CAPÍTULO 4

Desenvolvimento do raciocínio matemático na formação inicial de professores do 1.º ciclo do ensino básico

Lurdes Serrazina, Margarida Rodrigues
Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Lisboa

Fátima Mendes
Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal

A APRENDIZAGEM DOS FUTUROS PROFESSORES

O professor precisa de ter um conhecimento profundo da Matemática que ensina, não apenas o "saber-fazer", mas o ser capaz de apresentar explicações do porquê fazer, de analisar e compreender estratégias e soluções diferentes e de julgar a sua adequação (Ball & Bass, 2003). Assim, um dos objetivos da formação inicial é que os futuros professores aprofundem os seus conhecimentos, nomeadamente sobre a Matemática e a sua didática, de modo que possam usar esses conhecimentos quando, na prática pedagógica, tiverem de tomar decisões sobre como, quando e o que ensinar. Deste modo, a formação inicial constitui-se como momento de aprendizagem para serem professores que ensinam Matemática.

Para Davis e Krajcik (2005), a aprendizagem do professor é complexa e "envolve o desenvolvimento e a integração de uma base de conhecimento sobre conteúdo, ensino e aprendizagem" (p. 3). Para estes autores, os professores devem ter oportunidades de resolver tarefas, constituindo-se como momentos de aprendizagem profissional (Ribeiro & Ponte, 2020). Essas tarefas devem contribuir para enriquecer o conhecimento do professor em instâncias específicas, mas também ajudá-los a desenvolver conhecimentos mais gerais que possam ser aplicados com flexibilidade em novas situações (Davis & Krajcik, 2005). Assim, as tarefas constituem oportunidades de aprendizagem quando os professores interpretam as resoluções dos alunos e refletem sobre possíveis questões a colocar-lhes para que eles avancem na sua compreensão sobre o tema.

Hiebert et al. (2003) propõem que os futuros professores tenham oportunidade de desenvolver experiências significativas que possam mais tarde explorar com os seus alunos e que correspondam a aspetos-chave do currículo de Matemática. Pelo seu lado, Ponte e Chapman (2008) apontam a importância de os futuros professores serem confrontados com experiências de aprendizagem consistentes com as recomendações curriculares para a educação matemática. Considerando que o desenvolvimento do raciocínio matemático (RM) é um objetivo curricular a trabalhar desde os primeiros anos de escolaridade, este tem de ser objeto de estudo na formação inicial de professores de todos os níveis de ensino e, por isso, também na dos professores do 1.º ciclo do ensino básico (CEB). Investigações realizadas em Portugal e internacionalmente confirmam que este trabalho não é fácil, pois conceber e implementar tarefas que promovam o raciocínio é uma atividade complexa (Brunheira, 2019, Stylianides & Stylianides, 2006).

O desenho das tarefas de aprendizagem profissional, aqui designadas por tarefas de formação, foi, desde o início, uma preocupação da equipa do projeto REASON, que começou por analisar diversos artigos sobre design de tarefas e, após discussão conjunta, chegou a um conjunto de princípios sobre o seu design (REASON, 2022[1]). A partir deste documento, e tendo em conta os princípios de design estabelecidos, a subequipa do projeto responsável pelo trabalho com futuros professores do 1.º CEB, constituída por docentes das Escolas Superiores de Educação (ESE) participantes no projeto, elaborou ou adaptou um conjunto de tarefas de formação que viriam a ser parte integrante das experiências de formação dirigidas a professores e futuros professores daquele nível de ensino. A equipa assumiu, desde o início, que o conjunto de tarefas a integrar as experiências de formação seriam propostas tanto na formação inicial como na formação contínua, uma vez que a preocupação era comum – a aprendizagem do professor sobre raciocínio. A forma como a construção

[1] Foi trabalhada uma versão preliminar deste texto.

das tarefas se desenrolou no seio da equipa é ilustrada por Mendes, Brocardo & Delgado (2022) para uma tarefa concreta. Outro aspeto considerado relevante foi a possibilidade de os futuros professores trabalharem na sua prática pedagógica tarefas envolvendo o raciocínio matemático.

As tarefas de formação incluem tarefas de natureza exploratória (Ponte, 2005), dirigidas a alunos do 1º CEB, e episódios de aulas onde essas tarefas foram trabalhadas, transcritos e/ou visualizados em suporte de vídeo, bem como resoluções de alunos. As tarefas elaboradas ou adaptadas pela equipa do projeto, tiveram em conta o proposto por Lin et al. (2012) sobre o design de tarefas, obedecendo ao conjunto de princípios sistematizados pela equipa. Para cada uma das tarefas de formação, foi pedido aos formandos que resolvessem a tarefa, dirigida aos alunos do ensino básico, do ponto de vista desses alunos, explicitassem as suas potencialidades para desenvolver o raciocínio matemático dos alunos, analisassem os episódios de sala de aula e as resoluções dos alunos, identificando exemplos de processos de raciocínio envolvidos. Algumas das tarefas incluíam ainda a identificação das ações do professor promotoras do raciocínio matemático dos alunos (Mata-Pereira & Ponte, 2016).

EXPERIÊNCIAS DE FORMAÇÃO COM FUTUROS PROFESSORES

A investigação realizada seguiu a modalidade de investigação baseada em design (IBD) tendo sido organizada uma experiência de formação em cada uma das ESE envolvidas. Esta experiência de formação foi primeiro realizada numa das ESE (1.º ciclo de design) e, depois de uma análise retrospetiva, foi realizada na outra ESE (2.º ciclo de design).

Para preparar as experiências de formação, a equipa do projeto reuniu periodicamente desde o início de 2019. Em paralelo, a equipa realizou a discussão e análise de textos teóricos sobre o tema (por exemplo, Jeannotte & Kieran, 2017) e sobre os princípios de design de tarefas (Lin et al., 2012), procurou e elaborou tarefas de formação e planificou a experiência de formação, tendo em conta os princípios de design de tarefas promotoras do raciocínio matemático (REASON, 2022). Dada a estrutura das tarefas de formação mencionada antes, este trabalho implicou a seleção e/ou elaboração de tarefas para alunos do 1.º CEB, a sua experimentação informal em salas de aula de professores, que se voluntariaram para o fazer, com a recolha de episódios e resoluções dos alunos, e posterior análise e seleção do que incluir na tarefa de formação.

As experiências de formação realizadas nas duas instituições de ensino superior contemplaram a exploração e discussão de tarefas de formação que foram complementadas pela análise e discussão de dois textos teóricos, um sobre raciocínio matemático (RM) e processos de raciocínio matemático (Ponte et al., 2020) e outro sobre as ações do professor para desenvolver o RM dos alunos (Mata-Pereira & Ponte, 2016). As tarefas focam tópicos referentes aos temas Números e Geometria e Medida.

Organização da experiência nas duas ESE

Estas experiências envolveram estudantes de mestrado em ensino e foram realizadas no âmbito de unidades curriculares de Didática da Matemática. A primeira experiência de formação teve uma duração de seis sessões de 2h 30 min, e realizou-se no início da unidade curricular (UC). Durante a experiência, os estudantes resolveram tarefas seguindo uma abordagem exploratória e discutiram os textos mencionados antes. Já não integrada na experiência de formação, mas a partir dessa experiência, os estudantes planificaram tarefas e levaram-nas à prática trabalhando com alunos do 1.º CEB.

