

INSTITUTO POLITÉCNICO DE LISBOA
INSTITUTO SUPERIOR DE CONTABILIDADE
E ADMINISTRAÇÃO DE LISBOA



ISCAL

MODELOS DE OBJETIVO
SECUNDÁRIO NA AVALIAÇÃO
CRUZADA DA DEA

APLICAÇÃO AO SETOR SEGURADOR

Patrícia Teixeira Dias

VERSÃO DEFINITIVA

Lisboa, fevereiro de 2023

INSTITUTO POLITÉCNICO DE LISBOA
INSTITUTO SUPERIOR DE CONTABILIDADE
E ADMINISTRAÇÃO DE LISBOA

MODELOS DE OBJETIVO
SECUNDÁRIO NA AVALIAÇÃO
CRUZADA DA DEA

APLICAÇÃO AO SETOR SEGURADOR

Patrícia Teixeira Dias

Dissertação submetida ao Instituto Superior de Contabilidade e Administração de Lisboa para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Contabilidade e Gestão das Instituições Financeiras, realizada sob a orientação científica do Professor Doutor José Manuel de Oliveira Pires, Professor-Coordenador da área científica de Matemática.

Constituição do Júri

Presidente: Professor Doutor Jorge Rodrigues

Arguente: Professora Doutora Ana Maria Paias

Vogal: Professor Doutor José Manuel de Oliveira Pires

Lisboa, fevereiro de 2023

Declaro ser a autora desta dissertação, que constitui um trabalho original e inédito, que nunca foi submetido (no seu todo ou qualquer das suas partes) a outra instituição de ensino superior para a obtenção de um grau académico ou outra habilitação. Atesto ainda que todas as citações estão devidamente identificadas. Mais acrescento que tenho consciência de que o plágio – a utilização de elementos alheios sem referência do autor – constitui uma grave falta de ética, que poderá resultar na anulação da presente dissertação.

Dedicatória

Dedico este trabalho à minha família, que sempre me apoiou e incentivou durante o meu percurso académico.

“Live as if you were to die tomorrow.

Learn as if you were to live forever.”

Mahátma Gándhí

Agradecimentos

A conclusão desta dissertação não teria sido possível sem a colaboração, auxílio, carinho e dedicação de algumas pessoas e instituições que, de diversas formas, me ajudaram nas diferentes etapas. Destas, manifesto a minha gratidão e um agradecimento especial:

Ao Professor Doutor José Manuel de Oliveira Pires, pela sua orientação, empenho e disponibilidade total ao longo de todo o processo de investigação e desenvolvimento deste trabalho.

Ao ISCAL e a todos os professores dos quais tive a oportunidade e o privilégio de ser aluna, pela partilha de conhecimentos e experiências, tanto académicas e profissionais como pessoais.

À minha entidade patronal, por me permitir conciliar as minhas funções com os meus estudos.

Aos amigos e colegas, que me acompanharam e motivaram em diferentes momentos.

Ao meu namorado, que me inspira todos os dias a ser uma pessoa melhor, e que me incentiva a ultrapassar todos os desafios a que me proponho.

E aos meus pais, avós e irmão, que são o meu suporte e me apoiam em todas as etapas da minha vida.

Resumo

A metodologia DEA (*Data Envelopment Analysis*) avalia a eficiência relativa de um conjunto de entidades homogêneas, vulgarmente designadas de DMUs (*Decision Making Units*), que produzem múltiplos *outputs* usando múltiplos *inputs*. Na sua forma clássica, cada DMU escolhe os pesos associados aos *inputs* e aos *outputs* que maximizam a sua eficiência. Esta flexibilidade conduz a dois problemas, estreitamente relacionados, o da existência de várias DMUs consideradas eficientes e o da distribuição irrealista dos pesos. Para ultrapassar estes dois problemas, vários métodos e modelos têm sido propostos, entre os quais o método da eficiência ou avaliação cruzada, considerado um dos mais populares.

O presente trabalho destina-se a apresentar um estudo sobre o método da avaliação cruzada na DEA com enfoque em modelos de objetivo secundário que o método utiliza para ultrapassar o problema das soluções ótimas alternativas fornecidas pelos modelos clássicos, que podem levar a obter *rankings* diferentes em função do *software* usado. Este estudo inclui a aplicação desse método e de alguns desses modelos à avaliação e determinação do *ranking* de dezassete seguradoras que operavam em Portugal no ano de 2020.

Palavras-chave: *Data Envelopment Analysis* (DEA); DMUs; Avaliação cruzada; *Ranking*; Setor Segurador.

Abstract

The methodology DEA (Data Envelopment Analysis) evaluates the efficiency related to a group of homogenous entities, commonly designated by DMUs (Decision Making Units), which produce multiple outputs using multiple inputs. In its classical form, each DMU chooses the weights associated to the inputs and outputs which maximize its efficiency. This flexibility leads to two problems, closely related: one is the existence of several DMUs considered efficient; and the other is the unrealistic distribution of the weights. To overcome these two problems several methods and models have been proposed, among which the method of efficiency or cross evaluation, considered one of the most popular.

This work aims to present a study on the method of cross evaluation in DEA with focus on models of secondary object which the method uses to overcome the problem of the alternative excellent solutions supplied by the classical models, that may lead to obtain different rankings according to the used software. This study includes the application of that method and some of these models to the evaluation and determination of the ranking of seventeen insurance companies which operated in Portugal in the year of 2020.

Keywords: *Data Envelopment Analysis (DEA); DMUs; Cross efficiency; Ranking; Insurance Sector.*

Índice

1.	Introdução	1
2.	Avaliação clássica e avaliação cruzada na metodologia DEA.....	3
2.1.	Introdução	3
2.2.	Avaliação clássica na DEA	4
2.2.1.	Modelos orientados para inputs	5
2.2.2.	Modelos orientados para outputs	7
2.3.	Algumas vantagens e desvantagens da avaliação clássica da DEA	10
2.4.	Avaliação cruzada na DEA.....	11
3.	Modelos de objetivo secundário na avaliação cruzada da DEA	16
3.1.	Introdução	16
3.2.	Modelos de objetivo secundário benevolente e agressivo	16
3.2.1.	Modelos de Doyle e Green (1994).....	17
3.2.2.	Modelos alternativos de Liang, Wu, Cook e Zhu (2008)	18
3.2.3.	Modelos alternativos de Wang e Chin (2010a).....	22
3.3.	Modelos de objetivo secundário neutro.....	24
3.3.1.	Modelo de Wang e Chin (2010b).....	24
3.3.2.	Modelos de Wang, Chin e Jiang (2011).....	26
3.3.3.	Modelos de Nasser e Kiaei (2018)	28
4.	Caso prático aplicado ao setor segurador.....	31
4.1.	Introdução	31
4.2.	Seleção dos dados e escolha dos modelos	31
4.3.	Análise dos resultados	34
5.	Conclusões.....	45
	Referências Bibliográficas.....	47
	Apêndices	49

Índice de Tabelas

Tabela 2.1 Matriz e índices das eficiências cruzadas para n DMUs.....	13
Tabela 4.1 Dados referentes aos <i>inputs</i> e <i>outputs</i> (em milhares de euros).....	34
Tabela 4.2 Designação dos modelos selecionados.....	35
Tabela 4.3 Índices de eficiência obtidos através do modelo CCR e respetivos <i>rankings</i>	36
Tabela 4.4 Índices das eficiências cruzadas obtidos pelos modelos selecionados.....	37
Tabela 4.5 <i>Rankings</i> estabelecidos pelos modelos selecionados.....	39
Tabela 4.6 Índices “falso positivo” obtido através dos modelos selecionados.....	43
Tabela 4.7 Número de valores iguais a zero e próximos de zero em cada modelo.....	44

Índice de Figuras

Figura 4.1 <i>Rankings</i> estabelecidos pelos modelos selecionados.....	42
--	----

Lista de Abreviaturas

ASF – Autoridade de Supervisão de Seguros e Fundos de Pensões

BCC – Banker, Charnes e Cooper

CCR – Charnes, Cooper e Rhodes

CRS – *Constants Returns to Scale*

DEA – *Data Envelopment Analysis*

DMUs – *Decision Making Units*

OPL – *Optimization Programming Language*

VRS – *Variables Returns to Scale*

1. Introdução

O setor segurador desempenha um importante papel na sociedade e na atividade económica de um país. Este facto, conjuntamente com a crescente competitividade do mercado, motiva a importância de se avaliar o desempenho organizacional no setor, por forma a melhorar as suas funções e a obter melhores resultados.

Existem várias metodologias para a avaliação do desempenho organizacional em geral e, também, no setor segurador. Uma das metodologias que tem tido grande aplicação é a metodologia *Data Envelopment Analysis* (DEA).

A metodologia DEA permite calcular a eficiência relativa de um conjunto de entidades homogéneas, usualmente designadas de *Decision Making Units* (DMUs), que produzem múltiplos *outputs* usando múltiplos *inputs*. Essa eficiência é medida usualmente na escala de 0 a 1, em que as DMUs que obtêm valor de eficiência igual a 1 são consideradas eficientes e as que obtêm valor inferior a 1 são consideradas ineficientes. Na sua forma clássica, cada DMU determina um conjunto de pesos associados aos *inputs* e aos *outputs* que maximizam a sua eficiência. Esta flexibilidade faz com que várias DMUs sejam consideradas como eficientes, o que constitui um problema para o gestor que normalmente está mais interessado num *ranking* de eficiência do que em saber quais as eficientes e ineficientes. Um outro problema, intimamente relacionado com este, é o da eficiência ser obtida através de valores elevados para alguns pesos associados aos *inputs* e aos *outputs* e de valores baixos, ou até mesmo iguais a 0, para os restantes. Este problema é, normalmente, referido como distribuição não realista dos pesos.

Para ultrapassar estes dois problemas, vários métodos e modelos têm sido propostos, entre os quais se destaca o método da eficiência cruzada ou avaliação cruzada pela popularidade que tem adquirido devido ao forte poder de discriminação que revela. Em vez de realizar uma avaliação individual, como acontece na avaliação clássica, este método realiza uma avaliação de conjunto, isto é, cada DMU é avaliada por si e pelas restantes. Apesar da sua popularidade, o método da avaliação cruzada apresenta uma importante limitação quando usa apenas um modelo clássico da DEA: a de fornecer *rankings* diferentes em função do *software* utilizado devido à existência de soluções ótimas alternativas nesse modelo. Para ultrapassar esta limitação, um segundo modelo, designado modelo de objetivo secundário tem sido proposto.

A presente dissertação destina-se a apresentar um estudo sobre modelos de objetivo secundário usados na avaliação cruzada da DEA, nomeadamente os modelos de objetivo secundário benevolente, agressivo e neutro. Por forma a ter-se uma ideia mais precisa das diferenças entre esses modelos, nomeadamente entre os modelos benevolentes e agressivos, por um lado, e os modelos neutros, por outro, este estudo inclui a aplicação deste tipo de avaliação a uma situação real, mais precisamente, à avaliação de dezassete seguradoras do ramo não vida que operavam em Portugal no ano de 2020.

No capítulo 2, são abordadas a avaliação clássica e a avaliação cruzada da DEA, mais especificamente, são abordados os modelos clássicos e o método da avaliação cruzada da DEA.

No capítulo 3, são apresentados os modelos de objetivo secundário mais conhecidos, isto é, os modelos benevolentes, agressivos e neutros, e são apontadas algumas diferenças existentes nestes tipos de modelos, assim como as vantagens que os modelos neutros apresentam em relação aos modelos benevolentes e agressivos.

No capítulo 4, o método da eficiência cruzada, apresentado no capítulo 2, e alguns dos modelos, apresentados no capítulo 3, são usados para avaliar o desempenho e estabelecer um *ranking* completo de dezassete seguradoras do ramo não vida que operavam em Portugal no ano de 2020. Neste capítulo, para além da apresentação dos resultados obtidos, é também feita uma análise aos mesmos.

Por fim, no capítulo 5, apresentam-se algumas conclusões sobre o trabalho desenvolvido ao longo desta dissertação.

2. Avaliação clássica e avaliação cruzada na metodologia DEA

2.1. Introdução

Data Envelopment Analysis (DEA) é uma metodologia destinada à avaliação do desempenho organizacional, mais especificamente, à avaliação da eficiência relativa de um conjunto de entidades homogêneas que produzem múltiplos produtos (*outputs*) usando múltiplos recursos (*inputs*). Essas entidades podem ser da mais variada natureza, sendo por isso genericamente designadas de *Decision Making Units* (DMUs).

A metodologia DEA é uma técnica não paramétrica baseada na programação linear que, usando apenas os *inputs* e os *outputs* das DMUs em avaliação, permite estimar uma fronteira de eficiência empírica sobre a qual se encontram as DMUs eficientes, considerando ineficientes (ou não eficientes) as que não estão nessa fronteira. Na sua forma clássica, a DEA calcula a melhor eficiência relativa de uma DMU, isto é, cada DMU escolhe o conjunto de pesos associados aos *inputs* e aos *outputs* que lhe são mais favoráveis, ou seja, que maximizam a sua eficiência.

A flexibilidade na escolha dos referidos pesos conduz a dois problemas, estreitamente relacionados, que usualmente ocorrem quando se utilizam os modelos clássicos da DEA: o fraco poder de discriminação, que surge devido às várias DMUs que usualmente esses modelos classificam como eficientes; e a distribuição irrealista dos pesos, que ocorre quando a eficiência é atingida através de valores muito elevados para pesos associados a *inputs* e a *outputs* favoráveis de uma dada DMU e de valores muito baixos (ou mesmo zero) para os não favoráveis.

A fim de ultrapassar estes dois problemas, vários métodos e modelos têm sido propostos na literatura da DEA, nomeadamente, métodos baseados em restrições sobre os pesos, como por exemplo o referido por Allen, Athanassopoulos, Dyson e Thanassoulis (1997), modelos baseados na programação linear multiobjectivo, segundo Li e Reeves (1999), e o método da eficiência ou avaliação cruzada, mencionados por Sexton, Silkman e Hogan (1986) e Doyle e Green (1994). Adicionalmente, outros métodos têm sido propostos para combater o fraco poder de discriminação, como se pode verificar nos trabalhos sobre revisão de métodos para *rankings* na DEA desenvolvidos por Adler, Friedman e Sinuany-Stern (2002) e, mais tarde, por Aldamak e Zolfaghari (2017).

Entre esses métodos, o da avaliação cruzada tem sido alvo de um número significativo de aplicações, nomeadamente o modelo de Wang e Chin (2010b) devido ao forte poder de discriminação que tem revelado, o que tem permitido estabelecer um *ranking* completo sobre todas as DMUs. O método da eficiência cruzada consiste em cada DMU ser avaliada por si (autoavaliação) e pelas restantes (avaliação por pares), realizando assim uma avaliação de conjunto, em vez de uma avaliação individual como a realizada pelos modelos clássicos da metodologia DEA.

Este capítulo destina-se a apresentar o método da eficiência ou avaliação cruzada baseada nos modelos clássicos da DEA, com exceção do modelo BCC orientado para *inputs*. Assim, na secção 2.2, é apresentada a avaliação clássica da DEA, isto é, a avaliação feita através dos modelos clássicos desta metodologia. Na secção 2.3, são referidas algumas vantagens e desvantagens da avaliação clássica da DEA. Por fim, na secção 2.4, é apresentado o método da eficiência ou avaliação cruzada que surge para contornar algumas desvantagens daquela metodologia, referidas anteriormente.

2.2. Avaliação clássica na DEA

A eficiência de uma DMU é geralmente obtida através da resolução de um modelo de programação linear. O primeiro desses modelos, com o qual foi introduzida a metodologia DEA, foi proposto por Charnes, Cooper e Rhodes (1978), razão pela qual é denotado por modelo CCR. Este modelo considera retornos contantes de escala, ou seja, uma variação nos *inputs* produz uma variação proporcional nos *outputs*, sendo, por isso, também denotado por CRS (*Constants Returns to Scale*). Mais tarde, Banker, Charnes e Cooper (1984) propuseram uma extensão do modelo CCR, por forma a considerar retornos variáveis de escala, isto é, uma variação nos *inputs* produz uma variação maior ou menor do que o proporcional, pelo que este modelo é denotado por BCC ou VRS (*Variables Returns to Scale*). Estes dois modelos são usualmente designados por modelos clássicos ou modelos tradicionais ou, ainda, modelos básicos da DEA.

Os modelos clássicos da DEA podem ser orientados para *inputs* ou para *outputs*, consoante a eficiência seja atingida por redução dos *inputs*, mantendo os *outputs*, ou por expansão dos *outputs*, mantendo os *inputs*, respetivamente. Nestes modelos, cada DMU escolhe o conjunto de pesos que lhe são mais favoráveis, isto é, que maximizam a sua eficiência sob a condição de que, quando aplicados a cada uma das DMUs, a sua eficiência não ultrapasse o valor máximo para a eficiência.

Para descrever esses modelos, assim como outros que serão apresentados mais à frente, assume-se que existem n DMUs homogêneas que se desejam avaliar e que cada DMU utiliza determinadas quantidades de m *inputs* para produzir determinadas quantidades de s *outputs*. Mais precisamente, cada DMU _{j} ($j=1, \dots, n$) utiliza a quantidade x_{ij} do *input* i ($i=1, \dots, m$) para produzir a quantidade y_{rj} do *output* r ($r=1, \dots, s$). Assume-se, ainda, que $x_{ij} \geq 0$, $y_{rj} \geq 0$, ($i=1, \dots, m; r=1, \dots, s; j=1, \dots, n$), e que para cada DMU existe, pelo menos, um *input* e um *output* com valores positivos. Adicionalmente, considerem-se as variáveis de decisão, não negativas, v_{ik} ($i=1, \dots, m$) e u_{rk} ($r=1, \dots, s$) que representam os pesos associados aos *inputs* e aos *outputs*, respetivamente, da DMU _{k} ($k \in \{1, \dots, n\}$).

2.2.1. Modelos orientados para *inputs*

Como se referiu anteriormente, nos modelos orientados para *inputs*, a eficiência é atingida reduzindo os valores dos *inputs* e mantendo os valores dos *outputs*. Então, a forma fracionária do modelo CCR orientado para *inputs*, que permite obter a eficiência relativa da DMU _{k} ($k \in \{1, \dots, n\}$), é dada pelo seguinte modelo de programação linear fracionária:

$$\max E_k = \frac{\sum_{r=1}^s y_{rk} u_{rk}}{\sum_{i=1}^m x_{ik} v_{ik}} \quad (2.1a)$$

$$s. a. \quad \frac{\sum_{r=1}^s y_{rj} u_{rk}}{\sum_{i=1}^m x_{ij} v_{ik}} \leq 1 \quad j = 1, \dots, n \quad (2.1b)$$

$$v_{ik} \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (2.1c)$$

$$u_{rk} \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (2.1d)$$

Neste modelo, o índice da eficiência da DMU _{k} , E_k^* , é obtido determinando os pesos associados aos *inputs* e aos *outputs* que maximizam o quociente entre a soma ponderada dos *outputs* e a soma ponderada dos *inputs* dessa DMU, sujeito a que tal quociente é menor ou igual a 1 para cada uma das DMUs, incluindo a DMU em avaliação. Assim, este modelo determina a melhor eficiência para cada DMU e o seu valor é sempre menor ou igual a 1.

