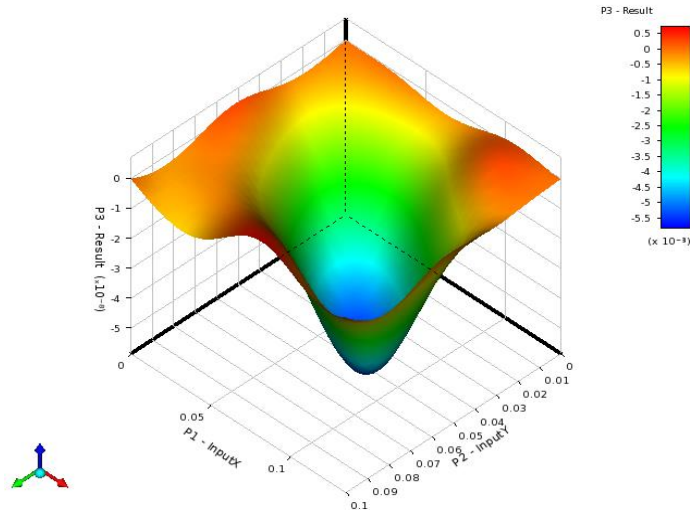




ISEL

INSTITUTO SUPERIOR DE ENGENHARIA DE LISBOA

Área Departamental de Engenharia Mecânica



# OTIMIZAÇÃO DE PLACAS COMPÓSITAS LAMINADAS UTILIZANDO REDES NEURONAIS E ENXAMES DE PARTÍCULAS

SÉRGIO MIGUEL DUARTE DA SILVA

(Licenciado em Engenharia Mecânica)

Trabalho Final de Mestrado para obtenção do grau de  
Mestre em Engenharia Mecânica

Orientadora:

Doutora Maria Amélia Ramos Loja

Júri:

Presidente: Doutor João Manuel Ferreira Calado

Vogais:

Doutor João Filipe de Almeida Milho

Doutora Maria Amélia Ramos Loja

Dezembro 2015



INSTITUTO SUPERIOR DE ENGENHARIA DE LISBOA

**Área Departamental de Engenharia Mecânica**

**OTIMIZAÇÃO DE PLACAS COMPÓSITAS  
LAMINADAS UTILIZANDO REDES NEURONAIS E  
ENXAMES DE PARTÍCULAS**

SÉRGIO MIGUEL DUARTE DA SILVA

(Licenciado em Engenharia Mecânica)

Trabalho Final de Mestrado para obtenção do grau de  
Mestre em Engenharia Mecânica

Orientadora:

Doutora Maria Amélia Ramos Loja

Júri:

Presidente: Doutor João Manuel Ferreira Calado

Vogais:

Doutor João Filipe de Almeida Milho

Doutora Maria Amélia Ramos Loja

**Dezembro 2015**

## **Dedicatória**

Dedico todo o meu trabalho realizado à minha família, em especial aos meus pais, por todo o amor e carinho que me deram durante todo o meu percurso académico, e dedico ainda à Sara Apolo, aos meus amigos de infância e aos outros que fui conhecendo ao longo da minha vida pessoal e profissional, por todo o companheirismo e bons momentos que me proporcionaram.

Sinto-me grato todos os dias por ter uma família e amigos como vocês.

A todos dedico com bastante orgulho e apreço esta dissertação.

Muito obrigado por tudo!

14 de Setembro de 2015

Sérgio Miguel Duarte da Silva

## Agradecimentos

Agradeço aos meus pais pela compreensão e apoio durante os dois ciclos académicos. Desde do primeiro dia da licenciatura até ao último de mestrado foram sempre as pessoas das quais nunca me deixei de orgulhar. Obrigado por tudo.

Agradeço a todas as pessoas da comunidade ativa dos fóruns de *MathWorks*© que continuam a prestar apoio e a disponibilizar funções em *MatLab*© para realizar pequenas tarefas que auxiliam bastante os utilizadores. A todas as pessoas que o continuam a fazer de modo voluntário e positivo, muito obrigado e continuação de um excelente trabalho.

Agradeço ao José Marcão pela verdadeira amizade com quem tenho o prazer de privar desde dos tempos da primária. Obrigado Zé.

Agradeço também ao Bruno Silva, ao David Duarte, ao Henrique Almeida, à Inês Marques, ao Fábio Damásio, ao Fábio Alves, ao João Paulos, ao José Berardo, ao João Bernardino e ao Miguel Carvalho, por todos os momentos que com eles passei desde do meu primeiro dia no ISEL e por continuarem a ser pessoas pelas quais tenho um grande carinho e apreço. Meus queridos amigos, muito obrigado.

Agradeço ao Sérgio André pelo apoio na resolução de problemas em *MatLab*© e na companhia durante os serões a trabalhar cada um na sua dissertação. Aproveito para agradecer de uma forma geral a toda a equipa do ISEL Formula Student.

Agradeço a todos os docentes que contribuíram para a minha formação, em especial agradeço ao Professor Tiago Silva e à Professora Alda Carvalho pela forma como sempre estiveram disponíveis para me ajudar e pelos seus contributos enquanto excelentes profissionais que o são.

A todas as pessoas que de certa forma contribuíram para a conclusão desta dissertação o meu sincero agradecimento.

Por último mas não menos importante, agradeço à minha orientadora Professora Amélia Loja por todo o apoio e orientação que me deu na resolução de problemas, bem como pela grande contribuição que teve na minha formação durante este longo percurso.

Muito obrigado a todos!

## Resumo

No universo da engenharia é comum estar-se em contacto com componentes que são por definição elementos estruturais do tipo casca ou placa. Em qualquer dos casos podemos afirmar da sua grande aplicabilidade em componentes das indústrias de aeronáutica, aeroespacial, e automóvel, onde são cada vez mais utilizados os materiais compósitos. É então relevante estudar-se o comportamento mecânico de estruturas de placas compósitas solicitadas mecanicamente, bem como otimizar esse comportamento, sendo este o objetivo principal desta dissertação. Neste âmbito foram desenvolvidos metamodelos com base em métodos de interpolação como o Kriging e as Redes Neurais de Base Radial para estimar propriedades mecânicas (com dados de treino gerados pelo *PREMAT*) e deformadas máximas e frequências fundamentais (com dados de treino obtidos numericamente através dos modelos criados no *Ansys*®). Diferentes configurações de placas compósitas foram estudadas, com a metamodelação e a otimização implementadas computacionalmente no *MatLab*®. Foram realizadas simulações estáticas e dinâmicas em modelos computacionais de placas compósitas, no *Ansys*®, e foram formulados e resolvidos problemas de otimização não linear com o objetivo de encontrar os valores ótimos das variáveis de entrada dos problemas (fração de volume de fibra  $V_f$  e relação da elipse da seção transversal da fibra  $a/b$ ), com recurso a algoritmos de Otimização de Enxame de Partículas (PSO). Após o estudo da minimização da máxima deformada transversal (análise estática linear) e da maximização da frequência fundamental (análise dinâmica de vibrações livres) retornou-se aos metamodelos com base nos métodos de interpolação mencionados para estimar as propriedades mecânicas do material compósito de fibra de vidro com matriz epoxídica. Esta metodologia permite assim chegar à conclusão de quais deverão ser as propriedades mecânicas do material em causa para os valores ótimos da fração de volume de fibra e da relação  $a/b$  obtidos num dado processo de otimização.

## Palavras-chave

Materiais Compósitos, Otimização, Metamodelos, Homogeneização, Ansys, Estimação, Kriging, Rede Neuronal, Funções de Base Radial, Otimização de Enxame de Partículas, Otimização Não Linear

## Abstract

In the engineering world are often found components that are shells or plates in their primary definition. These last ones are usually found in aeronautics, aerospace and automotive engineering, and more and more often those parts are produced in composites materials. Therefore it is relevant to study the optimization of composite plate's structures which are mechanically solicited, being this the primary goal of this thesis. Having said that metamodels were developed, based on interpolation methods such as Kriging and the Neural networks of radial base (RBF), to estimate the mechanical properties (with data obtained from Ansys©) for each composite plate configuration studied, implemented in MatLab©. Static and dynamic simulations were conducted on the computational models of composites plates in Ansys©, and nonlinear optimization problems, of minimization and maximization types were formulated and solved with the goal of finding the optimum values of the input variables of the problems (fibre volume fraction  $V_f$  and ratio of the ellipse of the cross section of the fibre  $a/b$ ), using swarm particles optimization algorithms (PSO). After the minimization of the maximum transversal displacement study (Static analysis) and the maximization of the fundamental frequency (dynamic analysis), metamodels based on interpolation methods mentioned above were again used to estimate the mechanical properties of the composite material of fibre glass with epoxy matrix.

This method allowed to reach the conclusion of which mechanical properties the material must have for the optimum values obtained from the fraction of fibre volume and the  $a/b$  relation to optimally solve the issues approached.

## Keywords

Composite Materials, Optimization, Metamodels, Homogenization, Ansys, Estimation, Kriging, Radial Basis Functions, Neuronal Network, Particle Swarm Optimization, Swarm Optimization, Nonlinear Optimization

## Abreviaturas/Nomenclatura

### Lista de Abreviaturas

ACO - Ant Colony Optimization  
AE - Absolute Error  
AEM – Asymptotical Expansion Method  
ALO - Ant Lion Optimizer  
APDL – Ansys parametric Design Language  
BA - Bat Algorithm  
BLUP - Best Linear Unbiased Prediction  
CFRP – Carbon Fiber Reinforced Polymer  
CLPT - Classic Laminate Plate Theory  
CUB – Cúbica  
DE - Differential Evolution  
FSDT - First Shear Deformation Theory  
GA – Generic Algorithms  
GE - Gaussiana Exponencial  
IDW - Inverse Distance Weighting  
LIN – Linear  
MAE – Mean Absolute Error  
MEF – Método de Elementos Finitos  
MLP - Multi Layer Perceptron  
MQ – MultiQuadrática  
MRE – Mean Relative Error  
MSE – Mean Square Error  
NRMSE – Normalized Root Mean Square Error  
OU – Ornstein Uhlenbeck  
PRG – Processo de Regressão Gaussiana  
PSO – Particle Swarm Optimization  
RAE – Representative Area Element  
RBFN – Radial Basis Function Network  
RE – Relative Error

RMSE – Root Mean Square Error

RNA - Rede Neuronal Artificial

RoM – Rules of Mixtures

RVE – Representative Volume Element

TP – Thin Plate

UD - Unidirectional

VAMUCH – Variational Asymptotical Method for Unit Cell Homogenization

VBA - Visual Basic for Applications

---

## Índice

1. Introdução .....	1
1.1. Objetivos .....	1
1.2. Estrutura da dissertação .....	2
1.3. A abordagem ao problema.....	3
2. Estado de Arte.....	5
3. Materiais Compósitos .....	10
3.1. Material compósito laminado com reforço de fibras longas .....	11
3.1.1. Teorias de Laminados .....	13
3.2. Propriedades e características do compósito .....	17
4. Metamodelação através de métodos de interpolação.....	23
4.1. Métodos de Interpolação Espacial.....	23
4.2. Kriging - Processo de Regressão Gaussiano .....	25
4.2.1. Formulação matemática de Kriging .....	26
4.2.2. Funções de covariância .....	31
4.3. Redes Neurais Artificiais com Funções de Base Radial .....	32
4.3.1. Formulação do treino da RBFN .....	34
4.3.2. Variações da RBFN Exata .....	36
4.4. Indicadores de desempenho.....	42
5. Modelação e simulação no <i>Ansys© Workbench R14.5</i> .....	43
5.1. Modelação de placas compósitas laminadas .....	43
5.1.1. Etapas da modelação .....	44
5.1.2. Elemento <i>Shell181</i> .....	54
6. Otimização .....	57
6.1. Otimização de nuvem/enxame .....	57
6.2. Formulação matemática e algoritmo .....	58
6.2.1. Estrutura base e alterações ao algoritmo de PSO.....	59
6.2.2. Influência dos fatores de controlo .....	63
6.3. Funções de teste.....	65
7. Aplicações.....	66
7.1. Análise das propriedades mecânicas obtidas no PREMAT .....	67
7.2. Validação dos modelos do Ansys©.....	79

---

7.2.1. Validação do modelo SS1 com $a/h$ igual a 10 .....	89
7.2.2. Validação do modelo SS1 com $a/h$ igual a 20 .....	92
7.2.3. Validação do modelo SS1 com $a/h$ igual a 100 .....	95
7.2.4. Análise dos resultados obtidos .....	98
7.3. Aplicações nos métodos de interpolação.....	100
7.3.1. Igualdade matemática entre os métodos de interpolação RBF e Kriging .....	103
7.3.2. Aplicação do método de RBF para criar um metamodelo para as propriedades elásticas.....	105
7.3.3. Aplicação do método de RBF para criar um metamodelo para análises mecânicas estáticas e dinâmicas.....	113
7.4. Análise do desempenho dos algoritmos de otimização.....	118
7.4.1. Resultados da análise das funções de testes .....	120
7.4.2. Seleção do algoritmo com melhor desempenho.....	124
7.5. Casos de estudo .....	125
7.5.1. Caso A – Minimização da deformada transversal máxima.....	129
7.5.2. Caso B – Maximização da frequência fundamental.....	135
Conclusão .....	140
Desenvolvimentos Futuros .....	144
Referências Bibliográficas.....	146
Apêndice.....	151
Apêndice A1 – Tabela propriedades compósitas - Parte 1 .....	152
Apêndice A2 – Tabela propriedades compósitas - Parte 2.....	157
Apêndice B – Pseudo Algoritmo para obtenção de valores $a/b$ válidos para cada fração de volume de fibra.....	162
Apêndice C – Validação dos modelos SS1 com $a/h$ igual a 10, a 20 e a 100.....	163
Apêndice D – Funções de teste .....	175
Apêndice E – Resultados da minimização das funções de teste.....	185
Apêndice F – Características do computador pessoal .....	201
Apêndice G – Teste do método de interpolação das propriedades mecânicas do compósito pela Rede RBF.....	202
Anexos.....	207

## Índice de Figuras

Figura 1.1 – Metodologia de abordagem do problema nas aplicações aos casos de estudo .....	4
Figura 3.1 – Classificação do material compósito quanto ao tipo de matriz (ASM International 2001) .....	10
Figura 3.2 – Classificação do material compósito quanto ao tipo de reforço (Adaptado) (Callister Jr., 1985) (ASM International 2001) .....	10
Figura 3.3 – Ilustrações do aspeto visual de partículas a), fibras curtas b), fibras longas c), e tecidos d) (Adaptado) (CCSF, 2014) .....	11
Figura 3.4 – Malhas de fibras de vidro, carbono e kevlar (da esquerda para a direita)..	12
Figura 3.5 – Secção transversal de uma lâmina com fibras unidireccionais .....	12
Figura 3.6 – Exemplo de laminado composto por camadas com diferentes orientações em relação ao referencial do laminado (Adaptado da Figura 2.1.3) (ASM International 2001) .....	12
Figura 3.7 – Secção transversal, no plano xz, do exemplo de laminado na Figura 3.6..	13
Figura 3.8 – Bordos deformados e não deformados nas teorias de CLPT e FSDT (Reddy 2013).....	14
Figura 3.9 - Condição de fronteira simplesmente apoiada (SS1) .....	17
Figura 3.10 - a) Variação de $E_1$ b)Variação de $E_2$ e $E_3$ , como funções da relação de aspeto da fibra e da fração de volume (Extraído) (Loja 2012) .....	19
Figura 3.11 – Representação 2D da célula unitária, micro escala, composta pela fibra (B) e a matriz (A).....	20
Figura 3.12 - Representação 3D da célula unitária, micro escala, composta pela fibra (preto) e a matriz (branco) .....	21

---

Figura 3.13 – Escalas de estudo de materiais compósitos laminados. (Adaptado (XComposites).....	21
Figura 4.1 – Esquema genérico simplificado da relação entre as entradas e saídas de um dado processo (metamodelo).....	23
Figura 4.2 – Representação da relação de distância entre os pontos amostrais (pretos) e o ponto em cálculo (vermelho).....	24
Figura 4.3 – Função gaussiana com vários valores de <i>spread</i> .....	32
Figura 4.4 – Exemplo de arquitetura de uma RBFN, adaptado de (Fazio 2013) .....	33
Figura 4.5 – Esquema da RBFN com <i>bias</i> constante .....	38
Figura 4.6 - Esquema da RBFN com <i>bias</i> variável .....	40
Figura 5.1 – Etapas até à solução no <i>Ansys</i> © .....	44
Figura 5.2 – Geometria exemplar de uma placa e respetiva árvore de operações e de detalhes de esboços.....	45
Figura 5.3 – Definição da sequência de empilhamento do laminado no <i>Ansys</i> ©.....	47
Figura 5.4 - Laminado com <i>dropped layers</i> .....	47
Figura 5.5 – <i>Script</i> com comandos <i>APDL</i> para definição do laminado da placa .....	48
Figura 5.6 – Definição da malha de uma placa com iguais elementos, no <i>Static Structural</i> do <i>Ansys</i> ©.....	49
Figura 5.7 – Análise da relação de aspeto dos elementos usados na discretização, no <i>Ansys</i> ©.....	50
Figura 5.8 – Distribuição da pressão ao longo da direção <i>y</i> , no <i>Static Structural</i> do <i>Ansys</i> © .....	51
Figura 5.9 – Expressão, gráfico e valores discretos da distribuição da pressão do exemplo na Figura 5.8.....	51

---

Figura 5.10 – Exemplo de um esquema de um projeto no <i>Workbench</i> do <i>Ansys</i> ©.....	52
Figura 5.11 – Detalhes das opções da análise estática .....	52
Figura 5.12 - Exemplo de projeto multianálise, análise estática e dinâmica às vibrações livres .....	53
Figura 5.13 – Exemplo do <i>Parameter Set</i> do <i>Ansys</i> © com parâmetros de entrada e de saída.....	53
Figura 5.14 – Exemplo de gráfico de relação de parâmetros de entrada e saída, no <i>Parameter Set</i> do <i>Ansys</i> ©.....	54
Figura 5.15 – Geometria do elemento <i>Shell181</i> .....	54
Figura 5.16 – a) Placa Isotrópica, b) Placa ortotrópica .....	55
Figura 6.1 – Exemplo de minimização de uma função objetivo expressa equação (4.5)60	
Figura 7.1 – Extrato da tabela em <i>Microsoft Excel</i> © com os dados de entrada e resultados da análise das RVE's no <i>PREMAT/POSTMAT</i> .....	67
Figura 7.2 – Célula unitária com as configurações amostrais de a/b para volume de fibra de 50% e 52.5% (da esquerda para a direita). .....	69
Figura 7.3 - Célula unitária com as configurações amostrais de a/b para volume de fibra de 55% e 57.5% (da esquerda para a direita). .....	70
Figura 7.4 - Célula unitária com as configurações amostrais de a/b para volume de fibra de 60% e 62.5% (da esquerda para a direita). .....	70
Figura 7.5 - Célula unitária com as configurações amostrais de a/b para volume de fibra de 65% e 67.5% (da esquerda para a direita). .....	70
Figura 7.6 - Célula unitária com as configurações amostrais de a/b para volume de fibra de 70%. .....	71
Figura 7.7 – Extrato do ficheiro de resultados proveniente do programa <i>PREMAT</i> para as 31 configurações do volume elementar repetitivo, para 50% de volume de fibra. ....	72

---

Figura 7.8 – Valores do módulo de elasticidade na direção x, $E_1$ (em Pa), para cada fração de volume de fibra analisada e relações de a/b válidas (valores obtidos no PREMAT)	72
Figura 7.9 – Valores do módulos de elasticidade na direção y, $E_2$ (esquerda), e na direção z $E_3$ (direita), para cada fração de volume de fibra analisada e relações de a/b válidas (valores obtidos no PREMAT).....	74
Figura 7.10 – Valores do módulos de corte $G_{12}$ (esquerda), e $G_{31}$ (direita), para cada fração de volume de fibra analisada e relações de a/b válidas (valores obtidos no PREMAT).....	75
Figura 7.11 - Valores do módulos de corte $G_{23}$ , para cada fração de volume de fibra analisada e relações de a/b válidas (valores obtidos no PREMAT) .....	75
Figura 7.12 - Valores dos coeficientes de Poisson no plano yx ( $\nu_{21}$ à esquerda), e no plano zx ( $\nu_{31}$ à direita), para cada fração de volume de fibra analisada e relações de a/b válidas (valores obtidos no PREMAT).....	76
Figura 7.13 - Valores dos coeficientes de Poisson no plano zy ( $\nu_{32}$ ), para cada fração de volume de fibra analisada e relações de a/b válidas (valores obtidos no PREMAT).....	76
Figura 7.14 – Secção transversal da célula unitária RVE com cotas relevantes para o cálculo do constrangimento relativo, calculado através dos valores de a/b usados no PREMAT.....	78
Figura 7.15 – Fórmulas para adimensionalização da deformada transversal e das tensões para as placas ortotrópica $[0^\circ]$ e $[0^\circ/90^\circ]$ .....	79
Figura 7.16 – Gráfico da convergência do valor de máxima deformada transversal (em metros).....	80
Figura 7.17 – Informação pós-simulação para o modelo SS1 com a/h igual a 10 e o empilhamento a $0^\circ$ (Parte 1) .....	81
Figura 7.18 - Informação pós-simulação para o modelo SS1 com a/h igual a 10 e o empilhamento a $0^\circ$ (Parte 2) .....	82

---

Figura 7.19 – <i>Script</i> de APDL com a alteração dos coeficientes $E_{11}$ , $E_{12}$ e $E_{22}$ , conforme equação (7.7) .....	82
Figura 7.20 - <i>Script</i> de APDL com a alteração dos coeficientes $E_{11}$ , $E_{22}$ e $E_{12}$ multiplicações pelo fator $K$ , conforme equação (7.8) .....	83
Figura 7.21 – Informação pós simulação de uma placa compósita ortotrópica, matriz dos fatores de correção ( $k$ ) e da rigidez do corte transversal ( $E$ ) .....	85
Figura 7.22 – Excerto da lista de variáveis de entrada e de saída no <i>Parameter Set</i> do <i>Ansys© Workbench</i> , para caso de $a/h$ 10 de uma placa ortotrópica (todas as camadas a $0^\circ$ ) .....	87
Figura 7.23 – Esquema adaptado para a relação entre as entradas ( $a/b$ , $V_f$ ) e saídas (propriedades elásticas equivalentes), primeira etapa de desenvolvimento de metamodelos .....	105
Figura 7.24 – Esquema adaptado para a relação entre as entradas ( $a/b$ , $V_f$ ) e saídas (máxima deformada transversal e frequência fundamental) .....	113
Figura 7.25 – Dados do ficheiro <i>mat</i> correspondente ao caso de ensaio da placa compósita no <i>Ansys© SS1_10_0</i> .....	114
Figura 7.26 – Representação na função objetivo dos mínimos locais e globais .....	118
Figura 7.27 – Iteração final da otimização do laminado 1, sem reinicialização (esquerda) e com cinco reinicializações (direita) .....	130
Figura 0.1 – Representação gráfica da função “Test Tube Holder” e do mínimo global respetivo .....	175
Figura 0.2 – Representação gráfica da função “Holder Table” e do mínimo global respetivo .....	176
Figura 0.4 - Representação gráfica da função “Bird” e do mínimo global respetivo... ..	177
Figura 0.5 - Representação gráfica da função “Modified Schaffer’s No.1” e do mínimo global respetivo .....	178

---

Figura 0.6 - Representação gráfica da função “Modified Schaffer’s No.2” e do mínimo global respetivo .....	179
Figura 0.8 - Representação gráfica da função “Rosenbrock” e do mínimo global respetivo .....	180
Figura 0.9 - Representação gráfica da função “Himmelblau” e do mínimo global respetivo .....	181
Figura 0.10 - Representação gráfica da função “Rastrigin” e do mínimo global respetivo .....	182
Figura 0.11 - Representação gráfica da função “Chichinadze” e do mínimo global respetivo .....	183
Figura 0.12 - Representação gráfica da função “Zet1” e do mínimo global respetivo .	184

É de realçar que as figuras que se encontram enumeradas com o primeiro dígito igual a zero (0), significa que pertencem aos apêndices e/ou anexos, pois estes capítulos não são numerados.

## Índice de Tabelas

Tabela 3.1 - Características da placa compósita laminada .....	18
Tabela 3.2 - Características da lâmina.....	18
Tabela 4.1 – Fórmulas dos indicadores de desempenho individuais.....	42
Tabela 4.2 – Fórmulas dos indicadores de desempenho coletivo/global .....	42
Tabela 5.1 – Tipo e nome de elementos do <i>Ansys</i> © apropriados para modelar estruturas compósitas .....	46
Tabela 5.2 – Opções quanto à integração do elemento <i>Shell181</i> do programa <i>Ansys</i> ©.	55
Tabela 7.1 Espaçamento de 0.05 entre valores de $a$ .....	69
Tabela 7.2 – Valores mínimos e máximos de $a/b$ para cada $V_f$ no Apêndice A1 – Tabela propriedades compósitas - Parte 1 .....	73
Tabela 7.3 – Resultados da análise do modelo SS1 com empilhamento $[0^\circ/90^\circ]_4$ , antes da correção do fator de corte transversal.....	80
Tabela 7.4 - Propriedades mecânicas do material compósito fibra de vidro-epóxi.....	85
Tabela 7.5 – Deformada transversal máxima e frequência fundamental, para o modelo SS1 com $a/h$ igual a 10 e sequência A.....	89
Tabela 7.6 – Tensões normais $S_{xx}$ e $S_{yy}$ e tensão de corte $S_{xy}$ , para o modelo SS1 com $a/h$ igual a 10 e sequência A.....	89
Tabela 7.7 – Tensões de corte $S_{xz}$ e $S_{yx}$ obtidas pelas equações de equilíbrio 3D e pelas constitutivas, para o modelo SS1 com $a/h$ igual a 10 e sequência A.....	90
Tabela 7.8 – Deformada transversal máxima e frequência fundamental, para o modelo SS1 com $a/h$ igual a 20 e sequência A.....	92
Tabela 7.9 – Tensões normais $S_{xx}$ e $S_{yy}$ e tensão de corte $S_{xy}$ , para o modelo SS1 com $a/h$ igual a 20 e sequência A.....	93

---

Tabela 7.10 – Tensões de corte $S_{xz}$ e $S_{xx}$ obtidas pelas equações constitutivas, para o modelo SS1 com $a/h$ igual a 20 e sequência A.....	93
Tabela 7.11 – Deformada transversal máxima e frequência fundamental, para o modelo SS1 com $a/h$ igual a 100 e sequência A.....	95
Tabela 7.12 – Tensões normais $S_{xx}$ e $S_{yy}$ e tensão de corte $S_{xy}$ , para o modelo SS1 com $a/h$ igual a 100 e sequência A.....	96
Tabela 7.13 – Tensões de corte $S_{xz}$ e $S_{xx}$ obtidas pelas equações constitutivas, para o modelo SS1 com $a/h$ igual a 100 e sequência A.....	96
Tabela 7.14 – Tempos de computação para variáveis simbólicas e numéricas.....	101
Tabela 7.15 – Dedução matemática do método Kriging (Fazio 2013).....	103
Tabela 7.16 – Dedução matemática do método RBF (Fazio 2013).....	103
Tabela 7.17 - Excerto da Tabela 7.105 em G.1) Função de Ativação “Ornstein–Uhlenbec (OU)” .....	107
Tabela 7.18 - Excerto da tabela em G.1) Função de Ativação “Ornstein–Uhlenbec (OU)” .....	108
Tabela 7.19 - Excerto da tabela em G.1) Função de Ativação “Ornstein–Uhlenbec (OU)” .....	108
Tabela 7.20 - Valores dos indicadores de desempenho do modelo após treino da rede com 97 pontos (usados para treino) dos 185 obtidos do PREMAT, com a função MQ .....	109
Tabela 7.21 - Valores dos indicadores de desempenho do modelo após estimação de 88 pontos (não usados para treino) dos 185 obtidos do PREMAT, com a função OU .....	109
Tabela 7.22 – Comparação do máximo erro relativo, função GE, para dois valores de parâmetro $b$ .....	110
Tabela 7.23 – Comparação do MaxRE entre as funções linear, cúbica e placa fina....	111

---

Tabela 7.24 – Análise da melhor função de ativação e seus parâmetros, e da variante do método de interpolação para cada propriedade mecânica a estimar.....	112
Tabela 7.25 – Máximo erro relativo, valor percentual, obtido com a estimação dos pontos usados para o treino (vermelho), e para os pontos não usados para treino (verde), para o caso SS1_10.....	115
Tabela 7.26 - Máximo erro relativo, valor percentual, obtido com a estimação dos pontos usados para o treino (vermelho), e para os pontos não usados para treino (verde), para o caso SS1_20.....	116
Tabela 7.27- Máximo erro relativo, valor percentual, obtido com a estimação dos pontos usados para o treino (vermelho), e para os pontos não usados para treino (verde), para o caso SS1_40.....	116
Tabela 7.28 - Resultados da minimização da função de teste “ <i>Tube Holder</i> ”, com <i>seed</i> variável .....	120
Tabela 7.29 - Resultados da minimização da função de teste “ <i>Tube Holder</i> ”, com <i>seed</i> fixa.....	120
Tabela 7.30 – Resultados da minimização da função de teste “ <i>Tube Holder</i> ”, com <i>seed</i> variável e com reinicializações.....	121
Tabela 7.31 - Resultados da minimização da função de teste “ <i>Tube Holder</i> ”, com <i>seed</i> fixa e com reinicializações .....	121
Tabela 7.32 - Resultados da minimização da função de teste “ <i>Holder Table</i> ”, com <i>seed</i> variável .....	122
Tabela 7.33 - Resultados da minimização da função de teste “ <i>Holder Table</i> ”, com <i>seed</i> fixa.....	122
Tabela 7.34 - Resultados da minimização da função de teste “ <i>Holder Table</i> ”, com <i>seed</i> variável e com reinicializações.....	123
Tabela 7.35 - Resultados da minimização da função de teste “ <i>Holder Table</i> ”, com <i>seed</i> fixa e com reinicializações .....	123

---

Tabela 7.36 – Comparação entre os algoritmos PSO 1 e PSO2 para a otimização das funções de teste.....	124
Tabela 7.37 - Lista das configurações a estudar .....	125
Tabela 7.38 – Propriedades da resina Epóxi.....	125
Tabela 7.39 – Propriedades da fibra de vidro E-Glass .....	126
Tabela 7.40 – Resultado da massa específica efetiva correspondente à percentagem de fibra na camada.....	127
Tabela 7.41 – Valores limites admissíveis da massa, baseados na equação (7.23).....	127
Tabela 7.42 – Comparação dos resultados para o laminado 1, com e sem reinicializações .....	130
Tabela 7.43 - Propriedades mecânicas estimadas, sem e com reinicialização (laminado 1) .....	131
Tabela 7.44 – Comparação entre os valores de máxima deformada transversal e respetivo erro relativo, para o caso sem reinicialização (laminado 1) .....	131
Tabela 7.45 – Comparação entre os valores de máxima deformada transversal e respetivo erro relativo, para o caso com cinco reinicializações (laminado 1).....	131
Tabela 7.46 - Comparação dos resultados para o laminado 2, com e sem reinicializações .....	132
Tabela 7.47 - Propriedades mecânicas estimadas, sem e com reinicialização (laminado 2) .....	132
Tabela 7.48 – Comparação entre os valores de máxima deformada transversal e respetivo erro relativo, para o caso sem reinicialização (laminado 2) .....	133
Tabela 7.49 – Comparação entre os valores de máxima deformada transversal e respetivo erro relativo, para o caso com cinco reinicializações (laminado 2).....	133
Tabela 7.50 - Propriedades mecânicas estimadas com função placa fina e com variante universal, otimização sem reinicialização (laminado 2) – CASO A.....	134

---

Tabela 7.51 – Comparação entre os valores de máxima deformada transversal e respectivo erro relativo, para o caso sem reinicialização (laminado 2) .....	134
Tabela 7.52 – Comparação dos resultados para o laminado 1, com e sem reinicializações .....	135
Tabela 7.53 – Comparação entre os valores da frequência fundamental e respectivo erro relativo, para o caso sem reinicialização (laminado 1).....	135
Tabela 7.54 – Comparação entre os valores da frequência fundamental e respectivo erro relativo, para o caso com cinco reinicializações (laminado 1) .....	135
Tabela 7.55 - Propriedades mecânicas estimadas, sem e com reinicialização (laminado 1) .....	136
Tabela 7.56 – Comparação entre os valores da frequência fundamental e respectivo erro relativo, para o caso sem reinicialização (laminado 1) com função placa fina com variante universal .....	136
Tabela 7.57 - Propriedades mecânicas estimadas com função placa fina e com variante universal, otimização sem reinicialização (laminado 2) – CASO B .....	137
Tabela 7.58 – Comparação dos resultados para o laminado 2, com e sem reinicializações .....	137
Tabela 7.59 - Propriedades mecânicas estimadas, sem e com reinicialização (laminado 2) .....	138
Tabela 7.60 – Comparação entre os valores da frequência fundamental e respectivo erro relativo, para o caso sem reinicialização (laminado 2).....	138
Tabela 7.61 – Comparação entre os valores da frequência fundamental e respectivo erro relativo, para o caso com cinco reinicializações (laminado 2) .....	138
Tabela 7.62 – Resultados do modelo SS1 com $a/h$ igual a 10 e sequência B, das análises estática e dinâmica, com RE % face aos valores apresentados por (Reddy 2004).....	164

---

Tabela 7.63 - Resultados do modelo SS1 com $a/h$ igual a 10 e sequência C, das análises estática e dinâmica, com RE % face aos valores apresentados por (Reddy 2004) (Parte 1) .....	165
Tabela 7.64 - Resultados do modelo SS1 com $a/h$ igual a 10 e sequência C, das análises estática e dinâmica, com RE% face aos valores apresentados por (Reddy 2004) (Parte 2) .....	166
Tabela 7.65 – Resultados do modelo SS1 com $a/h$ igual a 10 e sequência D, das análises estática e dinâmica, com RE% face aos valores apresentados por (Reddy 2004).....	167
Tabela 7.66 – Resultados do modelo SS1 com $a/h$ igual a 20 e sequência B, das análises estática e dinâmica, com RE % face aos valores apresentados por (Reddy 2004).....	168
Tabela 7.67 - Resultados do modelo SS1 com $a/h$ igual a 20 e sequência C, das análises estática e dinâmica, com RE % face aos valores apresentados por (Reddy 2004) (Parte 1) .....	169
Tabela 7.68 - Resultados do modelo SS1 com $a/h$ igual a 20 e sequência C, das análises estática e dinâmica, com RE% face aos valores apresentados por (Reddy 2004) (Parte 2) .....	170
Tabela 7.69 – Resultados do modelo SS1 com $a/h$ igual a 100 e sequência B, das análises estática e dinâmica, com RE % face aos valores apresentados por (Reddy 2004).....	171
Tabela 7.70 - Resultados do modelo SS1 com $a/h$ igual a 100 e sequência C, das análises estática e dinâmica, com RE % face aos valores apresentados por (Reddy 2004) (Parte 1) .....	172
Tabela 7.71 - Resultados do modelo SS1 com $a/h$ igual a 100 e sequência C, das análises estática e dinâmica, com RE% face aos valores apresentados por (Reddy 2004) (Parte 2) .....	173
Tabela 7.72 – Resultados do modelo SS1 com $a/h$ igual a 100 e sequência D, das análises estática e dinâmica, com RE% face aos valores apresentados por (Reddy 2004).....	174
Tabela 7.73 - Resultados da minimização da função de teste “Bird”, com <i>seed</i> variável .....	185

---

Tabela 7.74 - Resultados da minimização da função de teste “ <i>Bird</i> ”, com <i>seed</i> fixa .	185
Tabela 7.75 – Resultados da minimização da função de teste “ <i>Bird</i> ”, com <i>seed</i> variável e com reinicializações.....	186
Tabela 7.76 - Resultados da minimização da função de teste “ <i>Bird</i> ”, com <i>seed</i> fixa e com reinicializações .....	186
Tabela 7.77 - Resultados da minimização da função de teste “ <i>Modified Schaffer’s No.1</i> ”, com <i>seed</i> variável .....	187
Tabela 7.78 - Resultados da minimização da função de teste “ <i>Modified Schaffer’s No.1</i> ”, com <i>seed</i> fixa .....	187
Tabela 7.79 – Resultados da minimização da função de teste “ <i>Modified Schaffer’s No.1</i> ”, com <i>seed</i> variável e com reinicializações.....	188
Tabela 7.80 - Resultados da minimização da função de teste “ <i>Modified Schaffer’s No.1</i> ”, com <i>seed</i> fixa e com reinicializações .....	188
Tabela 7.81 - Resultados da minimização da função de teste “ <i>Modified Schaffer’s No.2</i> ”, com <i>seed</i> variável .....	189
Tabela 7.82 - Resultados da minimização da função de teste “ <i>Modified Schaffer’s No.2</i> ”, com <i>seed</i> fixa.....	189
Tabela 7.83 – Resultados da minimização da função de teste “ <i>Modified Schaffer’s No.2</i> ”, com <i>seed</i> variável e com reinicializações.....	190
Tabela 7.84 - Resultados da minimização da função de teste “ <i>Modified Schaffer’s No.2</i> ”, com <i>seed</i> fixa e com reinicializações .....	190
Tabela 7.85 - Resultados da minimização da função de teste “ <i>Rosenbrock</i> ”, com <i>seed</i> variável .....	191
Tabela 7.86 - Resultados da minimização da função de teste “ <i>Rosenbrock</i> ”, com <i>seed</i> fixa.....	191

---

Tabela 7.87 – Resultados da minimização da função de teste “ <i>Rosenbrock</i> ”, com <i>seed</i> variável e com reinicializações.....	192
Tabela 7.88 - Resultados da minimização da função de teste “ <i>Rosenbrock</i> ”, com <i>seed</i> fixa e com reinicializações .....	192
Tabela 7.89 - Resultados da minimização da função de teste “ <i>Hemmilblau</i> ”, com <i>seed</i> variável .....	193
Tabela 7.90 - Resultados da minimização da função de teste “ <i>Hemmilblau</i> ”, com <i>seed</i> fixa.....	193
Tabela 7.91 – Resultados da minimização da função de teste “ <i>Hemmilblau</i> ”, com <i>seed</i> variável e com reinicializações.....	194
Tabela 7.92 - Resultados da minimização da função de teste “ <i>Hemmilblau</i> ”, com <i>seed</i> fixa e com reinicializações .....	194
Tabela 7.93 - Resultados da minimização da função de teste “ <i>Rastringin</i> ”, com <i>seed</i> variável .....	195
Tabela 7.94 - Resultados da minimização da função de teste “ <i>Rastringin</i> ”, com <i>seed</i> fixa .....	195
Tabela 7.95 – Resultados da minimização da função de teste “ <i>Rastringin</i> ”, com <i>seed</i> variável e com reinicializações.....	196
Tabela 7.96 - Resultados da minimização da função de teste “ <i>Rastringin</i> ”, com <i>seed</i> fixa e com reinicializações.....	196
Tabela 7.97 - Resultados da minimização da função de teste “ <i>Chichinadze</i> ”, com <i>seed</i> variável .....	197
Tabela 7.98 - Resultados da minimização da função de teste “ <i>Chichinadze</i> ”, com <i>seed</i> fixa.....	197
Tabela 7.99 – Resultados da minimização da função de teste “ <i>Chichinadze</i> ”, com <i>seed</i> variável e com reinicializações.....	198

---

Tabela 7.100 - Resultados da minimização da função de teste “Chichinadze”, com <i>seed</i> fixa e com reinicializações .....	198
Tabela 7.101 - Resultados da minimização da função de teste “Zetl”, com <i>seed</i> variável .....	199
Tabela 7.102 - Resultados da minimização da função de teste “Zetl”, com <i>seed</i> fixa	199
Tabela 7.103 – Resultados da minimização da função de teste “Zetl”, com <i>seed</i> variável e com reinicializações.....	200
Tabela 7.104 - Resultados da minimização da função de teste “Zetl”, com <i>seed</i> fixa e com reinicializações .....	200
Tabela 7.105 - Valores dos indicadores de desempenho do modelo após treino da rede com os 185 pontos obtidos do PREMAT, com a função OU.....	202
Tabela 7.106 - Valores dos indicadores de desempenho do modelo após treino da rede com 97 pontos (usados para treino) dos 185 obtidos do PREMAT, com a função OU	203
Tabela 7.107 – Valores dos indicadores de desempenho do modelo após estimação de 88 pontos (não usados para treino) dos 185 obtidos do PREMAT, com a função OU .....	204
Tabela 7.108 - Valores dos indicadores de desempenho do modelo após treino da rede com 97 pontos (usados para treino) dos 185 obtidos do PREMAT, com a função GE	205
Tabela 7.109 - Valores dos indicadores de desempenho do modelo após estimação de 88 pontos (não usados para treino) dos 185 obtidos do PREMAT, com a função GE.....	206

---

## Índice de Algoritmos

Algoritmo 1 – Kriging Simples ( <i>Simple Kriging</i> ) – Adaptado de (Fazio 2013) .....	28
Algoritmo 2 – Kriging Normal ( <i>Ordinary Kriging</i> ) – Adaptado de (Fazio 2013).....	29
Algoritmo 3 – Kriging Universal – Adaptado de (Fazio 2013).....	30
Algoritmo 4 – RBFN sem <i>bias</i> , também designada RBFN Exata – Adaptado de (Fazio 2013).....	37
Algoritmo 5 - RBFN com <i>bias</i> constante – Adaptado de (Fazio 2013) .....	39
Algoritmo 6 - RBFN com <i>bias</i> variável – Adaptado de (Fazio 2013) .....	41
Algoritmo 7 – Otimização por nuvem de partículas (PSO) base .....	59
Algoritmo 8 - Comparação da computação de uma adição em ciclos com variáveis simbólica versus variáveis numéricas.....	102
Algoritmo 9 - Pseudo algoritmo para obtenção de valores a/b válidos para cada fração de volume de fibra (Vf).....	162

## 1. Introdução

Este capítulo inicial dá a conhecer quais foram os objetivos desta dissertação, bem como qual foi a estrutura adotada para melhor transmitir todo o trabalho elaborado. Apresenta-se ainda uma abordagem ao problema estudado nesta dissertação e a metodologia adotada para o seu processamento e obtenção da solução desejada.

### 1.1. Objetivos

O significativo crescimento da utilização dos materiais compósitos nas diversas áreas da engenharia é hoje em dia uma realidade. Além das suas características que são mais conhecidas, nomeadamente no que diz respeito às relações entre resistência mecânica e o peso e entre a rigidez e o peso, existem ainda muitas outras características que têm vindo a ser alvo de estudo científico, de modo a melhor compreender o quão poderão contribuir para um projeto ótimo e nessa circunstância para condições de operação ótimas.

No contexto deste trabalho fixou-se como objetivos a utilização das redes neuronais artificiais e técnicas de otimização inspiradas no comportamento de enxames para um projeto ótimo de estruturas compósitas.

O estudo e a análise dos problemas de minimização da deformada transversal e da maximização da frequência fundamental das estruturas compósitas foram tidas em conta como objetivos essenciais desta dissertação. Todo o trabalho realizado foi com o objetivo de dar resposta a estes problemas não lineares analisando características que contribuiriam para um projeto ótimo, sob essas perspetivas. Outros objetivos foram tidos em conta, como a introdução de constrangimentos naturais, como a restrição mássica aos problemas em estudo.

## 1.2. Estrutura da dissertação

A dissertação encontra-se organizada em sete capítulos. O primeiro capítulo, de carácter introdutório, apresenta a estrutura da dissertação, os objetivos e uma descrição breve da abordagem ao problema. O segundo capítulo é dedicado ao estado de arte que se foca na apresentação das obras mais relevantes nos últimos anos sobre a análise e otimização de estruturas compósitas na procura de um projeto ótimo, bem como nos trabalhos que foram mais relevantes para a elaboração desta dissertação.

Os capítulos, terceiro, quarto, quinto e sexto incidem sobre fundamentos teóricos e conceitos relativos aos temas principais que são os pilares de todo o trabalho desenvolvido, designadamente, os materiais compósitos, a criação de metamodelos baseados em métodos de interpolação espacial, a modelação e simulação no *Ansys© Workbench* e por último, a otimização de enxames de partículas. No último capítulo apresentam-se todas as aplicações, nomeadamente todas as validações e modelações feitas para conseguir dar resposta aos objetivos propostos. Esta última parte apresenta análises críticas aos casos de estudo propostos a solucionar. Por fim extraem-se conclusões sobre o trabalho realizado, e resultados obtidos, referindo adicionalmente aspetos que poderão constituir-se como objetos de desenvolvimentos futuros.

### 1.3. A abordagem ao problema

As estruturas compostas por componentes em materiais compósitos são apresentadas como sendo mais leves e com uma resistência mecânica de igual ordem de grandeza quando comparados com componentes idênticos feitos com materiais metálicos. Contudo o projeto e cálculo de componentes constituídos por materiais compósitos envolve a necessidade de abordagens com alguma complexidade, quando comparados com componentes feitos com os desejados materiais tradicionais isotrópicos. É neste sentido que os metamodelos são usados, para estimar resultados baseados em amostras recolhidas ou geradas, permitindo adicionalmente uma otimização do componente para um dado objetivo, com menos requisitos computacionais. Para atingirmos o projeto ótimo foi necessário definir uma metodologia de trabalho, conforme se ilustra na Figura 1.1. Analisando a disposição das etapas nessa figura, identificam-se duas etapas independentes.

A etapa número um inicia-se com a utilização dos dados fornecidos pelo programa *PREMAT* e a utilização destes como dados de treino para os métodos de interpolação que irão constituir o metamodelo de estimação das propriedades mecânicas do compósito.

A etapa dois inicia-se de igual modo com o uso dos dados vindos do *PREMAT* para aplicar nos modelos computacionais de placas compósitas em análises estática e dinâmica de vibrações livres, realizadas no *Ansys© Workbench*. O conjunto de resultados numéricos obtidos das simulações, foram usados como dados de treino para os métodos de interpolação que irão constituir os metamodelos de estimação da deformada máxima e frequência fundamental na subetapa 2.2. Na seguinte subetapa estes metamodelos que originaram funções que relacionam as variáveis de entrada com as de saída permitiram realizar um processo de otimização de enxame, concluindo qual é o valor ótimo para o problema tipo em causa. Este resultado é a solução intermédia, subetapa 2.4.1, de seguida retorna-se ao resultado da etapa 1, para usar os metamodelos de estimação das propriedades mecânicas do compósito para finalmente estimar quais deveriam ser as propriedades ótimas correspondentes aos valores ótimos de deformada transversal máxima e de frequência fundamental.

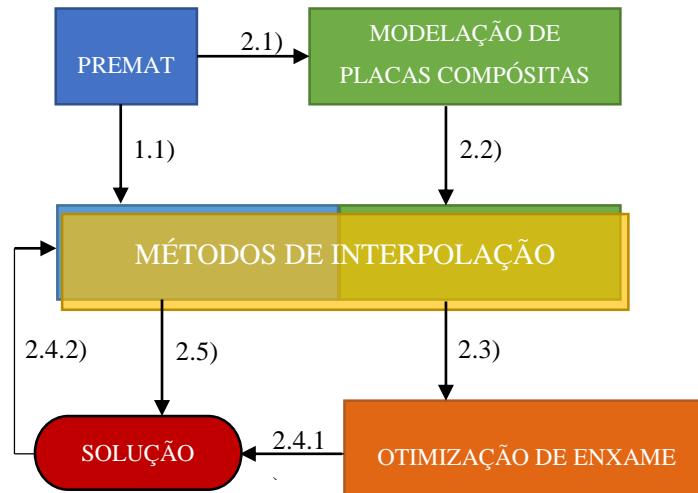


Figura 1.1 – Metodologia de abordagem do problema nas aplicações aos casos de estudo

Quando se executa a subetapa 2.4.2 a subetapa independente 1.1 tem de estar concluída, ou seja, o metamodelo que estima as propriedades mecânicas do material compósito teve de ser criado antes, para estimar as respetivas propriedades dos valores ótimos oriundos da otimização, ou seja, o ótimo valor de fração de volume de fibra  $V_f$  e o ótimo valor da relação elíptica da seção transversal da fibra  $a/b$  para cada estrutura compósita analisada nos casos de estudo.

---

## 2. Estado de Arte

A aplicação dos materiais compósitos está cada vez mais disseminada, desde dos meios de transportes e utensílios de lazer e desporto até às aplicações biomédicas. Um dos aspetos que os diferencia dos materiais metálicos é a caracterização das suas propriedades e o seu desempenho, merecendo como tal a atenção de investigadores e a realização de estudos científicos para uma cada vez melhor caracterização dos materiais compósitos.

Já na década de 90, (Guedes & Kikuchi 1990) apresentam à comunidade científica um método de homogeneização das propriedades, de modo a determinar as constantes elásticas efetivas médias dos materiais compósitos considerando a sua microestrutura. A abordagem deste método com a aproximação e modelação feita através do método de elementos finitos, permite obter resultados bastante precisos. Ainda hoje o programa computacional desenvolvido por estes autores, que engloba a parte de pré processamento (*PREMAT*) e pós processamento (*POSTMAT*) é usado no primeiro caso para caracterizar as propriedades efetivas dos materiais compósitos, contemplando por exemplo a forma da seção transversal da fibra na célula unitária em análise (microestrutura); e no segundo caso para caracterizar as deformações/tensões ao nível da microestrutura.

Mais recentemente outros trabalhos sobre homogeneização tem sido desenvolvidos, tal como é abordado no trabalho de (Kamiński & Pawlak 2015). Neste trabalho vários métodos de homogeneização são comparados para determinar as propriedades de um compósito CFRP tendo em consideração a incerteza gaussiana nas características dos diferentes componentes do material em causa. Nesse trabalho são efetuadas aproximações algébricas dos componentes do tensor dos coeficientes de rigidez elástica. De acordo com esses autores, bases polinomiais com ordens estatisticamente otimizadas permitiriam determinar as funções analíticas que relacionam os componentes do tensor com os parâmetros das fases constituintes do material compósito. (Zhang & Yu 2015) no mesmo ano desenvolveram uma abordagem micromecânica à homogeneização de propriedades elastoplásticas de um compósito de matriz metálica, através de um algoritmo de retorno radial de segunda ordem. Usando o método assintótico variacional, discretizado no espaço finito dimensional, e resolvido usando o método de Newton-Raphson multinível foi possível obter resultados dependendo do tipo de fibra (longa, curta ou partículas),

---

contudo resultados esses precisos tendo em conta a complexidade das condições de fronteira e dos carregamentos aplicados no estudo.

A complexidade dos métodos é um aspeto que tem vindo a ser tido em conta, daí resultando alguma preocupação na simplificação destes, sem piorar a qualidade dos resultados obtidos. (Otero et al. 2015) apresentam um procedimento de homogeneização na escala bidimensional para analisar estruturas compósitas tridimensionais através de métodos de elementos finitos. A teoria implementada foi comparada com outras formulações de microestruturas, modelos micro e teoria de mistura série-paralela, em relação ao custo computacional e à precisão dos resultados. Para análises lineares, a homogeneização implementada levou a bons resultados, e menor custo computacional quando comparada com a necessidade de modelos microestrutura, sendo capaz de capturar fenómenos microestruturais ao contrário da formulação de teoria de mistura série-paralela. Neste trabalho foi apresentado uma extensão ao método implementado para análises não lineares, tal extensão levou a um maior custo computacional como limitação. Outros trabalhos neste campo são devidos a (Jiang et al. 2014) e (Lee et al. 2014).

O estudo da característica da forma da secção transversal da fibra num compósito laminado de fibras longas já tem vindo a ser estudado desde do final do século vinte, um exemplo é o trabalho realizado por (Deng et al. 1999). Estes autores realizaram um estudo experimental para identificar o efeito da relação de aspeto da secção transversal da fibra nas propriedades de tração e flexão, bem como os respetivos modos de falha do compósito de fibra de vidro com matriz epoxídica, usando três formas diferentes na secção transversal da fibra (circular, forma de amendoim e oval). (Behdouj et al. 2013) investigaram o efeito da secção transversal da fibra no reforço de compósitos cementosos, analisando através de provetes com fibra de polipropileno (PP) o comportamento à flexão bem como a adesão das fibras através do teste de *pull-out*. O resultado foi que a variação da secção transversal da fibra tem uma grande importância na ligação das fibras à matriz, bem como na rigidez de flexão. Podendo esta variação da secção transversal ser mais abrupta, pode também ser uma variação contínua, como estudou (Loja 2012), onde a secção tem uma variação em torno da configuração circular através da relação das dimensões da forma elíptica. Este trabalho serviu de base ao trabalho final de Projeto da Licenciatura em Engenharia Mecânica (Silva, 2013), o qual teve o objetivo de caracterização macro e micromecânica dos estados de tensão e deformação de compósitos

---

de fibras naturais longas, onde a variação da seção transversal da fibra é tida em conta para as caracterizações mencionadas através de análises estáticas pelo método de elementos finitos.

No sentido de minimizar a complexidade e o tempo de computação associados a certos problemas, os relacionados com a aplicação do MEF para a caracterização de deformadas transversais, frequências fundamentais e tensões, por vezes constituem-se metamodelos. Os métodos de metamodelação permitem estimar com alguma precisão os valores de saída para determinadas variáveis de entrada modelando assim um determinado comportamento do componente/estrutura. (Arian Nik et al. 2014) apresentam um estudo comparativo de métodos de metamodelação para a estimação de variáveis associadas à rigidez de materiais compósitos analisados, sendo os métodos abordados Regressões Polinomiais, Redes Neurais Artificiais (ANN) de Base Radial (RBF), Kriging, e Regressão de Suporte Vetorial (SVR). Estes autores concluíram que os métodos mais precisos para estimar as variáveis em análises foram o Kriging e as Redes Neurais Artificiais RBF, onde para um menor número de variáveis o Kriging tem melhor comportamento, enquanto as Redes Neurais Artificiais RBF apresentam melhores resultados para maiores números de variáveis. (Fazio & Roisenberg 2013) comparam ambos os métodos, apresentando de forma clara e simples a formulação matemática de cada, apresentando um estudo sobre as alterações a que ambos devem ser sujeitos para que produzam iguais resultados.

Em termos de análises dinâmicas, (Xiang & Wang 2009) estudaram o comportamento de placas compósitas com laminados simétricos quanto à vibração livre. O trabalho desenvolvido foi baseado em teorias de deformação de corte trigonométricas para vigas laminadas, onde foram derivadas as equações aplicáveis ao compósito laminado simetricamente, sendo estas equações diferenciais discretizadas pelo método de colocação sem malha (*meshless*) baseado em redes neuronais de base radial.

No contexto destas estruturas compósitas e respondendo à contínua necessidade de melhoria da sua caracterização analítica ou estimada por meio de metamodelos, e pensando numa perspectiva de um projeto ótimo, a otimização é uma etapa importante.

Será através de processos de otimização que se determinarão as configurações mais adequadas, de variáveis de projeto, face às características e constrangimentos de um

---

problema. Para obter os valores ótimos é necessário usar técnicas de otimização que poderão possuir ou não um carácter global. No presente trabalho é utilizada uma técnica global que é “*Particle Swarm Optimization*” (PSO). Esta técnica de inteligência artificial, baseada no comportamento dos enxames, foi desenvolvida em 1995 pelo psicólogo Kennedy e pelo engenheiro eletrotécnico Eberhart (Kennedy & Eberhart 1995) e modelado pelo biólogo Frank Heppner.

Desde então vários investigadores tem usado esta técnica e suas variantes para aplicar em diversos campos de estudo, como na maximização da rigidez de flexão em compósitos FGM, como é o caso do trabalho realizado por (Loja 2013). Esta obra além de ter sido bastante relevante na elaboração deste trabalho, é recente e aplica inúmeros conceitos e fundamentos aqui abordados nesta dissertação, incluindo uma alteração no algoritmo comum de PSO, a introdução da técnica de reinicializações das colónias. Esta técnica, proveniente dos métodos de otimização de algoritmos genéticos, tal como comprovada pelo autor é também aqui confirmada que traz melhores resultados e com menos esforço computacional exigindo deste modo populações iniciais mais pequenas na otimização por enxame de partículas.

(Chen et al. 2013) desenvolveram um método de otimização baseado na fiabilidade para o projeto de estruturas compósitas. Este método combina PSO com análises em elementos finitos (FEA), onde exemplos numéricos de otimização de projeto de fiabilidade de compósito laminado e de compósito de casca cilíndrica são estudados. Baseado no método de “*Reliability Based Design Optimization*” (RBDO), e integrando o algoritmo de PSO e a FEA, o peso total do compósito laminado foi tido em conta como objetivo e o ângulo da direção das laminas unidireccionais e a relação de espessura como variáveis de projeto nesse trabalho desenvolvido por (Tang et al. 2009).

Os trabalhos aqui abordados sobre otimização foram todos focados na otimização de uma função objetivo única, no entanto a otimização multiobjectivo é não menos importante nos materiais compósitos. (Suresh et al. 2007) apresentaram um trabalho cujo foco é a otimização de uma viga compósita de perfil quadrangular de uma hélice do rotor de um helicóptero. A técnica de otimização aplicada foi o PSO, onde as dimensões da seção transversal e os ângulos de cada lâmina do compósito foram as variáveis de projeto. Os objetivos em estudo foram a obtenção de um valor específico de rigidez e a maximização da elasticidade de acoplamento, esta ultima aumenta a estabilidade

aeroelástica das hélices do rotor do helicóptero. O problema multiobjectivo foi formulado como um problema de otimização combinatório e resolvido conjuntamente usando PSO.

Neste trabalho foram feitas comparações de desempenho e custo computacional com algoritmo genético (GA), onde o PSO apresentou melhores resultados. Outras obras a ter em consideração são (Athi Sankar et al. 2014) e (Visweswaraiyah et al. 2013). O uso destas técnicas de otimização global apresenta uma boa relação entre o custo computacional e a precisão dos resultados, tendo em atenção que os problemas de análise estrutural envolvem alguma complexidade e tempo de cálculo.

### 3. Materiais Compósitos

Quando nos referimos aos materiais compósitos, como o próprio nome indica, falamos de materiais que resultam da combinação de mais do que um material, com uma interface visível entre os seus diferentes constituintes. A combinação destes origina interessantes materiais com diversificada aplicação na engenharia, com propriedades mecânicas diferentes das suas fases constituintes. (ASTM D3878-07 1998)

Contudo, é comum denominar-se por material compósito aos materiais com uma matriz contínua, que proporcione funções de proteção, coesão e adesão ao constituinte de reforço.

É usual classificar-se este tipo de materiais a dois níveis distintos, ao nível do tipo de matriz (fase contínua), e ao nível do reforço (fase descontínua), conforme ilustram os esquemas na Figura 3.1 e na Figura 3.2. (ASM International 2001)

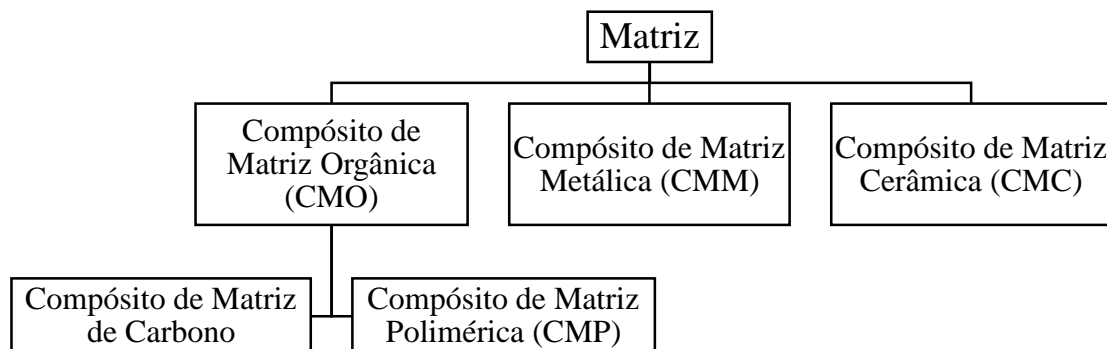


Figura 3.1 – Classificação do material compósito quanto ao tipo de matriz (ASM International 2001)

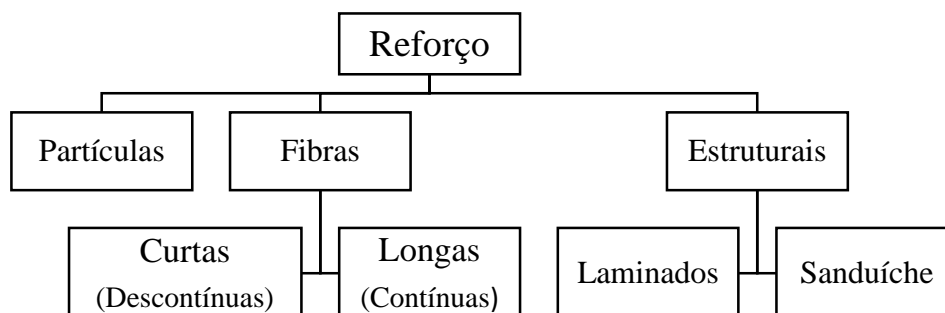
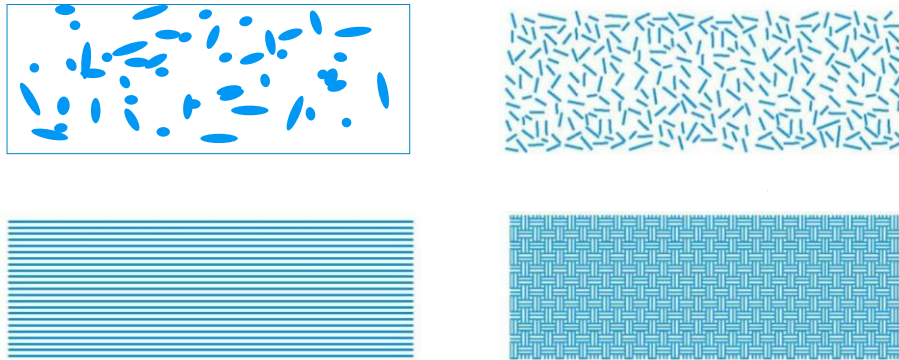


Figura 3.2 – Classificação do material compósito quanto ao tipo de reforço (Adaptado) (Callister Jr., 1985) (ASM International 2001)

Na classificação ao nível do reforço, tecidos os compósitos reforçados por partículas, fibras curtas, fibras longas e as malhas e painéis de sandwich, conforme ilustra o esquema na Figura 3.2. Os compósitos estruturais estão associados aos laminados, compostos por fibras. Em termos de aspeto visual, a Figura 3.3 tem a representação destes tipos de reforço, exceto do painel de sanduíche.



**Figura 3.3 – Ilustrações do aspeto visual de partículas a), fibras curtas b), fibras longas c), e tecidos d) (Adaptado) (CCSF, 2014)**

Neste capítulo falaremos somente do tipo de material compósito usado nos casos de estudo deste trabalho, material compósito laminado reforçado por fibras longas, os tipos mais comuns de fibras e resinas, a caracterização das propriedades dos compósitos na escala micro, meso e macro da estrutura, método de homogeneização das propriedades usado pelo programa *PREMAT* (Guedes & Kikuchi 1990) e também a formulação da teoria de placas laminadas aplicável aos casos de estudo analisados.

### **3.1. Material compósito laminado com reforço de fibras longas**

Os compósitos laminados são um tipo de material caracterizado por ter uma sequência de lâminas (camadas) em que se assume uma adesão perfeita, sem escorregamento, à qual se designa por laminado. Estas camadas podem ser unidireccionais, bidireccionais e/ou multidireccionais (como os tecidos, mais conhecidas pelo estrangeirismo “*woven*”).

São constituídas por um reforço e uma matriz, ou seja, por exemplo uma fibra e uma resina respectivamente. Existem diversos tipos de ambos os constituintes, pelo que as figuras seguintes apresentam apenas alguns exemplos. As fibras mais usadas na indústria são a de vidro, a de carbono e as aramídicas, ilustradas na Figura 3.4, e em termos de resinas a epóxi, poliéster, fenólicas e bismaleimidas (BMI) são as que maior aplicabilidade têm na indústria.



Figura 3.4 – Malhas de fibras de vidro, carbono e kevlar (da esquerda para a direita)

Cada lâmina unidirecional (UD) é composta por fibras longas (preto) e pela matriz (região a branco), conforme ilustra a Figura 3.5. As fibras terão uma determinada orientação em relação ao referencial do laminado, conforme ilustra a Figura 3.6.



Figura 3.5 – Secção transversal de uma lâmina com fibras unidirecionais

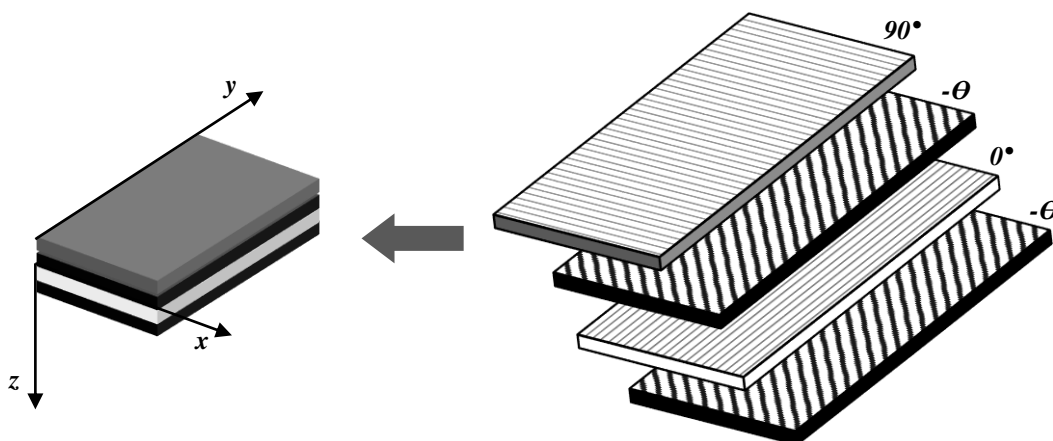


Figura 3.6 – Exemplo de laminado composto por camadas com diferentes orientações em relação ao referencial do laminado (Adaptado da Figura 2.1.3) (ASM International 2001)

Cada lâmina contém fibras alinhadas e orientadas cujos comprimentos são comparáveis às ordens de grandeza das dimensões gerais das estruturas em análises nos casos de estudo apresentados. É usual tomar-se com referência a representação do sistema de coordenadas que se apresenta na Figura 3.6, salientando que o início do eixo  $z$  é no meio do laminado, conforme ilustra a Figura 3.7.



Figura 3.7 – Seção transversal, no plano  $xz$ , do exemplo de laminado na Figura 3.6

### 3.1.1. Teorias de Laminados

Existem diversas teorias de placas que permitem a análise de laminados, das quais as mais conhecidas e utilizadas são a Teoria Clássica de Placas Laminadas, mais conhecida como “*Classical Laminate Plate Theory*” (CLPT) (Kirchhoff 1850) e a Teoria de Deformação de Corte de Primeira Ordem, conhecida como “*First Shear Deformation Theory*” (FSDT) (Mindlin 1951), as quais podem ser diferenciadas na Figura 3.8. A teoria que está subjacente ao presente trabalho é a FSDT, na medida em que permite analisar placas não necessariamente finas. Esta teoria permite obter uma previsão para as tensões de corte interlaminares, ao contrário da teoria clássica em que as respectivas distorções são consideradas desprezáveis no contexto de laminados finos.