Na outra ESE foram realizadas treze sessões de 90 minutos, incluindo as sessões de planificação de uma aula do 1.º CEB. Numa primeira fase, as estudantes discutiram textos e exploraram tarefas de formação que potencialmente promovem o RM, concebidas ou adaptadas pela equipa do projeto REASON (durante 7 aulas). Numa segunda fase planificaram uma intervenção no contexto de estágio, em que as futuras professoras explorariam uma tarefa com alunos dos 3.º ou 4.º anos que tivesse potencialidades de desenvolver o RM. Finalmente, numa terceira fase, foi feita uma reflexão partilhada em grupo turma sobre a aula com as crianças (2 aulas).

Previamente a cada uma das experiências de formação, os estudantes realizaram uma tarefa de diagnóstico focada nos temas a abordar durante a experiência, sendo a mesma tarefa repetida ao fim de sete aulas.

Características comuns e diferenças

Na primeira experiência de formação, correspondente ao 1.º ciclo da IBD, participaram os 31 estudantes do 1.º ano do Mestrado em Ensino do 1.º CEB e de Matemática e Ciências Naturais no 2.º CEB, na Unidade Curricular (UC) de Didática da Matemática no 1.º e no 2.º CEB. Decorreu de outubro a novembro de 2019, correspondendo às primeiras aulas da UC.

Na outra instituição participaram as 25 estudantes do Mestrado em Educação Pré-Escolar e Ensino do 1.º CEB, do 2.º ano, na UC de Didática da Matemática no 1.º CEB. Sendo esta UC anual, a experiência de formação, 2º ciclo de IBD, decorreu no 2.º semestre letivo, de março a maio de 2021. Dada a situação pandémica associada à COVID-19, esta experiência de formação foi realizada totalmente online.

Como referido, os dois grupos de futuros professores têm em comum o poderem vir a ser professores do 1.º CEB. No entanto, o primeiro grupo ao frequentar um mestrado que habilita para ser também professor de Matemática e Ciências Naturais do 2.º CEB terá, naturalmente, um maior investimento na área da Matemática, enquanto o segundo grupo teve no primeiro ano de mestrado um maior enfoque na Educação Pré-Escolar.

De notar que a unidade curricular de Didática da Matemática é anual nas duas ESE, sendo na primeira interrompida durante o período de estágio em escolas do 1.º CEB e mantendo-se a funcionar paralelamente ao estágio na segunda ESE.

Tanto no formato presencial como no online todas as tarefas foram inicialmente exploradas autonomamente pelos futuros professores, organizados em grupos, sendo posteriormente discutidas pelo coletivo da turma.

A EXPLORAÇÃO DAS TAREFAS NAS AULAS DA FORMAÇÃO INICIAL

Como referido anteriormente, ambas as experiências de formação realizaram o mesmo conjunto de tarefas elaboradas ou adaptadas pela equipa do projeto. Para este capítulo, selecionámos duas tarefas diferentes, ambas no domínio da Geometria e Medida, sendo analisada a exploração de cada uma numa das turmas de futuros professores do 1.º CEB. Assim, apresentamos a análise da exploração da tarefa de geometria na turma de Mestrado em Ensino do 1.º CEB e de Matemática e Ciências Naturais no 2.º CEB e da tarefa de Medida na turma de Mestrado em Educação pré-Escolar e Ensino do 1.º CEB. Este trabalho é complementado pela análise de relatórios de estágio ou reflexões realizadas no âmbito do estágio, de concretizações na prática letiva, de tarefas promotoras do RM dos alunos do 1.º CEB. Em ambos os casos procuramos evidenciar como os futuros professores lidaram com os processos de raciocínio presentes nas tarefas e identificar aprendizagens que realizaram.

A exploração da tarefa "Raciocínio matemático envolvendo a geometria"

A tarefa "Raciocínio matemático envolvendo a geometria" foi explorada na 5.ª aula da experiência de formação (Anexo 1) e tinha como base uma tarefa proposta a alunos do 3.º ano, "Vamos conhecer as pirâmides" (Anexo 2).

Quanto aos processos de raciocínio que podem ser mobilizados pelos alunos de 3.º ano na resolução da tarefa, solicitados na questão 3, os estudantes indicam os identificados na tabela 1. Nesta questão, apenas dois grupos, Grupo 3 e Grupo 8, fundamentaram os processos identificados, sendo que os restantes reservaram uma fundamentação mais desenvolvida para as restantes questões da tarefa.

Tabela 1

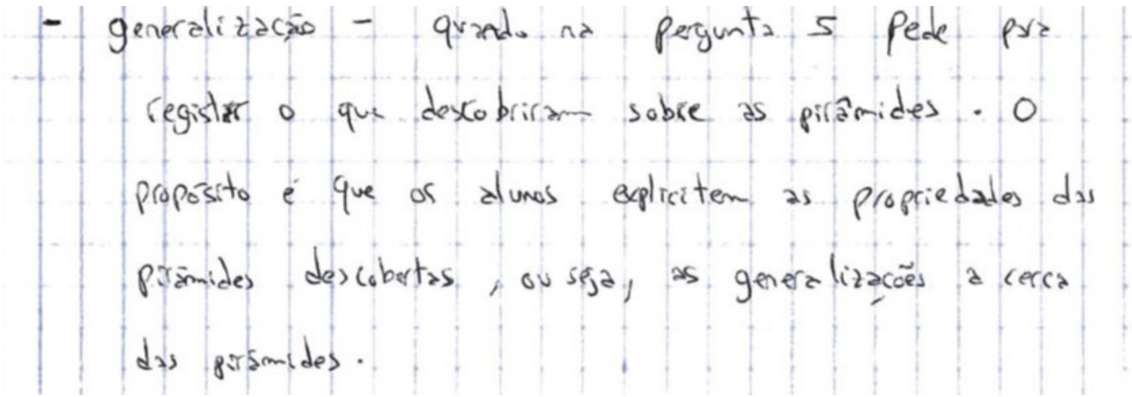
Processos de raciocínio matemático identificados na tarefa 'Vamos conhecer as pirâmides'

Grupo	Processos de RM identificados			
	Exemplificar	Comparar	Generalizar	Justificar
1	X	X	X	X
2		X	X	X
3	X		X	X
4	X	X	X	
5		X	X	X
6	X	X	X	X
7		X	X	X
8	X	X	X	X

A análise da tabela evidencia que todos os grupos consideraram que os alunos mobilizam o processo de RM generalizar, tal como afirma um dos grupos na figura 1.

Figura 1

Produção escrita do Grupo 3


- generalização - quando na pergunta 5 pede para registar o que descobriram sobre as pirâmides. O propósito é que os alunos explicitem as propriedades das pirâmides descobertas, ou seja, as generalizações acerca das pirâmides.