O modelo (2.1) admite um número infinito de soluções ótimas como se refere, por exemplo, em Cooper, Seiford e Zhu (2011). Usando a transformação de Charnes e Cooper (1962), é possível selecionar uma dessas soluções e obter um modelo de programação linear equivalente. Então, fazendo o denominador de (2.1a) igual a 1, obtém-se o seguinte modelo de programação linear:

$$\max E_k = \sum_{r=1}^s y_{rk} u_{rk} \quad (2.2a)$$

$$s. a. \quad \sum_{i=1}^m x_{ik} v_{ik} = 1 \quad (2.2b)$$

$$\sum_{r=1}^s y_{rj} u_{rk} - \sum_{i=1}^m x_{ij} v_{ik} \leq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (2.2c)$$

$$v_{ik} \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (2.2d)$$

$$u_{rk} \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (2.2e)$$

O modelo (2.2) é conhecido como forma dos multiplicadores do modelo CCR orientado para *inputs*. A solução ótima deste modelo fornece os pesos (não negativos) associados aos *inputs* e aos *outputs* da DMU_k, os quais permitem obter o valor da eficiência para essa DMU, dado pelo correspondente valor ótimo, E_k^* . Este modelo permite então determinar o índice de eficiência da DMU_k, assim como o contributo de cada *input* e de cada *output* no cálculo desse índice. Se $E_k^* = 1$ e os correspondentes pesos ótimos são positivos, a DMU_k é considerada eficiente, caso contrário é considerada não eficiente.

O modelo BCC orientado para *inputs*, que assume retornos variáveis de escala, obtém-se do modelo CCR orientado para *inputs* adicionando uma variável real na função objetivo (2.1a) e no primeiro membro das restrições (2.1c) na forma fracionária deste modelo. Designando essa variável por u^k , a forma fracionária do modelo BCC orientado para *inputs*, é dada por:

$$\max E_k = \frac{\sum_{r=1}^s y_{rk} u_{rk} + u^k}{\sum_{i=1}^m x_{ik} v_i} \quad (2.3a)$$

$$s. a. \quad \frac{\sum_{r=1}^s y_{rj} u_{rk} + u^k}{\sum_{i=1}^m x_{ij} v_{ik}} \leq 1 \quad j = 1, \dots, n \quad (2.3b)$$

$$v_{ik} \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (2.3c)$$

$$u_{rk} \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (2.3d)$$

$$u^k \in \mathbb{R} \quad (2.3e)$$

A linearização do modelo anterior através da transformação de Charnes e Cooper (1962) permite obter a forma dos multiplicadores do modelo BCC orientado par *inputs*, dada pelo seguinte modelo de programação linear:

$$\max E_k = \sum_{r=1}^s y_{rk} u_{rk} + u^k \quad (2.4a)$$

$$s. a. \quad \sum_{i=1}^m x_{ik} v_{ik} = 1 \quad (2.4b)$$

$$\sum_{r=1}^s y_{rj} u_{rk} - \sum_{i=1}^m x_{ij} v_{ik} + u^k \leq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (2.4c)$$

$$v_{ik} \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (2.4d)$$

$$u_{rk} \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (2.4e)$$

$$u^k \in \mathbb{R} \quad (2.4f)$$

É evidente que este modelo (2.4) difere da correspondente forma e versão do modelo CCR, pelo facto de incluir a variável u^k que, na solução ótima, pode assumir um valor positivo, negativo ou nulo e, mediante esse tipo de valor, indica o tipo de retorno de escala em que a DMU_k opera. Assim, se $u^{k*} > 0$, então a referida DMU_k opera sob retorno crescente de escala; se $u^{k*} < 0$, então a DMU_k opera sob retorno decrescente de escala; por fim, se $u^{k*} = 0$, então a DMU_k opera sob retorno constante de escala.

2.2.2. Modelos orientados para *outputs*

Nos modelos orientados para *outputs*, a eficiência é atingida aumentando os valores dos *outputs* e mantendo os valores dos *inputs*. Neste caso, a forma fracionária do modelo CCR orientado para *outputs* é dada pelo seguinte modelo:

$$\min F_k = \frac{\sum_{i=1}^m x_{ik} v_{ik}}{\sum_{r=1}^s y_{rk} u_{rk}} \quad (2.5a)$$

$$s. a. \quad \frac{\sum_{i=1}^m x_{ij} v_{ik}}{\sum_{r=1}^s y_{rj} u_{rk}} \geq 1 \quad j = 1, \dots, n \quad (2.5b)$$

$$v_{ik} \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (2.5c)$$

$$u_{rk} \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (2.5d)$$

Neste modelo (2.5), o objetivo é determinar os pesos associados aos *inputs* e aos *outputs* que minimizam o quociente entre a soma ponderada dos *inputs* e a soma ponderada dos *outputs* da DMU_k, sujeito à condição de que tal quociente é maior ou igual a 1 para cada uma das DMUs, incluindo a DMU em avaliação. Neste caso, valor de F_k^* é sempre maior ou igual a 1.

Através da transformação proposta por Charnes e Cooper (1962), o modelo anterior pode, à semelhança do que foi feito para a versão orientada para *inputs*, ser convertido no seguinte modelo de programação linear:

$$\min F_k = \sum_{i=1}^m x_{ik} v_{ik} \quad (2.6a)$$

$$s. a. \quad \sum_{r=1}^s y_{rk} u_{rk} = 1 \quad (2.6b)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} v_{ik} - \sum_{r=1}^s y_{rj} u_{rk} \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (2.6c)$$

$$v_{ik} \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (2.6d)$$

$$u_{rk} \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (2.6e)$$

Este modelo (2.6) é conhecido como forma dos multiplicadores do modelo CCR orientado para *outputs*. Atendendo a que $F_k^* \geq 1$, então, neste caso, o índice de eficiência é dado por $1 / F_k^*$, por forma a garantir que o mesmo pertence ao intervalo $]0,1]$, isto é, que a eficiência é medida numa escala de 0 a 1. Se $F_k^* = 1$ e os correspondentes pesos são positivos, a DMU_k é considerada eficiente; caso contrário, é considerada não eficiente ou ineficiente e será tanto mais ineficiente quanto maior for o valor de F_k^* .

À semelhança do que foi feito com a versão orientada para *inputs*, a versão orientada para *outputs* do modelo BCC pode ser obtida da correspondente versão do modelo CCR, adicionando uma variável real na função objetivo (2.5a) e no primeiro membro das restrições (2.5c) na forma fracionária deste modelo. Designando essa variável por v^k , a forma fracionária do modelo BCC orientado para *inputs* é dada por:

$$\min F_k = \frac{\sum_{i=1}^m x_{ik} v_{ik} + v^k}{\sum_{r=1}^s y_{rk} u_{rk}} \quad (2.7a)$$

$$s. a. \quad \frac{\sum_{i=1}^m x_{ij} v_i + v^k}{\sum_{r=1}^s y_{rj} u_r} \geq 1 \quad j = 1, \dots, n \quad (2.7b)$$

$$v_{ik} \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (2.7c)$$

$$u_{rk} \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (2.7d)$$

$$v^k \in \mathbb{R} \quad (2.7e)$$

Usando novamente a transformação de Charnes e Cooper (1962), o modelo (2.7) pode ser convertido no seguinte modelo de programação linear, que constitui a forma dos multiplicadores do modelo BCC orientado para *outputs*:

$$\min F_k = \sum_{i=1}^m x_{ik} v_{ik} + v^k \quad (2.8a)$$

$$s. a. \quad \sum_{r=1}^s y_{rk} u_{rk} = 1 \quad (2.8b)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} v_{ik} - \sum_{r=1}^s y_{rj} u_{rk} + v^k \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (2.8c)$$

$$v_{ik} \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (2.8d)$$

$$u_{rk} \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (2.8e)$$

$$v^k \in \mathbb{R} \quad (2.8f)$$

Evidentemente, também nesta versão, o modelo (2.8) difere da correspondente forma do modelo CCR pelo facto de incluir uma variável v^k que, na solução ótima, indica o tipo de retorno de escala em que a DMU_k opera, à semelhança do que acontece com u^{k*} , na versão orientada para *inputs*. Contudo, neste caso, se $v^{k*} > 0$, a DMU_k opera sob retorno decrescente de escala; se $v^{k*} < 0$, a DMU_k opera sob retorno crescente de escala; por fim, se $v^{k*} = 0$, a DMU_k opera sob retorno constante de escala.

Quanto ao modelo CCR, verifica-se que as versões orientadas para *inputs* e para *outputs* fornecem o mesmo índice de eficiência, apesar de fornecerem soluções ótimas diferentes, como se mostra em Cooper, Seiford e Tone (2007), onde também se mostra como obter a solução ótima de uma das versões, conhecida a solução ótima da outra.

De referir que, para cada uma das versões de cada modelo apresentado anteriormente, existe ainda outra forma, a forma do envelope, dada pelo dual do modelo da forma dos multiplicadores. Para além de permitir obter o índice de eficiência, a forma do envelope permite identificar as DMUs que são referência para que cada DMU ineficiente se torne eficiente. Essa forma não é apresentada neste trabalho por não se considerar relevante no contexto da avaliação cruzada.

2.3. Algumas vantagens e desvantagens da avaliação clássica da DEA

A avaliação clássica da DEA, isto é, a avaliação realizada através dos modelos clássicos desta metodologia, apresenta algumas vantagens e desvantagens, à semelhança do que acontece com qualquer outra metodologia. Como vantagens, destacam-se as seguintes:

- Faz uma avaliação usando apenas os *inputs* e os *outputs*, não necessitando de uma função de produção definida *a priori*;
- Possibilita que esses *inputs* e *outputs* sejam de natureza diversa, não sendo necessariamente de natureza financeira;
- Permite estimar uma fronteira de eficiência (empírica) na qual se encontram as DMUs eficientes, isto é, que refletem a melhor prática;
- Determina um valor para a eficiência de cada DMU e permite diferenciar as DMUs eficientes das ineficientes;

- Possibilita, para cada DMU ineficiente, identificar as DMUs eficientes que são referência (*benchmark*) para que a mesma se torne eficiente, e, deste modo, auxiliar o gestor nas decisões a tomar para melhorar o desempenho das DMUs ineficientes;
- Permite flexibilidade na escolha dos pesos associados aos *inputs* e aos *outputs*, uma vez que cada DMU escolhe os pesos que lhe são mais favoráveis, o que se revela importante na identificação das DMUs ineficientes;
- Apresenta grande versatilidade de aplicação, uma vez que pode ser aplicada a todos os tipos de organização e a vários períodos temporais, permitindo a análise da evolução do desempenho organizacional.

Como desvantagens referem-se as seguintes:

- A existência de várias DMUs eficientes, devido à flexibilidade na obtenção dos pesos associados aos *inputs* e aos *outputs*, nomeadamente quando o número de DMUs é pequeno em relação ao número total de *inputs* e *outputs*;
- Distribuição não realista dos pesos que ocorre quando a eficiência de cada DMU é atingida através de valores muito elevados para pesos associados a *inputs* e *outputs* favoráveis e de valores muito baixos (ou mesmo 0) para os não favoráveis.

2.4. Avaliação cruzada na DEA

A fim de resolver os problemas do fraco poder de discriminação e da distribuição irrealista dos pesos, Sexton *et al.* (1986) e Doyle e Green (1994) introduziram a abordagem da avaliação cruzada na DEA. A ideia base da avaliação cruzada é a de que cada DMU seja avaliada não apenas por si própria, mas também pelas restantes DMUs, realizando uma avaliação de conjunto em vez de uma avaliação individual, como acontece na avaliação clássica da DEA.

Como se refere em Cook e Zhu (2015), o método da eficiência cruzada, ou avaliação cruzada, é geralmente apresentado como um processo de duas fases. A primeira fase, normalmente designada de fase de autoavaliação, consiste em determinar os pesos (multiplicadores) associados aos *inputs* e aos *outputs*, e o correspondente índice de eficiência de cada DMU, usando o modelo CCR orientado para *inputs*. A segunda fase 2, usualmente designada de fase de avaliação por pares, consiste em aplicar os pesos obtidos na primeira fase às restantes $n - 1$ DMUs e, deste modo, obter um índice de eficiência cruzada para cada DMU.

Na primeira fase do método, são, então, obtidos n conjuntos de pesos ótimos associados aos *inputs* e aos *outputs*, e n índices de eficiência, um para cada DMU, resolvendo o modelo (2.2) n vezes.

Na segunda fase, esses n conjuntos de pesos ótimos associados aos *inputs* e aos *outputs* são usados para determinar as eficiências cruzadas. Assim, a eficiência cruzada da DMU _{j} ($j=1, \dots, n$) usando os pesos ótimos, v_{ik}^* e u_{rk}^* , da DMU _{k} ($k=1, \dots, n$), é dada por:

$$E_{kj} = \frac{\sum_{r=1}^s u_{rk}^* y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_{ik}^* x_{ij}} \quad k, j = 1, \dots, n \quad (2.9)$$

A expressão (2.9) define uma matriz quadrada de ordem n , normalmente designada por matriz das eficiências cruzadas, cujos elementos assumem valores entre 0 e 1, isto é, $0 \leq E_{kj} \leq 1$ ($k, j = 1, \dots, n$), e em que os elementos da diagonal principal, E_{kk} , são os índices de eficiência fornecidos por um modelo CCR orientado para *inputs*. Para os restantes elementos, isto é, para $j \neq k$, a expressão anterior fornece a avaliação realizada pela DMU _{k} a cada uma das restantes $n-1$ DMUs, fixando k , e a avaliação realizada à DMU _{j} por cada uma das restantes $n-1$, fixando j .

Para a DMU _{j} ($j = 1, \dots, n$), o índice de eficiência cruzada, \bar{E}_j , é normalmente definido como a média dos valores de E_{kj} ($k = 1, \dots, n$), isto é:

$$\bar{E}_j = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E_{kj} \quad (2.10)$$

Assim, o índice de eficiência cruzada de cada DMU é obtido através da média aritmética dos índices de eficiência obtidos na autoavaliação e na avaliação pelos pares.

Como se refere em Cook e Zhu (2015), na literatura da DEA, cada avaliação individual dada por (2.9) é designada por eficiência cruzada, o mesmo acontecendo com a média dada por (2.10). No geral, a designação de “eficiência cruzada” refere-se à média. Neste trabalho, a avaliação individual cruzada é referida como eficiência cruzada e a média como índice da eficiência cruzada.

A matriz das eficiências cruzadas definida em (2.9) e os índices de eficiência cruzada definidos em (2.10) podem ser apresentados através da Tabela 2.1.

Tabela 2.1 Matriz e índices das eficiências cruzadas para n DMUs.

DMUs	1	2	...	n
1	E_{11}	E_{12}	...	E_{1n}
2	E_{21}	E_{22}	...	E_{2n}
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
n	E_{n1}	E_{n2}	...	E_{nn}
	\bar{E}_1	\bar{E}_2	...	\bar{E}_n

Fonte Adaptado de Cook e Zhu (2015).

Note-se que, usando o modelo CCR orientado para *inputs*, o índice de eficiência cruzada obtido para cada DMU é não superior a 1. Esse índice é igual a 1, para uma dada DMU, quando for igual a 1 na fase de autoavaliação e na fase de avaliação pelos pares. Assim, uma DMU é eficiente através da avaliação cruzada, se for eficiente na avaliação que faz a si própria e na avaliação feita pelas restantes DMUs.

Como refere Angulo-Meza e Lins (2002), o índice de eficiência cruzada é, por vezes, calculado sem considerar os valores da diagonal principal, isto é, sem considerar a eficiência obtida na fase de autoavaliação. Para a DMU _{j} , tal índice, denotado por e_j , é dado por:

$$e_j = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1, k \neq j}^n E_{kj} \quad j = 1, \dots, m \quad (2.11)$$

Além de poder ser usado como um complemento ou alternativa à avaliação clássica para diferenciar as DMUs eficientes, o índice definido em (2.11) foi usado por Doyle e Green (1994) para desenvolver a ideia de “índice de *maverick*” no âmbito da eficiência cruzada. O índice de *maverick* mede o desvio entre o índice obtido pela autoavaliação e os índices obtidos pela avaliação dos pares. Para uma DMU _{j} , esse índice é denotado por M_j e é dado por:

$$M_j = \frac{E_{jj} - e_j}{e_j} \quad j = 1, \dots, m \quad (2.12)$$

Uma DMU_j será tanto mais “*maverick*” quanto maior for o correspondente índice. De acordo com Angulo-Meza e Lins (2002), um alto valor de M_j significa que a DMU_j obtém um índice de eficiência clássica através de pesos inapropriados.

Um outro índice, similar ao índice de *maverick*, utiliza a avaliação cruzada em vez da avaliação por pares e foi sugerido por Talluri e Sarkis (1997). Tal índice, designado por “falso positivo”, refere-se ao aumento percentual da eficiência que uma DMU alcança ao passar da avaliação cruzada para a autoavaliação. Para uma DMU_j, o índice “falso positivo” é denotado por FPI_j e é dado por:

$$FPI_j = \frac{E_{jj} - \bar{E}_j}{\bar{E}_j} \quad j = 1, \dots, m \quad (2.13)$$

À semelhança do que acontece com o índice de *maverick*, uma DMU_j será tanto mais “falso positivo” quanto maior for o correspondente índice.

Apesar de ser, geralmente, apresentado através do modelo CCR orientado para *inputs*, o método da eficiência cruzada pode, similarmente, ser aplicado usando o modelo CCR orientado para *outputs*, assim como o modelo BCC orientado para *inputs* ou para *outputs*.

No caso de se usar o modelo CCR orientado para *outputs*, as eficiências cruzadas são dadas por:

$$F_{kj} = \frac{\sum_{i=1}^m v_{ik}^* x_{ij}}{\sum_{r=1}^s u_{rk}^* y_{rj}} \quad k, j = 1, \dots, n \quad (2.14)$$

onde v_{ik}^* e u_{rk}^* são os pesos ótimos obtidos pelo modelo (2.6). O índice de eficiência cruzada é dado por (2.10) substituindo E_{kj} e \bar{E}_j por F_{kj} e \bar{F}_j , respetivamente. Neste caso, as eficiências cruzadas e os índices de eficiência cruzadas são não inferiores a 1.

Similarmente, o método pode ser aplicado usando a versão orientada para *outputs* do modelo BCC. Neste caso, as eficiências cruzadas são dadas por:

$$F_{kj} = \frac{\sum_{i=1}^m x_{ik} v_{ik}^* + v^k}{\sum_{r=1}^s y_{rk} u_{rk}^*} \quad (2.15)$$

onde v_{ik}^* e u_{rk}^* são os pesos ótimos obtidos através da resolução do modelo (2.8). Evidentemente, o índice de eficiência cruzada é obtido por (2.10), com as adaptações referidas anteriormente para o caso da versão orientada para *outputs* do modelo CCR.