Pode dizer-se que para placas com relações de comprimento/espessura, menores ou iguais a vinte, a teoria CLPT é menos precisa do que a FSDT no cálculo das deformações, tensões e frequências. Na teoria FSDT para caracterizar a rigidez do laminado são usadas as matrizes  $A$ ,  $B$ ,  $D$  e  $A_{\text{shear}}$ , com os coeficientes de rigidez. Estas matrizes são compostas por coeficientes  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$ ,  $D_{ij}$  que são obtidos através dos coeficientes elásticos reduzidos transformados, conforme as equações (3.5) e (3.1). (Reddy 2004)

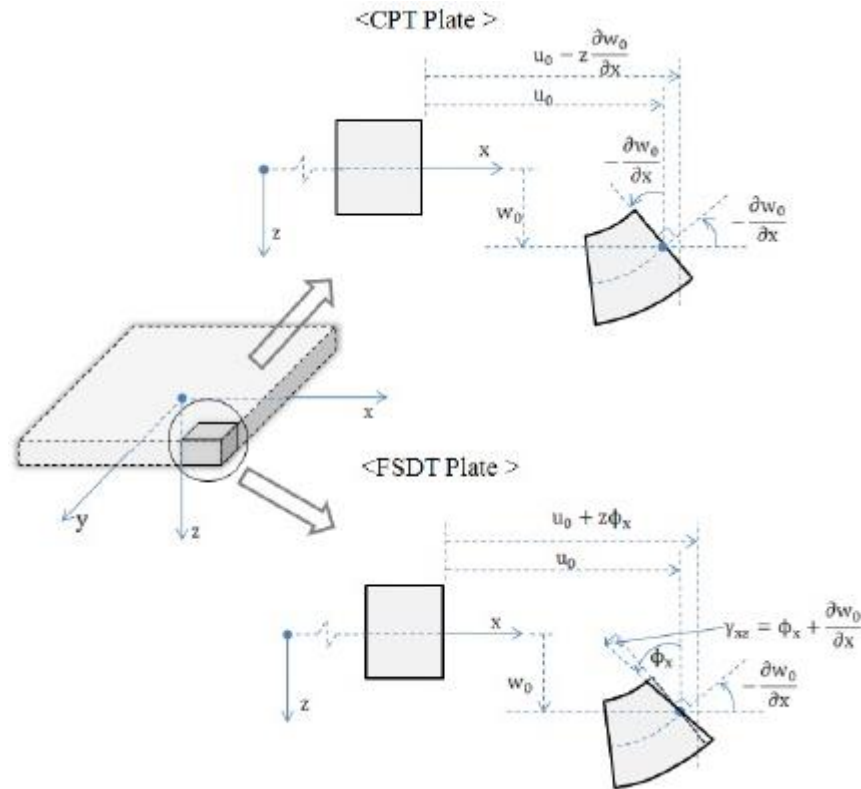


Figura 3.8 – Bordos deformados e não deformados nas teorias de CLPT e FSDT (Reddy 2013)

No caso de lâminas ortotrópicas a matriz constitutiva no referencial do laminado  $[\bar{Q}]$  contém os coeficientes apresentados na equação (3.1), os restantes são nulos. (Reddy 2004)

$$\begin{aligned}
 \bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2 \cdot Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta \\
 \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12}(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\
 \bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2 \cdot Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta \\
 \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \\
 \bar{Q}_{44} &= Q_{44} \cos^2 \theta + Q_{55} \sin^2 \theta \\
 \bar{Q}_{45} &= (Q_{55} - Q_{44}) \sin \theta \cos \theta \\
 \bar{Q}_{55} &= Q_{55} \cos^2 \theta + Q_{44} \sin^2 \theta \\
 \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta \\
 \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66}(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta)
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

O símbolo  $\theta$  representa o ângulo entre o sentido positivo da direção 1, no referencial da lâmina em questão e o sentido positivo da direção  $x$  do referencial do laminado.

Estes coeficientes elásticos são obtidos a partir dos coeficientes elásticos reduzidos para o referencial do material, ou seja obtidos consoante a equação (3.2). (Reddy 2004)

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad (3.2)$$

$$Q_{66} = G_{12}, Q_{44} = G_{23}, Q_{55} = G_{13}$$

Estas matrizes A, B, D e  $A_{shear}$  estabelecem a relação entre as forças e os momentos resultantes existentes no laminado e as deformações. Esta relação mencionada encontra-se formulada na equação (3.3). (Reddy 2004)

$$\begin{bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{bmatrix} = [A] \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \varepsilon_{xy}^{(0)} \end{bmatrix} + [B] \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \varepsilon_{xy}^{(1)} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$\begin{bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{bmatrix} = [B] \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \varepsilon_{xy}^{(0)} \end{bmatrix} + [D] \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \varepsilon_{xy}^{(1)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Q_{xz} \\ Q_{yz} \end{bmatrix} = K \cdot [A_{shear}] \cdot \begin{bmatrix} \gamma_{xz}^{(0)} \\ \gamma_{yz}^{(0)} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_{k+1} - z_k), B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_{k+1}^2 - z_k^2)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_{k+1}^3 - z_k^3) \quad (3.5)$$

As deformações são dadas de acordo com a equação (3.6).

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \varepsilon_{xy}^{(0)} \\ \varepsilon_{xz}^{(0)} \\ \varepsilon_{yz}^{(0)} \end{bmatrix} + z \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \varepsilon_{xy}^{(1)} \\ \varepsilon_{xz}^{(1)} \\ \varepsilon_{yz}^{(1)} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \varepsilon_{xy}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \\ \gamma_{yz}^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \varepsilon_{xy}^{(1)} \\ \gamma_{xz}^{(1)} \\ \gamma_{yz}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Na equação (3.4) apresenta-se um fator de correção de corte transversal ( $K$ ) que é multiplicado pela matriz dos coeficientes elásticos associados às tensões de corte transversais nos planos  $yz$  e  $xz$ . Este fator de correção, que muitos autores consideram assumir o valor constante de  $5/6$ , destina-se a corrigir a discrepância entre o atual estado de tensão e o estado de tensão constante em espessura previsto pela teoria FSDT, pois tal como as distorções são tidas como constantes ao longo da espessura do laminado também as tensões de corte transversal daí decorrentes serão constantes, conforme indica a equação (3.7).

$$\begin{bmatrix} Q_{xz} \\ Q_{yz} \end{bmatrix} = K \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix} dz \quad (3.7)$$

As equações anteriormente apresentadas são as equações constitutivas relativamente à teoria FSDT, contudo para o cálculo mais preciso das tensões de corte interlaminares é comum usar-se as equações de equilíbrio 3D referidas na equação (3.8).

Conforme mencionam os autores (Krishna Murty 1987) as tensões de corte interlaminar calculadas por estas equações são mais precisas, evitando um erro de cerca de 45% quando comparado com o cálculo através da lei constitutiva.

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad i, j = x, y, z \quad (3.8)$$

A equação (3.9) representa o cálculo das referidas tensões de corte transversal nos planos  $xz$  e  $yz$  em que as constantes de integração são determinadas tendo em atenção o valor nulo das tensões de corte, nas superfícies exteriores do laminado.

$$\begin{aligned}\sigma_{xz} &= - \int (\sigma_{x,x} + \sigma_{xy,y}) dz + \text{constante} \\ \sigma_{yz} &= - \int (\sigma_{y,y} + \sigma_{xy,x}) dz + \text{constante}\end{aligned}\quad (3.9)$$

As placas cujo estudo se efetua neste trabalho, estão todas submetidas às condições de fronteira SS1 de acordo com a terminologia usada em (Reddy 2013). A Figura 3.9 ilustra os pressupostos desta condição de fronteira.

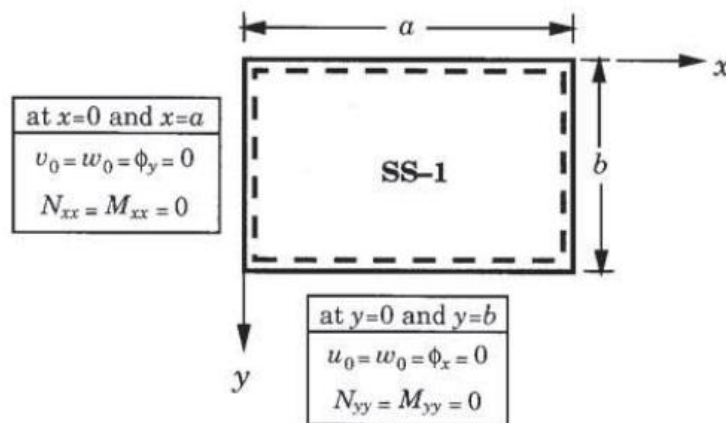


Figura 3.9 - Condição de fronteira simplesmente apoiada (SS1)

### 3.2. Propriedades e características do compósito

Neste subcapítulo aborda-se a caracterização das propriedades do material compósito, com especial atenção para o processo de homogeneização das propriedades dos seus constituintes. Assim procede-se à homogeneização das propriedades dos constituintes na escala micro, (onde se analisa um volume elementar representativo), para uma escala meso (ao nível da lâmina). Este processo permite a determinação das propriedades equivalentes para uso nos programas de análise pelo método de elementos finitos (MEF), que habitualmente se utilizam.

Algumas propriedades mais usuais dos materiais compósitos que podem ser tidas em conta para a otimização de um projeto ótimo são a resistência de uma forma geral, a rigidez, a resistência à corrosão, resistência ao desgaste, peso, resistência à fadiga, comportamento e dependência à temperatura, isolamento térmico, condutividade térmica e isolamento acústico. (Jones 1998) Estas propriedades podem ser analisadas ao nível da

microestrutura ou da macroestrutura. Para alterar estas propriedades existem características que devem ser tidas em conta como variáveis no processo de otimização, tais como o volume de fibra nas camadas, a sequência de empilhamento, a espessura de cada camada, e outras menos usuais como a forma da seção transversal da fibra.

### Volume de Fibra

A fração de volume de fibra ( $V_f$ ), ou a percentagem de volume de fibra indica a percentagem de volume que a fibra ocupa num volume total da lâmina. Admitindo a inexistência de ocos, o volume remanescente é ocupado pela matriz. Para que haja um aumento significativo dos valores das propriedades mecânicas elásticas do compósito, este deverá ter um volume de fibra igual ou superior a cerca de dez por cento ( $V_f \geq \sim 10\%$ ). (ASM International 2001)

Considera-se o exemplo seguinte de um compósito laminado com reforço de fibras longas para explicar a influência do parâmetro fração de volume de fibra.

**Tabela 3.1 - Características da placa compósita laminada**

<b>Sequência</b>	$[45^\circ/0^\circ/0^\circ/-45^\circ/90^\circ]_s$
<b>N.º Lâminas</b>	9 (Características da Tabela 3.2)
<b>Dimensões</b>	Iguais às dimensões das lâminas

**Tabela 3.2 - Características da lâmina**

	<b>Material</b>	<b><math>E_1</math> (Pa)</b>	<b><math>\nu_{12}</math></b>
<b>Reforço</b>	Fibra Vidro - Tipo E	80E9	0.22
<b>Matriz</b>	Resina Epóxi	3.45E9	0.33
<b><math>\nu_f</math></b>	0.5		
<b>Espessura (<math>h</math>)</b>	1 mm		
<b>Dimensões (<math>a \times b</math>)</b>	100x150 mm <sup>2</sup>		

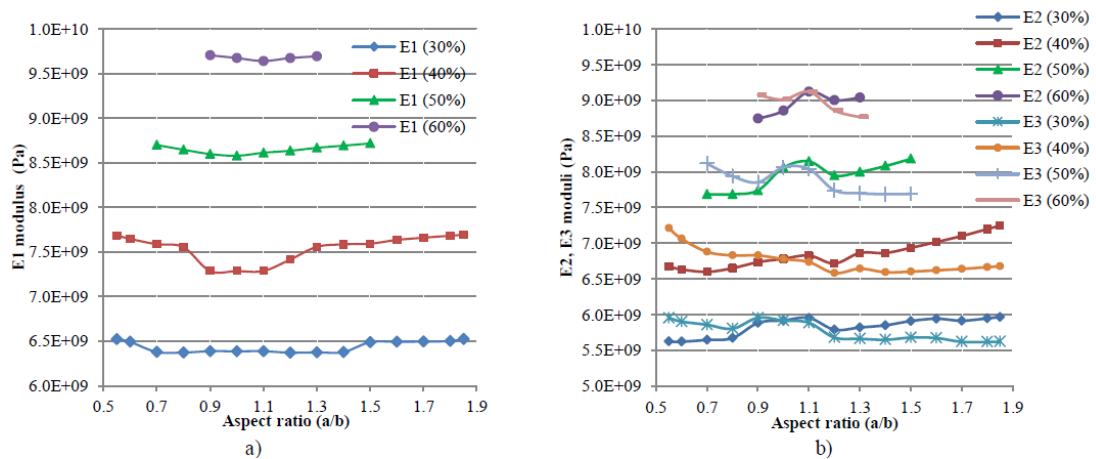
Admitindo que após o empilhamento das lâminas/camadas e a concretização do processo de fabrico em causa, a fração de volume de fibra do laminado manter-se-ia igual ao valor de 0.5, pois todas as lâminas são iguais, o volume total de fibra no laminado seria de 67500 milímetros cúbicos, conforme os cálculos obtidos pelas equações (3.10), (3.11) e (3.12).

$$V_{\text{total}} = \text{Espessura do Laminado} \times \text{largura} \times \text{comprimento} \quad (3.10)$$

$$\text{Espessura do Laminado} = \text{Nr. Lâminas} \times h \quad (3.11)$$

$$V_{\text{fibra}} = V_{\text{total}} \times V_f \quad (3.12)$$

Esta percentagem de volume de fibra que é uma característica da lâmina, ao nível da meso escala, irá também afetar as propriedades elásticas a homogeneizar. Neste trabalho tomou-se como base o trabalho de (Loja 2012), onde é analisado um laminado com reforço de fibras longas naturais de juta, conforme se pode observar na Figura 3.10. Nesse trabalho foi considerada a variação das propriedades elásticas em função da fração de volume e da relação  $a/b$  da seção transversal elipsoide da fibra.

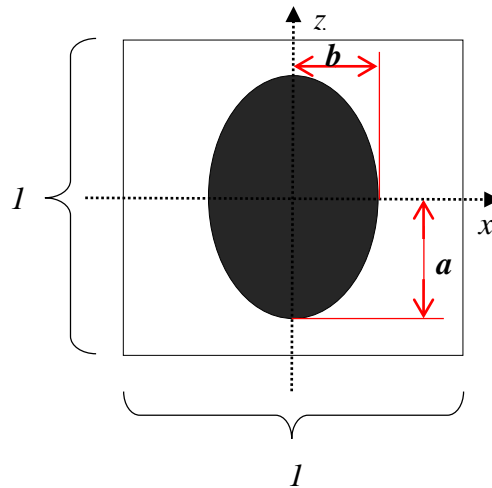


**Figura 3.10 - a) Variação de E<sub>1</sub> b) Variação de E<sub>2</sub> e E<sub>3</sub>, como funções da relação de aspeto da fibra e da fração de volume (Extraído) (Loja 2012)**

Com base na figura anterior e no trabalho de (Loja 2012) pode-se afirmar que a homogeneização das propriedades dos constituintes do material compósito, para propriedades equivalentes ao nível laminar, será também influenciada pela configuração da seção transversal da fibra.

### Configuração da secção transversal da fibra

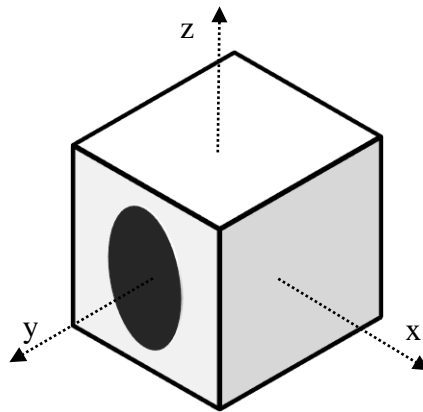
Neste trabalho ter-se-á também este aspeto em consideração, isto é a variação da secção transversal das fibras longas do laminado. Considerando uma área elementar representativa (RAE) quadrada (conforme ilustra a Figura 3.11), enquanto simplificação do volume elementar representativo, admitir-se-á ao nível da microestrutura uma variação da secção transversal segundo a conhecida formulação da elipse.



**Figura 3.11 – Representação 2D da célula unitária, micro escala, composta pela fibra (B) e a matriz (A)**

Utilizando o RVE, cuja representação simplificada se apresenta ilustrada na Figura 3.12, composta pelos constituintes da lâmina (matriz de resina com reforço de fibras longas), pode-se utilizar a relação dos valores dos semieixos ( $a$  e  $b$ ) da expressão da elipse para obter a relação de aspeto da secção transversal da fibra ( $a/b$ ). De modo a extrair mais informações que serão úteis para a homogeneização é importante começar na escala mais pequena possível, e a menor escala de estudo no trabalho desenvolvido será ao nível da célula unitária.

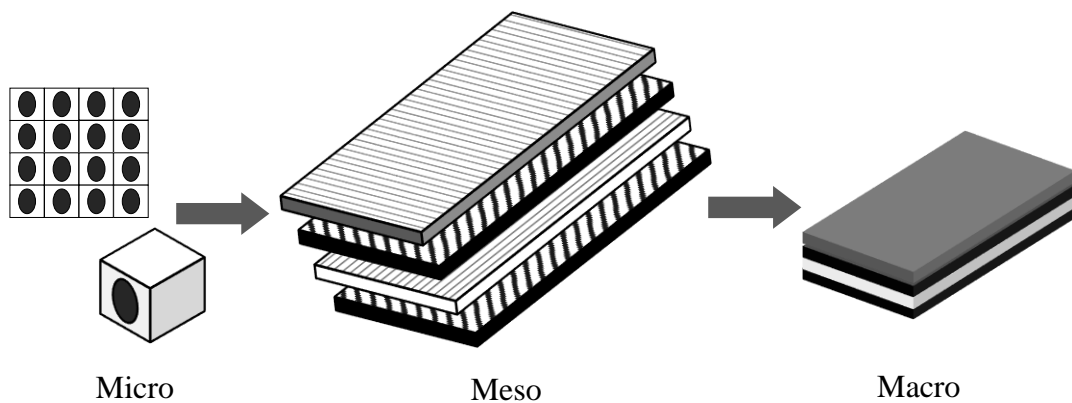
A configuração para a célula unitária representada simplificada em 2D está ilustrada na Figura 3.12, observando-se a presença de uma fibra passante na sua totalidade ao longo dos eixos  $x$  e  $z$  do referencial local do RVE.



**Figura 3.12 - Representação 3D da célula unitária, micro escala, composta pela fibra (preto) e a matriz (branco)**

Na escala da microestrutura os volumes elementares representativos são volumes que são considerados representativos de estruturas, e que se admitem como periódicos, isto é, a lâmina pode ser vista como uma estrutura constituída por estes volumes elementares representativos.

Existem dois níveis superiores, o seguinte é a meso escala, onde se encontra a própria lâmina/ camada do laminado com as mencionadas propriedades homogeneizadas, por fim na macro escala temos o laminado, ou seja a própria estrutura compósita laminada com fibras longas, conforme ilustra a Figura 3.13 (XComposites).



**Figura 3.13 – Escalas de estudo de materiais compósitos laminados. (Adaptado) (XComposites)**

Se analisarmos à escala micro um material compósito laminado com reforço de fibras longas este é heterogéneo, mas poderá ser considerado como um material homogéneo à macro escala, e à meso escala. Para que tal possa ser assumido, a homogeneização das propriedades é essencial, e assim dispostemos das propriedades médias do compósito de que uma lâmina é feita.

### **Homogeneização de propriedades da escala micro para a meso**

Conforme foi mencionado anteriormente, as propriedades de cada lâmina e a sequência de empilhamento do laminado influenciam o comportamento mecânico da estrutura quando solicitada. Este comportamento é assim reflexo das propriedades elásticas dos constituintes de cada lâmina, reforço de fibra e matriz.

Existem diversas metodologias para obter estas propriedades elásticas equivalentes de um dado material compósito, a homogeneização é um método bastante usual para obter essas propriedades. (B. Hassani, 1998) . Algumas outras metodologias mais usadas devido à sua simplicidade de cálculo são os conhecidos modelos de Reuss (Reuss 1929) e de Voigt (Voigt 1889) relativos à Regra das Misturas (RoM).

Neste trabalho as propriedades elásticas equivalentes ao nível da camada foram obtidas através do *PREMAT* (Guedes & Kikuchi 1990), que é um algoritmo baseado na teoria da homogeneização. No caso de compósitos laminados, constituídos por determinado número de camadas/lâminas, cada uma destas terá as suas propriedades equivalentes homogeneizadas de acordo com os constituintes de cada uma dessas camadas. Os casos de estudo abordados incidiram sobre laminados constituídos por camadas com matriz epoxídica e reforço de fibras longas de vidro do tipo E.

## 4. Metamodelação através de métodos de interpolação

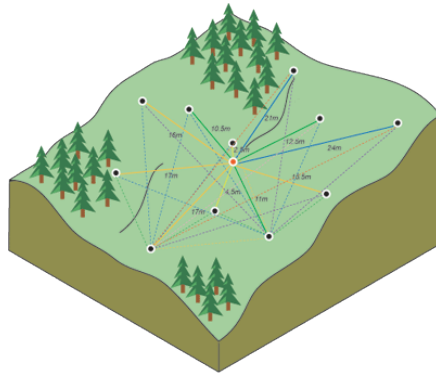
A investigação aplicada e o frequente uso da interpolação de dados provenientes de simulações computacionais determinísticas para o desenvolvimento de modelos para estimar variáveis de resposta são provas do crescimento da metamodelação nas áreas da engenharia. (Strano 2008) De uma forma simplista, é um modelo que recorre a informação externa para relacionar variáveis de entrada  $u$  com variáveis de saída  $z$  (conforme ilustra a Figura 4.1), estimando a saída  $\hat{z}$  com o menor erro possível. Neste capítulo é feita uma breve introdução aos métodos de interpolação espacial, em especial atenção para dois deles, o Kriging e as Redes Neurais Artificiais com Funções de Base Radial (RBF), os quais são aqui detalhadamente descritos para aplicação no presente trabalho. A escolha do método de Kriging para comparação com RBF deveu-se ao facto de ser atualmente bastante utilizado em outras áreas da ciência.



Figura 4.1 – Esquema genérico simplificado da relação entre as entradas e saídas de um dado processo (metamodelo)

### 4.1. Métodos de Interpolação Espacial

Existem diversos métodos de interpolação, contudo no âmbito deste trabalho serão somente abordados métodos de interpolação espacial, ou seja, cujo seu objetivo é a estimação e/ou previsão de valores para regiões do espaço utilizando as medições pertencentes aos dados amostrais afetando estas com coeficientes de peso consoante o afastamento ou proximidade ao ponto a interpolar. A Figura 4.2, extraída do (ArcGIS 2011), representa a relação que existe entre os pontos que são obtidos para treino com o ponto de cálculo (vermelho). Esta relação é tida em conta para cada ponto de cálculo, numa primeira fase com cada um dos pontos de treino, na fase de estimação com pontos novos.



**Figura 4.2 – Representação da relação de distância entre os pontos amostrais (pretos) e o ponto em cálculo (vermelho)**

Existem diversos métodos de interpolação espacial, sendo resumidamente alguns destes os seguintes listados.

**Vizinho mais Próximo (*Nearest Neighbour*)** - Estima o valor desconhecido como igual à medição mais próxima conhecida dos dados amostrais (Haara & Kangas 2012)

**Ponderação pelo Inverso da Distância (*Inverse Distance Weighting*)** – Estima o valor desconhecido como igual à média das medições ponderadas pelo inverso da distância do ponto a estimar. Neste método os pesos variam proporcionais à distância, sem ter em conta o quanto as variações das distâncias influenciam no comportamento dos dados. (Lu & Wong 2008)

**Kriging** – Estima o valor desconhecido utilizando um modelo de variação dos dados em função da distância, conhecido como semivariograma. (Stein 1999) Este método, usualmente mencionado como Processo de Regressão Gaussiano (PRG), será utilizado neste trabalho e é descrito no subcapítulo 4.2.

**Redes de Funções de Base Radial (*Radial Basis Functions*)** – Rede neuronal que estima o valor desconhecido utilizando neurónios com funções de ativação de base radial. (Buhmann 2003) Este método será utilizado neste trabalho e é descrito no subcapítulo 4.3.

**Redes de Perceptrão Multi-Camada (*Multi Layer Perceptron*)** – Rede neuronal que estima o valor desconhecido com base em diversas multiplicações das entradas por pesos associados a cada neurónio que contem uma função de ativação cada um. Esta função de ativação determina a saída de cada neurónio, esta estrutura poderá ter várias

camadas (níveis da rede), com vários neurónios cada até se chegar à última função de ativação que dará a saída. (Rosenblatt 1962) O método de atualização dos pesos é algo que geralmente diferencia os tipos mais comuns de redes neuronais entre si (*BackPropagation*, *FeedForward*, etc).

A estes modelos substitutos, metamodelos, que relacionam o comportamento entre dados de entrada e de saída é usualmente atribuído na comunidade científica a designação de *surrogate models*. As vantagens do uso destes metamodelos estão essencialmente associadas aos tempos de computação. Numa abordagem primitiva onde se simularia todos os casos possíveis de um dado problema, abrangendo todo o domínio dos dados amostrais, esta poderia levar horas ou até dias a concluir. Em problemas de engenharia, como simulações pelo método de elementos finitos (MEF), referentes por exemplo a análises estáticas e dinâmicas de estruturas compósitas, esta abordagem de usar métodos de interpolação de dados determinísticos simulados computacionalmente é bastante viável e vantajosa computacionalmente. As desvantagens revelam-se ao nível do rigor e do erro associado à estimação em causa. O processo começa por selecionar dados amostrais, que são estes resultados de simulações computacionais, isto é de processos numéricos. Como tal, existirá logo à partida um erro associado ao que serão os valores analíticos, contudo são estes dados amostrais numéricos que servem de base de comparação e de refinação dos parâmetros dos metamodelos.

## 4.2. Kriging - Processo de Regressão Gaussiano

O processo de regressão de Gauss é usualmente designado por Kriging na geoestatística e é basicamente um método de interpolação espacial onde os valores interpolados são obtidos através de um processo gaussiano suportado por uma função de covariância. A teoria por detrás deste método foi desenvolvida pelo matemático Georges Matheron (Matheron 1973), baseada na tese de Mestrado de Daniel G Krige. O estudo de Krige consistiu em estimar a distribuição de ouro na África do Sul, baseada em valores recolhidos experimentalmente em determinadas localizações desse espaço. Foi devido a este último autor, engenheiro de minas, que foi adotado o nome de Kriging para o método. Outro trabalho interessante e usualmente referido no campo da geoestatística é o trabalho de (Journel & Huijbregts 2003).

Este método dá a melhor estimativa linear não-enviesada (*Best Linear Unbiased Prediction*, BLUP) de valores intermédios. (Rasmussen & Williams 2004) O significado de “melhor” deve-se a este ter a menor variância do ponto estimado, quando comparado com outros métodos de estimação linear não-enviesada.

O Processo de Regressão Gaussiano (PRG) é identificado como sendo processo estocástico, ou seja os dados recolhidos provem de um evento aleatório, por exemplo em geoestatística a recolha de observações num dado mapa geográfico.

Para uma boa interpolação, estimação é necessário ajustar os parâmetros associados às funções de covariância, contudo os algoritmos usados não foram implementados com este aspeto que tornaria a abordagem mais complexa computacionalmente.

### 4.2.1. Formulação matemática de Kriging

Seguindo a abordagem feita por (Fazio 2013) ao trabalho de (Cressie 1993), o método de Kriging divide-se em duas partes, uma designada de valor esperado ou valor médio de interpolação, e a outra designada por ruído. Esta última é uma parte imprevisível, cuja média é zero. Sabendo que a tendência é representada por  $t$ , o dado por  $z$  e o ruído por  $s$ , sabe-se que o valor esperado dos dados é igual à tendência, conforme mostra a equação (4.2) após dedução da equação (4.1).

$$\begin{aligned} z &= t + s \\ &= t + 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} E(z) &= E(t) + E(s) \\ &= E(t) + 0 \\ &= E(t) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Sabendo que este método se baseia na interpolação do dado  $z$  no ponto  $j$  com base numa soma ponderada dos dados amostrais, dado pela equação (4.3), onde  $i$  representa os pontos da amostra,  $N$  o número de pontos da amostra, e  $j$  indica o ponto a interpolar. Os pesos que afetam a soma ponderada são representados pelo  $\omega$ .

$$z_j = \sum_{i=1}^N \omega_i \cdot z_i \quad (4.3)$$

A obtenção dos pesos passa por minimizar a variância, o valor esperado do quadrado da diferença entre o valor interpolado e o valor real, ou seja minimizar o erro médio quadrático (usualmente denominado por *Mean Square Error*, MSE). Essa representação é feita na equação (4.4).

$$\sigma^2 = \left( \underbrace{\sum_{i=1}^N \omega_i \cdot Z_i}_{\text{Valor Interpolado de Kriging}} - \underbrace{Z_j}_{\text{Valor Real}} \right)^2 \quad (4.4)$$

O próximo passo é definir o semivariograma experimental, que é dado pela metade do valor esperado da diferença quadrática entre os valores de dois pontos  $a$  e  $b$  cuja distância entre si é  $h$ .

Contudo, pode-se trabalhar com este método como um mero interpolador, conforme é apresentado pelo Kriging Simples (ver Algoritmo 1), Kriging Normal (ver Algoritmo 2) e o Kriging Universal (ver Algoritmo 3). É de realçar que estes algoritmos apresentados para este método de interpolação e as suas variantes, é de acordo com uma interpolação espacial, ou seja, com somente duas variáveis para o ponto a interpolar (conforme é visível no Algoritmo 3). Os algoritmos apresentados são facilmente adaptáveis para problemas de maior ou menor dimensão.

Dependendo das variáveis estocásticas no campo aleatório, e os vários graus estacionários assumidos, poder-se-á calcular de diferentes maneiras os pesos associados. A estas diferentes maneiras de cálculo denominamos os vários tipos de Kriging, Kriging Simples (KS), Kriging Normal (KO), Kriging Universal (KU). Os algoritmos que se seguem mostram como são elaborados os três tipos e quais as diferenças entre estes pela mesma ordem referenciada o Algoritmo 1, o Algoritmo 2 e o Algoritmo 3.

-----|| **KRIGING SIMPLES**|| -----

**Dados:**  
 Dados amostrais (N dados), representados pela matriz Z. O símbolo Z[i] representa o valor do dado da amostra no ponto i=1..número de pontos amostrais (N, valores de treino).  
 Modelo da função de *kernel*  $\gamma$  já com parâmetros definidos.

**Funções:**  $h$  (Distância),  $\gamma$  (Função de Kernel)

**Resultado:**  
 Dados interpolados representados por  $\hat{Z}$ . O símbolo  $\hat{Z}[j]$  representa o valor do dado da amostra no ponto j=1..número de pontos a interpolar (num).

---

**Início**

**Para** a=1... N **faça**

**Para** b=1... N **faça**

$\Gamma[a,b] = \gamma(\text{Distância}(a,b));$

**Fim**

**Fim**

**Para** j=1... num **faça**

**Para** a=1...N **faça**

$\Upsilon[a] = \gamma(\text{Distância}(a,j));$

**Fim**

$\Omega_j = \Gamma^{-1} \cdot \Upsilon;$

$\hat{Z}[j] = \Omega_j^T \cdot Z$

**Fim**

**Fim**

---

Algoritmo 1 – Kriging Simples (*Simple Kriging*) – Adaptado de (Fazio 2013)

Este método, apresentado no Algoritmo 2, é comum ser denominado como *Kriging Biased*, enquanto o Kriging Simples como *Kriging Unbiased* (apresentado no Algoritmo 1).

-----|| **KRIGING NORMAL** || -----

**Dados:**

Dados amostrais (N dados), representados pela matriz Z. O símbolo Z[i] representa o valor do dado da amostra no ponto i=1..número de pontos amostrais (N, valores de treino).

Modelo da função de *kernel*  $\gamma$  já com parâmetros definidos.

**Funções:**  $h$  (*Distância*),  $\gamma$  (*Função de Kernel*)

**Resultado:**

Dados interpolados representados por  $\hat{Z}$ . O símbolo  $\hat{Z}[j]$  representa o valor do dado da amostra no ponto j=1..número de pontos a interpolar (num).

**Início**

**Para** a=1... N **faça**

**Para** b=1... N **faça**

$\Gamma[a,b] = \gamma(\text{Distância}(a,b));$

**Fim**

$\Gamma[a,N+1] = 1;$

$\Gamma[N+1,a] = 1;$

**Fim**

$\Gamma[N+1,N+1] = 0;$

**Para** j=1... num **faça**

**Para** a=1...N **faça**

$Y[a] = \gamma(\text{Distância}(a,j));$

**Fim**

$Y[N+1] = 1;$

$\Omega_j = \Gamma^{-1} \cdot Y;$

$Z[N+1] = 0;$

$\hat{Z}[j] = \Omega_j^T \cdot Z;$

**Fim**

**Fim**

Algoritmo 2 – Kriging Normal (*Ordinary Kriging*) – Adaptado de (Fazio 2013)

O Algoritmo 3 apresenta a variante do método de Kriging que contempla valores na matriz de covariâncias ao ponto a estimar ( $Y$ ) com valores iguais aos das variáveis desse mesmo ponto, tal como poderá ser analisado na variante correspondente do método de interpolação espacial de RBF, no capítulo 4.3.2.

-----|| KRIGING UNIVERSAL || -----

**Dados:**

Dados amostrais ( $N$  dados), representados pela matriz  $Z$ . O símbolo  $Z[i]$  representa o valor do dado da amostra no ponto  $i=1..$ número de pontos amostrais ( $N$ , valores de treino). As coordenadas dos pontos são representadas por  $X$  e  $Y$ , horizontal e vertical.

Modelo da função de *kernel*  $\gamma$  já com parâmetros definidos.

**Funções:**  $h$  (Distância),  $\gamma$  (Função de Kernel)

**Resultado:**

Dados interpolados representados por  $\hat{Z}$ . O símbolo  $\hat{Z}[j]$  representa o valor do dado da amostra no ponto  $j=1..$ número de pontos a interpolar (num).

**Início**

**Para**  $a=1 \dots N$  **faça**

**Para**  $b=1 \dots N$  **faça**

$\Gamma[a,b] = \gamma(\text{Distância}(a,b));$

**Fim**

$\Gamma[a,N+1] = 1;$

$\Gamma[a,N+2] = X[a];$

$\Gamma[a,N+3] = Y[a];$

$\Gamma[N+1:N+3,a] = \Gamma[a,N+1:N+3];$

**Fim**

$\Gamma[N+1:N+3,N+1:N+3] = [0];$

**Para**  $j=1 \dots \text{num}$  **faça**

**Para**  $a=1 \dots N$  **faça**

$Y[a] = \gamma(\text{Distância}(a,j));$

**Fim**

$Y[N+1] = 1;$

$Y[N+2] = X[j];$

$Y[N+3] = Y[j];$

$\Omega_j = \Gamma^{-1} \cdot Y;$

$Z[N+1:N+3] = [0];$

$\hat{Z}[j] = \Omega_j^T \cdot Z;$

**Fim**

**Fim**

### 4.2.2. Funções de covariância

Existem inúmeras funções de covariância, também conhecidas como funções de *kernel*. Algumas das mais comuns são apresentadas neste subcapítulo, onde  $x$  e  $x'$  são dois pontos, extraídas da obra de (Rasmussen & Williams 2004).

- ❖ Constante (C) :  $K_C(x, x') = C$
- ❖ Linear (L):  $K_L(x, x') = x^T x'$
- ❖ Ruído Gaussiano (GN):  $K_{GN}(x, x') = \sigma^2 \delta_{x, x'}$
- ❖ Exponential Quadrada (SE):  $K_{SE}(x, x') = \exp\left(-\frac{|d|^2}{2l^2}\right)$
- ❖ Ornstein–Uhlenbeck (OU):  $K_{OU}(x, x') = \sigma \exp\left(-\frac{|d|}{l}\right)$
- ❖ Matérn:  $K_{Matérn}(x, x') = \frac{2^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)} \left(\frac{\sqrt{2\nu}|d|}{l}\right)^\nu K_\nu\left(\frac{\sqrt{2\nu}|d|}{l}\right)$
- ❖ Periódica (P):  $K_P(x, x') = \exp\left(-\frac{2\sin^2\left(\frac{d}{2}\right)}{l^2}\right)$
- ❖ Quadrática Racional (RQ):  $K_{RQ}(x, x') = (1 + |d|^2)^{-\alpha}$ ,  $\alpha \geq 0$

Foram usadas diversas funções para os casos de estudo feitos, contudo foi inicialmente só utilizada a função de *Ornstein-Uhlenbeck*, mas como os resultados obtidos não foram satisfatórios na análise do desempenho na metamodelação das propriedades do material compósito, decidiu-se utilizar outras funções (usadas na RBF, funções de ativação) que permitiram avaliar o desempenho com cada uma destas, conforme é exposto no capítulo 7.3.2. Ao contrário da metamodelação das propriedades mecânicas do compósito, para a metamodelação da máxima deformada transversal e para a frequência fundamental a função *Ornstein-Uhlenbeck* deu logo bons resultados, conforme pode ser analisado no capítulo 7.3.3, pelo que não houve necessidade de utilizar outras.

### 4.3. Redes Neurais Artificiais com Funções de Base Radial

As Redes com Funções de Base Radial (RBFN) são Redes Neurais Artificiais (RNA) que utilizam neurónios com funções de ativação de base radial. (Broomhead & Lowe 1988)(Bishop 1995) Estas funções têm como característica principal a sua entrada ser uma distância, alguns exemplos de funções de base radial são apresentados nas equações (4.5), (4.6), (4.7), (4.8) e (4.9). (Carr et al. 1997) (Press et al. 2007)

$$\text{Linear (LIN): } \phi(h) = a \cdot \|h\| \quad (4.5)$$

$$\text{Cúbica (CUB): } \phi(h) = \|h\| \cdot \|h\| \cdot \|h\| \quad (4.6)$$

$$\text{Gaussiana Exponencial (GE): } \phi(h) = e^{-b\left(\frac{h}{a}\right)^2} \quad (4.7)$$

$$\text{MultiQuadrática (MQ): } \phi(h) = \sqrt{a^2 + (bh)^2} \quad (4.8)$$

$$\text{Placa Fina (TP): } \phi(h) = \|h\| \cdot \|h\| \cdot \log(\|h\| + 1) \quad (4.9)$$

Nas funções apresentadas, “h” é a distância e as restantes letras são parâmetros que necessitam de ser estimados. A função gaussiana, equação (4.7), é bastante utilizada no presente trabalho e o parâmetro que lhe está associado, “a”, é usualmente denominado por *spread*. (Fazio 2013)

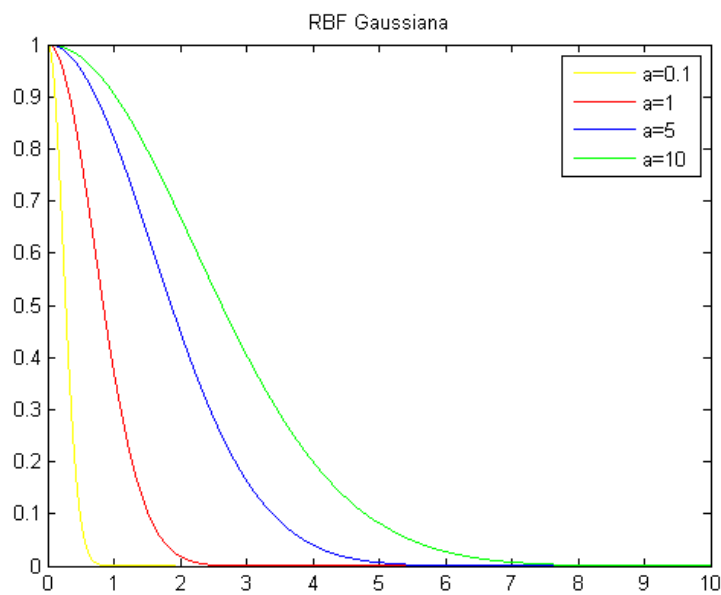


Figura 4.3 – Função gaussiana com vários valores de *spread*

Quanto menor o valor do *spread*, menos suave é a interpolação, conforme se pode verificar pela Figura 4.3. Na interpolação de valores através da Rede RBF, o ponto a interpolar ativa cada neurónio dependendo da sua distância ao centro da função de base radial do neurónio em causa. Assim, o grau de ativação de cada neurónio é dependente da distância do centro da sua função ao ponto a interpolar. Esta ativação é calculada pela função de base radial, ou seja, a função de ativação como é usualmente designada em qualquer Rede Neuronal Artificial (RNA).

Caso o ponto a interpolar coincida com o valor do centro da função de ativação do neurónio em causa, então a ativação, também denominada como contribuição, é total, ou seja, a distância entre ambos é nula e a função retornará o valor de um (1) (conforme se pode verificar na Figura 4.3). Na situação em que a distância seja grande, a ativação/contribuição será próxima de zero (0), conforme ilustra o gráfico na Figura 4.3.

A Figura 4.4 ilustra um exemplo da arquitetura de uma RBFN (Fazio 2013), onde na camada de entrada se encontram as variáveis de projeto ( $x$  e  $y$ ), que formam um ponto de entrada  $i$ . A distância  $h$  entre o centro de cada função de base radial  $\phi$  e o ponto  $i$ , é usada para calcular a ativação  $\phi(h)$ , na camada intermédia com cinco (5) neurónios. Posteriormente, na camada de saída, o valor calculado é multiplicado pelo peso  $\omega$  associado a cada neurónio, e somando o contributo de todos é obtido a saída  $z$ .

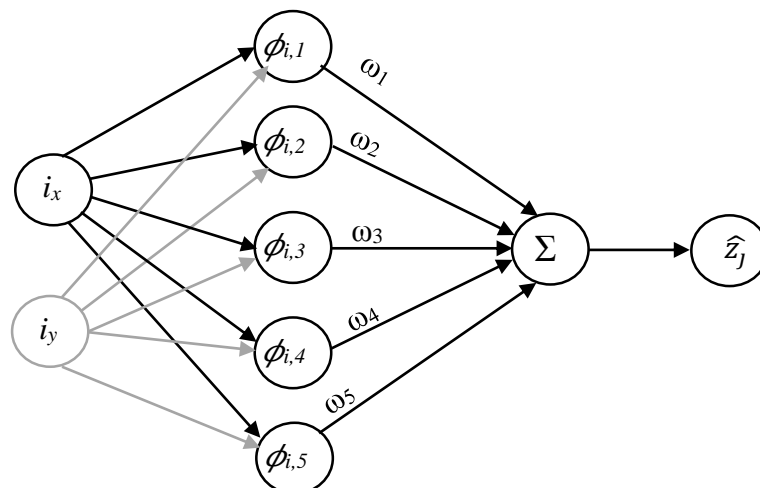


Figura 4.4 – Exemplo de arquitetura de uma RBFN, adaptado de (Fazio 2013)

Deste modo a equação da interpolação da RBFN está expressa na equação (4.10), em que  $\phi_{ij}$  é a função de base radial associada ao neurónio onde a distância  $h(i,j)$  é entre o ponto  $i$  e o centro  $j$  da função. Esta equação permite estimar a saída,  $\hat{z}_j$ , onde o cálculo dos pesos e o respetivo treino é apresentado no subcapítulo seguinte.

$$\hat{z}_j = \sum_i \omega_i \phi_{ij} \quad (4.10)$$

### 4.3.1. Formulação do treino da RBFN

Para que seja possível obter a rede, e assim obter através da interpolação um resultado estimado, conforme expressado na equação (4.10), é necessário numa primeira fase treinar a rede de modo a obter os pesos que melhor se adequam aos  $N$  pontos de treino  $i$  fornecidos à rede.

O treino define a posição do centro de cada função RBF de cada neurónio, define a quantidade de neurónios a usar e os parâmetros associados a cada função (como o *spread*), e os pesos  $\omega$  na equação (4.10). A definição mais comum é agrupar-se os dados amostrais espacialmente próximos e atribuir a estes uma só função RBF com um centro, utilizando algoritmos como *K-Means* apresentado por (Hartigan & Wong 1979). Existem outras formas de treino, por exemplo, posicionar os centros das RBF aleatoriamente e ajustar somente os pesos e os parâmetros de modo a obter uma estimação suficiente. (Fazio 2013)

Relativamente ao ajuste dos parâmetros das funções de ativação, existem diversos métodos, sendo alguns destes baseados em aproximações com o ajuste iterativo dos pesos minimizando uma função de erro. Essa função de erro é entre o valor interpolado  $\hat{z}_j$  (valor estimado) através da rede, processo iterativo, com o valor do dado amostral  $z_j$  (valor real). Os métodos mais conhecidos de aproximação dos parâmetros são *Levenberg-Marquadt* (Marquardt 1963), *Gradiente Descendentes* (Avriel 2003), e *Simulated Annealing* (Kirkpatrick et al. 1983). Vários métodos são comparados no trabalho realizado por (Fasshauer & Zhang 2007).

O presente trabalho prende-se com o estudo das RBF Exatas, ou seja, onde o número de neurónios é igual ao número de pontos de treino (dados amostrais), onde o centro das funções de base radial de cada neurónio é o próprio ponto. Deste modo existirão na rede  $n$  relações, conforme expressado na equação (4.12)

$$\begin{aligned} \sum_i \omega_i \phi_{1i} &= z_1 \\ \sum_i \omega_i \phi_{2i} &= z_2 \\ &\vdots \\ \sum_i \omega_i \phi_{ni} &= z_n \end{aligned} \quad (4.11)$$

Quando se está a utilizar este tipo de RBFN, o cálculo dos pesos é mais simples, devido ao posicionamento do centro das funções RBF ser sobre os dados amostrais. Para obter os pesos basta resolver um sistema de equações lineares, expressas em (4.12). Analisando em forma de matrizes, obtêm-se as relações apresentadas nas equações (4.12) e (4.13).

$$\overbrace{\begin{bmatrix} \phi_{1i} & \phi_{2i} & \cdots & \phi_{1i} \\ \phi_{1i} & \phi_{1i} & \cdots & \phi_{1i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{1i} & \phi_{1i} & \cdots & \phi_{1i} \end{bmatrix}}^{\Phi} \overbrace{\begin{bmatrix} \omega_i \\ \omega_i \\ \vdots \\ \omega_i \end{bmatrix}}^{\Omega_r} = \overbrace{\begin{bmatrix} z_1 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_1 \end{bmatrix}}^{\mathbf{Z}} \quad (4.12)$$

Aplicando regras de multiplicação matricial, pode-se obter a equação simplificada (4.13) que possibilita o cálculo dos pesos  $\Omega_r$  através da multiplicação da inversa da matriz das funções de ativação  $\Phi^{-1}$  (onde cada elemento contempla a distância entre cada neurónio, formando assim uma matriz quadrada) pelo vetor dos resultados amostrais  $\mathbf{Z}$ .

$$\begin{aligned} \Phi \Omega_r &= \mathbf{Z} \\ \Omega_r &= \Phi^{-1} \mathbf{Z} \end{aligned} \quad (4.13)$$

### 4.3.2. Variações da RBFN Exata

À semelhança do Kriging existe a possibilidade de obter variantes da RBFN, neste caso exata, variações semelhantes às expressas no subcapítulo 4.2.1. A necessidade destas variações foi devido à necessidade de interpolação de pontos bastante distanciados dos centros de todos os neurónios, onde as RBFN respondem com zero de ativação, ou seja, não há nenhum neurónio ativado.

(Carr et al. 1997) e (Sathyanarayanamurthy & Chinnam 2009) apresentaram uma variação com a introdução de um polinómio na interpolação, permitindo assim que os neurónios sejam ajustados para representar a tendência local, enquanto que o polinómio é ajustado para representar uma tendência global, tal como no Kriging Universal e no Normal.

Quando se fala na RBFN Exata é o mesmo que ser sem *bias*, tal como o algoritmo de Kriging Simples (representado no Algoritmo 1), conforme pode ser visto no Algoritmo 4. Contudo, tal como já foi mencionado, há a hipótese de haver um polinómio de interpolação como é o caso expresso na equação (4.14) e na (4.16) que permitir haver variações ao algoritmo na forma interpoladora mais simples, originando a RBFN com *bias* constante e a RBFN com *bias* variável (ver Algoritmo 5e Algoritmo 6).

O grau do polinómio também influencia os resultados, as equações apresentadas contempla polinómios lineares, ou seja, a relação entre as variáveis de entrada é linear, contudo esta análise poderia ser feita (os algoritmos desenvolvidos no *MatLab*© estão preparados para tal, contudo não foi alvo de estudo neste trabalho) para polinómios de grau superior.

**RBFN sem bias**

Este método de interpolação baseia-se em funções de ativação que serão calculadas em função das distância ( $h$ ) entre 2 pontos, e a RBFN sem *bias* é uma rede não enviesada, ou seja, não é influenciada pelo ponto a interpolar com é o caso de uma das suas variantes. O algoritmo deste método apenas contempla o cálculo dos pesos da rede com as distâncias entre pontos, conforme se pode verificar no Algoritmo 4.

-----|| **RBFN Exata sem bias** || -----

**Dados:**

Dados amostrais (N dados), representados pela matriz Z. O símbolo  $Z[i]$  representa o valor do dado da amostra no ponto  $i=1..$ número de pontos amostrais (N, valores de treino).

Modelo da função de ativação  $\phi$  já com parâmetros definidos.

**Funções:**  $h$  (Distância),  $\phi$  (Função de Ativação)

**Resultado:**

Dados interpolados representados por  $\hat{Z}$ . O símbolo  $\hat{Z}[j]$  representa o valor do dado da amostra no ponto  $j=1..$ número de pontos a interpolar (num).

**Início**

**Para**  $a=1 \dots N$  **faça**

**Para**  $b=1 \dots N$  **faça**

$\Phi[a,b] = \phi(\text{Distância}(a,b));$

**Fim**

**Fim**

$\Omega_j = \Phi^{-1} \cdot Z$

**Para**  $j=1 \dots \text{num}$  **faça**

**Para**  $a=1 \dots N$  **faça**

$\Upsilon[a] = \phi(\text{Distância}(a,j));$

**Fim**

$\hat{Z}[j] = \Omega_j^T \cdot \Upsilon$

**Fim**

**Fim**

Algoritmo 4 – RBFN sem *bias*, também designada RBFN Exata – Adaptado de (Fazio 2013)

### RBFN com *bias* constante

O algoritmo associado a este método de interpolação é semelhante ao Kriging Normal (ver Algoritmo 2), onde a constante  $\lambda_c$  é multiplicada pelo valor unitário. O esquema da rede está ilustrado na Figura 4.5 e pode ser verificada a sua estrutura no Algoritmo 5.

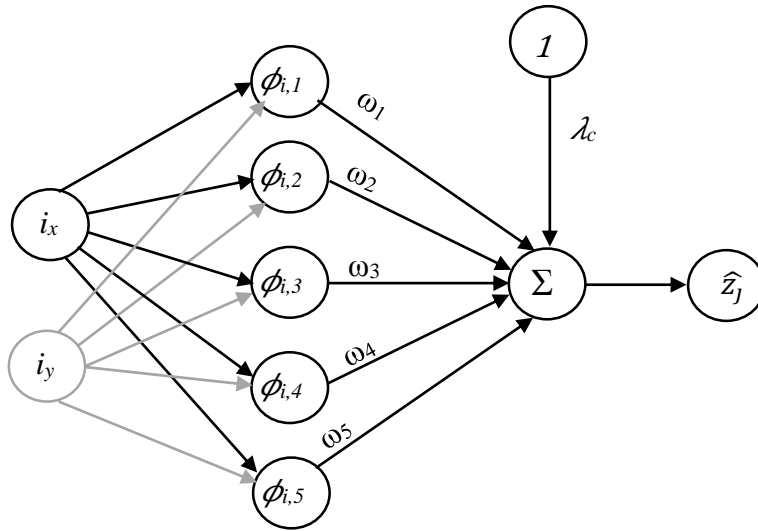


Figura 4.5 – Esquema da RBFN com *bias* constante

$$\hat{z}_j = \lambda_c + \sum_i \omega_i \phi_{ij} \quad (4.14)$$

Na equação (4.15) pode-se ver na matriz das funções de ativações ( $\Phi$ ) que existe mais uma coluna e uma linha que estão praticamente preenchidas com o valor unitário, tal como nos indica a matriz correspondente no algoritmo de Kriging Normal (ver Algoritmo 2).

$$\begin{bmatrix} \phi_{1i} & \phi_{1i} & \cdots & \phi_{1i} & 1 \\ \phi_{1i} & \phi_{1i} & \cdots & \phi_{1i} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 1 \\ \phi_{1i} & \phi_{1i} & \cdots & \phi_{1i} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_i \\ \omega_i \\ \vdots \\ \omega_i \\ \lambda_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

A obtenção através da equação na forma simplificada é igual à equação (4.13)

-----|| **RBFN Exata com *bias* constante**|| -----

**Dados:**

Dados amostrais (N dados), representados pela matriz Z. O símbolo Z[i] representa o valor do dado da amostra no ponto i=1..número de pontos amostrais (N, valores de treino).

Modelo da função de ativação  $\phi$  já com parâmetros definidos.

**Funções:**  $h$  (Distância),  $\phi$  (Função de Ativação)

**Resultado:**

Dados interpolados representados por  $\hat{Z}$ . O símbolo  $\hat{Z}[j]$  representa o valor do dado da amostra no ponto j=1..número de pontos a interpolar (num).

**Início**

**Para** a=1... N **faça**

**Para** b=1... N **faça**

$\Phi[a,b] = \phi(\text{Distância}(a,b));$

**Fim**

$\Phi [a,N+1] = 1;$

$\Phi [N+1,a] = 1;$

**Fim**

$\Phi [N+1,N+1] = 0;$

$Z [N+1] = 0;$

$\Omega_j = \Phi^{-1} \cdot Z$

**Para** j=1... num **faça**

**Para** a=1...N **faça**

$\Upsilon[a] = \phi (\text{Distância}(a,j));$

**Fim**

$\Upsilon [N+1] = 1;$

$\hat{Z}[j]=\Omega_j^T \cdot \Upsilon$

**Fim**

**Fim**

---

Algoritmo 5 - RBFN com *bias* constante – Adaptado de (Fazio 2013)

### RBFN com *bias* variável

O algoritmo associado a este método de interpolação é semelhante ao Kriging Universal (ver Algoritmo 3), onde as constantes  $\lambda_x$  e  $\lambda_y$ , são multiplicadas pelos valores das variáveis do ponto a estimar/interpolar. O esquema da rede está ilustrado na Figura 4.6 e pode ser verificada a estrutura no Algoritmo 6.

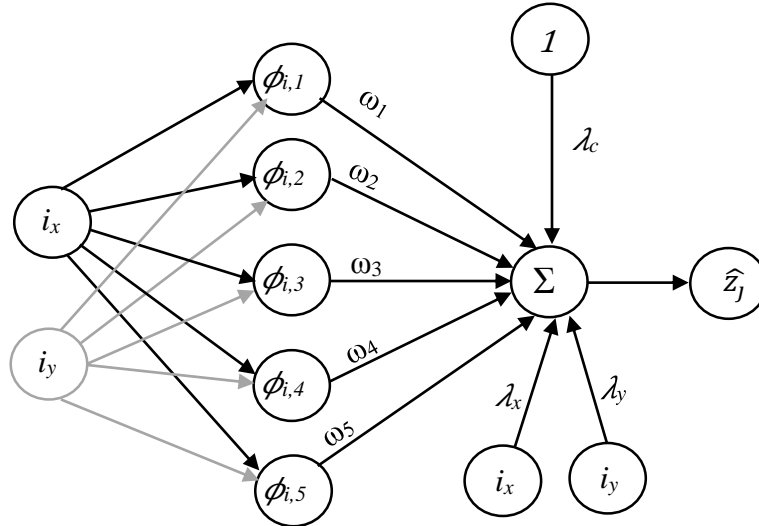


Figura 4.6 - Esquema da RBFN com *bias* variável

$$\hat{z}_j = \lambda_c + i_x \lambda_x + i_y \lambda_y + \sum_i \omega_i \phi_{ij} \quad (4.16)$$

Na equação (4.17) pode-se ver na matriz das funções de ativações ( $\Phi$ ) que existe além da coluna e da linha que estão praticamente preenchidas com o valor unitário, existem também duas colunas e duas linhas com os valores das variáveis do ponto a estimar/interpolar, tal como nos indica a matriz correspondente no algoritmo de Kriging Universal (ver Algoritmo 3).

$$\begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdots & \phi_{1i} & 1 & x_1 & y_1 \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{2i} & 1 & x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 1 & \vdots & \vdots \\ \phi_{n1} & \phi_{ni} & \cdots & \phi_{ni} & 1 & x_n & y_n \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & 0 & 0 & 0 \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_n \\ \lambda_c \\ \lambda_x \\ \lambda_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

A obtenção através da equação na forma simplificada é igual à equação (4.13)

-----|| **RBFN Exata com *bias* variável** || -----

**Dados:**

Dados amostrais (N dados), representados pela matriz Z. O símbolo Z[i] representa o valor do dado da amostra no ponto i=1..número de pontos amostrais (N, valores de treino).

Modelo da função de ativação  $\phi$  já com parâmetros definidos.

**Funções:**  $h$  (*Distância*),  $\phi$  (*Função de Ativação*)

**Resultado:**

Dados interpolados representados por  $\hat{Z}$ . O símbolo  $\hat{Z}[j]$  representa o valor do dado da amostra no ponto j=1..número de pontos a interpolar (num).

**Início**

**Para** a=1... N **faça**

**Para** b=1... N **faça**

$$\Phi[a,b] = \phi(\text{Distância}(a,b));$$

**Fim**

$$\Phi [a,N+1] = 1;$$

$$\Phi [a,N+2] = X[a];$$

$$\Phi [a,N+3] = Y[a];;$$

$$\Phi [N+1:N+3,a] = \Phi [a,N+1:N+3];$$

**Fim**

$$\Phi [N+1:N+3,N+1:N+3] = [0];$$

$$Z [N+1:N+3] = 0;$$

$$\Omega_j = \Phi^{-1} \cdot Z$$

**Para** j=1... num **faça**

**Para** a=1...N **faça**

$$Y[a] = \phi (\text{Distância}(a,j));$$

**Fim**

$$Y[N+1] = 1;$$

$$Y[N+2] = X[j];$$

$$Y[N+3] = Y[j];$$

$$\hat{Z}[j]=\Omega_j^T \cdot Y$$

**Fim**

**Fim**

**Algoritmo 6 - RBFN com *bias* variável – Adaptado de (Fazio 2013)**

É de realçar que estes algoritmos apresentados para o método de interpolação RBFN Exata e as suas variantes, é de acordo com uma interpolação espacial, ou seja, com somente duas variáveis para o ponto a interpolar (conforme é visível no Algoritmo 6). Os algoritmos apresentados são facilmente adaptáveis para outra dimensão.

#### 4.4. Indicadores de desempenho

No presente trabalho serão usados diversos indicadores de desempenho da metamodelação, contudo alguns destes serão também utilizados no processo de otimização (ver capítulo 6). A análise destes indicadores permitirá avaliar a qualidade dos resultados, permitindo assim concluir que funções e que métodos deverão ser utilizados para cada caso de metamodelação. Os indicadores selecionados foram os tradicionais erro relativo e absoluto (Abramowitz & Stegun 1964) (Rabinovich 2006), o erro absoluto e relativo médios que são obtidos através dos anteriores, o erro relativo máximo que também é obtido através do erro relativo, o erro médio quadrático (Lehmann & Casella 2003) e o respetivo médio e normalizado (Hyndman & Koehler 2006) (Shen & Huang 2011). A Tabela 4.1 e a Tabela 4.2 as fórmulas dos indicadores de desempenho usados no presente trabalho.

Tabela 4.1 – Fórmulas dos indicadores de desempenho individuais

<b>Erro Absoluto (AE)</b>	$y_i - \hat{y}_i$
<b>Erro Relativo (RE)</b>	$\frac{ y_i - \hat{y}_i }{\hat{y}_i}$

Tabela 4.2 – Fórmulas dos indicadores de desempenho coletivo/global

<b>Erro Absoluto Médio (MAE)</b>	$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i - \hat{y}_i$
<b>Erro Relativo Médio (MRE) %</b>	$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{ y_i - \hat{y}_i }{\hat{y}_i} * 100$
<b>Erro Relativo Máximo (MaxRE) %</b>	$Máx \left( \frac{ y_i - \hat{y}_i }{\hat{y}_i} \right) * 100$
<b>Erro Médio Quadrático (MSE)</b>	$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$
<b>Raiz Quadrada do Erro Médio Quadrático (RMSE)</b>	$\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}$
<b>Raiz Quadrada do Erro Médio Quadrático Normalizada (NRMSE)</b>	$\frac{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}}{(y_{max} - y_{min})}$

---

## 5. Modelação e simulação no Ansys©

Este capítulo apresenta quais são as etapas para o desenvolvimento dos modelos de placas compósitas laminadas no programa de análise de elementos finitos Ansys©. É ainda descrito o elemento utilizado nas aplicações deste trabalho, as condições de fronteira e os carregamentos aplicados. A informação apresentada neste capítulo associada ao programa em uso foi baseada na documentação apresentada pela ANSYS® *Academic Research, Release 14, Help System, ANSYS, Inc.*

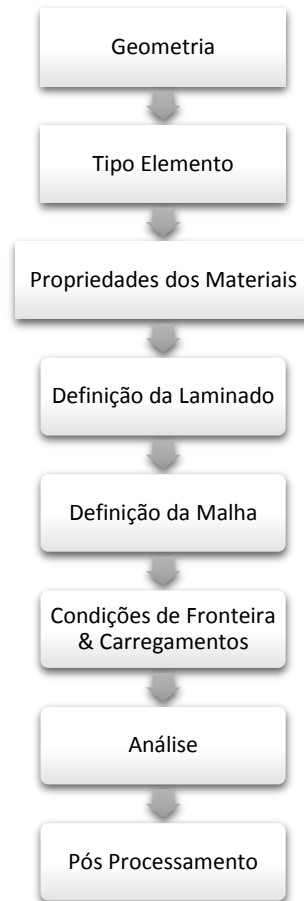
### 5.1. Modelação de placas compósitas laminadas

Os modelos de placas laminadas considerados neste, antes de prosseguir para os casos analisados nesta dissertação, foram validados os modelos do Ansys© por comparação com o trabalho realizado por (Reddy 2004). Os parâmetros selecionados para a validação foram a máxima deformada transversal, as tensões normais e de corte interlaminar (na análise estática), e a frequência fundamental (na análise dinâmica de vibrações livres).

À medida que a relação comprimento de aresta-espessura ( $a/h$ ) começa a diminuir até à relação que descreve uma placa moderadamente espessa o corte transversal vai tendo mais importância, pelo que teorias como de primeira ordem ou de ordem superior descrevem melhor o comportamento destas estruturas, ao contrário da teoria clássica (CLPT) que não contempla o efeito de corte transversal deixando deste modo a placa mais rígida ao contrário da teoria de primeira ordem de deformação de corte (FSDT) ou teorias de ordem de corte superiores. Deste modo o caso de estudo a analisar neste trabalho terá em consideração o efeito de corte transversal, numa abordagem de teoria FSDT, pelo que a escolha adequada do elemento é muito importante.

### 5.1.1. Etapas da modelação

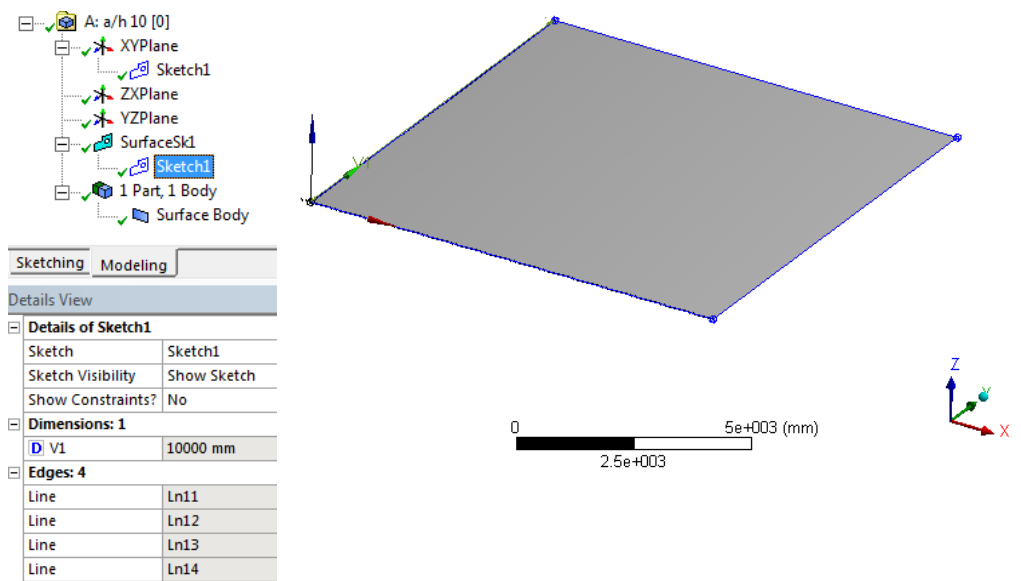
Para obter modelos válidos no *Ansys*© é necessário seguir uma determinada lógica de execução das etapas, tal como formulado na Figura 5.1.



**Figura 5.1 – Etapas até à solução no *Ansys*©**

#### **Geometria**

A primeira etapa da modelação no *Ansys*© é a criação da geometria, ou seja, da placa com as dimensões pretendidas, conforme ilustra a Figura 5.1. A modelação da geometria da estrutura foi feita no *DesignModeler* do *Ansys*©, onde é necessário definir a estrutura como superfície sem relevância para o valor de espessura atribuído (o valor final é afetado pela caracterização de cada lâmina constituinte do laminado).



**Figura 5.2 – Geometria exemplar de uma placa e respetiva árvore de operações e de detalhes de esboços**

Outro aspeto importante de referir quanto à geometria é a seleção do quadrado do lado esquerdo das dimensões inseridas (onde está assinalado um “D” na Figura 5.2 que apresenta um exemplo de uma geometria), ou seja, a criação de parâmetros de entradas para posterior controlo. Outras propriedades e características podem ser parâmetros de entrada, como as propriedades do material em causa, valor de esforços aplicados, entre outros. A diversa escolha acontece também para os parâmetros de saída, que têm de ser obtidos após o pós-processamento, tais como tensões, deformações, entre outros. Apesar da Figura 5.2 ser somente um exemplo, os casos de estudos abordados focam-se em geometrias semelhantes à apresentada na figura, pois são igualmente placas.

### Tipo de Elemento

A etapa seguinte é a escolha de um elemento apropriado, existindo algumas possibilidades para as estruturas compósitas, conforme indica a Tabela 5.1. Tendo em atenção o tipo de estrutura a analisar, dentro destes elementos mencionados foi selecionado o elemento *Shell181*, pois é o mais utilizado em aplicações semelhantes pela literatura da área.

Tabela 5.1 – Tipo e nome de elementos do Ansys® apropriados para modelar estruturas compósitas

<b>Tipo de Elemento</b>	<b>Nome do Elemento</b>
Casca	Shell181, Shell281, Shell163
Sólido	Solid186, Solid46, Solid191, solid95
Sólido-Casca	Solsh190
Viga	Beam188, Beam189

Esta etapa é meramente de decisão do utilizador, consoante a aplicação, posteriormente na etapa de definição da malha é que é referido qual o elemento desejado. Para uma descrição mais completa do elemento selecionado no presente trabalho é necessário consultar o subcapítulo 5.1.2.

### **Propriedades dos Materiais**

As propriedades dos materiais constituintes do laminado serão introduzidas na biblioteca de materiais do Ansys®, definindo assim os materiais ortotrópicos usados (lâminas ortotrópicas de fibra com matriz de resina). Os programas mais comuns de FEA, como o Ansys®, apenas possibilitam a introdução das propriedades dos materiais ao nível da meso escala ou superior, daí a necessidade da homogeneização (ver subcapítulo 3.1).

### **Definição do Laminado**

Uma característica importante de um material compósito laminado é a sua configuração quanto à sequência de empilhamento e as propriedades das lâminas constituintes. Cada lâmina poderá ser de um material diferente e as suas fibras poderão ter direções diferentes. Para compósitos unidirecionais a direção da fibra define a orientação da lâmina em relação ao referencial do laminado. Existem assim dois métodos de configuração do laminado no Ansys®.

- **Método 1 - Definição das propriedades de cada lâmina**

Neste método a configuração da camada é feita camada a camada de baixo para o topo. A camada inferior do laminado é numerada como a lâmina 1, e as lâminas adicionadas ao empilhamento de baixo para cima são numeradas sequencialmente a partir da inferior (lâmina 1) na direção positiva do eixo z, conforme ilustra Figura 5.3. Esta figura apresenta para cada lâmina as editáveis características, como a atribuição um material, o número de pontos de integração ao longo da espessura da mesma, a orientação e o aspeto gráfico.

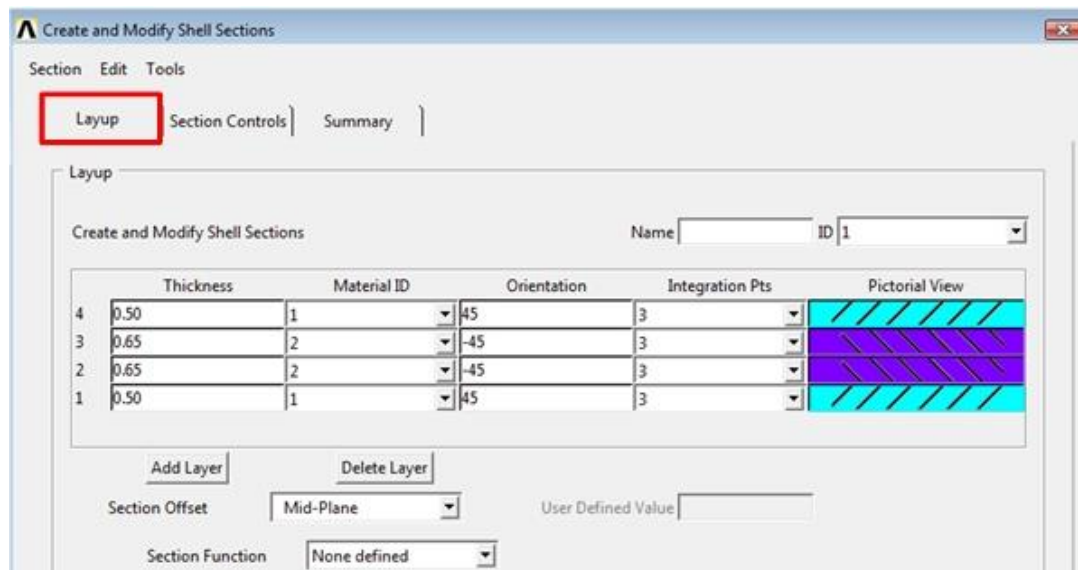


Figura 5.3 – Definição da sequência de empilhamento do laminado no Ansys©

Estas características fazem parte da *Layer Data*, onde usando os comandos *Section* (*sectype*, *secdata*, *secnum*, etc.) é possível caracterizar cada secção definida e composta por lâminas.

