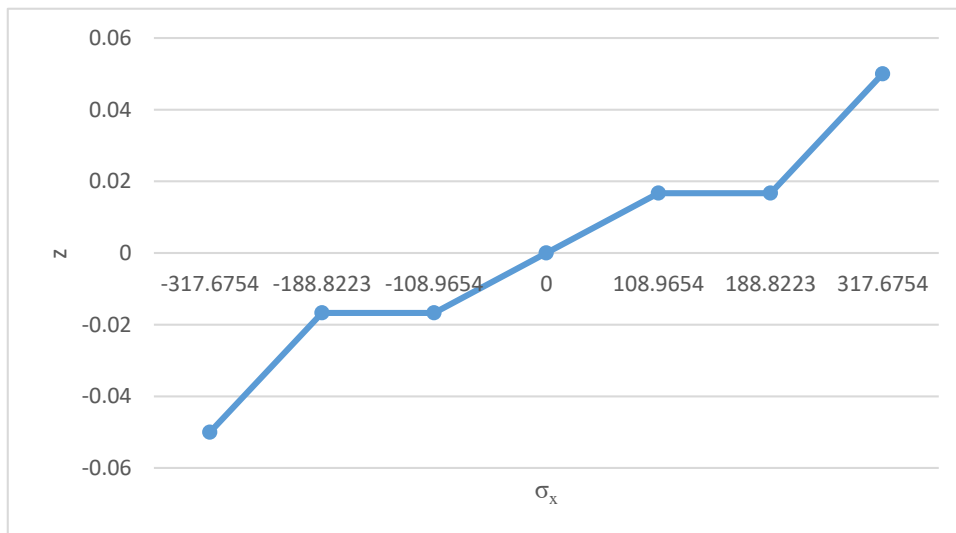


Fig. 59 – Distribuição de σ_x ao longo da espessura para compósito CE, $l/h=20$.

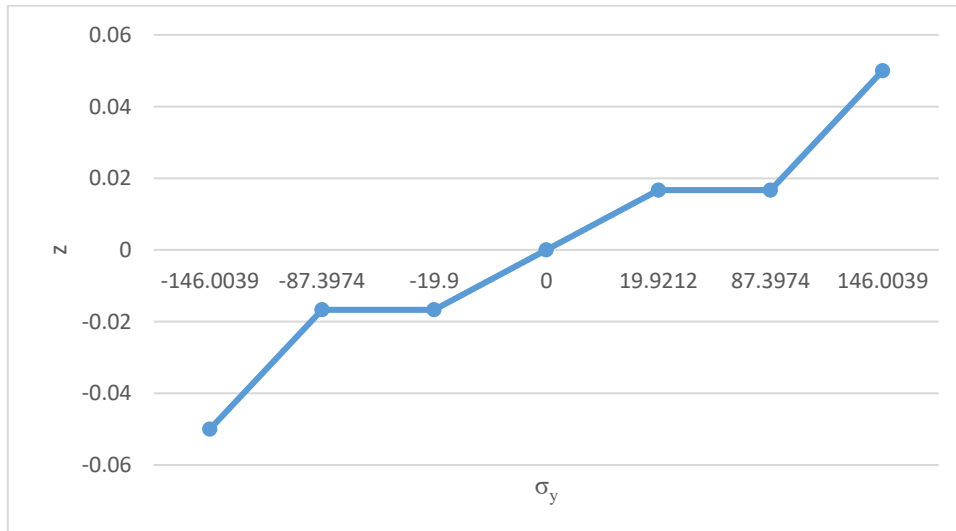


Fig. 60 – Distribuição de σ_y ao longo da espessura para compósito GE, $l/h=20$.

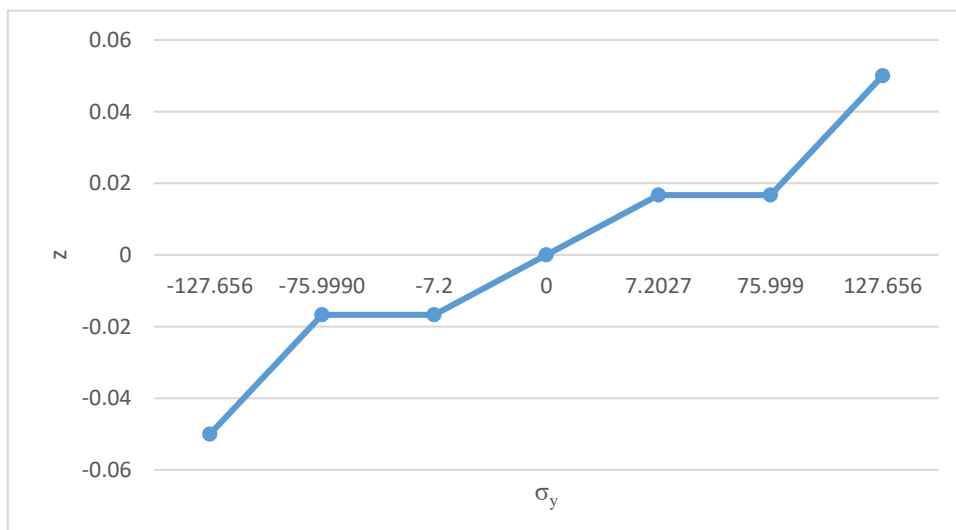


Fig. 61 – Distribuição de σ_y ao longo da espessura para compósito CE, $l/h=20$.

Mais uma vez, observa-se nas Fig. 62-63, para um rácio $l/h=20$, as distribuições das tensões normais em espessura, apresentam uma evolução linear por troços (camadas), como seria de esperar de acordo com a teoria *layerwise* utilizada.

Finalmente, as distribuições das tensões de corte interlaminares, para um rácio $l/h=20$, são apresentadas na Fig. 62 e na Fig. 63.

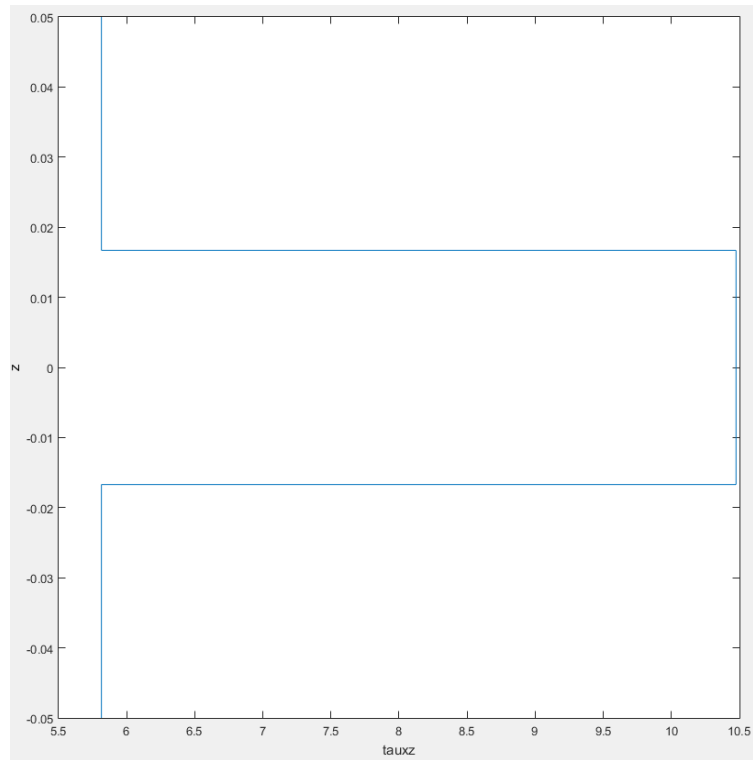


Fig. 62 - Distribuição de τ_{xz} ao longo da espessura para compósito GE, $l/h=20$.

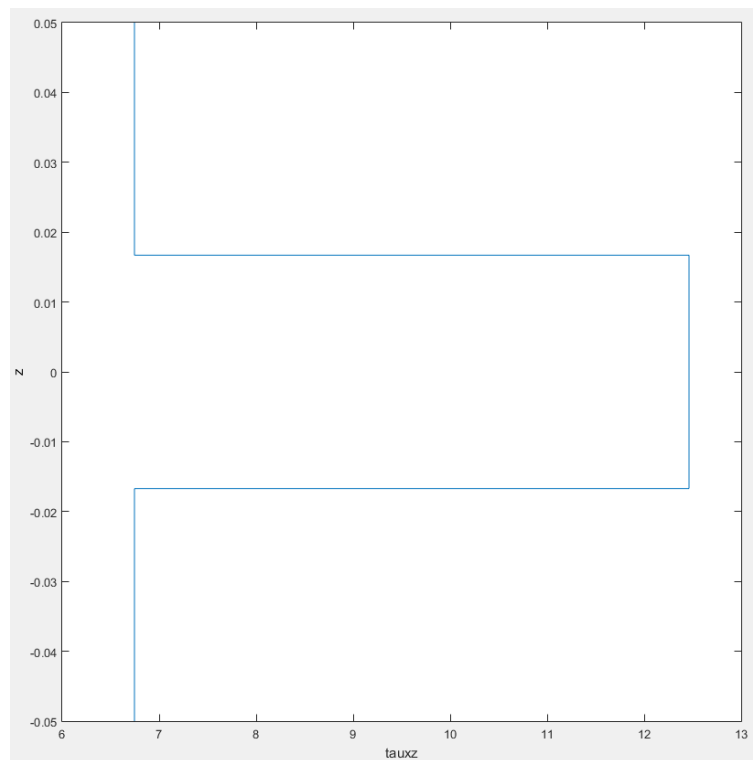


Fig. 63 - Distribuição de τ_{xz} ao longo da espessura para compósito CE, $l/h=20$.

Novamente, observa-se na Fig. 62 e na Fig. 63, para um rácio $l/h=20$, as distribuições das tensões normais em espessura, apresentam uma evolução linear por troços (camadas), como seria de esperar de acordo com a teoria *layerwise* utilizada.

Os resultados obtidos para as primeiras quatro frequências naturais, são apresentados na Tabela 35 e nas Fig. 64 e Fig. 65.

Tabela 35 – Frequências naturais normalizadas. Diferentes fibras.

$V_f=0.6$	l/h	(1,1)	(2,1)	(1,2)	(2,2)
GE	5	0.2518	0.4788	0.5241	0.6862
	10	0.0747	0.1520	0.1819	0.2409
	20	0.0198	0.0414	0.0527	0.0697
CE	5	0.3568	0.5996	0.7204	0.8591
	10	0.1174	0.1997	0.2832	0.3055
	20	0.0329	0.0569	0.0900	0.0933

Através da análise da Tabela 35, tal como era expectável, verifica-se que um compósito CE, apresenta maior rigidez comparativamente ao compósito GE – as frequências fundamentais e as restantes frequências naturais no compósito CE são superiores às verificadas no compósito GE. As Fig. 64 e Fig. 65, evidenciam a evolução e a comparação das frequências naturais dos dois compósitos para diferentes rácios l/h .

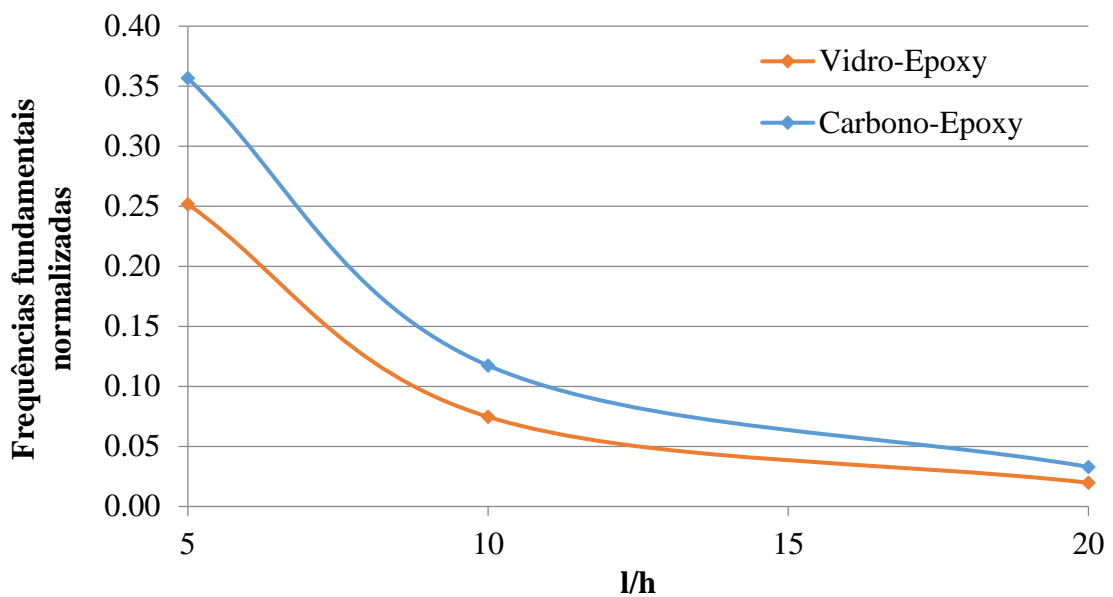


Fig. 64 – Frequências fundamentais normalizadas para GE e CE.

Na Fig. 64, é apresentada a evolução da frequência fundamental, para os dois compósitos estudados, em função do rácio l/h . Analisando esta figura, verifica-se que as frequências fundamentais normalizadas, dos dois materiais compósitos, tendem a ser aproximadamente iguais, para rácios l/h superiores. Apesar desta tendência de aproximação, a frequência fundamental do compósito CE, nunca será inferior à do compósito GE, para as propriedades mecânicas consideradas. Esta afirmação é sustentada pela Tabela 36, onde são apresentadas as frequências fundamentais para rácios l/h , até 100.

Tabela 36 – Tendência da frequência fundamental normalizada para diferentes rácios l/h .

$Vf=0.6$	l/h			
	5	10	20	100
GE	0.2518	0.0747	0.0198	0.0008
CE	0.3568	0.1174	0.0329	0.0014

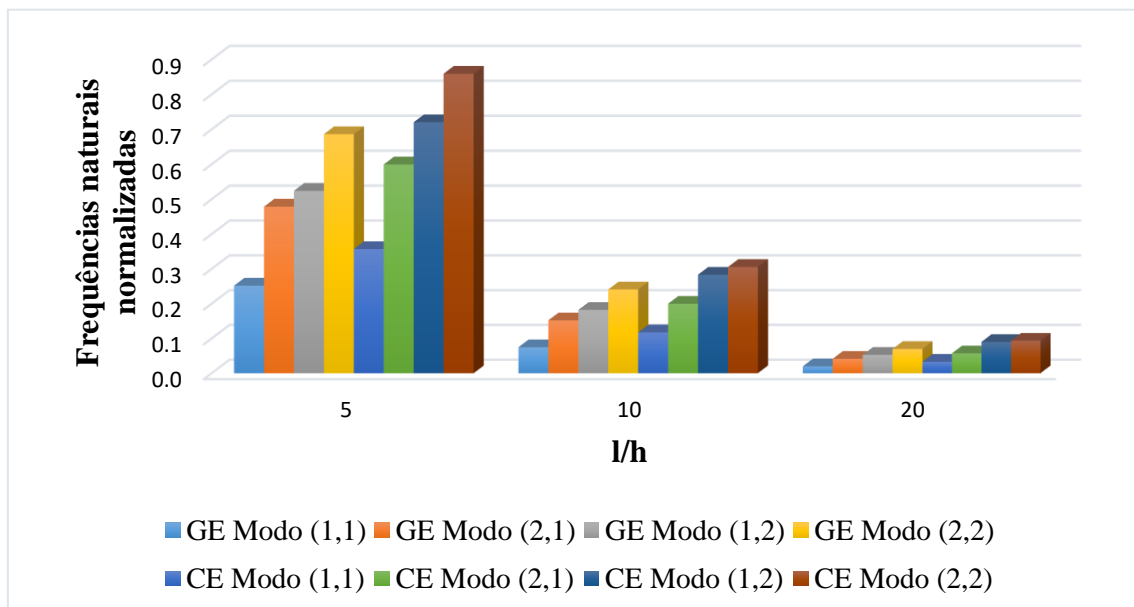


Fig. 65 - Frequências naturais normalizadas para VE e CE.

Relativamente à Fig. 65, é verificado que com o aumento do rácio l/h , as frequências naturais tendem a diminuir.

Adicionalmente, são apresentados nos apêndices A2.4, os resultados obtidos, mas neste caso, considerando um fator de correção ao corte comumente usado de $K=5/6$.

3.3.5 Influência do número de GDL e das condições fronteira na resposta estática e dinâmica duma placa compósita

Neste caso de estudo, procurou-se verificar a influência do número de GDL considerados, para elementos Q4 e Q9, bem como a influência das CF, na resposta mecânica de uma placa quadrada, com uma largura unitária, uma sequência de empilhamento [30°/0°/30°], sujeita a uma carga transversal uniformemente distribuída (1Pa). Consideram-se três rácios $l/h=5, 10$ e 20 .

O material compósito considerado no estudo, é um compósito GE, encontrando-se as suas propriedades mecânicas, apresentadas na Tabela 19.

Nas Tabela 37-40, são apresentados os resultados obtidos para a deformada transversal e as tensões normalizadas, para os diferentes rácios l/h , e as diferentes CF consideradas.

Tabela 37 - Deformada transversal e tensões normalizadas, SSSS. K=1.

l/h	Formulação	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x^1$	$\bar{\sigma}_x^2$	$\bar{\sigma}_x^3$	$\bar{\sigma}_y^1$	$\bar{\sigma}_y^2$	$\bar{\sigma}_y^3$	$\bar{\tau}_{xz}^1$	$\bar{\tau}_{xz}^2$
5	Q4, 7GDL	3.99E-10	8.6777	2.1391	2.7986	5.9685	1.6844	1.3003	2.0038	1.3608
	Q4, 9GDL	4.03E-10	8.7805	2.0659	2.6948	6.0331	1.6683	1.2988	2.2219	1.3405
	Q9, 7GDL	3.99E-10	8.7382	2.1687	2.8296	6.0121	1.7017	1.309	2.1127	1.4759
	Q9, 9GDL	4.02E-10	8.8353	2.0988	2.7273	6.0754	1.6864	1.3079	2.3512	1.4542
10	Q4, 7GDL	2.32E-09	35.3638	10.8961	14.3991	22.2013	7.0459	5.0011	4.5148	2.6867
	Q4, 9GDL	2.33E-09	35.3289	10.9098	14.4394	22.198	7.0532	5.0078	4.7574	2.6744
	Q9, 7GDL	2.33E-09	35.5972	10.988	14.5255	22.3647	7.1049	5.0311	4.7687	2.9077
	Q9, 9GDL	2.33E-09	35.5669	11.0048	14.5513	22.365	7.1129	5.0361	5.0489	2.9002
20	Q4, 7GDL	1.67E-08	141.355	46.2339	61.2592	86.7321	28.5572	19.809	9.5107	5.3319
	Q4, 9GDL	1.67E-08	141.3771	46.2145	61.312	86.7351	28.5606	19.8204	9.7542	5.3436
	Q9, 7GDL	1.68E-08	142.3599	46.5923	61.76	87.3908	28.7844	19.9165	10.084	5.7967
	Q9, 9GDL	1.68E-08	142.3576	46.6049	61.7848	87.3974	28.7909	19.9212	10.4751	5.8138

De forma a facilitar a análise da deformada transversal normalizada, para condições de fronteira SSSS, diferentes formulações e diferentes rácios, são apresentadas as seguintes figuras.