Quando é utilizada a versão orientada para *inputs* do modelo BCC, a aplicação do método da eficiência cruzada pode levar à existência de eficiências cruzadas negativas, o que não faz sentido. Para ultrapassar este problema, algumas abordagens têm sido propostas, como por exemplo a proposta por Lim e Zhu (2015).

No geral, as eficiências cruzadas (E_{kj} , $k \neq j$) e os índices de eficiência cruzada (\bar{E}_j) não são únicos, devido à existência de soluções ótimas alternativas fornecidas pelos modelos clássicos da DEA. Como consequência, os índices de eficiência cruzada dependem da solução ótima obtida por um determinado *software*, o que limita a utilidade do método da eficiência cruzada. Para ultrapassar esta limitação, isto é, para obter um conjunto único de pesos, tem sido proposta a utilização de um segundo modelo, designado por modelo de objetivo secundário. No próximo capítulo, apresenta-se um estudo sobre os principais modelos de objetivo secundário que têm sido propostos na literatura da DEA.

3. Modelos de objetivo secundário na avaliação cruzada da DEA

3.1. Introdução

No capítulo anterior foi feita uma apresentação da avaliação clássica e da avaliação cruzada da metodologia DEA. Como se referiu, a avaliação cruzada surgiu a fim de ultrapassar algumas desvantagens associadas à avaliação clássica, nomeadamente, a do fraco poder de discriminação e, conseqüente, impossibilidade de estabelecer um *ranking* completo sobre todas as DMUs e a da distribuição irrealista dos pesos associados aos *inputs* e aos *outputs*.

Como também se referiu nesse capítulo, apesar da sua grande aceitação, o método da eficiência cruzada apresenta uma desvantagem que pode limitar a sua aplicação: a da existência de soluções ótimas alternativas fornecidas pelos modelos clássicos da DEA. Para ultrapassar essa limitação, tem sido proposta a resolução de um segundo modelo, designado por modelo de objetivo secundário, e, nesse sentido, vários modelos de objetivo secundário têm sido propostos na literatura da DEA.

Neste capítulo, apresenta-se um estudo sobre alguns desses modelos. Assim, na secção 3.2, são apresentados os modelos benevolentes e agressivos, propostos por Doyle e Green (1994), assim como os modelos alternativos, propostos por Liang, Wu, Cook e Zhu (2008) e por Wang e Chin (2010a). Na secção 3.3, é apresentado o modelo neutro proposto por Wang e Chin (2010b) que, tanto quanto se sabe, foram os primeiros autores a propor este tipo de modelos. Nessa secção, apresenta-se ainda o modelo proposto por Wang, Chin e Jiang (2011), que generaliza o modelo proposto por Wang e Chin (2010b), assim como os modelos propostos por Nasserli e Kiaei (2018).

3.2. Modelos de objetivo secundário benevolente e agressivo

Para resolver o problema da existência de soluções ótimas alternativas, isto é, para determinar um único conjunto de pesos associados aos *inputs* e aos *outputs*, Sexton *et al.* (1986) e Doyle e Green (1994) propuseram um par de modelos de objetivo secundário, designados de benevolente e agressivo, que otimizam os pesos associados aos *inputs* e aos *outputs*, enquanto mantém inalterável a eficiência obtida pelo modelo CCR. Mais especificamente, o modelo benevolente determina os pesos que maximizam não apenas a eficiência de uma determinada DMU, mas também a eficiência média das restantes DMUs em avaliação. Por outro lado, o

modelo agressivo determina os pesos que maximizam a eficiência de uma determinada DMU e que minimizam a eficiência média das restantes DMUs em avaliação.

3.2.1. Modelos de Doyle e Green (1994)

Sendo E_{kk}^* o valor da eficiência da DMU_k obtido pelo modelo CCR orientado para *inputs*, o modelo benevolente, proposto por Doyle e Green (1994), é dado por:

$$\max \sum_{r=1}^s u_{rk} \left(\sum_{j=1; j \neq k}^n y_{rk} \right) \quad (3.1a)$$

$$s. a. \sum_{i=1}^m v_{ik} \left(\sum_{j=1; j \neq k}^n x_{ij} \right) = 1 \quad (3.1b)$$

$$\sum_{r=1}^s u_{rk} y_{rj} - E_{kk}^* \sum_{i=1}^m v_{ik} x_{ij} = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.1c)$$

$$\sum_{r=1}^s u_{rk} y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_{ik} x_{ij} \leq 0 \quad j = 1, \dots, n ; j \neq k \quad (3.1d)$$

$$v_{ik} \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.1e)$$

$$u_{rk} \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.1f)$$

A solução ótima do modelo (3.1) seleciona um conjunto de pesos associados aos *inputs* e *outputs* da DMU_k que tornam as eficiências cruzadas das outras DMUs tão grande quanto possível, mantendo o nível de eficiência da DMU_k obtido pelo modelo CCR orientado para *inputs*.

O modelo agressivo, proposto pelos mesmos autores, obtém-se do modelo anterior alterando o sentido de otimização, de máximo para mínimo, e é dado por:

$$\min \sum_{r=1}^s u_{rk} \left(\sum_{j=1; j \neq k}^n y_{rk} \right) \quad (3.2a)$$

$$s. a. \sum_{i=1}^m v_{ik} \left(\sum_{j=1; j \neq k}^n x_{ij} \right) = 1 \quad (3.2b)$$

$$\sum_{r=1}^s u_{rk} y_{rj} - E_{kk}^* \sum_{i=1}^m v_{ik} x_{ij} = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.2c)$$

$$\sum_{r=1}^s u_{rk} y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_{ik} x_{ij} \leq 0 \quad j = 1, \dots, n ; j \neq k \quad (3.2d)$$

$$v_{ik} \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.2e)$$

$$u_{rk} \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.2f)$$

Neste caso, a solução ótima do modelo (3.2) seleciona um conjunto de pesos associados aos *inputs* e aos *outputs* da DMU_k que tornam as eficiências cruzadas das outras DMUs tão pequenas quanto possível, mantendo o nível de eficiência da DMU_k obtido pelo modelo CCR orientado para *inputs*.

3.2.2. Modelos alternativos de Liang, Wu, Cook e Zhu (2008)

Vários modelos alternativos aos modelos benevolente e agressivo, apresentados anteriormente, têm sido propostos na literatura da DEA. Entre esses modelos, destacam-se os modelos propostos Liang *et al.* (2008) e por Wang e Chin (2010a), que incluem funções objetivo (secundárias) com base em desvios a pontos ideais. Tais modelos são baseados numa reformulação do modelo CCR orientado para *inputs* que usa, explicitamente, as variáveis de desvio associadas às desigualdades (2.2c) do modelo CCR apresentado no capítulo 2, onde a variável de desvio correspondente à DMU_k em avaliação permite obter o valor da eficiência para essa DMU, de acordo com Li e Reeves (1999).

Assim, considerando a notação usada anteriormente, nomeadamente no modelo (2.2), e designando por α_j a variável de desvio para a DMU_j ($j = 1, \dots, n$), nas restrições (2.2c), e por α_k ($k \in \{1, \dots, n\}$) a variável de desvio para a DMU_k em avaliação, o modelo CCR orientado para *inputs* pode, então, ser reescrito do seguinte modo:

$$\min \quad \alpha_k \quad (3.3a)$$

$$s. a. \quad \sum_{i=1}^m v_{ik} x_{ik} = 1 \quad (3.3b)$$

$$\sum_{r=1}^s u_{rk} y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_{ik} x_{ij} + \alpha_j = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.3c)$$

$$u_{rk} \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.3d)$$

$$v_{ik} \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.3e)$$

$$\alpha_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.3f)$$

Através do modelo (3.3), a DMU_k é eficiente se, e só se, $\alpha_k^* = 0$ ou, equivalentemente, $E_{kk}^* = 1$. Caso contrário, a DMU_k é ineficiente e o seu índice de eficiência é dado por $1 - \alpha_k^*$, isto é, $E_{kk}^* = 1 - \alpha_k^*$. A quantidade α_k^* é tal que $\alpha_k^* \in [0, 1]$ e pode ser vista como uma medida de ineficiência. Assim, é claro que quanto menor for o valor de α_k^* mais eficiente será a DMU_k .

Com base no modelo CCR reformulado (3.3), Liang *et al.* (2008) propuseram três modelos alternativos de objetivo secundário: minimização do desvio total de um ponto ideal; minimização do desvio máximo e minimização da média dos desvios absolutos. Estes modelos, que são apresentados de seguida, são estabelecidos com base num ponto ideal, definido como o conjunto de pesos associados aos *inputs* e aos *outputs* para os quais cada DMU é eficiente, isto é, para os quais se verifica $\sum_{r=1}^s u_{rk} y_{rj} / \sum_{i=1}^m v_{ik} x_{ij} = 1$, ou $\sum_{r=1}^s u_{rk} y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_{ik} x_{ij} = 0$.

- **Modelo de minimização do desvio total**

O primeiro modelo de objetivo secundário, proposto por aqueles autores, tem por objetivo minimizar a soma de todas as ineficiências ou o desvio total ao ponto ideal e é dado por:

$$\min \sum_{j=1}^n \alpha'_j \quad (3.4a)$$

$$s. a. \sum_{i=1}^m v_{ik} x_{ik} = 1 \quad (3.4b)$$

$$\sum_{i=1}^m u_{rk} y_{rk} = 1 - \alpha_k^* \quad (3.4c)$$

$$\sum_{r=1}^s u_{rk} y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_{ik} x_{ij} + \alpha'_j = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.4d)$$

$$u_{rk} \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.4e)$$

$$v_{ik} \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.4f)$$

$$\alpha'_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.4g)$$

No modelo (3.4), α_k^* é o valor ótimo do modelo CCR reformulado (3.3). Note-se que, de acordo com o referido anteriormente, o segundo membro de (3.4d) pode ser substituído por E_{kk}^* . Como os autores referem, a minimização da soma das ineficiências no modelo anterior é intuitivamente atrativo e, no espírito de todas as DMUs, tenta maximizar os respetivos desempenhos.

- **Modelo de minimização do desvio máximo**

O segundo modelo de objetivo secundário, proposto Liang *et al.* (2008), tem por objetivo minimizar o desvio máximo, ou a ineficiência máxima, a um ponto ideal e é dado por:

$$\min \quad \max \alpha'_j \quad (3.5a)$$

$$s. a. \quad \sum_{i=1}^m v_{ik} x_{ik} = 1 \quad (3.5b)$$

$$\sum_{r=1}^s u_{rk} y_{rk} = 1 - \alpha_k^* \quad (3.5c)$$

$$\sum_{r=1}^s u_{rk} y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_{ik} x_{ij} + \alpha'_j = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.5d)$$

$$u_{rk} \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.5e)$$

$$v_{ik} \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.5f)$$

$$\alpha'_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.5g)$$

O modelo (3.5) pode ser reescrito na seguinte forma:

$$\min \quad \theta \quad (3.6a)$$

$$s. a. \quad \sum_{i=1}^m v_{ik} x_{ik} = 1 \quad (3.6b)$$

$$\sum_{r=1}^s u_{rk} y_{rk} = 1 - \alpha_k^* \quad (3.6c)$$

$$\sum_{r=1}^s u_{rk} y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_{ik} x_{ij} + \alpha'_j = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.6d)$$

$$\theta - \alpha'_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.6e)$$

$$u_{rk} \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.6f)$$

$$v_{ik} \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.6g)$$

$$\alpha'_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.6h)$$

No modelo (3.6), minimizar a máxima ineficiência corresponde a maximizar a mínima eficiência entre as n eficiências. Deste modo, o modelo permite obter um conjunto de pesos que proporcionam o máximo índice possível para a DMU com pior desempenho. Em consequência, as restantes DMUs podem ser forçadas a terem índices de eficiência mais próximos, isto é, a uma diminuição da eficiência, resultando em níveis de desempenho com menor variação do que no caso anterior, de acordo com Liang *et al.* (2008).

- **Modelo de minimização da média dos desvios absolutos**

O terceiro modelo de objetivo secundário, proposto por Liang *et al.* (2008), procura minimizar a variação entre os valores das eficiências das DMUs e é dado por:

$$\min \quad \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n |\alpha'_j - \bar{\alpha}'| \quad (3.7a)$$

$$s. a. \quad \sum_{i=1}^m v_{ik} x_{ik} = 1 \quad (3.7b)$$

$$\sum_{r=1}^s u_{rk} y_{rk} = 1 - \alpha_k^* \quad (3.7c)$$

$$\sum_{r=1}^s u_{rk} y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_{ik} x_{ij} + \alpha'_j = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.7d)$$

$$u_{rk} \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.7e)$$

$$v_{ik} \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.7f)$$

$$\alpha'_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.7g)$$

A função objetivo do modelo (3.7) calcula a média dos desvios absolutos de dados pontos em relação à sua média. Portanto, a minimização da função objetivo tenta reduzir a diferença entre os índices de eficiência das DMUs, o que, em certa medida, demonstra um princípio de equidade.

Como referem os seus autores, o modelo (3.7) é não linear e pode ser linearizado usando as relações seguintes:

$$a'_j = \frac{1}{2}(|\alpha'_j - \bar{\alpha}'| + \alpha'_j - \bar{\alpha}') \quad (3.8a)$$

$$b'_j = \frac{1}{2}(|\alpha'_j - \bar{\alpha}'| - (\alpha'_j - \bar{\alpha}')) \quad (3.8b)$$

Deste modo, o modelo pode então ser reescrito no seguinte problema de programação linear:

$$\min \quad \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (a'_j + b'_j) \quad (3.9a)$$

$$s. a. \quad \sum_{i=1}^m v_{ik} x_{ik} = 1 \quad (3.9b)$$

$$\sum_{i=1}^m u_{rk} y_{rk} = 1 - \alpha_k^* \quad (3.9c)$$

$$\sum_{r=1}^s u_{rk} y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_{ik} x_{ij} + \alpha'_j = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.9d)$$

$$a'_j - b'_j = \alpha'_j - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \alpha'_j \quad j = 1, \dots, n \quad (3.9e)$$

$$u_{rk} \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.9f)$$

$$v_{ik} \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.9g)$$

$$\alpha'_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.9h)$$

Os modelos (3.6) e (3.9) procuram obter um conjunto de pesos associados aos *inputs* e aos *outputs* para os quais os índices de eficiência são tão similares quanto possível, apesar do último modelo o fazer de uma forma mais direta.

3.2.3. Modelos alternativos de Wang e Chin (2010a)

De acordo com Wang e Chin (2010a), os modelos propostos por Liang *et al.* (2008) são estabelecidos com base num ponto ideal irrealista que define a melhor eficiência relativa de 1 como o alvo de eficiência para cada DMU. Contudo, este alvo apenas é realizável para as DMUs eficientes, não o sendo para as ineficientes. Por outras palavras, o ponto ideal definido por Liang *et al.* (2008) não é realista porque nem todas as DMUs podem encontrar a sua

melhor eficiência relativa no nível 1, pois para as DMUs ineficientes o seu melhor nível de eficiência é inferior a 1.

Na sequência da observação anterior, Wang e Chin (2010a) definiram os índices de eficiência obtidos pelo modelo CCR como alvos das n DMUs, os quais são realizáveis para as DMUs eficientes e não eficientes sendo, por isso, mais realistas. Com base neste ponto ideal $(E_{11}^*, \dots, E_{nn}^*)$, Wang e Chin (2010a) desenvolveram versões melhoradas dos três modelos propostos por Liang *et al.* (2008), apresentados na subsecção anterior, assim como apresentaram um quarto modelo, não linear, que consiste na minimização da soma dos quadrados dos desvios ao ponto ideal.

O modelo de minimização do desvio total a um ponto ideal, proposto por Wang e Chin (2010a), é dado por:

$$\min \sum_{j=1}^n \alpha'_j \quad (3.10a)$$

$$s. a. \sum_{i=1}^m u_{rk} \left(\sum_{j=1}^n y_{ij} \right) + \sum_{i=1}^m v_{ik} \left(\sum_{j=1}^n x_{ij} \right) = n \quad (3.10b)$$

$$\sum_{i=1}^m u_{rk} y_{rk} - E_{kk}^* \sum_{i=1}^m v_{ik} x_{ik} = 0 \quad (3.10c)$$

$$\sum_{r=1}^s u_{rk} y_{rj} - E_{jj}^* \sum_{i=1}^m v_{ik} x_{ij} + \alpha'_j = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.10d)$$

$$u_{rk} \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.10e)$$

$$v_{ik} \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.10f)$$

$$\alpha'_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.10g)$$

De acordo com os autores, a restrição (3.10b) é incluída no modelo para evitar a solução trivial, isto é, $u_{rk} = 0$ ($r = 1, \dots, s$) e $v_{ik} = 0$ ($i = 1, \dots, m$). Contrariamente ao que acontece com as restrições $\sum_{i=1}^m v_{ik} x_{ik} = 1$ e $\sum_{r=1}^s u_{rk} y_{rk} = E_{kk}^*$ usadas nos modelos de Liang *et al.* (2008), para evitar a solução trivial e que variam de uma DMU para outra, esta restrição não varia com as DMUs alvo. O uso restrição (3.10b) tem um significado benéfico, o de que os pesos das diferentes DMUs encontram a mesma restrição e são, então, comparáveis.

Note-se que o modelo anterior é obtido do correspondente modelo (3.4) de Liang *et al.* (2008) alterando as restrições (3.4b), (3.4c) e (3.4d) para (3.10b), (3.10c) e (3.10d), respectivamente. Efetuando as mesmas alterações nos modelos de minimização do desvio máximo e de minimização da média dos desvios em Liang *et al.* (2008), obtêm-se os correspondentes modelos de Wang e Chin (2010a).

Como se refere em Wang e Chin (2010a), os modelos apresentados nesta secção são todos benevolentes. Contudo, à exceção do modelo de minimização da média dos desvios absolutos, estes modelos podem, facilmente, ser transformados em modelos agressivos, alterando o sentido de otimização, de mínimo para máximo, e alterando o máximo desvio para mínimo desvio. Note-se que, na sequência dessa alteração, o sentido das desigualdades (3.6e) vem alterado.

3.3. Modelos de objetivo secundário neutro

Os modelos de objetivo secundário apresentados na secção anterior, benevolentes e agressivos, colocam uma dificuldade ao decisor, a de decidir qual deles deve utilizar. Assim, por forma a contornar tal dificuldade, modelos de objetivo secundário neutro têm sido propostos na literatura da DEA. Nesta secção apresentam-se alguns modelos deste tipo.