**MAT** – comando associado ao número de referência do material em causa.

**THETA** – comando associado ao ângulo da orientação da lâmina que define a orientação do sistema de coordenadas da lâmina em relação ao sistema de coordenadas dos elementos. O ângulo é introduzido em graus.

**TK** – comando associado à espessura da lâmina. No caso de espessura constante apenas é necessário aplicar TK(1), caso contrário deve ser definida a espessura dos quatro nós do elemento. Para modelar camadas contínuas, onde se pretende modelar apenas mais uma parte da estrutura com mais camadas, essas camadas a mais devem ser modeladas com espessura nula, designadas como “*dropped layers*” conforme ilustra a camada 2 na Figura 5.4.

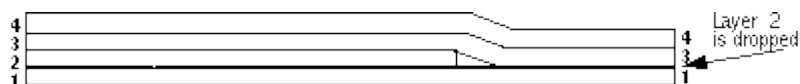


Figura 5.4 - Laminado com *dropped layers*

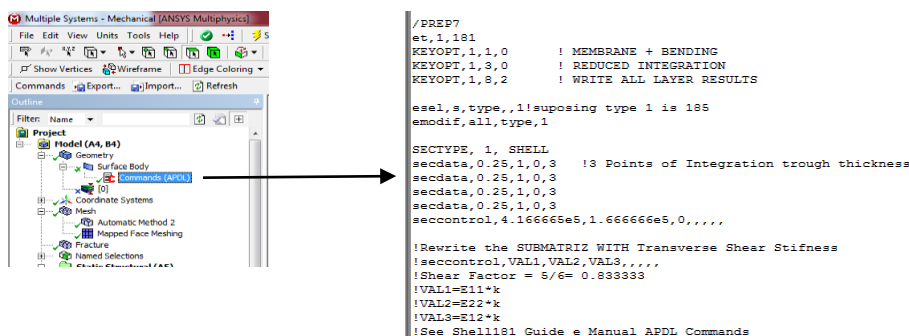
**NUMPT** - comando associado ao número de pontos de integração ao longo da espessura. Este número permite definir o grau de detalhe dos resultados computacionais. Para estruturas finas (com relações de  $a/h$  maiores que 20) e com várias lâminas, um ponto é suficiente.

Na aplicação de elementos *Shell181* caso se defina as secções com os comandos de *Section*, pode ser atribuído as secções um *offset* durante a definição de cada, usando o comando *SECOFFSET*, também referido na Figura 5.3 na introdução manual sem programação APDL.

- **Método 2 - Definição das matrizes constitutivas que relacionam as forças e momentos generalizados com extensões e curvaturas generalizadas**

Este método está associado aos comandos do Ansys® relacionados com “*Preintegrated General Shell Sections*”. É possível deste modo definir-se um comportamento homogéneo da secção da casca/placa diretamente através comandos como (*sectype,,gens*), definindo assim as propriedades de membrana, flexão e acoplamento membrana –flexão. Este método possibilita a análise de geometrias complexas, com padrões repetitivos, usando propriedades equivalentes da secção da casca/placa. Em termos computacionais exige menos esforço computacional, pois não são necessários pontos de integração ao longo da espessura dos elementos.

O método 1 foi o método utilizado nos casos de estudo abordados, com comandos APDL num *script*, conforme ilustra a Figura 5.5 um exemplo, para a definição do laminado.

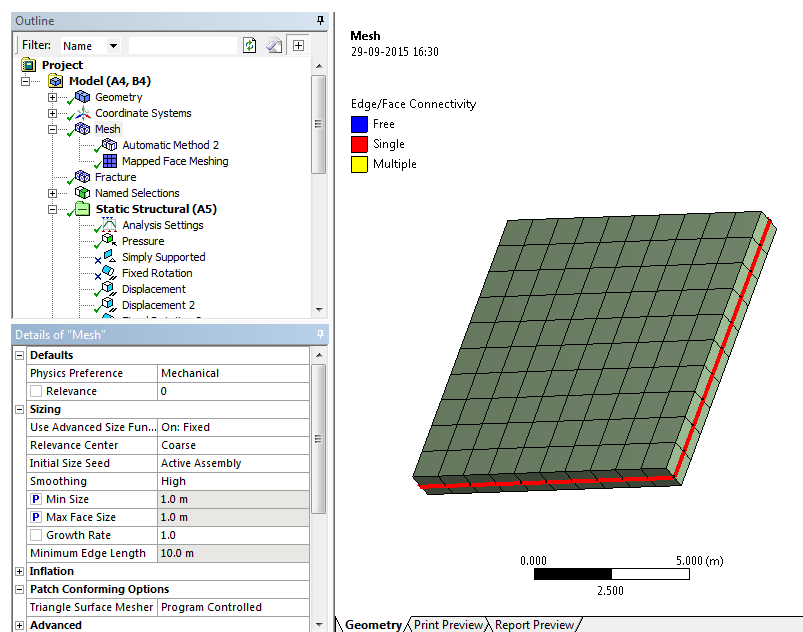


**Figura 5.5 – Script com comandos APDL para definição do laminado da placa**

## Definição da Malha

O tamanho de elemento é uma característica importante na precisão dos resultados, bem como na convergência dos mesmos, conforme se poderá verificar nas aplicações feitas aos casos de estudo abordados. Foram feitos estudos quanto ao tamanho de elemento, sendo estes sempre quadrangulares pois melhora os resultados obtidos conforme mencionado pela literatura do elemento *Shell181* (ver Anexo A). A definição da malha poderia ter sido feita com comandos ADPL num *script*, contudo no presente trabalho foi definida no *Workbench*, que é mais interativo com o utilizador e com uma aparência semelhante aos comuns programas de FEA, através do módulo *Static Structural* que tem o processador *Mechanical APDL*.

A Figura 5.6 ilustra um exemplo de uma placa modelada no *Ansys©*, lado direito, e a definição da malha, lado esquerdo inferior, onde estão parametrizados os tamanhos mínimo e máximo dos elementos, garantido que são iguais em toda a estrutura. Deste modo é possível garantir a validade do estudo da influência do tamanho dos elementos nos resultados da máxima deformada transversal, tensões e frequência fundamental.



**Figura 5.6 – Definição da malha de uma placa com iguais elementos, no *Static Structural* do *Ansys©***

Outras opções podem ser ativadas na discretização da malha, como por exemplo a análise do aspeto dos elementos. Assim foi possível validar que todos os elementos foram gerados com iguais dimensões, conforme ilustra a Figura 5.7.

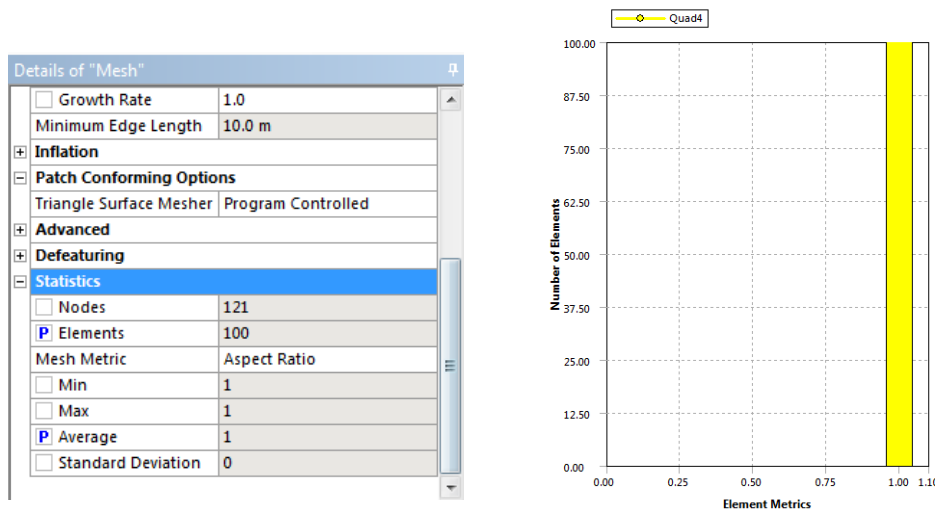


Figura 5.7 – Análise da relação de aspeto dos elementos usados na discretização, no Ansys®

### Condições de Fronteira & Carregamentos

Para interferir no ambiente a que a estrutura está sujeita, podem-se introduzir carregamentos (pressões, forças, pressões hidrostáticas, esforços de rolamentos, forças remotas, pretensões de parafusos, esforços de juntas), condições térmicas, acoplamentos, equações de constrangimentos, condições de inércia (acelerações iniciais, gravidade), condições de suporte (encastramentos, zonas livres, deslocamentos, restrições de rotação, suportes elásticos), entre outras condições que se podem aplicar não só a pontos, linhas, áreas e/ou volumes, mas também diretamente a um conjunto específico de nós.

No caso de carregamentos e esforços distribuídos, o Ansys® só permite o uso de uma variável independente, conforme se pode ver na Figura 5.8 e na Figura 5.9 um exemplo da distribuição pressão ao longo da direção  $y$ . Deste modo na validação dos modelos realizados no Ansys com o trabalho de (Reddy 2004) não foi possível a validação com resultados obtidos de placas sujeitas a carregamentos distribuídos, funções com dependência das coordenadas  $x$  e  $y$ .

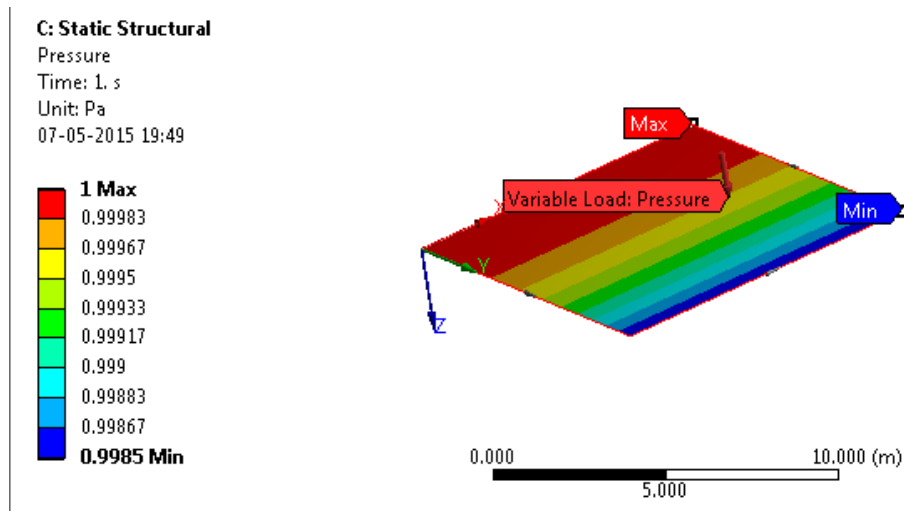


Figura 5.8 – Distribuição da pressão ao longo da direção  $y$ , no *Static Structural* do Ansys©

A expressão da distribuição da pressão ilustrada na Figura 5.8 está mencionada no lado esquerdo da Figura 5.9, e do lado direito encontram-se tabelados os valores discretos de pressão.

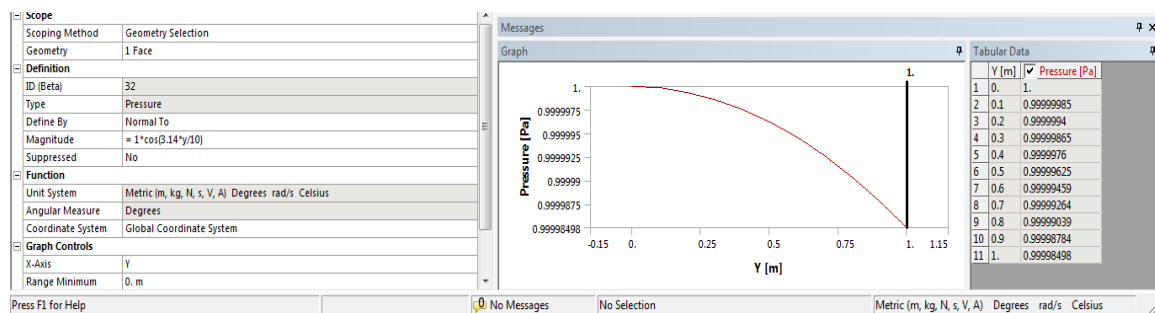


Figura 5.9 – Expressão, gráfico e valores discretos da distribuição da pressão do exemplo na Figura 5.8

No presente trabalho as placas simuladas no Ansys© serão somente sujeitas a carregamentos uniformes ao longo de toda a estrutura, possibilitando assim a devida validação com resultados obtidos das referências bibliográficas aplicáveis.

### Análise

O tipo de análise permitirá obter determinado tipo de resultados, os tipos de análises que serão realizadas no presente trabalho são análise estática com o objetivo de obter a máxima deformada transversal e o estado de tensão das placas, e análise de dinâmica às vibrações livres para obter a primeira frequência natural (frequência fundamental). Deste modo foi necessário integrar as duas análises no mesmo projeto para diminuir o custo

computacional facilitar a recolha dos resultados para as diversas configurações analisadas no presente trabalho. O desenvolvimento dos modelos no *Workbench* do Ansys® permitiu esta integração, conforme ilustra a Figura 5.10.

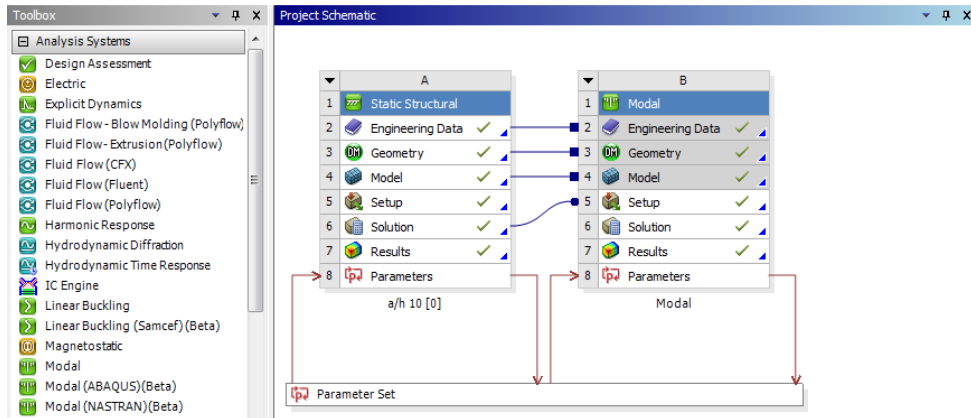


Figura 5.10 – Exemplo de um esquema de um projeto no *Workbench* do Ansys®

Ambas as análises têm a possibilidade de alteração de parâmetros, como o tipo de resolução da análise e a ativação de grandes deflexões, entre outros (conforme ilustra a Figura 5.11 para o caso da análise estática).

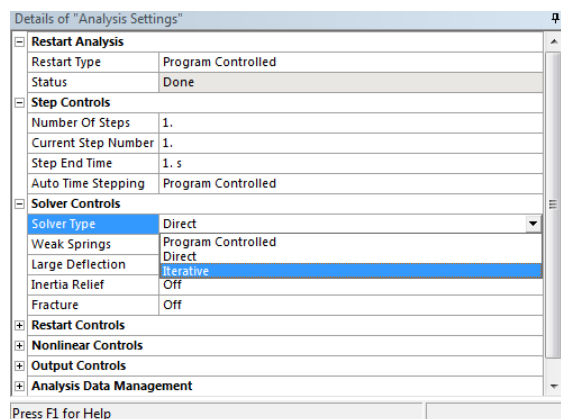


Figura 5.11 – Detalhes das opções da análise estática

As análises foram resolvidas pelo método direto. Dependendo do tipo de análise existem tipos de resultados que podem ser extraídos, como por exemplo obter as frequências naturais após uma análise dinâmica às vibrações livres, *Modal Analysis*, conforme ilustra a Figura 5.12.

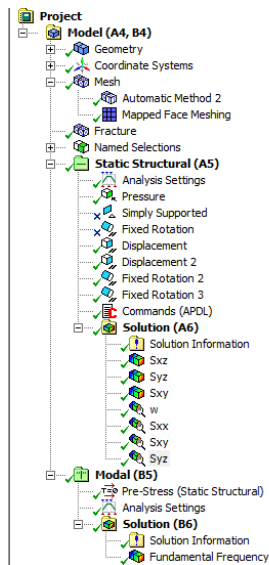


Figura 5.12 - Exemplo de projeto multianálise, análise estática e dinâmica às vibrações livres

### Pós-Processamento

É última etapa que são obtidos os resultados como as tensões normais, tensões de corte interlaminar, deformações, modos de vibração, frequências fundamentais. Na Figura 5.12 pode-se verificar no campo *Solutions* de ambas as análises que existem alguns exemplos de possíveis resultados dependendo da análise. Estes resultados também podem ser parametrizados e serem controlados no *Parameter Set* do Ansys©, conjuntamente com os parâmetros de entrada, conforme ilustra Figura 5.13.

Neste módulo é possível criar gráficos com a relação dos parâmetros de entrada e de saída. A Figura 5.14 ilustra a relação do número de elementos na discretização da malha (eixo das abcissas) e as tensões normais (eixo das ordenadas)  $\sigma_{xx}$  e  $\sigma_{yy}$ .

Outline: No data				Table of Design Points						
	A	B	C	D	E	F	G			
1	ID	Parameter Name	Value	Unit						
2	Input Parameters									
3	a/h 10 [0] (A1)									
4	P4	a	10000							
5	P35	Mesh Min Size	1	m						
6	P9	E2	1000000	Pa						
7	P6	Density	1	kg m <sup>-3</sup>						
8	P44	Surface Body Thickness	1	m						
9	P36	Mesh Max Face Size	1	m						
10	P5	aa	10	m						
*	New input parameter	New name	New expression							
12	Output Parameters									
13	a/h 10 [0] (A1)									
14	P17	Sxz	0	Pa						
15	P16	Sxy	4.7457161	Pa						
16	P18	Syz	0	Pa						
17	P15	Syy	3.5811002	Pa						
18	P14	Sxx	75.750334	Pa						
19	P13	w	-9.5682899E-05	m						
20	P42	Sxz Maximum	7.0882349	Pa						
21	P12	Mesh Elements	100							
22	P41	Syz Maximum	1.4223062	Pa						
23	P40	Mesh Average	1							

	A	B	C	D	E	F	G
1	Name	P4 - a	P35 - Mesh Min Size	P5 - aa	P9 - E2	P6 - Density	P44 - Surface Body Thickness
2	Units		m	m	Pa	kg m <sup>-3</sup>	m
3	Current	10000	1	10	1000000	1	1
4	DP 1	10000	0.5	10	1000000	1	1
5	DP 2	10000	0.333333	10	1000000	1	1
6	DP 3	10000	0.25	10	1000000	1	1
7	DP 4	10000	0.2	10	1000000	1	1
8	DP 5	10000	0.166667	10	1000000	1	1
9	DP 6	10000	0.142857	10	1000000	1	1
10	DP 7	10000	0.125	10	1000000	1	1
11	DP 8	10000	0.111111	10	1000000	1	1
12	DP 9	10000	0.1	10	1000000	1	1
13	DP 10	10000	0.05	10	1000000	1	1

Figura 5.13 – Exemplo do *Parameter Set* do Ansys © com parâmetros de entrada e de saída

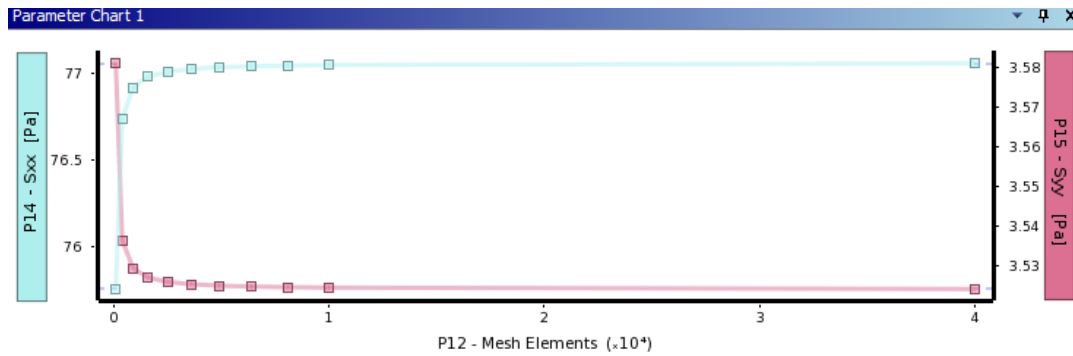


Figura 5.14 – Exemplo de gráfico de relação de parâmetros de entrada e saída, no *Parameter Set* do Ansys ©

### 5.1.2. Elemento *Shell181*

O elemento *Shell181* possui quatro (4) nós, com seis (6) graus de liberdade (três rotações e três translações) em cada nó. A sua área de aplicação é na modelação de estruturas por camadas, com especial foco para cascas compósitas laminadas finas até moderadamente espessas, ou simplificada placas e/ou sanduiches pois este elemento contempla efeitos de corte, baseados na teoria de *Mindlin-Reissner* (Mindlin 1951) (Reissner 1945), teoria de deformação de corte de primeira ordem (FSDT).

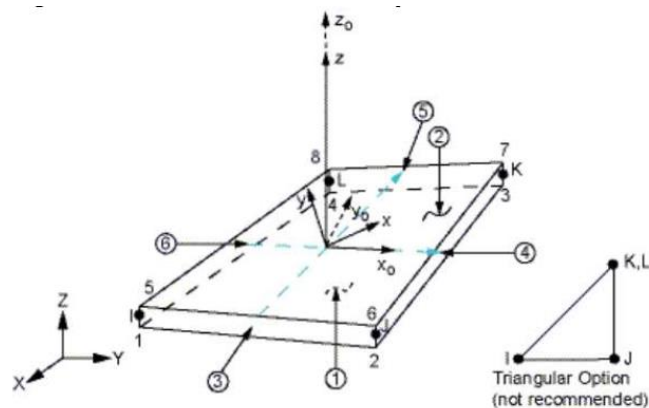


Figura 5.15 – Geometria do elemento *Shell181*

Este elemento permite até 255 camadas e suporta a definição das propriedades da secção generalizada, possibilitando ao utilizador de introduzir a matriz ABD, incluindo o efeito de corte através da matriz  $A_{\text{shear}}$  (tal como é formulada teoria FSDT no subcapítulo 3.1.1). Existem outras opções que não serão tidas em conta neste trabalho, mas que estão também disponíveis, bem como capacidade de uso em análises não lineares, e a

implementação de critérios de falha adequados. Existem algumas opções que podem ser ativadas em cada elemento. No caso do *Shell181*, a opção 3, “*keyopt(3)*”, está relacionada com a integração seletiva da matriz de rigidez, que é viabilizada através da seleção do valor correspondente, conforme se pode observar na Tabela 5.2.

Tabela 5.2 – Opções quanto à integração do elemento *Shell181* do programa *Ansys*©

Keyopt (3)	Valor	Descrição
	0	Integração Reduzida
	2	Integração Completa

Dos resultados obtidos, na validação dos modelos, confirmou-se que a adoção da integração reduzida melhorou os resultados obtidos, indo ao encontro dos valores apresentados em (Reddy 2004). Os resultados finais obtidos podem ser consultados nas tabelas apresentadas no capítulo 7.

Na modelação de placas moderadamente espessas ( $a/h$  próximos de 10) e espessas ( $a/h$  inferior a 10) o corte transversal tem extrema importância, pelo que a teoria CLPT não consegue capturar este efeito deixando a placa demasiado rígida. É por este motivo que é necessário considerar teorias de ordem superior à clássica. No caso da teoria de primeira ordem (Reddy 2004) usa-se um fator de correção ao corte transversal igual a  $5/6$ , conforme foi mencionado no subcapítulo 3.1.1, o mesmo valor é usado pelo *Ansys*© somente no caso de a placa ser composta por uma única lâmina isotrópica ou ortotrópica (conforme ilustra a Figura 5.16), conforme se pode comprovar com informação obtida após solução do modelo em causa.

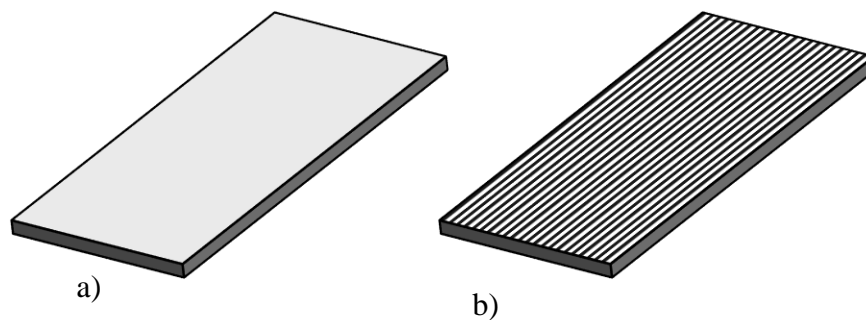


Figura 5.16 – a) Placa Isotrópica, b) Placa ortotrópica

Para placas a escolha dos elementos depende de um aspeto já abordado anteriormente se estamos a analisar uma placa fina ou moderadamente espessa.

### Tensões de Corte Interlaminar

São geralmente importantes nas extremidades das estruturas. As tensões de corte interlaminar podem ser calculadas através da lei constitutiva ou das equações de equilíbrio, conforme mencionado no subcapítulo 3.1.1. Neste último caso, admite-se que as tensões de corte são nulas nas superfícies inferior e superior do laminado. O elemento *Shell181* utiliza esta segunda metodologia. O uso da submodelação de cascas para sólido é recomendado para obter resultados mais precisos de tensões interlaminares em extremidades, conforme indicado no Anexo A – Descrição do elemento Shell181.

O fator de correção de corte ( $K$ ) usado no trabalho de (Reddy 2004) é apresentado com o valor de  $5/6$ , enquanto o valor apresentado pelo *Ansys*© é obtido através de uma formulação de *Bathe-Dvorki* de modo a evitar o bloqueio do corte, deixando assim a placa mais rígida. O erro neste cálculo pode ser significativo se a relação dos módulos de elasticidade dos materiais entre camadas adjacentes for demasiado elevada.

## 6. Otimização

Nas áreas de matemática, investigação operacional, matemática computacional e ciências computacionais, entende-se como a seleção do melhor elemento de um determinado grupo para atingir um mínimo ou máximo de uma função objetivo, com determinados constrangimentos associados ao problema. A otimização pode classificar-se como linear ou não linear, ou seja, dependendo da natureza do problema. Assim haverá algoritmos mais adequados do que outros para a resolução do problema em função da sua natureza. A solução que minimiza ou maximiza a função em causa é designada por solução ótima. A formulação do problema envolve a existência de uma função  $f$ , que é nalgumas áreas designada por função de perda ou função de custo (no caso de um problema de minimização), ou como função de utilidade ou função de ajustamento (no caso de um problema de maximização). (Diewert 2008) No âmbito da otimização estrutural, independentemente do que se pretende fazer (minimizar e/ou maximizar) estas funções designam-se funções objetivo, contudo noutros campos de aplicação poder-se-ão também designar funções de desempenho.

Neste trabalho abordou-se somente problemas não lineares, cujas funções objetivo provenientes das metamodelações são de carácter não linear, conforme se pode constatar mais à frente. Para se aplicar qualquer técnica de otimização é necessário definir-se inicialmente qual é o objetivo e os seus constrangimentos associados e qual o tipo de método de otimização que se pretende usar. É abordada a introdução de constrangimento mássico, mas outros são usualmente usados em problemas de estruturas compósitas, como o custo da estrutura (dependente do número de camadas, e do material de cada camada), dimensões das estruturas, ou até mesmo relações de aspeto como a da placa quadrada  $a/h$ .

### 6.1. Otimização de nuvem/enxame

Existem diversos tipos algoritmos de inteligência de enxames, tais como *Ant Colony Optimization* (ACO), *Ant Lion Optimizer* (ALO), *Differential Evolution* (DE), *Bat Algorithm* (BA), *Particle Swarm Optimization* (PSO), *Multi-Swarm Optimizaton* (uma variante do PSO), entre outros. Existem outros algoritmos que têm semelhanças com alguns dos algoritmos de inteligência de enxames. Em qualquer caso o processo é iniciado

com uma população gerada aleatoriamente e procura o valor ótimo global atualizando os seus constituintes ao longo das gerações, contudo o PSO não contém operadores evolutivos como o *crossover* e a mutação (pertencentes ao GA).

A técnica que foi aplicada no trabalho desenvolvido foi a Otimização de Enxame de Partículas, mais conhecida como *Particle Swarm Optimization* (PSO). Tal como qualquer técnica de Inteligência de Enxames, ramo da inteligência artificial, estuda o comportamento coletivo das partículas e das características sociais e individuais destes indivíduos organizados (partículas) que formam grupos (enxames). (Mello & Assis 2013) As características individuais de cada partícula podem parecer insignificantes ou sem objetivo, contudo numa visão coletiva são essenciais e possibilitam uma adaptabilidade coletiva em busca do valor ótimo que soluciona o problema em causa, ou seja, de modo a que o enxame seja capaz de alcançar o resultado pretendido.

## 6.2. Formulação matemática e algoritmo

Neste capítulo é feita uma descrição do algoritmo base do PSO, são apresentados alguns conceitos essenciais e são descritas formulações matemáticas dos algoritmos desenvolvidos. O algoritmo básico de PSO baseia-se em gerar inicialmente partículas aleatoriamente distribuídas (conformes com os constrangimentos aplicados), onde o objetivo é navegar para o ponto ótimo global da função objetivo em causa. Cada partícula do enxame guarda sua posição e sua melhor posição obtida até o momento (*pbest*) e a técnica em si guarda a melhor solução (*gbest*), considerando todas as posições das partículas do enxame até o máximo de iterações/atualizações desejadas. Nesta técnica os potenciais valores ótimos (partículas), “voam” no domínio das variáveis do problema procurando os melhores valores atuais.

Cada partícula, também denominada como agente e indivíduo único do enxame/nuvem, guarda o seu percurso e as suas coordenadas no espaço de variáveis do problema, ou seja, guarda a sua localização/posição. Estas coordenadas no espaço n-dimensional estão associadas ao melhor valor de solução (também denominado como aptidão e/ou *fitness*). Este valor também é guardado, e é designado como sendo o melhor valor dessa partícula até esse instante (*pbest*).

### 6.2.1. Estrutura base e alterações ao algoritmo de PSO

A exposição do algoritmo numa fórmula mais codificada e matemática seria demasiado extenso, como tal está expresso no Algoritmo 7. Esta descrição por etapas da estrutura mais básica deste tipo de algoritmos facilita a posterior compreensão das alterações feitas e a introdução de técnicas provenientes de outros tipos de algoritmos de otimização de nuvens.

-----|| **PSO base** || -----

**Início**

**Para** cada partícula da nuvem **faça**

Calcular a sua posição inicial ( $itr=1$ )

Calcular a sua velocidade inicial ( $itr=1$ )

**Fim**

**Para** cada iteração **faça**

**Para** cada partícula da nuvem **faça**

Calcular a sua aptidão ( $fitness$ )

Procurar a melhor posição da partícula ( $pbest$ ) até ao momento

**Se** for a primeira iteração **faça**

Assumir a melhor posição global ( $gbest$ ) igual a esta  $pbest$

**Se** a aptidão da partícula for melhor que a aptidão da  $gbest$  atual **faça**

Substituir  $gbest$  pela posição dessa partícula

**Fim**

Atualizar a velocidade da partícula para a iteração seguinte

Atualizar a posição da partícula com a velocidade atualizada

Verificar se a nova posição não excede os limites de cada variável de projeto

**Fim**

**Fim**

---

#### Algoritmo 7 – Otimização por nuvem de partículas (PSO) base

Um exemplo prático deste tipo de estrutura, com a aplicação da função objetivo expressa na equação (6.1), pode ser observado na Figura 6.1 que ilustra uma nuvem de pontos com o respetivo valor da função (a vermelho) e um ponto ótimo que representa a minimização da função). Durante o processo de otimização as partículas da nuvem foram tomam valores do espaço dimensional das variáveis  $x$  e  $y$  até convergirem para o melhor candidato global ( $gbest$ , ilustrado a azul).

$$f_{\text{objetivo}}(x, y) = x^2 - 10 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot x) + y^2 \quad (6.1)$$

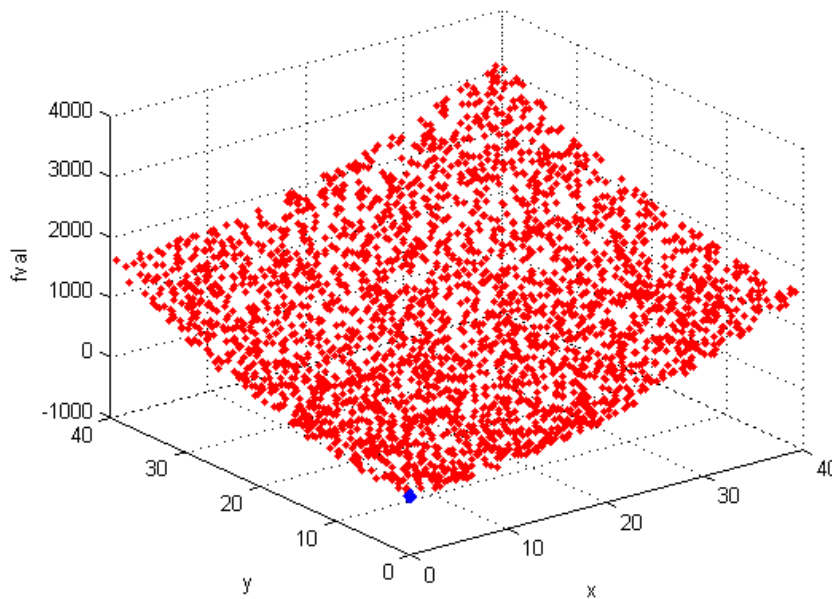


Figura 6.1 – Exemplo de minimização de uma função objetivo expressa equação (4.5)

### Atualizar a velocidade da partícula para a iteração seguinte

Este tipo de algoritmo é heurístico, ou seja, após cada corrida poder-se-á ter resultados diferentes, ao contrário de algoritmo determinísticos cujas soluções são independentes da corrida do algoritmo (dão sempre o mesmo resultado). O porquê deste efeito acontecer no PSO é porque este contém constantes que são geradas aleatoriamente, e como será de esperar, não serão iguais em cada corrida do algoritmo. Estas constantes são também usadas no método de atualização da velocidade da partícula, tal como é referido na equação (6.2).

$$v(i, j, itr + 1) = K[w * v(i, j, itr) + c1 \cdot \beta1 \cdot (pbest - p(i, j, itr)) + c2 \cdot \beta1 \cdot (gbest - p(i, j, itr))] \quad (6.2)$$

Sabendo que a velocidade da variável de projeto  $j$  da partícula  $i$  é atualizada segundo a multiplicação do fator de constrição  $K$  por três partes essenciais. A primeira diz respeito à multiplicação do fator de inércia  $w$  pela velocidade da variável desta partícula neste instante (iteração,  $itr$ ), e a segunda parte é o fator individual de autoconfiança da partícula

( $c1$ ) multiplicado por um valor aleatório  $\beta_1$  (baseado numa distribuição uniforme entre o valor 0 e 1) e multiplicado pela diferença de posições entre a melhor posição da partícula até ao momento ( $pbest$ ) e a sua posição atual. A última parte é semelhante à segunda mas para a presença social, ou seja, a relação da posição da partícula com a melhor posição de todas até ao momento ( $gbest$ ). É deste modo que usualmente se atualiza o valor da velocidade para cada variável de projeto de cada partícula para a iteração seguinte, tal como é expresso na equação (6.2).

### **Atualizar a posição da partícula com a velocidade atualizada**

Esta atualização é mais simples que a anterior, basta adicionar a velocidade atualizada à posição da partícula momento, tal como está expresso na equação (6.3).

$$p(i, j, itr + 1) = p(i, j, itr) + v(i, j, itr + 1) \quad (6.3)$$

### **Verificar se posição não excede os limites de cada variável de projeto**

Outra etapa importante descrita no Algoritmo 7 é verificar se o valor da posição atualizada para cada variável de projeto da partícula não excede os limites de projeto, caso exceda o mínimo deverá abdicar do valor atualizado pelo mínimo de projeto. O mesmo se passa caso exceda o máximo limite dessa variável de projeto.

### **Alterações ao algoritmo base de PSO**

Existem diversas alterações que se podem fazer à estrutura base e à formulação convencional do algoritmo de PSO, mas nesta dissertação será somente focado o aspeto do cálculo do valor  $pbest$ .

- **Algoritmo base, e a seguir designado por PSO 1**

- 1) Gerar a primeira colónia de partículas;
- 2) Obter os valores de cada partícula;
- 3) Detetar para cada partícula o ótimo local ao longo das iterações já feitas;
- 4) Caso esse valor seja melhor candidato que o global atual, substituir;
- 5) Calcular velocidade do instante seguinte;
- 6) Atualizar a posição de cada partícula no instante seguinte.

O conjunto das etapas apresentadas para o PSO 1 não é mais que o Algoritmo 7 de uma forma mais sucinta.

- **Algoritmo proposto por (Loja 2013) , e a seguir designado por PSO 2**

- 1) Gerar a primeira colônia de partículas;
- 2) Obter os valores de cada partícula;
- 3) Detetar o primeiro ótimo local que será o ótimo global;
- 4) Calcular as velocidades do instante seguinte;
- 5) Atualizar a posição das partículas para o instante seguinte;
- 6) Reinicialização da colônia, guardando o melhor candidato.

A diferença entre o PSO 1 e o PSO 2 está essencialmente na etapa 3, enquanto o algoritmo tradicional procura a melhor posição de cada partícula até ao momento (o que faz com que graficamente se veja as partículas a convergirem para um valor ótimo final), já no PSO 2 este procura o ótimo daquela iteração (daquela colônia naquele momento). Esta é a razão pela qual se pode verificar que o PSO 2 graficamente no final não têm todas as suas partículas sobrepostas com o *gbest*, ou pelo menos numa tendência de convergência.

## 6.2.2. Influência dos fatores de controlo

### Fatores Social ( $c1$ ) e Individual ( $c2$ )

Estes fatores de aprendizagem do algoritmo, individual ( $c1$ ) e social ( $c2$ ) podem ser constantes ou adaptativos. Os autores de outros trabalhos utilizam valores diferentes entre si, contudo é usual estes fatores estarem compreendidos entre os valores zero e quatro. A adaptabilidade confere aos algoritmos maior precisão na obtenção de resultados (Loja 2013).

$$\begin{aligned} c1 &= \frac{(c1_{final} - c1_{inicial})}{dim} + c1_{inicial} \\ c2 &= \frac{(c2_{final} - c2_{inicial})}{dim} + c2_{inicial} \end{aligned} \quad (6.4)$$

Na equação (6.4) a variável  $dim$  é número que vai de um (1) até ao valor da multiplicação do número de reinicializações ( $NR$ ) pelo número máximo de iterações ( $MaxItr$ ), de modo a que seja possível incorporar outra alteração com uma técnica proveniente dos Algoritmos Genéticos. A implementação desta técnica é explicado mais à frente). Os valores iniciais e finais dos fatores  $c1$  e  $c2$  consumam ser contraditórios, ou seja, o valor inicial é maior que o final no caso do fator individual, mas no caso do fator social é o contrário. Esta é uma prática bastante frequente, tal como também pode ser verificado na obra de (Loja 2013).

### Fator de Inércia ( $w$ )

Este fator foi introduzido no trabalho de (Shi & Eberhart 1998), onde os autores concluíram eu para grandes valores do fator de inércia, maior será a capacidade do algoritmo para busca global do ótimo, ou seja, o algoritmo investiga novas áreas desconhecidas (*Exploration*). Para valores pequenos do fator de inércia, maior será a capacidade do algoritmo procurar localmente o ótimo, ou seja, existe um maior aproveitamento de uma área conhecida (*Exploitation*). Este fator pode ser constante, ou pode ser adaptativo conforme é expresso na equação (6.5).

$$w = \frac{(w_{máx} - w_{min}) \cdot (NR \cdot MaxItr)}{dim} + w_{min} \quad (6.5)$$

## Propostas para melhor o desempenho dos algoritmos de PSO

A literatura apresenta diversas propostas para melhorar o desempenho dos algoritmos de PSO, tais como técnicas de hibridização, adaptabilidade do coeficiente de constrição ( $K$ ), aplicação de *Tribes* e *Multiswarm*, *niching*, entre outras. A reinicialização, também conhecida como *niching*, é uma estratégia que provém de algoritmos genéticos (GA) e que implementada nos algoritmos de PSO melhora significativamente o seu desempenho, conforme se pode verificar nas aplicações do presente trabalho. Contudo esta técnica não é comum aplicar-se, conforme se pode verificar pela literatura científica relacionada, mas foi sim aplicada com bons resultados no trabalho de (Loja 2013).

### Fator de Constrição ( $K$ )

Este valor é influenciado pelo comportamento individual e social, pelos fatores  $c1$  e  $c2$ , conforme se pode ver expresso na equação (6.6). Deste modo pode-se verificar a importância dos valores extremos de  $c1$  e  $c2$ , que irão afetar o valor de  $K$ , em algoritmos mais avançados estes fatores são otimizados para proporcionarem ao método um melhor desempenho.

$$\begin{aligned} \phi &= c1 + c2; \\ K &= \frac{2}{|2 - \phi + \sqrt{\phi^2 - 4\phi}|} \end{aligned} \quad (6.6)$$

Quando o valor de  $\phi$  for igual ou superior a quatro o cálculo do fator de constrição é efetuado conforme a equação (6.6), caso contrário tomará o valor unitário.

### Reinicialização “*Niching*”

A código que contempla esta técnica é introduzido depois do ciclo fechado que só termina quando o número de iterações chegar ao fim, e depois repete-se tudo novamente como se executássemos de novo o algoritmo de otimização só que com o pormenor de guardarmos o melhor valor ( $gbest$ ) para a primeira partícula no primeiro instante (mas para a primeira reinicialização).

Para um exemplo em que se tivesse vinte iterações essa primeira partícula ficaria na vigésima primeira dimensão ( $dim$ ) de quarenta (admitindo que só existia uma

reinicialização) com o valor de  $g_{best}$  atribuído. Consequentemente o valor da sua velocidade inicial seria igual à sua posição. As restantes partículas são geradas segunda a equação (6.7), desde da segunda partícula ( $i=2$ ) até ao número de partículas total da nuvem ( $i=Np$ ).

$$p(i, j, 1) = (p_{max}(j) - p_{min}(j)) \cdot \beta + p_{min}(j) \quad , \text{ onde } i=2 \dots Np \quad (6.7)$$

Caso haja variáveis dependentes, como é o caso dos casos em estudo nesta dissertação, é necessário gerar primeiro as posições correspondentes às variáveis independentes, e só depois as dependentes (para que fiquem sempre dentro dos limites admissíveis de projeto). As velocidades iniciais das participas serão iguais às suas posições, após serem aleatoriamente geradas. Por último, este ciclo termina quando o número de reinicializações acabar, guardar o  $g_{best}$  em cada reinicialização (para ver a evolução) e guardando o melhor destes (ponto ótimo).

### 6.3. Funções de teste

Para validar os resultados obtidos e a eficácia da procura dos ótimos dos algoritmos de otimização é necessário submete-los a funções de testes. As funções de testes foram implementadas uma a uma com os devidos constrangimentos, nos algoritmos de PSO abordados (PSO 1 e PSO 2). Enumerando as funções, são elas a “Test Tube Holder”, “Holder Table”, “Bird”, “Modified Schaffer #1”, “Modified Schaffer #2”, “Rosenbrock”, “Himmelblau”, “Rastrigin”, “Chichinadze”, e por último a “Zettl”. As fórmulas, os gráficos e os constrangimentos aplicados no processo de otimização podem ser consultados no Apêndice D – Funções de teste.

Por uma questão de facilidade e simplicidade, para avaliar o desempenho das funções de teste apenas foi usado um indicador de desempenho, o erro relativo, sendo também apresentado o valor médio deste erro resultante de um conjunto de erros relativos obtidos para cada análise de desempenho.

## 7. Aplicações

Neste último capítulo serão apresentadas todas as aplicações feitas com os fundamentos teóricos e conceitos apresentados nos anteriores capítulos. De um modo geral este capítulo contempla aspetos como validações de modelos, apresentação e análise dos resultados do desempenho dos algoritmos de otimização na procura dos ótimos em funções de testes e análises de resultados e de aplicações computacionais.

Tal como se referiu anteriormente, efetuar a análise dos casos de estudo com placas compósitas de fibra de vidro-epóxi foi necessário validar os modelos realizados no programa comercial *Ansys*©. Os valores obtidos foram comparados com os valores apresentados no trabalho de (Reddy 2004).

## 7.1. Análise das propriedades mecânicas obtidas no PREMAT

O método usado consiste em determinar as propriedades elásticas médias efetivas de um material compósito, considerando o modelo geométrico adotado para a sua microestrutura. O programa PREMAT (Guedes & Kikuchi 1990), foi usado para o pré processamento, com vista à caracterização do material compósito em causa. Os ficheiros de saída, obtidos do programa mencionado, ou seja, as propriedades elásticas equivalentes para cada RVE analisada foram importados para uma tabela em Excel© formatada para ser integrada em variáveis de ficheiros *MatLab*© com os metamodelos desenvolvidos neste programa. A tabela na Figura 7.1 contém os dados de entrada, designadamente a relação de aspeto da secção transversal da fibra ( $a/b$ ) e a fração de volume de fibra ( $V_f$ ) para cada RVE, e os resultados (módulos de elasticidade, módulos de corte e coeficientes de Poisson), conforme se pode constatar pelo Apêndice A1 – Tabela propriedades compósitas - Parte 1 e pelo Apêndice A2 – Tabela propriedades compósitas - Parte 2.

Para que esta importação fosse rápida e automática, independentemente do número de sólidos RVE analisados, foi necessário implementar código em VBA para a tabela no programa *Excel*©. Com o código implementado a tabela é preenchida automaticamente com todos os ficheiros de formato texto (um ficheiro para cada fração de volume analisada) que estejam no mesmo diretório, independentemente do número de sólidos RVE que cada ficheiro contenha.

u - INPUTS			z - OUTPUTS												
S.D.#	a/b	Vf	E1	E2	E3	G23	G31	G12	v21	v31	v32	v12	v13	v23	
1	0.660	0.5	4.17E+10	9.50E+09	2.15E+10	2.69E+09	7.84E+09	2.78E+09	6.59E-02	1.22E-01	3.34E-01	2.90E-01	2.37E-01	1.47E-01	
2	0.681	0.5	4.17E+10	9.53E+09	1.90E+10	2.69E+09	6.74E+09	2.82E+09	6.57E-02	1.10E-01	3.33E-01	2.88E-01	2.41E-01	1.67E-01	
3	0.702	0.5	4.17E+10	9.57E+09	1.73E+10	2.69E+09	6.05E+09	2.87E+09	6.56E-02	1.01E-01	3.32E-01	2.86E-01	2.44E-01	1.84E-01	
4	0.723	0.5	4.16E+10	9.62E+09	1.60E+10	2.69E+09	5.58E+09	2.91E+09	6.56E-02	9.52E-02	3.31E-01	2.84E-01	2.47E-01	1.98E-01	
5	0.744	0.5	4.16E+10	9.68E+09	1.51E+10	2.70E+09	5.21E+09	2.95E+09	6.57E-02	9.06E-02	3.29E-01	2.82E-01	2.49E-01	2.11E-01	
6	0.766	0.5	4.15E+10	9.77E+09	1.44E+10	2.71E+09	4.92E+09	3.00E+09	6.60E-02	8.72E-02	3.25E-01	2.81E-01	2.52E-01	2.21E-01	
7	0.788	0.5	4.14E+10	9.82E+09	1.37E+10	2.72E+09	4.65E+09	3.04E+09	6.63E-02	8.38E-02	3.23E-01	2.79E-01	2.54E-01	2.32E-01	
8	0.810	0.5	4.14E+10	1.00E+10	1.34E+10	2.74E+09	4.47E+09	3.10E+09	6.72E-02	8.27E-02	3.13E-01	2.78E-01	2.55E-01	2.34E-01	
9	0.833	0.5	4.13E+10	1.01E+10	1.29E+10	2.74E+09	4.31E+09	3.13E+09	6.75E-02	8.06E-02	3.11E-01	2.77E-01	2.57E-01	2.42E-01	
10	0.856	0.5	4.13E+10	1.02E+10	1.26E+10	2.74E+09	4.17E+09	3.19E+09	6.79E-02	7.87E-02	3.08E-01	2.75E-01	2.59E-01	2.50E-01	
11	0.880	0.5	4.13E+10	1.03E+10	1.22E+10	2.75E+09	4.04E+09	3.24E+09	6.84E-02	7.71E-02	3.04E-01	2.74E-01	2.60E-01	2.57E-01	
12	0.903	0.5	4.10E+10	1.04E+10	1.18E+10	2.77E+09	3.86E+09	3.31E+09	6.91E-02	7.53E-02	3.01E-01	2.72E-01	2.63E-01	2.66E-01	
13	0.927	0.5	4.08E+10	1.11E+10	1.24E+10	2.85E+09	3.82E+09	3.36E+09	7.41E-02	8.02E-02	2.54E-01	2.72E-01	2.63E-01	2.27E-01	
14	0.952	0.5	4.08E+10	1.13E+10	1.22E+10	2.85E+09	3.73E+09	3.43E+09	7.49E-02	7.89E-02	2.50E-01	2.70E-01	2.65E-01	2.32E-01	
15	0.976	0.5	4.08E+10	1.15E+10	1.19E+10	2.85E+09	3.64E+09	3.49E+09	7.58E-02	7.77E-02	2.45E-01	2.69E-01	2.66E-01	2.37E-01	
16	1.000	0.5	4.08E+10	1.17E+10	1.17E+10	2.85E+09	3.57E+09	3.57E+09	7.67E-02	7.67E-02	2.41E-01	2.67E-01	2.67E-01	2.41E-01	
17	1.024	0.5	4.08E+10	1.19E+10	1.15E+10	2.85E+09	3.49E+09	3.64E+09	7.77E-02	7.58E-02	2.37E-01	2.66E-01	2.69E-01	2.45E-01	
18	1.051	0.5	4.08E+10	1.22E+10	1.13E+10	2.85E+09	3.43E+09	3.73E+09	7.89E-02	7.49E-02	2.32E-01	2.65E-01	2.70E-01	2.50E-01	
19	1.078	0.5	4.08E+10	1.24E+10	1.11E+10	2.85E+09	3.36E+09	3.82E+09	8.02E-02	7.41E-02	2.27E-01	2.63E-01	2.72E-01	2.54E-01	
20	1.107	0.5	4.10E+10	1.18E+10	1.04E+10	2.77E+09	3.31E+09	3.86E+09	7.53E-02	6.91E-02	2.66E-01	2.63E-01	2.72E-01	3.01E-01	

Figura 7.1 – Extrato da tabela em *Microsoft Excel*© com os dados de entrada e resultados da análise das RVE's no PREMAT/POSTMAT

### Obtenção de valores válidos de $a/b$ para cada fração de volume de fibra, para posterior análise no PREMAT

Pela formulação matemática da forma elipse sabe-se que a área desta pode ser dada pela equação (7.5). (Weisstein, s.d.)

$$A = \pi \times a \times b \quad (7.1)$$

Pela análise da secção transversal da fibra do RVE, (ver Figura 3.11) sabe-se que a área da elipse, que neste âmbito é a secção transversal da fibra de vidro longa, pode também ser dada pela equação (7.2)

$$A = V_f \times A_{AER} \quad (7.2)$$

Sabendo que a AER tem uma área unitária, logo a RVE tem igualmente um volume unitário. Deste modo a equação (7.2) pode ser simplificada na equação (7.3).

$$A = V_f \times 1 \quad (7.3)$$

Assim será possível igualar-se as equações (7.1) e (7.3), sabendo o valor da fração de volume de fibra em causa as incógnitas desta igualdade serão os valores dos semieixos da elipse ( $a$  e  $b$ ).

Para obter os valores de  $a$  e  $b$  válidos para cada fração de volume de fibra, seguiu-se o Apêndice B – Pseudo Algoritmo para obtenção de valores  $a/b$  válidos para cada fração de volume de fibra.

Deste modo obteve-se o número possível de valores de  $a/b$  para cada fração de volume de fibra pretendida. Neste caso foram calculados os valores viáveis de  $a/b$  para  $V_f$  compreendido entre 0.5 e 0.7, com espaçamento de 0.025, o que dá um total de 9 valores de fração de volume de fibra.

Foi admitido um desvio de 40% ( $\pm 20\%$ ) na direção  $x$  e  $y$ , independentemente, em relação à configuração circular da fibra. Este desvio afeta o raio equivalente mencionado no Apêndice B – Pseudo Algoritmo para obtenção de valores  $a/b$  válidos para cada fração de volume de fibra. Assim foi possível gerar valores de  $a/b$  que representam elipses e as suas inversas ambas afetadas da variação de  $\pm 20\%$  face à configuração circular da secção transversal da fibra.

Tabela 7.1 Espaçamento de 0.05 entre valores de  $a$ 

$V_f$ (%)	Número de $a/b$ válidos
50.0	31
52.5	29
55.0	25
57.5	25
60.0	21
62.5	19
65.0	13
67.5	13
70.0	9
<b>Total</b>	<b>185</b>

Com o espaçamento de 0.05 entre valores de  $a$ , e entre valores de  $b$  nas elipses inversas, conseguiu-se um total de 185 pares  $(a/b, V_f)$ , ou seja 185 pontos de treino para os metamodelos das propriedades elásticas do compósito laminado de fibra de vidro/epóxi, conforme apresenta Tabela 7.1.

As relações de  $a/b$  da seção transversal da fibra para cada fração de volume de fibra podem ser observadas da Figura 7.2 à Figura 7.6. Estas representações são meramente ilustrativas, admitindo uma célula unitária com o centro coincidente com o centro das elipses. Observando estas relações de  $a/b$  para cada caso, pode-se concluir que a área a branco comum das elipses vai aumentando com o aumento da fração de volume de fibra na célula unitária, conforme seria de esperar.

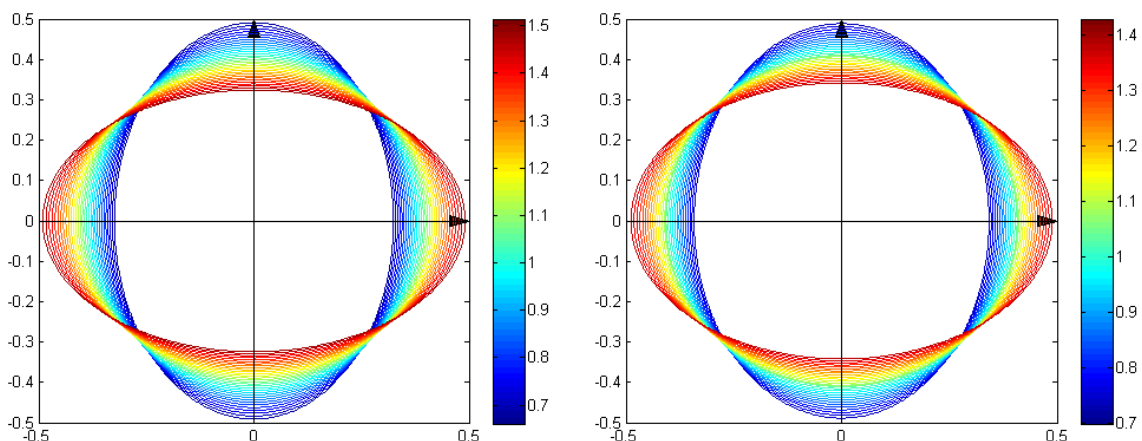
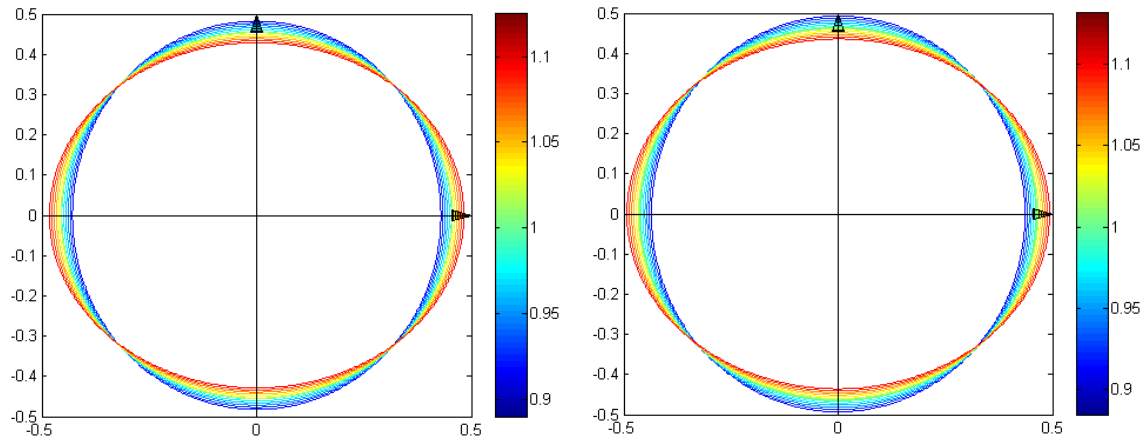
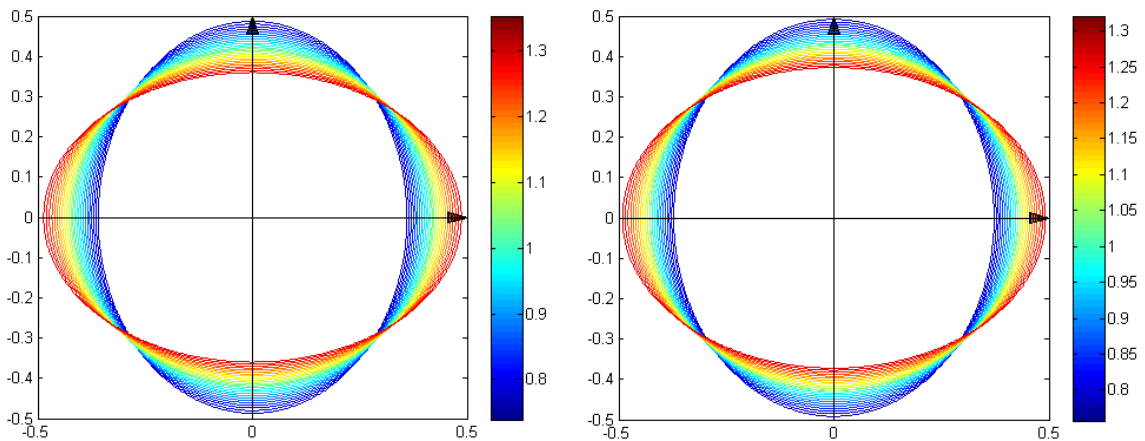


Figura 7.2 – Célula unitária com as configurações amostrais de  $a/b$  para volume de fibra de 50% e 52.5% (da esquerda para a direita).

Evidencia-se que a barra lateral em cada ilustração da Figura 7.2 à Figura 7.6 diz somente respeito à gama de valores de  $a/b$  válidos para cada fração de volume de fibra.

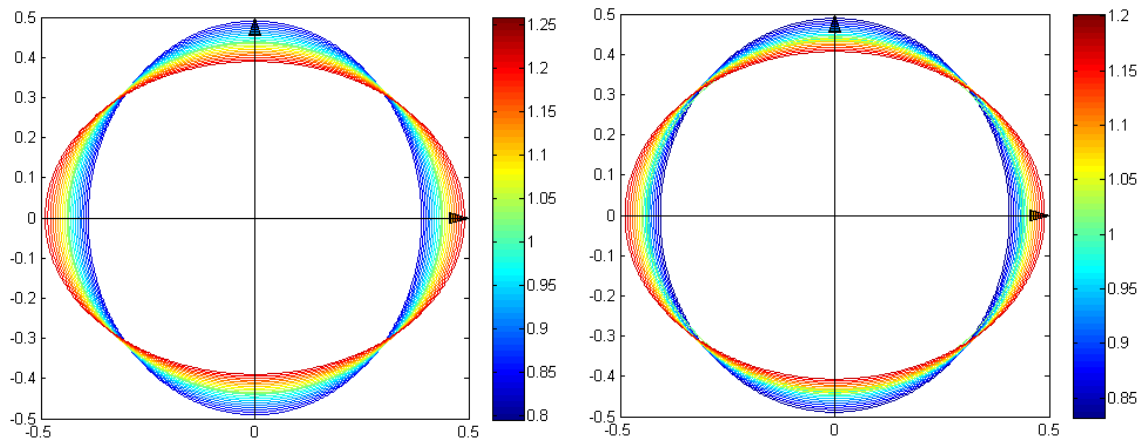


**Figura 7.4 - Célula unitária com as configurações amostrais de  $a/b$  para volume de fibra de 60% e 62.5% (da esquerda para a direita).**



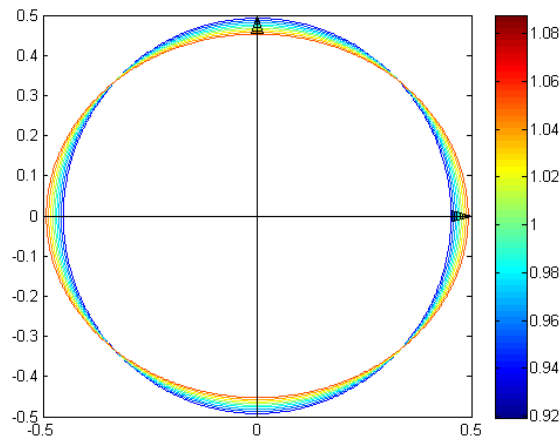
**Figura 7.3 - Célula unitária com as configurações amostrais de  $a/b$  para volume de fibra de 55% e 57.5% (da esquerda para a direita).**

À primeira vista parece bastante clara a diminuição da gama de valores de  $a/b$  com o aumento da cada fração de volume de fibra. Contudo esta afirmação não se verifica.



**Figura 7.5 - Célula unitária com as configurações amostrais de  $a/b$  para volume de fibra de 65% e 67.5% (da esquerda para a direita).**

Mais à frente ver-se-á que não há uma diminuição linear da gama de valores de  $a/b$  com o aumento da fração de volume, conforme seria expectável.



**Figura 7.6 - Célula unitária com as configurações amostrais de  $a/b$  para volume de fibra de 70%.**

Nota-se que não há para nenhum dos casos uma fração de volume de fibra onde a elipse correspondente toque nas extremidades da célula unitária representada como a secção transversal da RVE, apesar de graficamente parecer em alguns casos.

### **Análise dos resultados da homogeneização das propriedades através do PREMAT**

Neste subcapítulo expõe-se os resultados obtidos do PREMAT e a interpretação dos mesmos. Estes resultados compreendem as propriedades elásticas equivalentes da lâmina de fibra de vidro unidirecional/epóxi:

- Módulos de Elasticidade ( $E_1, E_2, E_3$ );
- Módulos de Corte ( $G_{12}, G_{23}, G_{31}$ );
- Coeficientes de Poisson ( $\nu_{21}, \nu_{32}, \nu_{31}$ ).

A Figura 7.7 ilustra um extrato do ficheiro de texto exportado pelo PREMAT com as propriedades elásticas equivalentes para cada par relação de aspeto - fração de volume de fibra ( $a/b, V_f$ ).

```

PreMat for HEXA8 Elements
-----
Total number of different solids   nsolix =   31

Solid #   1   _____
Euler angles
  theta1, theta2, theta3 =   0.0000   0.0000   0.0000
Engineering Constants
Young,s Moduli -   E1  E2  E3 =   0.41707E+11   0.94950E+10   0.21498E+11
Shear Moduli -   G23 G31 G12 =   0.26945E+10   0.78357E+10   0.27839E+10
Poisson,s Ratios - v21 v31 v32 =   0.65945E-01   0.12240E+00   0.33351E+00
Poisson,s Ratios - v12 v13 v23 =   0.28967E+00   0.23747E+00   0.14730E+00
note: vij/Ei=vji/Ej
D matrix before rotation
  0.44447E+11   0.39253E+10   0.67496E+10
                0.10332E+11   0.39264E+10
                0.23633E+11
                0.26945E+10
                0.78357E+10
                0.27839E+10
D matrix after rotation
  0.444E+11   0.393E+10   0.675E+10   0.000E+00   0.000E+00   0.000E+00
  0.393E+10   0.103E+11   0.393E+10   0.000E+00   0.000E+00   0.000E+00
  0.675E+10   0.393E+10   0.236E+11   0.000E+00   0.000E+00   0.000E+00
  0.000E+00   0.000E+00   0.000E+00   0.269E+10   0.000E+00   0.000E+00
  0.000E+00   0.000E+00   0.000E+00   0.000E+00   0.784E+10   0.000E+00
  0.000E+00   0.000E+00   0.000E+00   0.000E+00   0.000E+00   0.278E+10

```

Figura 7.7 – Extrato do ficheiro de resultados proveniente do programa PREMAT para as 31 configurações do volume elementar repetitivo, para 50% de volume de fibra.

Analisando numa primeira instância o módulo de elasticidade  $E_1$ , na direção  $x$  do referencial da lâmina, pode-se concluir pela Figura 7.8 que há uma tendência para o aumento do valor desta propriedade elástica proporcionalmente à fração de volume, como seria de esperar.

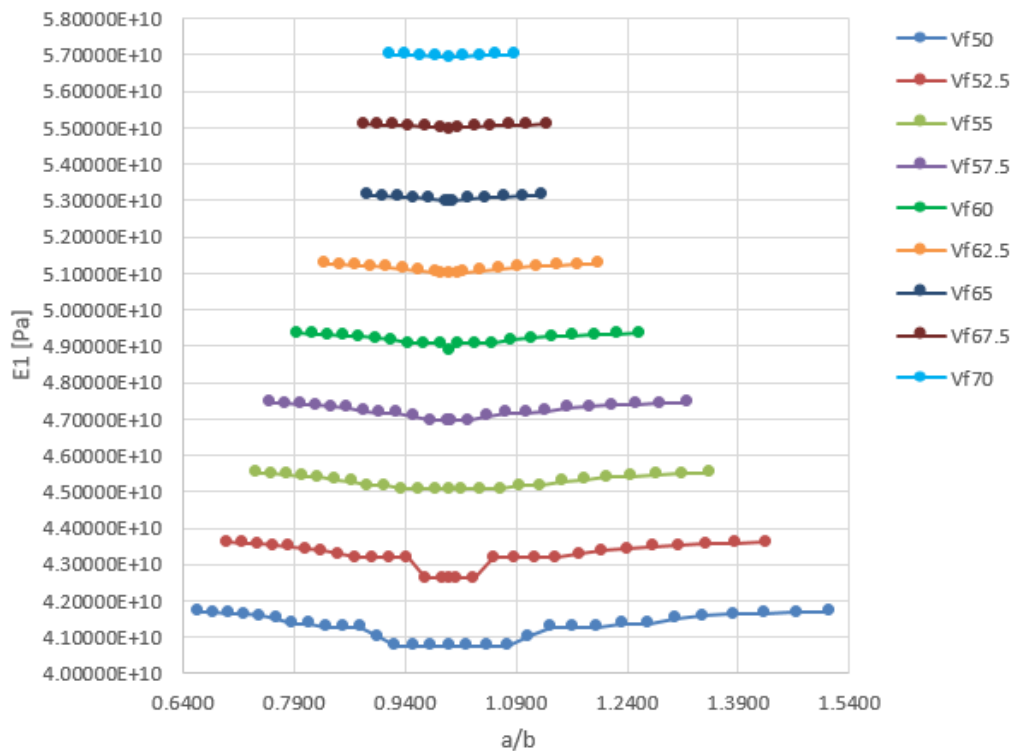


Figura 7.8 – Valores do módulo de elasticidade na direção  $x$ ,  $E_1$  (em Pa), para cada fração de volume de fibra analisada e relações de  $a/b$  válidas (valores obtidos no PREMAT)

Pode-se verificar também na Figura 7.8 uns ligeiros decréscimos do valor perto da configuração circular da seção transversal da fibra de vidro, mais acentuadamente nos casos das frações de volume de fibra de 50% e 52.5%. Esta primeira análise alertou logo para um aspeto que não era esperado, entre os valores de frações de volume de fibra de 65% e 67.5%, verificou-se um aumento da gama de valores de  $a/b$ , conforme se pode ver na Figura 7.8.