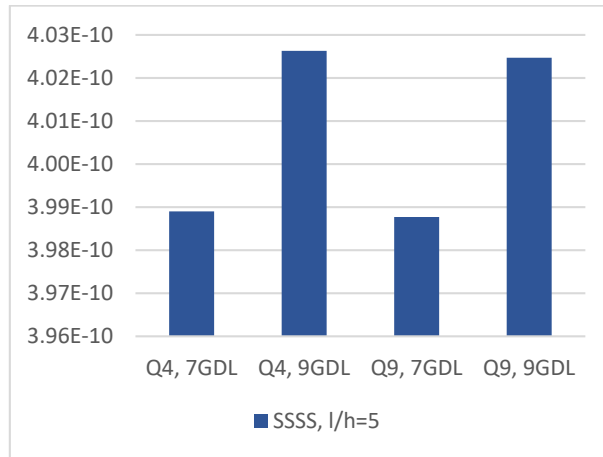


Fig. 66 – Deformada transversal normalizada para diferentes formulações. SSSS, $l/h=5$, $K=1$.

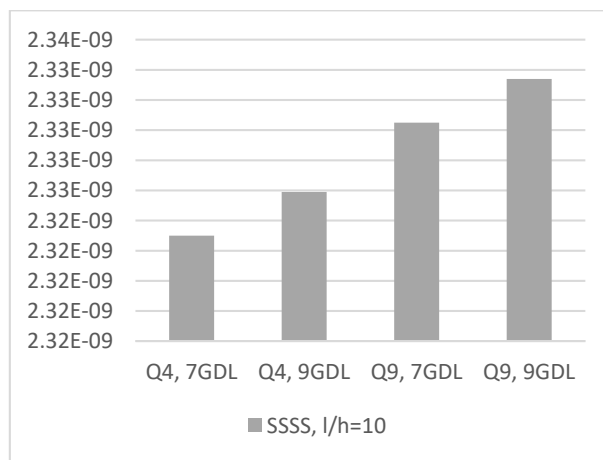


Fig. 67 - Deformada transversal normalizada para diferentes formulações. SSSS, $l/h=10$, $K=1$.

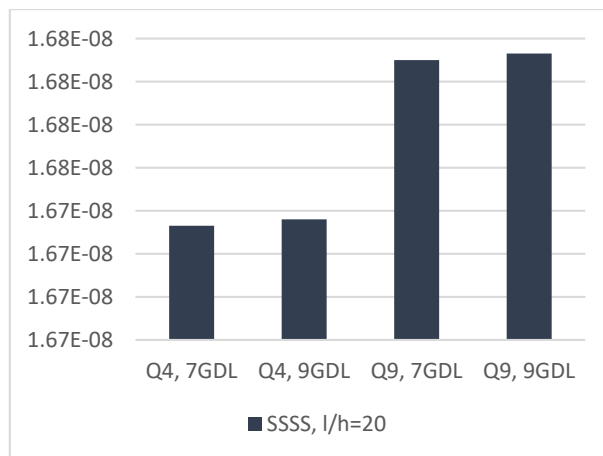


Fig. 68 - Deformada transversal normalizada para diferentes formulações. SSSS, $l/h=20$, $K=1$.

Analisando as figuras acima, constata-se que a inclusão dos GDL de membrana, ao nível de uma análise estática de uma placa SSSS, apresenta diferenças mais significativas para rácios l/h menores. Por outro lado, com o aumento do rácio l/h , esta diferença de

resultados entre os valores da deformada transversal entre as formulações usando Q4 e Q9, comparativamente à consideração de apenas 7GDL, tende a diminuir.

Relativamente às vibrações livres, foram obtidos os seguintes resultados, presentes na Tabela 38, para SSSS.

Tabela 38 – Frequências naturais normalizadas, SSSS, K=1.

<i>l/h</i>	<i>Formulação</i>	(1,1)	(2,1)	(1,2)	(2,2)
5	Q4, 7GDL	0.2547	0.4913	0.54	0.7056
	Q4, 9GDL	0.2533	0.4869	0.5319	0.6965
	Q9, 7GDL	0.2531	0.4828	0.532	0.6949
	Q9, 9GDL	0.2518	0.4788	0.5241	0.6862
10	Q4, 7GDL	0.0753	0.1558	0.1869	0.2486
	Q4, 9GDL	0.0753	0.1556	0.1859	0.2475
	Q9, 7GDL	0.0747	0.1522	0.1829	0.2419
	Q9, 9GDL	0.0747	0.152	0.1819	0.2409
20	Q4, 7GDL	0.0199	0.0425	0.0542	0.0724
	Q4, 9GDL	0.0199	0.0425	0.0542	0.0724
	Q9, 7GDL	0.01998	0.0414	0.0528	0.0697
	Q9, 9GDL	0.0198	0.0414	0.0527	0.0697

De forma a facilitar a análise da tendência da frequência fundamental normalizada, para condições de fronteira SSSS, diferentes formulações e rácios, são apresentadas as seguintes figuras.

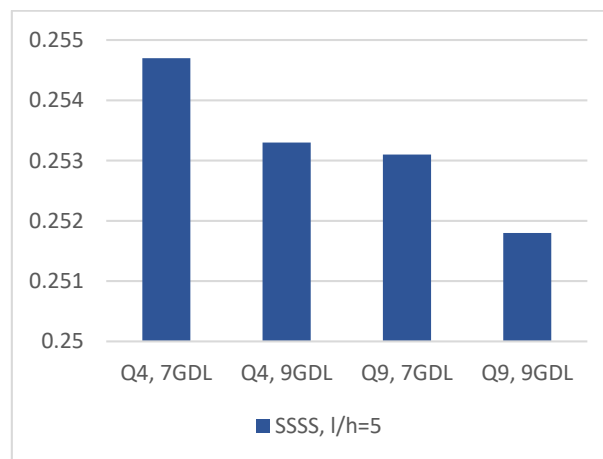


Fig. 69 – Frequência fundamental normalizada para diferentes formulações. SSSS, l/h=5, K=1.

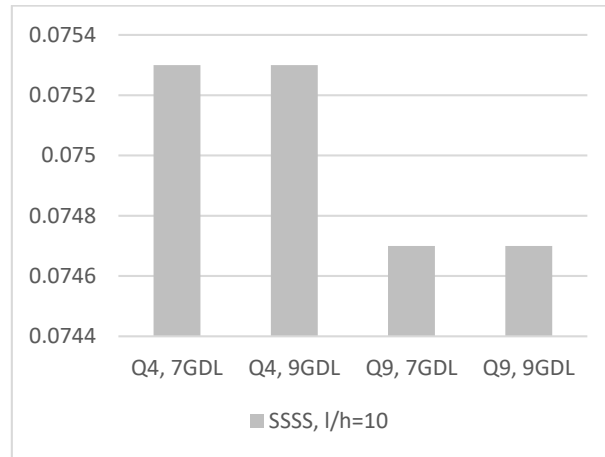


Fig. 70 - Frequência fundamental normalizada para diferentes formulações. SSSS, $l/h=10$, $K=1$.

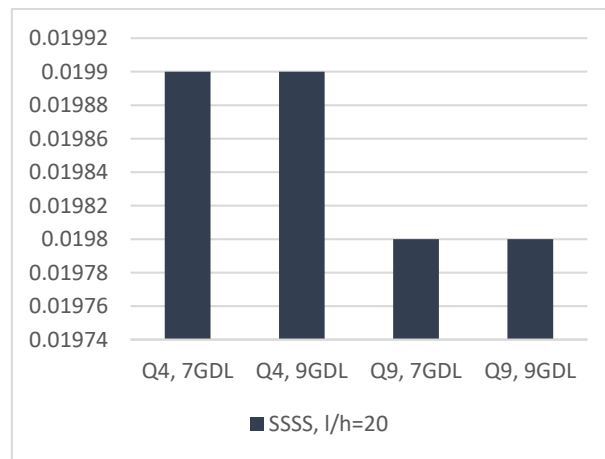


Fig. 71 - Frequência fundamental normalizada para diferentes formulações. SSSS, $l/h=20$, $K=1$.

Analisando as Fig. 69-71, é verificada uma tendência contrária à observada na análise estática, como seria de esperar.

A mesma análise foi realizada, mas desta vez foi considerado que as CF dos bordos da placa seriam encastrados. Os resultados obtidos são apresentados na Tabela 39.

Tabela 39 - Deformada transversal e tensões normalizadas, CCCC.

<i>l/h</i>	<i>Formulação</i>	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x^1$	$\bar{\sigma}_x^2$	$\bar{\sigma}_x^3$	$\bar{\sigma}_y^1$	$\bar{\sigma}_y^2$	$\bar{\sigma}_y^3$	$\bar{\tau}_{xz}^1$	$\bar{\tau}_{xz}^2$
5	Q4, 7GDL	2.26E-10	4.096	0.8208	1.008	3.4793	0.9195	0.783	1.541	1.6765
	Q4, 9GDL	2.31E-10	4.4027	0.9831	0.8827	3.6257	0.8747	0.7769	1.6674	1.6269
	Q9, 7GDL	2.25E-10	4.171	0.8469	1.0398	3.502	0.929	0.7871	1.5959	1.8474
	Q9, 9GDL	2.30E-10	4.4643	1.6319	1.392	3.6456	0.886	0.7816	1.6739	1.8057
10	Q4, 7GDL	9.84E-10	17.5741	4.9116	6.3445	11.8519	3.6	2.6878	3.941	3.7384
	Q4, 9GDL	9.94E-10	17.5754	4.8788	6.2946	11.9268	3.6089	2.7042	4.3987	3.6369
	Q9, 7GDL	9.84E-10	17.7108	4.991	6.457	11.8675	3.6107	2.6806	3.9526	4.1689
	Q9, 9GDL	9.94E-10	17.7204	4.9618	6.3958	11.9413	3.623	2.6982	4.4606	4.0718
20	Q4, 7GDL	5.89E-09	70.8239	22.5593	30.1106	43.0102	13.9535	9.7143	9.4286	7.5845
	Q4, 9GDL	5.90E-09	70.7964	22.5355	30.1065	43.0836	13.9324	9.7079	10.5202	7.4166
	Q9, 7GDL	5.91E-09	71.1324	22.7091	30.3211	43.0687	13.9859	9.6829	9.3718	8.4683
	Q9, 9GDL	5.92E-09	71.0886	22.7155	30.3208	43.1047	14.003	9.6989	10.3546	8.2635

Mais uma vez, de forma a facilitar a análise da tendência da deformada transversal normalizada, para condições de fronteira CCCC, diferentes formulações e rácios, são apresentadas as seguintes figuras.

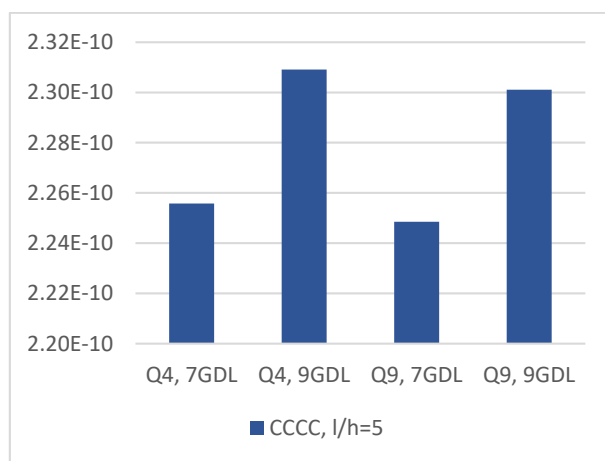


Fig. 72 - Deformada transversal normalizada para diferentes formulações. CCCC, l/h=5, K=1.

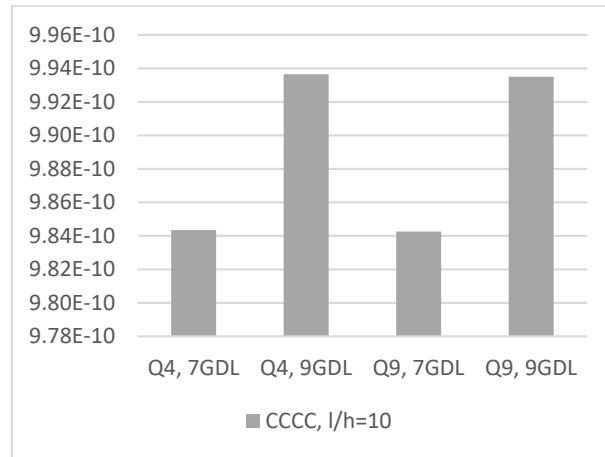


Fig. 73 - Deformada transversal normalizada para diferentes formulações. CCCC, $l/h=10$, $K=1$.

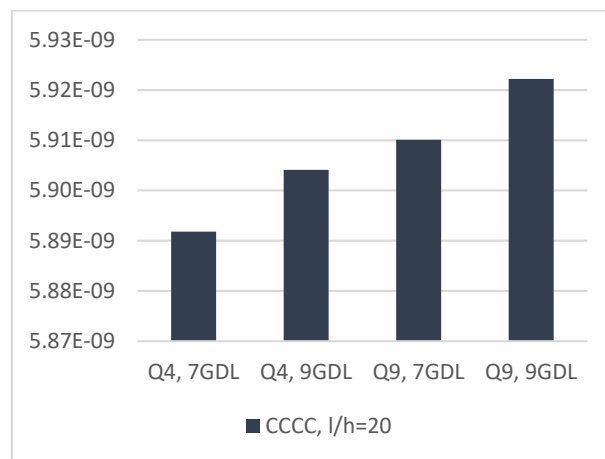


Fig. 74 - Deformada transversal normalizada para diferentes formulações. CCCC, $l/h=20$, $K=1$.

Das Fig. 72-74, é verificada a mesma tendência observada na análise estática, da placa com todos os bordos apoiados.

Relativamente às vibrações livres, foram obtidos os seguintes resultados, presentes na seguinte tabela, para as condições de fronteira CCCC.

Tabela 40 - Frequências naturais normalizadas, CCCC.

<i>l/h</i>	<i>Formulação</i>	(1,1)	(2,1)	(1,2)	(2,2)
5	Q4, 7GDL	0.3404	0.5595	0.6076	0.7607
	Q4, 9GDL	0.3362	0.5512	0.6005	0.7514
	Q9, 7GDL	0.3377	0.5499	0.5963	0.7481
	Q9, 9GDL	0.3336	0.542	0.5891	0.7389
10	Q4, 7GDL	0.1173	0.2049	0.2291	0.2924
	Q4, 9GDL	0.1166	0.2037	0.2265	0.2896
	Q9, 7GDL	0.1158	0.1983	0.2232	0.2836
	Q9, 9GDL	0.1152	0.1973	0.2208	0.2811
20	Q4, 7GDL	0.0342	0.0611	0.0745	0.094
	Q4, 9GDL	0.0342	0.061	0.0742	0.0938
	Q9, 7GDL	0.0337	0.0587	0.0716	0.0895
	Q9, 9GDL	0.0337	0.0586	0.0714	0.0893

Analogamente apresentam-se nas Fig. 75-77, as frequências fundamentais obtidas para diferentes relações de aspecto, usando diferentes elementos.

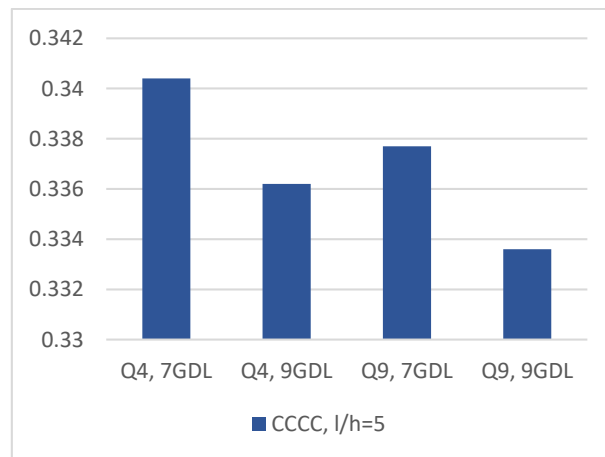


Fig. 75 - Frequência fundamental normalizada para diferentes formulações. CCCC, l/h=5, K=1.

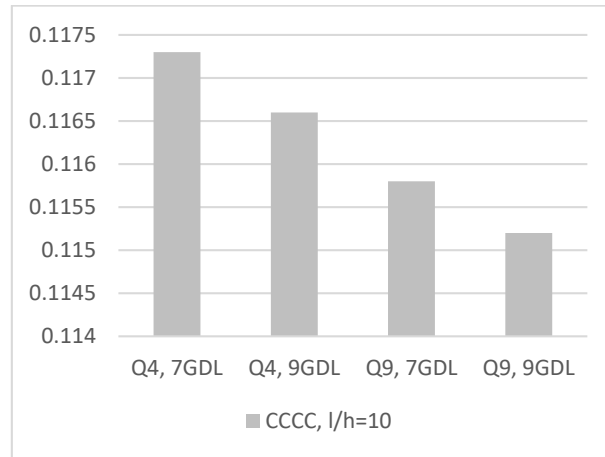


Fig. 76 - Frequência fundamental normalizada para diferentes formulações. CCCC, $l/h=10$, $K=1$.

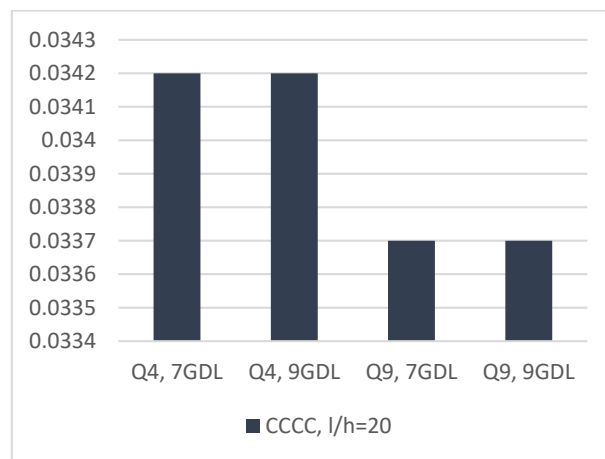


Fig. 77 - Frequência fundamental normalizada para diferentes formulações. CCCC, $l/h=20$, $K=1$.