3.3.1. Modelo de Wang e Chin (2010b)

De acordo com Wang e Chin (2010b), quando a uma DMU é dada a oportunidade de escolher os pesos associados aos *inputs* e aos *outputs*, a mesma foca-se em escolher os pesos que lhe são mais favoráveis, em vez de ter uma atitude benevolente ou agressiva para com as restantes DMUs. Com base nesta ideia, os autores propõem um modelo de objetivo secundário onde os pesos associados aos *inputs* e aos *outputs* de cada DMU são determinados do ponto de vista da própria DMU, não tendo em conta o impacto desta escolha nas restantes DMUs. Assim, para determinar a eficiência cruzada da DMU_k, os autores propuseram o seguinte modelo, denominado de modelo de objetivo secundário neutro:

$$\max \quad \delta = \min_{r \in \{1, \dots, s\}} \frac{y_{rk} u_{rk}}{\sum_{i=1}^m x_{ik} v_{ik}} \quad (3.11a)$$

$$s. a. \quad \frac{\sum_{r=1}^s y_{rk} u_{rk}}{\sum_{i=1}^m x_{ik} v_{ik}} = E_{kk}^* \quad (3.11b)$$

$$\frac{\sum_{r=1}^s y_{rj} u_{rk}}{\sum_{i=1}^m x_{ij} v_{ik}} \leq 1 \quad j = 1, \dots, n ; j \neq k \quad (3.11c)$$

$$v_{ik} \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.11d)$$

$$u_{rk} \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.11e)$$

$$\delta \geq 0 \quad (3.11f)$$

Neste modelo, o quociente presente na função objetivo mede a eficiência do *output* r da DMU_k e δ é a eficiência relativa mínima dos s *outputs* da DMU_k . Este modelo pode ser interpretado, economicamente, como que a DMU_k procure um conjunto de pesos associados aos *inputs* e aos *outputs* que maximizem a sua eficiência e, simultaneamente, faça com que cada *output* seja o mais eficiente possível, de modo a produzir, individualmente, eficiência suficiente, segundo Wang e Chin (2010b).

O modelo anterior é um modelo de programação fracionária que, através da transformação de Charnes e Cooper (1962), pode ser convertido no seguinte modelo de programação linear:

$$max \quad \delta \quad (3.12a)$$

$$s. a. \quad \sum_{i=1}^m x_{ik} v_{ik} = 1 \quad (3.12b)$$

$$\sum_{r=1}^s y_{rk} u_{rk} = E_{kk}^* \quad (3.12c)$$

$$\sum_{r=1}^s y_{rj} u_{rk} - \sum_{i=1}^m x_{ij} v_{ik} \leq 0 \quad j = 1, \dots, n ; j \neq k \quad (3.2d)$$

$$y_{rk} u_{rk} - \delta \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.12e)$$

$$v_{ik} \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.12f)$$

$$u_{rk} \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.12g)$$

$$\delta \geq 0 \tag{3.12h}$$

Como se referiu, o modelo anterior é um modelo neutro, isto é, determina os pesos associados aos *inputs* e aos *outputs* de uma DMU_k, considerando apenas o ponto de vista dessa DMU_k sem se preocupar em ter uma atitude benevolente ou agressiva com as restantes DMUs. Deste modo, o decisor fica liberto de ter de fazer uma escolha entre modelos benevolentes e agressivos, o que constitui uma importante vantagem dos modelos neutros face aos anteriores. Outra importante vantagem mencionada pelos autores, face aos modelos benevolentes e agressivos, refere-se à redução do número de pesos associados aos *outputs* com valor igual a 0, uma vez que se procura a máxima utilização possível dos *outputs*.

No caso de existir um único *output*, o modelo de Wang e Chin (2010b) reduz-se ao modelo CCR. Atendendo a que este último pode ter múltiplas soluções ótimas para as DMUs eficientes, tal implica que o modelo (3.12) pode, nesse caso, não ser capaz de produzir uma solução ótima única. Assim, a aplicação deste modelo limita-se à existência de múltiplos *outputs*.

3.3.2. Modelos de Wang, Chin e Jiang (2011)

Como se referiu na secção anterior, o modelo proposto por Wang e Chin (2010b) reduz o número de pesos associados aos *outputs* com valor igual a 0. Contudo, o número de pesos com valor igual a 0 associados aos *inputs* pode ainda ser considerável. Assim, de forma a reduzir também o número de pesos iguais a 0 nos *inputs*, isto é, de modo a reduzir, simultaneamente, o número de pesos iguais a 0 associados aos *inputs* e aos *outputs*, Wang *et al.* (2011) propuseram o seguinte modelo de objetivo secundário para a determinação dos pesos na avaliação cruzada, que generaliza o modelo proposto por Wang e Chin (2010b):

$$\max \quad \alpha\delta + \beta\gamma \tag{3.13a}$$

$$s. a. \quad \sum_{i=1}^m x_{ik} v_{ik} = 1 \tag{3.13b}$$

$$\sum_{r=1}^s y_{rk} u_{rk} = E_{kk}^* \tag{3.13c}$$

$$\sum_{r=1}^s y_{rj} u_{rk} - \sum_{i=1}^m x_{ij} v_{ik} \leq 0 \quad j = 1, \dots, n ; j \neq k \tag{3.13d}$$

$$y_{rk} u_{rk} - \delta \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \tag{3.13e}$$

$$x_{rk}v_{ik} - \gamma \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.13f)$$

$$v_{ik} \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.13g)$$

$$u_{rk} \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.13h)$$

$$\delta, \gamma \geq 0 \quad (3.13i)$$

No modelo anterior, $\alpha \geq 0$ e $\beta \geq 0$ são dois ponderadores de δ e γ , respetivamente, satisfazendo a condição $\alpha + \beta = 1$. De acordo com os mesmos autores, o significado económico de γ pode ser interpretado como a mínima importância relativa dos m *inputs*. Assim, este modelo pode ser interpretado economicamente, procurando um conjunto de pesos associados aos *inputs* e aos *outputs* para a DMU_k que tornem cada *input* e cada *output* tão eficiente, ou suficientemente importante quanto possível, mantendo a eficiência CCR inalterada, de modo a que cada *output* possa produzir suficiente eficiência enquanto individual e cada *input* possa ser suficientemente utilizado.

Como referem os autores, considerando $\alpha = 1$ e $\beta = 0$, o modelo anterior reduz-se ao modelo de Wang e Chin (2010b), ou seja, este último é um caso particular do modelo (3.13). Por outro lado, considerando $\alpha = 0$ e $\beta = 1$, o modelo anterior foca-se apenas na redução do número de pesos com valor igual a 0 associados aos *inputs*. Considerando $\alpha = \beta = 1/2$, o modelo anterior pode reduzir simultaneamente o número de pesos iguais a 0 associados aos *inputs* e aos *outputs*, simultaneamente. Outros valores de α e β podem ser considerados, por forma a obter-se um equilíbrio entre o número de pesos iguais a 0 associados aos *inputs* e aos *outputs*, como referem e exemplificam os autores.

Similarmente ao que acontece com o modelo de Wang e Chin (2010b), o modelo anterior é um modelo neutro, uma vez que os pesos associados aos *inputs* e aos *outputs* são determinados apenas do ponto de vista da própria DMU_k sem ser benevolente ou agressivo com as outras DMUs.

De referir que, no caso de existir apenas um *input*, o modelo anterior e o modelo Wang e Chin (2010b) são equivalentes, dado que, nessa situação, tem-se $\gamma^* = 1$. A diferença entre estes dois modelos está no facto de o modelo de Wang e Chin (2010b) ser um modelo orientado para *outputs* e poder reduzir o número de zeros apenas nos pesos associados aos *outputs*, enquanto que o modelo de Wang *et al.* (2011) é um modelo orientado, simultaneamente, para *inputs* e

para *outputs* e pode reduzir o número de zeros em ambos os pesos associados aos *inputs* e aos *outputs*. Uma outra diferença prende-se com o facto de o modelo (3.13) permitir uma única solução ótima, para o caso de se ter apenas um *output*, o que não acontece, necessariamente, com o modelo (3.12), como se referiu na secção anterior. Deste modo, o modelo (3.13) pode ser usado para qualquer número de *outputs*.

Através de um exemplo, Wang *et al.* (2011) ilustram que o seu modelo pode, de facto, reduzir o número de *inputs* com valor igual a 0, face aos modelos benevolente e agressivo e ao modelo de Wang e Chin (2010b). Relativamente ao número de *outputs* com valor igual a 0, no modelo de Wang *et al.* (2011) este é reduzido, face aos modelos benevolente e agressivo, mas mantém-se para $\alpha = 0,8$ e $\beta = 0,2$ e aumenta para $\alpha = \beta = 1/2$, face ao modelo de Wang e Chin (2010b). Nesse exemplo, o modelo agressivo é o que apresenta um maior número de zeros, quer nos *inputs* quer nos *outputs*.

3.3.3. Modelos de Nasser e Kiaei (2018)

Considerando que, entre os múltiplos pesos ótimos, devem ser seleccionados os que permitem melhorar a eficiência relativa de cada *input* e *output* e, na medida do possível, impedem a selecção de soluções 0 na avaliação cruzada, Nasser e Kiaei (2018) afirmam que Wang *et al.* (2011), no seu modelo, procuram seleccionar um conjunto de pesos que aumentam a contribuição do consumo de *inputs*, o que parece contradizer a otimização da eficiência relativa de cada *input*. Nasser e Kiaei (2018) acreditam que a selecção de pesos, proposta por aqueles autores, não é apropriada porque piora a eficiência relativa de cada *input*, apesar da eficiência relativa de cada *output* ser melhorada. Deste modo, os autores propõem um modelo que melhora a eficiência de cada *input* e *output*. Para tal, começam por propor o seguinte modelo:

$$\max \quad \delta - \gamma \tag{3.14a}$$

$$s. a. \quad \sum_{i=1}^m x_{ik} v_{ik} = 1 \tag{3.14b}$$

$$\sum_{r=1}^s y_{rk} u_{rk} = E_{kk}^* \tag{3.14c}$$

$$\sum_{r=1}^s y_{rj} u_{rk} - \sum_{i=1}^m x_{ij} v_{ik} \leq 0 \quad j = 1, \dots, n ; j \neq k \tag{3.14d}$$

$$y_{rk} u_{rk} - \delta \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \tag{3.14e}$$

$$x_{rk}v_{ik} - \gamma \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.14f)$$

$$v_{ik} \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.14g)$$

$$u_{rk} \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.14h)$$

$$\delta, \gamma \geq 0 \quad (3.14i)$$

O modelo (3.14) seleciona um conjunto de pesos que, mantendo a eficiência da DMU_k em avaliação, otimizam a eficiência relativa de cada *input* e *output*. Por outras palavras, permite reduzir a contribuição do consumo de cada *input*, enquanto aumenta a contribuição da produção de cada *output*. No entanto, ao fazê-lo, os pesos associados aos *inputs* com valor igual a 0 são afetos, na medida do possível, mas para os *outputs* é obtido um valor diferente de 0. Assim, para evitar pesos com valor igual a 0, os autores propõem o seguinte modelo:

$$\max \quad \min \{v_{1k}, \dots, v_{mk}, u_{1k}, \dots, u_{sk}\} \quad (3.15a)$$

$$s. a. \quad \sum_{i=1}^m x_{ik}v_{ik} = 1 \quad (3.15b)$$

$$\sum_{r=1}^s y_{rk}u_{rk} = E_{kk}^* \quad (3.15c)$$

$$\sum_{r=1}^s y_{rj}u_{rk} - \sum_{i=1}^m x_{ij}v_{ik} \leq 0 \quad j = 1, \dots, n ; j \neq k \quad (3.15d)$$

$$v_{ik} \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.15e)$$

$$u_{rk} \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.15f)$$

O modelo (3.15) é um modelo de programação não linear que, fazendo $\varepsilon = \min \{v_{1k}, \dots, v_{mk}, u_{1k}, \dots, u_{sk}\}$, pode ser transformado no seguinte modelo de programação linear:

$$\max \quad \varepsilon \quad (3.16a)$$

$$s. a. \quad \sum_{i=1}^m x_{ik}v_{ik} = 1 \quad (3.16b)$$

$$\sum_{r=1}^s y_{rk}u_{rk} = E_{kk}^* \quad (3.16c)$$

$$\sum_{r=1}^s y_{rj} u_{rk} - \sum_{i=1}^m x_{ij} v_{ik} \leq 0 \quad j = 1, \dots, n ; j \neq k \quad (3.16d)$$

$$v_{ik} \geq \varepsilon \quad i = 1, \dots, m \quad (3.16e)$$

$$u_{rk} \geq \varepsilon \quad r = 1, \dots, s \quad (3.16f)$$

Como os autores referem, as restrições sobre os pesos não tornam o modelo (3.16) impossível porque ε é uma variável e não uma constante, logo sem impacto sobre a impossibilidade.

Para determinar os pesos associados aos *inputs* e aos *outputs* da DMU_k, os autores propõem, então, o seguinte modelo:

$$\max \quad \delta - \gamma \quad (3.17a)$$

$$s. a. \quad \sum_{i=1}^m x_{ik} v_{ik} = 1 \quad (3.17b)$$

$$\sum_{r=1}^s y_{rk} u_{rk} = E_{kk}^* \quad (3.17c)$$

$$\sum_{r=1}^s y_{rj} u_{rk} - \sum_{i=1}^m x_{ij} v_{ik} \leq 0 \quad j = 1, \dots, n ; j \neq k \quad (3.17d)$$

$$y_{rk} u_{rk} - \delta \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.17e)$$

$$x_{ik} v_{ik} - \delta \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.17f)$$

$$v_{ik} \geq \varepsilon^* \quad i = 1, \dots, m \quad (3.17g)$$

$$u_{rk} \geq \varepsilon^* \quad r = 1, \dots, s \quad (3.17h)$$

$$\delta, \gamma \geq 0 \quad (3.17i)$$

O valor ε^* usado no modelo anterior é a solução ótima do modelo (3.16). Assim, o modelo (3.17) seleciona uma solução, entre as soluções ótimas múltiplas, que permite reduzir a contribuição do consumo de cada *input* enquanto aumenta a contribuição da produção de cada *output* e garante, simultaneamente, quando possível, a não existência de pesos com valor 0.

4. Caso prático aplicado ao setor segurador

4.1. Introdução

O conceito de seguro surge para amenizar os efeitos práticos dos riscos a que as pessoas e as empresas se encontram expostas, de acordo com Guedes-Vieira (2012). Neste contexto, os seguros e a atividade seguradora desempenham um importante papel na sociedade, uma vez que potenciam a criação de valor e estimulam a poupança, da mesma forma que protegem os indivíduos dos riscos a que estão sujeitos, resguardando a sua situação financeira.

Neste âmbito, e por se tratar de um setor bastante competitivo, devido às elevadas expectativas dos consumidores e às crescentes pressões a nível de custos, surge a necessidade de avaliar o desempenho das seguradoras por forma a definir estratégias para obtenção de melhores resultados.

Assim, o presente capítulo destina-se a avaliar o desempenho de um conjunto de dezassete seguradoras do ramo não vida, através do método da eficiência cruzada, apresentado no capítulo 2, e usando alguns dos modelos de objetivo secundário, descritos no capítulo 3. Assim, na secção 4.2, é descrita a forma como foram obtidos os dados relativos aos *inputs* e aos *outputs* das seguradoras em estudo e apresentam-se os respetivos valores. Por fim, na secção 4.3, são apresentados os resultados apurados e respetiva análise.

4.2. Seleção dos dados e escolha dos modelos

O setor segurador encontra-se dividido em dois ramos: o ramo vida, que inclui os seguros de vida clássicos, os seguros financeiros e os seguros ligados a fundos de investimento; e o ramo não vida, que inclui os seguros de bens patrimoniais, de responsabilidades e de pessoas (à exceção do seguro de vida). Esta segregação implica, nomeadamente, que existam dois tipos de licença para o exercício da atividade de cada ramo.

Para este estudo foram selecionadas dezassete seguradoras, que operavam em Portugal no ramo não vida no ano 2020, tendo-se recorrido, para este efeito, à lista de seguradoras autorizadas disponível no *site* da Autoridade de Supervisão de Seguros e Fundos de Pensões (ASF), entidade responsável pela regulação e supervisão da atividade seguradora, resseguradora, dos fundos de pensões e respetivas entidades gestoras e da mediação de seguros (ASF, 2022).

Os dados relativos aos *inputs* e aos *outputs* a utilizar neste trabalho foram recolhidos das demonstrações financeiras de cada seguradora, publicadas no Relatório e Contas de cada instituição, disponível no respetivo *site*.

Assim, foram selecionados os seguintes indicadores para *inputs*:

- Investimentos líquidos (*input 1*)
- Prémios brutos emitidos (*input 2*)
- Custos com sinistros (*input 3*)

O investimento líquido consiste no investimento bruto subtraído pela respetiva depreciação. Este indicador revela-se importante, uma vez que qualquer atividade produtiva carece de um aumento constante de capital para fazer face à produção de novos bens e/ou serviços.

O prémio bruto emitido pela seguradora é calculado pela mesma tendo em conta a probabilidade de ocorrência do risco e o respetivo custo médio da indemnização a pagar em caso de sinistro. Assim, o prémio bruto comporta o prémio comercial – que consiste no custo das coberturas do contrato, denominado por apólice, assim como de outros custos, como aquisição, gestão e cobrança do mesmo – acrescido dos custos de emissão, que podem incluir o custo da apólice, de atas adicionais, de certificados de seguro e de fracionamento do prémio.

Os custos com sinistros compreendem as quantias que cada seguradora contrai dos seus assegurados, sendo que um sinistro é uma ocorrência, ou uma sequência de ocorrências, que resultam no acionamento da cobertura do risco prevista no contrato.

Por outro lado, foram selecionados os seguintes indicadores para *outputs*:

- Total do capital próprio (*output 1*)
- Resultado líquido do exercício (*output 2*)

O capital próprio expressa o valor líquido do património da seguradora, obtido pela diferença entre os seus ativos e passivos, constituindo um importante indicador do seu desempenho financeiro.

O resultado líquido do exercício determina a situação financeira da seguradora num determinado período, sendo um indicador fundamental para a sua análise e resulta da diferença entre os proveitos e os custos.

Na Tabela 4.1 são apresentados os dados relativos aos *inputs* e *outputs* para cada seguradora. Assim, nas duas primeiras colunas são identificadas as seguradoras, nas três colunas seguintes são apresentados os valores dos *inputs* e, nas duas últimas, os valores dos *outputs*.

Tabela 4.1 Dados referentes aos *inputs* e *outputs* (em milhares de euros).

DMUs (Seguradoras)		<i>Input 1</i>	<i>Input 2</i>	<i>Input 3</i>	<i>Output 1</i>	<i>Output 2</i>
01	Abarca	25.011	18.000	3.693	9.240	430
02	ACP Mobilidade	5.367	1.359	807	4.219	297
03	Aegon Santander	46.836	60.957	16.747	21.018	4.001
04	Ageas Portugal	643.846	352.694	86.703	184.340	21.499
05	Caravela	99.623	100.719	48.649	47.083	3.960
06	Companhia Portuguesa de Resseguros	15.126	2.775	312	13.977	708
07	Cosec	113.051	39.051	19.948	52.074	2.373
08	CA Seguros	214.643	138.027	68.085	53.932	4.118
09	Fidelidade	63.028	52.785	37.848	51.675	7.378
10	Lusitânia	499.706	217.536	139.355	97.365	3.070
11	Mapfre Seguros Gerais	202.657	100.545	39.969	100.509	5.879
12	GNB Seguros	121.847	74.556	42.690	40.038	6.184
13	Mútua dos Pescadores	37.504	10.130	5.456	13.931	464
14	Ocidental	252.133	366.866	26.110	82.690	25.772
15	RNA Seguros	11.689	20.473	17.240	9.482	1.859
16	Via Directa	80.077	57.927	38.388	29.107	2.145
17	Victoria Seguros	106.416	84.885	28.144	45.250	1.668

Para este estudo, e como modelo base do método da eficiência cruzada, utilizou-se o modelo CCR orientado para *inputs*. Adicionalmente, para modelos de objetivo secundário, utilizaram-se os modelos benevolente e agressivo, propostos por Doyle e Green (1994), e três modelos neutros, propostos por Wang e Chin (2010b), Wang *et al.* (2011) e Nasserri e Kiaei (2018).