Através do algoritmo presente no Apêndice B – Pseudo Algoritmo para obtenção de valores  $a/b$  válidos para cada fração de volume de fibra obteve-se os já mencionados 185 pontos ( $a/b, V_f$ ). A Tabela 7.2 contém os valores mínimos e máximos válidos de relação  $a/b$  para cada fração de volume analisada e pode-se verificar que existe o tal aumento inesperado da gama de valores de  $a/b$  ( $\Delta a/b$ ) de 65% para 67.5% de volume de fibra.

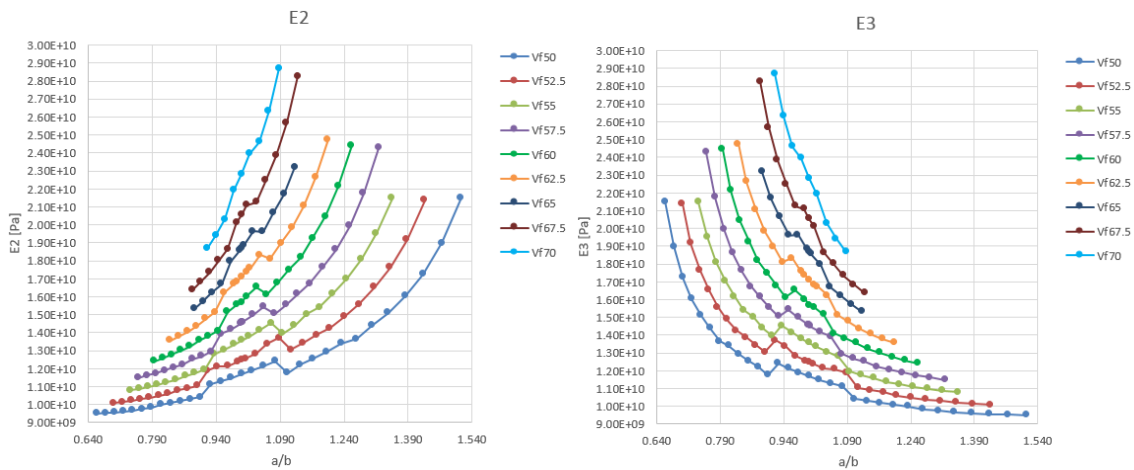
**Tabela 7.2 – Valores mínimos e máximos de  $a/b$  para cada  $V_f$  no Apêndice A1 – Tabela propriedades compósitas - Parte 1**

$V_f$ (%)	Valor de $a/b$ mínimo	Valor de $a/b$ máximo	$\Delta a/b$ (máx-min)
50.0	0.6602101057	1.514669332	0.854459000
52.5	0.7000556464	1.428457874	0.728402228
55.0	0.7391690433	1.352870509	0.613701466
57.5	0.7571145354	1.320804123	0.563689588
60.0	0.7948241779	1.258139885	0.463315707
62.5	0.8319260896	1.202029859	0.370103769
65.0	0.8890600289	1.124783443	0.235723414
67.5	0.8840297038	1.131183710	0.247154006
70.0	0.9194634472	1.087590815	0.1681273678

Após esta conclusão sobre o aumento inesperado da gama de valores de  $a/b$  de 65% para 67.5%, certas questões foram levantadas, tais colocadas:

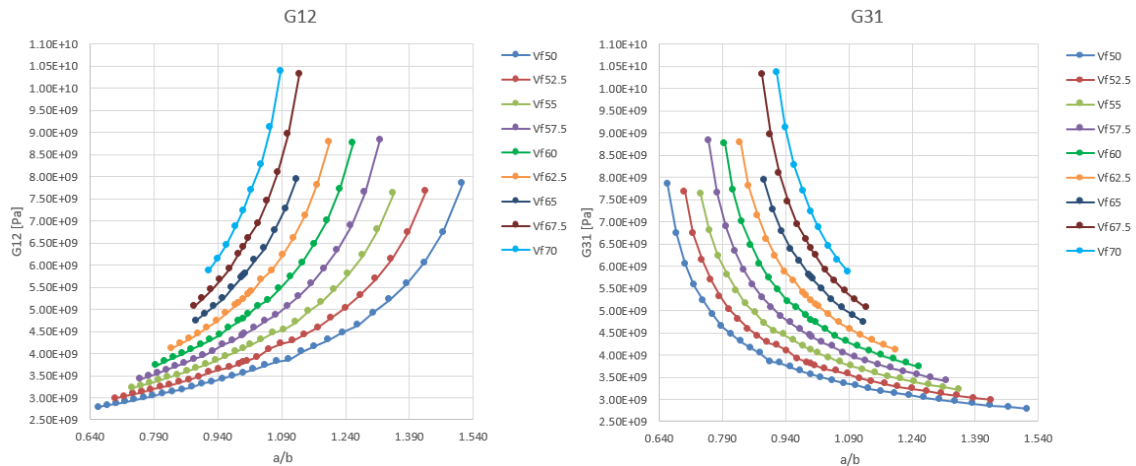
- Se se diminuir o passo do algoritmo no Apêndice B – Pseudo Algoritmo para obtenção de valores  $a/b$  válidos para cada fração de volume de fibra este efeito vai continuar presente?
- Será necessário ajustar manualmente os valores extremos de  $a/b$  para cada volume de fibra, no PREMAT)?

Os extremos de  $a/b$  para cada fração de volume de fibra na tabela (dados de entrada), no Apêndice A1 – Tabela propriedades compósitas - Parte 1, foram ajustados manualmente até a análise deixar de ser viável no PREMAT, devido a problemas de instabilidade do método de elementos finitos. Analisando o aspeto das curvas dos módulos de elasticidade nas direções  $y$  e  $z$ , ilustradas na Figura 7.9, pode-se concluir que o comportamento adotado era expectável. Um espelho entre os valores e a própria curva do módulo de elasticidade  $E_2$  e o  $E_3$ , para cada volume de fibra. Nesta análise torna-se mais complicado verificar o aumento da gama dos valores de  $a/b$  de 65% para 67.5% de volume de fibra, daí a primeira análise ter sido feita no gráfico relativo ao módulo de elasticidade  $E_1$ , na Figura 7.8.



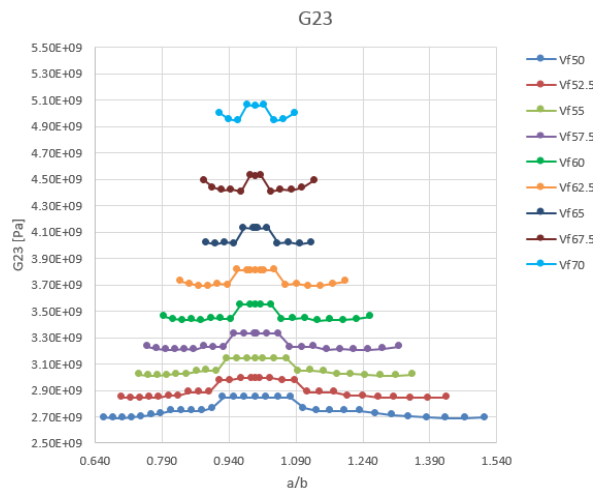
**Figura 7.9 – Valores do módulos de elasticidade na direção  $y$ ,  $E_2$  (esquerda), e na direção  $z$   $E_3$  (direita), para cada fração de volume de fibra analisada e relações de  $a/b$  válidas (valores obtidos no PREMAT)**

Relativamente aos valores obtidos dos módulos de corte nos respetivos planos pode-se encontrar os gráficos correspondentes a cada volume de fibra na Figura 7.10 e na Figura 7.11.



**Figura 7.10 – Valores do módulos de corte  $G_{12}$  (esquerda), e  $G_{31}$  (direita), para cada fração de volume de fibra analisada e relações de  $a/b$  válidas (valores obtidos no PREMAT)**

Os valores do módulo de corte no plano  $G_{23}$  podem ser observados na Figura 7.11, e nota-se que há um aumento do valor deste módulo com o aumento do volume de fibra no volume elementar.

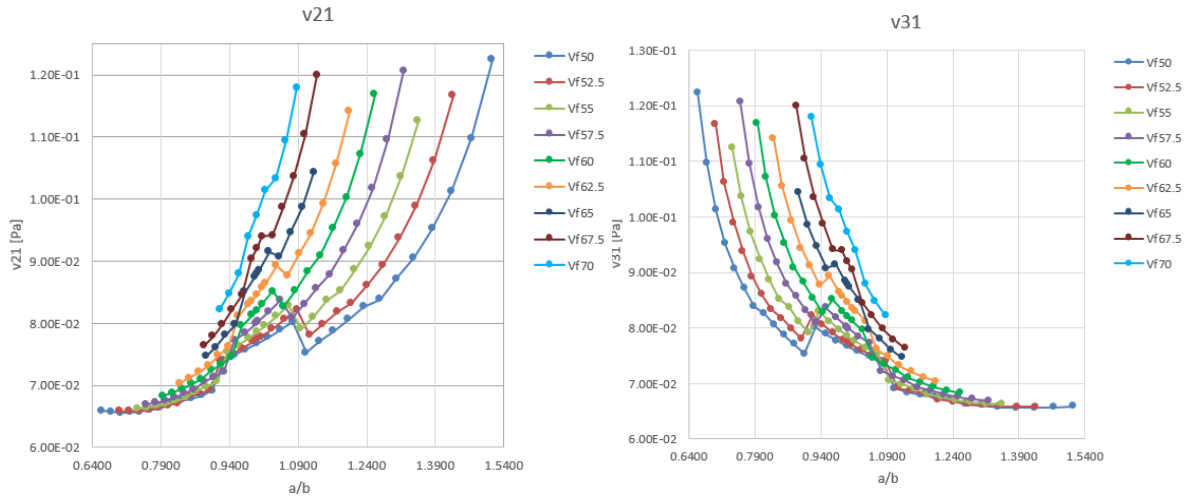


**Figura 7.11 - Valores do módulos de corte  $G_{23}$ , para cada fração de volume de fibra analisada e relações de  $a/b$  válidas (valores obtidos no PREMAT)**

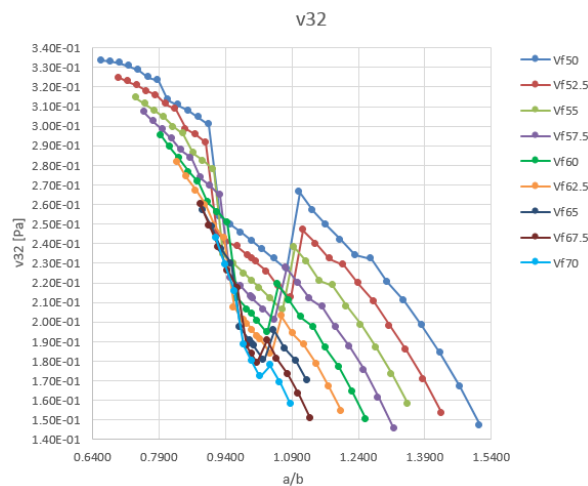
As últimas propriedades elásticas analisadas são os coeficientes de Poisson. Estas também foram extraídas do PREMAT para cada configuração de volume elementar analisado, conforme pode ser observado na Figura 7.12 e na Figura 7.13. O cálculo dos outros coeficientes está diretamente associados com os coeficientes apresentados anteriormente e os respetivos módulos de elasticidade dos planos em causa, conforme ilustra a equação (7.4).

$$\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j} \quad \text{onde} \quad i; j = 1, 2, 3 \quad (7.4)$$

No Apêndice C é possível observar-se os valores obtidos dos restantes coeficientes de Poisson, que podem ser obtidos conforme mencionado na equação (7.4).



**Figura 7.12 - Valores dos coeficientes de Poisson no plano  $yx$  ( $v_{21}$  à esquerda), e no plano  $zx$  ( $v_{31}$  à direita), para cada fração de volume de fibra analisada e relações de  $a/b$  válidas (valores obtidos no PREMAT)**



**Figura 7.13 - Valores dos coeficientes de Poisson no plano  $zy$  ( $v_{32}$ ), para cada fração de volume de fibra analisada e relações de  $a/b$  válidas (valores obtidos no PREMAT)**

Nas figuras correspondentes a estas últimas propriedades elásticas seria muito mais complicado analisar a variação da gama de valores de relação de  $a/b$  para cada volume de fibra. As conclusões obtidas após a análise do módulo de elasticidade  $E_1$  foram conseguidas com maior facilidade do que se a análise tivesse começado pelas curvas obtidas dos coeficientes de Poisson. A próxima etapa é a explicação de como foi tida em conta essa variação da gama de valores de  $a/b$  para cada volume de fibra analisado numericamente.

### Constrangimento dos valores de $a/b$ para cada volume de fibra

Da análise realizada anterior aos valores obtidos para as propriedades elásticas equivalentes, mais concretamente aos módulos de elasticidade e de corte e aos coeficientes de Poisson, foi possível detetar que existe um constrangimento quanto aos extremos de  $a/b$  para cada volume de fibra considerado. Esta fase é extremamente importante para a validade dos dados estimados pelos metamodelos.

Para um dado valor de volume de fibra temos um máximo e um mínimo de valor de  $a/b$ , sabendo que são o inverso um do outro, que serão usados para obter-se o parâmetro designado neste trabalho por *constrangimento relativo* (ilustrado na Figura 7.14).

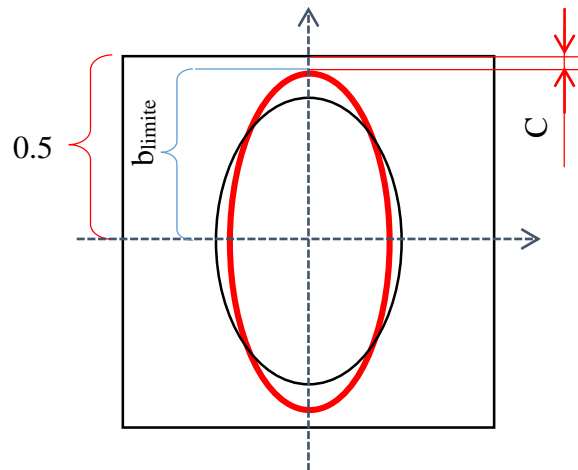
$$C = 0.5 - b_{limite} \quad , \text{ com } C \geq 0 \quad (7.5)$$

$$C_r = \frac{C}{0.5} \quad (7.6)$$

O cálculo do parâmetro constrangimento relativo passa pela diferença entre metade do valor do lado da célula unitária quadrada e o valor limite de  $b$  (semieixo vertical da configuração elíptica da secção transversal da fibra), ou seja, a expressão (7.5). Após o cálculo desta expressão, poder-se-á obter o constrangimento relativo dividindo a diferença obtida (mencionada como “ $C$ ”), pelo valor máximo do semieixo, ou seja, metade do lado da secção transversal da RVE, conforme na expressão (7.6).

É igual usar-se o valor de  $b$  limite da secção transversal mais elíptica vertical, ou usar-se o valor de  $a$  limite da configuração elíptica limite inversa. O constrangimento relativo será igual devido ao facto das elipses extremas de um dado volume de fibra serem iguais, mas inversas.

De um modo sucinto, iniciou-se o processo ao nível da microestrutura com uma análise da micromecânica do volume elementar representativo pelo método de elementos finitos implementado no programa PREMAT (Guedes & Kikuchi 1990). Esta homogeneização vai possibilitar a introdução das propriedades elásticas da lâmina nos laminados dos casos de estudo, a realizar no Ansys©.



**Figura 7.14 – Seção transversal da célula unitária RVE com cotas relevantes para o cálculo do constrangimento relativo, calculado através dos valores de  $a/b$  usados no PREMAT**

## 7.2. Validação dos modelos do Ansys©

Os casos de estudo apresentados por (Reddy 2004) foram replicados e simuladas as análises estática e dinâmica às vibrações livres a placas compósitas laminadas, segundo a teoria de deformação de corte de primeira ordem (FSDT) no *Ansys*©. As relações comprimento de aresta-espessura estudadas foram placas de espessura considerada fina ( $a/h$  igual 100), o caso de moderadamente espessa ( $a/h$  igual a 20) e para placas espessas ( $a/h$  igual a 10). Conforme já foi mencionado anteriormente, foi tido em conta em todas as placas apenas a condição de fronteira de simplesmente apoiada (SS1) (Reddy 2004) ao longo dos bordos, conforme ilustra a Figura 3.9. Os resultados tiveram de ser adimensionalizados com iguais fórmulas, como é o exemplo das expressas na Figura 7.15.

$$\begin{aligned} \bar{w} &= w_0 \left( \frac{E_2 h^3}{b^4 q_0} \right), & \bar{\sigma}_{xx} &= \sigma_{xx} \left( \frac{h^2}{b^2 q_0} \right), & \bar{\sigma}_{yy} &= \sigma_{yy} \left( \frac{h^2}{b^2 q_0} \right) \\ \bar{\sigma}_{xy} &= \sigma_{xy} \left( \frac{h^2}{b^2 q_0} \right), & \bar{\sigma}_{xz} &= \sigma_{xz} \left( \frac{h}{b q_0} \right), & \bar{\sigma}_{yz} &= \sigma_{yz} \left( \frac{h}{b q_0} \right) \end{aligned}$$

**Figura 7.15 – Fórmulas para adimensionalização da deformada transversal e das tensões para as placas ortotrópica [0°] e [0°/90°]**

As placas modeladas são todas quadradas, e variou-se o número de elementos por aresta de modo a permitir o estudo da influência do tamanho do elemento na convergência dos resultados. Por exemplo, na Tabela 7.5 o primeiro caso é com um tamanho de um (1) metro por um (1) metro, o que dá um total por aresta de 10 elementos, ou seja, um total de 100 elementos. A lógica para os restantes casos é igual.

### Primeiras tentativas de validação dos modelos no *Ansys*©

Numa primeira fase, verificou-se que a deformada transversal não dimensionalizada obtida pela simulação numérica no *Ansys*© deu um valor de cerca de 12% maior que o valor apresentado por (Reddy 2004), para o caso de um empilhamento [0/90]<sub>s</sub>. Tal facto deveu-se ao facto do *Ansys*© calcular o fator de correção de corte transversal de um modo diferente, obtendo assim um valor diferente a 5/6, conforme referenciado no capítulo 5. A alteração do valor do fator de correção de corte transversal ( $K$ , ou  $K_{\text{shear}}$ ) para 5/6 realizou-se através da introdução de um *script* com comandos *APDL* na parte do pré-processamento, ou seja, na definição da secção. Deste modo os desvios iniciais de cerca de 12% face aos valores apresentados pelo Reddy já não se verificaram, conforme

ilustram as tabelas dos subcapítulos seguintes. Os resultados apresentados nas tabelas dos três subcapítulos seguintes já têm a correção do fator de correção de corte transversal ( $K$ ) para o valor constante de  $5/6$ .

### Alteração da fator correção de corte transversal ( $K$ ) no Ansys©

Nas primeiras tentativas de validação dos modelos realizados no Ansys© verificou-se que para uma relação de  $a/h$  igual a 10 e a 20 o erro relativo da máxima deformada transversal começou a crescer à medida que a relação de aspecto  $a/h$  diminuía até relação de moderadamente espessura, chegando a valores de 12% de erro relativo. O elevado valor de erro levou à necessidade de fazer vários testes, bem como o de convergência do valor da deformada transversal, conforme ilustra a Figura 7.16 baseada nos resultados apresentados na Tabela 7.3.

Tabela 7.3 – Resultados da análise do modelo SS1 com empilhamento  $[0^\circ/90^\circ]_4$ , antes da correção do fator de corte transversal

Mesh Max Face Size	Mesh Min Size	Mesh Elements	$W_{\text{máx}} * 10^2$ (RE%)	$w_{\text{máx}}^{\text{Reedy}} * 10^2$
m	m	---	---	---
2	2	5x5	0,9497 (1.69%)	0,966
1	1	10x10	1,0423 (7.90%)	0,966
0,5	0,5	20x20	1,0436 (8.03%)	0,966
0,3(3)	0,3(3)	30x30	1,0415 (7.82%)	0,966
0,25	0,25	40x40	1,0439 (8.06%)	0,966

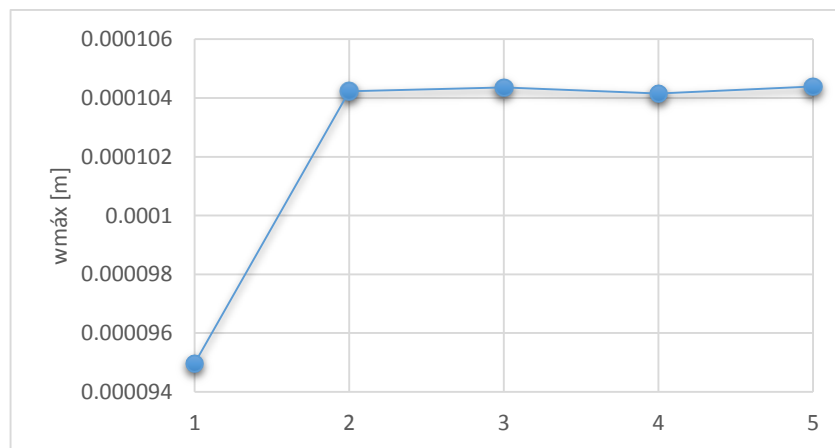


Figura 7.16 – Gráfico da convergência do valor de máxima deformada transversal (em metros)

Contudo após alguma pesquisa foi possível perceber que o *Ansys*® permite através de comandos *APDL* colocar o valor dos parâmetros de rigidez de corte transversal da secção em causa, ou seja do laminado a estudar. Deste modo começou-se por analisar o caso da placa unidirecional (placa ortotrópica, ou seja, todas as camadas a 0°) com uma relação de aspeto  $a/h$  igual a 10. Sem fazer quaisquer alterações aos fatores de correção utilizados pelo *Ansys*®, a informação após simulação, para a placa analisada, encontra-se na Figura 7.17 e na Figura 7.18.

```
Worksheet

SECTION Transverse Shear Correction Factors
0.833333      0.00000
0.00000      0.833333

SECTION Transverse Shear Stiffness (E)
500000.      0.00000
0.00000      200000.

Shell Section is offset to MID surface of Shell

Section Solution Controls
User Transverse Shear Stiffness (11)= 0.0000
                                   (22)= 0.0000
                                   (12)= 0.0000
Added Mass Per Unit Area          = 0.0000
Hourglass Scale Factor; Membrane   = 1.0000
                                   Bending   = 1.0000
Drill Stiffness Scale Factor       = 1.0000

FINISH SOLUTION PROCESSING
```

**Figura 7.17 – Informação pós-simulação para o modelo SS1 com  $a/h$  igual a 10 e o empilhamento a 0° (Parte 1)**

Neste caso, sem qualquer alteração dos fatores de correção, foi obtida uma máxima deformada transversal de  $9.568307e-005$  metros, e confirma-se que o *Ansys*® usou um fator de correção de corte constante de  $5/6$ . Contudo para mais tarde se poder fazer alterações manuais é necessário perceber-se como é que são calculados os parâmetros  $E_{11}$ ,  $E_{22}$  e  $E_{12}$  (*User Transverse Shear Stiffness*), como ilustra a Figura 7.17. Basicamente estes parâmetros são coeficientes da matriz  $E$ , nada têm a ver com os módulos de elasticidade. De modo a perceber então o seu cálculo, introduziu-se os valores dos coeficientes da matriz de rigidez de corte sem o fator de correção, ou seja, para este caso os valores colocados manualmente para os coeficientes da matriz  $E$  são os apresentados na equação (7.7) e na Figura 7.19.

$$\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5e6 & 0 \\ 0 & 0.2e6 \end{bmatrix} \quad (7.7)$$

Worksheet					
SECTION ID NUMBER: 1					
SHELL SECTION TYPE:					
SHELL SECTION NAME IS:					
SHELL SECTION DATA SUMMARY:					
Number of Layers = 4					
Total Thickness = 1.000000					
Layer	Thickness	MatID	Ori. Angle	Num Intg. Pts	
1	0.2500	1	0.0000	3	
2	0.2500	1	0.0000	3	
3	0.2500	1	0.0000	3	
4	0.2500	1	0.0000	3	
SECTION Membrane & Bending(ABD) Matrix					
-0.200000E+08	-0.600000E+07	0.00000	-0.116415E-09	0.00000	0.00000
-0.600000E+07	-800000.	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.000000	0.000000	500000.	0.000000	0.000000	0.181899E-11
-0.116415E-09	0.000000	0.000000	-0.166667E+07	-500000.	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000	-500000.	-66666.7	0.000000
0.000000	0.000000	0.181899E-11	0.000000	0.000000	41666.7

**Figura 7.18 - Informação pós-simulação para o modelo SS1 com  $a/h$  igual a 10 e o empilhamento a  $0^\circ$  (Parte 2)**

Com esta alteração dos coeficientes  $E_{11}$ ,  $E_{12}$  e  $E_{22}$ , o valor obtido da máxima deformada transversal foi de  $9.0664755e-005$  metros, ou seja, longe do valor que foi obtido anteriormente sem alterações ( $9.568307e-005$  metros). Sendo assim falta ainda a multiplicação pelos fatores de correção de corte, o que permitiu concluir que este resultado obtido após estas alterações com comandos APDL foi como se os fatores ( $K$ ) fossem iguais a um (1), ou seja a placa encontrava-se mais rígida daí a deformada transversal máxima ter sido menor.

```

/PREP7
et,1,181
KEYOPT,1,1,0      ! MEMBRANE + BENDING
KEYOPT,1,3,0      ! REDUCED INTEGRATION
KEYOPT,1,8,2      ! WRITE ALL LAYER RESULTS

esel,s,type,,1!suposing type 1 is 185
emodif,all,type,1

SECTYPE, 1, SHELL
secdata,0.25,1,0,3  !3 Points of Integration trough thickness
secdata,0.25,1,0,3
secdata,0.25,1,0,3
secdata,0.25,1,0,3

seccontrol,0.5e6,0.2e6,0,,,,

!Rewrite the SUBMATRIZ WITH Transverse Shear Stifness
!seccontrol,VAL1,VAL2,VAL3,,,,
!Shear Factor = 5/6= 0.833333
!VAL1=E11*k
!VAL2=E22*k
!VAL3=E12*k
!See Shell1181 Guide e Manual APDL Commands

```

**Figura 7.19 – Script de APDL com a alteração dos coeficientes  $E_{11}$ ,  $E_{12}$  e  $E_{22}$ , conforme equação (7.7)**

Nesta próxima alteração, foi introduzida nos valores associados ao comando *SECCONTROL*, conforme ilustra a Figura 7.20, os valores que o *Ansys*© apresentou da matriz *E* multiplicados pelo fator de correção de corte (*K*), conforme apresenta a equação (7.8).

$$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \cdot [E] = \begin{bmatrix} 0.8(3) & 0 \\ 0 & 0.8(3) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.5e6 & 0 \\ 0 & 0.2e6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.41(6) & 0 \\ 0 & 0.1(6) \end{bmatrix} e6 \quad (7.8)$$

```

/PREP7
et,1,181
KEYOPT,1,1,0      ! MEMBRANE + BENDING
KEYOPT,1,3,0      ! REDUCED INTEGRATION
KEYOPT,1,8,2      ! WRITE ALL LAYER RESULTS

esel,s,type,,1!suposing type 1 is 185
emodif,all,type,1

SECTYPE, 1, SHELL
secdata,0.25,1,0,3    !3 Points of Integration trough thickness
secdata,0.25,1,0,3
secdata,0.25,1,0,3
secdata,0.25,1,0,3
!seccontrol,4.166666e5,1.666666e5,0,,,,,

!Rewrite the SUBMATRIZ WITH Transverse Shear Stifness
!seccontrol,VAL1,VAL2,VAL3,,,,,
!Shear Factor = 5/6= 0.833333
!VAL1=E11*k
!VAL2=E22*k
!VAL3=E12*k
!See Shell1181 Guide e Manual APDL Commands

```

Figura 7.20 - Script de APDL com a alteração dos coeficientes  $E_{11}$ ,  $E_{22}$  e  $E_{12}$  multiplicações pelo fator  $K$ , conforme equação (7.8)

Com estas alterações já foi possível obter um valor da deformada transversal máxima de  $9.5682895e-005$  metros. Comparativamente ao valor máximo da deformada transversal obtido sem qualquer alteração através de comandos *APDL*,  $9.568307e-005$  metros, o erro relativo é próximo de 0%, pelo que se pode considerar que o cálculo dos parâmetros  $E_{11}$ ,  $E_{22}$ , e  $E_{12}$  podem ser obtidos pela multiplicação da matriz com os fatores de correção de corte pela matriz dos coeficientes de rigidez de corte.

Posteriormente foram realizadas outras alterações, nomeadamente na espessura global do laminado, de um metro para dez vezes menos, para ver de que modo afetava o cálculo da multiplicação das matrizes. O resultado obtido foi uma alteração da matriz *E*, mantendo-se igual o fator de correção de corte, após semelhante estudo confirmou-se que os parâmetros introduzidos pelo utilizador,  $E_{11}$ ,  $E_{22}$ ,  $E_{12}$  são realmente obtidos pela multiplicação destas duas matrizes (matriz *E* e matriz dos fatores de correção de corte *K*).

Esta conclusão foi extremamente importante, pois o *Ansys*© calcula os fatores de correção de corte baseado num método energético, impedindo a obtenção de resultados idênticos aos obtidos com base na teoria FSDT com fator de corte constante e igual 5/6, que é aproximadamente 0.83(3). Nas análises seguintes foram sempre avaliados os valores dos fatores de correção de corte, e no caso em que estes eram diferentes do valor 5/6, foram alterados manualmente introduzindo os parâmetros  $E_{11}$ ,  $E_{22}$ ,  $E_{12}$  calculados baseados na equação (7.8).

Outra conclusão que se pode tirar deste estudo é que o *Ansys*© usa o fator de correção de corte igual 5/6 não só para placas isotrópicas com uma única camada, conforme é referido na descrição do elemento *Shell181*, ver Anexo A – Descrição do elemento *Shell181*, bem como placas ortotrópica (com uma ou mais camadas, desde que sejam de igual material como o caso estudado). O valor de 5/6 no fator de corte só é usado no caso de uma placa isotrópica de uma única camada, conforme está indicado na formulação do elemento usado, ou no caso de placa ortotrópica, conforme se pode constatar pela Figura 7.21, após retificação da informação gerada após a simulação no *Ansys*© da placa a  $0^\circ$ , ou seja, ortotrópica. Conforme menciona a *Ansys*©, ver anexo Anexo A – Descrição do elemento *Shell181*, no caso de uso do elemento *Shell181*, numa placa isotrópica com uma única camada, a rigidez de corte transversa é calculada conforme a equação (7.9).

$$E = \begin{bmatrix} kGh & 0 \\ 0 & kGh \end{bmatrix} \quad (7.9)$$

Na expressão indicada em cima,  $k$  é o fator de correção de corte transversa e tem o valor de 5/6,  $G$  é o módulo de corte, e  $h$  a espessura da camada (que neste caso descreve toda a placa). Foram então analisadas duas placas (uma isotrópica e outra ortotrópica), ambas simplesmente apoiadas com carregamento uniformemente distribuído, com igual espessura e com apenas uma camada cada. Após resolução dos problemas foram extraídas as matrizes dos fatores de correção de corte transversa, e a matriz da rigidez de corte transversa de cada placa.

**Material 1 – Isotrópico (Material não identificado)**

$$k_{isotrópica} = \begin{bmatrix} 0.83(3) & 0 \\ 0 & 0.83(3) \end{bmatrix}; E_{isotrópica} = \begin{bmatrix} G * h & 0 \\ 0 & G * h \end{bmatrix} \quad (7.10)$$

Os valores finais serão a multiplicação das duas matrizes apresentadas na equação (7.10), ou no caso de placa ortotrópica expressas na equação (7.13).

**Material 2 - Ortotrópica Fibra de Vidro – Epóxi**

As propriedades do módulo de corte ( $G$ ) usadas na equação (7.13), são por exemplo as referidas na tabela Tabela 7.4.

**Tabela 7.4 - Propriedades mecânicas do material compósito fibra de vidro-epóxi**

$E_1$	$E_2$	$E_3$	$G_{23}$	$G_{31}$	$G_{12}$	$\nu_{12}$	$\nu_{13}$	$\nu_{23}$
4.17E+10	9.495E+9	2.15E+10	2.69E+09	7.84E+09	2.7839E+9	0.28967	0.23747	0.1473

$$k_{ortotróp} = \begin{bmatrix} 0.83(3) & 0 \\ 0 & 0.83(3) \end{bmatrix}; E_{ortotróp} = \begin{bmatrix} G_{13} * h & 0 \\ 0 & G_{23} * h \end{bmatrix} \quad (7.11)$$

SECTION Transverse Shear Correction Factors

0.833333      0.00000

0.00000      0.833333

SECTION Transverse Shear Stiffness (E)

0.784000E+10      0.00000

0.00000      0.269000E+10

**Figura 7.21 – Informação pós simulação de uma placa compósito ortotrópica, matriz dos fatores de correção ( $K$ ) e da rigidez do corte transversal ( $E$ )**

A Tabela a cima indica o que já era espectável, ou seja, que o coeficiente  $E_{11}$  é o valor de  $G_{13}$  multiplicado pela espessura, que neste caso é unitária. O outro coeficiente na diagonal das matrizes é obtido de modo idêntico só que é com o módulo de corte  $G_{23}$ .

Recordando as equações constitutivas do laminado, segundo a teoria FSDT, para o efeito de corte interlaminar, presentes na equação (7.12), é possível concluir-se que a matriz  $E$  apresentada pelo *Ansys*© é a conhecida matriz de rigidez de corte,  $A_{\text{shear}}$ , com os coeficientes  $A_{44}$ ,  $A_{55}$  e  $A_{45}$  transformados do laminado, que tal como contempla esta teoria o fator de correção de corte ( $K$ ).

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = k \begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} \\ A_{45} & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \end{Bmatrix} \quad (7.12)$$

### **Alteração das propriedades do laminado para diversas configurações, atualizando o cálculo da matriz $E$ com comandos APDL**

Após as alterações do fator de correção de corte transversal ( $K$ ) através de comandos APDL surgiu um novo obstáculo. A matriz  $E$ , ou seja, a matriz de rigidez do corte transversal altera-se com a variação das propriedades do laminado, sejam elas o material de cada lâmina, a sua orientação e a respetiva espessura de cada camada. Deste modo seria impossível simular automaticamente as 185 configurações de material ( $a/b$ ,  $V_f$ ) fibra de vidro com matriz epoxídica, para uma das 12 configurações dos casos de estudo ( $a/h$ , sequência de empilhamento). Para resolver o problema foram feitas novas alterações aos comandos APDL aplicados no *Ansys*© *Workbench*, de modo a que houvesse possibilidade calcular automaticamente os coeficientes transformados da matriz de rigidez de corte transversal do laminado. Dentro de uma abordagem da teoria FSDT, para cada uma das 12 configurações onde foram feitas análises estática e dinâmica, foi alterado o comando de APDL para obter assim automaticamente os valores das propriedades elásticas de corte  $G$ , que influenciam os valores dos coeficientes transformados da matriz de rigidez de corte transversal  $E$ .

Para verificar se o cálculo estava a ser bem feito, foi relacionado um exemplo de análise do cálculo da respetiva matriz  $E$  através do *Ansys* e analiticamente. Deste modo foi possível usar a ferramenta do *Parameter Set* do *Ansys*© *Workbench*, esta permite simular sequencialmente várias configurações do modelo em estudo. Assim foi possível fazer 12 modelos, correspondentes às 12 configurações da placa ( $a/h$ , sequência de empilhamento) e simular continuamente em cada uma destas as 185 configurações de material ( $a/b$ ,  $V_f$ ) e obter os resultados pretendidos (máxima deformada transversal, e frequência fundamental).

Para validar que as propriedades elásticas do material estavam realmente a variar e a influenciar o cálculo da matriz de rigidez de corte transversão foram criados parâmetros de saída redundantes, que somente retornavam o valor destas variáveis  $G_{xz}$ ,  $G_{yz}$ ,  $A_{44}$ ,  $A_{55}$  e  $A_{45}$ , conforme ilustra a a Figura 7.22 para um exemplo de uma placa ortotrópica, onde todas as camadas estão a  $0^\circ$ .

		N	O	P	Q	R	S	T
1	sq	P57 - S Eq VM Equivalent (von-Mises)	P58 - my_GYZ	P59 - my_GXZ	P60 - my_A44	P61 - my_A55	P62 - my_A45	Exported
2		Pa						
3	7	752821.35	200000	500000	20000	50000	0	
4	4	541445.52	2.6945E+09	7.8357E+09	2.6945E+08	7.8357E+08	0	
5	5	538535.81	2.6894E+09	6.738E+09	2.6894E+08	6.738E+08	0	
6	3	535625.65	2.6908E+09	6.0522E+09	2.6908E+08	6.0522E+08	0	
7	2	532693.81	2.6947E+09	5.5787E+09	2.6947E+08	5.5787E+08	0	
8	1	529639.56	2.701E+09	5.2124E+09	2.701E+08	5.2124E+08	0	0
9	3	526188.35	2.7139E+09	4.9165E+09	2.7139E+08	4.9165E+08	0	
10	5	522723.96	2.7246E+09	4.6452E+09	2.7246E+08	4.6452E+08	0	
11	9	518462.62	2.7432E+09	4.4743E+09	2.7432E+08	4.4743E+08	0	
12	4	515483.08	2.7435E+09	4.3103E+09	2.7435E+08	4.3103E+08	0	
13		512169.33	2.7444E+09	4.1654E+09	2.7444E+08	4.1654E+08	0	
14	9	508730.73	2.7453E+09	4.037E+09	2.7453E+08	4.037E+08	0	
15	2	503472.4	2.7661E+09	3.8556E+09	2.7661E+08	3.8556E+08	0	

Figura 7.22 – Excerto da lista de variáveis de entrada e de saída no *Parameter Set* do Ansys® *Workbench*, para caso de  $a/h$  10 de uma placa ortotrópica (todas as camadas a  $0^\circ$ )

Note-se que em uma placa ortotrópica o coeficiente  $A_{45}$  transformado da matriz de rigidez de corte transversão é nulo, conforme valida a Figura 7.22. Após todas estas alterações foi finalmente possível simular para cada uma das 12 configurações da placa as 185 configurações do material com as respectivas propriedades elásticas e dinâmicas do compósito fibra de vidro com epóxi, lembrando que esta alteração é devida à variação da fração de volume de fibra presente em cada lâmina (igual em todas), entre 50 e 70 % como foi anteriormente mencionado, e consoante a relação da seção transversal elíptica da fibra de vidro  $a/b$ .

Os resultados obtidos das simulações realizadas foram usados para construir os metamodelos para a estimação de pontos que não os de treino, ou seja para saber valores de deformada máxima e de frequência fundamental de 185 configurações de material compósito fibra de vidro e epóxi  $a/b$  e  $V_f$  não usadas nas simulações numéricas realizadas

---

no *Ansys*®. Estes metamodelos serão usados posteriormente na fase de otimização para achar a melhor solução para cada caso de estudo, ora a minimização da deformada máxima (caso A), ora a maximização da frequência fundamental (caso B).

Relativamente às tensões de corte interlaminares,  $\sigma_{yz}$  e  $\sigma_{xz}$ , obtidas no *Ansys*®, estas são calculadas através das equações de equilíbrio, conforme mencionado na descrição e formulação do elemento *Shell181*. Deste modo são justificáveis os desvios que existem relativamente aos valores obtidos face aos apresentados pelo (Reddy 2004), quer pelas equações das leis constitutivas, quer pelas equações de equilíbrio tridimensionais, que poderão ser observadas no subcapítulo seguinte.

De seguida são apresentadas as tabelas com os resultados obtidos pelas simulações numéricas feitas no *Ansys*®, os resultados da obra de (Reddy 2004) e a comparação entre estes através do indicador erro relativo (em percentagem). Para que a dissertação não ficasse com demasiadas tabelas semelhantes somente se colocou no corpo da dissertação os resultados referentes à sequência de empilhamento [0°], ou seja, placa ortotrópica. As restantes três sequências de empilhamento têm os seus resultados expressos nas tabelas do Apêndice C – Validação dos modelos SS1 com  $a/h$  igual a 10, a 20 e a 100.

### 7.2.1. Validação do modelo SS1 com $a/h$ igual a 10

De seguida serão apresentadas as tabelas comparativas dos resultados obtidos através do Ansys© e os resultados apresentados por (Reddy 2004), para quatro placas com uma relação de comprimento de aresta-espessura igual a 10. O que difere as quatro placas é a sequência de empilhamento.

#### Sequência A - $[0^\circ]_4$

Esta placa é composta por quatro lâminas iguais, compósito com reforço de fibra de vidro com matriz epoxídica, orientadas a  $0^\circ$  as quatros.

**Tabela 7.5 – Deformada transversal máxima e frequência fundamental, para o modelo SS1 com  $a/h$  igual a 10 e sequência A**

Elem. Size (m)	#Elem	$w*10^2$ (RE%)	$w_{Reedy}*10^2$	$f_{fundam.}$ (RE%)	$f_{Reedy}$
<b>1</b>	100	0.9568 (0.52%)	0.9519	12.54 (0.70%)	12.452
<b>0.5</b>	400	0.9531 (0.13%)	0.9519	12.47 (0.18%)	12.452
<b>0.3(3)</b>	900	0.9525 (0.06%)	0.9519	12.46 (0.08%)	12.452
<b>0.25</b>	1600	0.9523 (0.04%)	0.9519	12.46 (0.05%)	12.452
<b>0.2</b>	2500	0.9522 (0.03%)	0.9519	12.46 (0.03%)	12.452
<b>0.16(6)</b>	3600	0.9521 (0.02%)	0.9519	12.45 (0.02%)	12.452
<b>0.142857</b>	4900	0.9521 (0.02%)	0.9519	12.45 (0.02%)	12.452
<b>0.125</b>	6400	0.9521 (0.02%)	0.9519	12.45 (0.01%)	12.452
<b>0.1(1)</b>	8100	0.9520 (0.02%)	0.9519	12.45 (0.01%)	12.452
<b>0.1</b>	10000	0.9520 (0.01%)	0.9519	12.45 (0.01%)	12.452
<b>0.05</b>	40000	0.9520 (0.01%)	0.9519	12.45 (0.00%)	12.452

**Tabela 7.6 – Tensões normais  $S_{xx}$  e  $S_{yy}$  e tensão de corte  $S_{xy}$ , para o modelo SS1 com  $a/h$  igual a 10 e sequência A**

#Elem	$S_{xx}$ (RE%)	$S_{xx}^{Reedy}$	$S_{yy}$ (RE%)	$S_{yy}^{Reedy}$	$S_{xy}$ (RE%)	$S_{xy}^{Reedy}$
<b>100</b>	0.7575 (1.70%)	0.7706	0.0358 (1.74%)	0.0352	0.0475 (11.95%)	0.0539
<b>400</b>	0.7674 (0.42%)	0.7706	0.0354 (0.47%)	0.0352	0.0517 (4.04%)	0.0539
<b>900</b>	0.7692 (0.18%)	0.7706	0.0353 (0.26%)	0.0352	0.0529 (1.93%)	0.0539
<b>1600</b>	0.7698 (0.10%)	0.7706	0.0353 (0.20%)	0.0352	0.0533 (1.04%)	0.0539
<b>2500</b>	0.7701 (0.06%)	0.7706	0.0353 (0.17%)	0.0352	0.0536 (0.58%)	0.0539
<b>3600</b>	0.7703 (0.04%)	0.7706	0.0353 (0.15%)	0.0352	0.0537 (0.30%)	0.0539
<b>4900</b>	0.7704 (0.03%)	0.7706	0.0352 (0.14%)	0.0352	0.0538 (0.13%)	0.0539
<b>6400</b>	0.7704 (0.02%)	0.7706	0.0352 (0.13%)	0.0352	0.0539 (0.01%)	0.0539
<b>8100</b>	0.7705 (0.01%)	0.7706	0.0352 (0.13%)	0.0352	0.0539 (0.08%)	0.0539
<b>10000</b>	0.7705 (0.01%)	0.7706	0.0352 (0.12%)	0.0352	0.0540 (0.14%)	0.0539
<b>40000</b>	0.7706 (0.00%)	0.7706	0.0352 (0.11%)	0.0352	0.0541 (0.37%)	0.0539

Apesar de os casos de estudo abordados terem sido apenas otimizados quanto à máxima deformada transversal e à frequência fundamental, foram também validadas as tensões normais e de corte, garantindo assim que os modelos estão completamente válidos. A Tabela 7.5 apresenta as validações da máxima deformada transversal e da frequência fundamental, enquanto a Tabela 7.6 e a Tabela 7.7 apresentam os valores das tensões.

**Tabela 7.7 – Tensões de corte  $S_{xz}$  e  $S_{xx}$  obtidas pelas equações de equilíbrio 3D e pelas constitutivas, para o modelo SS1 com  $a/h$  igual a 10 e sequência A**

#Elem.	Equações Equilíbrio 3D				Equações Constitutivas			
	$S_{xz}$ (RE%)	$S_{xz}^{Reedy}$	$S_{yz}$ (RE%)	$S_{yz}^{Reedy}$	$S_{xz}$ (RE%)	$S_{xz}^{Reedy}$	$S_{yz}$ (RE%)	$S_{yz}^{Reedy}$
<b>100</b>	0.7088 (7.8%)	0.7684	0.1422 (25.6%)	0.1911	0.7088 (15.31%)	0.6147	0.1422 (6.98%)	0.152 9
<b>400</b>	0.7468 (2.8%)	0.7684	0.1717 (10.1%)	0.1911	0.7468 (21.49%)	0.6147	0.1717 (12.31%)	0.152 9
<b>900</b>	0.7593 (1.2%)	0.7684	0.1827 (4.4%)	0.1911	0.7593 (23.53%)	0.6147	0.1827 (19.49%)	0.152 9
<b>1600</b>	0.7656 (0.4%)	0.7684	0.1884 (1.4%)	0.1911	0.7656 (24.6%)	0.6147	0.1884 (23.2%)	0.152 9
<b>2500</b>	0.7694 (0.1%)	0.7684	0.1919 (0.4%)	0.1911	0.7694 (25.2%)	0.6147	0.1919 (25.5%)	0.152 9
<b>3600</b>	0.7719 (0.5%)	0.7684	0.1943 (1.7%)	0.1911	0.7719 (25.6%)	0.6147	0.1943 (27.1%)	0.152 9
<b>4900</b>	0.7737 (0.68%)	0.7684	0.1960 (2.6%)	0.1911	0.7737 (25.9%)	0.6147	0.1960 (28.2%)	0.152 9
<b>6400</b>	0.7750 (0.86%)	0.7684	0.1973 (3.2%)	0.1911	0.7750 (26.1%)	0.6147	0.1973 (29.0%)	0.152 9
<b>8100</b>	0.7760 (0.99%)	0.7684	0.1983 (3.8%)	0.1911	0.7760 (26.3%)	0.6147	0.1983 (29.7%)	0.152 9
<b>10000</b>	0.7769 (1.10%)	0.7684	0.1991 (4.2%)	0.1911	0.7769 (26.4%)	0.6147	0.1991 (30.2%)	0.152 9
<b>40000</b>	0.7806 (1.59%)	0.7684	0.2028 (6.1%)	0.1911	0.7806 (27.0%)	0.6147	0.2028 (32.6%)	0.152 9

Conforme já tinha sido mencionado anteriormente, os resultados obtidos pelo modelo do *Ansys*© discretizado com elementos do tipo *Shell181* têm o cálculo das tensões de corte interlaminar que se baseia nas equações de equilíbrio, conforme mencionado no capítulo 5.1.2. Assim é compreensível o porquê do erro relativo ser bastante menor comparando com os valores obtidos através das equações de equilíbrio, em vez dos valores obtidos através das equações constitutivas, valores apresentados na Tabela 7.7.

---

**Sequências B [0°/90°], C [0°/90°]<sub>s</sub> e D [0°/90°]<sub>4</sub>**

---

No caso da placa compósita com sequência B, esta placa é composta por 2 lâminas a 0°, e outras duas a 90°, com igual espessura entre elas, e os resultados obtidos da simulação numérica confrontados com os de (Reddy 2004) podem ser analisados no Apêndice C – Validação dos modelos SS1 com  $a/h$  igual a 10, a 20 e a 100, mais especificamente na Tabela 7.62.

No caso da placa compósita com sequência C, esta placa é composta por uma lâmina a 0° e outra a 90°, e de seguida o simétrico originando um total de quatro camadas com igual espessura entre elas. Os resultados obtidos da simulação numérica confrontados com os de (Reddy 2004) podem ser analisados no Apêndice C – Validação dos modelos SS1 com  $a/h$  igual a 10, a 20 e a 100, mais especificamente na Tabela 7.63 e Tabela 7.64.

No caso da placa compósita com sequência D, esta placa é composta por um conjunto com duas lâminas (uma primeira a 0° e a seguinte a 90°), e de seguida este conjunto repete-se quatro vezes, originando um total de oito camadas com igual espessura entre elas. Os resultados obtidos da simulação numérica confrontados com os de (Reddy 2004) podem ser analisados no Apêndice C – Validação dos modelos SS1 com  $a/h$  igual a 10, a 20 e a 100, mais especificamente na Tabela 7.65.

As sequências B e D, ao contrário de nas sequências de empilhamento A e C, como os resultados a comparar são menos (pois eram menos resultados na obra abordada) e para não criar mais páginas de tabelas em apêndices juntou-se tudo numa, daí no final da Tabela 7.62 estarem duas vezes os resultados e erros relativos de  $S_{xz}$  obtidos por (Reddy 2004). Num dos casos é através das equações de equilíbrio 3D (EE), e no outro dos casos é através das equações constitutivas (EC).

## 7.2.2. Validação do modelo SS1 com $a/h$ igual a 20

De seguida serão apresentadas as tabelas comparativas dos resultados obtidos através do Ansys© e os resultados apresentados por (Reddy 2004), para quatro placas com uma relação de comprimento de aresta-espessura igual a 20. O que difere as quatro placas é a sequência de empilhamento. Os resultados obtidos não tiveram a influência do ajuste do fator de correção de corte transversal  $K$ , pois o tipo de elemento *Shell181* tem uma resposta aceitável para placas moderadamente espessas, ou seja, com a relação e aspeto abordada nestas validações.

### Sequência A - $[0^{\circ}]_4$

Esta placa é composta por quatro lâminas iguais, compósito com reforço de fibra de vidro com matriz epoxídica, orientadas a  $0^{\circ}$  as quatros.

Apesar de os casos de estudo abordados terem sido apenas otimizados quanto à máxima deformada transversal e à frequência fundamental, foram também validadas as tensões normais e de corte, garantindo assim que os modelos estão completamente válidos. A Tabela 7.8 apresenta as validações da máxima deformada transversal e da frequência fundamental, enquanto a Tabela 7.9 e a Tabela 7.10 apresentam os valores das tensões.

**Tabela 7.8 – Deformada transversal máxima e frequência fundamental, para o modelo SS1 com  $a/h$  igual a 20 e sequência A**

Elem. Size (m)	#Elem	$w*10^2$ (RE%)	$w_{Reedy}*10^2$	$f_{fundam.}$ (RE%)	$f_{Reedy}$
<b>1</b>	100	0.7247 (0.20%)	0,7262	14.52 (1.13%)	14,355
<b>0.5</b>	400	0.7258 (0.06%)	0,7262	14.40 (0.28%)	14,355
<b>0.3(3)</b>	900	0.7260 (0.03%)	0,7262	14.37 (0.12%)	14,355
<b>0.25</b>	1600	0.7261 (0.02%)	0,7262	14.36 (0.07%)	14,355
<b>0.2</b>	2500	0.7261 (0.01%)	0,7262	14.36 (0.04%)	14,355
<b>0.16(6)</b>	3600	0.7261 (0.01%)	0,7262	14.36 (0.03%)	14,355
<b>0.142857</b>	4900	0.7261 (0.01%)	0,7262	14.36 (0.02%)	14,355
<b>0.125</b>	6400	0.7261 (0.01%)	0,7262	14.36 (0.02%)	14,355
<b>0.1(1)</b>	8100	0.7262 (0.01%)	0,7262	14.36 (0.01%)	14,355
<b>0.1</b>	10000	0.7262 (0.01%)	0,7262	14.36 (0.01%)	14,355
<b>0.05</b>	40000	0.7262 (0.00%)	0,7262	14.36 (0.00%)	14,355

**Tabela 7.9 – Tensões normais  $S_{xx}$  e  $S_{yy}$  e tensão de corte  $S_{xy}$ , para o modelo SS1 com  $a/h$  igual a 20 e sequência A**

#Elem	$S_{xx}$ (RE%)	$S_{xx}^{Reedy}$	$S_{yy}$ (RE%)	$S_{yy}^{Reedy}$	$S_{xy}$ (RE%)	$S_{xy}^{Reedy}$
<b>100</b>	0.7772 (0.71%)	0,7828	0.0283 (4.20%)	0,0272	0.0448 (7.93%)	0,0487
<b>400</b>	0.7814 (0.18%)	0,7828	0.0275 (1.20%)	0,0272	0.0475 (2.50%)	0,0487
<b>900</b>	0.7822 (0.07%)	0,7828	0.0274 (0.70%)	0,0272	0.0482 (1.09%)	0,0487
<b>1600</b>	0.7825 (0.04%)	0,7828	0.0273 (0.53%)	0,0272	0.0485 (0.50%)	0,0487
<b>2500</b>	0.7826 (0.02%)	0,7828	0.0273 (0.45%)	0,0272	0.0486 (0.19%)	0,0487
<b>3600</b>	0.7827 (0.01%)	0,7828	0.0273 (0.41%)	0,0272	0.0487 (0.01%)	0,0487
<b>4900</b>	0.7827 (0.01%)	0,7828	0.0273 (0.38%)	0,0272	0.0488 (0.10%)	0,0487
<b>6400</b>	0.7828 (0.00%)	0,7828	0.0273 (0.37%)	0,0272	0.0488 (0.18%)	0,0487
<b>8100</b>	0.7828 (0.00%)	0,7828	0.0273 (0.35%)	0,0272	0.0488 (0.24%)	0,0487
<b>10000</b>	0.7828 (0.00%)	0,7828	0.0273 (0.35%)	0,0272	0.0488 (0.28%)	0,0487
<b>40000</b>	0.7828 (0.01%)	0,7828	0.0273 (0.32%)	0,0272	0.0489 (0.43%)	0,0487

Na Tabela 7.10 não constam os valores obtidos pelas equações de equilíbrio 3D, como no caso da Tabela 7.7 para a relação e aspecto  $a/h$  igual a 10, porque os problemas das validações da máxima deformada transversal (primeiro resultado a validar) começaram na relação e aspecto da placa espessa, como tal o estudo e respetivas validações foram foi mais exaustivas.

**Tabela 7.10 – Tensões de corte  $S_{xz}$  e  $S_{yz}$  obtidas pelas equações constitutivas, para o modelo SS1 com  $a/h$  igual a 20 e sequência A**

#Elem.	Equações Constitutivas			
	$S_{xz}$ (RE%)	$S_{xz}^{Reedy}$	$S_{yz}$ (RE%)	$S_{yz}^{Reedy}$
<b>100</b>	0.7219 (16.55%)	0,6194	0.1360 (7.24%)	0,1466
<b>400</b>	0.7543 (21.78%)	0,6194	0.1643 (12.05%)	0,1466
<b>900</b>	0.7659 (23.65%)	0,6194	0.1750 (19.38%)	0,1466
<b>1600</b>	0.7718 (24.60%)	0,6194	0.1807 (23.23%)	0,1466
<b>2500</b>	0.7754 (25.18%)	0,6194	0.1841 (25.59%)	0,1466
<b>3600</b>	0.7778 (25.58%)	0,6194	0.1865 (27.19%)	0,1466
<b>4900</b>	0.7796 (25.86%)	0,6194	0.1882 (28.35%)	0,1466
<b>6400</b>	0.7809 (26.07%)	0,6194	0.1894 (29.22%)	0,1466
<b>8100</b>	0.7819 (26.23%)	0,6194	0.1904 (29.90%)	0,1466
<b>10000</b>	0.7827 (26.36%)	0,6194	0.1912 (30.45%)	0,1466
<b>40000</b>	0.7864 (26.96%)	0,6194	0.1949 (32.95%)	0,1466

Conforme já tinha sido mencionado anteriormente, os resultados obtidos pelo modelo do Ansys© têm o cálculo das tensões de corte interlaminar que se baseia nas equações de equilíbrio, logo é esperado um elevado erro relativo quando comparado a valores obtidos através das equações constitutivas, conforme na Tabela 7.10.

---

**Sequências B [0°/90°], C [0°/90°]<sub>s</sub> e D [0°/90°]<sub>4</sub>**

---

No caso da placa compósita com sequência B, esta placa é composta por 2 lâminas a 0°, e outras duas a 90°, com igual espessura entre elas, e os resultados obtidos da simulação numérica confrontados com os de (Reddy 2004) podem ser analisados no Apêndice C – Validação dos modelos SS1 com  $a/h$  igual a 10, a 20 e a 100, mais especificamente na Tabela 7.66.

No caso da placa compósita com sequência C, esta placa é composta por uma lâmina a 0° e outra a 90°, e de seguida o simétrico originando um total de quatro camadas com igual espessura entre elas. Os resultados obtidos da simulação numérica confrontados com os de (Reddy 2004) podem ser analisados no Apêndice C – Validação dos modelos SS1 com  $a/h$  igual a 10, a 20 e a 100, mais especificamente na Tabela 7.67 e na Tabela 7.68.

No caso da placa compósita com sequência D, esta não consta como análise na obra realizada por (Reddy 2004), como tal não existem tabelas referentes aos resultados nem à comparação de resultados no Apêndice C – Validação dos modelos SS1 com  $a/h$  igual a 10, a 20 e a 100.

Nestas sequências não foram analisados os resultados das tensões de corte interlaminares obtidas através das equações de equilíbrio 3D, pelo que não constam valores nem erros relativos na tabela.

### 7.2.3. Validação do modelo SS1 com $a/h$ igual a 100

De seguida serão apresentadas as tabelas comparativas dos resultados obtidos através do *Ansys*© e os resultados apresentados por (Reddy 2004), para quatro placas com uma relação de comprimento de aresta-espessura igual a 100. O que difere as quatro placas é a sequência de empilhamento. Os resultados obtidos não tiveram a influência do ajuste do fator de correção de corte transversal  $K$ , pois o tipo de elemento *Shell181* tem uma resposta aceitável para placas moderadamente espessas, ou seja, com a relação e aspeto abordada nestas validações.

#### Sequência A - $[0^\circ]_4$

Esta placa é composta por quatro lâminas iguais, compósito com reforço de fibra de vidro com matriz epoxídica, orientadas a  $0^\circ$  as quatros.

Tabela 7.11 – Deformada transversal máxima e frequência fundamental, para o modelo SS1 com  $a/h$  igual a 100 e sequência A

Elem. Size (m)	#Elem	$w*10^2$ (RE%)	$w_{Reedy}*10^2$	$f_{fundam.}$ (RE%)	$f_{Reedy}$
1	100	0.6507 (0.33%)	0,6528	15.37 (1.22%)	15,19
0.5	400	0.6522 (0.09%)	0,6528	15.24 (0.30%)	15,19
0.3(3)	900	0.6525 (0.04%)	0,6528	15.21 (0.13%)	15,19
0.25	1600	0.6527 (0.02%)	0,6528	15.20 (0.07%)	15,19
0.2	2500	0.6527 (0.01%)	0,6528	15.20 (0.05%)	15,19
0.1(6)	3600	0.6527 (0.01%)	0,6528	15.19 (0.03%)	15,19
0.142857	4900	0.6528 (0.01%)	0,6528	15.19 (0.02%)	15,19
0.125	6400	0.6528 (0.01%)	0,6528	15.19 (0.02%)	15,19
0.1(1)	8100	0.6528 (0.00%)	0,6528	15.19 (0.01%)	15,19
0.1	10000	0.6528 (0.00%)	0,6528	15.19 (0.01%)	15,19
0.05	40000	0.6528 (0.00%)	0,6528	15.19 (0.00%)	15,19

Apesar de os casos de estudo abordados terem sido apenas otimizados quanto à máxima deformada transversal e à frequência fundamental, foram também validadas as tensões normais e de corte, garantindo assim que os modelos estão completamente válidos. A Tabela 7.11 apresenta as validações da máxima deformada transversal e da frequência fundamental, enquanto a Tabela 7.12 e na Tabela 7.13 apresentam os valores das tensões.

**Tabela 7.12 – Tensões normais  $S_{xx}$  e  $S_{yy}$  e tensão de corte  $S_{xy}$ , para o modelo SS1 com  $a/h$  igual a 100 e sequência A**

#Elem	$S_{xx}$ (RE%)	$S_{xx}^{Reedy}$	$S_{yy}$ (RE%)	$S_{yy}^{Reedy}$	$S_{xy}$ (RE%)	$S_{xy}^{Reedy}$
<b>100</b>	0.7810 (0.70%)	0,7865	0.0255 (4.00%)	0,0245	0.0429 (7.44%)	0,0464
<b>400</b>	0.7851 (0.17%)	0,7865	0.0248 (1.14%)	0,0245	0.0454 (2.22%)	0,0464
<b>900</b>	0.7859 (0.07%)	0,7865	0.0247 (0.66%)	0,0245	0.0460 (0.91%)	0,0464
<b>1600</b>	0.7862 (0.04%)	0,7865	0.0246 (0.50%)	0,0245	0.0462 (0.38%)	0,0464
<b>2500</b>	0.7863 (0.02%)	0,7865	0.0246 (0.42%)	0,0245	0.0463 (0.11%)	0,0464
<b>3600</b>	0.7864 (0.01%)	0,7865	0.0246 (0.38%)	0,0245	0.0464 (0.05%)	0,0464
<b>4900</b>	0.7864 (0.01%)	0,7865	0.0246 (0.36%)	0,0245	0.0465 (0.15%)	0,0464
<b>6400</b>	0.7865 (0.01%)	0,7865	0.0246 (0.34%)	0,0245	0.0465 (0.22%)	0,0464
<b>8100</b>	0.7865 (0.00%)	0,7865	0.0246 (0.33%)	0,0245	0.0465 (0.27%)	0,0464
<b>10000</b>	0.7865 (0.00%)	0,7865	0.0246 (0.32%)	0,0245	0.0465 (0.31%)	0,0464
<b>40000</b>	0.7865 (0.00%)	0,7865	0.0246 (0.30%)	0,0245	0.0466 (0.44%)	0,0464

Na Tabela 7.13 não constam os valores obtidos pelas equações de equilíbrio 3D, como no caso da Tabela 7.7 para a relação e aspeto  $a/h$  igual a 10, porque os problemas das validações da máxima deformada transversal (primeiro resultado a validar) começaram na relação e aspeto da placa espessa, como tal o estudo e respetivas validações foram foi mais exaustivas.

**Tabela 7.13 – Tensões de corte  $S_{xz}$  e  $S_{yz}$  obtidas pelas equações constitutivas, para o modelo SS1 com  $a/h$  igual a 100 e sequência A**

#Elem.	Equações Constitutivas			
	$S_{xz}$ (RE%)	$S_{xz}^{Reedy}$	$S_{yz}$ (RE%)	$S_{yz}^{Reedy}$
<b>100</b>	0.7236 (16.60%)	0,6206	0.1336 (7.78%)	0,1449
<b>400</b>	0.7560 (21.81%)	0,6206	0.1620 (11.79%)	0,1449
<b>900</b>	0.7675 (23.67%)	0,6206	0.1728 (19.23%)	0,1449
<b>1600</b>	0.7734 (24.62%)	0,6206	0.1784 (23.13%)	0,1449
<b>2500</b>	0.7770 (25.20%)	0,6206	0.1819 (25.52%)	0,1449
<b>3600</b>	0.7794 (25.59%)	0,6206	0.1842 (27.14%)	0,1449
<b>4900</b>	0.7812 (25.87%)	0,6206	0.1859 (28.31%)	0,1449
<b>6400</b>	0.7825 (26.08%)	0,6206	0.1872 (29.20%)	0,1449
<b>8100</b>	0.7835 (26.25%)	0,6206	0.1882 (29.89%)	0,1449
<b>10000</b>	0.7843 (26.38%)	0,6206	0.1890 (30.44%)	0,1449
<b>40000</b>	0.7880 (26.97%)	0,6206	0.1927 (32.97%)	0,1449

Conforme já tinha sido mencionado anteriormente, os resultados obtidos pelo modelo do Ansys© têm o cálculo das tensões de corte interlaminar que se baseia nas equações de equilíbrio, logo é esperado um elevado erro relativo quando comparado a valores obtidos através das equações constitutivas, conforme na Tabela 7.13.

---

**Sequências B [0°/90°], C [0°/90°]<sub>s</sub> e D [0°/90°]<sub>4</sub>**

---

No caso da placa compósita com sequência B, esta placa é composta por 2 lâminas a 0°, e outras duas a 90°, com igual espessura entre elas, e os resultados obtidos da simulação numérica confrontados com os de (Reddy 2004) podem ser analisados no Apêndice C – Validação dos modelos SS1 com  $a/h$  igual a 10, a 20 e a 100, mais especificamente na Tabela 7.69.

No caso da placa compósita com sequência C, esta placa é composta por uma lâmina a 0° e outra a 90°, e de seguida o simétrico originando um total de quatro camadas com igual espessura entre elas. Os resultados obtidos da simulação numérica confrontados com os de (Reddy 2004) podem ser analisados no Apêndice C – Validação dos modelos SS1 com  $a/h$  igual a 10, a 20 e a 100, mais especificamente na Tabela 7.70 e na Tabela 7.71.

No caso da placa compósita com sequência D, esta placa é composta por um conjunto com duas lâminas (uma primeira a 0° e a seguinte a 90°), e de seguida este conjunto repete-se quatro vezes, originando um total de oito camadas com igual espessura entre elas. Os resultados obtidos da simulação numérica confrontados com os de (Reddy 2004) podem ser analisados no Apêndice C – Validação dos modelos SS1 com  $a/h$  igual a 10, a 20 e a 100, mais especificamente na Tabela 7.72.

Nestas sequências não foram analisados os resultados das tensões de corte interlaminares obtidas através das equações de equilíbrio 3D, pelo que não constam valores nem erros relativos na tabela.

### 7.2.4. Análise dos resultados obtidos

Relativamente aos resultados que são os mais importantes, pois serão usados nos casos de estudo apresentados no capítulo 7.5, ou seja, a máxima deformada transversal e a frequência fundamental da placa compósita pode-se verificar que os erros relativos da comparação entre os valores adimensionalizados apresentados na obra (Reddy 2004) e os obtidos pelos modelos criados em *Ansys*© nunca ultrapassaram o objetivo colocado de 5%, a maioria dos casos não chegou sequer a ultrapassar 1.8% de erro relativo. O único caso que ultrapassou o valor de 1.8% foi a máxima deformada transversal na análise da placa moderadamente espessa com sequência de empilhamento C  $[0^\circ/90^\circ]_s$ . Poder-se-ia fazer num futuro trabalho a análise deste caso mas com a correção do fator de corte transversal ( $K$ ), e fazer mais verificações para confirmar o porquê de existir este erro mais elevado só neste caso.

Analisando de uma forma global as tensões normais  $S_{xx}$  e  $S_{yy}$ , e a tensão de corte  $S_{xy}$  pode-se concluir que os valores de erros relativos são bastante bons, contudo os melhores valores encontram-se com uma discretização da malha com um total de 1600 elementos. No caso da sequência C da placa com a relação  $a/h$  igual a 20, onde a máxima deformada transversal teve um erro relativo perto de 5%, nota-se erros relativos na tensão normal  $S_{yy}$  de aproximadamente 5%, e na tensão de corte  $S_{xy}$  de 2%, conforme a Tabela 7.67. No caso da sequência C da placa com a relação  $a/h$  igual a 100 nota-se erros relativos na tensões normais  $S_{xx}$  de aproximadamente 2.3% e  $S_{yy}$  de 3%, conforme a Tabela 7.70.

De uma maneira geral o erro relativo diminui com a qualidade da discretização da malha, ou seja, com o aumento de número de elementos por lado da placa quadrada. Para completar esta parte da validação dos modelos elaborados no *Ansys*© tinha interesse colocar os valores e as comparações das tensões de corte interlaminares ( $S_{xz}$  e  $S_{yz}$ ) obtidas pelas equações de equilíbrio 3D para relações de aspeto  $a/h$  iguais a 20 e 100. Contudo a análise destas tensões para a relação de aspeto da placa espessa dá para perceber e verificar que o cálculo feito pelo programa *Ansys*© para estas tensões interlaminares está longe de ser um cálculo baseado em equações constitutivas, mas sim algo mais aproximado do cálculo obtido por equações de equilíbrio 3D. Verifica-se na Tabela 7.7 erros relativos que nem chegam a 1% face aos valores obtidos por (Reddy 2004) com equações de equilíbrio 3D, enquanto a maioria dos respetivos erros para a comparação com os valores de Reddy obtidos pelas equações constitutivas têm erros que ultrapassam

---

os 25%. Esta análise leva-nos a concluir que para o caso das tensões interlaminares obtidas pela simulação numérica o cálculo associado é feito através de equações de equilíbrio 3D, tal como é explicado no capítulo 5.1.2. Em suma, estas validações permitiram que os modelos fossem validados e que fossem usados nos casos de estudo para modelar análises estáticas e dinâmicas de placas espessas, moderadamente espessas e finas, com as sequências de empilhamento aqui apresentadas e com carregamentos uniformes (tal como foram usados nestas validações).