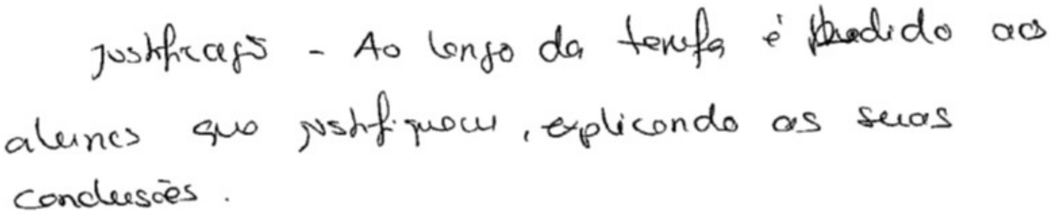
Generalização – quando na pergunta 5 pede para registar o que descobriram sobre as pirâmides, o propósito é que os alunos explicitem as propriedades das pirâmides descobertas, ou seja, a generalização acerca das pirâmides.

A produção escrita do Grupo 3 evidencia que as estudantes associam a explicitação das propriedades das pirâmides ao ato de identificar aspetos comuns em casos diferentes de pirâmides e estender esses aspetos a toda a classe de pirâmides enquanto propriedades.

O processo de *justificar* é um processo referido por todos os grupos de estudantes, exceto um. O Grupo 8 regista na sua produção escrita (Figura 2):

Figura 2

Produção escrita do Grupo 8


Justificação - Ao longo da tarefa é pedido aos alunos que justifiquem, explicando as suas conclusões.

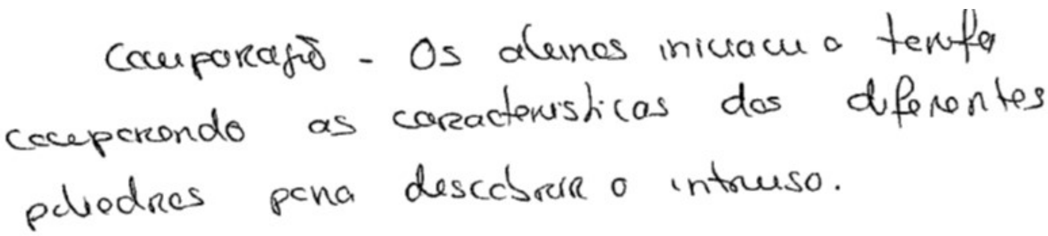
Justificação – Ao longo da tarefa é pedido aos alunos que justifiquem, explicando as suas conclusões.

O Grupo 8 parece associar a mobilização do processo de justificar ao questionamento explícito do porquê, como acontece na questão 4 da tarefa "Vamos conhecer as pirâmides" ("é pedido aos alunos que justifiquem") mas também ao pedido de explicação, como acontece na questão 3 da tarefa ("explicando as suas conclusões"). Assim, parece existir a assunção de que é importante o enunciado da tarefa incluir questões concretas de incentivo a este processo de RM.

O processo de *comparar* é igualmente identificado pela quase totalidade dos grupos pois, tal como afirma um dos grupos na figura 3:

Figura 3

Produção escrita do Grupo 8


Comparação - Os alunos iniciam a tarefa comparando as características dos diferentes poliedros para descobrir o intruso.

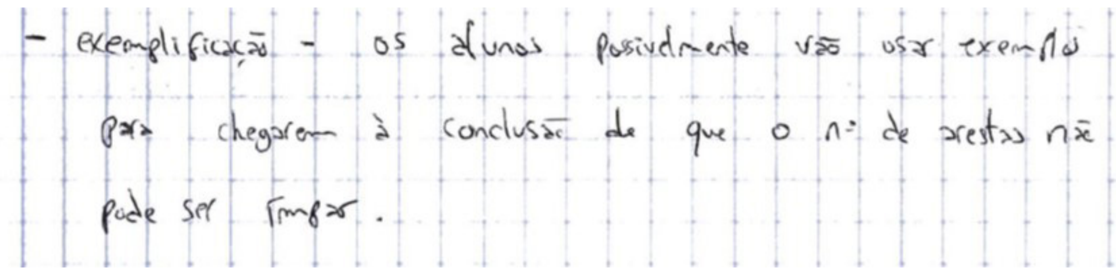
Comparação – Os alunos iniciam a tarefa comparando as características dos diferentes poliedros para descobrir o intruso.

O Grupo 8 não incidiu propriamente na tarefa "Vamos conhecer as pirâmides", mas sim na atividade inicial *Qual é o intruso*? descrita na tarefa de formação que pressupõe a mobilização pelos alunos do processo de classificar, processo este abordado na experiência apenas na fase de discussão desta tarefa, e que envolve comparar objetos entre si com vista a estabelecer uma organização entre eles. Assim, as estudantes reconhecem de forma adequada o processo de comparar nesta atividade.

Por fim, cinco dos grupos identificaram o processo de *exemplificar*, tal como justificado por um dos grupos na Figura 4.

Figura 4

Produção escrita do Grupo 3



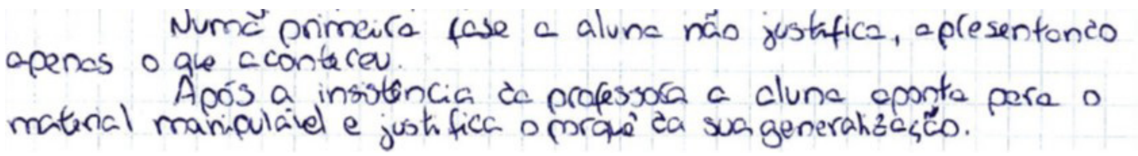
exemplificação – os alunos possivelmente vão usar exemplos para chegarem à conclusão de que o n.º de arestas não pode ser ímpar.

O Grupo 3 revela um entendimento claro e adequado sobre o que consiste este processo de RM. Tal como referido por Jeannotte e Kieran (2017), este processo apoia a procura de semelhanças e diferenças, gerando elementos que suportam outros processos de RM, designadamente o de generalizar. Tal como reconhecido por estas estudantes, a análise do número de arestas em casos particulares de pirâmides apoia o processo de generalizar, neste caso, relativo ao número de arestas desta classe de poliedros.

Além de identificarem processos de raciocínio envolvidos na tarefa, os estudantes também os relacionam entre si, como aconteceu com o Grupo 2 (Figura 5), na resposta à questão 4.1, que incide na análise de um episódio de sala de aula.

Figura 5

Parte final da produção escrita do Grupo 2



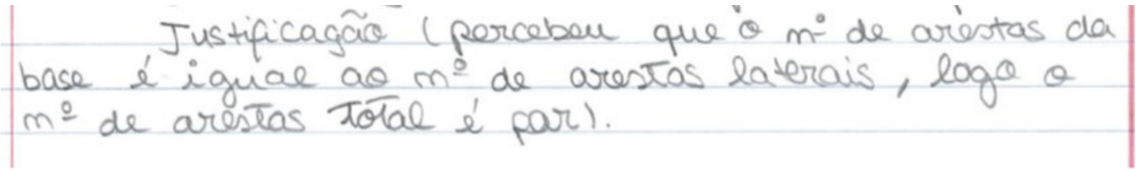
Numa primeira fase a aluna não justifica, apresentando apenas o que aconteceu.
Após a insistência da professora a aluna aponta para o material manipulável e justifica o porquê da sua generalização.