Doravante, e para simplificar a identificação de cada um dos modelos selecionados, optou-se por designá-los conforme descrito na Tabela 4.2:

Tabela 4.2 Designação dos modelos selecionados.

Modelos	Designação
Modelo CCR orientado para <i>inputs</i> , resolvido pelo <i>software</i> MaxDEA:	CCR/MaxDEA
Modelo CCR orientado para <i>inputs</i> , resolvido pelo <i>software</i> CPLEX:	CCR/CPLEX
Modelo benevolente, proposto por Doyle e Green (1994):	Benevolente
Modelo agressivo, proposto por Doyle e Green (1994):	Agressivo
Modelo neutro, proposto por Wang e Chin (2010b):	Wang e Chin (2010b)
Modelo neutro, proposto por Wang, Chin e Jiang (2011):	Wang <i>et al.</i> (2011)
Modelo neutro, proposto por Nasseri e Kiaei (2018):	Nasseri e Kiaei (2018)

4.3. Análise dos resultados

Nesta secção, usando os dados e modelos referenciados na secção anterior, são apresentados os resultados obtidos através do *software* MaxDEA, cuja versão gratuita pode ser acedida em <http://maxdea.com/>, e do *software* IBM ILOG CPLEX Optimization Studio, versão 20.1, usando os módulos de programação linear e *Optimization Programming Language* (OPL). Os dois *softwares* foram utilizados para obter as soluções ótimas do modelo CCR orientado para *inputs*, sendo que o segundo *software* foi também utilizado para obter as soluções ótimas dos modelos de objetivo secundário.

Na Tabela 4.3 apresentam-se alguns resultados obtidos na primeira fase do método da eficiência cruzada. Mais especificamente, nas duas primeiras colunas da tabela são listadas as seguradoras, na terceira coluna apresentam-se os índices de eficiência obtidos pelo modelo CCR orientado para *inputs*, e na quarta coluna apresentam-se os correspondentes *rankings*. Os pesos associados aos *inputs* e aos *outputs*, obtidos nesta primeira fase pelos *softwares* MaxDEA e CPLEX, são apresentados nos apêndices A e B, respetivamente.

Como se pode observar nessa tabela, existem cinco seguradoras que obtiveram um índice de eficiência igual a 1 e, por isso, são consideradas eficientes. São elas as seguradoras 02 (ACP Mobilidade), 06 (Companhia Portuguesa de Resseguros), 09 (Fidelidade), 14 (Ocidental) e 15 (RNA Seguros) que, desta forma, se posicionam como as seguradoras com melhor

desempenho. As restantes seguradoras obtiveram um índice de eficiência inferior a 1, sendo, por isso, consideradas ineficientes. Para estas, os índices de eficiência são todos diferentes, pelo que o modelo consegue diferenciar todas estas seguradoras, o mesmo não acontecendo para as seguradoras consideradas eficientes.

Tabela 4.3 Índices de eficiência obtidos através do modelo CCR e respetivos *rankings*.

	DMUs (Seguradoras)	CCR	<i>Ranking</i>
01	Abarca	0,3998	15
02	ACP Mobilidade	1,0000	1
03	Aegon Santander	0,7776	6
04	Ageas Portugal	0,4792	11
05	Caravela	0,5278	9
06	Companhia Portuguesa de Resseguros	1,0000	1
07	Cosec	0,4985	10
08	CA Seguros	0,2786	16
09	Fidelidade	1,0000	1
10	Lusitânia	0,2109	17
11	Mapfre Seguros Gerais	0,5408	8
12	GNB Seguros	0,5708	7
13	Mútua dos Pescadores	0,4020	14
14	Ocidental	1,0000	1
15	RNA Seguros	1,0000	1
16	Via Directa	0,4020	13
17	Victoria Seguros	0,4602	12

Posteriormente, na segunda fase do método da eficiência cruzada, usando os pesos ótimos obtidos pelo modelo CCR orientado para *inputs* (através dos *softwares* MaxDEA e CPLEX) e pelos modelos de objetivo secundário selecionados, que constam dos apêndices A, B, C, D, E, F e G, foram construídas as matrizes das eficiências cruzadas que são apresentadas nos

apêndices H, I, J, K, L, M e N, respetivamente, onde também se inclui, na última linha, o índice da eficiência cruzada de cada seguradora. Esses índices, obtidos pelos modelos selecionados e considerando $\alpha = \beta = 1/2$ no modelo de Wang *et al.* (2011), são apresentados na Tabela 4.4.

Tabela 4.4 Índices das eficiências cruzadas obtidos pelos modelos selecionados.

DMUs (Seguradoras)	Modelos						
	CCR/ MaxDEA	CCR/ CPLEX	Benevolente	Agressivo	Wang e Chin (2010b)	Wang <i>et al.</i> (2011)	Nasseri e Kiaei (2018)
01 Abarca	0,3198	0,3171	0,2864	0,3633	0,3240	0,3166	0,3262
02 ACP Mobilidade	0,8500	0,7779	0,7725	0,8711	0,8398	0,8149	0,8501
03 Aegon Santander	0,5965	0,5490	0,5400	0,5807	0,5611	0,5440	0,5749
04 Ageas Portugal	0,3631	0,3222	0,3238	0,3690	0,3448	0,3406	0,3520
05 Caravela	0,4460	0,4231	0,4006	0,4840	0,4368	0,4255	0,4455
06 Companhia Portuguesa de Resseguros	0,9461	0,8713	0,8668	0,9771	0,9397	0,9719	0,9557
07 Cossec	0,4149	0,4242	0,3862	0,4776	0,4206	0,4086	0,4263
08 CA Seguros	0,2470	0,2433	0,2229	0,2477	0,2437	0,2361	0,2478
09 Fidelidade	0,9493	0,8642	0,8722	0,9500	0,9280	0,8776	0,9366
10 Lusitânia	0,1551	0,1484	0,1477	0,2257	0,1598	0,1550	0,1618
11 Mapfre Seguros Gerais	0,4683	0,4636	0,4232	0,5276	0,4663	0,4552	0,4745
12 GNB Seguros	0,4386	0,4194	0,3988	0,4420	0,4211	0,3998	0,4262
13 Mútua dos Pescadores	0,3136	0,2881	0,2892	0,3884	0,3238	0,3146	0,3276
14 Ocidental	0,6186	0,5398	0,5528	0,5473	0,5925	0,5658	0,5775
15 RNA Seguros	0,8760	0,8173	0,8207	0,9095	0,8610	0,8133	0,8631
16 Via Directa	0,3385	0,3294	0,3061	0,3473	0,3363	0,3246	0,3412
17 Victoria Seguros	0,3394	0,3023	0,3032	0,3968	0,3415	0,3373	0,3488

Como se pode observar na Tabela 4.4, nenhuma seguradora apresenta um índice de eficiência cruzada igual a 1, pelo que, com base nos modelos referenciados, nenhuma seguradora é considerada eficiente pelo método da eficiência cruzada. De outro modo, nenhuma seguradora é considerada eficiente quando avaliada por si e pelos pares. Ainda assim, é possível identificar que a seguradora 06 (Companhia Portuguesa de Resseguros) é a que apresenta os maiores índices de eficiência cruzada, à exceção dos obtidos pelos modelos CCR/MaxDEA e benevolente, onde o maior valor, em ambos, é obtido pela seguradora 09 (Fidelidade). Por outro lado, a seguradora 10 (Lusitânia) é, em todos os modelos, a que apresenta o menor índice de eficiência cruzada. Note-se que os índices de eficiência cruzada obtidos pelo modelo CCR/MaxDEA e CCR/CPLEX, são todos diferentes.

Na Tabela 4.5, que segue a mesma estrutura da Tabela 4.4, apresentam-se os *rankings* correspondentes aos índices de eficiência cruzada exibidos nessa tabela.

Analisando a Tabela 4.5 conclui-se que existem apenas três seguradoras com o mesmo *ranking* em todos os modelos. São elas as seguradoras 08 (CA Seguros), 10 (Lusitânia) e 11 (Mapfre Seguros Gerais), que ocupam, respetivamente, as posições 16, 17 e 7 do *ranking*.

No seguimento desta análise, é possível constatar que oito seguradoras apresentam uma diferença de um entre os *rankings* estabelecidos pelos diferentes modelos:

- 02 (ACP Mobilidade) com um *ranking* 3 e seis *rankings* 4;
- 03 (Aegon Santander) com dois *rankings* 5 e cinco *rankings* 6;
- 05 (Caravela) com seis *rankings* 8 e um *ranking* 9;
- 06 (Companhia Portuguesa de Resseguros) com cinco *rankings* 1 e dois *rankings* 2;
- 09 (Fidelidade) com dois *rankings* 1 e cinco *rankings* 2;
- 12 (GNB Seguros) com três *rankings* 9 e quatro *rankings* 10;
- 14 (Ocidental) com cinco *rankings* 5 e dois *rankings* 6;
- 15 (RNA Seguros) com seis *rankings* 3 e um *ranking* 4.

Com uma diferença de dois entre os *rankings* estabelecidos pelos modelos selecionados, existem quatro seguradoras:

- 01 (Abarca) com um *ranking* 13, quatro *rankings* 14 e dois *rankings* 15;
- 04 (Ageas Portugal) com cinco *rankings* 11, um *ranking* 12 e um *ranking* 13;
- 07 (Cosec) com um *ranking* 8, três *rankings* 9 e três *rankings* 10.

Tabela 4.5 *Rankings* estabelecidos pelos modelos selecionados.

DMUs (Seguradoras)	Modelos						
	CCR/ MaxDEA	CCR/ CPLEX	Benevolente	Agressivo	Wang e Chin (2010b)	Wang <i>et al.</i> (2011)	Nasseri e Kiaei (2018)
01 Abarca	14	13	15	14	14	14	15
02 ACP Mobilidade	4	4	4	4	4	3	4
03 Aegon Santander	6	5	6	5	6	6	6
04 Ageas Portugal	11	12	11	13	11	11	11
05 Caravela	8	9	8	8	8	8	8
06 Companhia Portuguesa de Resseguros	2	1	2	1	1	1	1
07 Cosec	10	8	10	9	10	9	9
08 CA Seguros	16	16	16	16	16	16	16
09 Fidelidade	1	2	1	2	2	2	2
10 Lusitânia	17	17	17	17	17	17	17
11 Mapfre Seguros Gerais	7	7	7	7	7	7	7
12 GNB Seguros	9	10	9	10	9	10	10
13 Mútua dos Pescadores	15	15	14	12	15	15	14
14 Ocidental	5	6	5	6	5	5	5
15 RNA Seguros	3	3	3	3	3	4	3
16 Via Directa	13	11	12	15	13	13	13
17 Victoria Seguros	12	14	13	11	12	12	12

Com uma diferença de três entre os *rankings* estabelecidos pelos modelos selecionados, existem duas seguradoras:

- 13 (Mútua dos Pescadores) com um *ranking* 12, dois *rankings* 14 e quatro *rankings* 15;
- 17 (Victoria Seguros) com um *ranking* 11, quatro *rankings* 12, um *ranking* 13 e um *ranking* 14.

Por fim, com uma diferença de quatro entre os *rankings* estabelecidos pelos modelos selecionados, existe apenas uma seguradora:

- 16 (Via Directa) com um *ranking* 11, um *ranking* 12, quatro *rankings* 13 e um *ranking* 15.

Considerando apenas os cinco modelos de objetivo secundário, verifica-se que:

- Quatro seguradoras apresentam o mesmo *ranking*;
- Nove seguradoras apresentam uma diferença de um entre os *rankings* estabelecidos pelos diferentes modelos;
- Duas seguradoras apresentam uma diferença de dois entre os *rankings* estabelecidos pelos diferentes modelos;
- Duas seguradoras apresentam uma diferença de três entre os *rankings* estabelecidos pelos diferentes modelos.

Restringindo a análise aos três modelos de objetivo secundário neutro, verifica-se que:

- Onze seguradoras apresentam o mesmo *ranking*;
- Seis seguradoras apresentam uma diferença de um entre os *rankings* estabelecidos pelos diferentes modelos.

Assim, após esta análise, conclui-se que existe uma menor diferença entre os *rankings* estabelecidos pelos modelos neutros em relação aos estabelecidos pelos modelos benevolente e agressivo.

Numa outra análise aos resultados, é possível observar que a seguradora que melhor se posiciona no *ranking* é a 06 (Companhia Portuguesa de Resseguros), uma vez que ocupa a posição 1 em todos os modelos, à exceção dos modelos CCR/MaxDEA e benevolente, que colocam esta seguradora na posição 2 do *ranking*. Logo de seguida, a seguradora que ocupa a segunda posição do *ranking* é a 09 (Fidelidade), à exceção dos modelos CCR/MaxDEA e benevolente, onde esta seguradora surge na primeira posição do *ranking*, invertendo diretamente as posições das duas seguradoras agora mencionados. A ocupar a terceira posição do *ranking*, completando, assim, o *top* 3 das dezassete seguradoras melhor posicionadas no *ranking*, está a seguradora 15 (RNA Seguros), à exceção do modelo Wang *et al.* (2011), que posiciona esta seguradora na quarta posição do *ranking*.

Em sentido contrário, a seguradora com pior *ranking* é a seguradora 10 (Lusitânia), uma vez que ocupa a posição 17, seguida da seguradora 08 (CA Seguros), que ocupa a posição 16, considerando os sete modelos em ambas. A seguradora 13 (Mútua dos Pescadores) completa

o *top* 3 das dezassete seguradoras com pior *ranking*, ocupando a posição 15, com exceção dos modelos benevolente e de Nasser e Kiaei (2018), em que esta seguradora ocupa a posição 14 do *ranking*, e do modelo agressivo, em que ocupa a posição 12.

Comparando os *rankings* obtidos através do modelo CCR/MaxDEA e CCR/CPLEX, observa-se que apenas seis das dezassete seguradoras em análise partilham o mesmo *ranking*, confirmando, assim, o que foi dito no capítulo 3 sobre a obtenção de *rankings* diferentes, devido à existência de soluções ótimas múltiplas fornecidas pelo modelo CCR.

O gráfico da Figura 4.1 permite analisar mais eficazmente as diferenças relativas entre os *rankings* apresentados na Tabela 4.5. Assim, observando os resultados agrupados por seguradora, verifica-se, nomeadamente, que nenhum modelo apresenta um *ranking* superior ou inferior, comparando com os restantes modelos. Exemplificando, e considerando apenas os modelos que se destacam de forma isolada, tem-se que:

- O modelo CCR/CPLEX é o que apresenta melhor *ranking* na seguradora 01 (Abarca) e pior *ranking* na seguradora 05 (Caravela) e 17 (Victoria Seguros);
- O modelo Wang *et al.* (2011) é o que apresenta melhor *ranking* na seguradora 02 (ACP Mobilidade) e pior *ranking* na seguradora 15 (RNA Seguros);
- O modelo agressivo é o que apresenta melhor *ranking* nas seguradoras 13 (Mútua dos Pescadores) e 17 (Victoria Seguros) e pior *ranking* nas seguradoras 04 (Ageas Portugal) e 16 (Via Directa).

O gráfico da Figura 4.1 permite, também, visualizar rapidamente que as seguradoras 16 (Via Directa) e 17 (Victoria Seguros) são as seguradoras que apresentam mais irregularidade de *rankings*, com quatro níveis diferentes entre os sete modelos, seguidas das seguradoras 01 (Abarca), 04 (Ageas Portugal), 07 (Cosec) e 13 (Mútua dos Pescadores), com três níveis diferentes entre os sete modelos. As restantes seguradoras apresentam dois níveis diferentes de *ranking* entre os sete modelos, à exceção das seguradoras 08 (CA Seguros), 10 (Lusitânia) e 11 (Mapfre Seguros Gerais) que apresentam apenas um nível de *ranking*, reforçando o que foi dito anteriormente.

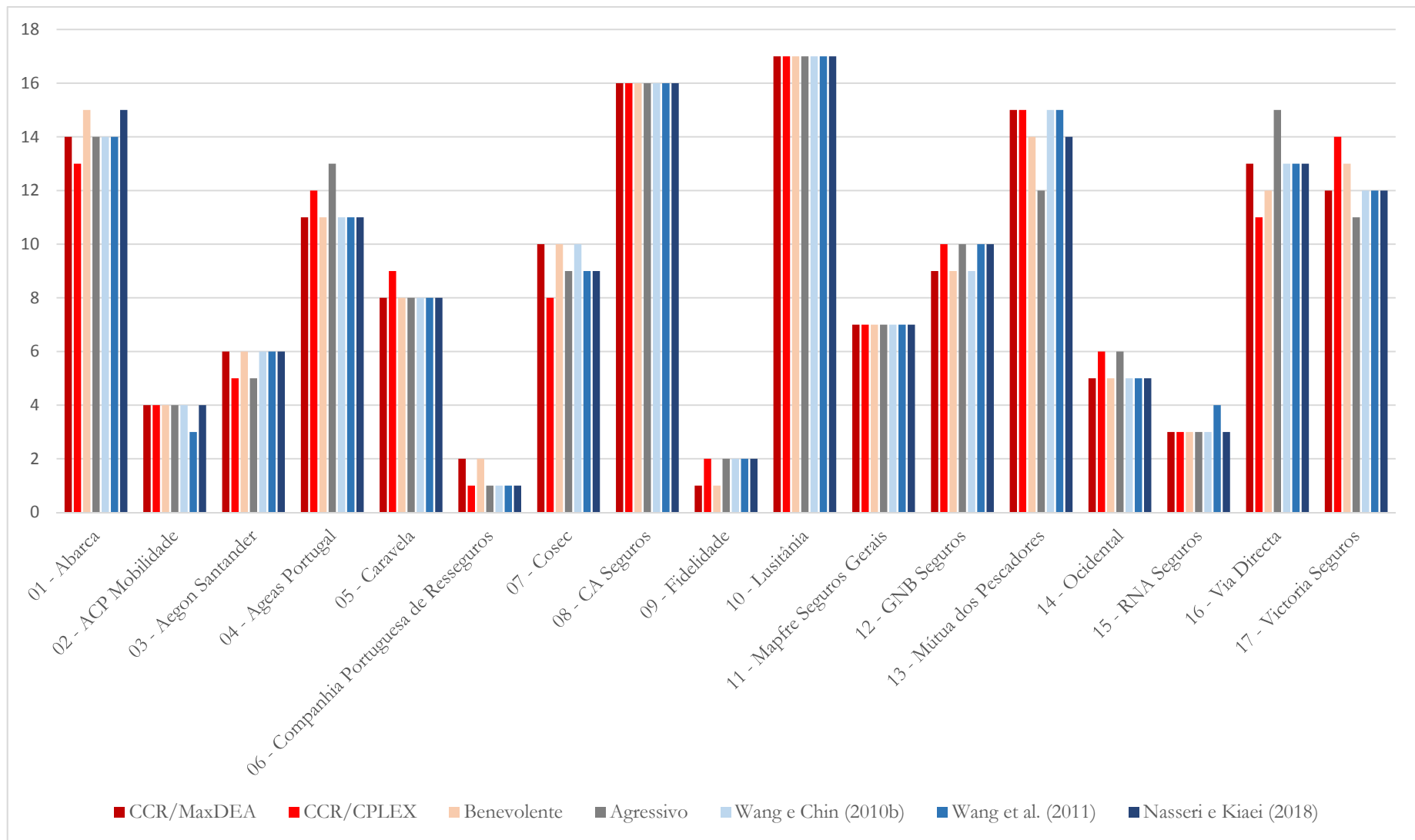


Figura 4.1 Rankings estabelecidos pelos modelos selecionados.