### 7.3. Aplicações nos métodos de interpolação

Neste capítulo será feita uma abordagem ao uso dos metamodelos para a estimação das propriedades elásticas equivalentes de uma lâmina de fibra unidirecional de vidro e matriz epoxídica, bem como o uso destes métodos para a estimação da deformada máxima de um dado laminado com camadas com características e propriedades iguais às estimadas na etapa anterior.

Neste âmbito os dados amostrais provém de dados gerados numericamente em simulações computacionais. Não há aleatoriedade nos dados nem nos eventos, o que significa que há mais conhecimento e informação sobre o processo e os dados.

Toda a implementação e aplicação dos metamodelos foi realizada no *MatLab*®.

#### Generalidades sobre os métodos selecionados e respetivas implementações

Foram desenvolvidos metamodelos, baseados nos métodos de interpolação espacial, Kriging e Redes Neurais Artificiais com funções de Base Radial, para modelar a relação entre as entradas e as saídas em causa. Durante a implementação destes métodos surgiram algumas dificuldades computacionais, algumas destas vão ser apresentadas com a respetiva solução tomada para ultrapassar as mesmas. A primeira dificuldade apresentada foi o uso de variáveis simbólicas no *MatLab*®, invés de variáveis numéricas, o que proporcionou um drástico esforço computacional comparando ambas as abordagens. Um pequeno e simples exemplo é apresentado de seguida, para que se perceba a diferença do esforço computacional aplicando cada uma das abordagens, sendo este um dos tópicos sobre o qual se prende o objetivo principal deste trabalho, a redução do tempo de computação.

#### Comparação de computação de funções em ciclos com variáveis simbólicas versus variáveis numérica

Uma das preocupações que foi tida em conta frequentemente é a otimização dos tempos de computação. Durante a implementação em *MatLab*® do cálculo da matriz de covariâncias ou da matriz das funções de base radial em cada neurónio, ver capítulos 4.2 e 4.3, o elevado tempo de computação foi uma das dificuldades encontradas. Para explicar como foi feita a melhoria do código para reduzir o tempo de computação, é apresentado

o seguinte exemplo onde é analisado o tempo de computação de um ciclo com uma simples operação de adição por dois métodos.

No primeiro método é usado uma variável simbólica ( $b$ ) e no segundo método a mesma variável é numérica. Exemplo de algoritmo da função usada com a operação de adição dentro do ciclo que se repete  $N$  vezes, somando à mesma variável o valor da variável simbólica/numérica na entrada correspondente ao número da iteração do ciclo. A função foi usada para obter os resultados para os números de iterações dos ciclos de 10,100,1000,10000 e 100000, tal como representa a Tabela 7.14.

Estes tempos de computação são sempre sujeitos ao computador em que são efetuadas as simulações, que neste caso é o computador pessoal descrito no Apêndice F – Características do computador pessoal. Após a análise do exemplo anterior, é compreensível o porque desta preocupação para o cálculo das matrizes simétricas e quadradas  $N \times N$  ( $N$  é o número de pontos de treino do modelo) de covariância (ver capítulo 4.2.1) e da função de ativação (ver no capítulo 4.3), onde estão envolvidas em cada índice da matriz operações de subtração, somatórios, multiplicações, divisões e exponenciais logarítmicas (conforme se pode constatar no capítulo 4.2 a função de covariância usada, ou a função de base radial no caso do método de RBF, capítulo 4.3)

**Tabela 7.14 – Tempos de computação para variáveis simbólicas e numéricas**

NUMFOR	SOMA	TEMPO1 (SEG)	TEMPO2 (SEG)	MELHORIA (TIMESYM/TIMENUM)
<b>10</b>	56	0.0113	6.5684e-06	1.73e+03
<b>100</b>	5051	0.1016	7.8000e-06	1.30e+04
<b>1000</b>	500501	1.0380	1.8474e-05	5.62e+04
<b>10000</b>	50005001	10.9960	1.3588e-04	8.09e+04
<b>100000</b>	5000050001	108.1437	1.3974e-03	7.74e+04

Para este exemplo simples de uma operação de adição de números inteiros já é bastante evidente a melhoria do tempo de computação, por exemplo para o caso de 10000 pontos o uso de variáveis numéricas aumenta a rapidez, ou seja, diminui o tempo de computação do ciclo em cerca de 80000 vezes mais rápido, conforme apresenta a Tabela 7.14. Esta pequena análise foi feita conforme o Algoritmo 8.

-----|| **COMPARAÇÃO DA COMPUTAÇÃO DE UMA ADIÇÃO EM CICLOS COM VARIÁVEIS SIMBÓLICA VERSUS VARIÁVEIS NUMÉRICAS**||  
-----

**Objetivo da Função:** Cálculo da melhoria no tempo de computação de um ciclo com a operação de adição, entre o uso de variáveis tipo numéricas face ao uso de variáveis tipo simbólicas.

**Dados de Entrada:** Número de Iterações do Ciclo (**NumFor**)

**Resultado:** Tempo da Computação Simbólica (**Tempo1**), Tempo da Computação Numérica (**Tempo2**), Soma do Ciclo (**Soma**)

**Início da Função**

%% Método 1 %%%

Variáveis Simbólicas b x

b= [1:1:NumFor, x]

a=1

IniciarTempo1

Para i=1... NumFor faça

a= a+b(1,i)

Fim

PararTempo1

LimparVariáveis b x

%% Método 2 %%%%

b= [1:1:NumFor]

a0=1

IniciarTempo2

Para i=1... NumFor faça

a0= a0+b(1,i)

Fim

PararTempo2

%% Cálculo da melhoria do cálculo através de variáveis numéricas face ao uso de variáveis simbólicas

Melhoria=Tempo2/Tempo1

%% Validação

Se a~=a0

Erro-> Fim da Função

Senão

Soma=a

Fim Se

**Fim da Função**

Algoritmo 8 - Comparação da computação de uma adição em ciclos com variáveis simbólica versus variáveis numéricas

### 7.3.1. Igualdade matemática entre os métodos de interpolação RBF e Kriging

A aplicação dos métodos abordados como métodos de interpolação, sem qualquer processo de estimação dos parâmetros das respetivas funções de *kernel* e de ativação, faz com que estes sejam iguais matematicamente.

Das propriedades matriciais da multiplicação de matrizes e das respetivas transpostas, demonstra-se que há uma igualdade matemática entre os dois métodos de interpolação, conforme se pode verificar na equação (7.14). Contudo há um pormenor que é preciso ter em atenção, sabendo que as matrizes das covariâncias ( $\Gamma$ ) e da função de ativação ( $\Phi$ ), são matrizes quadradas ( $N \times N$ ) e simétricas, pois a diferença entre um ponto  $a$  e  $b$  é igual entre o ponto  $b$  e  $a$ . Por esta razão dá-se a igualdade apresentada na equação (7.13).

$$\Gamma = \Gamma^T \quad (7.13)$$

**Tabela 7.15 – Dedução matemática do método Kriging** (Fazio 2013)

Equação	Explicação
$\hat{Z}[j] = \Omega_j^T \cdot Z$	Da equação no Algoritmo 1
$= (\Gamma^{-1} \cdot Y)^T \cdot Z$	Da equação no Algoritmo 1
$= Y^T \cdot (\Gamma^{-1})^T \cdot Z$	$(AB)^T = B^T A^T$
$= Y^T \cdot (\Gamma^T)^{-1} \cdot Z$	$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
$= Y^T \cdot \Gamma^{-1} \cdot Z$	Da equação (7.13)

**Tabela 7.16 – Dedução matemática do método RBF** (Fazio 2013)

Equação	Explicação
$\hat{Z}[j] = \Omega_j^T \cdot Y$	Da equação no Algoritmo 4
$= Y^T \cdot \Omega_j$	$A^T B = B^T A$
$= Y^T \cdot \Phi^{-1} \cdot Z$	Da equação no Algoritmo 4

A equação (7.14) é obtida através das deduções feitas na

Tabela 7.15 e na Tabela 7.16, que são extraídas da obra de (Fazio 2013) e cuja igualdade matemática aqui apresentada foi confirmada.

$$\underbrace{\Upsilon^T \cdot \Gamma^{-1} \cdot Z}_{Kriging} = \underbrace{\Upsilon^T \cdot \Gamma^{-1} \cdot Z}_{RBF} \quad (7.14)$$

A razão pela qual estes métodos são inicialmente diferentes (admitindo que a função de *kernel* e/ou ativação é idêntica, tal como os parâmetros associados) é o modo de obtenção dos pesos para a interpolação espacial. O método de Kriging calcula os pesos a cada iteração, a cada ponto a interpolar, pois está dependente do cálculo do vetor ( $\Upsilon$ ) que contém as distâncias de todos os pontos ao ponto a interpolar, tal como apresenta a equação (7.15).

$$\Omega_j = \Gamma^{-1} \cdot \Upsilon \quad (7.15)$$

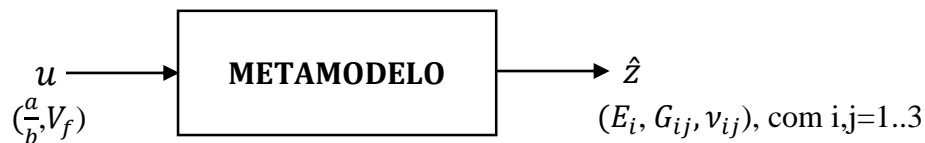
O método de RBF já só calcula os pesos da rede uma única vez, ao contrário do Kriging, pois o cálculo desses pesos ( $\Omega_j$ ) apenas é função dos vetor dos valores de output ( $Z$ ) e da matriz das funções de ativação ( $\Phi$ ), conforme é apresentado na equação (7.16).

$$\Omega_j = \Phi^{-1} \cdot Z \quad (7.16)$$

Por esta razão daqui para a frente apenas se usará o método de RBF, pois a sua estrutura permite que o cálculo e estimação de vários pontos seja mais rápido pois o cálculo dos pesos é feito somente uma vez.

### 7.3.2. Aplicação do método de RBF para criar um metamodelo para as propriedades elásticas

Em primeiro lugar foi desenvolvido um metamodelo para as propriedades elásticas equivalentes da lâmina compósita, obtendo deste modo as superfícies de resposta para cada propriedade (módulos de elasticidade, módulos de corte e coeficientes de Poisson). Neste caso cada dado possui um ponto associado, o ponto é composto por uma coordenada que é a relação elíptica da seção transversal da fibra ( $a/b$ ), e a outra coordenada é a fração de volume de fibra ( $V_f$ ). O contradomínio do ponto, dado, será composto não por um único valor, mas sim por doze (12). Estes doze valores do dado, de saída do metamodelo, são as propriedades elásticas para cada ponto ( $a/b, V_f$ )



**Figura 7.23 – Esquema adaptado para a relação entre as entradas ( $a/b, V_f$ ) e saídas (propriedades elásticas equivalentes), primeira etapa de desenvolvimento de metamodelos**

Foram feitos alguns testes, apresentados nos tópicos seguintes, com diversas funções de ativação para avaliar o desempenho do metamodelo na estimação das doze propriedades mecânicas do material compósito consoante o os valores de  $a/b$  e fração de volume de fibra.

---

### Teste.1) Função de Ativação “Ornstein–Uhlenbec (OU)”

---

Esta função é adaptada da função presente no capítulo 4.2.2 Funções de covariância, e está expressa na equação (7.17) com o respetivo cálculo do  $h$  e do parâmetro  $L$ .

$$f(h) = \sigma e^{-\sum_{i=1}^{nvar} \frac{|h_i|}{L_i}}$$

$$h = (u_i, u_j) - (u_{i+1}, u_{j+1}) \quad (7.17)$$

$$L = \max(u) - \min(u)$$

$nvar$  – número de variáveis de entrada;

$u$  – vetor de variáveis de entrada dos pontos de treino;

O valor do parâmetro  $\sigma$  usado é de 1. Este teste contempla duas aplicações, o que as difere é a quantidade de pontos de treino usados para criar o metamodelo:

- ❖ Aplicação 1 – Todos os pontos (185)
- ❖ Aplicação 2 – Metade dos pontos (97)

Nestas aplicações são apresentados os valores de alguns indicadores de desempenho. O nome dos indicadores está mencionado, tal como a formulação de cálculo, no capítulo 4.4, e a letra que se segue depende da variante do método. Caso apareça o nome do indicador de desempenho seguido de “s” é porque é sem variante (Kriging Simples ou RBF Exata sem *bias*), se for seguido de “o” é porque é a variante com constante (Kriging Normal e ou RBF com *bias* constante), e por último, se for seguido de “u” é porque é a variante com mais influência do ponto a interpolar (Kriging Universal ou RBF com *bias* variável).

Basicamente são as iniciais das 3 modelos do método de Kriging (S-Simples, O-Ordinary (Normal) e U-Universal), só que também foi aplicado esta lógica ao método de RBF.

### Aplicação 1 – Todos os pontos (185)

Nesta aplicação apenas é avaliado o desempenho do metamodelo na estimação dos pontos que foram usados para o treino da rede, e foram usados todos os pontos disponíveis (185 pontos que foram analisados no *PREMAT*). A Tabela 7.17 apresenta os valores dos indicadores de desempenho de erro absoluto médio e do máximo erro relativo, para a aplicação em causa.

**Tabela 7.17 - Excerto da Tabela 7.105 em G.1) Função de Ativação “Ornstein-Uhlenbec (OU)”**

Output (Z)	MAEs	MAEo	MAEu	MaxREs	MaxREo	MaxREu
E <sub>1</sub>	4,36E-05	2,66E-04	2,88E-05	2,65E-13	2,06E-13	2,30E-13
E <sub>2</sub>	5,17E-05	4,16E-04	4,07E-05	1,63E-12	8,48E-13	1,13E-12
E <sub>3</sub>	4,38E-05	4,81E-04	4,13E-05	1,06E-12	1,27E-12	9,19E-13
G <sub>23</sub>	4,60E-06	4,51E-06	5,25E-06	5,15E-13	3,47E-13	5,62E-13
G <sub>31</sub>	2,31E-01	1,63E-04	1,82E-05	1,12E-12	1,62E-12	1,23E-12
G <sub>12</sub>	1,99E-01	1,81E-05	1,29E-05	9,51E-13	1,32E-12	9,80E-13
v <sub>21</sub>	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	7,59E-13	1,20E-12	3,60E-13
v <sub>31</sub>	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	9,56E-13	7,63E-13	1,30E-12
v <sub>32</sub>	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	1,22E-12	1,67E-12	1,43E-12
v <sub>12</sub>	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	1,76E-13	1,82E-13	3,04E-13
v <sub>13</sub>	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	1,49E-13	6,90E-14	1,10E-13
v <sub>23</sub>	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	2,85E-12	1,83E-12	2,61E-12

### Aplicação 2 – Metade dos pontos (97)

Esta aplicação foram somente usados metade dos pontos disponíveis para treino, e a outra metade para validar o metamodelo. Na realidade não é bem metade, o que se fez foi eliminar de modo intercalado os pontos dentro de cada grupo de pontos pertencentes a um valor de fração de volume de fibra. Deste modo a eliminação de pontos foi controlada, de modo a garantir que os pontos para treino e para teste fossem dispersos no domínio de pontos usados para estudo.

A Tabela 7.18 apresenta os valores dos indicadores de desempenho de erro absoluto médio e do máximo erro relativo, para a aplicação em causa, para a estimação dos 97 pontos usados para treino, e pode-se concluir que o metamodelo estima perfeitamente os pontos de treino. Nesta aplicação já é possível validar/testar o metamodelo, pois sobraram pontos para testar o metamodelo, ou seja, a outra metade com o desempenho avaliado na Tabela 7.19

Tabela 7.18 - Excerto da tabela em G.1) Função de Ativação “Ornstein–Uhlenbec (OU)”

	MAEs	MAEo	MAEu	MaxREs	MaxREo	MaxREu
E <sub>1</sub>	2,85E-05	8,49E-06	1,93E-05	1,29E-13	5,54E-14	1,20E-13
E <sub>2</sub>	3,49E-05	2,92E-05	2,79E-05	8,06E-13	6,15E-13	4,24E-13
E <sub>3</sub>	2,61E-05	2,62E-05	2,75E-05	7,28E-13	3,99E-13	4,93E-13
G <sub>23</sub>	2,30E-06	2,60E-06	2,77E-06	2,25E-13	2,51E-13	2,85E-13
G <sub>31</sub>	1,22E-05	1,80E-05	9,65E-06	7,00E-13	5,24E-13	5,71E-13
G <sub>12</sub>	1,46E-05	1,25E-05	2,17E-05	1,39E-12	7,57E-13	1,12E-12
v <sub>21</sub>	1,16E-16	1,09E-16	1,16E-16	5,29E-13	4,14E-13	6,00E-13
v <sub>31</sub>	1,29E-16	1,13E-16	1,14E-16	5,22E-13	3,19E-13	5,66E-13
v <sub>32</sub>	5,73E-16	7,25E-16	8,95E-16	7,34E-13	3,66E-13	1,21E-12
v <sub>12</sub>	8,56E-17	8,67E-17	8,44E-17	1,15E-13	2,14E-14	9,41E-14
v <sub>13</sub>	6,55E-17	4,01E-17	5,29E-17	6,66E-14	4,52E-14	3,89E-14
v <sub>23</sub>	7,42E-16	4,53E-16	4,73E-16	2,29E-13	8,28E-13	6,23E-13

Tabela 7.19 - Excerto da tabela em G.1) Função de Ativação “Ornstein–Uhlenbec (OU)”

	MAEs	MAEo	MAEu	MaxREs	MaxREo	MaxREu
E <sub>1</sub>	4,63E+07	2,99E+07	2,92E+07	5,13E-01	1,58E-01	<b>1,49E-01</b>
E <sub>2</sub>	1,56E+08	1,55E+08	1,49E+08	6,08E+00	5,69E+00	<b>4,88E+00</b>
E <sub>3</sub>	1,59E+08	1,58E+08	1,54E+08	5,68E+00	5,44E+00	<b>4,97E+00</b>
G <sub>23</sub>	1,56E+07	1,51E+07	1,47E+07	<b>1,68E+00</b>	1,70E+00	1,70E+00
G <sub>31</sub>	4,15E+07	4,16E+07	4,03E+07	7,77E+00	7,53E+00	<b>6,96E+00</b>
G <sub>12</sub>	3,95E+07	3,96E+07	3,76E+07	8,24E+00	7,85E+00	<b>6,88E+00</b>
v <sub>21</sub>	7,33E-04	7,27E-04	7,09E-04	4,85E+00	4,48E+00	<b>3,93E+00</b>
v <sub>31</sub>	7,47E-04	7,42E-04	7,34E-04	4,57E+00	4,34E+00	<b>4,02E+00</b>
v <sub>32</sub>	4,19E-03	4,21E-03	4,15E-03	8,97E+00	<b>8,95E+00</b>	8,99E+00
v <sub>12</sub>	1,71E-04	1,52E-04	1,31E-04	3,45E-01	<b>1,62E-01</b>	<b>1,62E-01</b>
v <sub>13</sub>	1,88E-04	1,49E-04	1,32E-04	4,74E-01	<b>1,58E-01</b>	<b>1,58E-01</b>
v <sub>23</sub>	4,21E-03	4,21E-03	4,16E-03	9,01E+00	<b>8,99E+00</b>	9,02E+00

Analisando o Teste 1 percebe-se que não faz sentido treinar com todos os pontos disponíveis, porque depois não há possibilidade de validar o metamodelo, como tal daqui para a frente somente serão testados os metamodelos com metade dos pontos com os resultados obtidos pelo *PREMAT*. Os valores apresentados a verde na Tabela 7.19 são os melhores valores obtidos para cada propriedade mecânica considerada individualmente, ajudando a analisar e a criar a comparação global expressa na Tabela 7.24.

### Teste.2) Função de Ativação “Multiquadrática (MQ)”

Esta função está no capítulo 4.2.2 Funções de covariância, expressa na equação (4.8). O respetivo cálculo da variável dependente  $h$  está apresentado na equação (7.17), e os parâmetros têm o valor de  $a$  igual a 1 e  $b$  expresso na equação (7.18).

$$b = \left( \frac{\text{prod}[\max(u) - \min(u)]}{N^{\frac{1}{nvar}}} \right)^{-1} \quad (7.18)$$

$N$  – número de pontos de treino;

$nvar$  – número de variáveis de entrada;

$u$  – vetor de variáveis de entrada dos pontos de treino;

**Tabela 7.20 - Valores dos indicadores de desempenho do modelo após treino da rede com 97 pontos (usados para treino) dos 185 obtidos do PREMAT, com a função MQ**

	MAEs	MAEo	MAEu	MaxREs	MaxREo	MaxREu
E <sub>1</sub>	2,08E-05	1,38E-05	2,04E-05	1,29E-13	8,33E-14	1,77E-13
E <sub>2</sub>	4,79E-05	2,62E-05	3,81E-05	4,47E-13	5,74E-13	9,90E-13
E <sub>3</sub>	3,39E-05	3,23E-05	3,75E-05	1,21E-12	1,01E-12	7,63E-13
G <sub>23</sub>	3,04E-06	4,75E-06	4,01E-06	3,13E-13	3,01E-13	4,60E-13
G <sub>31</sub>	1,40E-05	1,48E-05	1,51E-05	1,32E-12	1,68E-12	1,50E-12
G <sub>12</sub>	1,54E-05	1,18E-05	1,91E-05	1,01E-12	1,03E-12	1,16E-12
v <sub>21</sub>	2,16E-16	1,64E-16	1,31E-16	0,00E+00	8,38E-14	5,30E-13
v <sub>31</sub>	1,48E-16	1,50E-16	1,12E-16	8,22E-13	1,12E-12	5,21E-13
v <sub>32</sub>	5,08E-16	6,96E-16	3,86E-16	1,15E-12	6,49E-13	4,16E-13
v <sub>12</sub>	7,95E-17	8,30E-17	9,70E-17	8,23E-14	4,29E-14	1,33E-13
v <sub>13</sub>	1,03E-16	8,44E-17	7,81E-17	1,41E-13	5,64E-14	5,57E-14
v <sub>23</sub>	4,57E-16	3,91E-16	3,15E-16	6,41E-13	6,03E-13	4,57E-13

**Tabela 7.21 - Valores dos indicadores de desempenho do modelo após estimação de 88 pontos (não usados para treino) dos 185 obtidos do PREMAT, com a função OU**

	MAEs	MAEo	MAEu	MaxREs	MaxREo	MaxREu
E <sub>1</sub>	3,86E+07	3,73E+07	2,84E+07	3,77E-01	2,91E-01	<b>1,99E-01</b>
E <sub>2</sub>	1,47E+08	1,47E+08	1,44E+08	5,64E+00	5,60E+00	<b>5,31E+00</b>
E <sub>3</sub>	1,34E+08	1,35E+08	1,36E+08	5,39E+00	5,36E+00	<b>5,23E+00</b>
G <sub>23</sub>	1,51E+07	1,52E+07	1,48E+07	<b>1,75E+00</b>	<b>1,75E+00</b>	<b>1,75E+00</b>
G <sub>31</sub>	2,95E+07	2,95E+07	3,09E+07	<b>3,36E+00</b>	3,82E+00	3,58E+00
G <sub>12</sub>	3,63E+07	3,65E+07	3,56E+07	5,85E+00	5,99E+00	<b>5,50E+00</b>
v <sub>21</sub>	6,84E-04	6,88E-04	6,79E-04	4,96E+00	4,93E+00	<b>4,82E+00</b>
v <sub>31</sub>	6,47E-04	6,47E-04	6,49E-04	4,78E+00	4,76E+00	<b>4,72E+00</b>
v <sub>32</sub>	3,97E-03	3,94E-03	3,92E-03	<b>7,40E+00</b>	<b>7,40E+00</b>	<b>7,40E+00</b>
v <sub>12</sub>	1,89E-04	1,39E-04	1,27E-04	1,33E-01	1,29E-01	<b>1,19E-01</b>
v <sub>13</sub>	1,81E-04	1,24E-04	1,23E-04	1,36E-01	1,39E-01	<b>1,27E-01</b>
v <sub>23</sub>	3,94E-03	3,92E-03	3,91E-03	<b>7,99E+00</b>	8,00E+00	8,00E+00

## Teste.2) Função de Ativação “Gaussiana Exponencial (GE)”

Esta função está no capítulo 4.2.2 Funções de covariância, expressa na equação (4.7). O respetivo cálculo da variável dependente  $h$  está apresentado na equação (7.17), e os parâmetros têm o valor de  $b$  igual a 1 ou a 0,5 e  $a$  expresso na equação (7.19).

Neste caso foi analisado a variação do parâmetro de ajuste  $b$ , e os resultados obtidos estão representados na Tabela 7.22.

$$a = \frac{\text{prod}[\max(u) - \min(u)]}{N^{nvar}} \quad (7.19)$$

Tabela 7.22 – Comparação do máximo erro relativo, função GE, para dois valores de parâmetro  $b$

	$b=1$			$b=0.5$		
	MaxREs	MaxREo	MaxREu	MaxREs	MaxREo	MaxREu
E <sub>1</sub>	7,66E+00	1,39E+01	1,08E+00	1,95E+00	1,22E+01	<b>4,63E-01</b>
E <sub>2</sub>	7,56E+00	3,60E+01	1,34E+01	<b>2,62E+00</b>	2,01E+01	1,11E+01
E <sub>3</sub>	7,50E+00	6,44E+01	1,32E+01	<b>6,30E+00</b>	5,83E+01	8,39E+00
G <sub>23</sub>	7,59E+00	2,59E+01	4,54E+00	<b>2,16E+00</b>	2,34E+01	2,90E+00
G <sub>31</sub>	<b>7,51E+00</b>	7,92E+01	1,34E+01	7,94E+00	7,22E+01	8,52E+00
G <sub>12</sub>	7,58E+00	4,17E+01	1,53E+01	<b>2,55E+00</b>	1,76E+01	1,26E+01
v <sub>21</sub>	7,69E+00	1,57E+01	1,03E+01	<b>2,52E+00</b>	8,70E+00	8,57E+00
v <sub>31</sub>	7,64E+00	2,69E+01	1,04E+01	<b>4,66E+00</b>	2,45E+01	7,03E+00
v <sub>32</sub>	7,87E+00	3,85E+01	1,11E+01	<b>2,84E+00</b>	3,52E+01	9,89E+00
v <sub>12</sub>	7,78E+00	6,91E+00	8,32E-01	1,87E+00	6,04E+00	<b>4,57E-01</b>
v <sub>13</sub>	7,80E+00	4,30E+00	2,24E+00	2,03E+00	<b>9,46E-01</b>	1,98E+00
v <sub>23</sub>	7,93E+00	2,02E+01	9,62E+00	<b>2,47E+00</b>	9,57E+00	9,07E+00

Os valores apresentados a verde na Tabela 7.22 são os melhores valores obtidos para cada propriedade mecânica considerada individualmente, ajudando a analisar e a criar a comparação global expressa na Tabela 7.24.

### Teste.3) Outras Funções de Ativação

Este terceiro teste contempla somente os valores de máximo erro relativo comparando-os entre três funções de ativação, a linear, a cúbica e a de placa fina. Estas funções tem uma coisa em comum, nenhuma tem parâmetros para ajustar o metamodelo. Estas funções estão no capítulo 4.2.2 Funções de covariância, expressas nas equações (4.5), (4.6) e (4.9).

Tabela 7.23 – Comparação do MaxRE entre as funções linear, cúbica e placa fina

	LINEAR (LIN)			CÚBICA (CUB)			PLACA FINA (TP)		
	MaxREs	MaxREo	MaxREu	MaxREs	MaxREo	MaxREu	MaxREs	MaxREo	MaxREu
E <sub>1</sub>	6,98E-01	6,72E-01	<b>1,29E-01</b>	5,92E-01	2,37E-01	2,37E-01	5,78E-01	2,36E-01	2,37E-01
E <sub>2</sub>	5,56E+00	5,44E+00	<b>4,57E+00</b>	5,67E+00	5,67E+00	5,67E+00	5,66E+00	5,66E+00	5,67E+00
E <sub>3</sub>	5,50E+00	5,40E+00	<b>4,85E+00</b>	5,32E+00	5,32E+00	5,32E+00	5,32E+00	5,32E+00	5,32E+00
G <sub>23</sub>	<b>1,70E+00</b>	1,72E+00	1,71E+00	1,80E+00	1,80E+00	1,80E+00	1,80E+00	1,80E+00	1,80E+00
G <sub>31</sub>	4,71E+00	4,75E+00	4,39E+00	<b>2,01E+00</b>	<b>2,01E+00</b>	2,02E+00	<b>2,01E+00</b>	<b>2,01E+00</b>	<b>2,01E+00</b>
G <sub>12</sub>	6,15E+00	6,17E+00	5,67E+00	<b>2,69E+00</b>	<b>2,69E+00</b>	2,75E+00	2,77E+00	2,77E+00	2,83E+00
v <sub>21</sub>	4,82E+00	4,72E+00	<b>4,39E+00</b>	5,01E+00	5,01E+00	5,01E+00	5,01E+00	5,01E+00	5,01E+00
v <sub>31</sub>	4,81E+00	4,72E+00	<b>4,55E+00</b>	4,73E+00	4,73E+00	4,73E+00	4,73E+00	4,73E+00	4,73E+00
v <sub>32</sub>	7,56E+00	7,60E+00	7,55E+00	7,17E+00	7,17E+00	<b>7,16E+00</b>	7,17E+00	7,17E+00	<b>7,16E+00</b>
v <sub>12</sub>	3,02E-01	1,65E-01	1,44E-01	6,76E-01	1,41E-01	1,41E-01	6,47E-01	<b>1,40E-01</b>	1,41E-01
v <sub>13</sub>	3,04E-01	1,61E-01	1,46E-01	6,45E-01	1,29E-01	1,29E-01	6,36E-01	<b>1,28E-01</b>	1,29E-01
v <sub>23</sub>	7,91E+00	7,94E+00	7,91E+00	<b>7,82E+00</b>	<b>7,82E+00</b>	<b>7,82E+00</b>	<b>7,82E+00</b>	<b>7,82E+00</b>	<b>7,82E+00</b>

Os valores apresentados a verde na Tabela 7.23 são os melhores valores obtidos para cada propriedade mecânica considerada individualmente, ajudando a analisar e a criar a comparação global expressa na Tabela 7.24.

### 7.3.2.1. Comparação de resultados obtidos

Comparando os resultados obtidos nos três testes feitos com as diversas funções de ativação expressas na equação (7.17) e desde a equação (4.5) à (4.9), pode-se concluir numa primeira fase que a função que teve melhor desempenho global foi a gaussiana exponencial (GE) com a sua variante Simples, pois tem o menor máximo erro relativo nas entre as doze saídas (propriedades mecânicas do compósito) com um valor de 7.94%. Para que se possa verificar individualmente cada *output* em análise, a Tabela 7.24 indica-nos qual o melhor resultado para cada um e as características do metamodelo com que foi obtido.

**Tabela 7.24 – Análise da melhor função de ativação e seus parâmetros, e da variante do método de interpolação para cada propriedade mecânica a estimar**

	MAXRE (%)	FUNÇÃO (VARIANTE)	PARÂMETROS
E1	0,129	LIN (Universal “u”)	-----
E2	2,62	GE (Simples “s”)	$b=0.5; a=\text{prod}(\max(u)-\min(u))/(N)^{(1/nvar)}$ ;
E3	4,85	LIN (Universal “u”)	-----
G23	1,68	OU (Simples “s”)	$\sigma=1; L=\max(u)-\min(u)$
G31	2,01	TP (todas variantes) CUB (Simples “s”) (Normal “o”)	-----
G12	2,55	GE (Simples “s”)	$b=0.5; a=\text{prod}(\max(u)-\min(u))/(N)^{(1/nvar)}$
V21	2,52	GE (Simples “s”)	$b=0.5; a=\text{prod}(\max(u)-\min(u))/(N)^{(1/nvar)}$
V31	4,02	OU (Universal “u”)	$\sigma=1; L=\max(u)-\min(u)$
V32	2,84	GE (Simples “s”)	$b=0.5; a=\text{prod}(\max(u)-\min(u))/(N)^{(1/nvar)}$
V12	0,119	MQ (Universal “u”)	$L=\text{prod}(\max(u)-\min(u))/(N)^{(1/nvar)}$
V13	0,127	MQ (Universal “u”)	$L=\text{prod}(\max(u)-\min(u))/(N)^{(1/nvar)}$
V23	2,47	GE (Simples “s”)	$b=0.5; a=\text{prod}(\max(u)-\min(u))/(N)^{(1/nvar)}$

Conforme se pode verificar pela Tabela 7.24, o máximo erro relativo é quase 4.85% para o módulo de elasticidade (E<sub>3</sub>), contudo ter-se-ia de usar várias funções de ativação, acabando por ter mais que um metamodelo. Sendo assim, para simplificar a metamodelação, tendo só um metamodelo para todas as propriedades mecânicas, optou-se pelo uso da função gaussiana exponencial (GE), com a variante Simples, com o parâmetro *b* igual a 0.5 e o parâmetro *a* igual pois é que tem menos valores de erro relativo entre as 12 propriedades mecânicas superiores a 5%, só com dois valores (nas propriedades G<sub>31</sub> e E<sub>3</sub>), e um valor máximo de erro de 7.94% entre as doze propriedades a estimar. Neste caso conforme indica a Tabela 7.22 esse erro máximo encontra-se no módulo de corte (G<sub>31</sub>). Pode-se verificar o valor de todos os indicadores de desempenho da função selecionada no apêndice G.2) Função de Ativação “Gaussiana Exponencial (GE)”.

### 7.3.3. Aplicação do método de RBF para criar um metamodelo para análises mecânicas estáticas e dinâmicas

Não sendo opções comuns dos programas comerciais de análise pelo método de elementos finitos, como o Ansys, a contabilização da secção transversal da fibra na microestrutura do compósito, nem da modelação do RVE na micro escala, foi necessário obter-se as propriedades equivalentes ao nível da camada, para introduzir-se esses valores na descrição do material de cada camada nas respetivas análises dos modelos no programa Ansys©. É nesta fase que a homogeneização é essencial. Para a mesma área elementar, para a mesma fração de volume de fibra, as propriedades elásticas ( $E$ ,  $\nu$ ,  $G$ ) variaram de acordo com a configuração da secção transversal do reforço de fibra, ou seja, com a relação dos semieixos da elipse ( $a/b$ ). Tendo esta variação em conta, analisar uma placa compósita laminada, por exemplo, com as propriedades elásticas com a relação  $a/b$  igual a 1, não produzirá os mesmos resultados de análise microscópica estática, do que com a relação  $a/b$  igual a 0.7. É neste sentido que a metamodelação pode ajudar a obter os resultados das análises estática e dinâmica para pontos ( $a/b$ ,  $V_f$ ) que não foram usados para obter numericamente as suas propriedades mecânicas no *PREMAT*, e por sua vez pontos esses que não foram alvo de simulações numéricas das análises no Ansys©, mas que se podem obter os seus resultados através do metamodelo. A Figura 7.24 representa um esquema das variáveis de entrada e de saída da etapa de metamodelação em causa.

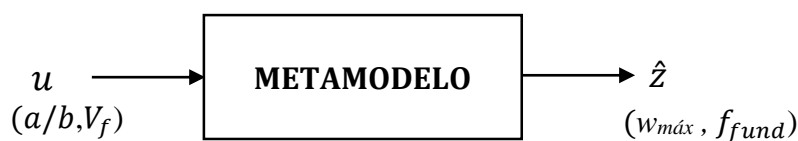


Figura 7.24 – Esquema adaptado para a relação entre as entradas ( $a/b$ ,  $V_f$ ) e saídas (máxima deformada transversal e frequência fundamental)

Conforme já foi demonstrado no capítulo 7.3.2 Aplicação do método de RBF para criar um metamodelo para as propriedades elásticas, deve-se sempre procurar a função de ativação que melhor represente o que se está a modelar. Neste caso a primeira função testada, deu logo bons resultados, conforme ilustram a Tabela 7.25, a Tabela 7.26 e Tabela 7.27.

### Função de Ativação “Ornstein–Uhlenbec (OU)”

Esta função é adaptada da função presente no capítulo 4.2.2 Funções de covariância, e está expressa na equação (7.17) com o respetivo cálculo do  $h$  e do parâmetro  $L$ . O valor do parâmetro  $\sigma$  usado é de 1. Tal como na etapa de metamodelação das propriedades mecânicas do material compósito, ver capítulo 7.3.2 Aplicação do método de RBF para criar um metamodelo para as propriedades elásticas, não foi considerada a variação do grau do polinómio das variantes do método de interpolação. Foram utilizadas relações lineares entre as variáveis de entrada do metamodelo.

### Análise dos diversos casos validados no Ansys©

A Figura 7.25 ilustra um exemplo dos dados exportados após a metamodelação de cada um dos casos validados e simulados no programa de simulação pelo método de elementos finitos abordado neste trabalho. A variável denominada na figura como “*CheckIndicators*” são os valores dos indicadores de desempenho apresentados nas zonas a vermelho da Tabela 7.25, da Tabela 7.26 e da Tabela 7.27; enquanto a variável “*EstimationIndicators*” é os análogos valores apresentados nas zonas a verde das tabelas mencionadas. As restantes variáveis são os pontos de treino usados para treinar a rede RBF para ser um metamodelo (“*DesignPoints*”), e as funções que representam a estimação de pontos para cada variante do método de interpolação. Estas funções serão usadas no processo de otimização mais à frente (dependendo dos casos de estudo a analisar).



Figura 7.25 – Dados do ficheiro *mat* correspondente ao caso de ensaio da placa compósita no Ansys© SS1\_10\_0

### 7.3.3.1. Análise dos resultados do modelo SS1\_10

Baseado nos resultados obtidos de um ficheiro com os dados semelhantes ao da Figura 7.25, obteve-se os resultados apresentados na Tabela 7.25.

**Tabela 7.25 – Máximo erro relativo, valor percentual, obtido com a estimação dos pontos usados para o treino (vermelho), e para os pontos não usados para treino (verde), para o caso SS1\_10**

		Train/Check (97 points)			Test/Estimation (88 points)		
		MaxREs	MaxREo	MaxREu	MaxREs	MaxREo	MaxREu
SS1_10_0	$w_{máx}$	2,02E-13	2,04E-13	2,23E-13	0,854	<b>0,838</b>	0,887
	$f_{fund}$	2,03E-13	1,84E-13	4,87E-13	1,812	1,429	<b>0,837</b>
SS1_10_090	$w_{máx}$	2,39E-13	2,45E-13	1,59E-13	1,657	<b>1,642</b>	1,701
	$f_{fund}$	1,97E-13	1,50E-13	6,90E-13	2,158	1,782	<b>1,108</b>
SS1_10_090s	$w_{máx}$	1,93E-13	1,57E-13	4,59E-13	0,897	<b>0,881</b>	0,930
	$f_{fund}$	1,08E-13	1,69E-13	6,29E-13	1,810	1,428	<b>0,835</b>
SS1_10_0904	$w_{máx}$	1,88E-13	1,50E-13	3,47E-13	0,913	<b>0,897</b>	0,947
	$f_{fund}$	1,63E-13	1,31E-13	7,69E-13	1,811	1,429	<b>0,832</b>

Analisando a Tabela 7.25 pode-se concluir que o output do metamodelo, máxima deformada transversal ( $w_{máx}$ ) tem melhor desempenho na estimação de pontos não usados para treino com a variante com *bias* constante (ou para o método de de Kriging, a variante Normal). O mesmo já não se passa para a frequência fundamental ( $f_{fund}$ ) da placa compósita, que apresenta menos erro máximo relativo com o uso da variante Universal, ou sem com a *bias* variável. Esta conclusão é independentemente do tipo de empilhamento do laminado, seja ele  $[0^\circ]$ ,  $[0^\circ/90^\circ]$ ,  $[0^\circ/90^\circ]_s$  ou  $[0^\circ/90^\circ]_4$  conforme representa a tabela.

### 7.3.3.2. Análise dos resultados do modelo SS1\_20

Baseado nos resultados obtidos de um ficheiro com os dados semelhantes ao da Figura 7.25, obteve-se os resultados apresentados na Tabela 7.26.

**Tabela 7.26 - Máximo erro relativo, valor percentual, obtido com a estimação dos pontos usados para o treino (vermelho), e para os pontos não usados para treino (verde), para o caso SS1\_20**

		Train/Check (97 points)			Test/Estimation (88 points)		
		MaxREs	MaxREo	MaxREu	MaxREs	MaxREo	MaxREu
SS1_20_0	$w_{m\acute{a}x}$	2,05E-13	1,34E-14	6,10E-13	0,850	<b>0,834</b>	0,888
	$f_{fund}$	1,80E-13	1,91E-13	6,14E-13	1,976	1,597	<b>0,935</b>
SS1_20_090	$w_{m\acute{a}x}$	2,94E-13	1,04E-13	4,76E-13	1,717	<b>1,701</b>	1,765
	$f_{fund}$	2,39E-13	2,57E-13	6,72E-13	2,376	2,003	<b>1,166</b>
SS1_20_090s	$w_{m\acute{a}x}$	1,69E-13	1,28E-13	1,07E-12	0,874	<b>0,859</b>	0,912
	$f_{fund}$	8,29E-14	1,33E-13	4,08E-13	1,975	1,597	<b>0,935</b>
SS1_20_0904	$w_{m\acute{a}x}$	8,56E-14	1,33E-13	4,54E-13	0,922	<b>0,906</b>	0,961
	$f_{fund}$	1,57E-13	5,87E-14	5,60E-13	1,993	1,615	<b>0,942</b>

A mesma conclusão feita na análise da Tabela 7.25 pode ser feita para este caso em que a relação  $a/h$  é igual a 20, conforme ilustra a Tabela 7.26.

### 7.3.3.3. Análise dos resultados do modelo SS1\_40

Baseado nos resultados obtidos de um ficheiro com os dados semelhantes ao da Figura 7.25, obteve-se os resultados apresentados na Tabela 7.27.

**Tabela 7.27- Máximo erro relativo, valor percentual, obtido com a estimação dos pontos usados para o treino (vermelho), e para os pontos não usados para treino (verde), para o caso SS1\_40**

		Train/Check (97 points)			Test/Estimation (88 points)		
		MaxREs	MaxREo	MaxREu	MaxREs	MaxREo	MaxREu
SS1_40_0	$w_{m\acute{a}x}$	1,20E-13	2,43E-13	5,02E-13	0,849	<b>0,833</b>	0,888
	$f_{fund}$	2,23E-13	1,78E-13	7,50E-13	2,025	1,648	<b>0,966</b>
SS1_40_090	$w_{m\acute{a}x}$	2,95E-13	5,15E-14	4,94E-13	1,733	<b>1,717</b>	1,782
	$f_{fund}$	1,76E-13	1,68E-13	1,04E-12	2,441	2,069	<b>1,182</b>
SS1_40_090s	$w_{m\acute{a}x}$	1,87E-13	2,19E-13	5,67E-13	0,868	<b>0,852</b>	0,907
	$f_{fund}$	1,79E-13	1,18E-13	3,48E-13	2,025	1,648	<b>0,966</b>
SS1_40_0904	$w_{m\acute{a}x}$	1,53E-13	1,08E-13	5,90E-13	0,925	<b>0,909</b>	0,965
	$f_{fund}$	1,49E-13	1,71E-13	6,94E-13	2,048	1,671	<b>0,976</b>

A mesma conclusão feita na análise da Tabela 7.25 e da Tabela 7.26 pode ser feita para este caso em que a relação  $a/h$  é igual a 40, conforme ilustra a Tabela 7.27.

#### 7.3.3.4. Análise dos resultados obtidos

Analisando os resultados obtidos do desempenho dos metamodelos quando submetido à estimação de pontos usados para o seu treino, em todos os casos houve erros relativos máximos desprezáveis, aproximadamente nulos. Esta primeira análise demonstra que os metamodelos respondem bem aos pontos de treino, como seria de esperar (zona a vermelho nas três tabelas anteriores).

Numa segunda análise, correspondente à estimação de pontos que serviram para testar o desempenho dos metamodelos (pontos não usados para treino), todas as variantes do método de interpolação de RBF obtiveram um máximo erro relativo menor que 2,4%. Após análise da zona a verde das três tabelas anteriores pode-se concluir que para qualquer caso de estudo de análise estática da placa compósita (onde o resultado é a máxima deformada transversal) a variante com *bias* constante responde com um erro relativo menor com o valor mais elevado de 1,72%. Relativamente ao resultado da análise dinâmica, a frequência fundamental da placa compósita, a variante com *bias* variável é a que responde com menor valor de erro relativo máximo, com um valor mais elevado de 1,18%.

Ambos os valores mais elevados de erro relativo máximo encontrados foram na situação de relação de comprimento de placa com a espessura do laminado de 40, e no empilhamento de  $[0^\circ/90^\circ]$ . Caso fosse necessário melhorar os valores máximos obtidos de erro relativo máximo seria nestes casos que ter-se-ia de melhorar ou os parâmetros de ajuste da função de ativação, ou mesmo mudar de função.

## 7.4. Análise do desempenho dos algoritmos de otimização

Neste subcapítulo é apresentada a lista de funções de teste/*benchmark* que foram aplicadas aos algoritmos de otimização de PSO em estudo. O tipo de problema abordado foi sempre a minimização, conforme realça a expressão (7.20), devido à facilidade de acesso a resultados nas referências bibliográficas usadas.

$$\min[f(\bar{x}_i)] = \dots, \quad i = 1, 2, \dots \quad (7.20)$$

Deste modo foi possível verificar se estes estavam a conseguir atingir os valores ótimos, e numa última fase analisar qual dos algoritmos tem melhor performance global face a todas as funções aplicadas. O algoritmo eleito com melhor desempenho na procura do mínimo global foi usado na fase de otimização dos casos de estudo de análise das placas compósitas de fibra de vidro com matriz epoxídica. Ao longo deste subcapítulo é possível ver as características de cada função, como os constrangimentos das variáveis de entrada que não são mais que o domínio de cada função, a solução ótima e o respetivo resultado que desejavelmente será o mínimo global. É também apresentado em cada seção de cada função uma figura representativa da mesma com o posicionamento do mínimo global. De modo a tentar evitar ficar estagnado em mínimos locais, foram aplicadas diversas técnicas e parâmetros de controlo com adaptabilidade de modo a permitir a fácil obtenção do mínimo global.

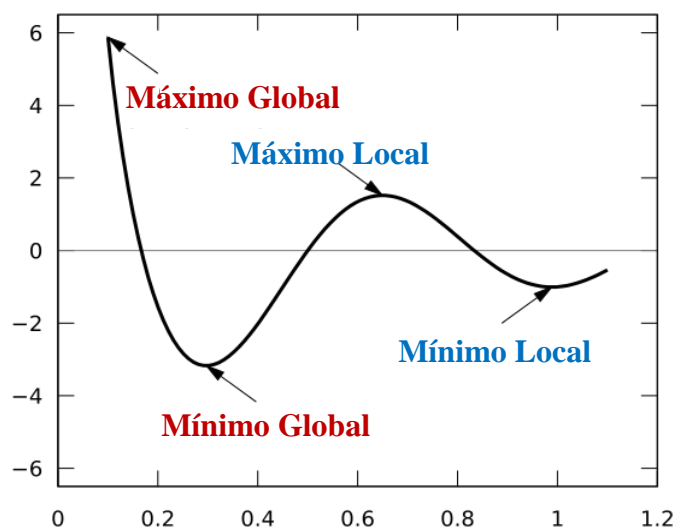


Figura 7.26 – Representação na função objetivo dos mínimos locais e globais

Os mínimos locais não são todos valores ótimos, somente se houver multiplicidade, e a esses designa-se por valores ótimos, ou seja, mínimos globais (no plural, caso tenha mais que um, cujos resultam valores mínimos iguais na função objetivo), conforme ilustra a Figura 7.26. Esta função apresentada na figura apesar de apenas ter uma variável é suficiente para a sua representação gráfica ilustrar a diferença entre o conceito de mínimo global e local.

### **Análise de funções de este 2D**

O objetivo desta análise foi identificar qual o algoritmo mais adequado para aplicar aos casos de estudo referenciados no capítulo 7.5. Para que se concretizasse tal objetivo, que é parte integrante e essencial para a realização deste trabalho, foram realizados dois tipos de análises com recurso das funções de teste. Sendo esta técnica de PSO usada com coeficientes aleatórios entre 0 e 1 distribuídos uniformemente, existe um efeito de aleatoriedade que faz dos algoritmos heurísticos pelo que os dois tipos de análise têm a ver com esta característica do PSO. Deste modo foi necessário analisar a influência da fixação e da não fixação da *seed* relacionada com geração dos coeficientes aleatórios (associados à geração aleatória da população inicial, e na atualização das velocidades das partículas). As fórmulas, os gráficos e os constrangimentos aplicados no processo de otimização podem ser consultados no Apêndice D – Funções de teste.

### **A influência da fixação da *seed* na comparação dos algoritmos de PSO**

No primeiro tipo de análise os dois algoritmos analisados foram testados sem intervenção na geração dos coeficientes, ou seja, por definição a *seed* não está fixa, ou seja, correndo o mesmo algoritmo duas vezes, os resultados podem ser diferentes, ou melhor, só com muita sorte é que serão iguais, para as mesmas condições iniciais e constrangimentos. Assim seria difícil comparar exatamente os dois algoritmos de PSO, pois um destes poderia ter a conveniência de ter uma população inicial mais apta para obter um valor ótimo mais próximo do esperado, para uma dada função de teste. O segundo tipo de análise considera fixos estes coeficientes beta ( $\beta$ ), os aleatórios serão iguais, de modo a que em ambos os algoritmos sejam gerados os mesmos valores nos coeficientes, ou seja, para o mesmo algoritmo será obtido o mesmo resultado independentemente do número de vezes que o teste, para iguais condições entre testes.

### 7.4.1. Resultados da análise das funções de testes

Neste capítulo serão apresentadas as tabelas com os resultados obtidos para a otimização de minimização das funções de teste mencionadas no capítulo 6.3., a função “*Test Tube Holder*” e a função “*Holder Table*”, as restantes serão apresentadas no Apêndice E – Resultados da minimização das funções de teste.

#### 7.4.1.1. Função “Test Tube Holder”

A Tabela 7.28 e a Tabela 7.30 apresentam os resultados obtidos para as 12 corridas feitas em ambos os algoritmos de PSO, com a *seed* variável. É de realçar que na Tabela 7.28 e na Tabela 7.29 os resultados obtidos através do algoritmo PSO 2 não contém a reinicialização ativada, somente os resultados expostos na Tabela 7.30 e na Tabela 7.31.

**Tabela 7.28 - Resultados da minimização da função de teste “*Tube Holder*”, com *seed* variável**

# CORRIDA	ÓTIMO GLOBAL	ÓTIMO GLOBAL (PSO 1)		ÓTIMO GLOBAL (PSO 2)	
	Valor	Valor	Re %	Valor	Re %
1	-10.8723	-10.5807197	-2.68%	-10.12896917	-6.84%
2	-10.8723	-10.82093406	-0.47%	-10.06511518	-7.42%
3	-10.8723	-10.67125641	-1.85%	-10.45712852	-3.82%
4	-10.8723	-10.84771959	-0.23%	-10.82892583	-0.40%
5	-10.8723	-10.85932127	-0.12%	-10.71857019	-1.41%
6	-10.8723	-10.23631009	-5.85%	-10.76222751	-1.01%
7	-10.8723	-10.84662042	-0.24%	-10.73766601	-1.24%
8	-10.8723	-10.48011294	-3.61%	-10.37963759	-4.53%
9	-10.8723	-10.84846308	-0.22%	-10.8365896	-0.33%
10	-10.8723	-10.84687148	-0.23%	-10.09893786	-7.11%
11	-10.8723	-10.86306156	-0.08%	-10.80162377	-0.65%
12	-10.8723	-10.71663264	-1.43%	-10.04513016	-7.61%
		[Máx RE]	5.8%	[Máx RE]	7.6%

**Tabela 7.29 - Resultados da minimização da função de teste “*Tube Holder*”, com *seed* fixa**

# SEED FIXA	ÓTIMO GLOBAL	ÓTIMO GLOBAL (PSO 1)		ÓTIMO GLOBAL (PSO 2)	
	Valor	Valor	Re %	Valor	Re %
RNG(1)	-10,8723	-10,6117463	-2,40%	-10,7856	-0,80%
RNG(2)	-10,8723	-10,7477034	-1,15%	-10,6932	-1,65%
		[Máx RE]	2,4%	[Máx RE]	1,6%

É de realçar que na Tabela 7.30 e na Tabela 7.31 os resultados obtidos através do algoritmo PSO 1 contêm a reinicialização ativada, tal como no algoritmo PSO 2.

**Tabela 7.30 – Resultados da minimização da função de teste “*Tube Holder*”, com *seed* variável e com reinicializações**

# CORRIDA	ÓTIMO GLOBAL	ÓTIMO GLOBAL (PSO 1)		ÓTIMO GLOBAL (PSO 2)	
	Valor	Valor	Re %	Valor	Re %
1	-10.8723	-10.8524918	-0.18%	-10.84223221	-0.28%
2	-10.8723	-10.87229838	0.00%	-10.69070724	-1.67%
3	-10.8723	-10.87228728	0.00%	-10.80894323	-0.58%
4	-10.8723	-10.85240761	-0.18%	-10.847742	-0.23%
5	-10.8723	-10.87229957	0.00%	-10.81085297	-0.57%
6	-10.8723	-10.87226193	0.00%	-10.79275966	-0.73%
7	-10.8723	-10.87230008	0.00%	-10.87104744	-0.01%
8	-10.8723	-10.87229992	0.00%	-10.70851575	-1.51%
9	-10.8723	-10.80652411	-0.60%	-10.76282741	-1.01%
10	-10.8723	-10.87229988	0.00%	-10.82180123	-0.46%
11	-10.8723	-10.87227883	0.00%	-10.82334631	-0.45%
12	-10.8723	-10.85248549	-0.18%	-10.84996356	-0.21%
		<b>[Máx RE]</b>	<b>0.6%</b>	<b>[Máx RE]</b>	<b>1.7%</b>

**Tabela 7.31 - Resultados da minimização da função de teste “*Tube Holder*”, com *seed* fixa e com reinicializações**

# SEED FIXA	ÓTIMO GLOBAL	ÓTIMO GLOBAL (PSO 1)		ÓTIMO GLOBAL (PSO 2)	
	Valor	Valor	Re %	Valor	Re %
RNG(1)	-10,8723	-10,8524925	-0,18%	-10,8442	-0,26%
RNG(2)	-10,8723	-10,8722979	0,00%	-10,8221	-0,46%
		<b>[Máx RE]</b>	<b>0,18%</b>	<b>[Máx RE]</b>	<b>0,5%</b>

Esta segunda análise, com a *seed* fixa conforme é apresentado na Tabela 7.29 e na Tabela 7.31, permite uma comparação mais sustentada com condições iguais, eliminando a possibilidade de um dos algoritmos ter a possibilidade de ter gerado uma população inicial mais favorável para a resolução do problema em causa.

### 7.4.1.2. Função “Holder Table”

A Tabela 7.32 e a Tabela 7.34 apresentam os resultados obtidos para as 12 corridas feitas em ambos os algoritmos de PSO, com a *seed* variável. É de realçar que na Tabela 7.32 e na Tabela 7.33 os resultados obtidos através do algoritmo PSO 2 não contém a reinicialização ativada, somente os resultados expostos na Tabela 7.34 e na Tabela 7.35.

Tabela 7.32 - Resultados da minimização da função de teste “Holder Table”, com *seed* variável

# CORRIDA	ÓTIMO GLOBAL	ÓTIMO GLOBAL (PSO 1)		ÓTIMO GLOBAL (PSO 2)	
	Valor	Valor	Re %	Valor	Re %
1	-19,2085026	-19,14545903	-0,3%	-16,54732664	-13,9%
2	-19,2085026	-16,26772158	-15,3%	-18,0175676	-6,2%
3	-19,2085026	-18,43668101	-4,0%	-18,45908906	-3,9%
4	-19,2085026	-17,96658868	-6,5%	-17,67274419	-8,0%
5	-19,2085026	-18,02063623	-6,2%	-17,53926411	-8,7%
6	-19,2085026	-18,02065842	-6,2%	-15,98641349	-16,8%
7	-19,2085026	-18,02047021	-6,2%	-17,63407618	-8,2%
8	-19,2085026	-18,02057571	-6,2%	-15,14022386	-21,2%
9	-19,2085026	-15,14022386	-21,2%	-16,40396357	-14,6%
10	-19,2085026	-18,02065629	-6,2%	-15,4670365	-19,5%
11	-19,2085026	-19,09043469	-0,6%	-18,16470593	-5,4%
12	-19,2085026	-18,02071658	-6,2%	-18,01389496	-6,2%
		[Máx RE]	21,2%	[Máx RE]	21,2%

Tabela 7.33 - Resultados da minimização da função de teste “Holder Table”, com *seed* fixa

# SEED FIXA	ÓTIMO GLOBAL	ÓTIMO GLOBAL (PSO 1)		ÓTIMO GLOBAL (PSO 2)	
	Valor	Valor	Re %	Valor	Re %
RNG(1)	-19,2085026	-16,25541396	-15,4%	-15,14022386	-21,2%
RNG(2)	-19,2085026	-18,37397437	-4,3%	-17,78802695	-7,4%
		[Máx RE]	15,4%	[Máx RE]	21,2%

É de realçar que na Tabela 7.34 e na Tabela 7.35. os resultados obtidos através do algoritmo PSO 1 contêm a reinicialização ativada, tal como no algoritmo PSO 2.

**Tabela 7.34 - Resultados da minimização da função de teste “Holder Table”, com seed variável e com reinicializações**

# CORRIDA	ÓTIMO GLOBAL	ÓTIMO GLOBAL (PSO 1)		ÓTIMO GLOBAL (PSO2)	
	Valor	Valor	Re %	Valor	Re %
1	-19,2085026	-19,20850256	0%	-18,02071629	-6,2%
2	-19,2085026	-18,02071663	-6%	-19,20839652	0,0%
3	-19,2085026	-18,02071663	-6%	-19,20847292	0,0%
4	-19,2085026	-19,20850253	0%	-19,20847428	0,0%
5	-19,2085026	-19,20850257	0%	-19,20845861	0,0%
6	-19,2085026	-18,02071663	-6%	-19,20850148	0,0%
7	-19,2085026	-19,20850257	0%	-18,02071662	-6,2%
8	-19,2085026	-18,02071663	-6%	-19,20849425	0,0%
9	-19,2085026	-19,20850254	0%	-19,20820554	0,0%
10	-19,2085026	-18,02071663	-6%	-18,02071663	-6,2%
11	-19,2085026	-18,02071663	-6%	-19,20797655	0,0%
12	-19,2085026	-19,20850249	0,00%	-19,208424	0,0%
		<b> Máx RE </b>	<b>6%</b>	<b> Máx RE </b>	<b>-6,2%</b>

**Tabela 7.35 - Resultados da minimização da função de teste “Holder Table”, com seed fixa e com reinicializações**

# SEED FIXA	ÓTIMO GLOBAL	ÓTIMO GLOBAL (PSO 1)		ÓTIMO GLOBAL (PSO 2)	
	Valor	Valor	Re %	Valor	Re %
RNG(1)	-19,2085026	-18,02071663	-6%	-19,20820059	0,0%
RNG(2)	-19,2085026	-18,02071663	-6%	-19,20849409	0,0%
		<b> Máx RE </b>	<b>-6%</b>	<b> Máx RE </b>	<b>0,0%</b>

Esta segunda análise, com a seed fixa conforme é apresentado na Tabela 7.33 e na Tabela 7.35., permite uma comparação mais sustentada com condições iguais, eliminando a possibilidade de um dos algoritmos ter a possibilidade de ter gerar uma população inicial mais favorável para a resolução problema em causa.

### 7.4.1.3. Restantes funções de teste

Os resultados da otimização das restantes funções de teste encontram-se nas tabelas do Apêndice E – Resultados da minimização das funções de teste.

### 7.4.2. Seleção do algoritmo com melhor desempenho

Foi analisado o desempenho dos algoritmos de otimização PSO, onde foram postos ambos à prova com o objetivo de procurar o mínimo global de cada função de teste, apresentadas no subcapítulo anterior, e calcular os indicadores de desempenho associados aos erros entre valor ótimo encontrado com o valor ótimo esperado.

**Tabela 7.36 – Comparação entre os algoritmos PSO 1 e PSO2 para a otimização das funções de teste**

	Fixed Seed		Variable Seed								
	PSO 1	PSO 2	PSO 1	PSO 2							
TestTubeHolder	1	0	1	0	<table border="1"> <tr><td>1</td><td>Melhor</td></tr> <tr><td>0</td><td>Pior</td></tr> <tr><td>-1</td><td>Empate</td></tr> </table>	1	Melhor	0	Pior	-1	Empate
1	Melhor										
0	Pior										
-1	Empate										
HolderTable	0	1	1	0							
Bird	1	0	1	0							
ModifiedSchaffer#1	1	0	0	1							
ModifiedSchaffer#2	-1	-1	-1	-1							
Rosenbrock	0	1	0	1							
Himmelblau	1	0	1	0							
Rastrigin	-1	-1	-1	-1							
Chichinadze	0	1	1	0							
Zettl	-1	-1	0	1							
<b>Total</b>	<b>4</b>	<b>3</b>	<b>5</b>	<b>3</b>							

Analisando a Tabela 7.36 com os resultados finais do desempenho de ambos os algoritmos PSO propostos pode-se concluir que o algoritmo PSO 1 que tal como o de PSO 2 incorpora a técnica de *niching* (reinicialização), pertencente aos algoritmos genéticos, teve um melhor desempenho na otimização das funções não lineares de teste, na procura do respetivo ótimo global.

Em suma o algoritmo PSO base foi selecionado para aplicar nos casos de estudo, com o objetivos de minimizar a máxima deformada transversal e de maximizar a frequência fundamental de uma placa compósita de fibra de vidro com epóxi solicitada com uma carga uniforme e simplesmente apoiada em todos os bordos (condições de fronteira abordadas no capítulo de validação dos modelos de compósitos com os resultados apresentados em (Reddy 2004), ver capítulo 3).

## 7.5. Casos de estudo

A Tabela 7.37 identifica as diferentes configurações que foram simuladas no Ansys© e que sendo assim eram possíveis de analisar como caso de estudo. Foram estudadas placas laminadas com relações de aspeto  $a/h$  de 10,20 e 40.

Tabela 7.37 - Lista das configurações a estudar

# Configuração	Reação de $a/h$	Sequência de Empilhamento
1	10	0°
2	10	[0°/90°]
3	10	[0°/90°] <sub>s</sub>
4	10	[0°/90°] <sub>4</sub>
5	20	0°
6	20	[0°/90°]
7	20	[0°/90°] <sub>s</sub>
8	20	[0°/90°] <sub>4</sub>
9	40	0°
10	40	[0°/90°]
11	40	[0°/90°] <sub>s</sub>
12	40	[0°/90°] <sub>4</sub>

Neste subcapítulo das aplicações são apresentados dois tipos de casos de estudo, sendo o tipo A uma minimização, e o tipo B uma maximização.

### Propriedades dos materiais usados

Em ambos os casos de estudo, o material usado foi o mesmo compósito laminado com reforço de fibra de vidro unidirecional (camadas ortotrópicas) com matriz epoxídica. As propriedades dos constituintes de cada lâmina, e do volume elementar representativo modelado no *PREMAT*, ou seja, as propriedades da fibra de vidro e da matriz epoxídica usadas neste trabalho, encontram-se na Tabela 7.38 e na Tabela 7.39. Estas propriedades serão essenciais para posteriores análises macro mecânicas dos laminados dos casos de estudo.

Tabela 7.38 – Propriedades da resina Epóxi

<b>E (Gpa)</b>	3.45
<b>v</b>	0.33
<b>ρ (kg/m<sup>3</sup>)</b>	1200

Quanto às propriedades da resina epoxídica estas foram extraídas do trabalho de (Sih et al. 1986) e foram confirmadas com dados de fabricantes, cortesia da *Gurit*© que publicou dados e gráficos na página web da *NetComposites*<sup>1</sup>.

Relativamente às propriedades da fibra de vidro E-Glass foram obtidas através dos dados e fichas técnicas presentes na página web da AZoM<sup>2</sup>, dados publicados com autorização da *Granta Design*©.

**Tabela 7.39 – Propriedades da fibra de vidro E-Glass**

<b>E (Gpa)</b>	80
<b>ν</b>	0.22
<b>ρ (kg/m<sup>3</sup>)</b>	2550

### Aplicação do algoritmo de PSO selecionado

Os objetivos do trabalho desenvolvido foram a minimização da deformada transversal máxima e maximização da frequência fundamental da placa compósita laminada, como problemas independentes, ou seja, sem haver um único problema de multiobjectivo. (algo num trabalho futuro). As duas funções objetivo provêm das implementações do método de interpolação de RBF, com os valores de treino obtidos pela simulação em elementos finitos realizada no programa comercial *Ansys*©.

### Introdução de constrangimento mássico

Esta restrição implica a determinação de dois valores mássicos iniciais, um mínimo e um máximo, conforme indica a inequação (7.21).

$$Massa_{\min adm} \leq Massa_{placa} \leq Massa_{\max adm} \text{ [kg]} \quad (7.21)$$

<sup>1</sup> *NetComposites is a global research, consultancy and online media company, creating and using innovative technologies to advance the composites industry as well as running the industry's leading online portal for composites. (Extraído de <http://www.netcomposites.com/about-us> a 15-09-2015)*

<sup>2</sup> *A novel concept in the field of Material Science publishing and information provision - AZoM.com (the A to Z of Materials) was formed with the primary aim of increasing the use of Advanced Materials by the engineering and design community worldwide. (Extraído de <http://www.azom.com/aboutus.aspx> a 15-09-2015)*

Para implementar o constrangimento mássico foi necessário obter a expressão que relacionava a massa da placa compósita com as variáveis em análise, a relação de  $a/b$  da seção transversal da fibra e a fração de volume de fibra.

$$\rho_{efet}(v_f) = \rho_f v_f + \rho_m v_m = \rho_f v_f + \rho_m (1 - v_f) \quad (7.22)$$

$$m = \rho V = \rho_{efet}(v_f) \times V_{placa} = \rho_{efet}(v_f) \times (l \times l \times esp) \quad (7.23)$$

A expressão na equação (7.22) foi obtida baseada na Regra das Misturas (*RoM*), de Voigt. A massa específica efetiva da placa é dependente da fração de volume de fibra, conforme se pode confirmar pela equação (7.23).

**Tabela 7.40 – Resultado da massa específica efetiva correspondente à percentagem de fibra na camada**

Fração de Volume de Fibra ( $V_f$ )	Massa Específica Efetiva ( $\rho_{efet}$ )
0.5	1875
0.525	1908.75
0.55	1942.5
0.575	1976.25
0.6	2010
0.625	2043.75
0.65	2077.5
0.675	2111.25
0.7	2145

Os valores apresentados na tabela anterior tiveram em conta o valor da massa específica de cada constituinte do compósito laminado de fibra de vidro com epóxi. Deste modo o constrangimento mássico será afetado por esta variação, bem como os valores limites admissíveis conforme indica a Tabela 7.41. Deste modo poder-se-á resolver o problema com o constrangimento da fração de volume de fibra tornando o problema mais simples matematicamente.

**Tabela 7.41 – Valores limites admissíveis da massa, baseados na equação (7.23)**

$a/h$	Massa Mínima Admissível	Massa Máxima Admissível
10	187,5	214,5
20	93,75	107,25
40	46,875	53,625

Este constrangimento trouxe mais esforço computacional, pois influencia a geração da população inicial no algoritmo de PSO selecionado, pois a variável de projeto fração de volume de fibra não poderá ser qualquer valor dentro de 50 e 70%, depende do constrangimento mássico. Por consequência os limites de valores aceitáveis de  $a/b$  para determinado valor da fração de volume de fibra também serão afetados para os respectivos limites da variável de projeto relação dimensional da elipse ( $a/b$ ), será então um limite dinâmico dependente da fração de volume de fibra.

$$\left[ \frac{a}{b_{min}}, \frac{a}{b_{max}} \right] = f(V_f) \quad V_f \in [V_{f_{min}}, V_{f_{max}}] \quad (7.24)$$

Foi necessário criar uma função isolada para obter os valores limites mínimo e máximo de  $a/b$  para o valor de fração de volume de fibra em causa. Deste modo foi ajustado o algoritmo de PSO para conter estes constrangimentos e relações de dependência de variáveis de projeto no processo de otimização dos casos de estudo, uma alteração inevitável que trouxe um aumento considerável do tempo de computação.