Os estudantes do Grupo 2 distinguem duas fases nas respostas da aluna, em que inicialmente ela apresenta "apenas o que acontece" (*Porque falta um ou sobra um*, tarefa de formação) e só depois consegue justificar a generalização produzida antes, pois é no ato de apontar para o modelo de pirâmide que a aluna justifica efetivamente, compreendendo que o número de arestas da base tem de ser igual ao número de arestas laterais, logo o número de arestas total tem de ser um número par (*Aqui (aponta para a base) e aqui (aponta para o lugar onde estariam as arestas laterais) têm de ter o mesmo número*, tarefa de formação). Assim, estes estudantes, além de revelarem compreender claramente em que consistem os vários processos de RM, também evidenciam compreender o modo como estes se relacionam entre si.

Tal como o Grupo 2, que associa justificar à explicitação do porquê, também o Grupo 5 refere o fundamento do processo de justificar por parte da aluna (Figura 6), na mesma questão:

Figura 6

Produção escrita do Grupo 5



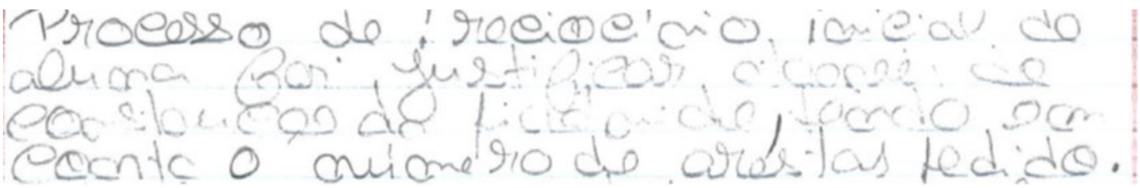
Justificação (percebeu que o n.º de arestas da base é igual ao n.º de arestas laterais, logo o n.º de arestas total é par).

A produção escrita do Grupo 5 evidencia a forma estreita como o processo de justificar se relaciona com a compreensão aprofundada das propriedades dos objetos. Efetivamente, é através do processo de justificar que a aluna "percebeu" a razão da paridade do número de arestas das pirâmides. Tal como destacado por Lannin et al. (2011), uma boa justificação, mais do que mostrar que uma afirmação é verdadeira, explica porquê, explicitando as relações subjacentes.

Já o Grupo 6 evidencia não identificar claramente os processos de generalizar e justificar, na análise do episódio (Figura 7).

Figura 7

Parte inicial da produção escrita do Grupo 6

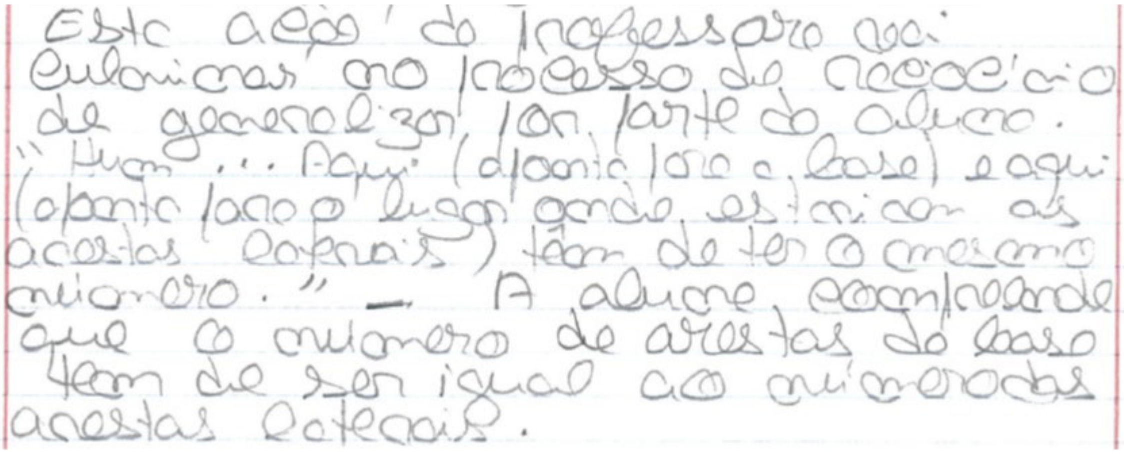


Processo de raciocínio inicial da aluna foi justificar através da construção da pirâmide, tendo em conta o número de arestas pedido.

Os estudantes do Grupo 6 consideram que a aluna justifica na fase inicial aquando da construção da pirâmide, provavelmente quando responde *Sobrav... faltava 1* (tarefa de formação) quando efetivamente aquela só o faz na fase final do episódio, tal como reconhecido pelo Grupo 2 (Figura 5).

Figura 8

Parte final da produção escrita do Grupo 6



Esta ação da professora vai culminar no processo de raciocínio de generalizar por parte da aluna.
"Hum... Aqui (aponta para a base) e aqui (aponta para o lugar onde estariam as arestas laterais) têm de ter o mesmo número." – A aluna compreende que o número de arestas da base tem de ser igual ao número de arestas laterais.

Reportando-se à fase final do episódio, o Grupo 6 cita a resposta da aluna, considerando incorretamente que esta ilustra o processo de generalizar, associando este processo à compreensão desta propriedade. Evidencia-se assim que este grupo confunde os dois processos, neste caso assumindo que o processo de justificar é o de generalizar.

Explorando uma tarefa no 1.º CEB

Após a experiência de formação, os estudantes do Mestrado em Ensino do 1.º CEB e de Matemática e Ciências Naturais no 2.º CEB foram desafiados a elaborar uma planificação de uma aula a lecionar no estágio. No âmbito dessa planificação, todos os pares de estagiários selecionaram uma tarefa promotora do RM de alunos do 1.º CEB e fundamentaram a sua escolha mobilizando os princípios de design de tarefas discutidos anteriormente. Após a lecionação dessa aula, os pares elaboraram relatórios envolvendo a análise das produções ou das intervenções orais dos alunos, no que respeita aos seus processos de raciocínio. Analisando o conjunto dos relatórios, num total de 16, verifica-se globalmente uma identificação adequada dos processos de raciocínio, embora alguns grupos se limitem a enunciar os processos, enquanto outros fundamentam a identificação realizada.

Um dos pares que integrava o Grupo 6 evidencia progressos na sua aprendizagem, distinguindo já claramente os processos de generalizar e de justificar, na análise que fez às intervenções dos alunos de uma turma de 2.º ano, durante a discussão coletiva. A figura 9 apresenta a sua análise sobre justificar.

Figura 9

Identificação do processo de justificar (Relatório A, p. 21)

Estagiário: Então aqui na barra de chocolate qual é a barra maior, a que representa $\frac{1}{5}$ ou a que representa $\frac{1}{6}$?

D.: É a que representa $\frac{1}{5}$ porque o valor que está em baixo é menor.

