

## A FLEXIBILIDADE DE CÁLCULO E A RESOLUÇÃO DE TAREFAS DE NATUREZA ADITIVA

**Margarida Rodrigues\* e Lurdes Serrazina\*\***

*\* ESELX - Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa, UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa; \*\* ESELX - Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa, UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa*

### Resumo

A flexibilidade de cálculo constitui uma capacidade que todos os alunos devem desenvolver na escola elementar. Resolver uma situação de cálculo de modo flexível pode passar por reparar nos números envolvidos, no modo como eles se podem relacionar, e usar estratégias que tirem partido das características observadas nos números. Esta comunicação tem como objetivo apresentar a forma como alunos dos 1.º e 2.º anos resolvem tarefas de natureza aditiva e como evidenciam flexibilidade de cálculo. Enquadra-se no Projeto *Flexibilidade de cálculo e raciocínio quantitativo*, o qual visa caracterizar o desenvolvimento do raciocínio quantitativo e da flexibilidade de cálculo dos alunos dos 6 aos 12 anos e descrever e analisar as práticas dos professores que facilitam esse desenvolvimento. A metodologia adotada no projeto é a de experiência de ensino, enquadrada na Investigação Baseada em Design. Os dados foram recolhidos através da observação participante em aulas em duas turmas (1.º e 2.º anos), com vídeo e áudio gravação do trabalho desenvolvido pelos alunos bem como da discussão das tarefas. Os resultados sugerem que os alunos garantiram a exatidão das decomposições numéricas, utilizando de modo flexível a estruturação numérica.

**Palavras-chave:** flexibilidade de cálculo, tarefas aditivas, estruturação numérica.

### Resumen

El cálculo flexible es una capacidad que todos los alumnos deben desarrollar en la escuela. Resolver una situación de cálculo de modo flexible puede pasar por identificar los números implicados y sus relaciones, y usar estrategias que aprovechen las propiedades observadas en los números. Esta comunicación tiene como objetivo

presentar la forma en la que alumnos de los 1º y 2º cursos de Educación Primaria resuelven tareas aditivas y cómo se evidencia la flexibilidad de cálculo. Se encuadra en el Proyecto *Flexibilidad de cálculo y raciocinio cuantitativo*, que pretende caracterizar el desarrollo del razonamiento cuantitativo y de la flexibilidad de cálculo de los alumnos de 6 a 12 años, y describir y analizar las prácticas de los profesores que facilitan ese desarrollo. La metodología adoptada en el proyecto es la de experiencia de enseñanza, encuadrada en la Investigación basada en el Diseño. Los datos fueron recogidos a través de la observación en dos clases (1º curso y 2º curso), con grabaciones de vídeo y audio del trabajo desarrollado por los alumnos, así como de la discusión de las tareas. Los resultados sugieren que los alumnos garantizaron el agotamiento de las descomposiciones numéricas, utilizando de modo flexible la estructura numérica.

**Palabras clave:** flexibilidad de cálculo, tareas aditivas, estructura numérica.

#### **Abstract**

Calculation flexibility is an ability that all students should develop in elementary school. Solving a computation in a flexible way can be by looking at the numbers involved, how they can relate, and using strategies that take advantage of the characteristics observed in the numbers. This communication aims to present how students in the 1st and 2nd grades solve additive tasks and how they show flexibility of calculation. It is part of the *Flexibility of calculation and quantitative reasoning* Project, which aims to characterize the development of quantitative reasoning and the flexibility of calculation of students from 6 to 12 years old and to describe and analyze the practices of teachers that facilitate that development. The methodology adopted in the project is that of teaching experience, which is part of Design Based Research. Data collection was through participant observation of two classes (1st and 2nd grades), with video and audio recording of the work developed by the students as well as the whole class discussions. The results suggest that students ensured the exhaustion of numerical decompositions, using numerical structuring in a flexible way.

**Keywords:** flexibility of calculation, additive tasks, numerical structuring.

## Introdução

Neste texto, centramo-nos na resolução de duas tarefas, uma no 1.º ano e outra no 2.º ano, cujo objetivo era trabalhar as diferentes composições do número, de modo a que os alunos avançassem na sua estruturação.

Na aritmética, os alunos começam por aprender os factos básicos da adição. Estes são melhor aprendidos quando se focam na estrutura, isto é, nos padrões e relações (Baroody, 2006; Gravemeijer, Bruin-Muurling, Kraemer, & van Stiphout, 2016), integrados numa rede de ideias, princípios e processos. Para Baroody (2006), a fluência nos factos básicos é alcançada através da memorização significativa onde a aprendizagem relacional tem um papel-chave. Realça a importância de os alunos compreenderem a ideia da combinação – um número pode ser composto pelas suas partes de diferentes formas. Assim, os factos passam a estar relacionados entre si constituindo uma rede. A criação desta rede de ideias inclui diferentes fases: (1) utilização de materiais de contagem ou contagens verbais desenvolvendo estratégias de contagem; (2) uso da informação que já têm de factos conhecidos e de relações para obter o valor de um novo facto; e (3) os números deixam de estar ligados a objetos concretos passando a imagens mentais – fase de mestria — e as respostas surgem de uma forma rápida e eficiente, evidenciando flexibilidade na sua obtenção.