### 7.5.1. Caso A – Minimização da deformada transversal máxima

O objetivo deste caso de estudo é a minimização da máxima deformada transversal da placa compósita simplesmente apoiada (SS1), com carregamento uniforme, comparando dois tipos de empilhamento de laminado. Com a implementação do constrangimento mássico, abordado neste capítulo, esta placa teve a restrição de valores mínimo e máximo de quilogramas, conforme representa a (7.25).

$$Massa_{min} \leq Massa_{placa} \leq Massa_{máx} \text{ [kg]} \quad (7.25)$$

#### Dados do Problema

- $Massa_{min} = 190 \text{ kg}$

- $Massa_{máx} = 205 \text{ kg}$

-Empilhamento do laminado 1 =  $[0^\circ]$

-Empilhamento do laminado 2 =  $[0^\circ/90^\circ]$

-Lado da placa compósita quadrada ( $a$ ) = 1 m

-Relação  $a/h = 10$

-Volume da Placa Compósita =  $a \cdot a \cdot h = 1 \cdot 1 \cdot 0.1 = 0.1 \text{ m}^3$

-Espessura do laminado ( $h$ ) = 0.1m

-Função para Otimização = Rede RBF com *bias* constante (função de ativação selecionada no capítulo 7.3.3)

- Função de Ativação da Metamodelação das Máx. Deformada Transversal = (função de ativação selecionada no capítulo 7.3.3)

- Variante do método de interpolação: Normal/Com *bias* constante

-Função de Ativação da Metamodelação das Propriedades Mecânicas = Rede RBF com função de ativação Gaussiana Exponencial (com  $b$  igual a 0.5), conforme mencionado no capítulo 7.3.2

- ❖ Variante do método de interpolação: Simples/Sem *bias*

### Parâmetros de otimização usados

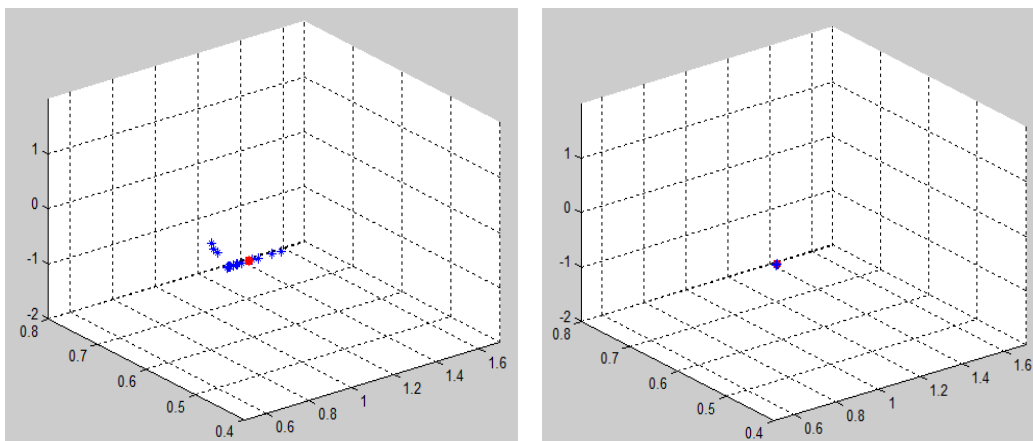
- Número de Partículas (Np)=20;
- Número de Variáveis de Projeto (Nvp)=2;
- Tipo de Objetivo = Minimização
- Fator individual=1.5;
- Fator Social=1.5;
- Fator de Inércia=0.7;
- Número de Iterações=50;
- Opção 1-Fator de Inércia Adaptativo=1 (Ativo);
- Opção 2-Fator Social/Individual Adaptativo=1 (Ativo);
- Opção 3-Fator de Construção Adaptativo=1 (Ativo);

#### 7.5.1.1. Laminado 1 – [0°]

A Tabela 7.42 apresenta os resultados do processo de estimação das propriedades mecânicas do ponto que garante o mínimo valor da máxima deformada transversal para o laminado 1, com e sem a técnica de reinicialização.

**Tabela 7.42 – Comparação dos resultados para o laminado 1, com e sem reinicializações**

	Sem Reinicialização	Com 5 Reinicializações
<b>Tempo Computação (s)</b>	43,187	280,190
<b>a/b candidato</b>	0,7912142	0,7880683
<b>Vf candidato</b>	0,5185185	0,5185185
<b>Min w<sub>máx</sub> (m)</b>	-2,90892E-05	-2,909586E-05



**Figura 7.27 – Iteração final da otimização do laminado 1, sem reinicialização (esquerda) e com cinco reinicializações (direita)**

A Figura 7.27 realça a importância desta técnica oriunda dos algoritmos genéticos, a reinicialização, que possibilita que ache uma melhor convergência para um valor ótimo.

Na Tabela 7.43 é possível verificar as propriedades mecânicas do compósito com os valores de  $a/b$  e  $V_f$  dos candidatos apresentados Tabela 7.42, valores estes de propriedades que foram introduzidos no modelos validados do *Ansys*© e que possibilitaram o cálculo numérico da máxima deformada transversal, apresentada também na Tabela 7.42, na Tabela 7.44 e na Tabela 7.45.

**Tabela 7.43 - Propriedades mecânicas estimadas, sem e com reinicialização (laminado 1)**

Propriedade	Sem Reinicialização	Com 5 Reinicializações
$E_1$	4.3222555E+10	4.4134E+10
$E_2$	1.0313143E+10	1.0522E+10
$E_3$	1.4969202E+10	1.5351E+10
$G_{23}$	2.8343835E+09	2.8932E+09
$G_{31}$	5.1026817E+09	5.2359E+09
$G_{12}$	3.1743491E+09	3.2365E+09
$\nu_{21}$	0.06701000	0.0683600
$\nu_{31}$	0.08777000	0.0898900
$\nu_{32}$	0.32118000	0.3279900
$\nu_{12}$	0.28084000	0.2867200
$\nu_{13}$	0.25360000	0.2586100
$\nu_{23}$	0.22165000	0.2252000

**Tabela 7.44 – Comparação entre os valores de máxima deformada transversal e respetivo erro relativo, para o caso sem reinicialização (laminado 1)**

$w_{m\acute{a}x}$ Otimizado	$w_{m\acute{a}x}$ <i>Ansys</i> ©	Erro Relativo (%)
-2,90892E-05	-2,8869E-05	0,76

**Tabela 7.45 – Comparação entre os valores de máxima deformada transversal e respetivo erro relativo, para o caso com cinco reinicializações (laminado 1)**

$w_{m\acute{a}x}$ Otimizado	$w_{m\acute{a}x}$ <i>Ansys</i> ©	Erro Relativo (%)
-2,909586E-05	-2,82136E-05	3,13

### 7.5.1.2. Laminado 2 – [0°/90°]

A Tabela 7.46 apresenta os resultados do processo de estimação das propriedades mecânicas do ponto que garante o mínimo valor da máxima deformada transversal para o laminado 2, com e sem a técnica de reinicialização.

**Tabela 7.46 - Comparação dos resultados para o laminado 2, com e sem reinicializações**

	<b>Sem Reinicialização</b>	<b>Com 5 Reinicializações</b>
<b>Tempo Computação (s)</b>	46,913	263,636
<b><math>a/b</math> candidato</b>	0,6977452	0,68979698
<b><math>V_f</math> candidato</b>	0,5185185	0,5185185
<b>Min <math>w_{máx}</math> (m)</b>	-3,80791E-05	-3,80779E-05

Na Tabela 7.47 é possível verificar as propriedades mecânicas do compósito com os valores de  $a/b$  e  $V_f$  dos candidatos apresentados Tabela 7.46, valores estes de propriedades que foram introduzidos no modelos validados do *Ansys*© e que possibilitaram o cálculo numérico da máxima deformada transversal, apresentada também na Tabela 7.46, na Tabela 7.48 e na Tabela 7.49.

**Tabela 7.47 - Propriedades mecânicas estimadas, sem e com reinicialização (laminado 2)**

<b>Propriedade</b>	<b>Sem Reinicialização</b>	<b>Com 5 Reinicializações</b>
<b>E<sub>1</sub></b>	4.691231E+10	41797873215
<b>E<sub>2</sub></b>	1.083080E+10	9636949668
<b>E<sub>3</sub></b>	2.225514E+10	20111215113
<b>G<sub>23</sub></b>	3.054640E+09	2720345071
<b>G<sub>31</sub></b>	7.961406E+09	7214307526
<b>G<sub>12</sub></b>	3.209714E+09	2851410542
<b>v<sub>21</sub></b>	0.07158000	0.0639300
<b>v<sub>31</sub></b>	0.12337000	0.1115800
<b>v<sub>32</sub></b>	0.35536000	0.3178200
<b>v<sub>12</sub></b>	0.31006000	0.2773000
<b>v<sub>13</sub></b>	0.26056000	0.2322300
<b>v<sub>23</sub></b>	0.17405000	0.1530700

**Tabela 7.48 – Comparação entre os valores de máxima deformada transversal e respetivo erro relativo, para o caso sem reinicialização (laminado 2)**

$w_{m\acute{a}x}$ Otimizado	$w_{m\acute{a}x}$ Ansys©	Erro Relativo (%)
-3,80791E-05	-3.4698E-05	9,75

**Tabela 7.49 – Comparação entre os valores de máxima deformada transversal e respetivo erro relativo, para o caso com cinco reinicializações (laminado 2)**

$w_{m\acute{a}x}$ Otimizado	$w_{m\acute{a}x}$ Ansys©	Erro Relativo (%)
-3,80779E-05	-3.9399E-05	3,35

### 7.5.1.3. Análise dos resultados

Analisando as tabelas dos resultados de ambos os laminados, Tabela 7.42 e Tabela 7.46, é possível verificar-se que o candidato para a fração de volume foi sempre o mesmo. Este valor aproximado a 51.85% de fibra faz com que a massa da placa para os dois laminados fosse igual, ou seja o valor mínimo colocado no problema, 190 quilogramas (pois a massa específica para esta fração de volume é  $1900 \text{ kg/m}^3$ ). Em relação aos erros relativos obtidos, os valores foram aceitáveis menos o caso sem reinicialização do algoritmo de PSO para o laminado 2. Contudo há que ter em conta que o valor ótimo de fração de volume foi um valor intermédio entre dois valores dados para treino e como a relação  $a/b$  é dependente deste valor foi pior a sua estimação.

No caso da estimação da deformada transversal, o uso da variante Normal/Com *bias* constante para o método de interpolação gerar a função que serviu para a otimização deveu-se ao fato de esta variante ter o menor erro relativo. Quanto à estimação das propriedades, foi consoante a variante Simples/Sem *bias* pois obteve-se com esta melhores valores de indicadores de desempenho, conforme abordado anteriormente Tabela 7.25, da Tabela 7.26 e da Tabela 7.27. Relativamente aos valores obtidos da máxima deformada transversal para cada laminado era de esperar que o valor obtido no caso de uma placa com a sequência de empilhamento  $[0^\circ/90^\circ]$  fosse maior do que para a placa ortotrópica, para o mesmo problema em análise.

Relativamente aos valores de erros relativos obtidos foram ligeiramente acima do esperado, tendo como objetivo não ultrapassar os 5%. Como se notaram alguns valores no laminado 2 superiores a 5% fez-se outro ensaio, onde se utilizou a propriedade mecânica E3 e G31 estimadas pela função que aparentava ter melhores resultados para

esta propriedade, contudo o valor de erro relativo obtido manteve-se na ordem dos 9% (com um valor de 9.44%). Neste ensaio usou-se uma variante Universal, que contempla informação dos pontos a estimar, e notou-se melhorias na interpolação das propriedades em causa, como tal fez-se um último ensaio usando uma variante universal da função de Placa Fina, e obteve-se as propriedades mecânicas para o laminado 2 sem uso de reinicialização na otimização expressas na Tabela 7.50.

Deste modo, com a influência da posição espacial do ponto a interpolar, já foi possível obter valores para as propriedades mecânicas mais coerentes com o domínio espacial dos dados de treino. Este caso de estudo permitiu verificar que quando um candidato ótimo está com um valor na variável independente ( $V_f$ ) que não usado para treino, o erro relativo entre o valor calculado com as propriedades estimadas e o valor da otimização é bem maior, como foi o caso pois o metamodelo foi validado com pontos intercalados e sempre com valores de  $V_f$  usados para treino.

**Tabela 7.50 - Propriedades mecânicas estimadas com função placa fina e com variante universal, otimização sem reinicialização (laminado 2) – CASO A**

<b>Propriedade</b>	<b>Sem Reinicialização</b>
<b>E1</b>	4.31104E+10
<b>E2</b>	9.94824E+09
<b>E3</b>	2.04956E+10
<b>G23</b>	2.80452E+09
<b>G31</b>	7.33256E+09
<b>G12</b>	2.94674E+09
<b>v21</b>	0.0657900
<b>v31</b>	0.1136700
<b>v32</b>	0.3266300
<b>v12</b>	0.2851000
<b>v13</b>	0.2393500
<b>v23</b>	0.1591900

Verifica-se pela análise da Tabela 7.51 que o uso da variante Universal faz com o erro relativo seja menor (valor obtido e -0.02%) cumprindo este modo o objetivo de não ultrapassar o valor de 5% de erro entre o valor calculado pelo modelo em *Ansys*® e o valor obtido da otimização.

**Tabela 7.51 – Comparação entre os valores de máxima deformada transversal e respetivo erro relativo, para o caso sem reinicialização (laminado 2)**

<b>W<sub>máx</sub> Otimizado</b>	<b>W<sub>máx</sub> Ansys®</b>	<b>Erro Relativo (%)</b>
-3,80791E-05	-3.8087E-05	-0,02

## 7.5.2. Caso B – Maximização da frequência fundamental

O objetivo deste caso de estudo é a maximização da frequência fundamental da placa compósita simplesmente apoiada (SS1), com carregamento uniforme, comparando dois tipos de empilhamento de laminado. Com a implementação do constrangimento mássico, abordado neste capítulo, esta placa teve a restrição de valores mínimo e máximo de quilogramas, conforme representa a (7.25). Este caso é semelhante ao Caso A, o que altera é a função que permite fazer a otimização da frequência fundamental, que também é consoante a variante Universal/Com *bias* variável do método de interpolação de RBF. O restante mantém-se idêntico, até os parâmetros de otimização utilizados.

### 7.5.2.1. Laminado 1 – [0°]

A Tabela 7.52 apresenta os resultados do processo de estimação das propriedades mecânicas do ponto que garante o máximo valor da frequência fundamental da placa compósita para o laminado 1, com e sem a técnica de reinicialização.

Tabela 7.52 – Comparação dos resultados para o laminado 1, com e sem reinicializações

	Sem Reinicialização	Com 5 Reinicializações
<b>Tempo Computação (s)</b>	45,968	279,458466
<b><i>a/b</i> candidato</b>	1,1890907	1,202030
<b><math>V_f</math> candidato</b>	0,6296296	0,625000
<b>Máx freq funda. (Hz)</b>	3,25235E+02	3,252351E+02

Tabela 7.53 – Comparação entre os valores da frequência fundamental e respetivo erro relativo, para o caso sem reinicialização (laminado 1)

$f_{fund}$ Otimizado	$f_{fund}$ Ansys©	Erro Relativo (%)
325.24	277.56	17,17

Tabela 7.54 – Comparação entre os valores da frequência fundamental e respetivo erro relativo, para o caso com cinco reinicializações (laminado 1)

$f_{fund}$ Otimizado	$f_{fund}$ Ansys©	Erro Relativo (%)
325.24	327.50	-0,69

Relativamente ao valor da frequência fundamental obtida na simulação do modelo pelo programa *Ansys*®, com as propriedades estimadas e apresentadas na Tabela 7.55, pode-se verificar que existe um desvio considerável do valor estimado para o valor obtido pela análise dinâmica no programa comercial. Para o caso sem reinicialização o erro relativo chega aos 17%, conforme é referido na Tabela 7.53, e para o caso com as cinco reinicializações da população o erro não chega aos 1%, conforme apresenta a Tabela 7.54. O candidato ótimo apresentado na Tabela 7.52 é um dos pontos de treino, como tal seria de esperar que o erro fosse pequeno.

**Tabela 7.55 - Propriedades mecânicas estimadas, sem e com reinicialização (laminado 1)**

<b>Propriedade</b>	<b>Sem Reinicialização</b>	<b>Com 5 Reinicializações</b>
<b>E<sub>1</sub></b>	3.804782E+10	5.12630E+10
<b>E<sub>2</sub></b>	1.835109E+10	2.47420E+10
<b>E<sub>3</sub></b>	1.008512E+10	1.35610E+10
<b>G<sub>23</sub></b>	2.769058E+09	3.72630E+09
<b>G<sub>31</sub></b>	3.061748E+09	4.11560E+09
<b>G<sub>12</sub></b>	6.513085E+09	8.78340E+09
<b>v<sub>21</sub></b>	0.084510	0.11406000
<b>v<sub>31</sub></b>	0.052230	0.07036000
<b>v<sub>32</sub></b>	0.114400	0.15416000
<b>v<sub>12</sub></b>	0.175220	0.23633000
<b>v<sub>13</sub></b>	0.197070	0.26599000
<b>v<sub>23</sub></b>	0.208120	0.28127000

Contudo o erro relativo atual apresentado na Tabela 7.53 ainda era elevado, como tal foi realizado a re-simulação do caso de estudo, mas com a variante universal da função de ativação de placa fina, tal como foi explicado no caso de estudo de minimização da deformada transversal. Assim conseguiu-se obter um valor de erro relativo de -0.6%, conforme é expresso na Tabela 7.56, e com as propriedades mecânicas do compósito expressas na Tabela 7.57.

**Tabela 7.56 – Comparação entre os valores da frequência fundamental e respetivo erro relativo, para o caso sem reinicialização (laminado 1) com função placa fina com variante universal**

<b>W<sub>máx</sub> Otimizado</b>	<b>W<sub>máx</sub> Ansys®</b>	<b>Erro Relativo (%)</b>
325.24	327.22	-0,61

**Tabela 7.57 - Propriedades mecânicas estimadas com função placa fina e com variante universal, otimização sem reinicialização (laminado 2) – CASO B**

<b>Propriedade</b>	<b>Sem Reinicialização</b>
<b>E1</b>	5.161659E+10
<b>E2</b>	2.460043E+10
<b>E3</b>	1.382727E+10
<b>G23</b>	3.780295E+09
<b>G31</b>	4.207636E+09
<b>G12</b>	8.706983E+09
<b>v21</b>	0.1127500
<b>v31</b>	0.0709400
<b>v32</b>	0.1562600
<b>v12</b>	0.2366700
<b>v13</b>	0.2648000
<b>v23</b>	0.2777600

### 7.5.2.2. Laminado 2 – [0°/90°]

A Tabela 7.58 apresenta os resultados do processo de estimação das propriedades mecânicas do ponto que garante o máximo valor da frequência fundamental da placa compósita para o laminado 2, com e sem a técnica de reinicialização.

**Tabela 7.58 – Comparação dos resultados para o laminado 2, com e sem reinicializações**

	<b>Sem Reinicialização</b>	<b>Com 5 Reinicializações</b>
<b>Tempo Computação (s)</b>	48,6439499	281,39333554
<b><i>a/b</i> candidato</b>	1,1890907	1,1890907
<b><math>V_f</math> candidato</b>	0,6296296	0,6296296
<b>Máx freq funda. (Hz)</b>	3,14888E+02	3,14888E+02

A Tabela 7.58 mostra que apesar de ser introduzida a técnica de reinicialização, com 5 etapas, nada alterou em relação ao ponto candidato, bem como o valor ótimo da máxima frequência fundamental da placa compósita. A única coisa que se alterou foi o tempo de computação, que aumentou para mais do que cinco vezes com a introdução das cinco reinicializações.

Tabela 7.59 - Propriedades mecânicas estimadas, sem e com reinicialização (laminado 2)

Propriedade	Sem Reinicialização	Com 5 Reinicializações
$E_1$	3.804782E+10	3.804782E+10
$E_2$	1.835109E+10	1.835109E+10
$E_3$	1.008512E+10	1.008512E+10
$G_{23}$	2.769058E+09	2.769058E+09
$G_{31}$	3.061748E+09	3.061748E+09
$G_{12}$	6.513085E+09	6.513085E+09
$\nu_{21}$	0.084510	0.084510
$\nu_{31}$	0.052230	0.052230
$\nu_{32}$	0.114400	0.114400
$\nu_{12}$	0.175220	0.175220
$\nu_{13}$	0.197070	0.197070
$\nu_{23}$	0.208120	0.208120

Tabela 7.60 – Comparação entre os valores da frequência fundamental e respetivo erro relativo, para o caso sem reinicialização (laminado 2)

$f_{fund}$ Otimizado	$f_{fund}$ Ansys©	Erro Relativo (%)
314.89	269.72	16,75

Tabela 7.61 – Comparação entre os valores da frequência fundamental e respetivo erro relativo, para o caso com cinco reinicializações (laminado 2)

$f_{fund}$ Otimizado	$f_{fund}$ Ansys©	Erro Relativo (%)
314.89	269.72	16,75

Para este laminado os resultados obtidos foram idênticos com e sem a técnica de reinicialização, conforme se pode verificar pela análise das quatro tabelas relativas a este estudo. O valor do erro relativo foi de aproximadamente 16.75% face ao valor da frequência fundamental obtida pelo Ansys©, com as devidas propriedades estimadas. Tal como se verificou para o laminado 1, foi necessário melhorar este valor, e com o uso da função de ativação de placa fina com a variante universal foi possível chegar-se a um erro relativo da frequência fundamental da placa compósita de -0.79%.

### 7.5.2.3. Análise dos resultados

Ao contrário do que se passou no caso de estudo A, aqui verificou-se que o candidato para a fração de volume não foi sempre o mesmo, existem dois valores (0.625 e 0.62963). Estes valores originam diferentes valores mássicos, no caso de estudo B ambos os estudos originaram uma placa com um peso de 205 quilogramas (a massa específica para esta fração de volume é 2050 kg/m<sup>3</sup>), enquanto no caso de estudo A o estudo sem reinicializações também deu igual valor, mas o outro estudo já originou uma estrutura com 204.4 quilogramas aproximadamente (a massa específica para esta fração de volume é 2043,75 kg/m<sup>3</sup>).

Relativamente aos tempos de computação, verifica-se o mesmo que no caso de estudo A, que com a técnica de reinicialização o tempo de processamento do processo de otimização aumenta mais do que cinco vezes, e nem sempre com a garantia que ter-se-á melhor resultado como é o caso dos valores obtidos na Tabela 7.58.

## Conclusão

A elaboração desta dissertação levou a diversas conclusões sobre a qualidade e desempenho dos algoritmos usados, onde o custo computacional e os indicadores de desempenho foram parâmetros chave na escolha dos melhores métodos, técnicas e algoritmos. Numa primeira análise pode-se concluir que os resultados obtidos das análises estáticas e dinâmicas através do método de elementos finitos aplicado pelo programa comercial *Ansys*© coincidem com os resultados obtidos na obra (Reddy 2004), conforme as análises feitas no capítulo 7.2.4 - Análise dos resultados obtidos, como tal os modelos foram devidamente validados antes da sua utilização nos casos de estudo.

Relativamente à parte em que se faz a demonstração da igualdade matemática entre os dois métodos de interpolação abordados, concluiu-se que ambos os métodos Kriging e RBF possuem semelhantes estruturas algorítmicas, mas que matematicamente são iguais. Deste modo foi possível implementar uma melhoria na RBF que provém das variantes do método de Kriging, a introdução do polinómio na interpolação, tal como foi feito na obra de (Fazio 2013). Assim foi possível seleccionar o método de RBF, com a parte interessante do polinómio das variantes de Kriging, como o escolhido para a análise dos casos de estudo, pois é menos complexo pelo facto de só ter de calcular os pesos do metamodelo uma vez, independentemente do número e pontos a estimar/interpolar (tal como demonstrado pelo trabalho de Fazio). Quanto ao tempo de computação exigido para estimar um ponto, este depende essencialmente do número de pontos de treino do metamodelo. Quanto mais pontos de treino, maior será a matriz quadra e simétrica das covariâncias e/ou funções de ativação (matriz que contempla as relações das distâncias entre pontos, e as influências dos polinómios das variantes do método de interpolação). Inicialmente esta questão sentia-se mais porque se estava a trabalhar com variáveis simbólicas, mas com a transformação para variáveis numéricas, concluiu-se que o fator computacional neste método de interpolação não tem relevante interesse de análise porque é bastante rápido.

Com o método de interpolação selecionado, outra conclusão foi a obtenção de erros pequenos na estimação simultânea de todas as propriedades elástica com somente uma função de ativação no método de interpolação espacial RBF. Concluiu-se assim que é possível estimar saídas de um metamodelo, com comportamentos diferentes, com apenas uma função de ativação e mesmo assim obter erros relativos pequenos que no máximo

são aproximadamente 5%, conforme está exposto na Tabela 7.16, para a função gaussiana exponencial com o parâmetro  $b$  igual a 0.5 com a variante Simples (ou também denominada “Sem *bias*”) do método. Contudo, é possível ter-se uma função ajustada para cada parâmetro de saída, as doze propriedades mecânicas do material compósito, a Tabela 7.18 mostra que em geral o erro relativo é mais baixo se se escolher a melhor função para cada parâmetro, onde no máximo obtém um erro menor que 4%.

Ainda relativamente á metamodelação do comportamento das propriedades mecânicas do compósito, apesar de não estar aqui mencionado ainda houve tentativas iniciais de apenas modelar uma variável de entrada, de modo a diminuir os elevados erros relativos iniciais, fixando a fração de volume de fibra ( $V_f$ ) e variando a relação da seção transversal elíptica da fibra ( $a/b$ ), mas não houve necessidade de reduzir a dimensão do problema porque os erros relativos obtidos satisfizeram o objetivo desejado dos 5% de erro relativo, com a função de ativação mais adequada para a estimação de cada propriedade mecânica do compósito. Contudo, apesar de nenhuma função de ativação garantir a estimação das 12 propriedades com o máximo erro relativo igual ou inferior a 5%, usou-se então a mesma função de ativação com iguais parâmetros e variante, escolhida outrora, ou seja a função Gaussiana Experimental com a variante Simples/Sem *bias* e com o valor do parâmetro  $b$  igual a 0.5.

Na etapa de re-simulação dos casos de estudo analisados na dissertação, numa primeira fase identificaram-se algumas melhorias de um modo geral, mas os casos que se tinha antes valores de erros relativos superiores a 5% mantiveram-se, e os que eram inferiores também se mantiveram. Numa tentativa de melhorar os resultados foram estimados os parâmetros que tinham maior erro, com a função de ativação escolhida para o metamodelo das propriedades mecânicas, com funções que se relevavam mais aptas para uma melhor interpolação, ou seja, usar a variante universal da função linear para a propriedade  $E_3$ , e a função placa fina para a propriedade  $G_{31}$ . Esta tentativa de melhoria foi fracassada, mas percebeu-se que a variante tem extrema influência, e que a parte da validação foi um pouco manipulada pelo facto de terem sido usados pontos intercalados e de iguais valores de  $V_f$ , como tal teve-se bons valores com variantes simples e normais.

Numa segunda tentativa de melhoria dos piores resultados, usou-se uma variante universal da função de ativação placa fina, e conseguiu-se ter valores interpolados/estimados das propriedades mais coerentes, originando erros relativos inferiores a 5% conforme desejado.

No caso da metamodelação dos resultados das análises estática e dinâmica da placa compósita submetida a um carregamento uniforme e simplesmente apoiada (SS1), pode-se concluir que os erros relativos são para os dois parâmetros de saída menores do que 2%, cumprindo assim o objetivo de serem menores que 5%. Neste caso a função usada no metamodelo foi a única testada, conforme é explicado no capítulo 7.3.3 - Aplicação do método de RBF para criar um metamodelo para análises mecânicas estáticas e dinâmicas, e a sua variante é a de *bias* constante para a deformada e de *bias* variável para a frequência. Na etapa da metamodelação o trabalho futuro a desenvolver deve ser no sentido da otimização dos parâmetros das funções de ativação e/ou *kernel*, de modo a que o erro seja menor possível para cada parâmetro de estimação. Outro parâmetro que deve ser analisado com maior pormenor, é o grau do polinómio nas variantes com *bias* variável do método de interpolação, que neste trabalho foi somente usado o polinómio linear de grau um, pois os resultados já foram satisfatórios com o menor grau possível.

Relativamente à otimização implantada pode-se concluir que a técnica de PSO proporciona melhores resultados na procura do ótimo com a implementação da técnica de reinicializações. Esta melhoria já implementada por (Loja 2013) teve um grande impacto na diminuição do erro na procura do valor ótimo de cada função de teste, como se pode verificar por exemplo desde da Tabela 7.28 à Tabela 7.31, para o caso da função de teste “*Test Tube Holder*”. Quanto ao tempo de computação, pode-se verificar que o uso desta técnica faz com que o tempo de computação se multiplique basicamente pelo mesmo número de reinicializações desejado, conforme está mencionado nos capítulos 7.5.1.3 e 7.5.2.3.

Quanto ao uso da técnica de reinicializações, nem sempre se obteve o melhor candidato com a reinicialização ativada, contudo não dá para afirmar que é melhor com ou sem, porque só se fez uma “corrida” por cada otimização de cada laminado em cada caso de estudo, e conforme já se mencionou na dissertação o algoritmo de PSO contém características heurísticas.

De uma forma geral, as conclusões que se podem tirar da análise dos casos de estudo são diferentes entre o caso A e o B. Em relação à minimização da máxima deformada transversal ( $w_{m\acute{a}x}$ ), os menores erros relativos obtidos foram de cerca de 1% para o laminado 1 (sequência A), conforme indica a Tabela 7.44, e de aproximadamente 3% para o laminado 2 (sequência B), conforme indica a Tabela 7.48. No caso de estudo B, os resultados obtidos não foram tão satisfatórios, com erros relativos bastante superiores a 5%. Concluiu-se assim que apenas se conseguiu fazer todo o processo com eficácia para o caso da minimização da máxima deformada transversal. Contudo há dois aspetos sobre os casos de estudo que deve-se ter em conta, o primeiro é que o algoritmo de otimização apenas foi executado uma vez, pelo que se pode ter dado o caso de não ter encontrado o melhor valor que este consegue capturar, tanto no caso A como no B; o segundo aspeto é que também se deveria ter validado a estimação das propriedades mecânicas do compósito (com auxílio do programa *PREMAT*).

Nesta dissertação foram bastantes vezes avaliado o desempenho dos métodos implementados, contudo certos indicadores de desempenho não foram sequer usados devido à dificuldade de análise dos mesmos, apesar de todos os indicadores mencionados no capítulo 4.4-Indicadores de desempenho. Num trabalho futuro seria interessante usar mais um indicador para avaliar o desempenho dos métodos, por exemplo o NRMSE que contempla os valores normalizados possibilitando analisar parâmetros com ordens de grandeza diferentes. Analisando todo o trabalho desenvolvido, pode-se concluir que para problemas de grande complexidade, como foi o caso, a análise do código implementado é fundamental a nível de esforço computacional, muitas das vezes foi necessário reeditar o código para que o cálculo matemático fosse executado de uma forma mais rápida, reduzindo o tempo de computação.

De uma forma geral, concluiu-se que as técnicas usadas e o procedimento adotado (desde da metamodelação até à final estimação das propriedades mecânicas do ponto ótimo de otimização) podem ser aplicadas na otimização de estruturas em materiais compósitos na perspetiva de resolução de problemas de maior complexidade, com reduzido esforço computacional. Em suma, concluiu-se que o trabalho desenvolvido cumpriu com a generalidade dos objetivos pretendidos, contudo devido ao extenso número de verificações, avaliações e validações faltou algum tempo para a elaboração de casos de estudo, bem como a respetiva análise e crítica dos resultados obtidos.

## Desenvolvimentos Futuros

Numa perspetiva de melhoria do trabalho realizado os desenvolvimentos futuros deverão estar relacionados com os seguintes tópicos:

- Melhoria do código *MatLab*© implementado nas funções;
- Criar maior número de funções de *MatLab*© em ficheiros isolados, de modo a facilitar a deteção de erros de programação;
- Criação de um interface gráfico para melhoria a interface com o utilizador;
- Finalizar eficazmente a integração global dos programas *Ansys*©, *MatLab*© e *Microsoft Excel*©;
- Análise da influência de outros parâmetros, tais como o ângulo da orientação das fibras unidirecionais por camada;
- Melhorar os metamodelos com a otimização dos parâmetros das funções usadas nos métodos de Kriging e de RBF;
- Identificar/desenvolver métodos e/ou mecanismos de produção de compósitos laminados onde o parâmetro da forma da secção transversal possa ser manipulado, de modo a produzir a forma desejada que vá ao encontro da solução ótima de cada caso de estudo;
- Estudar a significância do parâmetro da forma da secção transversal da fibra face a outros parâmetros mais comuns de estudo (ângulo, número de camadas, empilhamento, etc.);
- Aplicação de um caso de estudo em cascas compósitas, com as devidas solicitações e constrangimentos;
- Melhorar cálculo dos coeficientes transformados da matriz de rigidez de corte transversal, utilizando os comandos *APDL* “*LayerNumber*” (para controlar as características de cada camada) usando um ciclo for até ao número de camadas existentes – Melhoria da automatização do cálculo para qualquer laminado;
- Analisar a viabilidade de realizar com sucesso ensaios experimentais;
- Usar outras variáveis de análise que não  $V_f$  e  $a/b$ , e se possível evitar variáveis dependentes, como foi o caso, só mesmo se forem significantes para o estudo, senão o tempo de computação aumenta bastante quando comparado com análises com somente variáveis independentes;

- 
- Implementar otimização multiobjetivo, ou seja a contribuição da minimização da máxima deformada transversal com a maximização da frequência fundamental no mesmo problema/caso de estudo;
  - Ter dados de treino dos metamodelos que são obtidos através de um conjunto pré-estabelecido de ensaios experimentais;
  - Introduzir e implementar o conceito de divisão dos dados, em dados de treino, validação e teste. Estudo da influência da percentagem de cada parte dividida para o melhor desempenho da estimação em causa;
  - Utilizar outras condições de fronteira nas placas laminadas compósitas;
  - Implementar os testes de *Kolmogorov-Smirnov* à geração de novas colônias após cada reinicialização, no algoritmo de PSO modificado;
  - Otimização dos parâmetros da função de ativação, no caso da RBF, ou das funções de covariância/semivariograma no caso do método de Kriging;
  - Analisar como casos de estudo outros modelos validados no *Ansys*®;
  - Validar as propriedades mecânicas para os pontos candidatos para cada caso de estudo, confrontando os valores obtidos do *PREMAT* com os estimados;
  - Testar a possibilidade de definir carregamentos distribuídos em função de duas variáveis independentes, de modo a possibilitar análises de casos de estudo com diferentes solicitações, com modelos computacionais validados igualmente pelos resultados da obra (Reddy 2004).

Estes foram os pontos mais evidentes de melhoria numa futura continuação do trabalho desenvolvido nesta dissertação.

---

## Referências Bibliográficas

- Abramowitz, M. & Stegun, I.A., 1964. *Handbook of Mathematical Functions: With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Dover Publications. Available at: <https://books.google.pt/books?id=V3ZQAAAAMAAJ>.
- ArcGIS, 2011. Kriging. *ArcGIS Resource Center*. Available at: <http://help.arcgis.com/en/arcgisdesktop/10.0/help/index.html#//009z00000076000000.htm> [Accessed July 17, 2015].
- Arian Nik, M. et al., 2014. A comparative study of metamodeling methods for the design optimization of variable stiffness composites. *Composite Structures*, 107, pp.494–501.
- ASM International, 2001. *ASM Handbook - Volume 21: Composites* ASM International, ed.,
- ASTM D3878-07, 1998. *Standard Terminology for Composite Materials*, West Conshohocken. Available at: [www.astm.org](http://www.astm.org).
- Athi Sankar, P., Machavaram, R. & Shankar, K., 2014. System identification of a composite plate using hybrid response surface methodology and particle swarm optimization in time domain. *Measurement*, 55, pp.499–511. Available at: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0263224114002462>.
- Avriel, M., 2003. *Nonlinear Programming: Analysis and Methods*, Dover Publications. Available at: <https://books.google.pt/books?id=byF4Xb1QbvMC>.
- Behdoudj, Z. et al., 2013. Effect of Cross Sectional Shape of Polypropylene Fibers on Flexural Toughness of Composites and Fiber-to-Cement Matrix Adhesion. *Advanced Materials Research*, 687, pp.485–489. Available at: <http://www.scientific.net/AMR.687.485>.
- Bishop, C.M., 1995. *Neural Networks for Pattern Recognition*, New York, NY, USA: Oxford University Press, Inc.
- Broomhead, D.S. & Lowe, D., 1988. Multivariable Functional Interpolation and Adaptive Networks. *Complex Systems* 2, pp.321–355.
- Buhmann, M.D., 2003. *Radial Basis Functions: Theory and Implementations*, Cambridge University Press. Available at: <https://books.google.pt/books?id=TRMf53opzlsC>.
- Carr, J.C., Fright, W.R. & Beatson, R.K., 1997. Surface interpolation with radial basis functions for medical imaging. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 16(1), pp.96–107.
- Chen, J. et al., 2013. Reliability design optimization of composite structures based on PSO together with FEA. *Chinese Journal of Aeronautics*, 26, pp.343–349.

- Cressie, N.A.C., 1993. *Statistics for spatial data*, J. Wiley. Available at: <https://books.google.pt/books?id=4SdRAAAAMAAJ>.
- Deng, S., Ye, L. & Mai, Y.-W., 1999. Influence of fibre cross-sectional aspect ratio on mechanical properties of glass fibre/epoxy composites I. Tensile and flexure behaviour. *Composites Science and Technology*, 59, pp.1331–1339.
- Diewert, W.E., 2008. Cost Functions - The New Palgrave Dictionary of Economics. In S. N. Durlauf & L. E. Blume, eds. Basingstoke: Palgrave Macmillan. Available at: [http://www.dictionaryofeconomics.com/extract?id=pde2008\\_C000390](http://www.dictionaryofeconomics.com/extract?id=pde2008_C000390).
- Fasshauer, G.E. & Zhang, J.G., 2007. On choosing “optimal” shape parameters for RBF approximation. *Numerical Algorithms*, 45, pp.345–368. Available at: <http://link.springer.com/10.1007/s11075-007-9072-8>.
- Fazio, V.S., 2013. *Interpolação espacial: uma comparação analítica entre redes RBF e Krigagem*. Universidade Federal de Santa Catarina. Available at: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/107339>.
- Fazio, V.S. & Roisenberg, M., 2013. Spatial Interpolation: An Analytical Comparison Between Kriging and RBF Networks. In *Proceedings of the 28th Annual ACM Symposium on Applied Computing*. SAC '13. New York, NY, USA: ACM, pp. 2–7. Available at: <http://doi.acm.org/10.1145/2480362.2480364>.
- Guedes, J.M. & Kikuchi, N., 1990. Preprocessing and postprocessing for materials based on the homogenization method with adaptive finite element methods. *Computer Methods In Applied Mechanics and Engineering*, 83, pp.143–198.
- Haara, A. & Kangas, A., 2012. Comparing K Nearest Neighbours Methods and Linear Regression ♦ Is There Reason To Select One Over the Other? *Mathematical and Computational Forestry & Natural-Resource Sciences (MCFNS)*, 4(1), pp.50–65 (16). Available at: <http://mcfns.com/index.php/Journal/article/view/MCFNS.4%3A50>.
- Hartigan, J.A. & Wong, M.A., 1979. Algorithm AS 136: A K-Means Clustering Algorithm. *Applied Statistics*, 28, p.100. Available at: <http://www.jstor.org/stable/10.2307/2346830?origin=crossref>.
- Hyndman, R.J. & Koehler, A.B., 2006. Another look at measures of forecast accuracy. *International Journal of Forecasting*, pp.679–688.
- Jiang, W.-G. et al., 2014. Homogenized Finite Element Analysis on Effective Elastoplastic Mechanical Behaviors of Composite with Imperfect Interfaces. *International Journal of Molecular Sciences*, 15, pp.23389–23407. Available at: <http://www.mdpi.com/1422-0067/15/12/23389/>.
- Jones, R.M., 1998. *Mechanics Of Composite Materials*, Taylor & Francis. Available at: <https://books.google.co.in/books?id=oMph2kNG3yAC>.

- Journel, A.G. & Huijbregts, C.J., 2003. *Mining Geostatistics*, Blackburn Press. Available at: <https://books.google.pt/books?id=Id1GAAAAYAAJ>.
- Kamiński, M. & Pawlak, A., 2015. Various approaches in probabilistic homogenization of the CFRP composites. *Composite Structures*, 133, pp.425–437. Available at: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0263822315006364>.
- Kennedy, J. & Eberhart, R., 1995. Particle swarm optimization. *Proceedings of ICNN'95 - International Conference on Neural Networks*, 4.
- Kirchhoff, G., 1850. Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, 1850, pp.51–88.
- Kirkpatrick, S., Gelatt, C.D. & Vecchi, M.P., 1983. Optimization by Simulated Annealing. *Science*, 220, pp.671–680. Available at: <http://www.jstor.org/stable/1690046>.
- Krishna Murty, A. V., 1987. Theoretical modelling of laminated composite plates. *Sadhana*, 11, pp.357–365.
- Lee, S.-P., Jin, J.-W. & Kang, K.-W., 2014. Probabilistic analysis for mechanical properties of glass/epoxy composites using homogenization method and Monte Carlo simulation. *Renewable Energy*, 65, pp.219–226. Available at: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0960148113004795>.
- Lehmann, E.L. & Casella, G., 2003. *Theory of Point Estimation*, Springer New York. Available at: <https://books.google.pt/books?id=9St7DCbu9AUC>.
- Loja, M.A.. R., 2013. On the use of particle swarm optimization to maximize bending stiffness of functionally graded structures. *Journal of Symbolic Computation*, 61-62, pp.12–30.
- Loja, M.A.R., 2012. *Study on the influence of fibre cross section shape on natural composites failure*,
- Lu, G.Y. & Wong, D.W., 2008. An adaptive inverse-distance weighting spatial interpolation technique. *Computers and Geosciences*, 34, pp.1044–1055.
- Marquardt, D.W., 1963. An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 11, pp.431–441.
- Matheron, G., 1973. The Intrinsic Random Functions and Their Applications. *Advances in Applied Probability*, 5, pp.439–468. Available at: <http://www.jstor.org/stable/1425829>  
[http://cg.ensmp.fr/bibliotheque/public/MATHERON\\_Publication\\_00180.pdf](http://cg.ensmp.fr/bibliotheque/public/MATHERON_Publication_00180.pdf).
- Mello, A. & Assis, L., 2013. *Otimização por enxame de partículas (PSO)*, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas.

- Mindlin, R.D., 1951. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates. In *ASME Journal of Applied Mechanics*. ASME.
- Mishra, S.K., 2006. Some New Test Functions for Global Optimization and Performance of Repulsive Particle Swarm Method. *SSRN Electronic Journal*. Available at: <http://www.ssrn.com/abstract=926132>.
- Otero, F. et al., 2015. Numerical homogenization for composite materials analysis. Comparison with other micro mechanical formulations. *Composite Structures*, 122, pp.405–416. Available at: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0263822314006102>.
- Press, W. et al., 2007. Radial Basis Function Interpolation. In *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*. New York: Cambridge University Press.
- Rabinovich, S.G., 2006. *Measurement Errors and Uncertainties: Theory and Practice*, Springer New York. Available at: <https://books.google.pt/books?id=h5ODwuxF4doC>.
- Rasmussen, C.E. & Williams, C.K.I., 2004. *Gaussian processes for machine learning*.
- Reddy, J.N., 2013. *An Introduction to Continuum Mechanics*, Cambridge University Press. Available at: <https://books.google.pt/books?id=Rsj-Bwv5FP0C>.
- Reddy, J.N., 2004. *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis, Second Edition*, Taylor & Francis. Available at: [https://books.google.pt/books?id=eeUr\\_AJiGRcC](https://books.google.pt/books?id=eeUr_AJiGRcC).
- Reissner, E., 1945. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. In *ASME Journal of Applied Mechanics*. ASME.
- Reuss, A., 1929. Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung für Einkristalle. *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 9, pp.49–58. Available at: <http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/zamm.19290090104/abstract>  
<http://onlinelibrary.wiley.com/store/10.1002/zamm.19290090104/asset/19290090104ftp.pdf?v=1&t=hqxvjzrh&s=d84e348251d1111b214f39a10798d0ded2bdfc39>.
- Rosenblatt, F., 1962. *Principles of neurodynamics: perceptrons and the theory of brain mechanisms*, Spartan Books. Available at: <https://books.google.ca/books?id=7FhRAAAAMAAJ>.
- Sathyanarayanamurthy, H. & Chinnam, R.B., 2009. Metamodels for variable importance decomposition with applications to probabilistic engineering design. *Computers & Industrial Engineering*, 57, pp.996–1007. Available at: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0360835209001041>.
- Shaw, F.E. et al., 2011. Optimization Theory and Methods. In pp. 2–6. Available at: <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/21976160>.

- Shen, G. & Huang, X., 2011. *Advanced Research on Computer Science and Information Engineering: International Conference, CSIE 2011, Zhengzhou, China, May 21-22, 2011. Proceedings*, Springer Berlin Heidelberg. Available at: <https://books.google.pt/books?id=LAjghv7mEc0C>.
- Shi, Y. & Eberhart, R., 1998. A modified particle swarm optimizer. In *Evolutionary Computation Proceedings, 1998. IEEE World Congress on Computational Intelligence., The 1998 IEEE International Conference on*. pp. 69–73.
- Sih, G.C., Michopoulos, J. & Chou, S.-C., 1986. *Hygrothermoelasticity* 1st ed., Springer Netherlands. Available at: <http://link.springer.com/10.1007/978-94-009-4418-3>.
- Silagadze, Z.K., 2004. Finding two-dimensional peaks. , p.12. Available at: <http://arxiv.org/abs/physics/0402085>.
- Stein, M.L., 1999. *Interpolation of Spatial Data*, Available at: [http://books.google.co.uk/books?id=5n\\_XuL2Wx1EC](http://books.google.co.uk/books?id=5n_XuL2Wx1EC).
- Strano, M., 2008. A technique for FEM optimization under reliability constraint of process variables in sheet metal forming. *International Journal of Material Forming*, 1, pp.13–20.
- Suresh, S., Sujit, P.B. & Rao, A.K., 2007. Particle swarm optimization approach for multi-objective composite box-beam design. *Composite Structures*, 81, pp.598–605.
- Tang, Y., Chen, J. & Peng, W., 2009. Probabilistic optimization of laminated composites considering both ply failure and delamination based on PSO and FEM. *Tsinghua Science and Technology*, 14, pp.89–93. Available at: <http://ieeexplore.ieee.org/lpdocs/epic03/wrapper.htm?arnumber=6075571>.
- Visweswaraiyah, S.B. et al., 2013. Multi-objective optimization of a composite rotor blade cross-section. *Composite Structures*, 96, pp.75–81.
- Voigt, W., 1889. Ueber die Beziehung zwischen den beiden Elasticitätsconstanten isotroper Körper. *Annalen der Physik*, 274, pp.573–587. Available at: <http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/andp.18892741206/abstract>  
<http://onlinelibrary.wiley.com/store/10.1002/andp.18892741206/asset/18892741206ftp.pdf?v=1&t=hqxvjljok&s=7177c2da2965a849d7f8b5111c5192c13c29912e>.
- Xiang, S. & Wang, K.M., 2009. Free vibration analysis of symmetric laminated composite plates by trigonometric shear deformation theory and inverse multiquadric RBF. *Thin-Walled Structures*, 47, pp.304–310.
- Zhang, L. & Yu, W., 2015. Variational asymptotic homogenization of elastoplastic composites. *Composite Structures*. Available at: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0263822315006790>.

---

## Apêndice

**Apêndice A** – Tabelas com valores de aspeto da seção transversal da fibra ( $a/b$ ) e frações de volume de fibra ( $V_f$ ) das REVS's simuladas no PREMAT, e respectivas propriedades elásticas homogeneizadas

**Apêndice B** – Pseudo Algoritmo para obtenção de valores  $a/b$  válidos para cada fração de volume de fibra

**Apêndice C** – Validação dos modelos SS1 com  $a/h$  igual a 10, a 20 e a 100

**Apêndice D** – Funções de teste

**Apêndice E** – Resultados da minimização das funções de teste

**Apêndice F** – Características do computador pessoal

**Apêndice G** – Teste do método de interpolação das propriedades mecânicas do compósito pela Rede RBF

## Apêndice A1 – Tabela propriedades compósitas - Parte 1

DADOS DE ENTRADA		DADOS DE SAÍDA					
$a/b$	$V_f$	$E_1$	$E_2$	$E_3$	$G_{23}$	$G_{31}$	$G_{12}$
0.660	0.5	4.17E+10	9.50E+09	2.15E+10	2.69E+09	7.84E+09	2.78E+09
0.681	0.5	4.17E+10	9.53E+09	1.90E+10	2.69E+09	6.74E+09	2.82E+09
0.702	0.5	4.17E+10	9.57E+09	1.73E+10	2.69E+09	6.05E+09	2.87E+09
0.723	0.5	4.16E+10	9.62E+09	1.60E+10	2.69E+09	5.58E+09	2.91E+09
0.744	0.5	4.16E+10	9.68E+09	1.51E+10	2.70E+09	5.21E+09	2.95E+09
0.766	0.5	4.15E+10	9.77E+09	1.44E+10	2.71E+09	4.92E+09	3.00E+09
0.788	0.5	4.14E+10	9.82E+09	1.37E+10	2.72E+09	4.65E+09	3.04E+09
0.810	0.5	4.14E+10	1.00E+10	1.34E+10	2.74E+09	4.47E+09	3.10E+09
0.833	0.5	4.13E+10	1.01E+10	1.29E+10	2.74E+09	4.31E+09	3.13E+09
0.856	0.5	4.13E+10	1.02E+10	1.26E+10	2.74E+09	4.17E+09	3.19E+09
0.880	0.5	4.13E+10	1.03E+10	1.22E+10	2.75E+09	4.04E+09	3.24E+09
0.903	0.5	4.10E+10	1.04E+10	1.18E+10	2.77E+09	3.86E+09	3.31E+09
0.927	0.5	4.08E+10	1.11E+10	1.24E+10	2.85E+09	3.82E+09	3.36E+09
0.952	0.5	4.08E+10	1.13E+10	1.22E+10	2.85E+09	3.73E+09	3.43E+09
0.976	0.5	4.08E+10	1.15E+10	1.19E+10	2.85E+09	3.64E+09	3.49E+09
1.000	0.5	4.08E+10	1.17E+10	1.17E+10	2.85E+09	3.57E+09	3.57E+09
1.024	0.5	4.08E+10	1.19E+10	1.15E+10	2.85E+09	3.49E+09	3.64E+09
1.051	0.5	4.08E+10	1.22E+10	1.13E+10	2.85E+09	3.43E+09	3.73E+09
1.078	0.5	4.08E+10	1.24E+10	1.11E+10	2.85E+09	3.36E+09	3.82E+09
1.107	0.5	4.10E+10	1.18E+10	1.04E+10	2.77E+09	3.31E+09	3.86E+09
1.137	0.5	4.13E+10	1.22E+10	1.03E+10	2.75E+09	3.24E+09	4.04E+09
1.168	0.5	4.13E+10	1.26E+10	1.02E+10	2.74E+09	3.19E+09	4.17E+09
1.200	0.5	4.13E+10	1.29E+10	1.01E+10	2.74E+09	3.13E+09	4.31E+09
1.234	0.5	4.14E+10	1.34E+10	1.00E+10	2.74E+09	3.10E+09	4.47E+09
1.269	0.5	4.14E+10	1.37E+10	9.82E+09	2.72E+09	3.04E+09	4.65E+09
1.306	0.5	4.15E+10	1.44E+10	9.77E+09	2.71E+09	3.00E+09	4.92E+09
1.344	0.5	4.16E+10	1.51E+10	9.68E+09	2.70E+09	2.95E+09	5.21E+09
1.384	0.5	4.16E+10	1.60E+10	9.62E+09	2.69E+09	2.91E+09	5.58E+09
1.425	0.5	4.17E+10	1.73E+10	9.57E+09	2.69E+09	2.87E+09	6.05E+09
1.469	0.5	4.17E+10	1.90E+10	9.53E+09	2.69E+09	2.82E+09	6.74E+09
1.515	0.5	4.17E+10	2.15E+10	9.50E+09	2.69E+09	2.78E+09	7.84E+09
0.700	0.525	4.36E+10	1.01E+10	2.14E+10	2.85E+09	7.67E+09	2.98E+09
0.721	0.525	4.36E+10	1.02E+10	1.92E+10	2.84E+09	6.74E+09	3.03E+09
0.742	0.525	4.36E+10	1.02E+10	1.76E+10	2.84E+09	6.12E+09	3.08E+09
0.763	0.525	4.35E+10	1.03E+10	1.65E+10	2.85E+09	5.68E+09	3.13E+09
0.784	0.525	4.35E+10	1.04E+10	1.56E+10	2.85E+09	5.32E+09	3.18E+09
0.806	0.525	4.34E+10	1.05E+10	1.49E+10	2.86E+09	5.03E+09	3.24E+09
0.828	0.525	4.34E+10	1.06E+10	1.43E+10	2.86E+09	4.80E+09	3.29E+09
0.851	0.525	4.33E+10	1.08E+10	1.39E+10	2.89E+09	4.59E+09	3.36E+09
0.873	0.525	4.32E+10	1.09E+10	1.34E+10	2.89E+09	4.43E+09	3.40E+09
0.896	0.525	4.32E+10	1.11E+10	1.31E+10	2.89E+09	4.28E+09	3.47E+09

<b>0.920</b>	<b>0.525</b>	4.32E+10	1.19E+10	1.37E+10	2.98E+09	4.21E+09	3.57E+09
<b>0.943</b>	<b>0.525</b>	4.32E+10	1.21E+10	1.34E+10	2.98E+09	4.09E+09	3.64E+09
<b>0.967</b>	<b>0.525</b>	4.26E+10	1.21E+10	1.28E+10	2.99E+09	3.92E+09	3.68E+09
<b>0.991</b>	<b>0.525</b>	4.26E+10	1.24E+10	1.26E+10	2.99E+09	3.83E+09	3.76E+09
<b>1.000</b>	<b>0.525</b>	4.26E+10	1.25E+10	1.25E+10	2.99E+09	3.79E+09	3.79E+09
<b>1.009</b>	<b>0.525</b>	4.26E+10	1.26E+10	1.24E+10	2.99E+09	3.76E+09	3.83E+09
<b>1.034</b>	<b>0.525</b>	4.26E+10	1.28E+10	1.21E+10	2.99E+09	3.68E+09	3.92E+09
<b>1.060</b>	<b>0.525</b>	4.32E+10	1.34E+10	1.21E+10	2.98E+09	3.64E+09	4.09E+09
<b>1.087</b>	<b>0.525</b>	4.32E+10	1.37E+10	1.19E+10	2.98E+09	3.57E+09	4.21E+09
<b>1.116</b>	<b>0.525</b>	4.32E+10	1.31E+10	1.11E+10	2.89E+09	3.47E+09	4.28E+09
<b>1.145</b>	<b>0.525</b>	4.32E+10	1.34E+10	1.09E+10	2.89E+09	3.40E+09	4.43E+09
<b>1.176</b>	<b>0.525</b>	4.33E+10	1.39E+10	1.08E+10	2.89E+09	3.36E+09	4.59E+09
<b>1.207</b>	<b>0.525</b>	4.34E+10	1.43E+10	1.06E+10	2.86E+09	3.29E+09	4.80E+09
<b>1.240</b>	<b>0.525</b>	4.34E+10	1.49E+10	1.05E+10	2.86E+09	3.24E+09	5.03E+09
<b>1.275</b>	<b>0.525</b>	4.35E+10	1.56E+10	1.04E+10	2.85E+09	3.18E+09	5.32E+09
<b>1.311</b>	<b>0.525</b>	4.35E+10	1.65E+10	1.03E+10	2.85E+09	3.13E+09	5.68E+09
<b>1.348</b>	<b>0.525</b>	4.36E+10	1.76E+10	1.02E+10	2.84E+09	3.08E+09	6.12E+09
<b>1.388</b>	<b>0.525</b>	4.36E+10	1.92E+10	1.02E+10	2.84E+09	3.03E+09	6.74E+09
<b>1.428</b>	<b>0.525</b>	4.36E+10	2.14E+10	1.01E+10	2.85E+09	2.98E+09	7.68E+09
<b>0.739</b>	<b>0.55</b>	4.55E+10	1.08E+10	2.15E+10	3.02E+09	7.62E+09	3.21E+09
<b>0.760</b>	<b>0.55</b>	4.55E+10	1.09E+10	1.95E+10	3.01E+09	6.79E+09	3.27E+09
<b>0.781</b>	<b>0.55</b>	4.55E+10	1.10E+10	1.81E+10	3.01E+09	6.22E+09	3.33E+09
<b>0.802</b>	<b>0.55</b>	4.54E+10	1.11E+10	1.70E+10	3.01E+09	5.79E+09	3.39E+09
<b>0.824</b>	<b>0.55</b>	4.54E+10	1.12E+10	1.62E+10	3.02E+09	5.45E+09	3.46E+09
<b>0.845</b>	<b>0.55</b>	4.53E+10	1.14E+10	1.54E+10	3.02E+09	5.15E+09	3.52E+09
<b>0.868</b>	<b>0.55</b>	4.53E+10	1.16E+10	1.50E+10	3.04E+09	4.95E+09	3.59E+09
<b>0.890</b>	<b>0.55</b>	4.52E+10	1.18E+10	1.44E+10	3.05E+09	4.71E+09	3.67E+09
<b>0.913</b>	<b>0.55</b>	4.52E+10	1.19E+10	1.40E+10	3.05E+09	4.54E+09	3.75E+09
<b>0.936</b>	<b>0.55</b>	4.51E+10	1.28E+10	1.45E+10	3.14E+09	4.46E+09	3.84E+09
<b>0.959</b>	<b>0.55</b>	4.51E+10	1.31E+10	1.42E+10	3.14E+09	4.32E+09	3.94E+09
<b>0.982</b>	<b>0.55</b>	4.51E+10	1.33E+10	1.38E+10	3.14E+09	4.20E+09	4.04E+09
<b>1.000</b>	<b>0.55</b>	4.51E+10	1.36E+10	1.36E+10	3.14E+09	4.11E+09	4.11E+09
<b>1.018</b>	<b>0.55</b>	4.51E+10	1.38E+10	1.33E+10	3.14E+09	4.04E+09	4.20E+09
<b>1.043</b>	<b>0.55</b>	4.51E+10	1.42E+10	1.31E+10	3.14E+09	3.94E+09	4.32E+09
<b>1.069</b>	<b>0.55</b>	4.51E+10	1.45E+10	1.28E+10	3.14E+09	3.84E+09	4.46E+09
<b>1.096</b>	<b>0.55</b>	4.52E+10	1.40E+10	1.19E+10	3.05E+09	3.75E+09	4.54E+09
<b>1.124</b>	<b>0.55</b>	4.52E+10	1.44E+10	1.18E+10	3.05E+09	3.67E+09	4.71E+09
<b>1.153</b>	<b>0.55</b>	4.53E+10	1.50E+10	1.16E+10	3.04E+09	3.59E+09	4.95E+09
<b>1.183</b>	<b>0.55</b>	4.53E+10	1.54E+10	1.14E+10	3.02E+09	3.52E+09	5.15E+09
<b>1.214</b>	<b>0.55</b>	4.54E+10	1.62E+10	1.12E+10	3.02E+09	3.46E+09	5.45E+09
<b>1.247</b>	<b>0.55</b>	4.54E+10	1.70E+10	1.11E+10	3.01E+09	3.39E+09	5.79E+09
<b>1.281</b>	<b>0.55</b>	4.55E+10	1.81E+10	1.10E+10	3.01E+09	3.33E+09	6.22E+09
<b>1.316</b>	<b>0.55</b>	4.55E+10	1.95E+10	1.09E+10	3.01E+09	3.27E+09	6.79E+09
<b>1.353</b>	<b>0.55</b>	4.55E+10	2.15E+10	1.08E+10	3.02E+09	3.21E+09	7.62E+09
<b>0.757</b>	<b>0.575</b>	4.74E+10	1.15E+10	2.43E+10	3.23E+09	8.83E+09	3.42E+09
<b>0.778</b>	<b>0.575</b>	4.74E+10	1.16E+10	2.18E+10	3.22E+09	7.64E+09	3.49E+09

<b>0.798</b>	<b>0.575</b>	4.74E+10	1.17E+10	2.00E+10	3.21E+09	6.88E+09	3.56E+09
<b>0.819</b>	<b>0.575</b>	4.74E+10	1.19E+10	1.86E+10	3.21E+09	6.34E+09	3.63E+09
<b>0.841</b>	<b>0.575</b>	4.73E+10	1.21E+10	1.76E+10	3.21E+09	5.92E+09	3.71E+09
<b>0.862</b>	<b>0.575</b>	4.73E+10	1.22E+10	1.67E+10	3.21E+09	5.58E+09	3.79E+09
<b>0.884</b>	<b>0.575</b>	4.72E+10	1.25E+10	1.62E+10	3.23E+09	5.30E+09	3.87E+09
<b>0.906</b>	<b>0.575</b>	4.72E+10	1.27E+10	1.56E+10	3.23E+09	5.07E+09	3.95E+09
<b>0.929</b>	<b>0.575</b>	4.72E+10	1.29E+10	1.50E+10	3.23E+09	4.88E+09	4.05E+09
<b>0.951</b>	<b>0.575</b>	4.71E+10	1.39E+10	1.54E+10	3.33E+09	4.73E+09	4.19E+09
<b>0.974</b>	<b>0.575</b>	4.70E+10	1.42E+10	1.50E+10	3.33E+09	4.57E+09	4.28E+09
<b>0.997</b>	<b>0.575</b>	4.70E+10	1.45E+10	1.46E+10	3.33E+09	4.43E+09	4.41E+09
<b>1.000</b>	<b>0.575</b>	4.70E+10	1.46E+10	1.46E+10	3.33E+09	4.42E+09	4.42E+09
<b>1.003</b>	<b>0.575</b>	4.70E+10	1.46E+10	1.45E+10	3.33E+09	4.41E+09	4.43E+09
<b>1.027</b>	<b>0.575</b>	4.70E+10	1.50E+10	1.42E+10	3.33E+09	4.28E+09	4.57E+09
<b>1.051</b>	<b>0.575</b>	4.71E+10	1.54E+10	1.39E+10	3.33E+09	4.19E+09	4.73E+09
<b>1.077</b>	<b>0.575</b>	4.72E+10	1.50E+10	1.29E+10	3.23E+09	4.05E+09	4.88E+09
<b>1.104</b>	<b>0.575</b>	4.72E+10	1.56E+10	1.27E+10	3.23E+09	3.95E+09	5.07E+09
<b>1.131</b>	<b>0.575</b>	4.72E+10	1.62E+10	1.25E+10	3.23E+09	3.87E+09	5.30E+09
<b>1.160</b>	<b>0.575</b>	4.73E+10	1.67E+10	1.22E+10	3.21E+09	3.79E+09	5.58E+09
<b>1.190</b>	<b>0.575</b>	4.73E+10	1.76E+10	1.21E+10	3.21E+09	3.71E+09	5.92E+09
<b>1.220</b>	<b>0.575</b>	4.74E+10	1.86E+10	1.19E+10	3.21E+09	3.63E+09	6.34E+09
<b>1.253</b>	<b>0.575</b>	4.74E+10	2.00E+10	1.17E+10	3.21E+09	3.56E+09	6.88E+09
<b>1.286</b>	<b>0.575</b>	4.74E+10	2.18E+10	1.16E+10	3.22E+09	3.49E+09	7.64E+09
<b>1.321</b>	<b>0.575</b>	4.74E+10	2.43E+10	1.15E+10	3.23E+09	3.42E+09	8.83E+09
<b>0.795</b>	<b>0.6</b>	4.94E+10	1.24E+10	2.44E+10	3.46E+09	8.77E+09	3.73E+09
<b>0.815</b>	<b>0.6</b>	4.93E+10	1.26E+10	2.21E+10	3.44E+09	7.7E+09	3.82E+09
<b>0.836</b>	<b>0.6</b>	4.93E+10	1.28E+10	2.05E+10	3.43E+09	6.99E+09	3.9E+09
<b>0.857</b>	<b>0.6</b>	4.93E+10	1.30E+10	1.93E+10	3.43E+09	6.47E+09	3.99E+09
<b>0.879</b>	<b>0.6</b>	4.93E+10	1.32E+10	1.82E+10	3.43E+09	6.06E+09	4.09E+09
<b>0.900</b>	<b>0.6</b>	4.92E+10	1.36E+10	1.75E+10	3.45E+09	5.73E+09	4.2E+09
<b>0.922</b>	<b>0.6</b>	4.92E+10	1.38E+10	1.68E+10	3.44E+09	5.46E+09	4.3E+09
<b>0.944</b>	<b>0.6</b>	4.91E+10	1.41E+10	1.61E+10	3.44E+09	5.21E+09	4.41E+09
<b>0.966</b>	<b>0.6</b>	4.91E+10	1.52E+10	1.65E+10	3.55E+09	5.07E+09	4.58E+09
<b>0.989</b>	<b>0.6</b>	4.91E+10	1.56E+10	1.60E+10	3.55E+09	4.89E+09	4.73E+09
<b>1.000</b>	<b>0.6</b>	4.89E+10	1.57E+10	1.57E+10	3.55E+09	4.77E+09	4.77E+09
<b>1.011</b>	<b>0.6</b>	4.91E+10	1.60E+10	1.56E+10	3.55E+09	4.73E+09	4.89E+09
<b>1.035</b>	<b>0.6</b>	4.91E+10	1.65E+10	1.52E+10	3.55E+09	4.58E+09	5.07E+09
<b>1.059</b>	<b>0.6</b>	4.91E+10	1.61E+10	1.41E+10	3.44E+09	4.41E+09	5.21E+09
<b>1.085</b>	<b>0.6</b>	4.92E+10	1.68E+10	1.38E+10	3.44E+09	4.3E+09	5.46E+09
<b>1.111</b>	<b>0.6</b>	4.92E+10	1.75E+10	1.36E+10	3.45E+09	4.2E+09	5.73E+09
<b>1.138</b>	<b>0.6</b>	4.93E+10	1.82E+10	1.32E+10	3.43E+09	4.09E+09	6.06E+09
<b>1.167</b>	<b>0.6</b>	4.93E+10	1.93E+10	1.30E+10	3.43E+09	3.99E+09	6.47E+09
<b>1.196</b>	<b>0.6</b>	4.93E+10	2.05E+10	1.28E+10	3.43E+09	3.9E+09	6.99E+09
<b>1.226</b>	<b>0.6</b>	4.93E+10	2.21E+10	1.26E+10	3.44E+09	3.82E+09	7.71E+09
<b>1.258</b>	<b>0.6</b>	4.94E+10	2.44E+10	1.24E+10	3.46E+09	3.73E+09	8.77E+09
<b>0.832</b>	<b>0.625</b>	5.13E+10	1.36E+10	2.47E+10	3.73E+09	8.79E+09	4.12E+09
<b>0.853</b>	<b>0.625</b>	5.12E+10	1.38E+10	2.26E+10	3.7E+09	7.81E+09	4.22E+09