Da análise destas figuras, continuamos a constatar que a tendência observada na análise de vibrações livres, é consistente com as conclusões extraídas das análises estáticas, considerando diferentes condições de fronteira.

Adicionalmente, são apresentados nos apêndices A2.5, os resultados obtidos, mas neste caso, considerando um fator de correção ao corte comumente usado de $K=5/6$.

3.3.6 Aplicação de critérios de falha numa estrutura *sandwich* com camadas exteriores compósitas

Neste caso de estudo, é aplicado o critério de falha de Tensão Máxima, a várias estruturas *sandwich*, com diferentes núcleos de PVC, sendo consideradas diferentes espumas (H35, H100 e H250) e diferentes orientações das camadas exteriores (θ igual a 0° , 30° , 45° , 60° e 90°). As propriedades adotadas para este material compósito, são as apresentadas na Tabela 20, para o núcleo, e na Tabela 41, relativas às camadas exteriores.

Tabela 41 – Propriedades das camadas exteriores do material compósito.

E_1 (GPa)	$E_2 = E_3$ (GPa)	$G_{12} = G_{13}$ (GPa)	G_{23} (GPa)	$\nu_{12} = \nu_{13}$	ν_{23}
132.4	10.76	5.65	3.38	0.24	0.49
X_T (MPa)	X_C (MPa)	$Y_T = Z_T$ (MPa)	$Y_C = Z_C$ (MPa)	R (MPa)	$S = T$ (MPa)
1 513	1 696	43.8	43.8	67.6	86.9

Sendo X_T , a resistência à tração da lâmina unidirecional, paralela à direção da fibra; X_C , a resistência à compressão da lâmina unidirecional, paralela à direção da fibra; Y_T , a resistência à tração da lâmina unidirecional, transversal à direção da lâmina; Y_C , a resistência à compressão da lâmina unidirecional, transversal à direção da lâmina; T , a resistência ao corte no plano da lâmina (direção 12); S , a resistência ao corte transversal no plano 13; R , a resistência ao corte transversal no plano 23.

Uma relação $l/h = 10$ é adotada. As placas encontram-se sujeitas a uma carga transversal uniformemente distribuída.

Os valores obtidos usando o critério de falha de Tensão Máxima, são apresentados na Tabela 42, para um elemento Q9 com nove GDL. Os resultados apresentados, encontram-se normalizados segundo as expressões da equação (61). A espessura de cada camada exterior é 2 mm em ambos os casos.

Tabela 42 – Carregamentos normalizados que levam à falha considerando o critério de Tensão Máxima.

Núcleo	θ [°]	FLD	FEL	FGP	FPL
H35	0	56.6	30	3	1
	30	30.9	144	6	1
	45	26.5	144	6	1
	60	36.3	144	6	1
	90	61.6	66	3	1
H100	0	80.6	30	3	1
	30	45.3	144	6	1
	45	39.2	144	6	1
	60	54.2	144	6	1
	90	98.2	66	3	1
H250	0	117.5	30	3	1
	30	66.2	144	6	1
	45	56.6	144	6	1
	60	77.8	144	6	1
	90	150.6	66	3	1

Onde, FLD é o carregamento adimensional que leva à falha da primeira camada, FEL é o elemento onde a falha ocorre, FGP é o ponto de Gauss onde a falha ocorre, e FPL é a camada onde a falha ocorre.

Através da análise da Tabela 42, verifica-se que quando as camadas exteriores apresentam um ângulo θ superior a 0° , e inferior a 90° , a falha da primeira camada ocorre no elemento 144. Por outro lado, se as camadas exteriores apresentam um ângulo θ igual a zero, a falha da primeira camada ocorre no elemento 30, e se apresentarem um ângulo θ igual a noventa, a falha da primeira camada ocorre no elemento 66. A orientação das camadas exteriores a 90° , apresenta melhores resultados comparativamente às restantes orientações. Esta diferença, é acentuada com o aumento da densidade do núcleo. Verifica-se ainda, que em todos os compósitos estudados, a falha ocorre sempre na camada inferior do compósito.

A evolução do carregamento normalizado que leva à falha, para diferentes núcleos e orientações das camadas exteriores, é apresentada na Fig. 78.

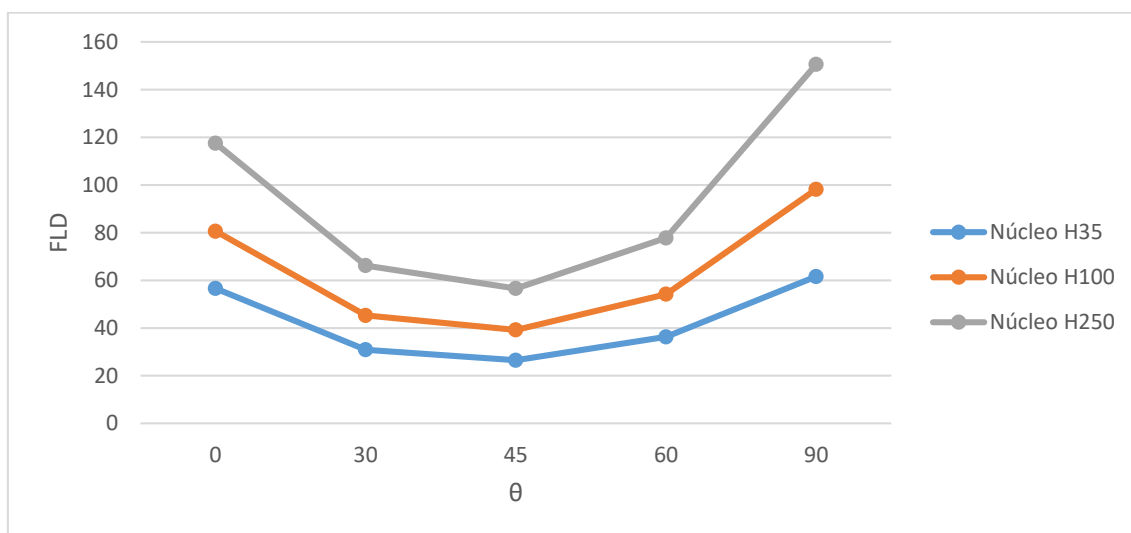


Fig. 78 - Carregamentos normalizados que levam à falha, para diferentes núcleos e orientações das camadas exteriores.

Analisando a Fig. 78, verifica-se que o carregamento que leva à falha da primeira camada, diminuí quando o ângulo θ das camadas exteriores está compreendido no intervalo $[0^\circ, 45^\circ[$, e aumenta quando está compreendido no intervalo $]45^\circ, 90^\circ]$. Adicionalmente, verifica-se que o valor do carregamento que leva à falha da primeira camada, é proporcional à densidade do núcleo. Este comportamento era expectável, uma vez que a maior densidade do núcleo, contribui para uma maior resistência à flexão da placa, e conseqüentemente, oferece maior resistência à fratura normal.

Capítulo 4

Conclusão

Finalmente, neste capítulo as conclusões mais relevantes do trabalho são sumarizadas, sendo de notar que grande parte delas foram sendo abordadas e discutidas ao longo do trabalho.

Numa primeira análise, poder-se-á concluir acerca da correta formulação implementada, e da convergência dos elementos finitos implementados, através dos elementos de Lagrange, Q4 e Q9. Ambos os elementos convergem para valores idênticos, quando o material compósito em estudo apresenta propriedades mecânicas semelhantes em todas as camadas; são os casos de validação presentes em 3.1.1 e 3.1.2, onde para uma relação $R_f=5$, no caso de 3.1.1, são obtidos valores aproximadamente iguais com os dois elementos. Esta aproximação de resultados, é igualmente verificada em 3.1.2, onde as diferentes camadas do compósito apresentam propriedades semelhantes. Ainda relativamente ao caso de validação 3.1.1, verificou-se que para R_f superiores, existe um desvio mais acentuado entre os dois elementos e que a inclusão do fator de correção ao corte na formulação, não acarreta benefícios no cálculo das tensões de corte transversais - passou-se de um erro relativo de, em média, 15% para 16% - com a nuance de prejudicar os resultados da deformada transversal – passou-se de um erro relativo em média de 0% para 5%. A implementação da análise das vibrações livres, encontra-se de acordo com as referências de algumas bibliografias existentes (presente em 3.1.3), tendo-se obtido as melhores aproximações com o elemento Q9. Adicionalmente, realizou-se o caso de estudo presente em 3.1.4, com o intuito de demonstrar que a inclusão do fator de correção, numa análise de vibrações livres, não é vantajosa. Pode-se então concluir que as formulações a nível estático e das vibrações livres são válidas, obtendo-se melhores aproximações em relação às referências bibliográficas com elementos Q9, apesar do elevado custo computacional que a utilização deste elemento acarreta relativamente ao elemento Q4. Verificou-se ainda, que a inclusão do fator de correção, $K=5/6$, não é vantajosa.

Nos casos de estudo analisados, procurou-se verificar, se os resultados obtidos com a presente formulação iam de encontro ao expectável. Para tal, foram analisadas estruturas *sandwich* e laminados. Em 3.2.1, procurou-se verificar a influência de diferentes núcleos e diferentes espessuras de núcleo, no comportamento estático e das vibrações livres da estrutura, concluindo-se que, nos casos onde o núcleo é mais espesso, são obtidas soluções menos rígidas. A mesma ilação é retirada para o aumento da espessura do núcleo. Em 3.2.2, procurou-se verificar a influência do rácio l/h na resposta mecânica, verificando-se que para a sequência de empilhamento considerada, o aumento da espessura das camadas exteriores, leva a um aumento da deformada transversal e das tensões, mas leva também ao decréscimo das frequências naturais. Em 3.2.3, a influência da orientação das fibras, no comportamento estático e das vibrações livres do laminado, foi analisada, verificando-se que para ambas as análises, para os tipos de laminados estudados, as sequências de empilhamento $[-45^\circ/90^\circ/45^\circ]$ e $[-45^\circ/0^\circ/45^\circ]$, são as que permitem obter melhores desempenhos. Em 3.2.4, dois compósitos foram analisados, diferindo estes apenas no material da fibra usado como reforço. A análise estática e das vibrações livres destes laminados foi realizada, sendo verificado que o compósito que apresenta melhor desempenho é o compósito fibra de carbono-epoxy, comparativamente ao compósito fibra de vidro-epoxy, para a sequência de empilhamento considerada. Adicionalmente, são apresentadas as distribuições das tensões ao longo da espessura, sendo verificadas tendências de acordo com o que seria expectável uma vez que, vão de encontro ao que a FSDT prevê. Em 3.2.5, a influência do número de GDL e das CF, na análise estática e das vibrações livres numa placa compósita, foi analisada. Neste caso de estudo, verificou-se que a inclusão dos GDL de membrana, ao nível de uma análise estática, independentemente das CF considerada, apresenta diferenças mais significativas para rácios l/h menores. Por outro lado, com o aumento do rácio l/h , esta diferença de resultados entre os valores da deformada transversal entre as formulações usando Q4 e Q9, comparativamente à consideração de apenas 7GDL, tende a diminuir. Foi ainda verificado, tal como expectável, maiores deformações transversais, e tensões, quando se consideram os bordos da placa apoiados, comparativamente a quando estes se encontram encastrados. Relativamente à análise das vibrações livres, verificaram-se maiores frequências naturais quando os bordos da placa se encontram encastrados.

Outro campo de análise deste trabalho, relaciona-se com a utilização de uma melhor descrição da cinemática da deformação de um compósito laminado, obtida através da

abordagem multicamada, e a aplicação de critérios de falha. Procurou-se verificar se usando uma descrição mais precisa, a primeira camada a falhar das estruturas estudadas ocorria, com valores menos conservativos em relação a valores presentes em referências bibliográficas (presente em 3.1.5). Esta abordagem menos conservativa não foi verificada, tendo-se obtido valores mais conservativos, o que de certa forma é satisfatório. Apesar de se terem obtidos resultados mais conservativos, estes ainda estão um pouco distantes relativamente aos das referências bibliográficas. Para tal, pode ter contribuído a não inclusão da componente normal transversal, nas presentes formulações. Há ainda a destacar, a falta de referências bibliográficas, onde os resultados obtidos sejam apresentados numa forma numérica e não em envelopes de falha, o que dificulta a comparação de valores para os quais se dá a falha da primeira camada.

Ainda relativamente ao tema da falha da primeira camada, é apresentado em 3.2.6, um caso de estudo onde se procurou aplicar o critério de falha de Tensão Máxima, considerando diferentes espumas (H35, H100 e H250) e diferentes orientações das camadas exteriores. Verificou-se que o carregamento que leva à falha da primeira camada, diminui quando o ângulo θ das camadas exteriores tende para 45° , e aumenta quando θ tende para 0° ou 90° . Adicionalmente, verifica-se que o valor do carregamento que leva à falha da primeira camada, é proporcional à densidade do núcleo. Esta evolução vai de encontro ao que seria expectável, permitindo concluir que um compósito constituído por um núcleo com um material mais denso, e com as camadas exteriores a 90° , resulta num compósito mais resistente à falha.

De uma forma geral, os resultados obtidos nas análises estáticas, vibrações livres e aplicações de critérios de falha, nos diversos casos de estudo, vão de encontro ao que seria expectável.

Globalmente, concluiu-se que a generalização das formulações usadas, podem ser aplicadas na obtenção de descrições mais detalhada da cinemática da deformação e assim capturar mais realisticamente os estados de deformação e de tensão que podem ocorrer num compósito. Em suma, concluiu-se que o trabalho desenvolvido cumpriu com a generalidade dos objetivos pretendidos.

Desenvolvimentos Futuros

Numa perspetiva de melhoria do trabalho realizado, os desenvolvimentos futuros deverão estar relacionados com os seguintes tópicos:

- Melhoria (racionalização) do código implementado em *Maple*[®] e *MatLab*[®], de forma a reduzir o custo computacional;
- Criação de um interface gráfico para melhoria da interface com o utilizador;
- Estudar a influência dos adesivos das estruturas *sandwich*, no comportamento do compósito;
- Abordar diferentes condições fronteira, não abordadas neste trabalho, e verificar a sua influência nos resultados obtidos;
- Avaliar a influência de factores de correção de corte, calculados em função do empilhamento.
- Considerar a análise dinâmica de estruturas compósitas em vibração forçada;
- Considerar o cálculo das tensões interlaminares de corte e a tensão normal transversal, através das equações de equilíbrio;
- Analisar a viabilidade da realização com sucesso, de ensaios experimentais;

Referências Bibliográficas

1. **Loja, M.A.S.V.M.A.R.**, *A study on the behavior of laminated and sandwich composite plates using a layerwise theory*. AIMS Materials Science, 2016. **2016**(18 Julho): p. 1587-1614.
2. **D3878, A.**, *Standard Terminology for Composite Materials*, in *West Conshohocken*. 2015.
3. **Moreno, M.E., V. Tita, and F.D. Marques**. *Influence of boundary conditions on the determination of effective material properties for active fiber composites*. in *Proceedings... Pan-American Congress of Applied Mechanics, Foz do Iguaçu, Brazil*. 2010.
4. **Thomsen, O.T.**, *Sandwich Materials for Wind Turbine Blades — Present and Future*. Journal of Sandwich Structures and Materials, 2009. **11**(1): p. 7-26.
5. Ashby, M.F., *Materials Selection in Mechanical Design*. 2005, New York: Elsevier Butterworth Heinemann.
6. **International, A.**, *ASM Handbook*. Vol. 21. 2001.
7. **Batchu, S.** *Honeycomb Sandwich Panels*. 2014 [cited 2016 6/08/2016]; Available from: <http://www.stressebook.com/honeycomb-sandwich-panels/>.
8. **Vinson, J.R.**, *The behavior of sandwich structures of isotropic and composite materials*. . 1999: Lancaster, Pa: Technomic Pub. Co.
9. **Pflug, J.** *Classification*. [cited 2016 16/08]; Available from: <http://www.econcore.com/en/classification>.
10. **Moreno, R.A.** *What does Shape Function mean in Finite Element Formulation?* 2011 [cited 2016 14/08/2016]; Available from: <http://stochasticandlagrangian.blogspot.pt/2011/07/what-does-shape-function-mean-in-finite.html>.
11. **Reddy, J.N.**, *Mechanics of laminated composite plates*. CRC Press, 1997.
12. **Reissner, E.**, *A Consistent Treatment of Transverse Shear Deformations in Laminated Anisotropic Plates*. AIAA Journal, 1972. **10**(5): p. 716-718.
13. **Whitney, J.M.**, *The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Laminated Plates*. Journal of Composite Materials, 1969. **3**(3): p. 534-547.
14. **Lo, K.H., R.M. Christensen, and E.M. Wu**, *A High-Order Theory of Plate Deformation—Part 2: Laminated Plates*. Journal of Applied Mechanics, 1977. **44**(4): p. 669-676.
15. **Pandya, B.N. and T. Kant**, *Higher-order shear deformable theories for flexure of sandwich plates—Finite element evaluations*. International Journal of Solids and Structures, 1988. **24**(12): p. 1267-1286.
16. **Bernardo, G.M.S.**, et al., *A study on the structural behaviour of FGM plates static and free vibrations analyses*. Composite Structures, 2016. **136**: p. 124-138.
17. **Loja, M.A.R., J.I. Barbosa, and C.M. Mota Soares**, *Analysis of sandwich beam structures using kriging based higher order models*. Composite Structures, 2015. **119**: p. 99-106.
18. **Viola, E., F. Tornabene, and N. Fantuzzi**, *General higher-order shear deformation theories for the free vibration analysis of completely doubly-curved laminated shells and panels*. Composite Structures, 2013. **95**: p. 639-666.
19. **Reddy, J.N.**, *A refined nonlinear theory of plates with transverse shear deformation*. International Journal of Solids and Structures, 1984. **20**(9): p. 881-896.