A fim de analisar as diferenças entre a autoavaliação e a avaliação cruzada, foi calculado o índice “falso positivo” para cada seguradora e para cada modelo usado na determinação dos pesos para obtenção da eficiência cruzada. Esses índices constam da Tabela 4.6, que segue a mesma estrutura das Tabelas 4.4 e 4.5.

Tabela 4.6 Índices “falso positivo” obtido através dos modelos selecionados.

DMUs (Seguradoras)	Modelos						
	CCR/ MaxDEA	CCR/ CPLEX	Benevolente	Agressivo	Wang e Chin (2010b)	Wang <i>et al.</i> (2011)	Nasseri e Kiaei (2018)
01 Abarca	0,2501	0,2606	0,3959	0,1005	0,2340	0,2627	0,2258
02 ACP Mobilidade	0,1765	0,2855	0,2944	0,1480	0,1907	0,2271	0,1763
03 Aegon Santander	0,3036	0,4166	0,4399	0,3391	0,3859	0,4294	0,3525
04 Ageas Portugal	0,3199	0,4870	0,4797	0,2985	0,3899	0,4070	0,3614
05 Caravela	0,1834	0,2475	0,3175	0,0906	0,2083	0,2406	0,1847
06 Companhia Portuguesa de Resseguros	0,0570	0,1477	0,1537	0,0235	0,0642	0,0289	0,0463
07 Cossec	0,2016	0,1750	0,2908	0,0437	0,1852	0,2199	0,1694
08 CA Seguros	0,1280	0,1451	0,2497	0,1248	0,1432	0,1802	0,1244
09 Fidelidade	0,0534	0,1572	0,1465	0,0526	0,0776	0,1395	0,0677
10 Lusitânia	0,3599	0,4209	0,4279	-0,0657	0,3193	0,3602	0,3034
11 Mapfre Seguros Gerais	0,1546	0,1664	0,2777	0,0249	0,1597	0,1878	0,1397
12 GNB Seguros	0,3014	0,3611	0,4311	0,2913	0,3553	0,4276	0,3392
13 Mútua dos Pescadores	0,2817	0,3952	0,3901	0,0349	0,2413	0,2778	0,2270
14 Ocidental	0,6166	0,8524	0,8091	0,8271	0,6879	0,7674	0,7317
15 RNA Seguros	0,1416	0,2235	0,2185	0,0994	0,1615	0,2296	0,1586
16 Via Directa	0,1877	0,2207	0,3136	0,1575	0,1955	0,2384	0,1784
17 Victoria Seguros	0,3558	0,5221	0,5179	0,1595	0,3476	0,3643	0,3192

Analisando os índices “falso positivo” da Tabela 4.6, verifica-se que a seguradora 14 (Ocidental) se destaca das restantes, com uma média de índice “falso positivo” de 0,7560,

sendo, por isso, considerada a seguradora mais “falso positivo”, isto é, a seguradora que apresenta maior diferença entre a autoavaliação e a avaliação cruzada. De seguida, em termos médios, estão as seguradoras 04 (Ageas Portugal) e 03 (Aegon Santander), com um índice de 0,3919 e 0,3810, respetivamente.

Em sentido oposto, a seguradora que apresenta a média de índice “falso positivo” mais baixa, de 0,0745, é a seguradora 06 (Companhia Portuguesa de Resseguros), sendo, assim, a seguradora menos “falso positivo”, isto é, a seguradora que apresenta menor diferença entre a autoavaliação e a avaliação cruzada. A esta seguem-se as seguradoras 09 (Fidelidade) e 08 (CA Seguros), com um índice “falso positivo” médio de, respetivamente, 0,0992 e 0,1565.

Para avaliar as diferenças relativas aos valores de 0 e próximos de 0 nos pesos associados aos *inputs* e aos *outputs* obtidos pelos diferentes modelos, a Tabela 4.7 apresenta uma contagem desses valores a partir dos pesos obtidos por cada modelo e que constam dos apêndices A, B, C, D, E, F e G. Assim, na primeira coluna da tabela, são listados os modelos utilizados neste estudo, na segunda e terceira colunas são apresentados o número de pesos iguais a 0 para os *inputs* e *outputs*, respetivamente e, na quarta e quinta colunas, são apresentados o número de pesos iguais ou inferiores a $a \times 10^{-10}$, com $a \in [1,10[$, para os *inputs* e *outputs*, respetivamente.

Tabela 4.7 Número de valores iguais a zero e próximos de zero em cada modelo.

Modelos	Pesos iguais a 0		Pesos iguais ou inferiores a $a \times 10^{-10}$	
	<i>Inputs</i>	<i>Outputs</i>	<i>Inputs</i>	<i>Outputs</i>
CCR/MaxDEA	22	12	24	12
CCR/CPLEX	17	13	22	13
Benevolente	18	9	44	23
Agressivo	25	8	44	22
Wang e Chin (2010b)	17	2	23	2
Wang <i>et al.</i> (2011)	20	8	23	8
Nasseri e Kiaei (2018)	19	3	23	7

Da observação da Tabela 4.7, verifica-se que, neste estudo, relativamente aos pesos associados aos *outputs*, os modelos de objetivo secundário neutro são os que permitiram obter um menor número de pesos com valor 0 e com valor 0 ou próximo de 0, com destaque para o modelo

Wang e Chin (2010b), seguido do modelo Nasser e Kiaei (2018) e, posteriormente, do modelo Wang *et al.* (2011). O número de zeros apresentado por este último modelo é igual ao apresentado pelo modelo agressivo e menos um do que o apresentado pelo modelo benevolente para valores iguais a 0, mas, consideravelmente, inferior para valores iguais ou próximos de 0. Neste último caso, os modelos benevolente e agressivo permitiram obter um número superior ao obtido através do modelo CCR.

Relativamente aos *inputs*, todos os modelos permitiram obter um número de zeros não muito diferente entre si, com exceção do modelo agressivo e, em certa medida, do modelo CCR/MaxDEA. No entanto, quando se contabilizam também os valores próximos de 0, os modelos neutros permitiram obter o mesmo número, que é semelhante aos números obtidos pelo CCR/MaxDEA e CCR/CPLEX, mas, consideravelmente, inferior aos números obtidos com os modelos benevolente e agressivo.

Alterando os parâmetros no modelo Wang *et al.* (2011) para $\alpha = 0,8$ e $\beta = 0,2$, verifica-se que apenas o número de zeros nos pesos associados aos *outputs* é reduzido de 8 para 7, o mesmo acontecendo com os valores próximos de 0. Para os *inputs*, esses números mantêm-se. Adicionalmente, no que respeita aos *rankings*, esta alteração apenas tem implicação na troca de *rankings* entre as seguradoras 02 (ACP Mobilidade) e 15 (RNA Seguros) e entre as 04 (Ageas Portugal) e 17 (Victoria Seguros).

Posto isto, e face à análise dos resultados apresentados na Tabela 4.7, conclui-se que, neste estudo, os modelos de objetivo secundário neutro permitiram obter melhores resultados do que os modelos benevolente e agressivo. No que diz respeito aos modelos neutros, os modelos Wang *et al.* (2011) e Nasser e Kiaei (2018) não permitiram obter melhores resultados do que o modelo Wang e Chin (2010b), nomeadamente na redução do número de *inputs* com valor igual a 0, como acontece nos exemplos apresentados por aqueles autores. A razão para este último facto pode estar na ordem de grandeza e de variação dos dados.

5. Conclusões

Neste trabalho foi apresentado um estudo sobre três tipos de modelos de objetivo secundário, benevolente, agressivo e neutro, na avaliação cruzada no âmbito da metodologia DEA, de modo a apurar as diferenças entre esses três tipos de modelos e, principalmente, entre os modelos do tipo benevolente e agressivo, por um lado, e do tipo neutro, por outro.

Na avaliação clássica da metodologia DEA, ou seja, na avaliação feita através dos modelos clássicos desta metodologia, cada DMU escolhe um conjunto de pesos associados aos *inputs* e aos *outputs* que lhe são mais favoráveis, de modo a maximizar a sua eficiência relativa. Como se verificou, esta flexibilidade origina dois problemas, estreitamente relacionados, na aplicação desta avaliação. São eles a falta de poder de discriminação e a distribuição irrealista dos pesos.

Para ultrapassar esses dois problemas, vários métodos têm sido propostos, entre os quais o método da eficiência cruzada ou avaliação cruzada que, devido ao seu forte poder de discriminação, tem sido alvo de um grande número de aplicações, como se referiu neste trabalho. Contudo, a aplicação deste método, na sua forma tradicional, isto é, usando apenas modelos clássicos da DEA, apresenta uma limitação causada pela existência de soluções ótimas alternativas que originam diferentes *rankings*, dependendo do *software* utilizado.

Para ultrapassar esta limitação, ou seja, para escolher uma única solução ótima, entre essas soluções ótimas alternativas, tem sido proposta a resolução de um segundo tipo de modelo, designado de modelo de objetivo secundário. Sexton *et al.* (1986) e Doyle e Green (1994) introduziram um par de modelos deste tipo, designados de benevolente e agressivo, que otimizam os pesos associados aos *inputs* e *outputs* enquanto mantêm inalterável a eficiência obtida pelo modelo clássico CCR. No caso do modelo benevolente, cada DMU determina o conjunto de pesos que maximizam a sua eficiência e a eficiência média das restantes DMUs. No caso modelo agressivo, cada DMU determina o conjunto de pesos que maximizam a sua eficiência e minimizam a eficiência média das restantes DMUs. Adicionalmente, também outros modelos deste tipo foram propostos por Liang *et al.* (2008) e por Wang e Chin (2010a).

Os modelos de objetivo secundário benevolente ou agressivo colocam o decisor perante a dificuldade de decidir qual deles deve utilizar. Assim, por forma a contornar esta dificuldade, Wang e Chin (2010b) propuseram um modelo de objetivo secundário neutro, em que cada DMU escolhe um conjunto de pesos sem ter em conta o impacto dessa escolha nas restantes DMUs. Além disso, como os autores referem, e como ilustram os resultados obtidos no capítulo 4 deste trabalho, este modelo reduz o número de pesos associados aos *outputs* com

valor igual a 0 face aos modelos benevolente e agressivo. Outros modelos de objetivo secundário neutro foram também propostos por Wang *et al.* (2011) e Nasseri e Kiaei (2018) com o objetivo de reduzir, também, o número de pesos associados aos *inputs* com valor igual a 0. Apesar dessa redução se verificar no exemplo com sete DMUs apresentado pelos autores, ela não é tão evidente no caso prático que foi apresentado no capítulo 4. Tal poderá ser justificado pela ordem de grandeza dos valores relativos aos *inputs* e aos *outputs*.

Numa análise geral aos resultados, conclui-se que todos os modelos usados permitiram estabelecer um *ranking* completo sobre todas as DMUs e que os modelos de objetivo secundário neutro, particularmente, o modelo proposto por Wang e Chin (2010b), permitiram reduzir o número de pesos associados aos *outputs* com valor igual a 0 e, também em certa medida, os pesos associados aos *inputs* com valor igual a 0. Adicionalmente, considera-se relevante o facto de estes modelos (neutros) libertarem o decisor de ter de optar entre modelos benevolentes ou agressivos. Os resultados mostram ainda que, quando não se utilizam modelos de objetivo secundário, os *rankings* obtidos dependem do *software* utilizado.

Referências Bibliográficas

Adler, N., Friedman, L., & Sinuany-Stern, Z. (2002). Review of ranking methods in the data envelopment analysis context. *European Journal of Operational Research*, 140(2), 249-265.

Aldamak, A., & Zolfaghari, S. (2017). Review of efficiency ranking methods in data envelopment analysis. *Measurement*, 106, 161-172.

Allen, R., Athanassopoulos, A., Dyson, R. G., & Thanassoulis, E. (1997). Weights restrictions and value judgements in Data Envelopment Analysis: Evolution, development and future directions. *Annals of Operations Research*, 73, 13-34.

Angulo-Meza, L., & Lins, M. P. E. (2002). Review of Methods for Increasing Discrimination in Data Envelopment Analysis. *Annals of Operations Research*, 116, 225-242.

ASF. (2022). Portal da Autoridade de Supervisão de Seguros e Fundos de Pensões [Web site]. Disponível em <https://www.asf.com.pt/NR/exeres/278BF5A2-C8F9-4E52-9631-99779B037C93.htm>

Banker, R. D., Charnes, A., & Cooper, W. W. (1984). Some Models for Estimating Technical and Scale Inefficiencies in Data Envelopment Analysis. *Management Science*, 30(9), 1078-1092.

Charnes, A., & Cooper, W. W. (1962). Programming with Linear Fractional Functional. *Naval Research Logistics (NRL)*, 9, 181-186.

Charnes, A., Cooper, W. W., & Rhodes, E. (1978). Measuring the efficiency of decision making units. *European Journal of Operational Research*, 2(6), 429-444.

Cook, W. D., & Zhu, J. (2015). DEA Cobb–Douglas frontier and cross-efficiency. *Journal of the Operational Research Society*, 65(2), 265-268.

Cooper, W. W., Seiford, L. M., & Tone, K. (2007). *Data Envelopment Analysis: A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software* (2^a ed.). New York: Springer.

Cooper, W. W., Seiford, L. M., & Zhu, J. (2011). *Handbook on Data Envelopment Analysis* (2^a ed.). New York: Springer.

Doyle, J., & Green, R. (1994). Efficiency and Cross-Efficiency in DEA: Derivations, Meanings and Uses. *The Journal of the Operational Research Society*, 45(5), 567-578.

Guedes-Vieira, M. (2012). *Introdução aos Seguros*. [e-book]. Retrieved from

<https://books.google.com.br/books?hl=pt-PT&lr=&id=miQpAwAAQBAJ&oi=fnd&pg=PA9&dq=import%C3%A2ncia+dos+seguros&ots=4EbVdgSYxT&sig=qQ-JkEhkUEyw5c9JZh1rX-wAWSY#v=onepage&q=import%C3%A2ncia%20dos%20seguros&f=false>

Li, X. B., & Reeves, G. R. (1999). A multiple criteria approach to data envelopment analysis. *European Journal of Operational Research*, 115(3), 507-517.

Liang, L., Wu, J., Cook, W. D., & Zhu, J. (2008). Alternative secondary goals in DEA cross-efficiency evaluation. *International Journal of Production Economics*, 113(2), 1025-1030.

Lim, S., & Zhu, J. (2015). DEA cross-efficiency evaluation under variable returns to scale. *Journal of the Operational Research Society*, 66(3), 476-487.

Nasseri, S. H., & Kiaei, H. (2018). Allocation of weights using simultaneous optimization of inputs and outputs contribution in cross-efficiency evaluation of DEA. *Yugoslav Journal of Operations Research*, 28(4), 521-538.

Sexton, T. R., Silkman, R. H., & Hogan, A. J. (1986). Data Envelopment Analysis: Critique and Extensions. *New Directions for Program Evaluation*, (32), 73-105.

Talluri, S., & Sarkis, J. (1997). Extensions in efficiency measurement of alternate machine component grouping solutions via data envelopment analysis. *IEEE Transactions on Engineering Management*, 44(3), 299-304.

Wang, Y. M., & Chin, K. S. (2010a). Some alternative models for DEA cross-efficiency evaluation. *International Journal of Production Economics*, 128(1), 332-338.

Wang, Y. M., & Chin, K. S. (2010b). A neutral DEA model for cross-efficiency evaluation and its extension. *Expert Systems with Applications*, 37(5), 3666-3675.

Wang, Y. M., Chin, K. S., & Jiang, P. (2011). Weight determination in the cross-efficiency evaluation. *Computers & Industrial Engineering*, 61(3), 497-502.