<b>0.873</b>	<b>0.625</b>	5.12E+10	1.41E+10	2.10E+10	3.69E+09	7.12E+09	4.33E+09
<b>0.894</b>	<b>0.625</b>	5.12E+10	1.44E+10	1.98E+10	3.69E+09	6.61E+09	4.45E+09
<b>0.916</b>	<b>0.625</b>	5.12E+10	1.48E+10	1.90E+10	3.71E+09	6.22E+09	4.59E+09
<b>0.937</b>	<b>0.625</b>	5.11E+10	1.51E+10	1.81E+10	3.7E+09	5.87E+09	4.72E+09
<b>0.959</b>	<b>0.625</b>	5.11E+10	1.62E+10	1.83E+10	3.81E+09	5.67E+09	4.91E+09
<b>0.981</b>	<b>0.625</b>	5.10E+10	1.67E+10	1.76E+10	3.81E+09	5.4E+09	5.09E+09
<b>0.989</b>	<b>0.625</b>	5.10E+10	1.68E+10	1.74E+10	3.81E+09	5.33E+09	5.13E+09
<b>1.000</b>	<b>0.625</b>	5.10E+10	1.71E+10	1.71E+10	3.81E+09	5.23E+09	5.23E+09
<b>1.011</b>	<b>0.625</b>	5.10E+10	1.74E+10	1.68E+10	3.81E+09	5.13E+09	5.33E+09
<b>1.019</b>	<b>0.625</b>	5.10E+10	1.76E+10	1.67E+10	3.81E+09	5.09E+09	5.4E+09
<b>1.043</b>	<b>0.625</b>	5.11E+10	1.83E+10	1.62E+10	3.81E+09	4.91E+09	5.67E+09
<b>1.067</b>	<b>0.625</b>	5.11E+10	1.81E+10	1.51E+10	3.7E+09	4.72E+09	5.87E+09
<b>1.092</b>	<b>0.625</b>	5.12E+10	1.90E+10	1.48E+10	3.71E+09	4.59E+09	6.22E+09
<b>1.118</b>	<b>0.625</b>	5.12E+10	1.98E+10	1.44E+10	3.69E+09	4.45E+09	6.61E+09
<b>1.145</b>	<b>0.625</b>	5.12E+10	2.10E+10	1.41E+10	3.69E+09	4.33E+09	7.12E+09
<b>1.173</b>	<b>0.625</b>	5.12E+10	2.26E+10	1.38E+10	3.7E+09	4.22E+09	7.8E+09
<b>1.202</b>	<b>0.625</b>	5.13E+10	2.47E+10	1.36E+10	3.73E+09	4.12E+09	8.78E+09
<b>0.889</b>	<b>0.65</b>	5.32E+10	1.53E+10	2.32E+10	4.02E+09	7.93E+09	4.74E+09
<b>0.910</b>	<b>0.65</b>	5.31E+10	1.57E+10	2.17E+10	4.01E+09	7.27E+09	4.89E+09
<b>0.931</b>	<b>0.65</b>	5.31E+10	1.62E+10	2.06E+10	4.02E+09	6.79E+09	5.06E+09
<b>0.952</b>	<b>0.65</b>	5.31E+10	1.67E+10	1.96E+10	4.01E+09	6.38E+09	5.24E+09
<b>0.974</b>	<b>0.65</b>	5.30E+10	1.80E+10	1.96E+10	4.13E+09	6.11E+09	5.49E+09
<b>0.996</b>	<b>0.65</b>	5.30E+10	1.86E+10	1.88E+10	4.12E+09	5.81E+09	5.71E+09
<b>1.000</b>	<b>0.65</b>	5.30E+10	1.87E+10	1.87E+10	4.12E+09	5.76E+09	5.76E+09
<b>1.004</b>	<b>0.65</b>	5.30E+10	1.88E+10	1.86E+10	4.12E+09	5.71E+09	5.81E+09
<b>1.027</b>	<b>0.65</b>	5.30E+10	1.96E+10	1.80E+10	4.13E+09	5.49E+09	6.11E+09
<b>1.050</b>	<b>0.65</b>	5.31E+10	1.96E+10	1.67E+10	4.01E+09	5.24E+09	6.38E+09
<b>1.074</b>	<b>0.65</b>	5.31E+10	2.06E+10	1.62E+10	4.02E+09	5.06E+09	6.79E+09
<b>1.099</b>	<b>0.65</b>	5.31E+10	2.17E+10	1.57E+10	4.01E+09	4.89E+09	7.27E+09
<b>1.125</b>	<b>0.65</b>	5.32E+10	2.32E+10	1.53E+10	4.02E+09	4.74E+09	7.93E+09
<b>0.884</b>	<b>0.675</b>	5.51E+10	1.64E+10	2.83E+10	4.49E+09	1.03E+10	5.06E+09
<b>0.904</b>	<b>0.675</b>	5.51E+10	1.68E+10	2.57E+10	4.44E+09	8.96E+09	5.24E+09
<b>0.925</b>	<b>0.675</b>	5.51E+10	1.74E+10	2.38E+10	4.42E+09	8.08E+09	5.44E+09
<b>0.946</b>	<b>0.675</b>	5.50E+10	1.80E+10	2.25E+10	4.42E+09	7.45E+09	5.66E+09
<b>0.967</b>	<b>0.675</b>	5.50E+10	1.86E+10	2.13E+10	4.4E+09	6.94E+09	5.9E+09
<b>0.988</b>	<b>0.675</b>	5.50E+10	2.01E+10	2.11E+10	4.53E+09	6.6E+09	6.24E+09
<b>1.000</b>	<b>0.675</b>	5.50E+10	2.06E+10	2.06E+10	4.52E+09	6.4E+09	6.4E+09
<b>1.012</b>	<b>0.675</b>	5.50E+10	2.11E+10	2.01E+10	4.53E+09	6.24E+09	6.6E+09
<b>1.034</b>	<b>0.675</b>	5.50E+10	2.13E+10	1.86E+10	4.4E+09	5.9E+09	6.94E+09
<b>1.057</b>	<b>0.675</b>	5.50E+10	2.25E+10	1.80E+10	4.42E+09	5.66E+09	7.45E+09
<b>1.081</b>	<b>0.675</b>	5.51E+10	2.38E+10	1.74E+10	4.42E+09	5.44E+09	8.08E+09
<b>1.106</b>	<b>0.675</b>	5.51E+10	2.57E+10	1.68E+10	4.44E+09	5.24E+09	8.96E+09
<b>1.131</b>	<b>0.675</b>	5.51E+10	2.83E+10	1.64E+10	4.49E+09	5.06E+09	1.03E+10
<b>0.920</b>	<b>0.7</b>	5.70E+10	1.87E+10	2.87E+10	5E+09	1.04E+10	5.87E+09
<b>0.940</b>	<b>0.7</b>	5.70E+10	1.94E+10	2.63E+10	4.95E+09	9.11E+09	6.14E+09
<b>0.961</b>	<b>0.7</b>	5.70E+10	2.03E+10	2.46E+10	4.94E+09	8.26E+09	6.45E+09

---

<b>0.981</b>	<b>0.7</b>	5.70E+10	2.19E+10	2.40E+10	5.06E+09	7.7E+09	6.86E+09
<b>1.000</b>	<b>0.7</b>	5.69E+10	2.28E+10	2.28E+10	5.05E+09	7.23E+09	7.23E+09
<b>1.019</b>	<b>0.7</b>	5.70E+10	2.40E+10	2.19E+10	5.06E+09	6.87E+09	7.7E+09
<b>1.041</b>	<b>0.7</b>	5.70E+10	2.46E+10	2.03E+10	4.94E+09	6.45E+09	8.26E+09
<b>1.064</b>	<b>0.7</b>	5.70E+10	2.63E+10	1.94E+10	4.95E+09	6.14E+09	9.11E+09
<b>1.088</b>	<b>0.7</b>	5.70E+10	2.87E+10	1.87E+10	5E+09	5.87E+09	1.04E+10

## Apêndice A2 – Tabela propriedades compósitas - Parte 2

DADOS DE ENTRADA		DADOS DE SAÍDA					
$a/b$	$V_f$	$V_{21}$	$V_{31}$	$V_{32}$	$V_{12}$	$V_{13}$	$V_{23}$
0.660	0.5	6.59E-02	1.22E-01	3.34E-01	2.90E-01	2.37E-01	1.47E-01
0.681	0.5	6.57E-02	1.10E-01	3.33E-01	2.88E-01	2.41E-01	1.67E-01
0.702	0.5	6.56E-02	1.01E-01	3.32E-01	2.86E-01	2.44E-01	1.84E-01
0.723	0.5	6.56E-02	9.52E-02	3.31E-01	2.84E-01	2.47E-01	1.98E-01
0.744	0.5	6.57E-02	9.06E-02	3.29E-01	2.82E-01	2.49E-01	2.11E-01
0.766	0.5	6.60E-02	8.72E-02	3.25E-01	2.81E-01	2.52E-01	2.21E-01
0.788	0.5	6.63E-02	8.38E-02	3.23E-01	2.79E-01	2.54E-01	2.32E-01
0.810	0.5	6.72E-02	8.27E-02	3.13E-01	2.78E-01	2.55E-01	2.34E-01
0.833	0.5	6.75E-02	8.06E-02	3.11E-01	2.77E-01	2.57E-01	2.42E-01
0.856	0.5	6.79E-02	7.87E-02	3.08E-01	2.75E-01	2.59E-01	2.50E-01
0.880	0.5	6.84E-02	7.71E-02	3.04E-01	2.74E-01	2.60E-01	2.57E-01
0.903	0.5	6.91E-02	7.53E-02	3.01E-01	2.72E-01	2.63E-01	2.66E-01
0.927	0.5	7.41E-02	8.02E-02	2.54E-01	2.72E-01	2.63E-01	2.27E-01
0.952	0.5	7.49E-02	7.89E-02	2.50E-01	2.70E-01	2.65E-01	2.32E-01
0.976	0.5	7.58E-02	7.77E-02	2.45E-01	2.69E-01	2.66E-01	2.37E-01
1.000	0.5	7.67E-02	7.67E-02	2.41E-01	2.67E-01	2.67E-01	2.41E-01
1.024	0.5	7.77E-02	7.58E-02	2.37E-01	2.66E-01	2.69E-01	2.45E-01
1.051	0.5	7.89E-02	7.49E-02	2.32E-01	2.65E-01	2.70E-01	2.50E-01
1.078	0.5	8.02E-02	7.41E-02	2.27E-01	2.63E-01	2.72E-01	2.54E-01
1.107	0.5	7.53E-02	6.91E-02	2.66E-01	2.63E-01	2.72E-01	3.01E-01
1.137	0.5	7.71E-02	6.84E-02	2.57E-01	2.60E-01	2.74E-01	3.04E-01
1.168	0.5	7.87E-02	6.79E-02	2.50E-01	2.59E-01	2.75E-01	3.08E-01
1.200	0.5	8.06E-02	6.75E-02	2.42E-01	2.57E-01	2.77E-01	3.11E-01
1.234	0.5	8.27E-02	6.72E-02	2.34E-01	2.55E-01	2.78E-01	3.13E-01
1.269	0.5	8.38E-02	6.63E-02	2.32E-01	2.54E-01	2.79E-01	3.23E-01
1.306	0.5	8.72E-02	6.60E-02	2.21E-01	2.52E-01	2.81E-01	3.25E-01
1.344	0.5	9.06E-02	6.57E-02	2.11E-01	2.49E-01	2.82E-01	3.29E-01
1.384	0.5	9.52E-02	6.56E-02	1.98E-01	2.47E-01	2.84E-01	3.31E-01
1.425	0.5	1.01E-01	6.56E-02	1.84E-01	2.44E-01	2.86E-01	3.32E-01
1.469	0.5	1.10E-01	6.57E-02	1.67E-01	2.41E-01	2.88E-01	3.33E-01
1.515	0.5	1.22E-01	6.59E-02	1.47E-01	2.37E-01	2.90E-01	3.34E-01
0.700	0.525	6.59E-02	1.17E-01	3.25E-01	2.85E-01	2.38E-01	1.53E-01
0.721	0.525	6.58E-02	1.06E-01	3.23E-01	2.83E-01	2.41E-01	1.71E-01
0.742	0.525	6.59E-02	9.89E-02	3.21E-01	2.81E-01	2.44E-01	1.86E-01
0.763	0.525	6.61E-02	9.37E-02	3.18E-01	2.79E-01	2.47E-01	1.98E-01
0.784	0.525	6.63E-02	8.92E-02	3.16E-01	2.78E-01	2.49E-01	2.10E-01
0.806	0.525	6.68E-02	8.61E-02	3.11E-01	2.76E-01	2.51E-01	2.20E-01
0.828	0.525	6.71E-02	8.33E-02	3.09E-01	2.75E-01	2.53E-01	2.29E-01
0.851	0.525	6.82E-02	8.18E-02	2.98E-01	2.73E-01	2.55E-01	2.32E-01
0.873	0.525	6.87E-02	7.98E-02	2.95E-01	2.72E-01	2.57E-01	2.40E-01
0.896	0.525	6.92E-02	7.80E-02	2.92E-01	2.71E-01	2.58E-01	2.47E-01

<b>0.920</b>	<b>0.525</b>	7.40E-02	8.23E-02	2.45E-01	2.69E-01	2.59E-01	2.12E-01
<b>0.943</b>	<b>0.525</b>	7.49E-02	8.06E-02	2.41E-01	2.67E-01	2.60E-01	2.18E-01
<b>0.967</b>	<b>0.525</b>	7.59E-02	7.90E-02	2.38E-01	2.67E-01	2.63E-01	2.26E-01
<b>0.991</b>	<b>0.525</b>	7.70E-02	7.78E-02	2.34E-01	2.65E-01	2.64E-01	2.31E-01
<b>1.000</b>	<b>0.525</b>	7.74E-02	7.74E-02	2.32E-01	2.65E-01	2.65E-01	2.32E-01
<b>1.009</b>	<b>0.525</b>	7.78E-02	7.70E-02	2.31E-01	2.64E-01	2.65E-01	2.34E-01
<b>1.034</b>	<b>0.525</b>	7.90E-02	7.59E-02	2.26E-01	2.63E-01	2.67E-01	2.38E-01
<b>1.060</b>	<b>0.525</b>	8.06E-02	7.49E-02	2.18E-01	2.60E-01	2.67E-01	2.41E-01
<b>1.087</b>	<b>0.525</b>	8.23E-02	7.40E-02	2.12E-01	2.59E-01	2.69E-01	2.45E-01
<b>1.116</b>	<b>0.525</b>	7.80E-02	6.92E-02	2.47E-01	2.58E-01	2.71E-01	2.92E-01
<b>1.145</b>	<b>0.525</b>	7.98E-02	6.87E-02	2.40E-01	2.57E-01	2.72E-01	2.95E-01
<b>1.176</b>	<b>0.525</b>	8.18E-02	6.82E-02	2.32E-01	2.55E-01	2.73E-01	2.98E-01
<b>1.207</b>	<b>0.525</b>	8.33E-02	6.71E-02	2.29E-01	2.53E-01	2.75E-01	3.09E-01
<b>1.240</b>	<b>0.525</b>	8.61E-02	6.68E-02	2.20E-01	2.51E-01	2.76E-01	3.11E-01
<b>1.275</b>	<b>0.525</b>	8.92E-02	6.63E-02	2.10E-01	2.49E-01	2.78E-01	3.16E-01
<b>1.311</b>	<b>0.525</b>	9.37E-02	6.61E-02	1.98E-01	2.47E-01	2.79E-01	3.18E-01
<b>1.348</b>	<b>0.525</b>	9.89E-02	6.59E-02	1.86E-01	2.44E-01	2.81E-01	3.21E-01
<b>1.388</b>	<b>0.525</b>	1.06E-01	6.58E-02	1.71E-01	2.41E-01	2.83E-01	3.23E-01
<b>1.428</b>	<b>0.525</b>	1.17E-01	6.59E-02	1.53E-01	2.38E-01	2.85E-01	3.25E-01
<b>0.739</b>	<b>0.55</b>	6.63E-02	1.13E-01	3.14E-01	2.80E-01	2.39E-01	1.58E-01
<b>0.760</b>	<b>0.55</b>	6.64E-02	1.04E-01	3.11E-01	2.78E-01	2.42E-01	1.73E-01
<b>0.781</b>	<b>0.55</b>	6.67E-02	9.72E-02	3.08E-01	2.76E-01	2.44E-01	1.87E-01
<b>0.802</b>	<b>0.55</b>	6.70E-02	9.23E-02	3.04E-01	2.74E-01	2.47E-01	1.98E-01
<b>0.824</b>	<b>0.55</b>	6.76E-02	8.87E-02	2.99E-01	2.73E-01	2.49E-01	2.08E-01
<b>0.845</b>	<b>0.55</b>	6.80E-02	8.52E-02	2.96E-01	2.71E-01	2.51E-01	2.19E-01
<b>0.868</b>	<b>0.55</b>	6.91E-02	8.37E-02	2.86E-01	2.70E-01	2.52E-01	2.21E-01
<b>0.890</b>	<b>0.55</b>	6.99E-02	8.11E-02	2.82E-01	2.68E-01	2.54E-01	2.31E-01
<b>0.913</b>	<b>0.55</b>	7.06E-02	7.91E-02	2.78E-01	2.67E-01	2.56E-01	2.38E-01
<b>0.936</b>	<b>0.55</b>	7.53E-02	8.29E-02	2.34E-01	2.65E-01	2.57E-01	2.06E-01
<b>0.959</b>	<b>0.55</b>	7.64E-02	8.12E-02	2.30E-01	2.64E-01	2.59E-01	2.12E-01
<b>0.982</b>	<b>0.55</b>	7.76E-02	7.96E-02	2.25E-01	2.62E-01	2.60E-01	2.17E-01
<b>1.000</b>	<b>0.55</b>	7.86E-02	7.86E-02	2.21E-01	2.61E-01	2.61E-01	2.21E-01
<b>1.018</b>	<b>0.55</b>	7.96E-02	7.76E-02	2.17E-01	2.60E-01	2.62E-01	2.25E-01
<b>1.043</b>	<b>0.55</b>	8.12E-02	7.64E-02	2.12E-01	2.59E-01	2.64E-01	2.30E-01
<b>1.069</b>	<b>0.55</b>	8.29E-02	7.53E-02	2.06E-01	2.57E-01	2.65E-01	2.34E-01
<b>1.096</b>	<b>0.55</b>	7.91E-02	7.06E-02	2.38E-01	2.56E-01	2.67E-01	2.78E-01
<b>1.124</b>	<b>0.55</b>	8.11E-02	6.99E-02	2.31E-01	2.54E-01	2.68E-01	2.82E-01
<b>1.153</b>	<b>0.55</b>	8.37E-02	6.91E-02	2.21E-01	2.52E-01	2.70E-01	2.86E-01
<b>1.183</b>	<b>0.55</b>	8.52E-02	6.80E-02	2.19E-01	2.51E-01	2.71E-01	2.96E-01
<b>1.214</b>	<b>0.55</b>	8.86E-02	6.76E-02	2.08E-01	2.49E-01	2.73E-01	2.99E-01
<b>1.247</b>	<b>0.55</b>	9.23E-02	6.70E-02	1.98E-01	2.47E-01	2.74E-01	3.04E-01
<b>1.281</b>	<b>0.55</b>	9.72E-02	6.67E-02	1.87E-01	2.44E-01	2.76E-01	3.08E-01
<b>1.316</b>	<b>0.55</b>	1.04E-01	6.64E-02	1.73E-01	2.42E-01	2.78E-01	3.11E-01
<b>1.353</b>	<b>0.55</b>	1.13E-01	6.63E-02	1.58E-01	2.39E-01	2.80E-01	3.14E-01
<b>0.757</b>	<b>0.575</b>	6.70E-02	1.21E-01	3.07E-01	2.76E-01	2.36E-01	1.45E-01
<b>0.778</b>	<b>0.575</b>	6.72E-02	1.10E-01	3.02E-01	2.75E-01	2.39E-01	1.61E-01

<b>0.798</b>	<b>0.575</b>	6.75E-02	1.02E-01	2.98E-01	2.73E-01	2.42E-01	1.75E-01
<b>0.819</b>	<b>0.575</b>	6.80E-02	9.60E-02	2.93E-01	2.71E-01	2.44E-01	1.87E-01
<b>0.841</b>	<b>0.575</b>	6.87E-02	9.17E-02	2.88E-01	2.69E-01	2.46E-01	1.97E-01
<b>0.862</b>	<b>0.575</b>	6.93E-02	8.78E-02	2.84E-01	2.68E-01	2.48E-01	2.08E-01
<b>0.884</b>	<b>0.575</b>	7.06E-02	8.56E-02	2.74E-01	2.66E-01	2.50E-01	2.12E-01
<b>0.906</b>	<b>0.575</b>	7.13E-02	8.31E-02	2.69E-01	2.65E-01	2.52E-01	2.20E-01
<b>0.929</b>	<b>0.575</b>	7.22E-02	8.09E-02	2.65E-01	2.63E-01	2.54E-01	2.28E-01
<b>0.951</b>	<b>0.575</b>	7.73E-02	8.36E-02	2.23E-01	2.61E-01	2.55E-01	2.01E-01
<b>0.974</b>	<b>0.575</b>	7.84E-02	8.19E-02	2.18E-01	2.60E-01	2.57E-01	2.06E-01
<b>0.997</b>	<b>0.575</b>	7.99E-02	8.02E-02	2.13E-01	2.59E-01	2.58E-01	2.12E-01
<b>1.000</b>	<b>0.575</b>	8.01E-02	8.01E-02	2.12E-01	2.58E-01	2.58E-01	2.12E-01
<b>1.003</b>	<b>0.575</b>	8.02E-02	7.99E-02	2.12E-01	2.58E-01	2.59E-01	2.13E-01
<b>1.027</b>	<b>0.575</b>	8.19E-02	7.84E-02	2.06E-01	2.57E-01	2.60E-01	2.18E-01
<b>1.051</b>	<b>0.575</b>	8.36E-02	7.73E-02	2.01E-01	2.55E-01	2.61E-01	2.23E-01
<b>1.077</b>	<b>0.575</b>	8.09E-02	7.22E-02	2.28E-01	2.54E-01	2.63E-01	2.65E-01
<b>1.104</b>	<b>0.575</b>	8.31E-02	7.13E-02	2.20E-01	2.52E-01	2.65E-01	2.69E-01
<b>1.131</b>	<b>0.575</b>	8.56E-02	7.06E-02	2.12E-01	2.50E-01	2.66E-01	2.74E-01
<b>1.160</b>	<b>0.575</b>	8.78E-02	6.93E-02	2.08E-01	2.48E-01	2.68E-01	2.84E-01
<b>1.190</b>	<b>0.575</b>	9.17E-02	6.87E-02	1.97E-01	2.46E-01	2.69E-01	2.88E-01
<b>1.220</b>	<b>0.575</b>	9.60E-02	6.80E-02	1.87E-01	2.44E-01	2.71E-01	2.93E-01
<b>1.253</b>	<b>0.575</b>	1.02E-01	6.75E-02	1.75E-01	2.42E-01	2.73E-01	2.98E-01
<b>1.286</b>	<b>0.575</b>	1.10E-01	6.72E-02	1.61E-01	2.39E-01	2.75E-01	3.02E-01
<b>1.321</b>	<b>0.575</b>	1.21E-01	6.70E-02	1.45E-01	2.36E-01	2.76E-01	3.07E-01
<b>0.795</b>	<b>0.6</b>	0.068282	0.11688	0.29499	0.27125	0.23606	0.14998
<b>0.815</b>	<b>0.6</b>	0.06876	0.10719	0.28909	0.26941	0.23896	0.16448
<b>0.836</b>	<b>0.6</b>	0.069361	0.10025	0.28356	0.26767	0.24151	0.17702
<b>0.857</b>	<b>0.6</b>	0.070232	0.095264	0.27639	0.26596	0.24381	0.18679
<b>0.879</b>	<b>0.6</b>	0.071003	0.090881	0.27153	0.26434	0.24598	0.19741
<b>0.900</b>	<b>0.6</b>	0.072425	0.088217	0.26109	0.26267	0.24791	0.20231
<b>0.922</b>	<b>0.6</b>	0.073412	0.085314	0.25603	0.26115	0.24976	0.2107
<b>0.944</b>	<b>0.6</b>	0.074522	0.082702	0.25076	0.25969	0.25169	0.21899
<b>0.966</b>	<b>0.6</b>	0.079622	0.085138	0.21198	0.2576	0.25277	0.19453
<b>0.989</b>	<b>0.6</b>	0.081289	0.083064	0.20626	0.25599	0.25443	0.20062
<b>1.000</b>	<b>0.6</b>	0.081979	0.081979	0.20413	0.25552	0.25552	0.20413
<b>1.011</b>	<b>0.6</b>	0.083062	0.08129	0.20063	0.25443	0.25599	0.20626
<b>1.035</b>	<b>0.6</b>	0.085141	0.07962	0.19452	0.25277	0.2576	0.21199
<b>1.059</b>	<b>0.6</b>	0.0827	0.074523	0.219	0.25169	0.25969	0.25075
<b>1.085</b>	<b>0.6</b>	0.085313	0.073413	0.21071	0.24976	0.26115	0.25603
<b>1.111</b>	<b>0.6</b>	0.088219	0.072425	0.2023	0.24791	0.26267	0.26109
<b>1.138</b>	<b>0.6</b>	0.090881	0.071003	0.19741	0.24599	0.26434	0.27153
<b>1.167</b>	<b>0.6</b>	0.095266	0.070232	0.18679	0.2438	0.26597	0.2764
<b>1.196</b>	<b>0.6</b>	0.10025	0.069362	0.17703	0.24152	0.26767	0.28356
<b>1.226</b>	<b>0.6</b>	0.10722	0.068759	0.16443	0.23895	0.26941	0.28911
<b>1.258</b>	<b>0.6</b>	0.11685	0.068283	0.15002	0.23606	0.27125	0.29497
<b>0.832</b>	<b>0.625</b>	0.070362	0.11409	0.28129	0.26599	0.23633	0.15413
<b>0.853</b>	<b>0.625</b>	0.071158	0.10557	0.27391	0.26418	0.23903	0.16705

<b>0.873</b>	<b>0.625</b>	0.072081	0.099218	0.26709	0.26243	0.24146	0.17854
<b>0.894</b>	<b>0.625</b>	0.073219	0.094412	0.25963	0.26072	0.24369	0.1882
<b>0.916</b>	<b>0.625</b>	0.074868	0.091172	0.24886	0.25897	0.24568	0.19386
<b>0.937</b>	<b>0.625</b>	0.076183	0.087698	0.24268	0.25734	0.24771	0.20292
<b>0.959</b>	<b>0.625</b>	0.081088	0.089334	0.20724	0.25524	0.24895	0.18347
<b>0.981</b>	<b>0.625</b>	0.083054	0.086495	0.20072	0.25354	0.25089	0.19072
<b>0.989</b>	<b>0.625</b>	0.083598	0.085738	0.19898	0.25313	0.25147	0.19274
<b>1.000</b>	<b>0.625</b>	0.084636	0.084636	0.19588	0.25231	0.25231	0.19588
<b>1.011</b>	<b>0.625</b>	0.085735	0.0836	0.19275	0.25147	0.25313	0.19897
<b>1.019</b>	<b>0.625</b>	0.086489	0.083059	0.19073	0.2509	0.25354	0.2007
<b>1.043</b>	<b>0.625</b>	0.089329	0.081091	0.18349	0.24895	0.25524	0.20723
<b>1.067</b>	<b>0.625</b>	0.087699	0.076183	0.20292	0.24771	0.25734	0.24268
<b>1.092</b>	<b>0.625</b>	0.091163	0.074871	0.19389	0.24568	0.25897	0.24884
<b>1.118</b>	<b>0.625</b>	0.094418	0.073217	0.18819	0.24369	0.26073	0.25964
<b>1.145</b>	<b>0.625</b>	0.0992	0.072084	0.17857	0.24147	0.26242	0.26708
<b>1.173</b>	<b>0.625</b>	0.10556	0.071158	0.16706	0.23903	0.26418	0.2739
<b>1.202</b>	<b>0.625</b>	0.11406	0.070363	0.15416	0.23633	0.26599	0.28127
<b>0.889</b>	<b>0.65</b>	0.074655	0.10432	0.25704	0.25874	0.23908	0.16998
<b>0.910</b>	<b>0.65</b>	0.076086	0.098599	0.24834	0.25696	0.24139	0.18003
<b>0.931</b>	<b>0.65</b>	0.078046	0.094652	0.23707	0.25513	0.24345	0.18653
<b>0.952</b>	<b>0.65</b>	0.079742	0.09075	0.22988	0.25342	0.24549	0.19567
<b>0.974</b>	<b>0.65</b>	0.085055	0.091452	0.19723	0.25118	0.24693	0.18034
<b>0.996</b>	<b>0.65</b>	0.087407	0.088437	0.19032	0.24952	0.24883	0.18758
<b>1.000</b>	<b>0.65</b>	0.087915	0.087915	0.18896	0.24917	0.24917	0.18896
<b>1.004</b>	<b>0.65</b>	0.088435	0.087409	0.18759	0.24883	0.24952	0.19031
<b>1.027</b>	<b>0.65</b>	0.091452	0.085055	0.18034	0.24693	0.25118	0.19723
<b>1.050</b>	<b>0.65</b>	0.090752	0.079741	0.19567	0.24549	0.25342	0.22988
<b>1.074</b>	<b>0.65</b>	0.09465	0.078047	0.18653	0.24345	0.25513	0.23706
<b>1.099</b>	<b>0.65</b>	0.098594	0.076087	0.18004	0.2414	0.25696	0.24834
<b>1.125</b>	<b>0.65</b>	0.10433	0.074652	0.16995	0.23907	0.25875	0.25706
<b>0.884</b>	<b>0.675</b>	0.076361	0.12	0.26	0.25682	0.23397	0.15073
<b>0.904</b>	<b>0.675</b>	0.077908	0.11039	0.24893	0.25492	0.23668	0.16311
<b>0.925</b>	<b>0.675</b>	0.079822	0.10351	0.238	0.25302	0.23911	0.17345
<b>0.946</b>	<b>0.675</b>	0.082246	0.098643	0.22586	0.2511	0.24128	0.18095
<b>0.967</b>	<b>0.675</b>	0.084499	0.094101	0.21735	0.24929	0.24341	0.19056
<b>0.988</b>	<b>0.675</b>	0.090402	0.093927	0.18771	0.24695	0.24495	0.1792
<b>1.000</b>	<b>0.675</b>	0.092023	0.092023	0.18347	0.24601	0.24601	0.18347
<b>1.012</b>	<b>0.675</b>	0.093937	0.090393	0.17917	0.24494	0.24696	0.18773
<b>1.034</b>	<b>0.675</b>	0.094096	0.084502	0.19057	0.24341	0.24929	0.21734
<b>1.057</b>	<b>0.675</b>	0.098644	0.082245	0.18095	0.24128	0.2511	0.22586
<b>1.081</b>	<b>0.675</b>	0.10352	0.079819	0.17343	0.23911	0.25302	0.23801
<b>1.106</b>	<b>0.675</b>	0.11039	0.077908	0.16312	0.23668	0.25492	0.24893
<b>1.131</b>	<b>0.675</b>	0.11999	0.076362	0.15075	0.23398	0.25682	0.25999
<b>0.920</b>	<b>0.7</b>	0.082228	0.11789	0.24258	0.25087	0.23424	0.15799
<b>0.940</b>	<b>0.7</b>	0.084761	0.10939	0.2292	0.24886	0.2368	0.16899
<b>0.961</b>	<b>0.7</b>	0.087884	0.10333	0.21574	0.24683	0.23909	0.17774

---

<b>0.981</b>	<b>0.7</b>	0.093994	0.10135	0.18812	0.2444	0.24091	0.17197
<b>1.000</b>	<b>0.7</b>	0.097326	0.097326	0.17994	0.24273	0.24273	0.17994
<b>1.019</b>	<b>0.7</b>	0.10134	0.094003	0.17199	0.24091	0.24439	0.1881
<b>1.041</b>	<b>0.7</b>	0.10332	0.087887	0.17775	0.2391	0.24683	0.21573
<b>1.064</b>	<b>0.7</b>	0.10941	0.084755	0.16897	0.2368	0.24886	0.22922
<b>1.088</b>	<b>0.7</b>	0.11791	0.082223	0.15796	0.23424	0.25088	0.24261

## Apêndice B – Pseudo Algoritmo para obtenção de valores $a/b$ válidos para cada fração de volume de fibra

- 1) Definir os limites de fração de volume e número de frações a gerar;
- 2) Definir o espaçamento equidistante entre valores de “ $a$ ” candidatos;

### Ciclo 1: $i=1$ até número de frações de volume de fibra a gerar;

- 3) Obter o valor do raio equivalente, garantindo a igualdade entre a equação da área circular e equação (7.3);
- 4) Definir o valor inicial de “ $a$ ” igual  $(1 - \frac{desvio}{2})$  vezes o raio equivalente (fixar eixo  $x$  da formulação da elipse) (Weisstein, s.d.);
- 5) Obter o valor de “ $b$ ” limite de um dado valor de  $V_f$ , garantindo a igualdade das expressões (7.1) e (7.3);

**Enquanto Condição 1 se verificar:** “ $a$ ” candidato  $\leq (1 + \frac{desvio}{2}) \times$  o raio equivalente

- 6) Obter o valor de “ $b$ ” para a primeira relação de aspecto  $a/b$  de um dado  $V_f$ , garantindo a igualdade das expressões (7.1) e (7.3).
- 7) Verificar se o valor de “ $b$ ” obtido em 6)  $\leq$  “ $b$ ” limite;
- 8) Para novo ponto, adicionar o espaçamento predefinido para o valor de “ $a$ ” face ao valor anterior;
- 9) Para o novo valor de “ $a$ ”, obtido em a), calcular o correspondente  $b$  que garanta a igualdade das expressões (7.1) e (7.3);
- 10) Repetir os passos 7),8) e 9) até a condição 1 não se verificar;

**Fim da Condição 1**

**Fim da Ciclo 1**

- 11) Repetir deste o ponto 4) até 10) trocando os eixos, de modo a obter o formato das elipses inversas. Fixar o eixo  $y$  da formulação da elipse (Weisstein, s.d.).

**Algoritmo 9 - Pseudo algoritmo para obtenção de valores  $a/b$  válidos para cada fração de volume de fibra ( $V_f$ )**

---

## Apêndice C – Validação dos modelos SS1 com $a/h$ igual a 10, a 20 e a 100

Os resultados da sequência A, ou seja, com um empilhamento  $[0^\circ]$  (placa isotrópica) encontram-se no capítulo 7.2.1 (para uma relação  $a/h$  igual a 10), no capítulo 7.2.2 (para uma relação de  $a/h$  igual a 20) e no 7.2.3 (para uma relação de  $a/h$  igual a 100).

Relativamente aos resultados das restantes sequências de empilhamento encontram-se expostos nas tabelas presentes neste apêndice. Poder-se-á analisar os resultados das sequências B, C e D para os modelos analisados com relações de  $a/h$  iguais a 10 (placa espessa), 20 (placa moderadamente espessa) e 100 (placa fina), à exceção da sequência D para a relação de  $a/h$  igual a 20.

### C.1) Relação $a/h$ 10 e Sequência B [0°/90°]

Tabela 7.62 – Resultados do modelo SS1 com  $a/h$  igual a 10 e sequência B, das análises estática e dinâmica, com RE % face aos valores apresentados por (Reddy 2004)

Elem. Size (m)	#Elem	$w*10^2$ (RE%)	$w_{Reddy}*10^2$	$f_{fundam.}$ (RE%)	$f_{Reddy}$	$S_{yy}$ (RE%)	$S_{yy}^{Reddy}$	$S_{xy}$ (RE%)	$S_{xy}^{Reddy}$	$S_{xz}$ (RE%)	$ECS_{xz}^{Reddy}$	$S_{xz}$ (RE%)	$EES_{xz}^{Reddy}$
<b>1</b>	100	1.9506 (0.20%)	1,9468	8.97 (0.80%)	8,9	1.0482 (2.17%)	1,0715	0.0889 (7.38%)	0,096	0.6835 (18.42%)	0,5772	0.6835 (5.72%)	0,725
<b>0.5</b>	400	1.9476 (0.04%)	1,9468	8.92 (0.20%)	8,9	1.0657 (0.54%)	1,0715	0.0937 (2.37%)	0,096	0.7420 (28.56%)	0,5772	0.7420 (2.35%)	0,725
<b>0.3(3)</b>	900	1.9469 (0.01%)	1,9468	8.91 (0.10%)	8,9	1.0689 (0.24%)	1,0715	0.0949 (1.16%)	0,096	0.7614 (31.91%)	0,5772	0.7614 (5.02%)	0,725
<b>0.25</b>	1600	1.9466 (0.01%)	1,9468	8.91 (0.06%)	8,9	1.0700 (0.14%)	1,0715	0.0953 (0.69%)	0,096	0.7710 (33.58%)	0,5772	0.7710 (6.35%)	0,725
<b>0.2</b>	2500	1.9464 (0.02%)	1,9468	8.90 (0.05%)	8,9	1.0705 (0.10%)	1,0715	0.0956 (0.44%)	0,096	0.7768 (34.57%)	0,5772	0.7768 (7.14%)	0,725
<b>0.16(6)</b>	3600	1.9463 (0.03%)	1,9468	8.90 (0.04%)	8,9	1.0707 (0.07%)	1,0715	0.0957 (0.30%)	0,096	0.7806 (35.23%)	0,5772	0.7806 (7.67%)	0,725
<b>0.142857</b>	4900	1.9461 (0.04%)	1,9468	8.90 (0.04%)	8,9	1.0708 (0.06%)	1,0715	0.0958 (0.19%)	0,096	0.7833 (35.71%)	0,5772	0.7833 (8.04%)	0,725
<b>0.125</b>	6400	1.9460 (0.04%)	1,9468	8.90 (0.04%)	8,9	1.0709 (0.06%)	1,0715	0.0959 (0.11%)	0,096	0.7853 (36.06%)	0,5772	0.7853 (8.32%)	0,725
<b>0.1(1)</b>	8100	1.9459 (0.05%)	1,9468	8.90 (0.04%)	8,9	1.0710 (0.05%)	1,0715	0.0960 (0.02%)	0,096	0.7869 (36.33%)	0,5772	0.7869 (8.54%)	0,725
<b>0.1</b>	10000	1.9458 (0.05%)	1,9468	8.90 (0.04%)	8,9	1.0710 (0.05%)	1,0715	0.0961 (0.07%)	0,096	0.7881 (36.55%)	0,5772	0.7881 (8.71%)	0,725
<b>0.05</b>	40000	1.9451 (0.09%)	1,9468	8.90 (0.05%)	8,9	1.0709 (0.05%)	1,0715	0.0975 (1.58%)	0,096	0.7937 (37.51%)	0,5772	0.7937 (9.48%)	0,725

C.2) Relação  $a/h$  10 e Sequência C [0°/90°]<sub>s</sub>Tabela 7.63 - Resultados do modelo SS1 com  $a/h$  igual a 10 e sequência C, das análises estática e dinâmica, com RE % face aos valores apresentados por (Reddy 2004) (Parte 1)

Elem. Size (m)	#Elem	w*10 <sup>2</sup> (RE%)	w <sup>Reedy</sup> *10 <sup>2</sup>	f <sub>fundam.</sub> (RE%)	f <sub>Reedy</sub>	S <sub>xx</sub> (RE%)	S <sub>xx</sub> <sup>Reedy</sup>	S <sub>yy</sub> (RE%)	S <sub>yy</sub> <sup>Reedy</sup>	S <sub>xy</sub> (RE%)	S <sub>xy</sub> <sup>Reedy</sup>
<b>1</b>	100	1.0243 (0.07%)	1,025	12.34 (0.75%)	12,25	0.7503 (0.98%)	0,7577	0.5051 (0.90%)	0,5006	0.0440 (6.33%)	0,047
<b>0.5</b>	400	1.0248 (0.02%)	1,025	12.26 (0.05%)	12,25	0.7560 (0.23%)	0,7577	0.5019 (0.25%)	0,5006	0.0460 (2.04%)	0,047
<b>0.3(3)</b>	900	1.0227 (0.23%)	1,025	12.24 (0.09%)	12,25	0.7555 (0.29%)	0,7577	0.5005 (0.02%)	0,5006	0.0466 (0.81%)	0,047
<b>0.25</b>	1600	1.0250 (0.00%)	1,025	12.23 (0.13%)	12,25	0.7574 (0.05%)	0,7577	0.5010 (0.09%)	0,5006	0.0468 (0.38%)	0,047
<b>0.2</b>	2500	1.0250 (0.00%)	1,025	12.23 (0.15%)	12,25	0.7575 (0.02%)	0,7577	0.5009 (0.07%)	0,5006	0.0469 (0.12%)	0,047
<b>0.16(6)</b>	3600	1.0250 (0.00%)	1,025	12.23 (0.16%)	12,25	0.7576 (0.01%)	0,7577	0.5009 (0.05%)	0,5006	0.0470 (0.04%)	0,047
<b>0.142857</b>	4900	1.0246 (0.04%)	1,025	12.23 (0.17%)	12,25	0.7574 (0.04%)	0,7577	0.5007 (0.02%)	0,5006	0.0471 (0.15%)	0,047
<b>0.125</b>	6400	1.0250 (0.00%)	1,025	12.23 (0.17%)	12,25	0.7577 (0.00%)	0,7577	0.5008 (0.04%)	0,5006	0.0471 (0.21%)	0,047
<b>0.1(1)</b>	8100	1.0247 (0.02%)	1,025	12.23 (0.17%)	12,25	0.7575 (0.02%)	0,7577	0.5007 (0.02%)	0,5006	0.0471 (0.26%)	0,047
<b>0.1</b>	10000	1.0250 (0.00%)	1,025	12.23 (0.18%)	12,25	0.7577 (0.01%)	0,7577	0.5008 (0.04%)	0,5006	0.0471 (0.30%)	0,047
<b>0.05</b>	40000	1.0250 (0.00%)	1,025	12.23 (0.18%)	12,25	0.7578 (0.01%)	0,7577	0.5008 (0.03%)	0,5006	0.0472 (0.43%)	0,047

Tabela 7.64 - Resultados do modelo SS1 com  $a/h$  igual a 10 e sequência C, das análises estática e dinâmica, com RE% face aos valores apresentados por (Reddy 2004) (Parte 2)

Elem. Size (m)	#Elem.	Equações Equilíbrio 3D				Equações Constitutivas			
		$S_{xz}$ (RE%)	$S_{xz}^{\text{Reedy}}$	$S_{yz}$ (RE%)	$S_{yz}^{\text{Reedy}}$	$S_{xz}$ (RE%)	$S_{xz}^{\text{Reedy}}$	$S_{yz}$ (RE%)	$S_{yz}^{\text{Reedy}}$
<b>1</b>	100	0.5566 (8.46%)	0,6081	0.4477 (12.05%)	0,5091	0.5566 (30.30%)	0,7986	0.4477 (27.96%)	0,3499
<b>0.5</b>	400	0.5856 (3.70%)	0,6081	0.5015 (1.49%)	0,5091	0.5856 (26.67%)	0,7986	0.5015 (43.33%)	0,3499
<b>0.3(3)</b>	900	0.5960 (2.00%)	0,6081	0.5221 (2.56%)	0,5091	0.5960 (25.37%)	0,7986	0.5221 (49.22%)	0,3499
<b>0.25</b>	1600	0.6010 (1.17%)	0,6081	0.5314 (4.37%)	0,5091	0.6010 (24.75%)	0,7986	0.5314 (51.86%)	0,3499
<b>0.2</b>	2500	0.6041 (0.66%)	0,6081	0.5376 (5.59%)	0,5091	0.6041 (24.36%)	0,7986	0.5376 (53.63%)	0,3499
<b>0.16(6)</b>	3600	0.6062 (0.31%)	0,6081	0.5417 (6.41%)	0,5091	0.6062 (24.09%)	0,7986	0.5417 (54.83%)	0,3499
<b>0.142857</b>	4900	0.6077 (0.06%)	0,6081	0.5449 (7.04%)	0,5091	0.6077 (23.90%)	0,7986	0.5449 (55.74%)	0,3499
<b>0.125</b>	6400	0.6088 (0.12%)	0,6081	0.5470 (7.45%)	0,5091	0.6088 (23.76%)	0,7986	0.5470 (56.34%)	0,3499
<b>0.1(1)</b>	8100	0.6098 (0.27%)	0,6081	0.5489 (7.82%)	0,5091	0.6098 (23.65%)	0,7986	0.5489 (56.87%)	0,3499
<b>0.1</b>	10000	0.6104 (0.38%)	0,6081	0.5502 (8.08%)	0,5091	0.6104 (23.56%)	0,7986	0.5502 (57.25%)	0,3499
<b>0.05</b>	40000	0.6136 (0.91%)	0,6081	0.5567 (9.34%)	0,5091	0.6136 (23.16%)	0,7986	0.5567 (59.09%)	0,3499

C.3) Relação  $a/h$  10 e Sequência D  $[0^\circ/90^\circ]_4$ Tabela 7.65 – Resultados do modelo SS1 com  $a/h$  igual a 10 e sequência D, das análises estática e dinâmica, com RE% face aos valores apresentados por (Reddy 2004)

Elem. Size (m)	#Elem	$w*10^2$ (RE%)	$w_{Reddy}*10^2$	$f_{fundam.}$ (RE%)	$f_{Reddy}$	$S_{yy}$ (RE%)	$S_{yy}^{Reddy}$	$S_{xy}$ (RE%)	$S_{xy}^{Reddy}$	$S_{xz}$ (RE%)	$ECS_{xz}^{Reddy}$	$S_{xz}$ (RE%)	$EES_{xz}^{Reddy}$
<b>1</b>	100	0.9637 (0.23%)	0,966	12.75 (0.99%)	12,628	0.7365 (0.68%)	0,7415	0.0394 (6.17%)	0,042	0.4723 (18.39%)	0,5787	0.4723 (10.28%)	0,5264
<b>0.5</b>	400	0.9655 (0.05%)	0,966	12.66 (0.24%)	12,628	0.7403 (0.16%)	0,7415	0.0411 (2.09%)	0,042	0.5062 (12.52%)	0,5787	0.5062 (3.83%)	0,5264
<b>0.3(3)</b>	900	0.9658 (0.02%)	0,966	12.64 (0.11%)	12,628	0.7410 (0.07%)	0,7415	0.0416 (0.99%)	0,042	0.5183 (10.43%)	0,5787	0.5183 (1.53%)	0,5264
<b>0.25</b>	1600	0.9659 (0.01%)	0,966	12.64 (0.06%)	12,628	0.7413 (0.03%)	0,7415	0.0418 (0.52%)	0,042	0.5245 (9.37%)	0,5787	0.5245 (0.36%)	0,5264
<b>0.2</b>	2500	0.9660 (0.00%)	0,966	12.63 (0.04%)	12,628	0.7414 (0.02%)	0,7415	0.0419 (0.27%)	0,042	0.5283 (8.72%)	0,5787	0.5283 (0.35%)	0,5264
<b>0.16(6)</b>	3600	0.9660 (0.00%)	0,966	12.63 (0.02%)	12,628	0.7414 (0.01%)	0,7415	0.0419 (0.13%)	0,042	0.5308 (8.28%)	0,5787	0.5308 (0.83%)	0,5264
<b>0.142857</b>	4900	0.9660 (0.00%)	0,966	12.63 (0.02%)	12,628	0.7415 (0.00%)	0,7415	0.0420 (0.03%)	0,042	0.5326 (7.97%)	0,5787	0.5326 (1.17%)	0,5264
<b>0.125</b>	6400	0.9660 (0.00%)	0,966	12.63 (0.01%)	12,628	0.7415 (0.00%)	0,7415	0.0420 (0.04%)	0,042	0.5339 (7.73%)	0,5787	0.5339 (1.43%)	0,5264
<b>0.1(1)</b>	8100	0.9660 (0.00%)	0,966	12.63 (0.01%)	12,628	0.7415 (0.00%)	0,7415	0.0420 (0.09%)	0,042	0.5350 (7.55%)	0,5787	0.5350 (1.63%)	0,5264
<b>0.1</b>	10000	0.9661 (0.01%)	0,966	12.63 (0.01%)	12,628	0.7415 (0.00%)	0,7415	0.0421 (0.13%)	0,042	0.5359 (7.40%)	0,5787	0.5359 (1.80%)	0,5264
<b>0.05</b>	40000	0.9661 (0.01%)	0,966	12.63 (0.00%)	12,628	0.7416 (0.01%)	0,7415	0.0421 (0.33%)	0,042	0.5397 (6.74%)	0,5787	0.5397 (2.53%)	0,5264

### C.4) Relação $a/h$ 20 e Sequência B [0°/90°]

Tabela 7.66 – Resultados do modelo SS1 com  $a/h$  igual a 20 e sequência B, das análises estática e dinâmica, com RE % face aos valores apresentados por (Reddy 2004)

Elem. Size (m)	#Elem	$w*10^2$ (RE%)	$w_{Reddy}*10^2$	f <sub>fundam.</sub> (RE%)	f <sub>Reddy</sub>	$S_{yy}$ (RE%)	$S_{yy}^{Reddy}$	$S_{xy}$ (RE%)	$S_{xy}^{Reddy}$	$S_{xz}$ (RE%)	$S_{xz}^{Reddy}$
<b>1</b>	100	1.7500 (0.46%)	1,7582	9.58 (1.15%)	9,474	1.0694 (0.49%)	1,0747	0.0902 (4.30%)	0,0943	0.6993 (20.53%)	0,5802
<b>0.5</b>	400	1.7567 (0.09%)	1,7582	9.50 (0.28%)	9,474	1.0734 (0.12%)	1,0747	0.0931 (1.27%)	0,0943	0.7490 (29.10%)	0,5802
<b>0.3(3)</b>	900	1.7580 (0.01%)	1,7582	9.48 (0.11%)	9,474	1.0742 (0.05%)	1,0747	0.0938 (0.54%)	0,0943	0.7668 (32.16%)	0,5802
<b>0.25</b>	1600	1.7584 (0.01%)	1,7582	9.48 (0.06%)	9,474	1.0744 (0.03%)	1,0747	0.0941 (0.23%)	0,0943	0.7759 (33.73%)	0,5802
<b>0.2</b>	2500	1.7585 (0.02%)	1,7582	9.48 (0.03%)	9,474	1.0745 (0.02%)	1,0747	0.0942 (0.07%)	0,0943	0.7814 (34.68%)	0,5802
<b>0.16(6)</b>	3600	1.7586 (0.02%)	1,7582	9.48 (0.02%)	9,474	1.0746 (0.01%)	1,0747	0.0943 (0.04%)	0,0943	0.7851 (35.31%)	0,5802
<b>0.142857</b>	4900	1.7587 (0.03%)	1,7582	9.48 (0.01%)	9,474	1.0746 (0.01%)	1,0747	0.0944 (0.11%)	0,0943	0.7877 (35.77%)	0,5802
<b>0.125</b>	6400	1.7587 (0.03%)	1,7582	9.47 (0.01%)	9,474	1.0746 (0.01%)	1,0747	0.0945 (0.17%)	0,0943	0.7897 (36.11%)	0,5802
<b>0.1(1)</b>	8100	1.7587 (0.03%)	1,7582	9.47 (0.00%)	9,474	1.0746 (0.01%)	1,0747	0.0945 (0.22%)	0,0943	0.7913 (36.38%)	0,5802
<b>0.1</b>	10000	1.7587 (0.03%)	1,7582	9.47 (0.00%)	9,474	1.0746 (0.01%)	1,0747	0.0946 (0.27%)	0,0943	0.7925 (36.60%)	0,5802
<b>0.05</b>	40000	1.7585 (0.02%)	1,7582	9.47 (0.00%)	9,474	1.0746 (0.01%)	1,0747	0.0951 (0.87%)	0,0943	0.7981 (37.56%)	0,5802

### C.5) Relação $a/h$ 20 e Sequência C [0°/90°]<sub>s</sub>

Tabela 7.67 - Resultados do modelo SS1 com  $a/h$  igual a 20 e sequência C, das análises estática e dinâmica, com RE % face aos valores apresentados por (Reddy 2004) (Parte 1)

Elem. Size (m)	#Elem	$w*10^2$ (RE%)	$w_{Reedy}^*$ 10 <sup>2</sup>	f <sub>fundam.</sub> (RE%)	f <sub>Reedy</sub>	S <sub>xx</sub> (RE%)	S <sub>xx</sub> <sup>Reedy</sup>	S <sub>yy</sub> (RE%)	S <sub>yy</sub> <sup>Reedy</sup>	S <sub>xy</sub> (RE%)	S <sub>xy</sub> <sup>Reedy</sup>
<b>1</b>	100	0.8016 (4.19%)	0,7694	14.08 (0.57%)	14	0.7897 (1.84%)	0,8045	0.4205 (5.98%)	0,3968	0.0403 (3.94%)	0,042
<b>0.5</b>	400	0.8034 (4.42%)	0,7694	13.97 (0.25%)	14	0.7951 (1.17%)	0,8045	0.4176 (5.25%)	0,3968	0.0421 (0.14%)	0,042
<b>0.3(3)</b>	900	0.8037 (4.46%)	0,7694	13.94 (0.39%)	14	0.7961 (1.05%)	0,8045	0.4172 (5.15%)	0,3968	0.0425 (1.24%)	0,042
<b>0.25</b>	1600	0.8038 (4.47%)	0,7694	13.94 (0.45%)	14	0.7964 (1.01%)	0,8045	0.4171 (5.12%)	0,3968	0.0427 (1.72%)	0,042
<b>0.2</b>	2500	0.8039 (4.48%)	0,7694	13.93 (0.47%)	14	0.7966 (0.99%)	0,8045	0.4170 (5.10%)	0,3968	0.0428 (1.97%)	0,042
<b>0.16(6)</b>	3600	0.8039 (4.48%)	0,7694	13.93 (0.48%)	14	0.7967 (0.98%)	0,8045	0.4170 (5.10%)	0,3968	0.0429 (2.12%)	0,042
<b>0.142857</b>	4900	0.8039 (4.49%)	0,7694	13.93 (0.49%)	14	0.7967 (0.97%)	0,8045	0.4170 (5.10%)	0,3968	0.0429 (2.22%)	0,042
<b>0.125</b>	6400	0.8039 (4.49%)	0,7694	13.93 (0.50%)	14	0.7967 (0.97%)	0,8045	0.4170 (5.10%)	0,3968	0.0430 (2.29%)	0,042
<b>0.1(1)</b>	8100	0.8039 (4.49%)	0,7694	13.93 (0.50%)	14	0.7968 (0.96%)	0,8045	0.4170 (5.09%)	0,3968	0.0430 (2.34%)	0,042
<b>0.1</b>	10000	0.8039 (4.49%)	0,7694	13.93 (0.50%)	14	0.7968 (0.96%)	0,8045	0.4170 (5.09%)	0,3968	0.0430 (2.38%)	0,042
<b>0.05</b>	40000	0.8039 (4.49%)	0,7694	13.93 (0.51%)	14	0.7968 (0.95%)	0,8045	0.4170 (5.09%)	0,3968	0.0431 (2.52%)	0,042

Tabela 7.68 - Resultados do modelo SS1 com  $a/h$  igual a 20 e sequência C, das análises estática e dinâmica, com RE% face aos valores apresentados por (Reddy 2004) (Parte 2)

Elem. Size (m)	#Elem.	Equações Constitutivas			
		$S_{xz}$ (RE%)	$S_{xz}^{\text{Reddy}}$	$S_{yz}$ (RE%)	$S_{yz}^{\text{Reddy}}$
<b>1</b>	100	0.5775 (30.47%)	0,8305	0.4129 (27.91%)	0,3228
<b>0.5</b>	400	0.6062 (27.01%)	0,8305	0.4671 (44.71%)	0,3228
<b>0.3(3)</b>	900	0.6163 (25.79%)	0,8305	0.4869 (50.83%)	0,3228
<b>0.25</b>	1600	0.6214 (25.17%)	0,8305	0.4971 (53.99%)	0,3228
<b>0.2</b>	2500	0.6246 (24.80%)	0,8305	0.5033 (55.91%)	0,3228
<b>0.16(6)</b>	3600	0.6267 (24.54%)	0,8305	0.5075 (57.21%)	0,3228
<b>0.142857</b>	4900	0.6282 (24.36%)	0,8305	0.5105 (58.15%)	0,3228
<b>0.125</b>	6400	0.6293 (24.23%)	0,8305	0.5128 (58.85%)	0,3228
<b>0.1(1)</b>	8100	0.6302 (24.12%)	0,8305	0.5145 (59.40%)	0,3228
<b>0.1</b>	10000	0.6309 (24.03%)	0,8305	0.5160 (59.84%)	0,3228
<b>0.05</b>	40000	0.6341 (23.65%)	0,8305	0.5224 (61.84%)	0,3228

### C.6) Relação $a/h$ 100 e Sequência B [0°/90°]

Tabela 7.69 – Resultados do modelo SS1 com  $a/h$  igual a 100 e sequência B, das análises estática e dinâmica, com RE % face aos valores apresentados por (Reddy 2004)

Elem. Size (m)	#Elem	$w*10^2$ (RE%)	$W^{Reedy*} 10^2$	f <sub>fundam.</sub> (RE%)	f <sub>Reedy</sub>	$S_{yy}$ (RE%)	$S_{yy}^{Reedy}$	$S_{xy}$ (RE%)	$S_{xy}^{Reedy}$	$S_{xz}$ (RE%)	$S_{xz}^{Reedy}$
<b>1</b>	100	1.6886 (0.56%)	1,698	9.80 (1.20%)	9,687	1.0712 (0.46%)	1,0761	0.0897 (3.89%)	0,0933	0.7005 (20.51%)	0,5813
<b>0.5</b>	400	1.6957 (0.14%)	1,698	9.72 (0.30%)	9,687	1.0750 (0.10%)	1,0761	0.0923 (1.10%)	0,0933	0.7504 (29.09%)	0,5813
<b>0.3(3)</b>	900	1.6970 (0.06%)	1,698	9.70 (0.13%)	9,687	1.0757 (0.04%)	1,0761	0.0929 (0.44%)	0,0933	0.7681 (32.14%)	0,5813
<b>0.25</b>	1600	1.6974 (0.03%)	1,698	9.69 (0.08%)	9,687	1.0759 (0.02%)	1,0761	0.0931 (0.18%)	0,0933	0.7772 (33.70%)	0,5813
<b>0.2</b>	2500	1.6976 (0.02%)	1,698	9.69 (0.05%)	9,687	1.0760 (0.01%)	1,0761	0.0933 (0.05%)	0,0933	0.7828 (34.66%)	0,5813
<b>0.16(6)</b>	3600	1.6977 (0.02%)	1,698	9.69 (0.04%)	9,687	1.0761 (0.00%)	1,0761	0.0933 (0.03%)	0,0933	0.7865 (35.29%)	0,5813
<b>0.142857</b>	4900	1.6978 (0.01%)	1,698	9.69 (0.03%)	9,687	1.0761 (0.00%)	1,0761	0.0934 (0.08%)	0,0933	0.7891 (35.75%)	0,5813
<b>0.125</b>	6400	1.6978 (0.01%)	1,698	9.69 (0.02%)	9,687	1.0761 (0.00%)	1,0761	0.0934 (0.11%)	0,0933	0.7911 (36.10%)	0,5813
<b>0.1(1)</b>	8100	1.6979 (0.01%)	1,698	9.69 (0.02%)	9,687	1.0761 (0.00%)	1,0761	0.0934 (0.14%)	0,0933	0.7927 (36.37%)	0,5813
<b>0.1</b>	10000	1.6979 (0.01%)	1,698	9.69 (0.02%)	9,687	1.0761 (0.00%)	1,0761	0.0935 (0.19%)	0,0933	0.7939 (36.58%)	0,5813
<b>0.05</b>	40000	1.9451 (0.09%)	1,9468	9.69 (0.01%)	9,687	1.0762 (0.01%)	1,0761	0.0935 (0.23%)	0,0933	0.7996 (37.56%)	0,5813

### C.7) Relação $a/h$ 100 e Sequência C [0°/90°]<sub>s</sub>

Tabela 7.70 - Resultados do modelo SS1 com  $a/h$  igual a 100 e sequência C, das análises estática e dinâmica, com RE % face aos valores apresentados por (Reddy 2004) (Parte 1)

Elem. Size (m)	#Elem	$w*10^2$ (RE%)	$w_{Reddy}*10^2$	$f_{fundam.}$ (RE%)	$f_{Reddy}$	$S_{xx}$ (RE%)	$S_{xx}^{Reddy}$	$S_{yy}$ (RE%)	$S_{yy}^{Reddy}$	$S_{xy}$ (RE%)	$S_{xy}^{Reddy}$
<b>1</b>	100	0.6814 (0.27%)	0,6833	15.35 (1.00%)	15,2	0.8159 (3.10%)	0,842	0.3645 (2.44%)	0,3558	0.0377 (4.78%)	0,0396
<b>0.5</b>	400	0.6839 (0.09%)	0,6833	15.21 (0.09%)	15,2	0.8209 (2.51%)	0,842	0.3655 (2.74%)	0,3558	0.0391 (1.30%)	0,0396
<b>0.3(3)</b>	900	0.6844 (0.16%)	0,6833	15.19 (0.08%)	15,2	0.8218 (2.40%)	0,842	0.3661 (2.91%)	0,3558	0.0394 (0.45%)	0,0396
<b>0.25</b>	1600	0.6845 (0.18%)	0,6833	15.18 (0.14%)	15,2	0.8221 (2.36%)	0,842	0.3664 (2.97%)	0,3558	0.0396 (0.11%)	0,0396
<b>0.2</b>	2500	0.6846 (0.19%)	0,6833	15.17 (0.17%)	15,2	0.8223 (2.35%)	0,842	0.3665 (2.99%)	0,3558	0.0396 (0.07%)	0,0396
<b>0.16(6)</b>	3600	0.6847 (0.20%)	0,6833	15.17 (0.18%)	15,2	0.8223 (2.34%)	0,842	0.3665 (3.00%)	0,3558	0.0397 (0.17%)	0,0396
<b>0.142857</b>	4900	0.6847 (0.20%)	0,6833	15.17 (0.19%)	15,2	0.8224 (2.33%)	0,842	0.3665 (3.01%)	0,3558	0.0397 (0.24%)	0,0396
<b>0.125</b>	6400	0.6847 (0.20%)	0,6833	15.17 (0.20%)	15,2	0.8224 (2.33%)	0,842	0.3665 (3.00%)	0,3558	0.0397 (0.29%)	0,0396
<b>0.1(1)</b>	8100	0.6847 (0.21%)	0,6833	15.17 (0.20%)	15,2	0.8224 (2.32%)	0,842	0.3665 (3.00%)	0,3558	0.0397 (0.32%)	0,0396
<b>0.1</b>	10000	0.6847 (0.21%)	0,6833	15.17 (0.20%)	15,2	0.8224 (2.32%)	0,842	0.3665 (3.01%)	0,3558	0.0397 (0.35%)	0,0396
<b>0.05</b>	40000	0.6847 (0.21%)	0,6833	15.17 (0.21%)	15,2	0.8225 (2.32%)	0,842	0.3665 (3.01%)	0,3558	0.0398 (0.44%)	0,0396

Tabela 7.71 - Resultados do modelo SS1 com  $a/h$  igual a 100 e sequência C, das análises estática e dinâmica, com RE% face aos valores apresentados por (Reddy 2004) (Parte 2)

Elem. Size (m)	#Elem.	Equações Constitutivas			
		$S_{xz}$ (RE%)	$S_{xz}^{\text{Reddy}}$	$S_{yz}$ (RE%)	$S_{yz}^{\text{Reddy}}$
<b>1</b>	100	0.5899 (29.94%)	0,842	0.3913 (24.63%)	0,314
<b>0.5</b>	400	0.6184 (26.55%)	0,842	0.4460 (42.04%)	0,314
<b>0.3(3)</b>	900	0.6285 (25.35%)	0,842	0.4658 (48.36%)	0,314
<b>0.25</b>	1600	0.6337 (24.74%)	0,842	0.4761 (51.62%)	0,314
<b>0.2</b>	2500	0.6368 (24.37%)	0,842	0.4823 (53.60%)	0,314
<b>0.16(6)</b>	3600	0.6389 (24.12%)	0,842	0.4865 (54.94%)	0,314
<b>0.142857</b>	4900	0.6404 (23.95%)	0,842	0.4895 (55.90%)	0,314
<b>0.125</b>	6400	0.6415 (23.81%)	0,842	0.4918 (56.63%)	0,314
<b>0.1(1)</b>	8100	0.6424 (23.71%)	0,842	0.4936 (57.19%)	0,314
<b>0.1</b>	10000	0.6431 (23.62%)	0,842	0.4950 (57.65%)	0,314
<b>0.05</b>	40000	0.6463 (23.24%)	0,842	0.5015 (59.70%)	0,314

### C.8) Relação $a/h$ 100 e Sequência D $[0^\circ/90^\circ]_4$

Tabela 7.72 – Resultados do modelo SS1 com  $a/h$  igual a 100 e sequência D, das análises estática e dinâmica, com RE% face aos valores apresentados por (Reddy 2004)

Elem. Size (m)	#Elem	$w*10^2$ (RE%)	$W_{Reedy}*$ $10^2$	$f_{fundam.}$ (RE%)	$f_{Reedy}$	$S_{yy}$ (RE%)	$S_{yy}^{Reedy}$	$S_{xy}$ (RE%)	$S_{xy}^{Reedy}$	$S_{xz}$ (RE%)	$S_{xz}^{Reedy}$
<b>1</b>	100	0.7140 (0.49%)	0,7175	15.08 (1.16%)	14,912	0.7452 (0.56%)	0,7494	0.0376 (3.82%)	0,0391	0.4784 (18.32%)	0,5857
<b>0.5</b>	400	0.7173 (0.03%)	0,7175	14.95 (0.24%)	14,912	0.7485 (0.13%)	0,7494	0.0387 (1.04%)	0,0391	0.5125 (12.50%)	0,5857
<b>0.3(3)</b>	900	0.7178 (0.05%)	0,7175	14.92 (0.07%)	14,912	0.7490 (0.05%)	0,7494	0.0390 (0.37%)	0,0391	0.5246 (10.44%)	0,5857
<b>0.25</b>	1600	0.7181 (0.08%)	0,7175	14.91 (0.02%)	14,912	0.7492 (0.02%)	0,7494	0.0391 (0.11%)	0,0391	0.5307 (9.38%)	0,5857
<b>0.2</b>	2500	0.7181 (0.09%)	0,7175	14.91 (0.01%)	14,912	0.7493 (0.01%)	0,7494	0.0391 (0.03%)	0,0391	0.5345 (8.74%)	0,5857
<b>0.16(6)</b>	3600	0.7182 (0.10%)	0,7175	14.91 (0.03%)	14,912	0.7494 (0.00%)	0,7494	0.0391 (0.12%)	0,0391	0.5370 (8.31%)	0,5857
<b>0.1428 57</b>	4900	0.7182 (0.10%)	0,7175	14.91 (0.03%)	14,912	0.7494 (0.00%)	0,7494	0.0392 (0.17%)	0,0391	0.5388 (8.00%)	0,5857
<b>0.125</b>	6400	0.7183 (0.10%)	0,7175	14.91 (0.04%)	14,912	0.7494 (0.00%)	0,7494	0.0392 (0.21%)	0,0391	0.5402 (7.77%)	0,5857
<b>0.1(1)</b>	8100	0.7183 (0.11%)	0,7175	14.91 (0.04%)	14,912	0.7494 (0.01%)	0,7494	0.0392 (0.23%)	0,0391	0.5413 (7.59%)	0,5857
<b>0.1</b>	10000	0.7183 (0.11%)	0,7175	14.90 (0.05%)	14,912	0.7495 (0.01%)	0,7494	0.0392 (0.26%)	0,0391	0.5421 (7.44%)	0,5857
<b>0.05</b>	40000	0.7183 (0.11%)	0,7175	14.90 (0.06%)	14,912	0.7495 (0.01%)	0,7494	0.0392 (0.33%)	0,0391	0.5460 (6.78%)	0,5857

## Apêndice D – Funções de teste

As funções de teste apresentadas foram extraídas das obra de (Mishra 2006), (Silagadze 2004) e (Shaw et al. 2011).