20. **Ferreira, A.J.M.** and **J.T. Barbosa**, *Buckling behaviour of composite shells*. Composite Structures, 2000. **50**(1): p. 93-98.
21. **Botshekanan Dehkordi, M., S.M.R. Khalili,** and **E. Carrera**, *Non-linear transient dynamic analysis of sandwich plate with composite face-sheets embedded with shape memory alloy wires and flexible core- based on the mixed LW (layer-wise)/ESL (equivalent single layer) models*. Composites Part B: Engineering, 2016. **87**: p. 59-74.
22. **Thai, C.H.**, et al., *Isogeometric analysis of laminated composite and sandwich plates using a new inverse trigonometric shear deformation theory*. European Journal of Mechanics - A/Solids, 2014. **43**: p. 89-108.
23. **Thai, C.H.**, et al., *Isogeometric analysis of laminated composite and sandwich plates using a layerwise deformation theory*. Composite Structures, 2013. **104**: p. 196-214.
24. **Thai, C.H.**, et al., *Isogeometric Analysis of Laminated Composite Plates Using the Higher-Order Shear Deformation Theory*. Mechanics of Advanced Materials and Structures, 2015. **22**(6): p. 451-469.
25. **Thai, C.H.**, et al., *Static, free vibration, and buckling analysis of laminated composite Reissner–Mindlin plates using NURBS-based isogeometric approach*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2012. **91**(6): p. 571-603.
26. **Thai-Hoang, C.**, et al., *An alternative alpha finite element method with discrete shear gap technique for analysis of laminated composite plates*. Applied Mathematics and Computation, 2011. **217**(17): p. 7324-7348.
27. **Carrera, E.**, *Historical review of Zig-Zag theories for multilayered plates and shells*. Applied Mechanics Reviews, 2003. **56**(3): p. 287-308.
28. **Carrera, E.**, *Theories and Finite Elements for Multilayered Plates and Shells: A Unified compact formulation with numerical assessment and benchmarking*. Archives of Computational Methods in Engineering, 2003. **10**(3): p. 215-296.
29. **Luciano, D.** and **Y. Wenbin**, *Assess the Accuracy of the Variational Asymptotic Plate and Shell Analysis (VAPAS) using the Generalized Unified Formulation (GUF)*, in *50th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*. 2009, American Institute of Aeronautics and Astronautics.
30. **Ferreira, A.J.M.**, *Analysis of Composite Plates Using a Layerwise Theory and Multiquadrics Discretization*. Mechanics of Advanced Materials and Structures, 2005. **12**(2): p. 99-112.
31. **Nosier, A., R.K. Kapania,** and **J.N. Reddy**, *Free vibration analysis of laminated plates using a layerwise theory*. AIAA Journal, 1993. **31**(12): p. 2335-2346.
32. **Sainsbury, M.G.** and **Q.J. Zhang**, *The Galerkin element method applied to the vibration of damped sandwich beams*. Computers & Structures, 1999. **71**(3): p. 239-256.
33. **Daya, E.M.** and **M. Potier-Ferry**, *A numerical method for nonlinear eigenvalue problems application to vibrations of viscoelastic structures*. Computers & Structures, 2001. **79**(5): p. 533-541.
34. **Araújo, A.L.**, et al., *Optimal design and parameter estimation of frequency dependent viscoelastic laminated sandwich composite plates*. Composite Structures, 2010. **92**(9): p. 2321-2327.

35. **Santiuste, C., O.T. Thomsen, and Y. Frostig**, *Thermo-mechanical load interactions in foam cored axi-symmetric sandwich circular plates – High-order and FE models*. *Composite Structures*, 2011. **93**(2): p. 369-376.
36. **Mantari, J.L., A.S. Oktem, and C. Guedes Soares**, *A new trigonometric layerwise shear deformation theory for the finite element analysis of laminated composite and sandwich plates*. *Computers & Structures*, 2012. **94–95**: p. 45-53.
37. **Barkanov, E., E. Skukis, and B. Petitjean**, *Characterisation of viscoelastic layers in sandwich panels via an inverse technique*. *Journal of Sound and Vibration*, 2009. **327**(3–5): p. 402-412.
38. **Ferreira, A.J.M.**, *Thick Composite Beam Analysis Using a Global Meshless Approximation Based on Radial Basis Functions*. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2003. **10**(3): p. 271-284.
39. **Ferreira, A.J.M.**, *A formulation of the multiquadric radial basis function method for the analysis of laminated composite plates*. *Composite Structures*, 2003. **59**(3): p. 385-392.
40. **Ferreira, A.J.M.**, *Problemas de Elementos Finitos em MATLAB*. Fundação Calouste Gulbenkian.
41. **Kaddour, A.**, et al., *The background to the third world-wide failure exercise*. *Journal of Composite Materials*, 2013. **47**(20-21): p. 2417-2426.
42. **Reddy, J.N. and A.K. Pandey**, *A first-ply failure analysis of composite laminates*. *Computers & Structures*, 1987. **25**(3): p. 371-393.
43. **Reddy, Y.S.N. and J.N. Reddy**, *Linear and non-linear failure analysis of composite laminates with transverse shear*. *Composites Science and Technology*, 1992. **44**(3): p. 227-255.
44. **Kam, T.Y. and T.B. Jan**, *Eighth International Conference on Composite Structures First-ply failure analysis of laminated composite plates based on the layerwise linear displacement theory*. *Composite Structures*, 1995. **32**(1): p. 583-591.
45. **Kam, T.Y., S.C. Lin, and K.M. Hsiao**, *Reliability analysis of nonlinear laminated composite plate structures*. *Composite Structures*, 1993. **25**(1): p. 503-510.
46. **Kam, T.Y. and H.F. Sher**, *Nonlinear and First-Ply Failure Analyses of Laminated Composite Cross-Ply Plates*. *Journal of Composite Materials*, 1995. **29**(4): p. 463-482.
47. **Jones, R.M.**, *Mechanics of Composite Materials*. Second Edition ed. 1998: CRC Press; 2 edition.
48. **Carlsson, L.A., D.F. Adams, and R.B. Pipes**, *Basic Experimental Characterization of Polymer Matrix Composite Materials*. *Polymer Reviews*, 2013. **53**(2): p. 277-302.
49. **Moura M.F.S.F, M.A.B., Magalhães A.G.**, *Materiais Compósitos – Materiais, fabrico e Comportamento Mecânico*. *Publindústria*. 2005, Praça da Carujeira 38, 4300-144 Porto: Edições Técnicas.
50. **Barbero, E.J.**, *Finite Element Analysis Of Composite Materials.*, ed. Edição. 2014: CRC Press: Taylor & Francis Group.
51. **Wang, S. and Y. Zhang**, *Vibration analysis of rectangular composite laminated plates using layerwise B-spline finite strip method*. *Composite Structures*, 2005. **68**(3): p. 349-358.
52. **Ferreira, A.J.M.**, *Problemas de Elementos Finitos em MATLAB*. 1ª ed. 2010: Fundação Calouste Gulbenkian.

53. **Srinivas, S.**, *A refined analysis of composite laminates*. Journal of Sound and Vibration, 1973. **30**(4): p. 495-507.
54. **Ferreira, A.J.M.**, et al., *Static deformations and vibration analysis of composite and sandwich plates using a layerwise theory and RBF-PS discretizations with optimal shape parameter*. Composite Structures, 2008. **86**(4): p. 328-343.
55. **Srinivas, S., C.V. Joga Rao, and A.K. Rao**, *An exact analysis for vibration of simply-supported homogeneous and laminated thick rectangular plates*. Journal of Sound and Vibration, 1970. **12**(2): p. 187-199.
56. **Pagano, N.J.**, *Exact Solutions for Rectangular Bidirectional Composites and Sandwich Plates*. Journal of Composite Materials, 1970. **4**(1): p. 20-34.
57. **Liou, W.-J. and C.T. Sun**, *A three-dimensional hybrid stress isoparametric element for the analysis of laminated composite plates*. Computers & Structures, 1987. **25**(2): p. 241-249.
58. **Carrera, E.**, *Developments, ideas, and evaluations based upon Reissner's Mixed Variational Theorem in the modeling of multilayered plates and shells*. Applied Mechanics Reviews, 2001. **54**(4): p. 301-329.
59. **Reddy, J.N.**, *A Simple Higher-Order Theory for Laminated Composite Plates*. Journal of Applied Mechanics, 1984. **51**(4): p. 745-752.
60. **Liew, K.M., Y.Q. Huang, and J.N. Reddy**, *Vibration analysis of symmetrically laminated plates based on FSDT using the moving least squares differential quadrature method*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2003. **192**(19): p. 2203-2222.
61. **Khdeir, A.A. and L. Librescu**, *Analysis of symmetric cross-ply laminated elastic plates using a higher-order theory: Part II—Buckling and free vibration*. Composite Structures, 1988. **9**(4): p. 259-277.
62. **Ferreira, A.J.M.**, et al., *Analysis of Sandwich Plates by Generalized Differential Quadrature Method*. Mathematical Problems in Engineering, 2013. **2013**: p. 12.
63. **Ochoa, O.O. and J.N. Reddy**, *Finite Element Analysis of Composite Laminates*, in *Finite Element Analysis of Composite Laminates*. 1992, Springer Netherlands: Dordrecht. p. 162-175.
64. [cited 2016 18 Julho]; Available from: <http://www.diabgroup.com/en-GB/Products-and-services#>.

Apêndice

Apêndice A1 – Apresenta tabelas com os resultados obtidos nos diferentes exemplos de validação.

- A1.1 – Tabelas com valores das deformadas transversais e tensões, para uma estrutura *sandwich*, com R_f igual 5, 10 e 15, com elementos Q4 e Q9 e considerando o uso de fator de correção ao corte $K=5/6$.
- A1.2 – Tabelas com valores das deformadas transversais e tensões, para um laminado, considerando o uso do fator de correção ao corte, e sujeito a carregamento sinusoidal.
- A1.3 – Tabelas com valores das deformadas transversais, tensões e frequências naturais, para um laminado, em vibração livre, e considerando o uso do fator de correção ao corte.

Apêndice A2 – Apresenta tabelas com os resultados obtidos nos diferentes casos de estudo abordados.

- A2.1 – Tabelas com valores das deformadas transversais, tensões e frequências naturais, para uma estrutura *sandwich*, com um núcleo espuma com 10 e 15 mm de espessura, e camadas exteriores compósitas.
- A2.2 – Tabelas com valores das deformadas transversais, tensões e frequências naturais, para uma estrutura *sandwich*, com diferentes razões geométricas, nomeadamente, o rácio l/h , e a espessura das camadas exteriores.
- A2.3 – Tabelas com valores das deformadas transversais, tensões e frequências naturais, para um laminado, com diferentes sequências de empilhamento, nomeadamente, $[\theta^\circ/0^\circ/\theta^\circ]$, $[-\theta^\circ/0^\circ/\theta^\circ]$ e $[-\theta^\circ/90^\circ/\theta^\circ]$.
- A2.4 – Tabelas com valores das deformadas transversais, tensões e frequências naturais, para um laminado, com diferentes tipos de fibras.
- A2.5 – Tabelas com valores das deformadas transversais, tensões e frequências naturais, para um laminado, sujeito a diferentes condições fronteiras. Resultados obtidos com diferentes formulações.

Apêndice A1

Neste apêndice, são apresentadas tabelas com os resultados obtidos nos diferentes exemplos de validação.

Apêndice A1.1 – Deformação transversal e tensões, com R_f igual a 5, 10 e 15 e incluindo o uso de fator de correção ao corte $K=5/6$.

Tabela 43 – Resultados obtidos com diferentes tipos de elementos para $R_f=5$, SSSS, pressão uniforme, $l/h=10$ e inclusão de $K=5/6$. Todos os valores apresentados foram normalizados.

Modelos	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x^1$	$\bar{\sigma}_x^2$	$\bar{\sigma}_x^3$	$\bar{\sigma}_y^1$	$\bar{\sigma}_y^2$	$\bar{\sigma}_y^3$	$\bar{\tau}_{xz}^1$	$\bar{\tau}_{xz}^2$
Q4, (4X4)	268.8728	55.7707	42.2717	8.4543	37.2251	28.7982	5.7596	2.8996	1.2510
Q9, (4X4)	266.9370	60.2453	46.4794	9.2959	39.0248	30.5799	6.1160	4.0020	1.8545
Q4, (10X10)	267.2510	59.4028	45.5025	9.1005	38.5853	30.0484	6.0097	3.6174	1.5892
Q9, (10X10)	267.1134	60.1121	46.0910	9.2182	38.8621	30.2791	6.0558	4.0447	1.9481
Q4, (12X12)	267.2196	59.6387	45.6509	9.1302	38.6808	30.1024	6.0205	3.7004	1.6361
Q9, (12X12)	267.1157	60.1068	46.0758	9.2152	38.8605	30.2723	6.0545	4.0516	1.9657
Q4, (20X20)	267.1507	59.9246	45.9070	9.1814	38.7909	30.2055	6.0411	3.8675	1.7430
Q9, (20X20)	267.1177	60.0977	46.0558	9.2112	38.8587	30.2646	6.0529	4.0667	1.9980

Tabela 44 – Resultados obtidos com diferentes tipos de elementos para $R_f=10$, SSSS, pressão uniforme, $l/h=10$ e inclusão de $K=5/6$. Todos os valores apresentados foram normalizados.

Modelos	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x^1$	$\bar{\sigma}_x^2$	$\bar{\sigma}_x^3$	$\bar{\sigma}_y^1$	$\bar{\sigma}_y^2$	$\bar{\sigma}_y^3$	$\bar{\tau}_{xz}^1$	$\bar{\tau}_{xz}^2$
Q4, (4X4)	170.9893	60.2981	43.4838	4.3484	42.6737	32.1094	3.2109	2.8098	1.3620
Q9, (4X4)	167.3836	65.2127	48.3386	4.8339	44.5959	34.1610	3.4161	3.8287	2.0013
Q4, (10X10)	167.7872	64.1678	47.2252	4.7225	44.0350	33.5323	3.3532	3.5280	1.7553
Q9, (10X10)	167.3860	64.9655	47.8775	4.7877	44.3235	33.7680	3.3768	3.9250	2.2006
Q4, (12X12)	167.6776	64.4453	47.3752	4.7375	44.1437	33.5756	3.3576	3.6088	1.8122
Q9, (12X12)	167.3862	64.9579	47.8617	4.7862	44.3201	33.7602	3.3760	3.9345	2.2348
Q4, (20X20)	167.4872	64.7566	47.6721	4.7672	44.2484	33.6886	3.3689	3.7697	1.9447
Q9, (20X20)	167.3863	64.9468	47.8409	4.7841	44.3164	33.7511	3.3751	3.9513	2.2977

Tabela 45 – Resultados obtidos com diferentes tipos de elementos para $R_f=15$, SSSS, pressão uniforme, $l/h=10$ e inclusão de $K=5/6$. Todos os valores apresentados foram normalizados.

Modelos	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x^1$	$\bar{\sigma}_x^2$	$\bar{\sigma}_x^3$	$\bar{\sigma}_y^1$	$\bar{\sigma}_y^2$	$\bar{\sigma}_y^3$	$\bar{\tau}_{xz}^1$	$\bar{\tau}_{xz}^2$
Q4, (4X4)	133.8242	61.6649	42.2299	2.8153	45.8787	33.6152	2.2410	2.7446	1.4006
Q9, (4X4)	129.6395	66.6409	47.3651	3.1577	47.8298	35.8335	2.3889	3.7300	2.0646
Q4, (10X10)	130.0788	65.4963	46.2423	3.0828	47.1992	35.1775	2.3452	3.4632	1.8259
Q9, (10X10)	129.5873	66.3302	46.9163	3.1278	47.4909	35.4112	2.3607	3.8450	2.3440
Q4, (12X12)	129.9416	65.7933	46.3886	3.0926	47.3167	35.2104	2.3474	3.5427	1.8897
Q9, (12X12)	129.5869	66.3210	46.9020	3.1268	47.4859	35.4032	2.3602	3.8548	2.3902
Q4, (20X20)	129.7105	66.1127	46.7050	3.1137	47.4140	35.3295	2.3553	3.6995	2.0400
Q9, (20X20)	129.5865	66.3085	46.8830	3.1255	47.4803	35.3936	2.3596	3.8704	2.4703

Apêndice A1.2 – Deformação transversal, e tensões para um laminado, considerando o uso do fator de correção ao corte, e sujeito a carregamento sinusoidal.

Tabela 46 - Resultados obtidos com diferentes tipos de elementos, SSSS, carregamento sinusoidal, $l/h=10$ e inclusão de $K=5/6$. Todos os valores apresentados foram normalizados.

Modelos	\bar{w}	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{yy}$	$\bar{\tau}_{zx}$	$\bar{\tau}_{yz}$
Q4, (4X4)	1.036	0.4887	0.3393	0.3272	0.1999
Q9, (4X4)	0.9097	0.5316	0.344	0.3415	0.2071
Q4, (10X10)	0.9278	0.5177	0.3395	0.3473	0.2109
Q9, (10X10)	0.909	0.5243	0.3403	0.3495	0.212
Q4, (12X12)	0.922	0.5194	0.3395	0.3485	0.2115
Q9, (12X12)	0.909	0.524	0.3401	0.35	0.2123
Q4, (20X20)	0.9136	0.5218	0.3396	0.3501	0.2124
Q9, (20X20)	0.9089	0.524	0.3401	0.35	0.2123

Apêndice A1.3 – Deformação transversal, e tensões para um laminado, em vibração livre, considerando o uso do fator de correção ao corte.

Tabela 47 - Resultados obtidos com diferentes tipos de elementos, SSSS, vibrações livres, $l/h=10$ e inclusão de $K=5/6$. Todos os valores apresentados foram normalizados.

Método	(1,1)	(2,1)	(1,2)	(2,2)	(3,1)	(1,3)	(3,2)	(2,3)
Q4, (4X4)	0.0711	0.1478	0.202	0.2268	0.3199	0.3209	0.3244	0.3499
Q9, (4X4)	0.0673	0.1242	0.1739	0.2066	0.2171	0.2742	0.2968	0.3183
Q4, (10X10)	0.0679	0.1269	0.1774	0.21	0.225	0.2804	0.3046	0.3243
Q9, (10X10)	0.0673	0.1234	0.1729	0.2056	0.2109	0.2701	0.2901	0.3129
Q4, (12X12)	0.0677	0.1258	0.176	0.2087	0.2205	0.2773	0.3001	0.3208
Q9, (12X12)	0.0673	0.1234	0.1729	0.2056	0.2108	0.27	0.29	0.3125
Q4, (20X20)	0.0674	0.1243	0.174	0.2067	0.2141	0.27226	0.2935	0.3157
Q9, (20X20)	0.0673	0.1234	0.1729	0.2056	0.2108	0.27	0.29	0.3124

Apêndice A2

Neste apêndice, são apresentadas tabelas com os resultados obtidos nos diferentes casos de estudo.

Apêndice A2.1.1 – Deformação transversal, tensões e frequências naturais para um compósito vidro-epoxy.

Tabela 48 – Deformada e tensões normalizadas. Camadas exteriores vidro-epoxy, núcleo 10 mm, K=1.