Descobrir os pares de números correspondentes à decomposição de um dado número é uma forma de trabalhar os factos básicos, que feito de modo estruturado conduz à descoberta dos “pares comutativos” (por exemplo,  $5+3$  e  $3+5$ ) (Cobb, Boufi, McClain, & Whitenack, 1997). A evolução da fluência de cálculo implica a crescente integração dos conhecimentos factual, conceptual e procedimental (Baroody, 2006), resultando no ser capaz de usar esse conhecimento básico correta e rapidamente, aplicando-o, eficazmente, em situações familiares e não familiares, evidenciando flexibilidade.


## Método

A metodologia adotada é a de experiência de ensino, enquadrada na Investigação Baseada em Design. Os dados foram recolhidos em duas turmas, uma do 1.º ano e outra do 2.º ano, de uma escola pública de Lisboa, através da observação participante,

complementada pela transcrição das gravações e a recolha dos registos escritos dos alunos. A análise de dados foi realizada através da análise de conteúdo.

São analisadas duas tarefas - *Pintainhos* (1.º ano) (Figura 1) e *Chocolate para todos os gostos* (2.º ano) (Figura 2) - concebidas pela equipa do projeto, e resolvidas nas turmas, respetivamente, em 5 e 26 de março de 2015.

**Pintainhos**



Esta galinha começou a chocar treze ovos. Os pintainhos não saem da casca ao mesmo tempo. De cada um dos ovos vai sair um pintainho.

Mostra todas as situações possíveis com os números.

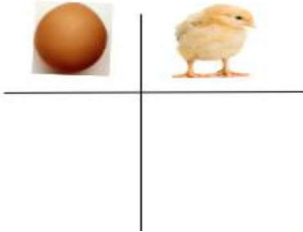





Figura 1. Tarefa *Pintainhos*.

**Chocolate para todos os gostos**



P      B      L

Há bombons de chocolate com três sabores: Negro (E), Branco (B) e Leite (L). Podem ser embalados de maneiras diferentes em caixas de 12 bombons.



1. Imagina diferentes maneiras de colocar os bombons em caixas, se pensarmos que cada caixa tem unicamente dois sabores diferentes.
2. Se toda a gente preferir dois sabores a um outro, imagina como descobrir todas as possibilidades de ver os bombons em caixas, sendo que cada uma tem dois sabores.

Figura 2. Tarefa *Chocolate para todos os gostos*.

## Resultados

### Exploração e discussão da tarefa na turma do 1.º ano

A professora começou por disponibilizar 13 círculos, colocando-os nas mesas de trabalho, mas a maioria dos alunos não os usou. Um dos pares conseguiu resolver a tarefa, separando os círculos em dois grupos e efetuando contagens unitárias em cada um deles. Cinco pares de alunos começaram por registar 13 ovos e 0 pintainhos, parecendo atender ao contexto, uma vez que na situação inicial ainda nenhum pintainho eclodiu dos ovos. Seguidamente, registaram corretamente a sequência decrescente dos ovos até ao 0 e a sequência crescente dos pintainhos até ao 13 (Figura 3).

	
13	0
12	1
11	2
10	3
9	4
8	5
7	6
6	7
5	8
4	9
3	10
2	11
1	12
0	13

an Marie Kraemer

Figura 3. Estratégia das sequências decrescente e crescente.

Cinco grupos desligaram-se do contexto e representaram um par de números e o seu comutativo --"contrário" na linguagem destes alunos -- (Figura 4), trabalhando com os números como objetos mentais, dispensando o material.

Ovos	Pintinhos
3	10
10	3
11	2
2	11
12	1
1	12
9	4
4	9
13	0
0	13
5	8
8	5
7	6
6	7

Mario Kraemer

Figura 4. Estrat3gia dos pares comutativos.

Esta estrat3gia revela a consci3ncia dos alunos da propriedade comutativa da adi3o3o e da comutatividade que, no contexto do problema, correspondem a situa33es diferentes, e que, por isso, t3em de ser contempladas como possibilidades diferentes.

Na fase de discuss3o3o da tarefa, os alunos come33aram por explicar porque come33aram pelo 13:

Jaime - Porque era o n3umero de ovos e quer3amos fazer a sequ3ncia.

Marta - Porque eram 13 ovos.

N3elia - Porque primeiro ainda n3o tinha nascido nenhum ovo.

Jaime apresenta uma justificac3o3o de natureza matem3tica, o querer fazer uma sequ3ncia, e as outras alunas de natureza contextual. Seguidamente, a professora questionou:

Professora - O total tem de ser quantos, ovos e pintos?

Alunos - 13.

O questionamento da professora focalizou os alunos na tomada de consci3ncia da decomposi33o3o do 13 inerente 3o3a tarefa. Ap3s um dos pares indicar a possibilidade 6 ovos e 7 pintainhos, v3rios alunos reagiram por ser um par comutativo ao da linha anterior, tendo um dos alunos identificado a simetria das possibilidades existentes, explicando que iria mudar a partir do 7-6: "Porque aqui 3o3a meio".