Neste exemplo verifica-se o processo de raciocínio justificar, já que, o aluno ao explicar qual é a barra maior utiliza a fração e o valor do denominador, para chegar a uma conclusão.

A sua análise sobre generalizar encontra-se ilustrada no episódio da figura 10.

Figura 10

Identificação do processo de generalizar (Relatório A, pp. 22-23)

Estagiário: Agora que temos no quadro os vossos contributos quero que analisem e comentem o que podem retirar a partir disso.

Mat.: Então no quadro temos as fatias e as barras do maior para o mais pequeno.

Estagiário: Certo, foi aquilo que vos pedi, do maior para o menor. Mas, então o que é que isso significa relativamente às frações que cada fatia e barra representam?

F.: Significa que a fração maior será $\frac{1}{2}$ e a menor será $\frac{1}{10}$.

Estagiário: Então, olhem bem para as frações e tentem perceber porque é que é assim?

A.R.: Nas frações a única coisa que altera é o valor que está em baixo.

V.: Então quanto maior o valor que está em baixo, mais pequena será a fatia.

De acordo com o anterior exemplo, considerámos que os alunos realizam o processo de raciocínio generalizar, pois os alunos com os dados no quadro reconheceram um padrão (aumento do valor do denominador – diminuição do tamanho da fatia de pizza e barra de chocolate e diminuição do valor da fração).

Verifica-se que estes estudantes, na sua prática, identificam de forma adequada os processos de raciocínio que tinham confundido anteriormente durante a experiência de formação. Explicitam que o aluno justifica a comparação entre as duas frações, com recurso a um conhecimento prévio ("utiliza a fração e o valor do denominador, para chegar a uma conclusão"). Também o processo de generalizar é identificado claramente na intervenção do aluno ("Então quanto maior o valor que está em baixo, mais pequena será a fatia"), ao reconhecer "um padrão" nas frações unitárias ordenadas no quadro, de forma decrescente, estendendo essa propriedade a todas as frações, subentendendo-se que sejam do mesmo tipo, ou seja, frações unitárias ("aumento do valor do denominador – diminuição do tamanho da fatia de pizza e barra de chocolate e diminuição do valor da fração").

Ilustramos, ainda, a identificação de processos de RM realizada por outro par de estudantes, cuja tarefa foi proposta e discutida numa turma de 1.º ano. A figura 11 apresenta a transcrição do excerto da discussão relativa à resolução de um dos alunos (Anexo 3), que apresentou dificuldades na realização da tarefa, e a respetiva análise é apresentada na figura 12.

Figura 11

Excerto da discussão sobre a questão 1 realizada pelo aluno C (Relatório B, p. 9)

Aluno C – Eu fiz assim.

Estagiária – E quantos cubos tem?

Aluno C – Tem 8.

Estagiária – Então mostra-me lá como fizeste.

Aluno C – Aqui são 3 (a apontar para a figura 2) e aqui são 5 (a apontar para a figura 3). E 3 mais 5 é 8 (a apontar para a figura 4)

As estudantes evidenciam compreender que um aluno pode usar um processo de raciocínio, mesmo sendo incorreto. Neste caso, o aluno justifica os oito cubos obtidos para a quarta figura, por assumir que teria de adicionar os termos anteriores.

Figura 12

Análise da resolução do aluno C (Relatório B, p. 12)

Quer na questão 1 quer na questão 2, o aluno C não tem em conta a sequência apresentada, sendo que através do diálogo relativo à questão 1, se percebe que o aluno usa o processo de raciocínio de justificar referido por Ponte et al. (2017)[2] ao dizer que o termo de ordem 4 tem 8 cubos, porque a soma dos dois termos anteriores, 3+5, é igual a 8.

Relativamente ao processo de generalizar, as estudantes referem um outro aluno cuja resolução (Anexo 4) só foi completada no momento da discussão (Figura 13). A respetiva análise encontra-se na figura 14.

Figura 13

Excerto da discussão sobre a questão 3 realizada pelo aluno E (Relatório B, p. 10)

Aluno E- Aqui eu não sei.

Estagiária- sabes, sabes, vê lá se na sala encontras estes números juntos.

[2] Versão draft de Ponte et al. (2020)

Aluno E – ahh... são os verdes? (aponta para o cartaz)

Estagiária- Sim, boa, e como se chamam?

Aluno E- Não sei, mas é para pintar?

Estagiária- Não, é só para escreveres o nome, esta lá escrito (aponta para o cartaz), vê se encontras.

Aluno E- É os ímpares.

Neste caso, as estudantes referem que o aluno E inicialmente não conseguiu generalizar os termos obtidos, pelo reconhecimento de que seriam todos os números ímpares, tendo reconhecido os números ímpares, já no momento da discussão, com a orientação da estagiária que chamou a atenção para o cartaz afixado na sala.

Figura 14

Análise da resolução do aluno E (Relatório B, pp. 12-13)

Já o aluno E, apesar de não conseguir generalizar e de mostrar que ainda tem alguma dificuldade em identificar os números ímpares, consegue chegar à resposta, ainda que inicialmente sem vocabulário matemático, "ahh... são os verdes? (aponta para o cartaz)" no entanto consegue chegar aos números ímpares após consultar o quadro.

Em suma, a análise dos relatórios dos pares de estagiários, aqui ilustrada apenas com dois exemplos, evidencia evolução e consolidação das aprendizagens realizadas pelos futuros professores, não só no que respeita à capacidade de identificar e fundamentar os processos de raciocínio de alunos do 1.º Ciclo, mas também no que se relaciona com as ações docentes, cuja análise não foi focada no presente capítulo, nomeadamente com o tipo de questões colocadas aos alunos para os guiar e promover os seus processos de raciocínio.

A exploração da tarefa "Raciocínio matemático envolvendo a medida"

A tarefa "Raciocínio matemático envolvendo a medida" (Anexo 5) foi explorada na 7.ª aula da experiência de formação. Tal como nas anteriores, a tarefa de formação é constituída, numa primeira parte pela tarefa a ser explorada com crianças do ensino básico, a partir da qual são propostas às estudantes, entre outras, as seguintes questões (Figura 15):

Figura 15

Excerto da tarefa "Raciocínio matemático envolvendo medida"

> Resolva a tarefa[3] Comparar perímetros.
>
> Que objetivos de aprendizagem consideraria para uma aula onde propusesse a tarefa acima apresentada? Apresente algumas razões que fundamentem a sua escolha.
>
> Indique processos de raciocínio que podem ser mobilizados pelos alunos na realização desta tarefa.
>
> Antecipe possíveis dificuldades dos alunos na realização da tarefa e indique possíveis ações do professor para apoiar os alunos a superar essas dificuldades.