Id. Núcleo	Id. Material	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x^1$	$\bar{\sigma}_x^2$	$\bar{\sigma}_x^3$	$\bar{\sigma}_y^1$	$\bar{\sigma}_y^2$	$\bar{\sigma}_y^3$	$\bar{\tau}_{xz}^1$	$\bar{\tau}_{xz}^2$
1	H35	3.36E-09	114.3983	1.4521	0.0478	55.4747	15.4089	0.1133	3.4204	3.7889
2	H45	3.07E-09	109.4906	1.394	0.0756	53.4556	16.7822	0.1464	3.4849	3.6929
3	H60	2.42E-09	99.3183	4.9754	0.1669	48.6329	19.4354	0.2529	3.6566	3.4661
4	H80	2.04E-09	93.9096	14.1838	0.2567	45.4337	20.636	0.3549	3.785	3.3202
5	H100	1.65E-09	89.0026	24.1051	0.4111	41.6939	21.4189	0.5254	3.9496	3.1573
6	H130	1.37E-09	86.0356	31.6036	0.6059	38.6009	21.5565	0.7343	4.0962	3.0295
7	H160	1.25E-09	84.9193	34.9684	0.7341	37.1158	21.4648	0.869	4.1693	2.9701
8	H200	1.12E-09	83.8365	38.6495	0.9243	35.4014	21.238	1.0663	4.2552	2.9026
9	H250	9.90E-10	82.8224	42.4726	1.2164	33.4858	20.8394	1.3646	4.3521	2.8274

Tabela 49 – Frequências naturais normalizadas. Camadas exteriores vidro-epoxy, núcleo 10 mm, K=1.

Id. Núcleo	Id. Material	Modos de Vibração				
		(1,1)	(2,1)	(1,2)	(2,2)	(3,1)
1	H35	0.0228	0.0383	0.0415	0.0525	0.0574
2	H45	0.0239	0.0402	0.0434	0.0549	0.0602
3	H60	0.0269	0.0456	0.049	0.062	0.0683
4	H80	0.0293	0.0501	0.0539	0.0682	0.0753
5	H100	0.0326	0.0565	0.0611	0.0773	0.0855
6	H130	0.0359	0.063	0.0688	0.0871	0.0964
7	H160	0.0376	0.0666	0.0733	0.0926	0.1025
8	H200	0.0398	0.0711	0.0791	0.1	0.1106
9	H250	0.0424	0.0768	0.0869	0.1096	0.121

Tabela 50 – Deformada e tensões normalizadas. Camadas exteriores vidro-epoxy, núcleo 15 mm,
K=1.

Id. Núcleo	Id. Material	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x^1$	$\bar{\sigma}_x^2$	$\bar{\sigma}_x^3$	$\bar{\sigma}_y^1$	$\bar{\sigma}_y^2$	$\bar{\sigma}_y^3$	$\bar{\tau}_{xz}^1$	$\bar{\tau}_{xz}^2$
1	H35	4.94E-09	117.7804	15.7687	0.1849	62.1289	30.2867	0.2644	3.575	3.4199
2	H45	4.52E-09	114.5913	21.1033	0.2226	60.1844	30.9594	0.3081	3.6276	3.3339
3	H60	3.59E-09	108.2601	33.3824	0.3464	55.4125	31.9454	0.4487	3.7676	3.1325
4	H80	3.04E-09	105.1275	41.1095	0.4679	52.1426	32.0635	0.5831	3.8715	3.0046
5	H100	2.47E-09	102.5278	49.6223	0.6765	48.2209	31.6298	0.8077	4.0028	2.8632
6	H130	2.07E-09	101.1189	56.136	0.9392	44.9087	30.8167	1.0832	4.1171	2.7531
7	H160	1.89E-09	100.6152	59.0511	1.1116	43.299	30.2883	1.261	4.1727	2.7019
8	H200	1.71E-09	100.1079	62.2014	1.3669	41.425	29.5726	1.5213	4.2366	2.6433
9	H250	1.52E-09	99.5318	65.3734	1.7571	39.3065	28.6421	1.9147	4.3064	2.577

Tabela 51 – Frequências naturais normalizadas. Camadas exteriores vidro-epoxy, núcleo 15 mm,
K=1.

Id. Núcleo	Id. Material	Modos de Vibração				
		(1,1)	(2,1)	(1,2)	(2,2)	(3,1)
1	H35	0.0219	0.0367	0.0386	0.0489	0.0541
2	H45	0.0229	0.0385	0.0406	0.0514	0.0569
3	H60	0.0257	0.0438	0.0463	0.0587	0.0651
4	H80	0.028	0.0481	0.0513	0.0649	0.0721
5	H100	0.0311	0.0542	0.0585	0.074	0.0822
6	H130	0.034	0.0603	0.0661	0.0835	0.0926
7	H160	0.0356	0.0636	0.0704	0.0889	0.0985
8	H200	0.0376	0.0678	0.0761	0.096	0.1062
9	H250	0.0399	0.073	0.0835	0.1053	0.1161

Apêndice A2.1.2 – Deformação transversal, tensões e frequências naturais para diferentes camadas exteriores, e espessura do núcleo, com $K=5/6$.

Tabela 52 – Deformada e tensões normalizadas. Camadas exteriores vidro-epoxy, núcleo 10 mm, $K=5/6$.

Id. Núcleo	Id. Material	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x^1$	$\bar{\sigma}_x^2$	$\bar{\sigma}_x^3$	$\bar{\sigma}_y^1$	$\bar{\sigma}_y^2$	$\bar{\sigma}_y^3$	$\bar{\tau}_{xz}^1$	$\bar{\tau}_{xz}^2$
1	H35	3.88E-09	123.5434	1.5196	0.0119	58.9543	12.7454	0.0811	3.3206	3.9471
2	H45	3.54E-09	117.455	1.4612	0.04	56.6955	14.5137	0.1149	3.3855	3.8398
3	H60	2.78E-09	104.6875	1.2542	0.1323	51.3486	18.0462	0.2244	3.5587	3.5854
4	H80	2.33E-09	97.7831	7.2924	0.223	47.8378	19.7596	0.3294	3.689	3.4212
5	H100	1.87E-09	91.4061	18.661	0.379	43.7585	21.0446	0.5048	3.8578	3.2371
6	H130	1.53E-09	87.4719	27.2123	0.5756	40.3887	21.5007	0.7192	4.0104	3.0927
7	H160	1.39E-09	85.9743	31.0483	0.7048	38.7663	21.5265	0.8571	4.0874	3.0258
8	H200	1.24E-09	84.5187	35.254	0.8964	36.8863	21.4049	1.0585	4.179	2.9499
9	H250	1.08E-09	83.1733	39.6461	1.1901	34.7738	21.0836	1.362	4.2837	2.8658

Tabela 53 – Frequências naturais normalizadas. Camadas exteriores vidro-epoxy, núcleo 10 mm, $K=5/6$.

Id. Núcleo	Id. Material	Modos de Vibração				
		(1,1)	(2,1)	(1,2)	(2,2)	(3,1)
1	H35	0.0212	0.0356	0.0387	0.049	0.0534
2	H45	0.0222	0.0373	0.0404	0.0511	0.0559
3	H60	0.0251	0.0423	0.0456	0.0577	0.0634
4	H80	0.0274	0.0466	0.05	0.0634	0.0698
5	H100	0.0306	0.0527	0.0568	0.0718	0.0794
6	H130	0.0339	0.059	0.064	0.0809	0.0896
7	H160	0.0356	0.0624	0.0681	0.0862	0.0954
8	H200	0.0378	0.0669	0.0737	0.0931	0.1031
9	H250	0.0405	0.0726	0.081	0.1024	0.1132

Tabela 54 – Deformada e tensões normalizadas. Camadas exteriores carbono-epoxy, núcleo 10 mm,
K=5/6.

Id. Núcleo	Id. Material	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x^1$	$\bar{\sigma}_x^2$	$\bar{\sigma}_x^3$	$\bar{\sigma}_y^1$	$\bar{\sigma}_y^2$	$\bar{\sigma}_y^3$	$\bar{\tau}_{xz}^1$	$\bar{\tau}_{xz}^2$
1	H35	3.77E-09	268.7625	2.2344	0.0218	37.9729	13.7756	0.1482	3.1646	5.5744
2	H45	3.47E-09	251.2169	2.1524	0.047	36.6889	14.4103	0.1847	3.2645	5.4014
3	H60	2.76E-09	212.5324	1.9317	0.1276	33.2228	15.3814	0.2985	3.5383	4.9902
4	H80	2.32E-09	190.1097	1.7633	0.2026	30.5673	15.4977	0.4008	3.7514	4.7226
5	H100	1.85E-09	167.8175	1.5405	0.3223	27.0613	14.999	0.5578	4.0357	4.4187
6	H130	1.50E-09	152.7226	0.7169	0.4601	23.825	14.036	0.7297	4.2998	4.1751
7	H160	1.34E-09	146.5159	0.2864	0.5447	22.199	13.398	0.831	4.4355	4.0602
8	H200	1.17E-09	140.1323	11.1538	0.6638	20.2535	12.528	0.969	4.5983	3.9283
9	H250	9.96E-10	133.9023	24.9131	0.8363	18.1271	11.4027	1.1604	4.7864	3.7807

Tabela 55 – Frequências naturais normalizadas. Camadas exteriores carbono-epoxy, núcleo 10 mm,
K=5/6.

Id. Núcleo	Id. Material	Modos de Vibração				
		(1,1)	(2,1)	(1,2)	(2,2)	(3,1)
1	H35	0.0283	0.0455	0.0586	0.0672	0.0694
2	H45	0.0295	0.0476	0.0605	0.0704	0.072
3	H60	0.0331	0.0537	0.0665	0.0797	0.0798
4	H80	0.036	0.0587	0.0719	0.0864	0.0878
5	H100	0.0404	0.0659	0.0802	0.0967	0.0994
6	H130	0.0448	0.0731	0.0894	0.1077	0.1115
7	H160	0.0474	0.0771	0.0949	0.1141	0.1182
8	H200	0.0507	0.0822	0.1024	0.1228	0.127
9	H250	0.0551	0.0886	0.1127	0.1344	0.1383

Tabela 56 – Deformada e tensões normalizadas. Camadas exteriores vidro-epoxy, núcleo 15 mm,
K=5/6.

Id. Núcleo	Id. Material	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x^1$	$\bar{\sigma}_x^2$	$\bar{\sigma}_x^3$	$\bar{\sigma}_y^1$	$\bar{\sigma}_y^2$	$\bar{\sigma}_y^3$	$\bar{\tau}_{xz}^1$	$\bar{\tau}_{xz}^2$
1	H35	5.71E-09	123.8513	6.3425	0.1597	65.384	28.7948	0.2439	3.4934	3.5614
2	H45	5.20E-09	119.7523	12.4815	0.1978	63.2554	29.7839	0.2889	3.5461	3.4646
3	H60	4.10E-09	111.4633	26.4925	0.3229	58.0776	31.4572	0.4335	3.6871	3.2368
4	H80	3.45E-09	107.2316	35.2306	0.4456	54.5547	31.9581	0.5717	3.793	3.0915
5	H100	2.78E-09	103.5857	44.8162	0.656	50.3336	31.8717	0.8021	3.9286	2.9304
6	H130	2.30E-09	101.5264	52.1624	0.9206	46.752	31.2468	1.0838	4.0488	2.8052
7	H160	2.09E-09	100.783	55.4695	1.0941	45.001	30.7732	1.265	4.1083	2.7472
8	H200	1.87E-09	100.0581	59.0714	1.3507	42.9516	30.0908	1.5295	4.1776	2.6813
9	H250	1.65E-09	99.3131	62.7504	1.7425	40.6205	29.1593	1.928	4.2545	2.6074

Tabela 57 – Frequências naturais normalizadas. Camadas exteriores vidro-epoxy, núcleo 15 mm,
K=5/6.

Id. Núcleo	Id. Material	Modos de Vibração				
		(1,1)	(2,1)	(1,2)	(2,2)	(3,1)
1	H35	0.0203	0.0339	0.0357	0.0452	0.05
2	H45	0.0213	0.0356	0.0375	0.0475	0.0526
3	H60	0.024	0.0406	0.0429	0.0543	0.0602
4	H80	0.0262	0.0447	0.0474	0.06	0.0666
5	H100	0.0293	0.0506	0.0542	0.0685	0.0761
6	H130	0.0322	0.0565	0.0613	0.0775	0.0861
7	H160	0.0338	0.0598	0.0654	0.0827	0.0917
8	H200	0.0358	0.064	0.0708	0.0894	0.0991
9	H250	0.0382	0.0692	0.0779	0.0984	0.1088

Tabela 58 – Deformada e tensões normalizadas. Camadas exteriores carbono-epoxy, núcleo 15 mm,
K=5/6.

Id. Núcleo	Id. Material	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x^1$	$\bar{\sigma}_x^2$	$\bar{\sigma}_x^3$	$\bar{\sigma}_y^1$	$\bar{\sigma}_y^2$	$\bar{\sigma}_y^3$	$\bar{\tau}_{xz}^1$	$\bar{\tau}_{xz}^2$
1	H35	5.77E-09	243.8736	3.255	0.1725	44.7595	24.5646	0.3311	3.496	5.0631
2	H45	5.27E-09	230.429	3.1121	0.2072	43.0951	24.6005	0.3788	3.5838	4.9056
3	H60	4.16E-09	202.1222	2.0345	0.3145	38.6413	23.9928	0.5233	3.8244	4.53
4	H80	3.48E-09	186.6506	1.0799	0.4114	35.2731	22.9731	0.6497	4.0097	4.2853
5	H100	2.76E-09	172.0687	8.3342	0.5635	30.9005	21.1084	0.8399	4.2521	4.0077
6	H130	2.23E-09	162.72	30.2683	0.7371	26.9584	19.0344	1.0461	4.4708	3.7865
7	H160	2.00E-09	159.008	40.3067	0.8437	25.0257	17.8846	1.1676	4.58	3.6828
8	H200	1.74E-09	155.259	51.4593	0.9943	22.769	16.451	1.3338	4.7081	3.5643
9	H250	1.48E-09	151.6247	63.2825	1.2137	20.3474	14.7925	1.5668	4.8513	3.4325

Tabela 59 – Frequências naturais normalizadas. Camadas exteriores carbono-epoxy, núcleo 15 mm,
K=5/6.

Id. Núcleo	Id. Material	Modos de Vibração				
		(1,1)	(2,1)	(1,2)	(2,2)	(3,1)
1	H35	0.0266	0.0432	0.0505	0.0614	0.0636
2	H45	0.0278	0.0453	0.0527	0.0642	0.0668
3	H60	0.0313	0.0512	0.0594	0.0724	0.0762
4	H80	0.03442	0.0561	0.0652	0.0795	0.0841
5	H100	0.0384	0.0629	0.074	0.0901	0.0954
6	H130	0.0428	0.0697	0.0837	0.1013	0.107
7	H160	0.0452	0.0735	0.0894	0.1078	0.1134
8	H200	0.0484	0.0783	0.0971	0.1165	0.1218
9	H250	0.0526	0.0843	0.1075	0.1281	0.1325

Apêndice A2.1.3 – Distribuição da deformação transversal, e frequência fundamental, para diferentes fatores de correção ao corte.

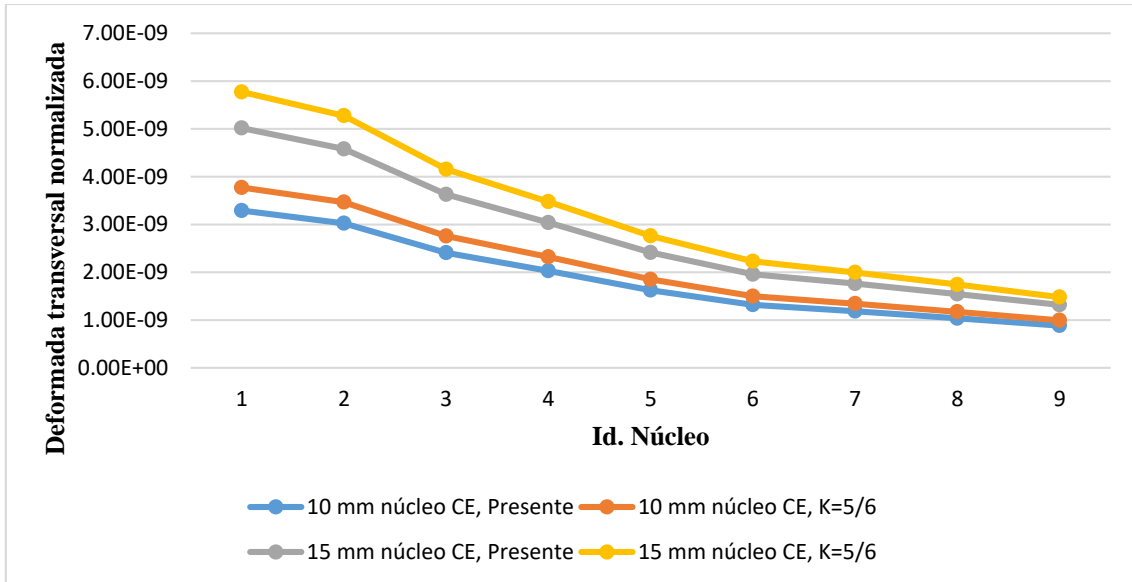


Fig. 79 - Deformada e tensões normalizadas. Camadas exteriores carbono-epoxy.

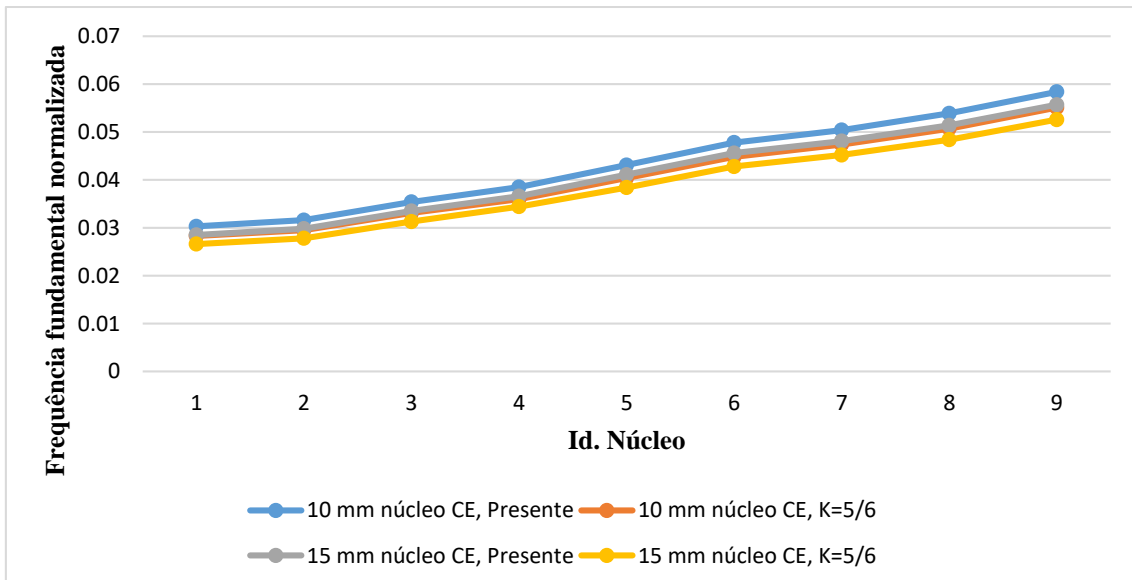


Fig. 80 - Frequências naturais normalizadas. Camadas exteriores carbono-epoxy.