### D.1) Função “Test Tube Holder”

Constrangimento:  $-10 \leq x_i \leq 10$ ,  $i=1,2$

O mínimo global é:  $f_{min}(X^*) = -10.873$

Os valores ótimos são:  $x_i^* = (-\pi 2, 0)$

$$f(\bar{x}_i) = -4 * \left| \sin x_1 \cos x_2 e^{\left| \cos\left(\frac{x_1^2 + x_2^2}{200}\right) \right|} \right| \quad (7.26)$$

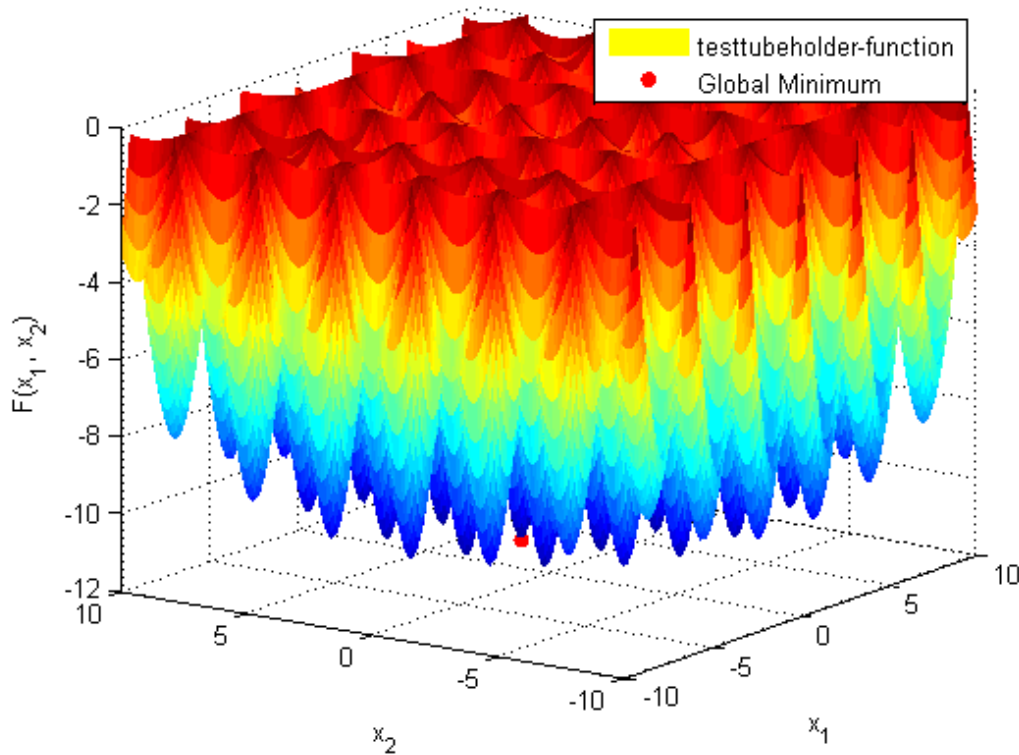


Figura 7.28 – Representação gráfica da função “Test Tube Holder” e do mínimo global respectivo

## D.2) Função “Holder Table”

Constrangimento:  $-10 \leq x_i \leq 10$ ,  $i=1,2$

O mínimo global é:  $f_{min}(X^*) = -19.20850256788675$

Os valores ótimos são:  $x_i^* = (8.055023472141116, 9.664590028909654)$

$x_i^* = (-8.055023472141116, 9.664590028909654)$

$x_i^* = (8.055023472141116, -9.664590028909654)$

$x_i^* = (-8.055023472141116, -9.664590028909654)$

$$f(\bar{x}_i) = - \left| \sin x_1 \cos x_2 e^{\left| 1 - \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{\pi} \right|} \right| \quad (7.27)$$

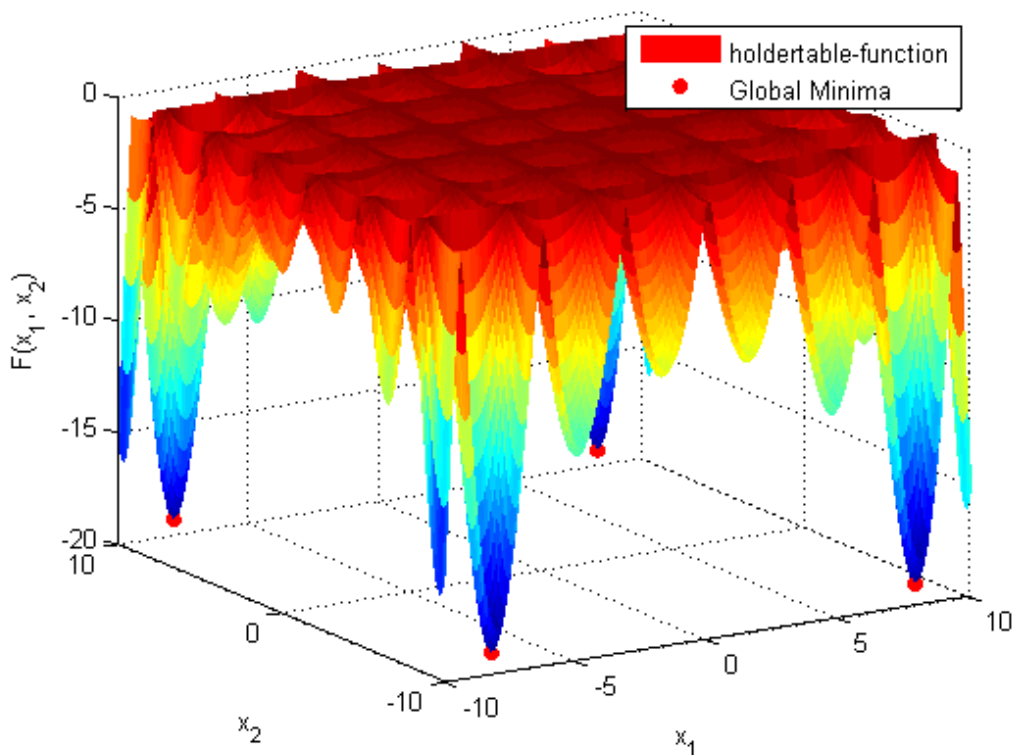


Figura 7.29 – Representação gráfica da função “Holder Table” e do mínimo global respectivo

Esta função contém múltiplos mínimos locais e quatro mínimos globais.

### D.3) Função “Bird”

Constrangimento:  $-2\pi \leq x_i \leq 2\pi$ ,  $i=1,2$

O mínimo global é:  $f_{min}(X^*) = -106.764537$

Os valores ótimos são:  $x_i^* = (4.701055751981055, 3.152946019601391)$

$x_i^* = (-1.582142172055011, -3.130246799635430)$

$$f(\bar{x}_i) = \sin(x_1) \cdot e^{[1-\cos(x_2)]^2} + \cos(x_2) \cdot e^{[1-\sin(x_2)]^2} + (x_1 - x_2)^2 \quad (7.28)$$

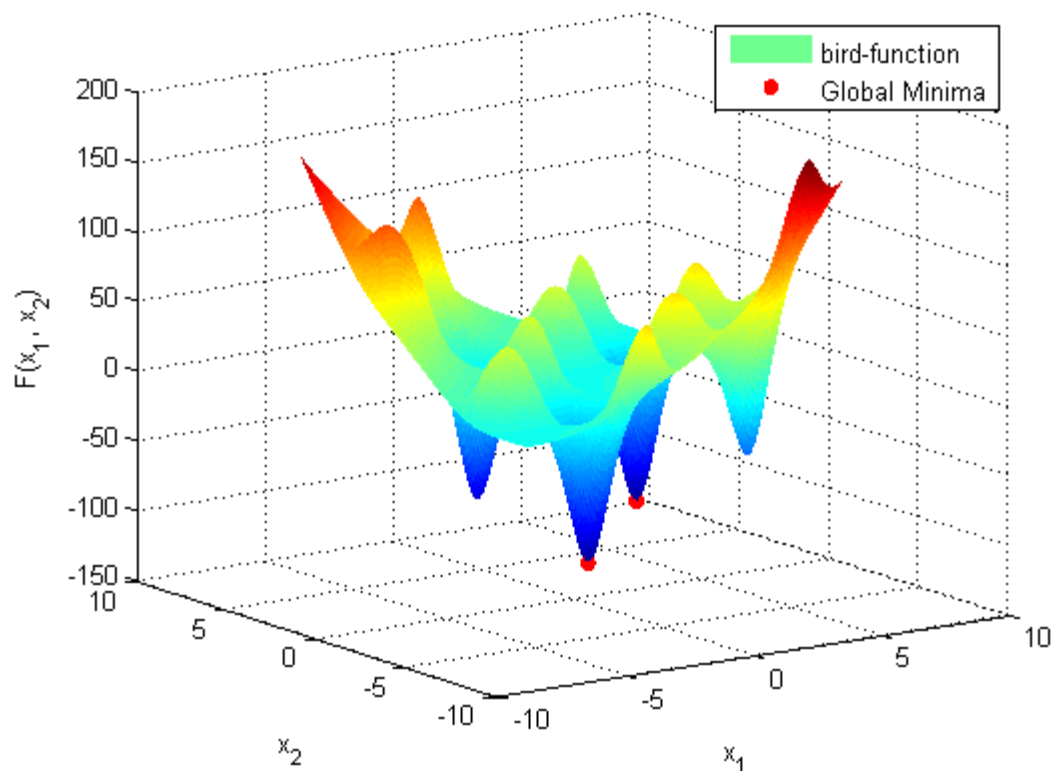


Figura 7.30 - Representação gráfica da função “Bird” e do mínimo global respetivo

### D.4) Função “Modified Schaffer’s No.1”

Constrangimento:  $-100 \leq x_i \leq 100$ ,  $i=1,2$

O mínimo global é:  $f_{min}(X^*) = 0.1$

Os valores ótimos são:  $x_i^* = (0, 0)$

$$f(\bar{x}_i) = 0.5 + \frac{[\sin(x_1^2 + x_2^2)]^2 - 0.5}{[1 + 0.001 \cdot (x_1^2 + x_2^2)]^2} + 0.1 \quad (7.29)$$

À fórmula apresentada anteriormente foi somado 0.1 somente para evitar que o cálculo do erro relativo máximo fosse um valor infinitesimal devido à divisão numérica por zero.

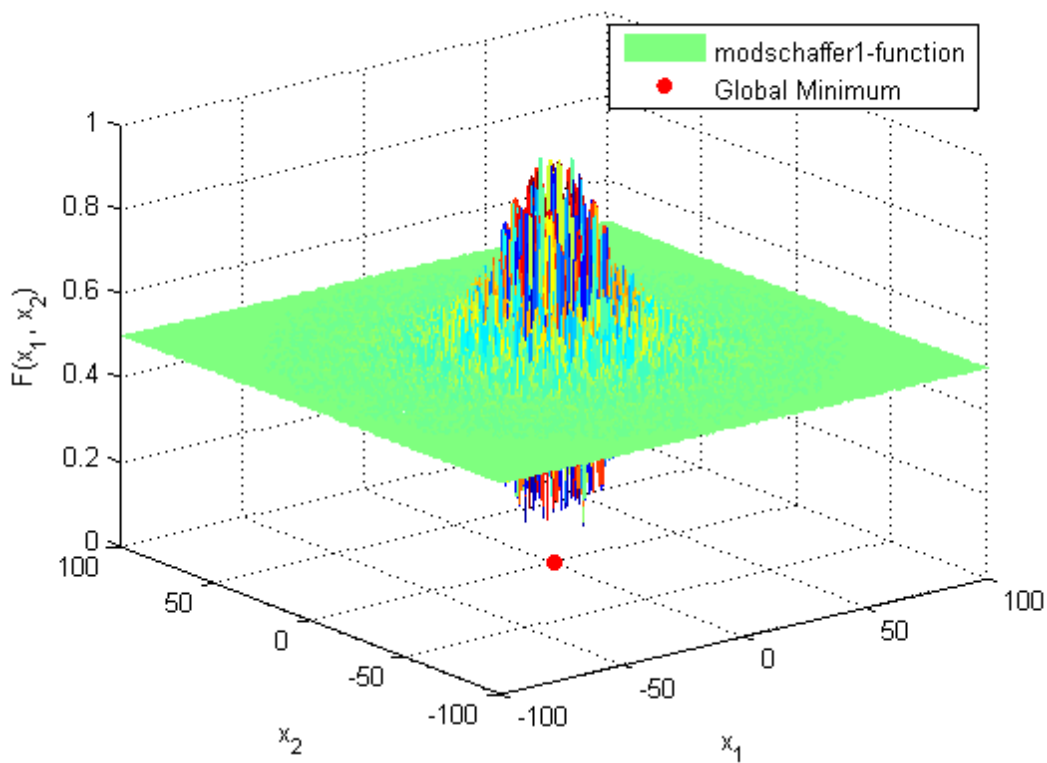


Figura 7.31 - Representação gráfica da função “*Modified Schaffer’s No.1*” e do mínimo global respetivo

### D.5) Função “Modified Schaffer’s No.2”

Constrangimento:  $-100 \leq x_i \leq 100$ ,  $i=1,2$

O mínimo global é:  $f_{min}(X^*) = 0.1$

Os valores ótimos são:  $x_i^* = (0, 0)$

$$f(\bar{x}_i) = 0.5 + \frac{[\sin(x_1^2 - x_2^2)]^2 - 0.5}{[1 + 0.001 \cdot (x_1^2 + x_2^2)]^2} + 0.1 \quad (7.30)$$

À fórmula apresentada anteriormente foi somado 0.1 somente para evitar que o cálculo do erro relativo máximo fosse um valor infinitesimal devido à divisão numérica por zero.

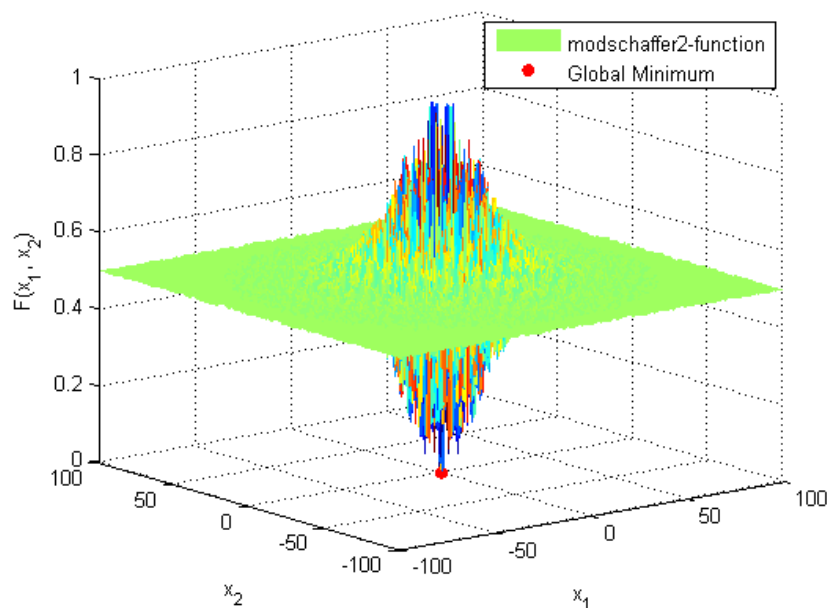


Figura 7.32 - Representação gráfica da função “Modified Schaffer’s No.2” e do mínimo global respectivo

### D.6) Função “Rosenbrock”

Constrangimento:  $-5 \leq x_i \leq 5$ ,  $i=1,2$

O mínimo global é:  $f_{min}(X^*) = 0.1$

Os valores ótimos são:  $x_i^* = (1, 1)$

$$f(\bar{x}_i) = [(1 - x_1)^2 + 100 \cdot (x_2 - x_1^2)^2] + 0.1 \quad (7.31)$$

À fórmula apresentada anteriormente foi somado 0.1 somente para evitar que o cálculo do erro relativo máximo fosse um valor infinitesimal devido à divisão numérica por zero.

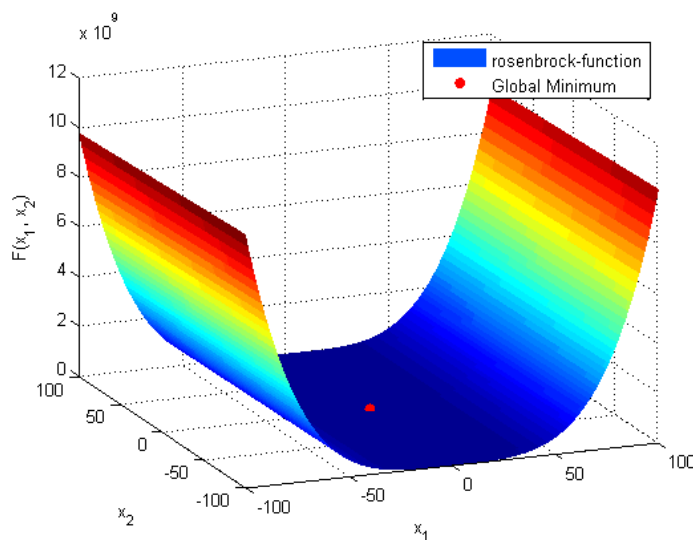


Figura 7.33 - Representação gráfica da função “Rosenbrock” e do mínimo global respetivo

### D.7) Função “Hemmilblau”

Constrangimento:  $-5 \leq x_i \leq 5$ ,  $i=1,2$

O mínimo global é:  $f_{min}(X^*) = 0.1$

Os valores ótimos são:  $x_i^* = (3, 2)$

$$x_i^* = (-2.805118, 3.131312)$$

$$x_i^* = (-3.779310, -3.283186)$$

$$x_i^* = (3.584428, -1.848126)$$

$$f(\bar{x}_i) = [(x_1^2 + x_2 - 11)^2 + (x_1 - x_2^2 - 7)^2] + 0.1 \quad (7.32)$$

À fórmula apresentada anteriormente foi somado 0.1 somente para evitar que o cálculo do erro relativo máximo fosse um valor infinitesimal devido à divisão numérica por zero.

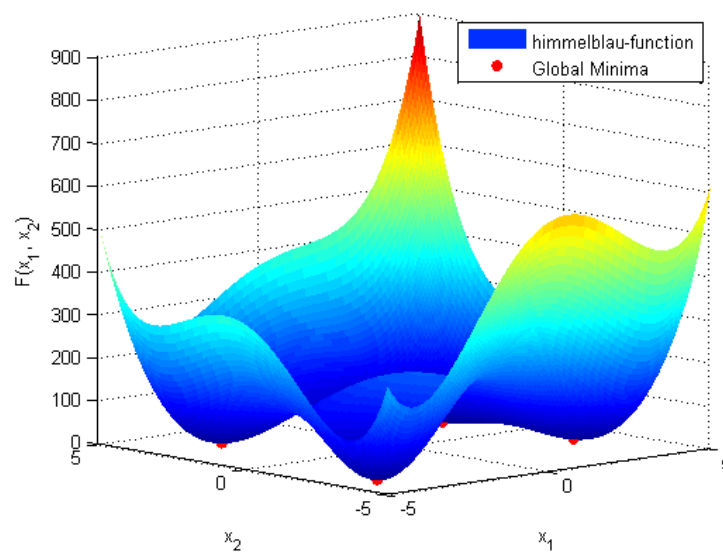


Figura 7.34 - Representação gráfica da função “Himmelblau” e do mínimo global respectivo

### D.8) Função “Rastrigin”

Constrangimento:  $-5 \leq x_i \leq 5$ ,  $i=1,2$

O mínimo global é:  $f_{min}(X^*) = 0.1$

Os valores ótimos são:  $x_i^* = (0, 0)$

$$f(\bar{x}_i) = 20 + (x_1^2 + x_2^2) - 10 \cdot [\cos(2\pi \cdot x_1) + \cos(2\pi \cdot x_2)] + 0.1 \quad (7.33)$$

À fórmula apresentada anteriormente foi somado 0.1 somente para evitar que o cálculo do erro relativo máximo fosse um valor infinitesimal devido à divisão numérica por zero.

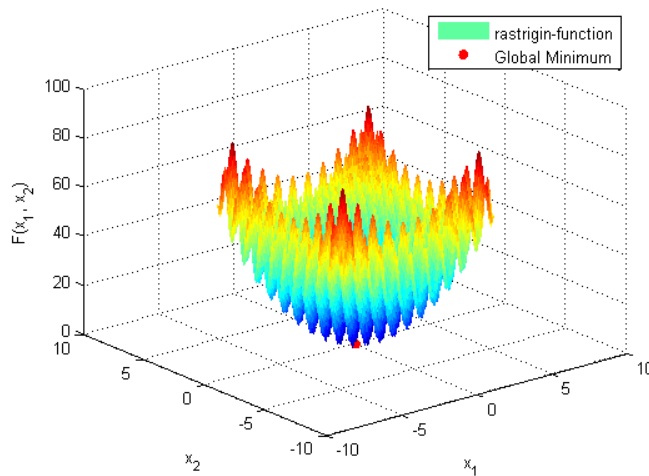


Figura 7.35 - Representação gráfica da função “Rastrigin” e do mínimo global respetivo

### D.9) Função “Chichinadze”

Constrangimento:  $-30 \leq x_i \leq 30$ ,  $i=1,2$

O mínimo global é:  $f_{min}(X^*) = -43.3159$

Os valores ótimos são:  $x_i^* = (5.90133, 0.5)$

$$f(\bar{x}_i) = x_1^2 - 12x_1 + 11 + 10 \cos\left(\frac{1}{2}x_1 \cdot \pi\right) + 8 \sin(5 \cdot x_1 \cdot \pi) - \sqrt{\frac{1}{5}} \cdot e^{[-(0.5 \cdot (x_2 - 0.5)^2)]} \quad (7.34)$$

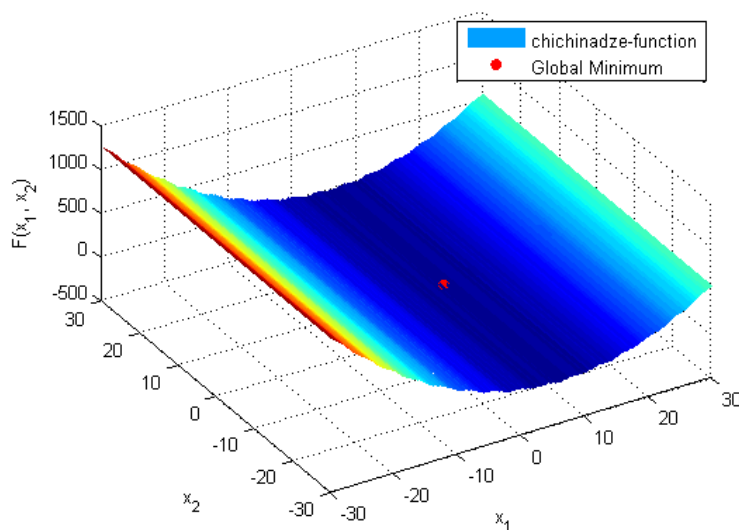


Figura 7.36 - Representação gráfica da função “Chichinadze” e do mínimo global respetivo

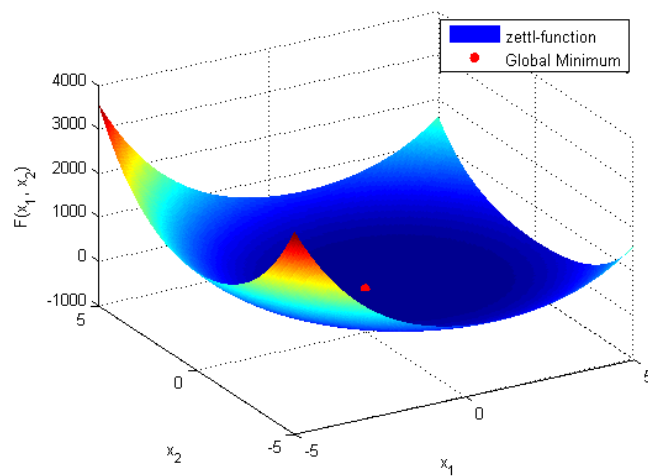
### D.10) Função “Zettl”

Constrangimento:  $-5 \leq x_i \leq 5$ ,  $i=1,2$

O mínimo global é:  $f_{min}(X^*) = -0.003791$

Os valores ótimos são:  $x_i^* = (-0.0299, 0)$

$$f(\bar{x}_i) = \frac{1}{4}x_1 + (x_1^2 + x_2^2 - 2x_1)^2 \quad (7.35)$$



**Figura 7.37 - Representação gráfica da função “Zettl” e do mínimo global respetivo**

## Apêndice E – Resultados da minimização das funções de teste

### E.1) Resultados da minimização da função “Bird”

Tabela 7.73 - Resultados da minimização da função de teste “Bird”, com *seed* variável

# CORRIDA	ÓTIMO GLOBAL	ÓTIMO GLOBAL (PSO 1)		ÓTIMO GLOBAL (PSO 2)	
	Valor	Valor	Re %	Valor	Re %
1	-106,764537	-100,5360947	-5,8%	-106,6175074	-0,1%
2	-106,764537	-106,3387935	-0,4%	-91,46354195	-14,3%
3	-106,764537	-106,3823531	-0,4%	-103,4315077	-3,1%
4	-106,764537	-106,5682256	-0,2%	-102,5882951	-3,9%
5	-106,764537	-106,4384459	-0,3%	-105,6443955	-1,0%
6	-106,764537	-105,9649347	-0,7%	-103,3865869	-3,2%
7	-106,764537	-105,3873034	-1,3%	-65,79900955	-38,4%
8	-106,764537	-89,67118534	-16,0%	-74,24571637	-30,5%
9	-106,764537	-103,4913856	-3,1%	-105,5225507	-1,2%
10	-106,764537	-105,6576341	-1,0%	-105,3865075	-1,3%
11	-106,764537	-106,6773152	-0,1%	-105,7645867	-0,9%
12	-106,764537	-97,89749505	-8,3%	-82,75544271	-22,5%
		<b> Máx RE </b>	<b>16,0%</b>	<b> Máx RE </b>	<b>38,4%</b>

Tabela 7.74 - Resultados da minimização da função de teste “Bird”, com *seed* fixa

# SEED FIXA	ÓTIMO GLOBAL	ÓTIMO GLOBAL (PSO 1)		ÓTIMO GLOBAL (PSO 2)	
	Valor	Valor	Re %	Valor	Re %
RNG(1)	-106,764537	-101,97	-4,5%	-90,52583196	-15,2%
RNG(2)	-106,764537	-104,20	-2,4%	-69,983556	-34,5%
		<b> Máx RE </b>	<b>4,5%</b>	<b> Máx RE </b>	<b>34,5%</b>

Tabela 7.75 – Resultados da minimização da função de teste “Bird”, com *seed* variável e com reinicializações

# CORRIDA	ÓTIMO GLOBAL	ÓTIMO GLOBAL (PSO 1)		ÓTIMO GLOBAL (PSO 2)	
	Valor	Valor	Re %	Valor	Re %
1	-106,764537	-106,764536	0,0%	-106,760	0,0%
2	-106,764537	-106,764528	0,0%	-106,663	-0,1%
3	-106,764537	-106,764537	0,0%	-106,758	0,0%
4	-106,764537	-106,764537	0,0%	-106,627	-0,1%
5	-106,764537	-106,764536	0,0%	-106,760	0,0%
6	-106,764537	-106,764537	0,0%	-106,761	0,0%
7	-106,764537	-106,764535	0,0%	-106,764	0,0%
8	-106,764537	-106,764537	0,0%	-106,755	0,0%
9	-106,764537	-106,764527	0,0%	-106,760	0,0%
10	-106,764537	-106,764537	0,0%	-106,764	0,0%
11	-106,764537	-106,764535	0,0%	-106,762	0,0%
12	-106,764537	-106,764534	0,0%	-106,764	0,0%
		<b>[Máx RE]</b>	<b>0,0%</b>	<b>[Máx RE]</b>	<b>0,1%</b>

Tabela 7.76 - Resultados da minimização da função de teste “Bird”, com *seed* fixa e com reinicializações

# SEED FIXA	ÓTIMO GLOBAL	ÓTIMO GLOBAL (PSO 1)		ÓTIMO GLOBAL (PSO 2)	
	Valor	Valor	Re %	Valor	Re %
RNG(1)	-106,764537	-106,764536	0,0%	-106,763	0,0%
RNG(2)	-106,764537	-106,764537	0,0%	-106,682	-0,1%
		<b>[Máx RE]</b>	<b>0,0%</b>	<b>[Máx RE]</b>	<b>0,1%</b>

## E.2) Resultados da minimização da função “Mod. Schaffer’s No.1”

Tabela 7.77 - Resultados da minimização da função de teste “*Modified Schaffer’s No.1*”, com *seed* variável

# CORRIDA	ÓTIMO GLOBAL	ÓTIMO GLOBAL (PSO 1)		ÓTIMO GLOBAL (PSO 2)	
	Valor	Valor	Re %	Valor	Re %
1	0,1	0,117063649	17%	0,1	0,0%
2	0,1	0,106441722	6,4%	0,1	0,0%
3	0,1	0,179177116	79,2%	0,1	0,0%
4	0,1	0,166096466	66,1%	0,1	0,0%
5	0,1	0,124901225	24,9%	0,1	0,0%
6	0,1	0,127149648	27,1%	0,1	0,0%
7	0,1	0,187394115	87,4%	0,1	0,0%
8	0,1	0,162031034	62,0%	0,1	0,0%
9	0,1	0,121933264	21,9%	0,1	0,0%
10	0,1	0,209115238	109,1%	0,1	0,0%
11	0,1	0,177302341	77,3%	0,1	0,0%
12	0,1	0,121101625	21,1%	0,1	0,0%
		<b>[Máx RE]</b>	<b>109,1%</b>	<b>[Máx RE]</b>	<b>0,0%</b>

Tabela 7.78 - Resultados da minimização da função de teste “*Modified Schaffer’s No.1*”, com *seed* fixa

# SEED FIXA	ÓTIMO GLOBAL	ÓTIMO GLOBAL (PSO 1)		ÓTIMO GLOBAL (PSO 2)	
	Valor	Valor	Re %	Valor	Re %
RNG(1)	0,1	0,226561339	126,6%	0,1	0,0%
RNG(2)	0,1	0,118411544	18,4%	0,1	0,0%
		<b>[Máx RE]</b>	<b>126,6%</b>	<b>[Máx RE]</b>	<b>0,0%</b>

Tabela 7.79 – Resultados da minimização da função de teste “*Modified Schaffer’s No.1*”, com *seed* variável e com reinicializações

# CORRIDA	ÓTIMO GLOBAL	ÓTIMO GLOBAL (PSO 1)		ÓTIMO GLOBAL (PSO 2)	
	Valor	Valor	Re %	Valor	Re %
1	0,1	0,1	0,0%	0,1	0,0%
2	0,1	0,100000057	0,0%	0,1	0,0%
3	0,1	0,103185779	3,2%	0,1	0,0%
4	0,1	0,100027323	0,0%	0,1	0,0%
5	0,1	0,100564436	0,6%	0,1	0,0%
6	0,1	0,1	0,0%	0,1	0,0%
7	0,1	0,1	0,0%	0,1	0,0%
8	0,1	0,100000005	0,0%	0,1	0,0%
9	0,1	0,1	0,0%	0,1	0,0%
10	0,1	0,100012388	0,0%	0,1	0,0%
11	0,1	0,100097992	0,1%	0,1	0,0%
12	0,1	0,100000136	0,0%	0,1	0,0%
		<b> Máx RE </b>	<b>3,2%</b>	<b> Máx RE </b>	<b>0,0%</b>

Tabela 7.80 - Resultados da minimização da função de teste “*Modified Schaffer’s No.1*”, com *seed* fixa e com reinicializações

# <i>SEED</i> FIXA	ÓTIMO GLOBAL	ÓTIMO GLOBAL (PSO 1)		ÓTIMO GLOBAL (PSO 2)	
	Valor	Valor	Re %	Valor	Re %
RNG(1)	0,1	0,1	0,0%	0,1	0,0%
RNG(2)	0,1	0,1	0,0%	0,1	0,0%
		<b> Máx RE </b>	<b>0,0%</b>	<b> Máx RE </b>	<b>0,0%</b>

### E.3) Resultados da minimização da função “Mod. Schaffer’s No.2”

Tabela 7.81 - Resultados da minimização da função de teste “*Modified Schaffer’s No.2*”, com *seed* variável

# CORRIDA	ÓTIMO GLOBAL	ÓTIMO GLOBAL (PSO 1)		ÓTIMO GLOBAL (PSO 2)	
	Valor	Valor	Re %	Valor	Re %
1	0,1	0,137324893	37%	0,1	0,0%
2	0,1	0,150896811	50,9%	0,1	0,0%
3	0,1	0,128470012	28,5%	0,1	0,0%
4	0,1	0,136895034	36,9%	0,1	0,0%
5	0,1	0,105486685	5,5%	0,1	0,0%
6	0,1	0,12084524	20,8%	0,1	0,0%
7	0,1	0,197306747	97,3%	0,1	0,0%
8	0,1	0,10318385	3,2%	0,1	0,0%
9	0,1	0,169931482	69,9%	0,1	0,0%
10	0,1	0,14821365	48,2%	0,1	0,0%
11	0,1	0,116833792	16,8%	0,1	0,0%
12	0,1	0,125398084	25,4%	0,1	0,0%
		<b> Máx RE </b>	<b>97,3%</b>	<b> Máx RE </b>	<b>0,0%</b>

Tabela 7.82 - Resultados da minimização da função de teste “*Modified Schaffer’s No.2*”, com *seed* fixa

# SEED FIXA	ÓTIMO GLOBAL	ÓTIMO GLOBAL (PSO 1)		ÓTIMO GLOBAL (PSO 2)	
	Valor	Valor	Re %	Valor	Re %
RNG(1)	0,1	0,131506556	31,5%	0,1	0,0%
RNG(2)	0,1	0,106048504	6,0%	0,1	0,0%
		<b> Máx RE </b>	<b>31,5%</b>	<b> Máx RE </b>	<b>0,0%</b>

Tabela 7.83 – Resultados da minimização da função de teste “*Modified Schaffer’s No.2*”, com *seed* variável e com reinicializações

# CORRIDA	ÓTIMO GLOBAL	ÓTIMO GLOBAL (PSO 1)		ÓTIMO GLOBAL (PSO 2)	
	Valor	Valor	Re %	Valor	Re %
1	0,1	0,1	0,0%	0,1	0,0%
2	0,1	0,1	0,0%	0,1	0,0%
3	0,1	0,1	0,0%	0,1	0,0%
4	0,1	0,1	0,0%	0,1	0,0%
5	0,1	0,1	0,0%	0,1	0,0%
6	0,1	0,1	0,0%	0,1	0,0%
7	0,1	0,1	0,0%	0,1	0,0%
8	0,1	0,1	0,0%	0,1	0,0%
9	0,1	0,1	0,0%	0,1	0,0%
10	0,1	0,1	0,0%	0,1	0,0%
11	0,1	0,1	0,0%	0,1	0,0%
12	0,1	0,1	0,0%	0,1	0,0%
		<b>[Máx RE]</b>	<b>0,0%</b>	<b>[Máx RE]</b>	<b>0,0%</b>

Tabela 7.84 - Resultados da minimização da função de teste “*Modified Schaffer’s No.2*”, com *seed* fixa e com reinicializações

# <i>SEED</i> FIXA	ÓTIMO GLOBAL	ÓTIMO GLOBAL (PSO 1)		ÓTIMO GLOBAL (PSO 2)	
	Valor	Valor	Re %	Valor	Re %
RNG(1)	0,1	0,1	0,0%	0,1	0,0%
RNG(2)	0,1	0,1	0,0%	0,1	0,0%
		<b>[Máx RE]</b>	<b>0,0%</b>	<b>[Máx RE]</b>	<b>0,0%</b>

### E.4) Resultados da minimização da função “Rosenbrock”

Tabela 7.85 - Resultados da minimização da função de teste “Rosenbrock”, com *seed* variável

# CORRIDA	ÓTIMO GLOBAL	ÓTIMO GLOBAL (PSO 1)		ÓTIMO GLOBAL (PSO 2)	
	Valor	Valor	Re %	Valor	Re %
1	0,1	0,785	685%	0,146425856	46,4%
2	0,1	0,118	18,2%	0,179988563	80,0%
3	0,1	0,243	143,2%	0,440217412	340,2%
4	0,1	1,639	1539,1%	0,106750704	6,8%
5	0,1	1,627	1527,4%	0,116001727	16,0%
6	0,1	0,247	147,0%	0,55968058	459,7%
7	0,1	0,181	80,9%	0,559750031	459,8%
8	0,1	1,654	1553,8%	0,157054374	57,1%
9	0,1	1,645	1544,8%	0,112911486	12,9%
10	0,1	0,223	123,3%	0,993821096	893,8%
11	0,1	1,628	1528,0%	0,118565612	18,6%
12	0,1	2,62	2519,9%	0,242071283	142,1%
		<b> Máx RE </b>	<b>2519,9%</b>	<b> Máx RE </b>	<b>893,8%</b>

Tabela 7.86 - Resultados da minimização da função de teste “Rosenbrock”, com *seed* fixa

# SEED FIXA	ÓTIMO GLOBAL	ÓTIMO GLOBAL (PSO 1)		ÓTIMO GLOBAL (PSO 2)	
	Valor	Valor	Re %	Valor	Re %
RNG(1)	0,1	1,631208305	1531,2%	0,180016568	80,0%
RNG(2)	0,1	0,105146824	5,1%	0,348342348	248,3%
		<b> Máx RE </b>	<b>1531,2%</b>	<b> Máx RE </b>	<b>248,3%</b>

Tabela 7.87 – Resultados da minimização da função de teste “Rosenbrock”, com *seed* variável e com reinicializações

# CORRIDA	ÓTIMO GLOBAL	ÓTIMO GLOBAL (PSO 1)		ÓTIMO GLOBAL (PSO 2)	
	Valor	Valor	Re %	Valor	Re %
1	0,1	0,1	0,0%	0,100008493	0,0%
2	0,1	0,101	1,0%	0,100305159	0,3%
3	0,1	0,102	1,7%	0,111844369	11,8%
4	0,1	0,108	7,5%	0,105606394	5,6%
5	0,1	1,627	1527,1%	0,101124243	1,1%
6	0,1	0,697	597,1%	0,100012079	0,0%
7	0,1	1,627	1527,1%	0,100222236	0,2%
8	0,1	0,1	0,3%	0,100705261	0,7%
9	0,1	0,101	0,6%	0,100627235	0,6%
10	0,1	1,627	1527,1%	0,104389566	4,4%
11	0,1	1,627	1527,1%	0,100230423	0,2%
12	0,1	0,104	3,5%	0,104845164	4,8%
		<b>[Máx RE]</b>	<b>1527,1%</b>	<b>[Máx RE]</b>	<b>11,8%</b>

Tabela 7.88 - Resultados da minimização da função de teste “Rosenbrock”, com *seed* fixa e com reinicializações

# <i>SEED</i> FIXA	ÓTIMO GLOBAL	ÓTIMO GLOBAL (PSO 1)		ÓTIMO GLOBAL (PSO 2)	
	Valor	Valor	Re %	Valor	Re %
RNG(1)	0,1	0,166284767	66,3%	0,100041869	0,0%
RNG(2)	0,1	0,100020219	0,0%	0,100003912	0,0%
		<b>[Máx RE]</b>	<b>66,3%</b>	<b>[Máx RE]</b>	<b>0,0%</b>

### E.5) Resultados da minimização da função “Hemmilblau”

Tabela 7.89 - Resultados da minimização da função de teste “Hemmilblau”, com *seed* variável

# CORRIDA	ÓTIMO GLOBAL	ÓTIMO GLOBAL (PSO 1)		ÓTIMO GLOBAL (PSO 2)	
	Valor	Valor	Re %	Valor	Re %
1	0,1	0,112190276	12%	0,122211578	22,2%
2	0,1	0,27926891	179,3%	0,495503459	395,5%
3	0,1	0,13250673	32,5%	1,201507207	1101,5%
4	0,1	0,10024925	0,2%	0,579620545	479,6%
5	0,1	0,204853843	104,9%	0,499433967	399,4%
6	0,1	0,152456046	52,5%	0,146127704	46,1%
7	0,1	0,253067792	153,1%	0,482594677	382,6%
8	0,1	0,251524931	151,5%	0,11384103	13,8%
9	0,1	0,267661333	167,7%	0,871992357	772,0%
10	0,1	0,125276825	25,3%	0,676905464	576,9%
11	0,1	0,429090793	329,1%	0,36165642	261,7%
12	0,1	0,302263392	202,3%	0,308273947	208,3%
		<b> Máx RE </b>	<b>329,1%</b>	<b> Máx RE </b>	<b>1101,5%</b>

Tabela 7.90 - Resultados da minimização da função de teste “Hemmilblau”, com *seed* fixa

# SEED FIXA	ÓTIMO GLOBAL	ÓTIMO GLOBAL (PSO 1)		ÓTIMO GLOBAL (PSO 2)	
	Valor	Valor	Re %	Valor	Re %
RNG(1)	0,1	0,223165161	123,2%	0,680635475	580,6%
RNG(2)	0,1	0,100975216	1,0%	0,662846563	562,8%
		<b> Máx RE </b>	<b>123,2%</b>	<b> Máx RE </b>	<b>580,6%</b>

Tabela 7.91 – Resultados da minimização da função de teste “Hemmilblau”, com *seed* variável e com reinicializações

# CORRIDA	ÓTIMO GLOBAL	ÓTIMO GLOBAL (PSO 1)		ÓTIMO GLOBAL (PSO 2)	
	Valor	Valor	Re %	Valor	Re %
1	0,1	0,100000221	0,0%	0,10025863	0,3%
2	0,1	0,100000002	0,0%	0,100029992	0,0%
3	0,1	0,100001021	0,0%	0,102120523	2,1%
4	0,1	0,100000068	0,0%	0,100921186	0,9%
5	0,1	0,100000023	0,0%	0,100299574	0,3%
6	0,1	0,100000175	0,0%	0,101858709	1,9%
7	0,1	0,100000114	0,0%	0,119428056	19,4%
8	0,1	0,100000741	0,0%	0,100010313	0,0%
9	0,1	0,10000167	0,0%	0,100315416	0,3%
10	0,1	0,100000028	0,0%	0,100122178	0,1%
11	0,1	0,10000049	0,0%	0,10172773	1,7%
12	0,1	0,100000014	0,0%	0,107303383	7,3%
		[Máx RE]	<b>0,0%</b>	[Máx RE]	<b>19,4%</b>

Tabela 7.92 - Resultados da minimização da função de teste “Hemmilblau”, com *seed* fixa e com reinicializações

# SEED FIXA	ÓTIMO GLOBAL	ÓTIMO GLOBAL (PSO 1)		ÓTIMO GLOBAL (PSO 2)	
	Valor	Valor	Re %	Valor	Re %
RNG(1)	0,1	0,100000024	0,0%	0,100326271	0,3%
RNG(2)	0,1	0,100001027	0,0%	0,10010376	0,1%
		[Máx RE]	<b>0,0%</b>	[Máx RE]	<b>0,3%</b>

### E.6) Resultados da minimização da função “Rastringin”

Tabela 7.93 - Resultados da minimização da função de teste “Rastringin”, com *seed* variável

# CORRIDA	ÓTIMO GLOBAL	ÓTIMO GLOBAL (PSO 1)		ÓTIMO GLOBAL (PSO 2)	
	Valor	Valor	Re %	Valor	Re %
1	0,1	1,352780599	1253%	0,1	0,0%
2	0,1	0,407948373	307,9%	0,1	0,0%
3	0,1	0,722953644	623,0%	0,1	0,0%
4	0,1	0,244700909	144,7%	0,1	0,0%
5	0,1	2,449471603	2349,5%	0,1	0,0%
6	0,1	3,458930654	3358,9%	0,1	0,0%
7	0,1	2,123919032	2023,9%	0,1	0,0%
8	0,1	1,295881823	1195,9%	0,1	0,0%
9	0,1	0,348200975	248,2%	0,1	0,0%
10	0,1	1,00809885	908,1%	0,1	0,0%
11	0,1	4,108329999	4008,3%	0,1	0,0%
12	0,1	2,444955057	2345,0%	0,1	0,0%
		<b> Máx RE </b>	<b>4008,3%</b>	<b> Máx RE </b>	<b>0,0%</b>

Tabela 7.94 - Resultados da minimização da função de teste “Rastringin”, com *seed* fixa

# SEED FIXA	ÓTIMO GLOBAL	ÓTIMO GLOBAL (PSO 1)		ÓTIMO GLOBAL (PSO 2)	
	Valor	Valor	Re %	Valor	Re %
RNG(1)	0,1	1,256362535	1156%	0,1	0,0%
RNG(2)	0,1	2,503574263	2403,6%	0,1	0,0%
		<b> Máx RE </b>	<b>2403,6%</b>	<b> Máx RE </b>	<b>0,0%</b>

Tabela 7.95 – Resultados da minimização da função de teste “Rastringin”, com *seed* variável e com reinicializações

# CORRIDA	ÓTIMO GLOBAL	ÓTIMO GLOBAL (PSO 1)		ÓTIMO GLOBAL (PSO 2)	
	Valor	Valor	Re %	Valor	Re %
1	0,1	0,100000013	0,0%	0,1	0,0%
2	0,1	0,100000032	0,0%	0,1	0,0%
3	0,1	0,100003679	0,0%	0,1	0,0%
4	0,1	0,100000096	0,0%	0,1	0,0%
5	0,1	0,100000096	0,0%	0,1	0,0%
6	0,1	0,100001182	0,0%	0,1	0,0%
7	0,1	0,100000117	0,0%	0,1	0,0%
8	0,1	0,100000157	0,0%	0,1	0,0%
9	0,1	0,100000000	0,0%	0,1	0,0%
10	0,1	0,100000036	0,0%	0,1	0,0%
11	0,1	0,100000144	0,0%	0,1	0,0%
12	0,1	0,100000087	0,0%	0,1	0,0%
		[Máx RE]	0,0%	[Máx RE]	0,0%

Tabela 7.96 - Resultados da minimização da função de teste “Rastringin”, com *seed* fixa e com reinicializações

# SEED FIXA	ÓTIMO GLOBAL	ÓTIMO GLOBAL (PSO 1)		ÓTIMO GLOBAL (PSO 2)	
	Valor	Valor	Re %	Valor	Re %
RNG(1)	0,1	0,100000004	0,0%	0,1	0,0%
RNG(2)	0,1	0,100016293	0,0%	0,1	0,0%
		[Máx RE]	0,0%	[Máx RE]	0,0%

### E.7) Resultados da minimização da função “Chichinadze”

Tabela 7.97 - Resultados da minimização da função de teste “Chichinadze”, com *seed* variável

# CORRIDA	ÓTIMO GLOBAL	ÓTIMO GLOBAL (PSO 1)		ÓTIMO GLOBAL (PSO 2)	
	Valor	Valor	Re %	Valor	Re %
1	-43,3159	-42,863084	-1%	-42,76788628	-1,3%
2	-43,3159	-42,8617757	-1,0%	-42,81897506	-1,1%
3	-43,3159	-42,3539749	-2,2%	-41,8272211	-3,4%
4	-43,3159	-42,840448	-1,1%	-42,46960132	-2,0%
5	-43,3159	-41,7164242	-3,7%	-42,83370006	-1,1%
6	-43,3159	-42,8202402	-1,1%	-40,45363687	-6,6%
7	-43,3159	-41,7935177	-3,5%	-42,52727358	-1,8%
8	-43,3159	-42,856553	-1,1%	-42,86712936	-1,0%
9	-43,3159	-41,799774	-3,5%	-42,86360682	-1,0%
10	-43,3159	-42,8007448	-1,2%	-39,98851819	-7,7%
11	-43,3159	-42,868642	-1,0%	-41,74110872	-3,6%
12	-43,3159	-42,4118839	-2,1%	-42,53785608	-1,8%
		<b>[Máx RE]</b>	<b>3,7%</b>	<b>[Máx RE]</b>	<b>7,7%</b>

Tabela 7.98 - Resultados da minimização da função de teste “Chichinadze”, com *seed* fixa

# SEED FIXA	ÓTIMO GLOBAL	ÓTIMO GLOBAL (PSO 1)		ÓTIMO GLOBAL (PSO 2)	
	Valor	Valor	Re %	Valor	Re %
RNG(1)	-43,3159	-42,8436529	-1,1%	-	-1,5%
RNG(2)	-43,3159	-42,8686353	-1,0%	-	-1,0%
		<b>[Máx RE]</b>	<b>1,1%</b>	<b>[Máx RE]</b>	<b>1,5%</b>

Tabela 7.99 – Resultados da minimização da função de teste “Chichinadze”, com *seed* variável e com reinicializações

# CORRIDA	ÓTIMO GLOBAL	ÓTIMO GLOBAL (PSO 1)		ÓTIMO GLOBAL (PSO 2)	
	Valor	Valor	Re %	Valor	Re %
1	-43,3159	-42,8686485	-1,0%	-42,86864455	-1,0%
2	-43,3159	-42,8686484	-1,0%	-42,86847701	-1,0%
3	-43,3159	-42,8686485	-1,0%	-42,86824703	-1,0%
4	-43,3159	-42,8686485	-1,0%	-42,86857804	-1,0%
5	-43,3159	-43,3154614	0,0%	-42,86808116	-1,0%
6	-43,3159	-42,8686484	-1,0%	-42,86857777	-1,0%
7	-43,3159	-42,8686484	-1,0%	-42,86863484	-1,0%
8	-43,3159	-42,8686485	-1,0%	-43,31428145	0,0%
9	-43,3159	-42,8686485	-1,0%	-42,86857224	-1,0%
10	-43,3159	-43,3156083	0,0%	-42,86864827	-1,0%
11	-43,3159	-42,8686484	-1,0%	-42,86855109	-1,0%
12	-43,3159	-42,8686485	-1,0%	-42,85813614	-1,1%
		[Máx RE]	1,0%	[Máx RE]	1,1%

Tabela 7.100 - Resultados da minimização da função de teste “Chichinadze”, com *seed* fixa e com reinicializações

# SEED FIXA	ÓTIMO GLOBAL	ÓTIMO GLOBAL (PSO 1)		ÓTIMO GLOBAL (PSO 2)	
	Valor	Valor	Re %	Valor	Re %
RNG(1)	-43,3159	-42,8686485	-1,0%	-42,86841028	-1,0%
RNG(2)	-43,3159	-42,8686481	-1,0%	-43,28947381	-0,1%
		[Máx RE]	1,0%	[Máx RE]	1,0%

### E.8) Resultados da minimização da função “Zettl”

Tabela 7.101 - Resultados da minimização da função de teste “Zettl”, com *seed* variável

# CORRIDA	ÓTIMO GLOBAL	ÓTIMO GLOBAL (PSO 1)		ÓTIMO GLOBAL (PSO 2)	
	Valor	Valor	Re %	Valor	Re %
1	-0,003791	0,007193853	-290%	0	-100,0%
2	-0,003791	0,005968227	-257,4%	-1,59E-04	-95,8%
3	-0,003791	0,011921171	-414,5%	-0,001712067	-54,8%
4	-0,003791	0,025349001	-768,7%	0	-100,0%
5	-0,003791	-0,00287254	-24,2%	-0,001284989	-66,1%
6	-0,003791	-0,00186691	-50,8%	-0,003204818	-15,5%
7	-0,003791	-8,93E-04	-76,4%	0	-100,0%
8	-0,003791	0,007001149	-284,7%	-0,00122904	-67,6%
9	-0,003791	0,004008643	-205,7%	-0,001859232	-51,0%
10	-0,003791	-0,00133372	-64,8%	0	-100,0%
11	-0,003791	-0,00252627	-33,4%	-0,001861715	-50,9%
12	-0,003791	0,004752048	-225,4%	-0,00240037	-36,7%
		<b> Máx RE </b>	<b>768,7%</b>	<b> Máx RE </b>	<b>100%</b>

Tabela 7.102 - Resultados da minimização da função de teste “Zettl”, com *seed* fixa

# SEED FIXA	ÓTIMO GLOBAL	ÓTIMO GLOBAL (PSO 1)		ÓTIMO GLOBAL (PSO 2)	
	Valor	Valor	Re %	Valor	Re %
RNG(1)	-0,003791	0,00771845	-303,6%	-0,003042386	-19,7%
RNG(2)	-0,003791	-0,00029377	-92,3%	0	-100,0%
		<b> Máx RE </b>	<b>303,6%</b>	<b> Máx RE </b>	<b>100%</b>

Tabela 7.103 – Resultados da minimização da função de teste “Zettl”, com *seed* variável e com reinicializações

# CORRIDA	ÓTIMO GLOBAL	ÓTIMO GLOBAL (PSO 1)		ÓTIMO GLOBAL (PSO 2)	
	Valor	Valor	Re %	Valor	Re %
1	-0,003791	-0,00379123	0,0%	-0,003789445	0,0%
2	-0,003791	-0,00379124	0,0%	-0,00376326	-0,7%
3	-0,003791	-0,00379122	0,0%	-0,003744587	-1,2%
4	-0,003791	-0,00379124	0,0%	-0,003787655	-0,1%
5	-0,003791	-0,00379124	0,0%	-0,003789808	0,0%
6	-0,003791	-0,00379121	0,0%	-0,003755575	-0,9%
7	-0,003791	-0,00379124	0,0%	-0,003786787	-0,1%
8	-0,003791	-0,00379124	0,0%	-0,003782195	-0,2%
9	-0,003791	-0,00379124	0,0%	-0,003788452	-0,1%
10	-0,003791	-0,00379124	0,0%	-0,003788503	-0,1%
11	-0,003791	-0,00379123	0,0%	-0,003785076	-0,2%
12	-0,003791	-0,00379124	0,0%	-0,003779061	-0,3%
		[Máx RE]	0,0%	[Máx RE]	1,2%

Tabela 7.104 - Resultados da minimização da função de teste “Zettl”, com *seed* fixa e com reinicializações

# SEED FIXA	ÓTIMO GLOBAL	ÓTIMO GLOBAL (PSO 1)		ÓTIMO GLOBAL (PSO 2)	
	Valor	Valor	Re %	Valor	Re %
RNG(1)	-0,003791	-0,00379124	0,0%	-0,003791192	0,0%
RNG(2)	-0,003791	-0,00379123	0,0%	-0,003789424	0,0%
		[Máx RE]	0,0%	[Máx RE]	0,0%

---

## Apêndice F – Características do computador pessoal

Processador: Intel® Core™ i7 – 3537U CPU @ 2.00 GHz – 2.5GHz

Memória Instalada (RAM): 8.00 GB (7.89 GB utilizável)

Tipo de Sistema: Sistema Operativo de 64 bits

Gráfica: Nvidia Geforce 740M

Sistema Operativo: Windows 7 Ultimate (Service Pack 1)

## Apêndice G – Teste do método de interpolação das propriedades mecânicas do compósito pela Rede RBF

### G.1) Função de Ativação “Ornstein–Uhlenbec (OU)”

#### Aplicação 1

Tabela 7.105 - Valores dos indicadores de desempenho do modelo após treino da rede com os 185 pontos obtidos do PREMAT, com a função OU

	MAEs	MAEo	MAEu	MSEs	MSEo	MSEu	MaxREs	MaxREo	MaxREu	RMSEs	RMSEo	RMSEu	NRMSEs	NRMSEo	NRMSEu
E <sub>1</sub>	4,36E-05	2,66E-04	2,88E-05	2,47E-09	1,07E-09	1,34E-09	2,65E-13	2,06E-13	2,30E-13	4,97E-05	3,27E-05	3,66E-05	3,06E-15	2,01E-15	2,25E-15
E <sub>2</sub>	5,17E-05	4,16E-04	4,07E-05	4,24E-09	2,92E-09	2,79E-09	1,63E-12	8,48E-13	1,13E-12	6,51E-05	5,40E-05	5,28E-05	3,39E-15	2,81E-15	2,75E-15
E <sub>3</sub>	4,38E-05	4,81E-04	4,13E-05	3,23E-09	3,60E-09	2,77E-09	1,06E-12	1,27E-12	9,19E-13	5,69E-05	6,00E-05	5,26E-05	2,96E-15	3,13E-15	2,74E-15
G <sub>23</sub>	4,60E-06	4,51E-06	5,25E-06	3,70E-11	3,60E-11	4,20E-11	5,15E-13	3,47E-13	5,62E-13	6,11E-06	5,97E-06	6,48E-06	2,58E-15	2,52E-15	2,73E-15
G <sub>31</sub>	2,31E-01	1,63E-04	1,82E-05	8,30E-10	4,18E-10	4,95E-10	1,12E-12	1,62E-12	1,23E-12	2,88E-05	2,04E-05	2,23E-05	3,80E-15	2,70E-15	2,93E-15
G <sub>12</sub>	1,99E-01	1,81E-05	1,29E-05	6,59E-10	5,48E-10	2,62E-10	9,51E-13	1,32E-12	9,80E-13	2,57E-05	2,34E-05	1,62E-05	3,38E-15	3,09E-15	2,13E-15
V <sub>21</sub>	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	7,59E-13	1,20E-12	3,60E-13	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	3,88E-15	6,22E-15	5,43E-15
V <sub>31</sub>	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	9,56E-13	7,63E-13	1,30E-12	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	4,86E-15	5,77E-15	6,32E-15
V <sub>32</sub>	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	1,22E-12	1,67E-12	1,43E-12	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	6,88E-15	1,06E-14	7,73E-15
V <sub>12</sub>	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	1,76E-13	1,82E-13	3,04E-13	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	2,32E-15	5,05E-15	2,68E-15
V <sub>13</sub>	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	1,49E-13	6,90E-14	1,10E-13	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	2,08E-15	2,11E-15	1,99E-15
V <sub>23</sub>	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	2,85E-12	1,83E-12	2,61E-12	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	1,08E-14	6,89E-15	1,21E-14

**Aplicação 2****Tabela 7.106 - Valores dos indicadores de desempenho do modelo após treino da rede com 97 pontos (usados para treino) dos 185 obtidos do PREMAT, com a função OU**

	MAEs	MAEo	MAEu	MSEs	MSEo	MSEu	MaxREs	MaxREo	MaxREu	RMSEs	RMSEo	RMSEu	NRMSes	NRMSEo	NRMSEu
E <sub>1</sub>	2,85E-05	8,49E-06	1,93E-05	9,88E-10	1,32E+05	5,90E-10	1,29E-13	5,54E-14	1,20E-13	3,14E-05	1,15E-05	2,43E-05	1,94E-15	7,07E-16	1,50E-15
E <sub>2</sub>	3,49E-05	2,92E-05	2,79E-05	1,91E-09	1,66E-09	1,38E-09	8,06E-13	6,15E-13	4,24E-13	4,37E-05	4,08E-05	3,71E-05	2,28E-15	2,12E-15	1,93E-15
E <sub>3</sub>	2,61E-05	2,62E-05	2,75E-05	1,25E-09	1,02E-09	1,22E-09	7,28E-13	3,99E-13	4,93E-13	3,54E-05	3,19E-05	3,49E-05	1,84E-15	1,66E-15	1,82E-15
G <sub>23</sub>	2,30E-06	2,60E-06	2,77E-06	9,36E-12	9,65E-12	1,31E-11	2,25E-13	2,51E-13	2,85E-13	3,06E-06	3,11E-06	3,62E-06	1,30E-15	1,32E-15	1,53E-15
G <sub>31</sub>	1,22E-05	1,80E-05	9,65E-06	2,24E-10	4,91E-10	1,41E-10	7,00E-13	5,24E-13	5,71E-13	1,50E-05	2,22E-05	1,19E-05	1,97E-15	2,92E-15	1,57E-15
G <sub>12</sub>	1,46E-05	1,25E-05	2,17E-05	3,45E-10	2,66E-10	6,46E-10	1,39E-12	7,57E-13	1,12E-12	1,86E-05	1,63E-05	2,54E-05	2,45E-15	2,15E-15	3,35E-15
V <sub>21</sub>	1,16E-16	1,09E-16	1,16E-16	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	5,29E-13	4,14E-13	6,00E-13	1,48E-16	1,36E-16	1,48E-16	2,60E-15	2,39E-15	2,60E-15
V <sub>31</sub>	1,29E-16	1,13E-16	1,14E-16	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	5,22E-13	3,19E-13	5,66E-13	1,65E-16	1,41E-16	1,43E-16	2,90E-15	2,47E-15	2,51E-15
V <sub>32</sub>	5,73E-16	7,25E-16	8,95E-16	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	7,34E-13	3,66E-13	1,21E-12	7,01E-16	8,54E-16	1,08E-15	3,73E-15	4,54E-15	5,75E-15
V <sub>12</sub>	8,56E-17	8,67E-17	8,44E-17	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	1,15E-13	2,14E-14	9,41E-14	1,05E-16	9,95E-17	1,11E-16	1,88E-15	1,79E-15	1,99E-15
V <sub>13</sub>	6,55E-17	4,01E-17	5,29E-17	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	6,66E-14	4,52E-14	3,89E-14	8,15E-17	5,76E-17	6,55E-17	1,46E-15	1,03E-15	1,18E-15
V <sub>23</sub>	7,42E-16	4,53E-16	4,73E-16	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	2,29E-13	8,28E-13	6,23E-13	9,34E-16	5,77E-16	5,72E-16	4,96E-15	3,06E-15	3,04E-15

**Aplicação 2****Tabela 7.107 – Valores dos indicadores de desempenho do modelo após estimação de 88 pontos (não usados para treino) dos 185 obtidos do PREMAT, com a função OU**

	MAEs	MAEo	MAEu	MSEs	MSEo	MSEu	MaxREs	MaxREo	MaxREu	RMSEs	RMSEo	RMSEu	NRMSEs	NRMSEo	NRMSEu
E <sub>1</sub>	4,63E+07	2,99E+07	2,92E+07	6,13E+15	3,98E+15	3,92E+15	5,13E-01	1,58E-01	1,49E-01	7,83E+07	6,31E+07	6,26E+07	4,82E-03	3,89E-03	3,86E-03
E <sub>2</sub>	1,56E+08	1,55E+08	1,49E+08	6,06E+16	5,76E+16	5,08E+16	6,08E+00	5,69E+00	4,88E+00	2,46E+08	2,40E+08	2,25E+08	1,46E-02	1,43E-02	1,34E-02
E <sub>3</sub>	1,59E+08	1,58E+08	1,54E+08	5,91E+16	5,72E+16	5,33E+16	5,68E+00	5,44E+00	4,97E+00	2,43E+08	2,39E+08	2,31E+08	1,45E-02	1,42E-02	1,37E-02
G <sub>23</sub>	1,56E+07	1,51E+07	1,47E+07	5,32E+14	5,13E+14	5,05E+14	1,68E+00	1,70E+00	1,70E+00	2,31E+07	2,26E+07	2,25E+07	9,72E-03	9,55E-03	9,47E-03
G <sub>31</sub>	4,15E+07	4,16E+07	4,03E+07	7,95E+15	7,66E+15	6,91E+15	7,77E+00	7,53E+00	6,96E+00	8,91E+07	8,75E+07	8,31E+07	1,42E-02	1,39E-02	1,32E-02
G <sub>12</sub>	3,95E+07	3,96E+07	3,76E+07	8,01E+15	7,55E+15	6,25E+15	8,24E+00	7,85E+00	6,88E+00	8,95E+07	8,69E+07	7,91E+07	1,42E-02	1,38E-02	1,26E-02
V <sub>21</sub>	7,33E-04	7,27E-04	7,09E-04	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	4,85E+00	4,48E+00	3,93E+00	1,16E-03	1,13E-03	1,08E-03	2,58E-02	2,52E-02	2,42E-02
V <sub>31</sub>	7,47E-04	7,42E-04	7,34E-04	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	4,57E+00	4,34E+00	4,02E+00	1,15E-03	1,13E-03	1,11E-03	2,57E-02	2,53E-02	2,47E-02
V <sub>32</sub>	4,19E-03	4,21E-03	4,15E-03	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	8,97E+00	8,95E+00	8,99E+00	6,85E-03	6,85E-03	6,82E-03	3,99E-02	3,99E-02	3,98E-02
V <sub>12</sub>	1,71E-04	1,52E-04	1,31E-04	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	3,45E-01	1,62E-01	1,62E-01	2,43E-04	2,25E-04	1,88E-04	4,78E-03	4,42E-03	3,70E-03
V <sub>13</sub>	1,88E-04	1,49E-04	1,32E-04	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	4,74E-01	1,58E-01	1,58E-01	2,76E-04	2,21E-04	1,95E-04	5,41E-03	4,34E-03	3,83E-03
V <sub>23</sub>	4,21E-03	4,21E-03	4,16E-03	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	9,01E+00	8,99E+00	9,02E+00	6,86E-03	6,85E-03	6,84E-03	4,00E-02	3,99E-02	3,99E-02

## G.2) Função de Ativação “Gaussiana Exponencial (GE)”

Função de ativação selecionada, expressa na equação (4.7) e com os parâmetros  $b$  igual a 0,5 e  $a$  expresso na equação (7.24), para a metamodelação das propriedades mecânicas do material compósito.

**Tabela 7.108 - Valores dos indicadores de desempenho do modelo após treino da rede com 97 pontos (usados para treino) dos 185 obtidos do PREMAT, com a função GE**

	MAEs	MAEo	MAEu	MSEs	MSEo	MSEu	MaxREs	MaxREo	MaxREu	RMSEs	RMSEo	RMSEu	NRMSEs	NRMSEo	NRMSEu
E <sub>1</sub>	1.34E-05	7.79E-06	1.71E-05	2.92E-10	1.25E-10	6.18E-10	1.04E-13	6.43E-14	8.76E-14	1.71E-05	1.12E-05	2.49E-05	1.05E-15	6.90E-16	1.53E-15
E <sub>2</sub>	5.56E-06	5.72E-06	1.83E-05	5.29E-11	4.77E-11	2.45E-09	1.08E-13	8.78E-14	4.42E-13	7.27E-06	6.90E-06	4.95E-05	3.79E-16	3.60E-16	2.58E-15
E <sub>3</sub>	4.44E-06	6.35E-06	1.02E-05	3.46E-11	5.31E-11	3.04E-10	1.05E-13	1.03E-13	2.39E-13	5.88E-06	7.29E-06	1.74E-05	3.06E-16	3.80E-16	9.08E-16
G <sub>23</sub>	1.08E-06	8.41E-07	3.44E-06	1.84E-12	1.38E-12	2.16E-11	1.00E-13	1.05E-13	1.01E-12	1.35E-06	1.17E-06	4.65E-06	5.74E-16	4.97E-16	1.97E-15
G <sub>31</sub>	1.24E-06	1.00E-06	3.70E-06	2.58E-12	2.02E-12	3.70E-11	1.03E-13	6.24E-14	4.39E-13	1.61E-06	1.42E-06	6.09E-06	2.12E-16	1.87E-16	8.03E-16
G <sub>12</sub>	1.29E-06	1.13E-06	6.04E-06	2.86E-12	2.77E-12	6.21E-11	1.10E-13	8.94E-14	3.66E-13	1.69E-06	1.67E-06	7.88E-06	2.23E-16	2.19E-16	1.04E-15
V <sub>21</sub>	2.65E-17	1.77E-17	4.85E-17	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.37E-13	1.13E-13	1.29E-13	3.37E-17	2.53E-17	1.63E-16	5.93E-16	4.45E-16	2.87E-15
V <sub>31</sub>	2.62E-17	1.76E-17	6.87E-17	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.09E-13	7.44E-14	3.17E-13	3.38E-17	2.37E-17	1.14E-16	5.95E-16	4.17E-16	2.00E-15
V <sub>32</sub>	6.84E-17	6.98E-17	2.68E-16	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	9.33E-14	1.26E-13	5.73E-12	8.77E-17	9.00E-17	9.04E-16	4.66E-16	4.78E-16	4.80E-15
V <sub>12</sub>	6.95E-17	6.98E-17	1.43E-16	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.02E-13	8.50E-14	1.10E-12	9.59E-17	8.87E-17	3.22E-16	1.72E-15	1.59E-15	5.78E-15
V <sub>13</sub>	7.55E-17	7.24E-17	9.99E-17	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	8.85E-14	8.77E-14	8.26E-14	9.55E-17	8.99E-17	3.10E-16	1.71E-15	1.61E-15	5.57E-15
V <sub>23</sub>	6.47E-17	6.55E-17	1.02E-16	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	9.76E-14	6.48E-14	5.99E-13	8.11E-17	7.89E-17	2.36E-16	4.31E-16	4.19E-16	1.26E-15

**Tabela 7.109 - Valores dos indicadores de desempenho do modelo após estimação de 88 pontos (não usados para treino) dos 185 obtidos do PREMAT, com a função GE**

	MAEs	MAEo	MAEu	MSEs	MSEo	MSEu	MaxREs	MaxREo	MaxREu	RMSEs	RMSEo	RMSEu	NRMSEs	NRMSEo	NRMSEu
E <sub>1</sub>	1.05E+10	9.79E+08	5.02E+07	2.03E+20	2.24E+18	6.18E+15	1.95E+00	1.22E+01	4.63E-01	1.42E+10	1.50E+09	7.86E+07	8.78E-01	9.23E-02	4.84E-03
E <sub>2</sub>	3.67E+09	7.52E+08	3.40E+08	2.85E+19	1.19E+18	2.50E+17	2.62E+00	2.01E+01	1.11E+01	5.34E+09	1.09E+09	5.00E+00	3.18E-01	6.50E-02	2.98E-02
E <sub>3</sub>	2.93E+09	9.43E+08	4.10E+08	1.35E+19	2.44E+18	4.69E+17	6.30E+00	5.83E+01	8.39E+00	3.68E+09	1.56E+09	6.85E+00	2.19E-01	9.29E-02	4.08E-02
G <sub>23</sub>	7.26E+08	1.14E+08	3.31E+07	9.27E+17	3.22E+16	2.04E+15	2.16E+00	2.34E+01	2.90E+00	9.63E+08	1.79E+08	4.51E-01	4.06E-01	7.57E-02	1.90E-02
G <sub>31</sub>	9.15E+08	3.39E+08	1.60E+08	1.30E+18	3.15E+17	7.62E+16	7.94E+00	7.22E+01	8.52E+00	1.14E+09	5.62E+08	2.76E+00	1.81E-01	8.94E-02	4.39E-02
G <sub>12</sub>	1.22E+09	2.78E+08	1.24E+08	3.31E+18	1.77E+17	3.50E+16	2.55E+00	1.76E+01	1.26E+01	1.82E+09	4.21E+08	1.87E+00	2.89E-01	6.69E-02	2.98E-02
V <sub>21</sub>	2.02E-02	2.71E-03	1.49E-03	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	2.52E+00	8.70E+00	8.57E+00	2.96E-02	4.58E-03	2.25E-11	6.61E-01	1.02E-01	5.03E-02
V <sub>31</sub>	1.70E-02	3.14E-03	1.66E-03	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	4.66E+00	2.45E+01	7.03E+00	2.23E-02	4.97E-03	2.72E-11	4.98E-01	1.11E-01	6.07E-02
V <sub>32</sub>	5.15E-02	1.03E-02	5.72E-03	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	2.84E+00	3.52E+01	9.89E+00	6.86E-02	1.53E-02	8.63E-11	4.00E-01	8.90E-02	5.03E-02
V <sub>12</sub>	5.88E-02	2.40E-03	3.96E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.87E+00	6.04E+00	4.57E-01	8.04E-02	3.72E-03	6.38E-12	1.58E+00	7.31E-02	1.25E-02
V <sub>13</sub>	6.21E-02	3.14E-03	5.16E-04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	2.03E+00	9.46E-01	1.98E+00	8.82E-02	6.08E-03	9.65E-12	1.73E+00	1.20E-01	1.90E-02
V <sub>23</sub>	6.42E-02	1.40E-02	5.55E-03	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	2.47E+00	9.57E+00	9.07E+00	9.70E-02	2.40E-02	8.51E-11	5.66E-01	1.40E-01	4.96E-02

## **Anexos**

**Anexos A** – Descrição do elemento *Shell181*

## **Anexo A – Descrição do elemento *Shell181***

As páginas seguintes representam a formulação e a descrição detalhada do elemento usado no presente trabalho.