Na segunda parte da tarefa eram apresentadas algumas resoluções de alunos do 4.º ano e era solicitado às estudantes que as analisassem do ponto de vista dos processos de RM bem como identificassem dificuldades dos alunos e ações do professor que os ajudassem a ultrapassar essas dificuldades. Finalmente, numa terceira parte, era apresentada uma resolução de um aluno do 5.º ano e era pedido o seguinte: *Como poderia preparar a exploração da tarefa de modo que todos os alunos da sua turma pudessem chegar a uma justificação deste tipo na resolução da questão 3?*

No sentido de rentabilizar o tempo dedicado à tarefa de formação, na sala de aula, a professora da turma tinha pedido às estudantes para resolverem, em casa, a tarefa relativa aos alunos do ensino básico. Assim, numa primeira parte da aula, as estudantes partilharam em pequenos grupos, em salas simultâneas da plataforma digital, a resolução da tarefa, bem como responderam às questões aí apresentadas.

A maior parte das estudantes resolveu corretamente a tarefa dos alunos, embora tenha havido algumas que não tiveram em conta as condições de construção dos polígonos com 6 lados, o que as levou a construções incorretas.

Do ponto de vista dos objetivos, a maior parte formula objetivos de aprendizagem muito gerais e relacionados, sobretudo, com os tópicos área e perímetro de uma figura geométrica. No que diz respeito aos objetivos associados a processos de RM, a maioria identifica como objetivo da tarefa – Formular e testar conjeturas, justificando a sua escolha pela existência da seguinte questão na tarefa dos alunos: *A Maria diz que há muitas figuras com 6 lados que têm o mesmo perímetro de B. Concordas? Explica porquê.*

Quando, na questão 1.3, se pede explicitamente para indicarem os processos de raciocínio que podem ser mobilizados pelos alunos na resolução da tarefa, os vários grupos de estudantes indicam os identificados na tabela 2.

[3] Tarefa no anexo 5

Tabela 2

Processos de raciocínio identificados na tarefa 'Raciocínio matemático envolvendo medida'

Grupo	Processos de RM identificados			
	Exemplificar	Conjeturar	Generalizar	Justificar
1	X	X		
2	X	X	X	X
3	X	X	X	X
4	X	X	X	X
5	X	X		X

A análise da tabela 2 evidencia que todos os grupos consideraram que os alunos mobilizam o processo de RM exemplificar, pois, tal como afirma um deles (figura 16):

Figura 16

Produção escrita do grupo 2

As crianças para justificarem os seus argumentos poderão exemplificar através de determinados registos. Por exemplo, na questão 2, em que é solicitado o desenho das duas figuras com o mesmo perímetro.

No caso do grupo 2, exemplificar parece estar associado à justificação enquanto um outro grupo, o grupo 3, associa este processo ao teste de uma conjetura, tal como se evidencia na sua produção escrita (figura 17).

Figura 17

Produção escrita do grupo 3

Os alunos acabam por exemplificar ao testarem a conjetura, e partindo dos resultados obtidos, justificar e generalizar o seu ponto de vista.

Efetivamente, a sua produção escrita mostra que relacionam a procura de exemplos com o testar a conjetura formulada na questão 3: A Maria diz que há muitas figuras com 6 lados que têm o mesmo perímetro de B. Associada a esta questão, as estudantes referem conjeturar, identificando-o como um dos processos de RM que pode ser mobilizado. Contudo, há entendimentos diferentes sobre este processo: há estudantes que referem apenas que os alunos terão de testar a conjetura formulada na questão 3, enquanto outras preveem que possam ser formuladas outras conjeturas que poderão não ser testadas (figura 18):

Figura 18

Produção escrita do grupo 2 sobre teste de conjeturas

> Eventualmente as crianças farão conclusões sem confirmar as mesmas, através de registos escritos, e dessa forma, estão a fazer conjeturas apenas mediante aquilo que pensam saber.

O processo de generalizar é referido por 3 dos 5 grupos de estudantes como sendo um dos que os alunos podem mobilizar (figura 19), embora não seja identificado corretamente por todas as estudantes (Figura 19).

Figura 19

Produção escrita do grupo 2 sobre o processo de generalizar

> As crianças ao compararem o perímetro de cada figura, e afirmarem que as figuras têm o perímetro igual quando a soma de todos os lados é a mesma, estão a fazer uma generalização pois, estão a afirmar um procedimento que é válido para um conjunto de figuras.

As estudantes deste grupo identificam o processo de generalizar associado à afirmação anterior, embora esta pareça estar relacionada com o conhecimento que as crianças têm sobre o que é o perímetro. Ainda assim, ao analisarem a afirmação de Melissa e Diogo: "Se tem o mesmo número de lados tem o mesmo perímetro" (tarefa de formação) identificam-na como uma generalização incorreta (Figura 20), evidenciando reconhecer que generalizar consiste em estender uma ideia, propriedade ou procedimento, aplicável a um determinado conjunto de objetos, a um conjunto mais alargado de objetos (Carraher, Martinez, & Schliemann, 2008; Jeannote & Kieran, 2017), o que não se verifica na afirmação de Melissa e Diogo.

Figura 20

Produção escrita do grupo 2 sobre uma generalização incorreta

> Para apoiar a Melissa e o Diogo...O professor pode apresentar figuras com o mesmo número de lados e com perímetros diferentes, mostrando que a sua generalização estava errada.

Uma das estudantes do grupo que não referiu o generalizar como um dos processos que poderia ser mobilizado pelos alunos na resolução desta tarefa, usa o argumento na figura 21 para a sua opção, durante a discussão coletiva da tarefa.

Figura 21

Produção escrita da Estudante CR

> Nós pensámos no generalizar, mas depois pensámos assim, nós não conseguimos concluir que sejam mesmo todas as figuras em que o perímetro seja igual e tenha seis lados". Nós não conseguimos arranjar, apesar de termos exemplos, não conseguimos, lá está, não conseguimos arranjar uma justificação, uma coisa que nos permita generalizar.

Embora tenham pensado na generalização, uma vez que as próprias estudantes, durante a fase de resolução da tarefa, não conseguiram generalizar, reconhecendo a propriedade válida para todas as figuras nas condições dadas, não identificaram esta como sendo um dos processos que os alunos conseguiriam mobilizar. Também o outro grupo que não referiu o generalizar usa um argumento semelhante, associado às suas próprias dificuldades de generalizar durante a resolução inicial da tarefa.

Justificar é um processo referido por todos os grupos de estudantes, exceto um. O grupo 2 regista na sua produção escrita (Figura 22):

Figura 22

Produção escrita do grupo 2 sobre Justificar

> Através do que as crianças sabem acerca do que é uma figura com o mesmo perímetro, e como este se calcula, estas chegam a conclusões, apresentando argumentos lógicos baseados em ideias matemáticas.

A análise do registo escrito mostra que as estudantes associam a justificação ao uso de argumentos lógicos baseados em ideias matemáticas, na aceção de autores como Jeannotte e Kieran (2017), embora não tenham dado evidências do modo como poderia surgir a justificação a propósito de figuras com o mesmo perímetro. Apenas um grupo não considera a justificação enquanto processo de RM, não tendo registado argumentos a esse propósito.

Na discussão com toda a turma sobre a tarefa de formação, e no que respeita aos processos de RM presentes, todos os grupos chegam à conclusão de que a justificação é um dos processos presente na resolução da tarefa, embora não o tenham registado por escrito. Esta conclusão baseia-se no facto, por si identificado, de que todos os alunos teriam de apresentar argumentos lógicos para uma determinada afirmação. Foi também referido, ainda na discussão coletiva, o papel do contræxemplo na justificação, sobretudo se se trata de refutar uma determinada afirmação.