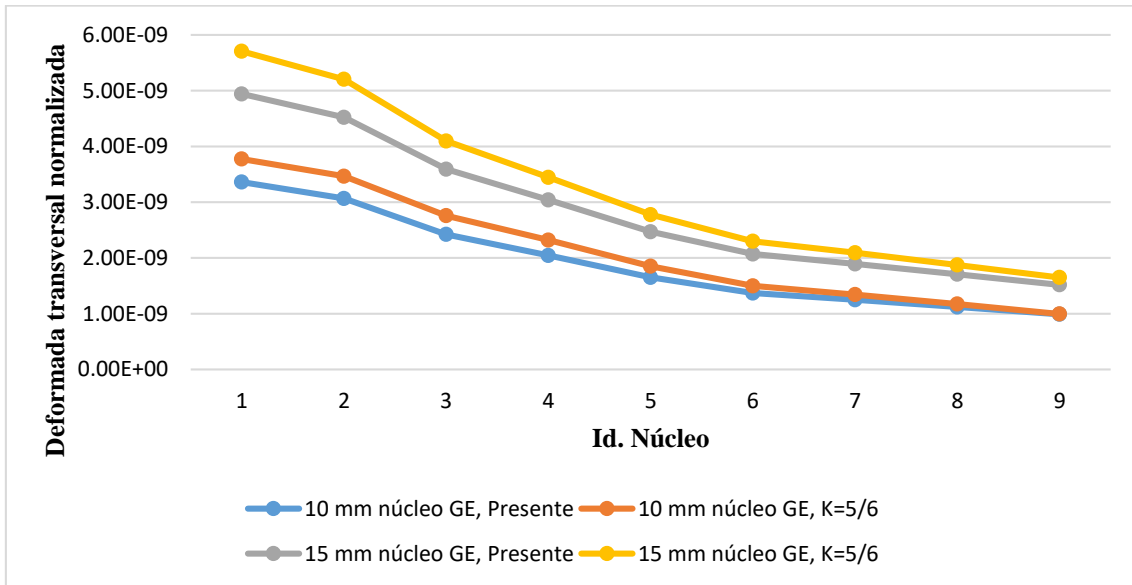


Fig. 81 - Deformada e tensões normalizadas. Camadas exteriores vidro-epoxy.

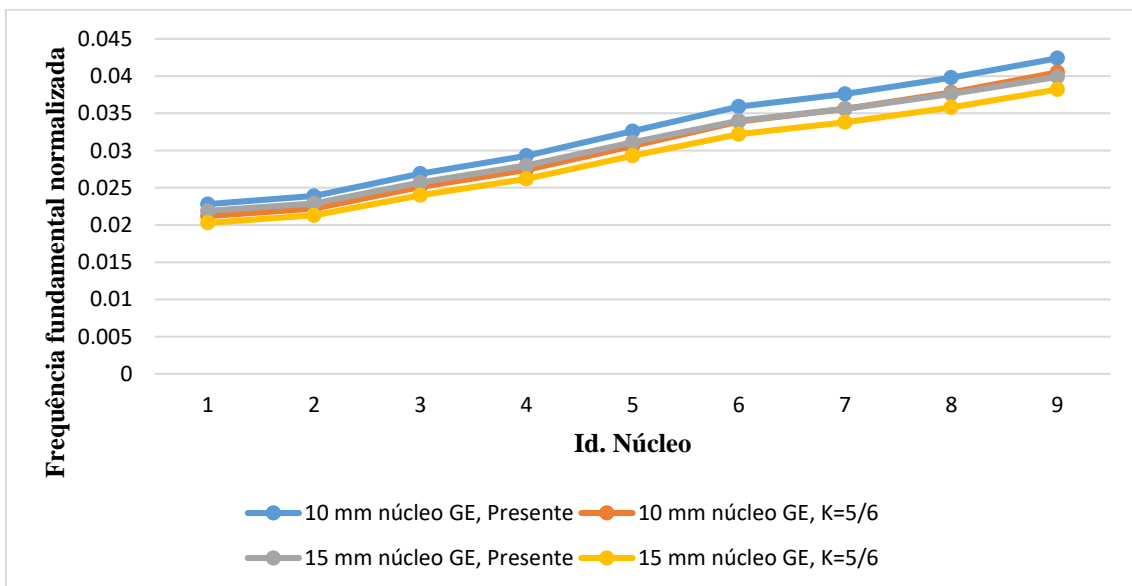


Fig. 82 - Frequências naturais normalizadas. Camadas exteriores carbono-epoxy.

Apêndice A2.2 – Deformação transversal, tensões e frequências naturais para diferentes razões geométricas.

Tabela 60 – Deformada transversal e tensões normalizadas vs. rácio l/h. K=5/6.

<i>l/h</i>	<i>h_k</i>	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x^1$	$\bar{\sigma}_x^2$	$\bar{\sigma}_x^3$	$\bar{\sigma}_y^1$	$\bar{\sigma}_y^2$	$\bar{\sigma}_y^3$	$\bar{\tau}_{xz}^1$	$\bar{\tau}_{xz}^2$
5	h/6	3.24E-10	19.5682	13.0335	0.8174	1.3334	0.7448	11.2028	2.4368	1.2326
	h/5	3.31E-10	18.4341	11.2033	0.7215	1.454	0.7194	11.1515	2.6105	1.352
	h/4	3.46E-10	17.3287	9.0726	0.6079	1.6909	0.6819	10.9367	2.862	1.528
	h/3	3.81E-10	16.3552	6.2612	0.4449	2.0689	0.5773	9.5969	3.2487	1.8185
10	h/6	1.56E-09	78.2596	52.1317	3.307	4.9147	3.1365	47.8349	4.8955	2.4757
	h/5	1.57E-09	76.4322	45.9948	2.9431	4.9632	2.8739	44.2518	5.3485	2.781
	h/4	1.60E-09	74.6894	37.7945	2.4432	5.0318	2.466	38.3677	5.9594	3.2133
	h/3	1.67E-09	73.23	25.332	1.6499	5.6343	1.7381	28.0564	6.7845	3.8703
20	h/6	1.04E-08	313.4214	208.884	13.3124	19.4443	12.8263	196.664	9.831	4.973
	h/5	1.04E-08	311.3793	186.9553	11.9004	19.1762	11.4191	174.8305	10.8432	5.6512
	h/4	1.04E-08	308.5993	154.7684	9.8076	18.567	9.2679	142.0051	12.1508	6.585
	h/3	1.04E-08	303.956	102.2812	6.3822	19.4553	6.3028	103.0117	13.7555	7.9182

Tabela 61 – Frequências naturais normalizadas vs rácio l/h. K=5/6.

<i>l/h</i>	<i>h_k</i>	(1,1)	(2,1)	(1,2)	(2,2)
5	h/6	0.3632	0.5803	0.7662	0.8427
	h/5	0.3593	0.5662	0.7582	0.8267
	h/4	0.3512	0.5467	0.7418	0.811
	h/3	0.3356	0.5228	0.7083	0.8084
10	h/6	0.1191	0.2242	0.305	0.3594
	h/5	0.1186	0.2137	0.3072	0.3433
	h/4	0.1172	0.1987	0.3066	0.3205
	h/3	0.1143	0.1781	0.2903	0.2992
20	h/6	0.0329	0.0712	0.0976	0.1191
	h/5	0.0329	0.0661	0.1004	0.1186
	h/4	0.0328	0.0593	0.1029	0.1066
	h/3	0.0325	0.0509	0.0876	0.1038

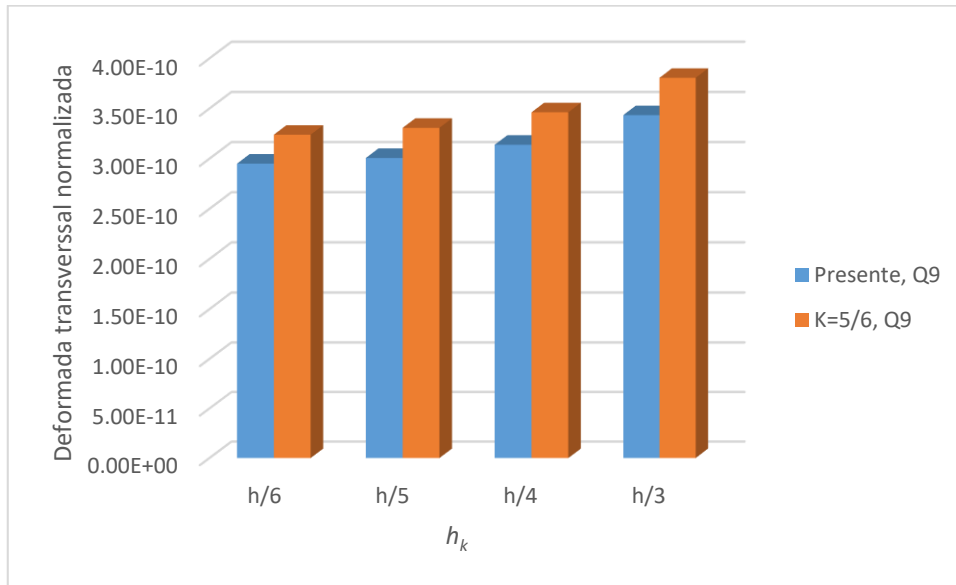


Fig. 83 - Deformada transversal normalizada vs. h_k . $l/h=5$.

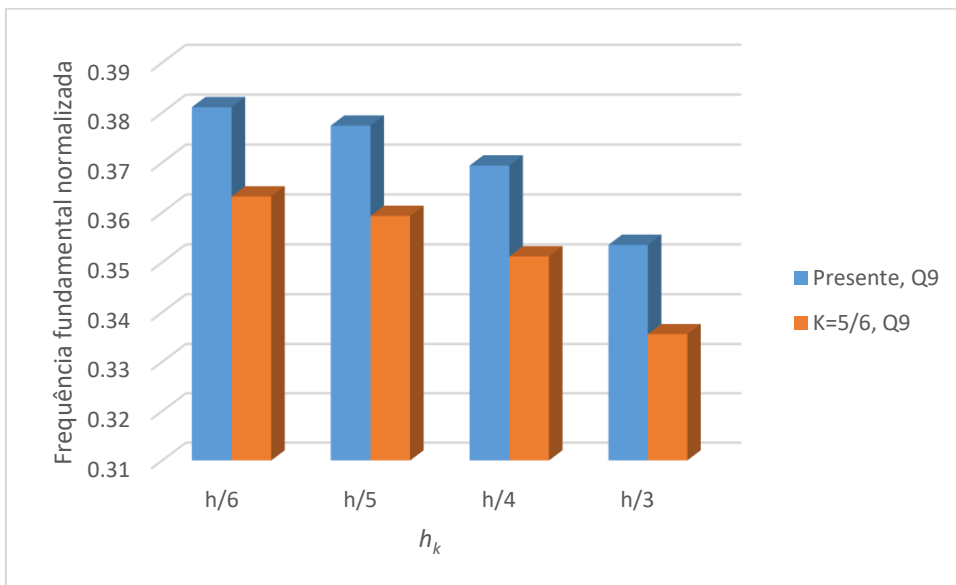


Fig. 84 - Frequência fundamental normalizada vs h_k . $l/h=5$.

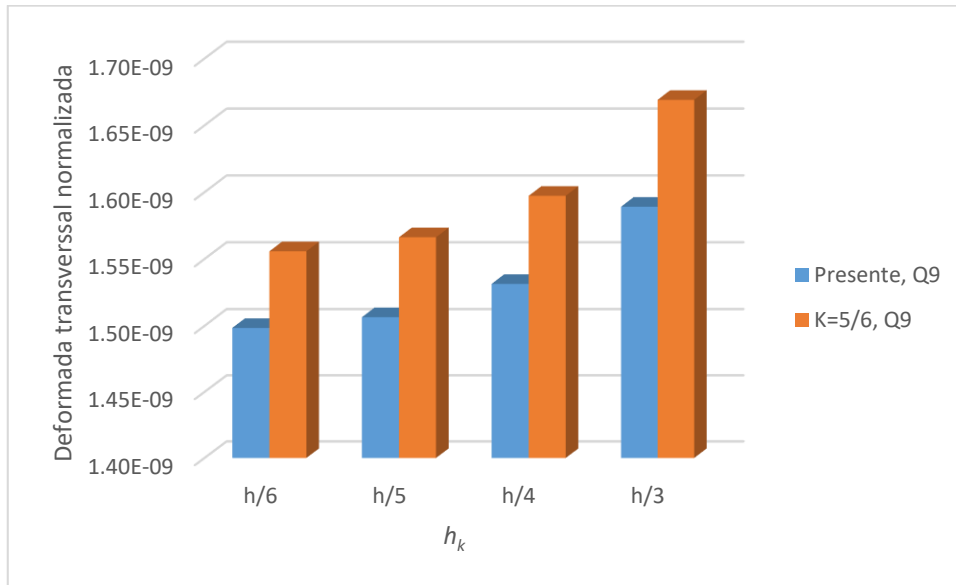


Fig. 85 - Deformada transversal normalizada vs. h_k . $l/h=10$.

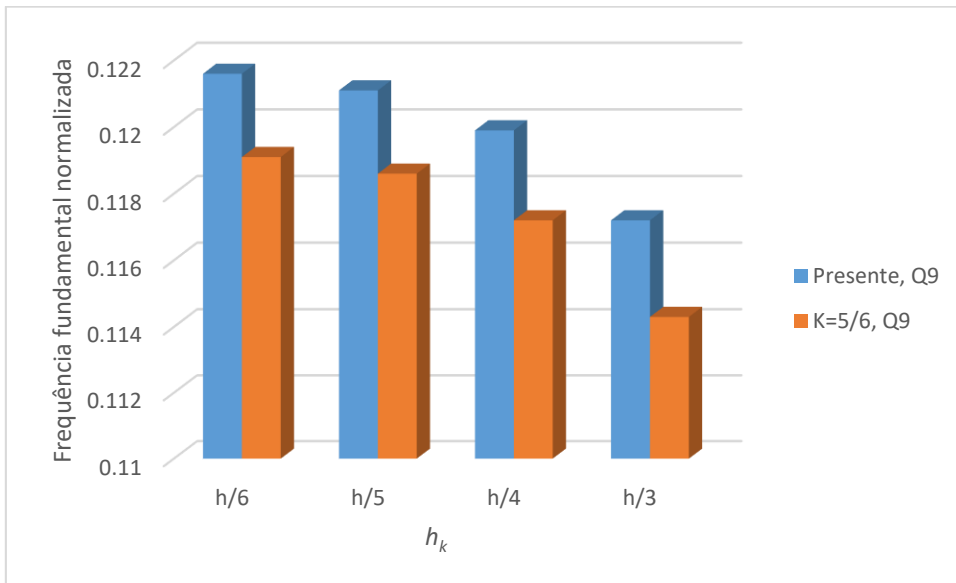


Fig. 86 - Frequência fundamental normalizada vs h_k . $l/h=10$.

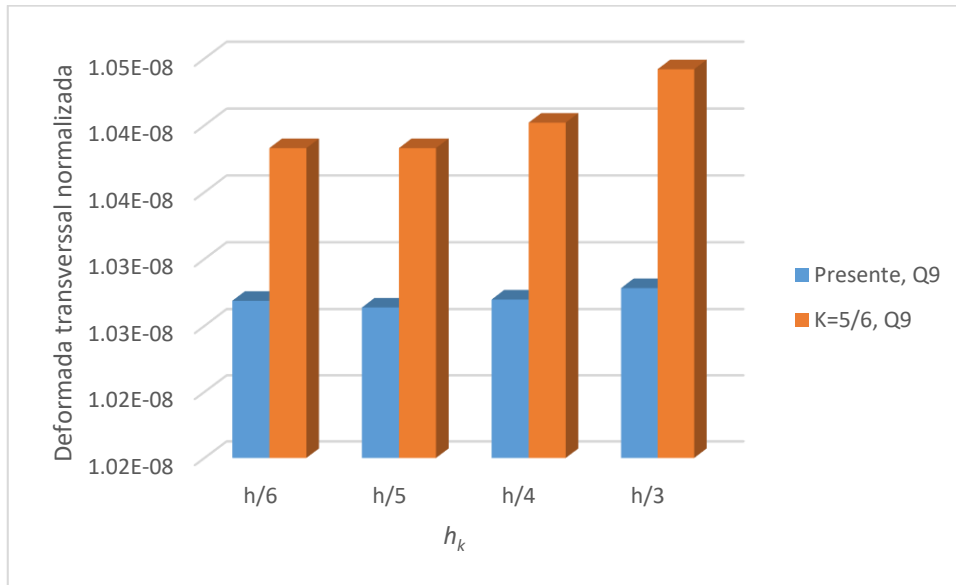


Fig. 87 - Deformada transversal normalizada vs. h_k . $l/h=20$.

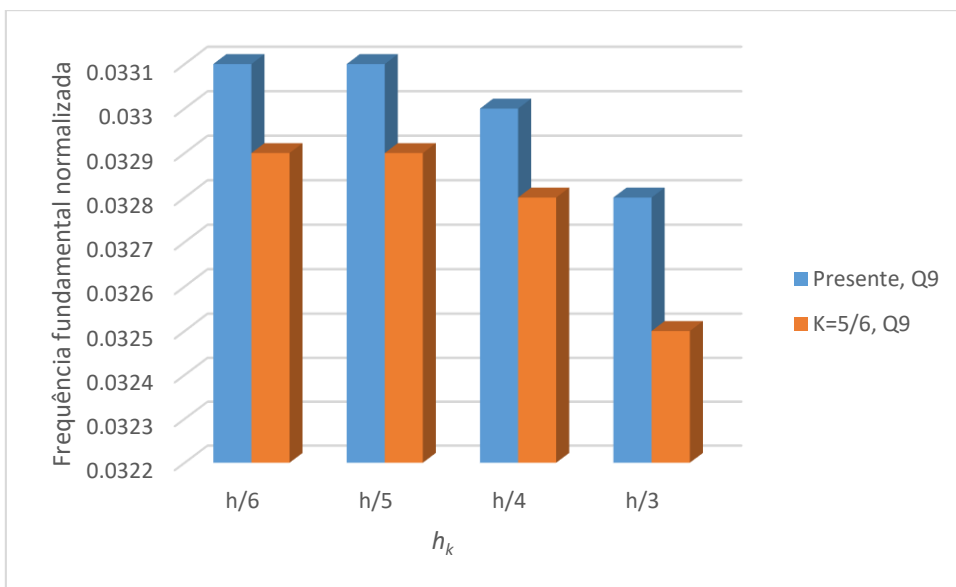


Fig. 88 - Frequência fundamental normalizada vs h_k . $l/h=20$.