Apêndices

Apêndice A – Pesos obtidos pelo modelo CCR/MaxDEA

DMUs (Seguradoras)	Pesos				
	<i>Input 1</i>	<i>Input 2</i>	<i>Input 3</i>	<i>Output 1</i>	<i>Output 2</i>
01 Abarca	4,00E-08	0	0	4,33E-08	0
02 ACP Mobilidade	9,87E-08	3,15E-07	5,32E-08	0	3,37E-06
03 Aegon Santander	1,83E-08	0	8,49E-09	3,23E-09	1,77E-07
04 Ageas Portugal	8,49E-10	8,59E-10	1,73E-09	0	2,23E-08
05 Caravela	1,00E-08	0	0	1,03E-08	1,04E-08
06 Companhia Portuguesa de Resseguros	6,61E-08	0	0	7,15E-08	0
07 Cosec	8,85E-09	0	0	9,57E-09	0
08 CA Seguros	4,66E-09	0	0	4,80E-09	4,82E-09
09 Fidelidade	5,17E-09	5,22E-09	1,05E-08	0	1,36E-07
10 Lusitânia	2,00E-09	0	0	2,17E-09	0
11 Mapfre Seguros Gerais	4,93E-09	0	0	5,08E-09	5,11E-09
12 GNB Seguros	3,52E-09	3,56E-09	7,18E-09	0	9,23E-08
13 Mútua dos Pescadores	2,67E-08	0	0	2,89E-08	0
14 Ocidental	1,48E-09	1,49E-09	3,02E-09	0	3,88E-08
15 RNA Seguros	5,27E-08	0	2,23E-08	0	5,38E-07
16 Via Directa	1,25E-08	0	0	1,29E-08	1,29E-08
17 Victoria Seguros	9,40E-09	0	0	1,02E-08	0

Apêndice B – Pesos obtidos pelo modelo CCR/CPLEX

DMUs (Seguradoras)	Pesos				
	<i>Input 1</i>	<i>Input 2</i>	<i>Input 3</i>	<i>Output 1</i>	<i>Output 2</i>
01 Abarca	4,05E-08	0	3,39E-09	4,37E-08	0
02 ACP Mobilidade	1,06E-07	3,19E-07	0	2,55E-08	3,01E-06
03 Aegon Santander	1,83E-08	0	8,49E-09	3,23E-09	1,77E-07
04 Ageas Portugal	0	2,25E-09	2,39E-09	1,61E-09	3,96E-08
05 Caravela	1,00E-08	0	0	1,03E-08	1,04E-08
06 Companhia Portuguesa de Resseguros	6,71E-08	5,15E-09	0	7,15E-08	0
07 Cosec	9,09E-09	6,98E-10	0	9,69E-09	0
08 CA Seguros	4,79E-09	0	4,01E-10	5,17E-09	0
09 Fidelidade	1,06E-08	6,23E-09	0	0	1,36E-07
10 Lusitânia	1,48E-09	4,26E-09	4,77E-09	2,34E-09	0
11 Mapfre Seguros Gerais	5,02E-09	0	4,21E-10	5,42E-09	0
12 GNB Seguros	3,52E-09	3,56E-09	7,18E-09	0	9,23E-08
13 Mútua dos Pescadores	2,67E-08	0	0	2,89E-08	0
14 Ocidental	3,36E-09	3,08E-10	1,54E-09	0	3,88E-08
15 RNA Seguros	8,56E-08	0	0	0	5,38E-07
16 Via Directa	1,30E-08	0	1,09E-09	1,41E-08	0
17 Victoria Seguros	9,61E-09	0	8,06E-10	1,04E-08	0

Apêndice C – Pesos obtidos pelo modelo benevolente

DMUs (Seguradoras)	Pesos				
	<i>Input 1</i>	<i>Input 2</i>	<i>Input 3</i>	<i>Output 1</i>	<i>Output 2</i>
01 Abarca	2,49E-09	6,68E-11	2,82E-10	2,70E-09	0
02 ACP Mobilidade	6,60E-09	1,99E-08	0	1,59E-09	1,88E-07
03 Aegon Santander	1,14E-09	0	5,31E-10	2,02E-10	1,11E-08
04 Ageas Portugal	5,31E-11	5,37E-11	1,08E-10	0	1,39E-09
05 Caravela	6,27E-10	0	0	6,46E-10	6,49E-10
06 Companhia Portuguesa de Resseguros	4,19E-09	3,22E-10	0	4,47E-09	0
07 Cosec	6,00E-10	2,78E-10	2,79E-10	5,84E-10	3,21E-10
08 CA Seguros	2,91E-10	0	0	3,00E-10	3,01E-10
09 Fidelidade	6,66E-10	3,89E-10	0	0	8,47E-09
10 Lusitânia	9,07E-11	2,38E-10	2,48E-10	1,28E-10	2,37E-10
11 Mapfre Seguros Gerais	3,08E-10	0	0	3,18E-10	3,19E-10
12 GNB Seguros	2,20E-10	2,22E-10	4,48E-10	0	5,77E-09
13 Mútua dos Pescadores	1,67E-09	0	0	1,80E-09	0
14 Ocidental	2,10E-10	1,93E-11	9,64E-11	0	2,43E-09
15 RNA Seguros	5,35E-09	0	0	0	3,36E-08
16 Via Directa	7,81E-10	0	0	8,04E-10	8,08E-10
17 Victoria Seguros	5,87E-10	0	0	6,36E-10	0

Apêndice D – Pesos obtidos pelo modelo agressivo

DMUs (Seguradoras)	Pesos				
	<i>Input 1</i>	<i>Input 2</i>	<i>Input 3</i>	<i>Output 1</i>	<i>Output 2</i>
01 Abarca	2,50E-09	0	0	2,70E-09	0
02 ACP Mobilidade	6,60E-09	1,99E-08	0	1,59E-09	1,88E-07
03 Aegon Santander	1,14E-09	0	5,31E-10	2,02E-10	1,11E-08
04 Ageas Portugal	5,31E-11	5,37E-11	1,08E-10	0	1,39E-09
05 Caravela	6,27E-10	0	0	6,46E-10	6,49E-10
06 Companhia Portuguesa de Resseguros	4,13E-09	0	0	4,47E-09	0
07 Cossec	5,53E-10	0	0	5,98E-10	0
08 CA Seguros	2,91E-10	0	0	3,00E-10	3,01E-10
09 Fidelidade	9,15E-10	9,19E-11	0	8,97E-10	2,19E-09
10 Lusitânia	1,25E-10	0	0	1,35E-10	0
11 Mapfre Seguros Gerais	3,08E-10	0	0	3,18E-10	3,19E-10
12 GNB Seguros	2,20E-10	2,22E-10	4,48E-10	0	5,77E-09
13 Mútua dos Pescadores	1,67E-09	0	0	1,80E-09	0
14 Ocidental	1,11E-10	2,38E-10	1,23E-10	2,74E-10	3,30E-09
15 RNA Seguros	5,35E-09	0	0	5,51E-09	5,54E-09
16 Via Directa	7,81E-10	0	0	8,04E-10	8,08E-10
17 Victoria Seguros	5,87E-10	0	0	6,36E-10	0

Apêndice E – Pesos obtidos pelo modelo Wang e Chin (2010b)

DMUs (Seguradoras)	Pesos				
	<i>Input 1</i>	<i>Input 2</i>	<i>Input 3</i>	<i>Output 1</i>	<i>Output 2</i>
01 Abarca	4,17E-08	8,36E-09	2,90E-08	3,34E-08	2,11E-07
02 ACP Mobilidade	1,06E-07	3,19E-07	0	2,55E-08	3,01E-06
03 Aegon Santander	1,83E-08	0	8,50E-09	3,23E-09	1,77E-07
04 Ageas Portugal	8,49E-10	8,59E-10	1,73E-09	0	2,23E-08
05 Caravela	1,00E-08	0	0	1,03E-08	1,04E-08
06 Companhia Portuguesa de Resseguros	5,32E-08	7,02E-08	0	3,58E-08	7,07E-07
07 Cosec	8,91E-09	1,92E-10	0	9,27E-09	6,64E-09
08 CA Seguros	4,66E-09	0	1,5907E-13	4,80E-09	4,82E-09
09 Fidelidade	1,33E-08	3,02E-09	0	9,68E-09	6,78E-08
10 Lusitânia	2,03E-09	7,59E-11	0	2,13E-09	1,08E-09
11 Mapfre Seguros Gerais	4,93E-09	0	0	5,08E-09	5,11E-09
12 GNB Seguros	3,52E-09	3,56E-09	7,18E-09	0	9,23E-08
13 Mútua dos Pescadores	2,71E-08	1,48E-09	0	2,86E-08	8,04E-09
14 Ocidental	6,83E-09	2,24E-09	3,79E-09	6,05E-09	1,94E-08
15 RNA Seguros	8,56E-08	0	0	5,27E-08	2,69E-07
16 Via Directa	1,25E-08	0	0	1,29E-08	1,29E-08
17 Victoria Seguros	9,48E-09	0	3,11E-10	9,95E-09	5,97E-09

Apêndice F – Pesos obtidos pelo modelo Wang *et al.* (2011)

DMUs (Seguradoras)	Pesos				
	<i>Input 1</i>	<i>Input 2</i>	<i>Input 3</i>	<i>Output 1</i>	<i>Output 2</i>
01 Abarca	4,00E-08	0	0	4,33E-08	0
02 ACP Mobilidade	1,06E-07	3,19E-07	0	2,55E-08	3,01E-06
03 Aegon Santander	1,83E-08	0	8,50E-09	3,23E-09	1,77E-07
04 Ageas Portugal	8,49E-10	8,59E-10	1,73E-09	0	2,23E-08
05 Caravela	1,00E-08	0	0	1,03E-08	1,04E-08
06 Companhia Portuguesa de Resseguros	2,20E-08	1,20E-07	1,0683E-06	3,58E-08	7,07E-07
07 Cosec	8,85E-09	0	0	9,57E-09	0
08 CA Seguros	4,66E-09	0	0	4,80E-09	4,82E-09
09 Fidelidade	1,16E-08	2,57E-09	3,58E-09	9,68E-09	6,78E-08
10 Lusitânia	2,00E-09	0	0	2,17E-09	0
11 Mapfre Seguros Gerais	4,93E-09	0	0	5,08E-09	5,11E-09
12 GNB Seguros	3,52E-09	3,56E-09	7,18E-09	0	9,23E-08
13 Mútua dos Pescadores	2,67E-08	0	0	2,89E-08	0
14 Ocidental	1,40E-09	8,83E-10	1,24E-08	0	3,88E-08
15 RNA Seguros	6,61E-08	5,55E-09	6,59E-09	5,27E-08	2,69E-07
16 Via Directa	1,25E-08	0	0	1,29E-08	1,29E-08
17 Victoria Seguros	9,40E-09	0	0	1,02E-08	0

Apêndice G – Pesos obtidos pelo modelo Nasserri e Kiaei (2018)

DMUs (Seguradoras)		Pesos				
		<i>Input 1</i>	<i>Input 2</i>	<i>Input 3</i>	<i>Output 1</i>	<i>Output 2</i>
01	Abarca	4,00E-08	0	0	4,33E-08	1,17E-11
02	ACP Mobilidade	1,03E-07	3,17E-07	1,72E-08	1,72E-08	3,12E-06
03	Aegon Santander	1,83E-08	0	8,50E-09	3,23E-09	1,77E-07
04	Ageas Portugal	8,49E-10	8,59E-10	1,73E-09	0	2,23E-08
05	Caravela	1,00E-08	0	0	1,03E-08	1,04E-08
06	Companhia Portuguesa de Resseguros	5,49E-08	5,49E-08	5,49E-08	5,49E-08	3,29E-07
07	Cosec	8,85E-09	0	0	9,57E-09	0
08	CA Seguros	4,66E-09	0	0	4,80E-09	4,81E-09
09	Fidelidade	1,11E-08	5,20E-09	6,05E-10	9,68E-09	6,78E-08
10	Lusitânia	2,00E-09	0	0	2,17E-09	1,03E-13
11	Mapfre Seguros Gerais	4,93E-09	0	0	5,08E-09	5,11E-09
12	GNB Seguros	3,52E-09	3,56E-09	7,18E-09	0	9,23E-08
13	Mútua dos Pescadores	2,67E-08	0	0	2,89E-08	6,98E-13
14	Ocidental	3,27E-09	2,42E-10	3,27E-09	2,03E-09	3,23E-08
15	RNA Seguros	4,93E-08	1,12E-08	1,12E-08	1,12E-08	4,81E-07
16	Via Directa	1,25E-08	0	0	1,29E-08	1,29E-08
17	Victoria Seguros	9,40E-09	0	0	1,02E-08	7,68E-13

Apêndice H – Matriz e índices das eficiências cruzadas obtidos pelo modelo CCR/MaxDEA

DMUs	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17
01	0,3998	0,8507	0,4856	0,3098	0,5115	1,0000	0,4985	0,2719	0,8873	0,2109	0,5367	0,3556	0,4020	0,3549	0,8778	0,3934	0,4602
02	0,1738	1,0000	0,5455	0,4041	0,3023	1,0000	0,3260	0,2032	1,0000	0,0826	0,3682	0,5515	0,2178	0,6124	0,7355	0,2563	0,1451
03	0,2168	0,6307	0,7776	0,3519	0,3818	0,6102	0,2630	0,2006	1,0000	0,0831	0,3375	0,4728	0,1737	1,0000	1,0000	0,2647	0,2020
04	0,2224	0,9293	0,7361	0,4792	0,3456	1,0000	0,3222	0,2191	1,0000	0,0802	0,3998	0,5708	0,2070	1,0000	0,7222	0,2594	0,1754
05	0,3982	0,8667	0,5505	0,3294	0,5278	1,0000	0,4961	0,2786	0,9655	0,2070	0,5407	0,3909	0,3953	0,4435	1,0000	0,4020	0,4541
06	0,3998	0,8507	0,4856	0,3098	0,5115	1,0000	0,4985	0,2719	0,8873	0,2109	0,5367	0,3556	0,4020	0,3549	0,8778	0,3934	0,4602
07	0,3998	0,8507	0,4856	0,3098	0,5115	1,0000	0,4985	0,2719	0,8873	0,2109	0,5367	0,3556	0,4020	0,3549	0,8778	0,3934	0,4602
08	0,3982	0,8667	0,5505	0,3294	0,5278	1,0000	0,4961	0,2786	0,9655	0,2070	0,5407	0,3909	0,3953	0,4435	1,0000	0,4020	0,4541
09	0,2224	0,9293	0,7361	0,4792	0,3456	1,0000	0,3222	0,2191	1,0000	0,0802	0,3998	0,5708	0,2070	1,0000	0,7222	0,2594	0,1754
10	0,3998	0,8507	0,4856	0,3098	0,5115	1,0000	0,4985	0,2719	0,8873	0,2109	0,5367	0,3556	0,4020	0,3549	0,8778	0,3934	0,4602
11	0,3982	0,8667	0,5505	0,3294	0,5278	1,0000	0,4961	0,2786	0,9655	0,2070	0,5408	0,3909	0,3953	0,4435	1,0000	0,4020	0,4541
12	0,2224	0,9293	0,7361	0,4792	0,3456	1,0000	0,3222	0,2191	1,0000	0,0802	0,3998	0,5708	0,2070	1,0000	0,7222	0,2594	0,1754
13	0,3998	0,8507	0,4856	0,3098	0,5115	1,0000	0,4985	0,2719	0,8873	0,2109	0,5367	0,3556	0,4020	0,3549	0,8778	0,3934	0,4602
14	0,2224	0,9293	0,7361	0,4792	0,3456	1,0000	0,3222	0,2191	1,0000	0,0802	0,3998	0,5708	0,2070	1,0000	0,7222	0,2594	0,1754
15	0,1652	0,5314	0,7576	0,3226	0,3364	0,4736	0,1994	0,1727	0,9531	0,0561	0,2734	0,4514	0,1191	1,0000	1,0000	0,2274	0,1440
16	0,3982	0,8667	0,5505	0,3294	0,5278	1,0000	0,4961	0,2786	0,9655	0,2070	0,5407	0,3909	0,3953	0,4435	1,0000	0,4020	0,4541
17	0,3998	0,8507	0,4856	0,3098	0,5115	1,0000	0,4985	0,2719	0,8873	0,2109	0,5367	0,3556	0,4020	0,3549	0,8778	0,3934	0,4602
Média	0,3198	0,8500	0,5965	0,3631	0,4460	0,9461	0,4149	0,2470	0,9493	0,1551	0,4683	0,4386	0,3136	0,6186	0,8760	0,3385	0,3394

Apêndice I – Matriz e índices das eficiências cruzadas obtidos pelo modelo CCR/CPLEX

DMUs	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17
01	0,3998	0,8386	0,4707	0,3058	0,4905	0,9965	0,4904	0,2644	0,8433	0,2057	0,5271	0,3448	0,3965	0,3512	0,7799	0,3775	0,4494
02	0,1822	1,0000	0,5150	0,3840	0,3072	1,0000	0,3467	0,2062	1,0000	0,0958	0,3783	0,5350	0,2434	0,5540	0,7509	0,2669	0,1610
03	0,2168	0,6306	0,7776	0,3519	0,3818	0,6101	0,2629	0,2006	1,0000	0,0831	0,3375	0,4728	0,1737	1,0000	1,0000	0,2647	0,2020
04	0,6463	1,0000	1,0000	0,4792	0,6782	1,0000	1,0000	0,5278	1,0000	0,0424	1,0000	1,0000	0,1115	1,0000	1,0000	0,5933	0,0257
05	0,3983	0,8668	0,5506	0,3294	0,5278	1,0000	0,4961	0,2786	0,9655	0,2070	0,5408	0,3909	0,3953	0,4436	1,0000	0,4020	0,4541
06	0,3735	0,8227	0,4353	0,2931	0,4679	0,9722	0,4788	0,2555	0,8219	0,2012	0,5097	0,3348	0,3883	0,3147	0,7629	0,3674	0,4275
07	0,3735	0,8227	0,4353	0,2931	0,4679	0,9722	0,4985	0,2555	0,8219	0,2012	0,5097	0,3349	0,3883	0,3147	0,7629	0,3674	0,4275
08	0,3942	0,8386	0,4707	0,3059	0,4905	0,9966	0,4904	0,2786	0,8433	0,2057	0,5271	0,3449	0,3965	0,3513	0,7799	0,3775	0,4494
09	0,1540	0,6136	0,6172	0,3219	0,3179	0,5377	0,2222	0,1774	1,0000	0,0623	0,2862	0,4757	0,1361	0,7028	1,0000	0,2395	0,1361
10	0,1646	0,5614	0,1202	0,1503	0,1362	0,9165	0,2841	0,1025	0,2424	0,2109	0,2559	0,1335	0,2614	0,0939	0,1187	0,1241	0,1620
11	0,3942	0,8386	0,4707	0,3058	0,4905	0,9965	0,4904	0,2644	0,8433	0,2057	0,5408	0,3448	0,3964	0,3512	0,7799	0,3775	0,4494
12	0,2224	0,9293	0,7361	0,4792	0,3456	1,0000	0,3222	0,2191	1,0000	0,0802	0,3998	0,5708	0,2070	1,0000	0,7222	0,2594	0,1754
13	0,3998	0,8506	0,4856	0,3098	0,5115	1,0000	0,4985	0,2719	0,8872	0,2109	0,5367	0,3556	0,4020	0,3549	0,8778	0,3934	0,4602
14	0,1752	0,5855	0,7689	0,3469	0,3487	0,5267	0,2180	0,1840	1,0000	0,0608	0,2951	0,4819	0,1311	1,0000	1,0000	0,2406	0,1516
15	0,1081	0,3480	0,5370	0,2099	0,2499	0,2941	0,1320	0,1206	0,7359	0,0386	0,1824	0,3191	0,0778	0,6426	1,0000	0,1684	0,0986
16	0,3942	0,8386	0,4707	0,3059	0,4905	0,9966	0,4904	0,2644	0,8433	0,2057	0,5271	0,3449	0,3965	0,3513	0,7799	0,4020	0,4494
17	0,3942	0,8386	0,4707	0,3059	0,4905	0,9966	0,4904	0,2644	0,8433	0,2057	0,5271	0,3449	0,3965	0,3513	0,7799	0,3775	0,4602
Média	0,3171	0,7779	0,5490	0,3222	0,4231	0,8713	0,4242	0,2433	0,8642	0,1484	0,4636	0,4194	0,2881	0,5398	0,8173	0,3294	0,3023

Apêndice J – Matriz e índices das eficiências cruzadas obtidos pelo modelo benevolente