A análise dos seus registos evidencia que as estudantes têm alguma dificuldade em reconhecer os processos de RM, em os distinguir uns dos outros e em prever aqueles que os alunos do ensino básico podem mobilizar durante as possíveis resoluções da tarefa.

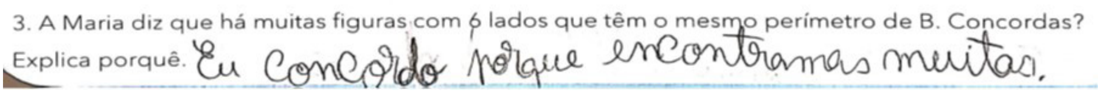
A exploração da tarefa Comparar perímetros no 1.º CEB

As dificuldades reveladas pelas estudantes não impediram algumas de levar a tarefa *Comparar perímetros* para a sala de aula em que estagiavam, propondo-a a alunos do 4.º ano de escolaridade. De um modo geral, a tarefa foi de difícil realização pelos alunos, uma vez que muitos não conseguiram compreender as condições de construção das figuras com 6 lados. Depois de ser ultrapassada essa dificuldade, a questão que se revelou mais complexa foi novamente a seguinte: *A Maria diz que há muitas figuras com 6 lados que têm o mesmo perímetro de B. Concordas? Explica porquê.*

Numa das turmas do 4.º ano, os alunos tentaram exaustivamente construir o maior número possível de figuras para poderem concordar com a opinião da "Maria", mas justificam dizendo apenas porque "há muitas figuras" (figura 23).

Figura 23

Justificação de uma aluna do 4.º ano


3. A Maria diz que há muitas figuras com 6 lados que têm o mesmo perímetro de B. Concordas?
Explica porquê. Eu Concordo porque encontramos muitas.

Contudo o episódio da Figura 24 mostra que as alunas, embora não justifiquem matematicamente, têm uma ideia que poderia conduzir a uma generalização:

Figura 24

Excerto de um relatório de estágio de uma estudante

Sara: Eu concordo com a Maria, e vocês?

Inês: Eu concordo. Já fiz uma...Ah! Não. Tenho duas. (iniciam a contabilização e comparação das figuras que cada elemento do grupo tem)

Sara: As figuras vão ter todas o formato de 'bota'. Só que há muitas.

(...)

Sara: Margarida, esta não tem seis lados!

Margarida: Pois não... (apaga) Tenho de tentar fazer mais!

Leonor: Aqui diz explica porquê...O que escrevemos?

Margarida: Concordo, porque encontrámos muitas.

Rigor (p. 81, 2022)

A aluna Sara refere que as figuras vão todas ter uma certa forma e são muitas, o que, de certo modo, apela para uma consciência de que as figuras que obedecem ao critério apresentado são muitas, provavelmente difíceis de contabilizar e aproximando-se da ideia de que são infinitas.

Tal como sugerido em Mendes, Delgado e Mata-Pereira (2022), no sentido de auxiliar os alunos a fazer a generalização, no momento de discussão final, a estudante estagiária começa por solicitar aos alunos que observem o retângulo e "sugerir, em seguida, que visualizem o que se 'altera' da figura A para obter a B e que procurem desenhar mais figuras que correspondam a essa 'alteração'" (p. 44) (Figura 25).

Figura 25

Figura retirada de Mendes, Delgado e Mata-Pereira (2022, p. 44)[4]

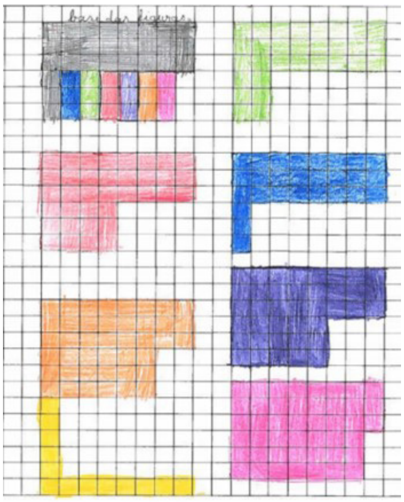


Figura 26

Reflexão escrita final sobre a exploração da tarefa na turma do 4.º ano – I

> Neste sentido, partindo da exemplificação da figura 25 (Mendes, Delgado & Mata-Pereira, 2022)[4] e da figura "base" com maior área, pausadamente, foram sendo apagados grupos de 3 quadrículas do quadro e, partindo deste contexto, os alunos iam sendo questionados relativamente ao perímetro da figura: "Será que o perímetro se vai alterar ao apagar este bocado?". As primeiras respostas eram afirmativas, no entanto, à medida que a figura estava a ficar cada vez com menor área, as respostas relativas ao perímetro ser diferente de 28 começaram a ser menos.

A mesma estagiária refere que os alunos tiveram muitas dificuldades e só conseguiram chegar à generalização e à justificação durante a discussão coletiva, na sistematização feita pela professora, como evidenciam os excertos da sua reflexão escrita (Figuras 26 e 27).

[4] Foi disponibilizada às estudantes uma versão preliminar desta brochura

Figura 27

Reflexão escrita final sobre a exploração da tarefa na turma do 4.º ano - II

> Este aspeto [a dificuldade dos alunos] poderá estar relacionado com a falta de prática na exploração das tarefas que fomentem o raciocínio (...). No entanto, é extremamente positivo ter-se criado "condições favoráveis" para que os alunos aprendam a raciocinar matematicamente, algo que, segundo (Boavida, 2008, p. 1), não passa apenas por "propor-lhes tarefas com determinadas características, mas por ajudá-los a desenvolver um hábito de pensamento que tem a ver com o 'porquê das coisas'".

As futuras professoras evoluíram no seu conhecimento sobre processos de raciocínio matemático e parece terem ganho confiança levando à prática e conduzindo o desenvolvimento da tarefa numa turma do 4.º ano. No entanto, tal como evidenciado anteriormente manifestaram algumas dificuldades na realização da tarefa com os alunos, em particular, no momento de discussão coletiva. Estas dificuldades parecem estar associadas não só à complexidade das tarefas que promovem o RM, mas também ao facto de os alunos do 1.º CEB não estarem habituados a trabalhar numa perspetiva de ensino exploratório e de as futuras professoras terem, naturalmente, pouca experiência na prática de ensino.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os estudantes da primeira turma evidenciam um domínio das propriedades das pirâmides e manifestam dúvidas pontuais na identificação dos processos de RM presentes. Ao levarem à prática tarefas que envolvem processos de raciocínio matemático diferentes das trabalhadas nas suas aulas mostram terem realizado aprendizagens sobre o assunto, identificando de forma clara os processos de RM que durante a experiência de formação pareciam confundir. A forma como analisam o trabalho dos seus alunos na prática mostra a sua compreensão dos diferentes processos de RM presentes, podendo concluir-se que evoluíram e consolidaram as suas aprendizagens.