Apêndice A2.3 – Deformação transversal, tensões e frequências naturais para diferentes sequências de empilhamento.

Tabela 62 – Deformada e tensões normalizadas para laminados [0°/0°/0°]. K=5/6.

<i>l/h</i>	<i>Empilhamento</i>	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x^1$	$\bar{\sigma}_x^2$	$\bar{\sigma}_x^3$	$\bar{\sigma}_y^1$	$\bar{\sigma}_y^2$	$\bar{\sigma}_y^3$	$\bar{\tau}_{xz}^1$	$\bar{\tau}_{xz}^2$
5	[0°/0°/0°]	4.77E-10	18.7429	1.6125	1.6125	2.7705	0.8405	0.08405	2.9602	1.9542
	[30°/0°/30°]	3.76E-10	12.0762	3.4476	3.981	5.6987	1.4025	0.6119	2.4447	1.6656
	[45°/0°/45°]	3.36E-10	8.2411	2.349	2.9689	8.5086	2.61	0.5306	2.1582	1.4788
	[60°/0°/60°]	3.42E-10	5.2257	1.0847	5.1404	12.5367	2.9388	0.4941	1.9042	1.1428
	[90°/0°/90°]	3.81E-10	2.0689	0.5773	9.5969	16.3552	6.2612	0.4449	1.3981	0.653
10	[0°/0°/0°]	1.90E-09	76.2935	19.6459	19.6459	6.794	2.1706	2.1706	6.7782	3.9943
	[30°/0°/30°]	1.68E-09	47.4758	12.183	26.0338	19.8711	5.4142	2.1345	5.709	3.3259
	[45°/0°/45°]	1.57E-09	30.2805	8.0987	23.6212	30.8423	9.0763	2.3656	5.0233	2.957
	[60°/0°/60°]	1.60E-09	19.6464	5.8804	25.4978	48.7828	15.0552	2.2944	4.4502	2.2019
	[90°/0°/90°]	1.67E-09	5.6343	1.7381	28.0564	73.23	25.332	1.6499	2.6848	1.0019
20	[0°/0°/0°]	1.08E-08	303.8384	95.299	95.299	22.1845	7.2971	7.2971	14.1361	7.8993
	[30°/0°/30°]	1.05E-08	188.9269	59.4012	128.0927	76.1939	24.2069	8.321	12.3846	6.7221
	[45°/0°/45°]	1.00E-08	118.9602	37.4287	119.9609	119.5533	37.8874	9.2227	11.0351	6.1832
	[60°/0°/60°]	1.03E-08	76.4681	24.8302	109.6632	190.1099	62.2792	8.9533	10.6118	4.5068
	[90°/0°/90°]	1.04E-08	19.4553	6.3028	103.0117	303.956	102.2812	6.3822	5.476	1.7342

Tabela 63 – Frequências naturais normalizadas, para laminados [0°/0°/0°]. K=5/6.

<i>l/h</i>	<i>Empilhamento</i>	(1,1)	(2,1)	(1,2)	(2,2)
5	[0°/0°/0°]	0.3016	0.5102	0.6213	0.7665
	[30°/0°/30°]	0.3396	0.5705	0.6735	0.8098
	[45°/0°/45°]	0.3586	0.592	0.7104	0.828
	[60°/0°/60°]	0.3551	0.5727	0.7215	0.8199
	[90°/0°/90°]	0.3356	0.5228	0.7083	0.8084
10	[0°/0°/0°]	0.1068	0.1622	0.2667	0.2741
	[30°/0°/30°]	0.1144	0.1943	0.2691	0.2952
	[45°/0°/45°]	0.1185	0.2074	0.2742	0.3053
	[60°/0°/60°]	0.1176	0.2019	0.2863	0.3048
	[90°/0°/90°]	0.1143	0.1781	0.2903	0.2992
20	[0°/0°/0°]	0.0317	0.0459	0.0763	0.0982
	[30°/0°/30°]	0.0326	0.0563	0.0889	0.091
	[45°/0°/45°]	0.0333	0.0608	0.0883	0.0935
	[60°/0°/60°]	0.033	0.0594	0.093	0.0942
	[90°/0°/90°]	0.0325	0.0509	0.0876	0.1038

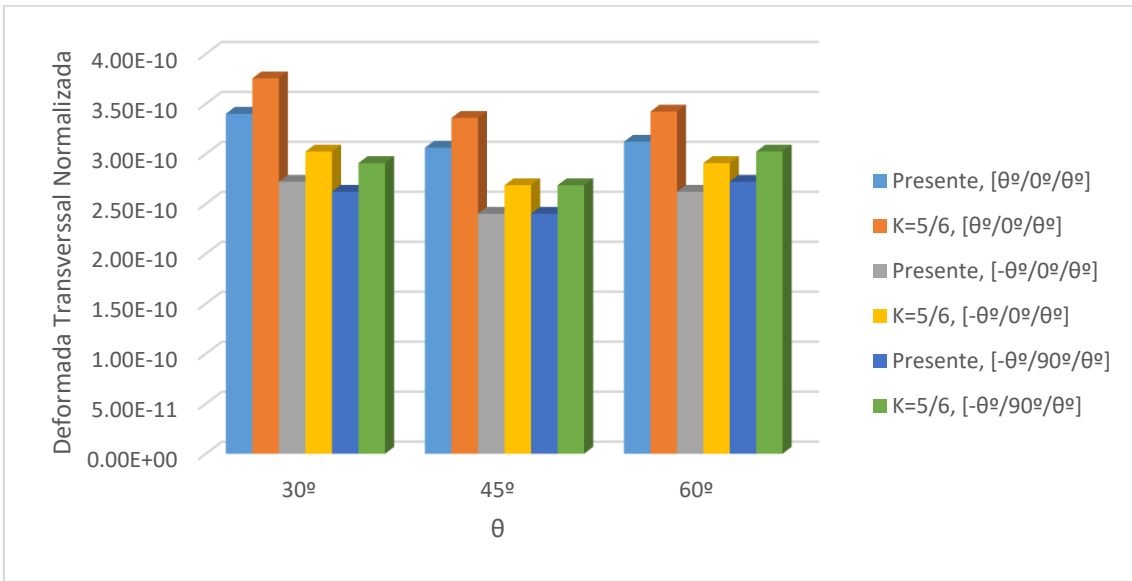


Fig. 89 - Deformada normalizada para $l/h=5$.

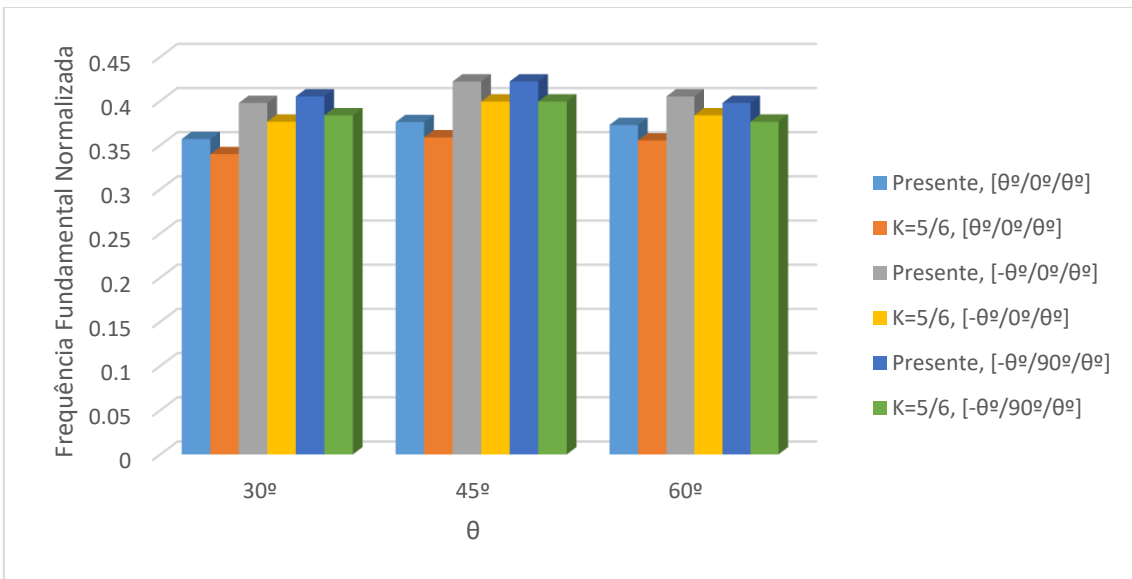


Fig. 90 - Frequências naturais normalizada para $l/h=5$.

Tabela 64 – Deformação transversal e tensões normalizadas para laminados $[-\theta^{\circ}/0^{\circ}/\theta^{\circ}]$. $K=5/6$.

l/h	Empilhamento	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x^1$	$\bar{\sigma}_x^2$	$\bar{\sigma}_x^3$	$\bar{\sigma}_y^1$	$\bar{\sigma}_y^2$	$\bar{\sigma}_y^3$	$\bar{\tau}_{xz}^1$	$\bar{\tau}_{xz}^2$
5	$[-30^{\circ}/0^{\circ}/30^{\circ}]$	3.02E-10	10.8432	2.1008	6.305	4.6578	0.8556	1.0676	2.2455	1.6085
	$[-45^{\circ}/0^{\circ}/45^{\circ}]$	2.69E-10	7.3978	1.5939	3.314	7.3689	1.6028	1.4762	1.9576	1.4228
	$[-60^{\circ}/0^{\circ}/60^{\circ}]$	2.91E-10	4.3945	1.1884	2.5167	10.7231	3.3631	1.3877	1.6611	1.109
10	$[-30^{\circ}/0^{\circ}/30^{\circ}]$	1.25E-09	39.215	12.0307	22.2099	15.9521	4.6335	3.572	5.0496	3.4765
	$[-45^{\circ}/0^{\circ}/45^{\circ}]$	1.12E-09	27.1159	10.6738	14.1232	27.4255	10.8165	5.1642	4.3733	2.9796
	$[-60^{\circ}/0^{\circ}/60^{\circ}]$	1.24E-09	15.7492	6.3639	14.5669	40.3288	18.0726	4.7255	3.6696	2.2257
20	$[-30^{\circ}/0^{\circ}/30^{\circ}]$	7.32E-09	154.3308	52.5719	81.4533	60.074	19.7159	11.9029	10.5883	9.4398
	$[-45^{\circ}/0^{\circ}/45^{\circ}]$	6.60E-09	107.396	45.6114	59.0237	108.7024	46.148	17.1103	9.1081	7.606
	$[-60^{\circ}/0^{\circ}/60^{\circ}]$	7.37E-09	60.6586	25.4724	61.1374	158.1986	72.1705	15.476	7.7571	5.1788

Tabela 65 – Frequências naturais normalizadas, para laminados $[-\theta^{\circ}/0^{\circ}/\theta^{\circ}]$. $K=5/6$.

l/h	Empilhamento	(1,1)	(2,1)	(1,2)	(2,2)
5	$[-30^{\circ}/0^{\circ}/30^{\circ}]$	0.3764	0.6399	0.6926	0.9191
	$[-45^{\circ}/0^{\circ}/45^{\circ}]$	0.3992	0.6862	0.7285	0.9586
	$[-60^{\circ}/0^{\circ}/60^{\circ}]$	0.3837	0.6223	0.7498	0.922
10	$[-30^{\circ}/0^{\circ}/30^{\circ}]$	0.1321	0.2334	0.2839	0.372
	$[-45^{\circ}/0^{\circ}/45^{\circ}]$	0.1399	0.2726	0.2794	0.401
	$[-60^{\circ}/0^{\circ}/60^{\circ}]$	0.133	0.2359	0.3023	0.3662
20	$[-30^{\circ}/0^{\circ}/30^{\circ}]$	0.0388	0.0724	0.0973	0.1191
	$[-45^{\circ}/0^{\circ}/45^{\circ}]$	0.041	0.0889	0.0894	0.1414
	$[-60^{\circ}/0^{\circ}/60^{\circ}]$	0.0388	0.0744	0.0992	0.1235

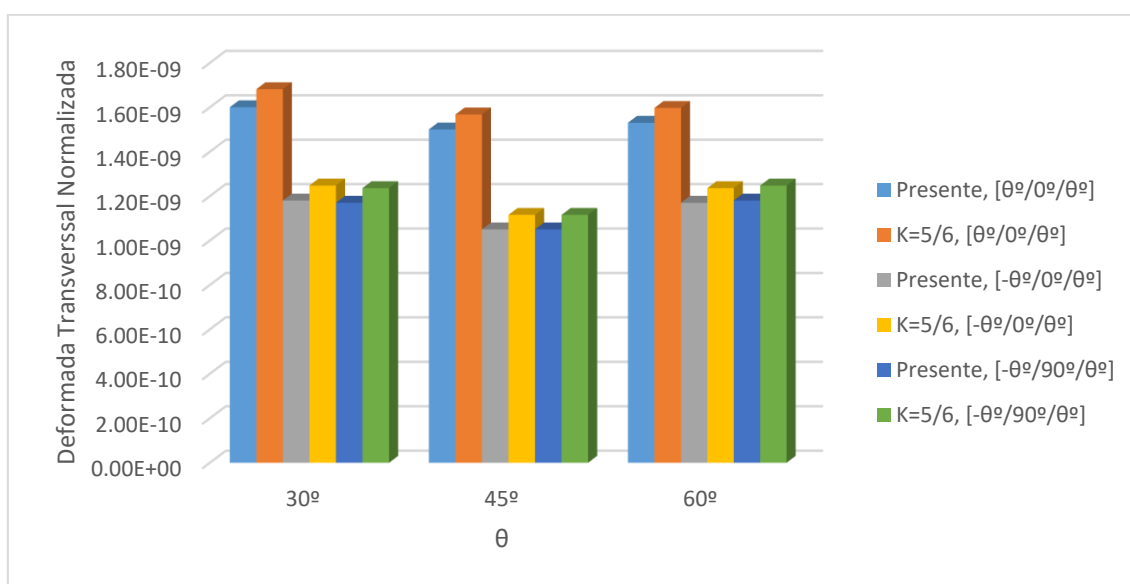


Fig. 91 - Deformada normalizada para laminados $l/h=10$.

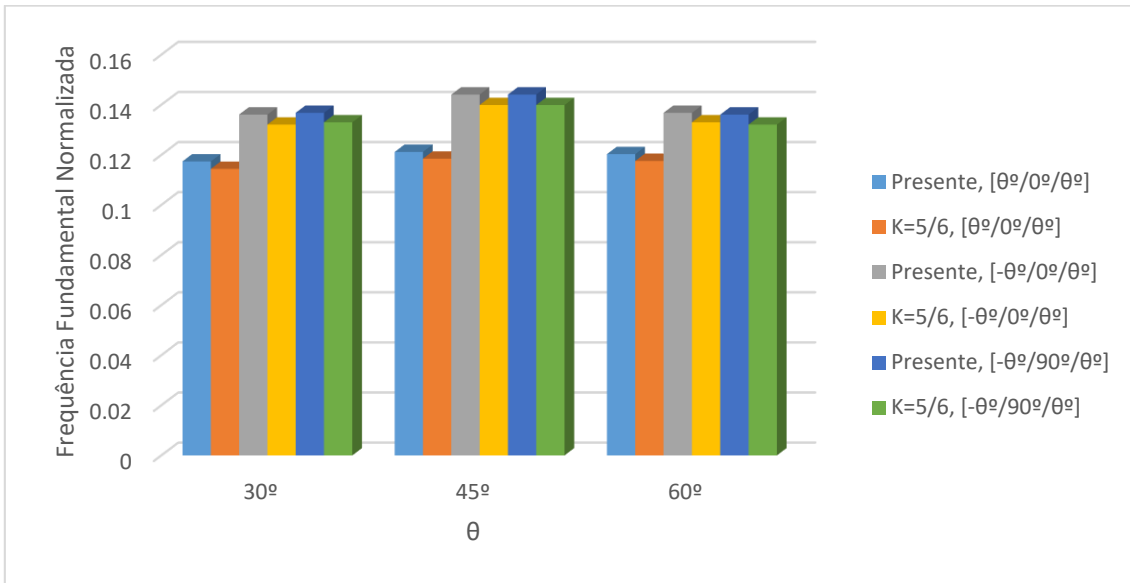


Fig. 92 - Frequências naturais normalizada para $l/h=10$.

Tabela 66 – Deformada transversal e tensões normalizadas para laminados [-0°/90°/0°]. K=5/6.

<i>l/h</i>	<i>Empilhamento</i>	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x^1$	$\bar{\sigma}_x^2$	$\bar{\sigma}_x^3$	$\bar{\sigma}_y^1$	$\bar{\sigma}_y^2$	$\bar{\sigma}_y^3$	$\bar{\tau}_{xz}^1$	$\bar{\tau}_{xz}^2$
5	[0°/90°/0°]	3.81E-10	16.3552	6.2612	0.4449	2.0689	0.5773	9.5969	3.2487	1.8185
	[-30°/90°/30°]	2.91E-10	10.7231	3.3631	1.3877	4.3945	1.1884	2.5167	2.6144	1.7617
	[-45°/90°/45°]	2.69E-10	7.3689	1.6028	1.4762	7.3978	1.5939	3.314	2.17	1.5958
	[-60°/90°/60°]	3.02E-10	4.6578	0.8556	1.0676	10.8432	2.1008	6.305	1.8051	1.2702
10	[0°/90°/0°]	1.67E-09	73.23	25.332	1.6499	5.6343	1.7381	28.0564	6.7845	3.8703
	[-30°/90°/30°]	1.24E-09	40.3288	18.0726	4.7255	15.7492	6.3639	14.5669	5.3504	4.6766
	[-45°/90°/45°]	1.12E-09	27.4255	10.8165	5.1642	27.1159	10.6738	14.1232	4.4316	4.1592
	[-60°/90°/60°]	1.25E-09	15.9521	4.6335	3.572	39.215	12.0307	22.2099	3.4951	2.8859
20	[0°/90°/0°]	1.04E-08	303.956	102.2812	6.3822	19.4553	6.3028	103.0117	13.7555	7.9182
	[-30°/90°/30°]	7.37E-09	158.1986	72.1705	15.476	60.6586	25.4724	61.1374	10.853	13.5355
	[-45°/90°/45°]	6.60E-09	108.7024	46.148	17.1103	107.396	45.6114	59.0237	9.0235	11.8301
	[-60°/90°/60°]	7.32E-09	60.074	19.7159	11.9029	154.3308	52.5719	81.4533	7.0464	7.673

Tabela 67 – Frequências naturais normalizadas para laminados [-0°/90°/0°]. K=5/6.