DMUs	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17
01	0,3869	0,8330	0,4528	0,3016	0,4738	0,9954	0,4856	0,2589	0,8158	0,2026	0,5196	0,3376	0,3937	0,3387	0,7251	0,3673	0,4388
02	0,1822	1,0000	0,5150	0,3840	0,3072	1,0000	0,3467	0,2062	1,0000	0,0958	0,3783	0,5350	0,2434	0,5540	0,7509	0,2669	0,1610
03	0,2168	0,6307	0,7776	0,3519	0,3818	0,6101	0,2629	0,2006	1,0000	0,0831	0,3375	0,4728	0,1737	1,0000	1,0000	0,2647	0,2020
04	0,2224	0,9293	0,7361	0,4792	0,3456	1,0000	0,3222	0,2191	1,0000	0,0802	0,3998	0,5708	0,2070	1,0000	0,7222	0,2594	0,1754
05	0,3982	0,8667	0,5505	0,3294	0,5278	1,0000	0,4961	0,2786	0,9655	0,2070	0,5407	0,3909	0,3953	0,4435	1,0000	0,4020	0,4541
06	0,3735	0,8227	0,4353	0,2931	0,4679	1,0000	0,4788	0,2555	0,8219	0,2012	0,5097	0,3348	0,3883	0,3147	0,7629	0,3674	0,4275
07	0,2631	0,6694	0,2728	0,2253	0,2839	0,8447	0,4985	0,1763	0,5162	0,1449	0,3770	0,2399	0,3087	0,2172	0,3502	0,2363	0,2829
08	0,3983	0,8668	0,5505	0,3294	0,5278	1,0000	0,4961	0,2786	0,9654	0,2070	0,5408	0,3909	0,3953	0,4435	0,9999	0,4020	0,4541
09	0,1540	0,6136	0,6173	0,3219	0,3179	0,5377	0,2222	0,1774	1,0000	0,0623	0,2862	0,4757	0,1361	0,7028	1,0000	0,2395	0,1361
10	0,1719	0,6036	0,1587	0,1750	0,1544	0,9266	0,2948	0,1138	0,3020	0,2109	0,2728	0,1672	0,2640	0,1430	0,1619	0,1384	0,1679
11	0,3983	0,8668	0,5505	0,3294	0,5278	1,0000	0,4961	0,2786	0,9655	0,2070	0,5408	0,3909	0,3953	0,4435	1,0000	0,4020	0,4541
12	0,2224	0,9293	0,7360	0,4792	0,3456	1,0000	0,3222	0,2191	1,0000	0,0802	0,3998	0,5708	0,2070	1,0000	0,7222	0,2594	0,1754
13	0,3998	0,8507	0,4856	0,3098	0,5115	1,0000	0,4985	0,2719	0,8873	0,2109	0,5367	0,3556	0,4020	0,3549	0,8779	0,3934	0,4602
14	0,1752	0,5855	0,7689	0,3469	0,3487	0,5267	0,2180	0,1840	1,0000	0,0608	0,2951	0,4819	0,1311	1,0000	1,0000	0,2406	0,1516
15	0,1081	0,3480	0,5370	0,2099	0,2499	0,2941	0,1320	0,1206	0,7359	0,0386	0,1824	0,3191	0,0778	0,6426	1,0000	0,1684	0,0986
16	0,3982	0,8667	0,5505	0,3294	0,5278	1,0000	0,4961	0,2786	0,9655	0,2070	0,5407	0,3909	0,3953	0,4435	1,0000	0,4020	0,4541
17	0,3998	0,8506	0,4856	0,3098	0,5115	1,0000	0,4985	0,2719	0,8872	0,2109	0,5367	0,3556	0,4020	0,3549	0,8778	0,3934	0,4602
Média	0,2864	0,7725	0,5400	0,3238	0,4006	0,8668	0,3862	0,2229	0,8722	0,1477	0,4232	0,3988	0,2892	0,5528	0,8207	0,3061	0,3032

Apêndice K – Matriz e índices das eficiências cruzadas obtidos pelo modelo agressivo

DMUs	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17
01	0,3998	0,8507	0,4856	0,3098	0,5115	1,0000	0,4985	0,2719	0,8873	0,2109	0,5367	0,3556	0,4020	0,3549	0,8779	0,3934	0,4602
02	0,1822	1,0000	0,5150	0,3840	0,3072	1,0000	0,3467	0,2062	1,0000	0,0958	0,3783	0,5350	0,2434	0,5540	0,7509	0,2669	0,1610
03	0,2168	0,6308	0,7776	0,3520	0,3819	0,6103	0,2630	0,2006	1,0000	0,0831	0,3376	0,4728	0,1737	1,0000	0,9999	0,2647	0,2021
04	0,2224	0,9293	0,7361	0,4792	0,3456	1,0000	0,3222	0,2191	1,0000	0,0802	0,3998	0,5708	0,2070	1,0000	0,7222	0,2594	0,1754
05	0,3982	0,8667	0,5505	0,3294	0,5278	1,0000	0,4961	0,2786	0,9655	0,2070	0,5407	0,3909	0,3953	0,4435	1,0000	0,4020	0,4541
06	0,3998	0,8507	0,4856	0,3098	0,5115	1,0000	0,4985	0,2719	0,8873	0,2109	0,5367	0,3556	0,4020	0,3549	0,8779	0,3934	0,4602
07	0,3998	0,8506	0,4856	0,3098	0,5115	1,0000	0,4985	0,2719	0,8872	0,2109	0,5367	0,3556	0,4020	0,3549	0,8778	0,3934	0,4602
08	0,3983	0,8668	0,5505	0,3294	0,5278	1,0000	0,4961	0,2786	0,9655	0,2070	0,5408	0,3909	0,3953	0,4435	1,0000	0,4020	0,4541
09	0,3763	0,8811	0,5699	0,3419	0,5072	1,0000	0,4853	0,2746	1,0000	0,1972	0,5295	0,4180	0,3836	0,4938	1,0000	0,3921	0,4209
10	0,3998	0,8507	0,4856	0,3098	0,5115	1,0000	0,4985	0,2719	0,8873	0,2109	0,5367	0,3556	0,4020	0,3549	0,8779	0,3934	0,4602
11	0,3983	0,8668	0,5505	0,3294	0,5278	1,0000	0,4961	0,2786	0,9655	0,2070	0,5408	0,3909	0,3953	0,4435	1,0000	0,4020	0,4541
12	0,2224	0,9293	0,7360	0,4792	0,3456	1,0000	0,3222	0,2191	1,0000	0,0802	0,3998	0,5708	0,2070	1,0000	0,7222	0,2594	0,1754
13	0,3998	0,8507	0,4856	0,3098	0,5115	1,0000	0,4985	0,2719	0,8873	0,2109	0,5367	0,3556	0,4020	0,3549	0,8779	0,3934	0,4602
14	0,5657	1,0000	0,8710	0,7310	0,6327	1,0000	0,9085	0,0666	1,0000	1,0000	1,0000	0,8587	1,0000	0,9091	1,0000	0,0916	0,5802
15	0,3982	0,8667	0,5505	0,3294	0,5278	1,0000	0,4961	0,2786	0,9655	0,2070	0,5407	0,3909	0,3953	0,4435	1,0000	0,4020	0,4541
16	0,3982	0,8667	0,5505	0,3294	0,5278	1,0000	0,4961	0,2786	0,9655	0,2070	0,5407	0,3909	0,3953	0,4435	1,0000	0,4020	0,4541
17	0,3998	0,8506	0,4856	0,3098	0,5115	1,0000	0,4985	0,2719	0,8872	0,2109	0,5367	0,3556	0,4020	0,3549	0,8778	0,3934	0,4602
Média	0,3633	0,8711	0,5807	0,3690	0,4840	0,9771	0,4776	0,2477	0,9500	0,2257	0,5276	0,4420	0,3884	0,5473	0,9095	0,3473	0,3968

Apêndice L – Matriz e índices das eficiências cruzadas obtidos pelo modelo Wang e Chin (2010b)

DMUs	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17
01	0,3998	0,7879	0,5247	0,3311	0,3761	0,9300	0,3989	0,2212	0,7882	0,1462	0,4402	0,3808	0,3120	0,5722	0,6123	0,2888	0,3127
02	0,1822	1,0000	0,5150	0,3840	0,3072	1,0000	0,3467	0,2062	1,0000	0,0958	0,3783	0,5350	0,2434	0,5540	0,7509	0,2669	0,1610
03	0,2168	0,6308	0,7776	0,3520	0,3819	0,6103	0,2630	0,2006	1,0000	0,0831	0,3376	0,4728	0,1737	1,0000	0,9999	0,2647	0,2021
04	0,2224	0,9293	0,7360	0,4792	0,3456	1,0000	0,3222	0,2191	1,0000	0,0802	0,3998	0,5708	0,2070	1,0000	0,7222	0,2594	0,1754
05	0,3983	0,8668	0,5506	0,3294	0,5278	1,0000	0,4961	0,2786	0,9655	0,2070	0,5408	0,3909	0,3953	0,4436	1,0000	0,4020	0,4541
06	0,2444	0,9468	0,5283	0,3690	0,3622	1,0000	0,4041	0,2291	1,0000	0,1350	0,4342	0,4950	0,3052	0,5402	0,8024	0,3069	0,2406
07	0,3910	0,8542	0,5160	0,3189	0,5101	0,9921	0,4985	0,2719	0,9234	0,2053	0,5318	0,3747	0,3933	0,4046	0,9273	0,3919	0,4463
08	0,3982	0,8667	0,5505	0,3294	0,5278	1,0000	0,4961	0,2786	0,9654	0,2070	0,5407	0,3909	0,3953	0,4435	0,9999	0,4020	0,4541
09	0,3056	0,8054	0,5867	0,3358	0,4433	0,8720	0,4089	0,2442	1,0000	0,1571	0,4560	0,4359	0,3133	0,5696	1,0000	0,3435	0,3288
10	0,3859	0,8451	0,4918	0,3114	0,4976	0,9864	0,4875	0,2671	0,8935	0,2109	0,5254	0,3630	0,3919	0,3776	0,8773	0,3847	0,4408
11	0,3982	0,8668	0,5505	0,3294	0,5278	1,0000	0,4961	0,2786	0,9655	0,2070	0,5408	0,3909	0,3953	0,4435	1,0000	0,4020	0,4541
12	0,2224	0,9293	0,7361	0,4792	0,3456	1,0000	0,3222	0,2191	1,0000	0,0802	0,3998	0,5708	0,2070	1,0000	0,7222	0,2594	0,1754
13	0,3803	0,8351	0,4661	0,3032	0,4842	0,9801	0,4836	0,2619	0,8612	0,2028	0,5184	0,3504	0,4020	0,3489	0,8249	0,3769	0,4348
14	0,2854	0,7317	0,3941	0,2779	0,3318	0,8878	0,3861	0,1998	0,6587	0,1465	0,4102	0,3121	0,3115	1,0000	0,4894	0,2649	0,2991
15	0,2818	0,6585	0,5451	0,2814	0,4163	0,7166	0,3499	0,2152	0,8733	0,1394	0,3969	0,3621	0,2679	0,5235	1,0000	0,3082	0,3114
16	0,3983	0,8668	0,5506	0,3294	0,5278	1,0000	0,4961	0,2786	0,9655	0,2070	0,5408	0,3909	0,3953	0,4436	1,0000	0,4020	0,4541
17	0,3967	0,8556	0,5187	0,3201	0,5129	0,9986	0,4938	0,2730	0,9162	0,2065	0,5353	0,3726	0,3958	0,4072	0,9076	0,3922	0,4602
Média	0,3240	0,8398	0,5611	0,3448	0,4368	0,9397	0,4206	0,2437	0,9280	0,1598	0,4663	0,4211	0,3238	0,5925	0,8610	0,3363	0,3415

Apêndice M – Matriz e índices das eficiências cruzadas obtidos pelo modelo Wang *et al.* (2011)

DMUs	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17
01	0,3998	0,8507	0,4856	0,3098	0,5115	1,0000	0,4985	0,2719	0,8873	0,2109	0,5367	0,3556	0,4020	0,3549	0,8779	0,3934	0,4602
02	0,1822	1,0000	0,5150	0,3840	0,3072	1,0000	0,3467	0,2062	1,0000	0,0958	0,3783	0,5350	0,2434	0,5540	0,7509	0,2669	0,1610
03	0,2168	0,6308	0,7776	0,3520	0,3819	0,6103	0,2630	0,2006	1,0000	0,0831	0,3376	0,4728	0,1737	1,0000	0,9999	0,2647	0,2021
04	0,2224	0,9293	0,7360	0,4792	0,3456	1,0000	0,3222	0,2191	1,0000	0,0802	0,3998	0,5708	0,2070	1,0000	0,7222	0,2594	0,1754
05	0,3983	0,8668	0,5506	0,3294	0,5278	1,0000	0,4961	0,2786	0,9655	0,2070	0,5408	0,3909	0,3953	0,4436	1,0000	0,4020	0,4541
06	0,0953	0,3154	0,1364	0,1460	0,0676	1,0000	0,1242	0,0515	0,1466	0,0304	0,1308	0,1014	0,1050	0,2731	0,0782	0,0514	0,0657
07	0,3998	0,8507	0,4856	0,3098	0,5115	1,0000	0,4985	0,2719	0,8873	0,2109	0,5367	0,3556	0,4020	0,3549	0,8779	0,3934	0,4602
08	0,3982	0,8668	0,5505	0,3294	0,5278	1,0000	0,4961	0,2786	0,9655	0,2070	0,5408	0,3909	0,3953	0,4435	1,0000	0,4020	0,4541
09	0,3399	0,8903	0,6258	0,3741	0,4567	1,0000	0,4493	0,2600	1,0000	0,1682	0,4994	0,4599	0,3469	0,6445	0,8729	0,3522	0,3555
10	0,3998	0,8506	0,4856	0,3098	0,5114	1,0000	0,4985	0,2719	0,8872	0,2109	0,5367	0,3556	0,4020	0,3549	0,8778	0,3933	0,4602
11	0,3982	0,8668	0,5505	0,3294	0,5278	1,0000	0,4961	0,2786	0,9655	0,2070	0,5408	0,3909	0,3953	0,4435	1,0000	0,4020	0,4541
12	0,2224	0,9293	0,7361	0,4792	0,3456	1,0000	0,3222	0,2191	1,0000	0,0802	0,3998	0,5708	0,2070	1,0000	0,7222	0,2594	0,1754
13	0,3998	0,8506	0,4856	0,3098	0,5115	1,0000	0,4985	0,2719	0,8872	0,2109	0,5367	0,3556	0,4020	0,3549	0,8778	0,3934	0,4602
14	0,1726	0,6160	0,4748	0,3649	0,1848	1,0000	0,2093	0,1262	0,4739	0,0455	0,2629	0,3134	0,1397	1,0000	0,2907	0,1302	0,1130
15	0,3392	0,8224	0,6161	0,3438	0,4752	0,9115	0,4327	0,2565	1,0000	0,1695	0,4840	0,4314	0,3343	0,5982	1,0000	0,3599	0,3686
16	0,3983	0,8668	0,5506	0,3294	0,5278	1,0000	0,4961	0,2786	0,9655	0,2070	0,5408	0,3909	0,3953	0,4436	1,0000	0,4020	0,4541
17	0,3998	0,8506	0,4856	0,3098	0,5114	1,0000	0,4985	0,2719	0,8872	0,2109	0,5367	0,3556	0,4020	0,3549	0,8778	0,3933	0,4602
Média	0,3166	0,8149	0,5440	0,3406	0,4255	0,9719	0,4086	0,2361	0,8776	0,1550	0,4552	0,3998	0,3146	0,5658	0,8133	0,3246	0,3373

Apêndice N – Matriz e índices das eficiências cruzadas obtidos pelo modelo Nasseri e Kiaei (2018)

DMUs	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17
01	0,3998	0,8507	0,4857	0,3099	0,5115	1,0000	0,4985	0,2719	0,8873	0,2109	0,5367	0,3556	0,4020	0,3549	0,8779	0,3934	0,4602
02	0,1795	1,0000	0,5250	0,3905	0,3056	1,0000	0,3400	0,2052	1,0000	0,0915	0,3751	0,5405	0,2351	0,5727	0,7456	0,2634	0,1558
03	0,2168	0,6308	0,7776	0,3520	0,3819	0,6103	0,2630	0,2006	1,0000	0,0831	0,3376	0,4728	0,1737	1,0000	0,9999	0,2647	0,2021
04	0,2224	0,9293	0,7360	0,4792	0,3456	1,0000	0,3222	0,2191	1,0000	0,0802	0,3998	0,5708	0,2070	1,0000	0,7222	0,2594	0,1754
05	0,3983	0,8668	0,5506	0,3294	0,5278	1,0000	0,4961	0,2786	0,9655	0,2070	0,5408	0,3909	0,3953	0,4436	1,0000	0,4020	0,4541
06	0,2530	0,7961	0,3611	0,2890	0,2843	1,0000	0,3852	0,1868	0,6238	0,1351	0,3955	0,3223	0,3148	0,3674	0,4173	0,2378	0,2517
07	0,3998	0,8507	0,4856	0,3098	0,5115	1,0000	0,4985	0,2719	0,8873	0,2109	0,5367	0,3556	0,4020	0,3549	0,8778	0,3934	0,4602
08	0,3984	0,8671	0,5506	0,3295	0,5280	1,0000	0,4963	0,2786	0,9656	0,2071	0,5410	0,3910	0,3955	0,4434	1,0000	0,4022	0,4543
09	0,3164	0,9047	0,5587	0,3576	0,4351	1,0000	0,4506	0,2541	1,0000	0,1695	0,4886	0,4552	0,3508	0,5379	0,8807	0,3508	0,3350
10	0,3998	0,8506	0,4856	0,3098	0,5114	1,0000	0,4985	0,2719	0,8872	0,2109	0,5367	0,3556	0,4020	0,3549	0,8778	0,3933	0,4602
11	0,3982	0,8668	0,5506	0,3294	0,5278	1,0000	0,4961	0,2786	0,9655	0,2070	0,5408	0,3909	0,3953	0,4436	1,0000	0,4020	0,4541
12	0,2224	0,9293	0,7361	0,4792	0,3456	1,0000	0,3222	0,2191	1,0000	0,0802	0,3998	0,5708	0,2070	1,0000	0,7222	0,2594	0,1754
13	0,3998	0,8506	0,4856	0,3098	0,5115	1,0000	0,4985	0,2719	0,8872	0,2109	0,5367	0,3556	0,4020	0,3549	0,8778	0,3934	0,4602
14	0,3319	0,8836	0,7707	0,4312	0,4382	1,0000	0,4098	0,2527	1,0000	0,1383	0,4810	0,5045	0,3024	1,0000	0,7953	0,3193	0,3160
15	0,2102	0,6580	0,6783	0,3381	0,3690	0,6368	0,2766	0,2004	1,0000	0,0897	0,3417	0,4671	0,1875	0,7903	1,0000	0,2699	0,2010
16	0,3983	0,8668	0,5506	0,3294	0,5278	1,0000	0,4961	0,2786	0,9655	0,2070	0,5408	0,3909	0,3953	0,4436	1,0000	0,4020	0,4541
17	0,3998	0,8506	0,4856	0,3098	0,5114	1,0000	0,4985	0,2719	0,8872	0,2109	0,5367	0,3556	0,4020	0,3549	0,8778	0,3933	0,4602
Média	0,3262	0,8501	0,5749	0,3520	0,4455	0,9557	0,4263	0,2478	0,9366	0,1618	0,4745	0,4262	0,3276	0,5775	0,8631	0,3412	0,3488