A professora incidiu, depois, a discussão na organização da tabela registada no quadro, questionando os alunos para que estes concluíssem que a estratégia das sequências decrescente/crescente seria mais eficaz para não se esquecerem de nenhuma das possibilidades.

O registo final consta da Figura 5, onde uma aluna ligou os pares comutativos com arcos e foi registado 14 como correspondendo à totalidade das possibilidades.



Figura 5. Registo final no quadro.

### Exploração e discussão da tarefa na turma do 2.º ano

Os alunos realizaram a tarefa sem dificuldade, colocando uma organização na forma como geravam as diferentes possibilidades numa tabela correspondente a dois sabores, ou usando a sequência crescente/decrescente (Figura 6) ou usando os pares comutativos (Figura 7). Após obtidas as 11 possibilidades, replicaram duas vezes a tabela inicial para ficarem com todas as possibilidades combinando os três sabores, dois a dois.

The figure shows three hand-drawn tables, each with two columns and ten rows. The first table is labeled 'N B' and shows a decreasing sequence in the first column (11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2) and an increasing sequence in the second column (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10). The second table is labeled 'N L' and shows a decreasing sequence in the first column (11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2) and an increasing sequence in the second column (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10). The third table is labeled 'B L' and shows a decreasing sequence in the first column (11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2) and an increasing sequence in the second column (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10).

Figura 6. Sequências decrescente/crescente para os três sabores.

Há três tabelas e trinta e três cartas.

The figure shows a hand-drawn diagram with three tables and thirty-three cards. The first table is labeled '(N) (B)' and shows a decreasing sequence in the first column (11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2) and an increasing sequence in the second column (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10). The second table is labeled '(N) (L)' and shows a decreasing sequence in the first column (11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2) and an increasing sequence in the second column (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10). The third table is labeled '(B) (L)' and shows a decreasing sequence in the first column (11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2) and an increasing sequence in the second column (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10). The text 'Há três tabelas e trinta e três cartas.' is written above the tables. The text '(N) (B)', '(N) (L)', and '(B) (L)' is written next to the respective tables.

Figura 7. Pares comutativos para os três sabores.

No momento da discussão, grande parte dos alunos considerava que cada tabela correspondia a uma caixa. Só depois de a professora contar, em conjunto com os alunos, cada uma das possibilidades da tabela é que os alunos entenderam que cada linha da tabela correspondia a uma caixa de bombons com mistura de dois sabores, concluindo, assim, acerca da impossibilidade de obterem 12-0. A discussão prosseguiu:

Alexandre - Na segunda possibilidade havia onze.

Professora - Também havia onze; e na terceira?

Alexandre - Onze.

Aluno - É tudo igual.

(...)

Ricardo – Temos 33 caixas.

Professora – Porquê?

Ricardo – Porque cada linha vale uma caixa. Uma caixa tem 12 bombons.

Frederico – Nós temos 3 tabelas e nós temos 11 possibilidades. (...) 3 tabelas vezes 11 caixas é igual a 33.

Após a compreensão contextual das decomposições efetuadas, os alunos revelaram a transição de um raciocínio aditivo para um de natureza multiplicativa, já que as tabelas se mantinham iguais quando os sabores mudavam.

### **Conclusão**

Nas duas turmas, os alunos estruturaram corretamente os números em causa, sendo que a maioria pareceu manipular os números como objetos mentais (Gravemeijer et al., 2016). Colocaram uma organização na forma como foram gerando as diferentes possibilidades de decomposição, facilitando-lhes a perceção do momento em que alcançavam o número máximo de possibilidades, revelando a sua mestria (Baroody, 2006). Esta organização foi objeto de discussão na turma de 1.º ano, nomeadamente introduzindo o critério matemático de eficácia na exaustão das possibilidades de decomposição numérica. A identificação da simetria contribuiu também para a certeza dessa exaustão.

As relações numéricas estabelecidas no âmbito de um cálculo flexível, adaptado aos números em causa, são construídas com base na estruturação numérica (Baroody, 2006; Gravemeijer et al., 2016), pelo que justificar a exaustão das decomposições de um

número (Cobb et al., 1997) torna-se um elemento essencial no processo de desenvolvimento da flexibilidade de cálculo.

### **Agradecimento**

Este artigo foi desenvolvido no quadro do Projeto *Flexibilidade de cálculo e raciocínio quantitativo* financiado pelo Instituto Politécnico de Lisboa.

### **Referências**

- Baroody, A. J. (2006). Why children have difficulties mastering the basic number combinations and how to help them. *Teaching Children Mathematics*, 13(1), 22–31.
- Cobb, P., Boufi, A., McClain, K., & Whitenack, J. (1997). Reflective discourse and collective reflection. *Journal for Research of Mathematics Education*, 28, 258–277.
- Gravemeijer, K., Bruin-Muurling, G., Kraemer, J. M., & van Stiphout, I. (2016). Shortcomings of mathematics education reform in The Netherlands: A paradigm case? *Mathematical thinking and learning*, 18(1), 25–44.