<i>l/h</i>	<i>Empilhamento</i>	(1,1)	(2,1)	(1,2)	(2,2)
5	[0°/90°/0°]	0.3356	0.5228	0.7083	0.8084
	[-30°/90°/30°]	0.3837	0.6223	0.7498	0.922
	[-45°/90°/45°]	0.3992	0.6862	0.7285	0.9586
	[-60°/90°/60°]	0.3764	0.6399	0.6926	0.9191
10	[0°/90°/0°]	0.1143	0.1781	0.2903	0.2992
	[-30°/90°/30°]	0.133	0.2359	0.3023	0.3662
	[-45°/90°/45°]	0.1399	0.2726	0.2794	0.401
	[-60°/90°/60°]	0.1321	0.2334	0.2839	0.372
20	[0°/90°/0°]	0.0325	0.0509	0.0876	0.1038
	[-30°/90°/30°]	0.0388	0.0744	0.0992	0.1235
	[-45°/90°/45°]	0.041	0.0889	0.0894	0.1414
	[-60°/90°/60°]	0.0388	0.0724	0.0973	0.1191

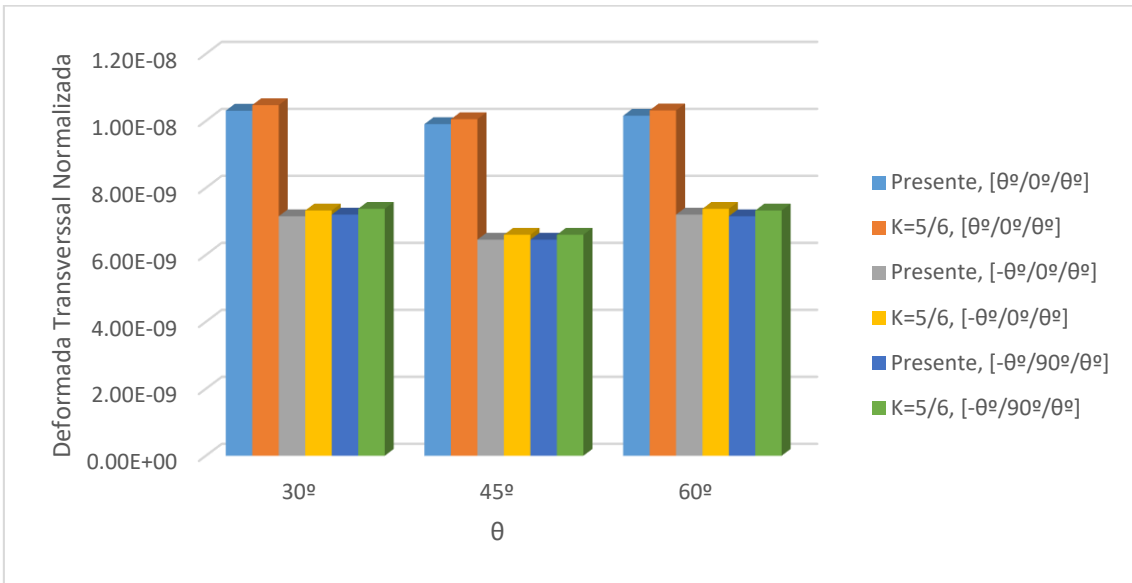


Fig. 93 - Deformada normalizada para laminados $l/h=20$.

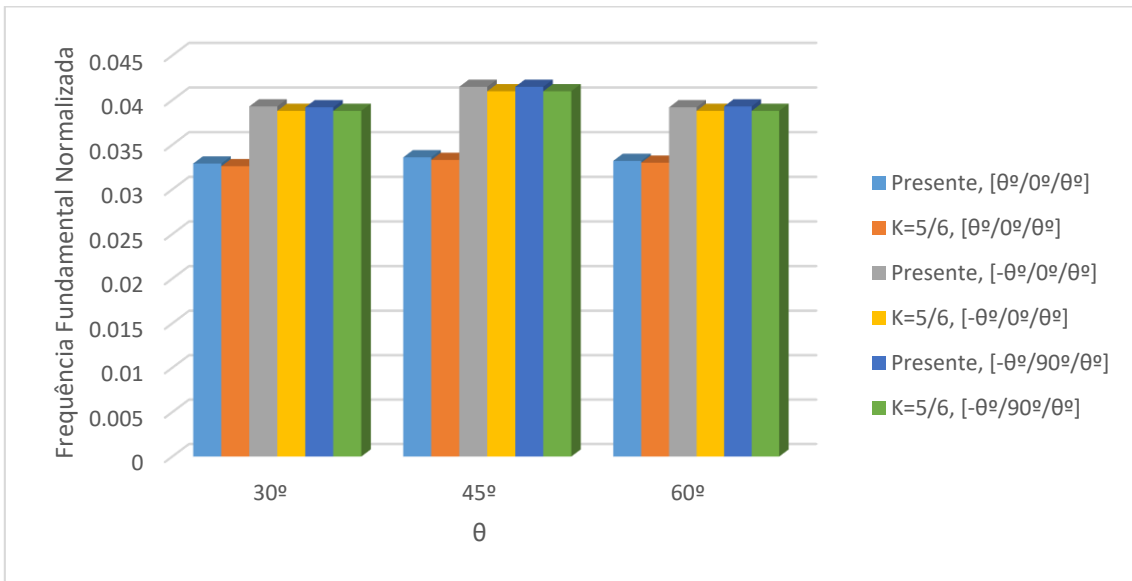


Fig. 94 - Frequências naturais normalizada para $l/h=20$.

Apêndice A2.4 – Deformação transversal, tensões e frequências naturais para diferentes tipos de fibras.

Tabela 68 – Deformada transversal e tensões normalizadas. Diferentes fibras. K=5/6.

$V_f=0.6$	l/h	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x^1$	$\bar{\sigma}_x^2$	$\bar{\sigma}_x^3$	$\bar{\sigma}_y^1$	$\bar{\sigma}_y^2$	$\bar{\sigma}_y^3$	$\bar{\tau}_{xz}^1$	$\bar{\tau}_{xz}^2$
GE	5	4.31E-10	8.8244	1.9337	2.4935	6.1942	1.6614	1.3181	2.3156	1.4546
	10	2.39E-09	35.5541	10.829	14.3077	22.5007	7.0894	5.0509	5.0199	2.9008
	20	1.69E-08	142.3599	46.4368	61.5523	87.5368	28.7693	19.9362	10.4407	5.81
CE	5	3.76E-10	12.0762	3.4476	3.981	5.6987	1.4025	0.6119	2.4447	1.6656
	10	1.68E-09	47.4758	12.183	26.0338	19.8711	5.4142	2.1345	5.709	3.3259
	20	1.05E-08	188.9269	59.4012	128.0927	76.1939	24.2069	8.321	12.3846	6.7221

Tabela 69 – Frequências naturais normalizadas. Diferentes fibras. K=5/6.

$V_f=0.6$	l/h	(1,1)	(2,1)	(1,2)	(2,2)
GE	5	0.243	0.4563	0.4961	0.6469
	10	0.0736	0.149	0.1762	0.2333
	20	0.0197	0.0412	0.0521	0.0689
CE	5	0.3396	0.5705	0.6735	0.8098
	10	0.1144	0.1943	0.2691	0.2952
	20	0.0326	0.0563	0.0889	0.091

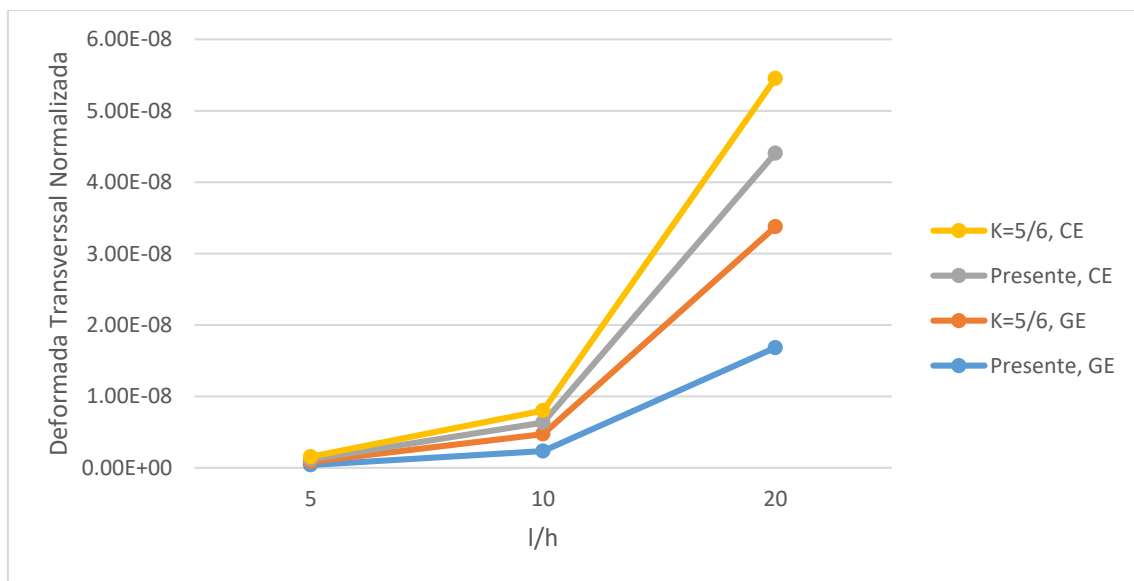


Fig. 95 -Deformada transversal normalizada para diferentes valores de K e materiais compósitos.

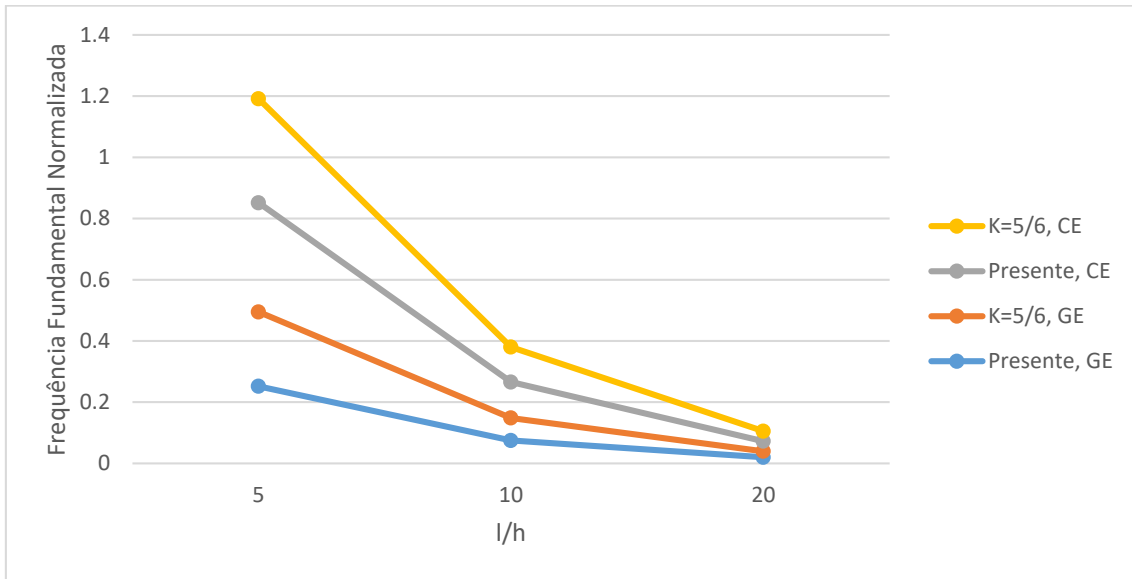


Fig. 96 – Frequência fundamental normalizada para diferentes valores de K e materiais compósitos.

Apêndice A2.5 – Deformação transversal, tensões e frequências naturais para diferentes condições fronteiras e diferentes formulações.

Tabela 70 - Deformada transversal e tensões normalizadas, SSSS, K=5/6.

<i>l/h</i>	<i>Formulação</i>	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x^1$	$\bar{\sigma}_x^2$	$\bar{\sigma}_x^3$	$\bar{\sigma}_y^1$	$\bar{\sigma}_y^2$	$\bar{\sigma}_y^3$	$\bar{\tau}_{xz}^1$	$\bar{\tau}_{xz}^2$
5	Q4, 7GDL	4.27E-10	8.6079	2.0115	2.7582	6.0573	1.6694	1.313	1.9581	1.3637
	Q4, 9GDL	4.31E-10	8.771	1.8978	2.459	6.1519	1.6425	1.3086	2.189	1.3411
	Q9, 7GDL	4.26E-10	8.6701	2.0422	2.6531	6.1018	1.687	1.3219	2.065	1.4798
	Q9, 9GDL	4.31E-10	8.8244	1.9337	2.4935	6.1942	1.6614	1.3181	2.3156	1.4546
10	Q4, 7GDL	2.38E-09	35.3554	10.7195	14.1568	22.3336	7.0209	5.0142	4.4667	2.6907
	Q4, 9GDL	2.39E-09	35.3174	10.7331	14.1956	22.3333	7.029	5.0216	4.7258	2.6758
	Q9, 7GDL	2.39E-09	35.5862	10.8133	14.2834	22.4971	7.0808	5.0449	4.7153	2.9117
	Q9, 9GDL	2.39E-09	35.5541	10.829	14.3077	22.5007	7.0894	5.0509	5.0199	2.9008
20	Q4, 7GDL	1.69E-08	141.3696	46.062	61.0216	86.8729	28.5337	19.8224	9.4685	5.3351
	Q4, 9GDL	1.69E-08	141.3804	46.0493	61.0863	86.8741	28.5384	19.835	9.7438	5.3403
	Q9, 7GDL	1.69E-08	142.3687	46.4194	61.5216	87.5313	28.761	19.9307	10.0342	5.7953
	Q9, 9GDL	1.69E-08	142.3599	46.4368	61.5523	87.5368	28.7693	19.9362	10.4407	5.81

Tabela 71 - Frequências naturais normalizadas, SSSS, K=5/6.

<i>l/h</i>	<i>Formulação</i>	(1,1)	(2,1)	(1,2)	(2,2)
5	Q4, 7GDL	0.246	0.4686	0.5111	0.6649
	Q4, 9GDL	0.2444	0.4636	0.5033	0.6559
	Q9, 7GDL	0.2445	0.461	0.5038	0.6556
	Q9, 9GDL	0.243	0.4563	0.4961	0.6469
10	Q4, 7GDL	0.0743	0.1527	0.1811	0.2406
	Q4, 9GDL	0.0742	0.1524	0.1799	0.2392
	Q9, 7GDL	0.0737	0.1493	0.1773	0.2345
	Q9, 9GDL	0.0736	0.149	0.1762	0.2333
20	Q4, 7GDL	0.0199	0.0423	0.0536	0.0716
	Q4, 9GDL	0.0199	0.0422	0.0535	0.0715
	Q9, 7GDL	0.0197	0.0412	0.0522	0.069
	Q9, 9GDL	0.0197	0.0412	0.0521	0.0689

Tabela 72 - Deformada transversal e tensões normalizadas, CCCC, K=5/6.

<i>l/h</i>	<i>Formulação</i>	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x^1$	$\bar{\sigma}_x^2$	$\bar{\sigma}_x^3$	$\bar{\sigma}_y^1$	$\bar{\sigma}_y^2$	$\bar{\sigma}_y^3$	$\bar{\tau}_{xz}^1$	$\bar{\tau}_{xz}^2$
5	Q4, 7GDL	2.51E-10	4.0325	0.7552	0.931	3.5541	0.9156	0.7948	1.4901	1.6452
	Q4, 9GDL	2.57E-10	4.4307	1.2097	1.1686	3.733	0.8526	0.7827	1.6037	1.597
	Q9, 7GDL	2.50E-10	4.1099	0.7809	0.9572	3.5813	0.9268	0.8005	1.5497	1.8099
	Q9, 9GDL	2.56E-10	4.4914	1.9088	1.7269	3.7568	0.8662	0.7892	1.6172	1.7698
10	Q4, 7GDL	1.05E-09	17.507	4.7478	6.0899	12.0779	3.6182	2.7406	3.8287	3.7058
	Q4, 9GDL	1.06E-09	17.5492	4.6913	5.9993	12.1799	3.625	2.7593	4.2625	3.6032
	Q9, 7GDL	1.04E-09	17.6607	4.8338	6.2115	12.0972	3.6304	2.7344	3.8545	4.1266
	Q9, 9GDL	1.05633-9	17.7092	4.7797	6.1113	12.1982	3.6393	2.7536	4.3396	4.0309
20	Q4, 7GDL	6.03E-09	70.8126	22.3483	29.7524	43.3645	13.9973	9.7996	9.2401	7.5951
	Q4, 9GDL	6.05E-09	70.7622	22.3311	29.7631	43.4432	13.9825	9.7984	10.3262	7.4215
	Q9, 7GDL	6.05E-09	71.1388	22.5112	29.9848	43.4196	14.0287	9.7672	9.2144	8.495
	Q9, 9GDL	6.07E-09	71.0807	22.5204	29.9829	43.4648	14.0513	9.7877	10.16	8.2894

Tabela 73 - Frequências naturais normalizadas, CCCC, K=5/6.

<i>l/h</i>	<i>Formulação</i>	(1,1)	(2,1)	(1,2)	(2,2)
5	Q4, 7GDL	0.3221	0.5239	0.5709	0.7107
	Q4, 9GDL	0.318	0.516	0.5642	0.7022
	Q9, 7GDL	0.3198	0.5157	0.5607	0.6999
	Q9, 9GDL	0.3157	0.5082	0.554	0.6914
10	Q4, 7GDL	0.1136	0.1976	0.2186	0.2791
	Q4, 9GDL	0.1128	0.1962	0.216	0.2763
	Q9, 7GDL	0.1122	0.1915	0.2133	0.2713
	Q9, 9GDL	0.1115	0.1903	0.2108	0.2687
20	Q4, 7GDL	0.0338	0.0602	0.0727	0.0919
	Q4, 9GDL	0.0338	0.0601	0.0724	0.0916
	Q9, 7GDL	0.0333	0.0579	0.07	0.0877
	Q9, 9GDL	0.0332	0.0578	0.0697	0.0874