Os estudantes da segunda turma parecem ter algumas dúvidas no reconhecimento dos processos de RM e, em especial, em distinguir generalizar e justificar. Também revelam alguma dificuldade na antecipação dos possíveis processos de raciocínio que os alunos do 1.º CEB poderão realizar, o que pode ser devido à sua reduzida experiência, uma vez que tinham apenas realizado um estágio no 1.º CEB. De notar que estes futuros professores tinham no ano anterior frequentado o 1.º ano do mestrado dedicado à Educação de Infância. Manifestam, no entanto, empenho no seu processo de desenvolvimento, quando se voluntariam para levar a tarefa que trabalharam para a sua prática pedagógica, envolvendo-se na condução de uma aula, numa turma do 4.º ano, segundo uma perspetiva de ensino exploratório e, em particular, orientando uma discussão coletiva sobre as várias resoluções. Este aspeto evidencia que, apesar das dificuldades, parecem ter ganho alguma confiança nas suas capacidades.

As tarefas de formação elaboradas bem como a sua exploração, inicialmente em pequenos grupos, seguida pela discussão em grande grupo, mostraram-se adequadas e contribuíram para que os futuros professores aprofundassem o seu conhecimento matemático e didático associado ao raciocínio matemático. Os futuros professores mostraram ter adquirido conhecimentos que vão para além do "saber-fazer", sendo capazes de analisar e compreender estratégias e soluções diferentes (Ball & Bass, 2003). Assim, ao terem oportunidade de se envolver na resolução das tarefas de formação viveram momentos de aprendizagem profissional, como referem Davis e Krajcik (2005), tendo posteriormente sido capazes de usar esses conhecimentos nas suas práticas de ensino. O ter levado as tarefas para o contexto de estágio parece ter tido uma importância acrescida na medida em que contribuiu para a evolução e consolidação das aprendizagens realizadas, constituindo-se como mais uma oportunidade de aprendizagem.

Ao serem confrontados com experiências de aprendizagem consistentes sobre aspetos-chave do currículo de Matemática (Ponte & Chapman, 2008), os futuros professores realizaram experiências significativas (Hiebert et al., 2003) sobre o tema do RM que é hoje parte integrante do currículo de Matemática nos diferentes níveis de ensino (Canavarro et al., 2021; ME, 2018). Deste modo, as tarefas realizadas durante a experiência de formação constituíram momentos produtivos de aprendizagem profissional (Ribeiro & Ponte, 2020).

Os resultados deste trabalho relevam a importância de a formação inicial de professores ter uma forte ligação com a prática letiva do nível de ensino a que se destina. Por um lado, importa incluir nas tarefas de formação análise de episódios com alunos a resolver a tarefa ou as próprias resoluções dos alunos. Por outro, é fundamental o envolvimento dos futuros professores na lecionação das tarefas, o que pressupõe a sua planificação, concretização e reflexão posterior.

REFERÊNCIAS

Ball, D., & Bass, H. (2003). Toward a practice-bsed theory of mathematical knowledge forteaching. In B. Davis & E. Simmt (Eds.), *Proceedings of 2002 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group* (pp. 3-14). AB:CMESG/GCEDM.

Boavida, A. M. (2008). Raciocinar para aprender e aprender a raciocinar. *Educação e Matemática, 100*, 1.

Brendefur, J., & Frykholm, J. (2000). Promoting mathematical communication in the classroom: Two preservice teachers' conceptions and practices. *Journal of Mathematics Teacher Education, 3,* 125–153.

Brunheira, L. (2019). *O desenvolvimento do raciocínio geométrico na formação inicial dos professores dos primeiros anos.* Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. http://hdl.handle.net/10451/38922.

Canavarro, A. P., Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M. J., Correia, P., Marques, P., & Espadeiro, G. (2021). *Aprendizagens essenciais de matemática no ensino básico.* ME-DGE. https://www.dge.mec.pt/noticias/aprendizagens-essenciais-de-matematica

Davis, E. A., & Krajcik, J. S. (2005). Designing educative curriculum materials to promote teacher learning. *Educational Researcher, 34*(3), 3–14.

Ellis, A., Özgür, Z., & Reiten, L. (2019). Teacher moves for supporting student reasoning. *Mathematics Education Research Journal, 31*(2), 107-132. https://doi.org/10.1007/s13394-018-0246-6

Hiebert, J., Morris, A. K., & Glass, B. (2003). Learning to learn to teach: An "experiment"model for teaching and teacher preparation in mathematics. *Journal of MathematicsTeacher Education, 6*(3), 201-222

Jeannotte, D., & Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 96*(1), 1–16. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9761-8

Lannin, J. K., Elliott, R., & Ellis, A. B. (2011). *Developing essential understanding of mathematical reasoning for teaching mathematics in prekindergarten-grade 8*. NCTM.

Lin, F.-L., Yang, K.-L., Lee, K.-H., Tabach, M., & Stylianides, G. (2012). Principles of task design for conjecturing and proving. In G. Hanna & M. de Villiers (Eds.), *Proof and Proving in Mathematics Education* (pp. 305–325). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6_13

Mata-Pereira, J. & Ponte, J. P. (2016). Ações do professor para o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos. *Educação e Matemática, 137*, 38-41.

ME (2018). *Aprendizagens essenciais do ensino secundário.* Disponível em: http://www.dge.mec.pt/aprendizagens-essenciais-ensino-secundario

Mendes, F., Delgado, C., Mata-Pereira, J. (Org.) (2022). *Geometria. Raciocínio matemático nos 1.º e 2.º ciclos. Brochuras Reason.* http://reason.ie.ulisboa.pt/produtos/

Mendes, F., Brocardo, J., & Delgado, C. (2022). Formar professores visando promover o raciocínio matemático dos alunos: uma abordagem que articula teoria e prática. Em C. Delgado, J. Brocardo, & F. Mendes, F. (Org.), *Desenvolver o raciocínio matemático dos alunos práticas e desafios* (pp2-16). Instituto Politécnico de Setúbal, Escola Superior de Educação. Projeto REASON. http://reason.ie.ulisboa.pt/produtos/

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Associação de Professores de Matemática.

Ponte, J. P., & Chapman, O. (2008). Preservice mathematics teachers' knowledge and development. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed., pp. 225-263). Routledge.

Ponte, J. P., Quaresma, M., & Mata-Pereira, J. (2020). Como desenvolver o raciocínio matemático na sala de aula?". *Educação e Matemática, 156*, 7-11.

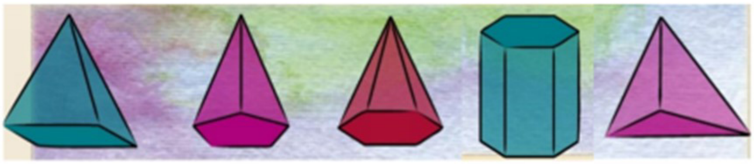
REASON (2022). P*rincípios para elaboração de tarefas para promover o raciocínio matemático nos alunos*. Projeto REASON. http://reason.ie.ulisboa.pt/produtos/

Ribeiro, A. J., & Ponte, J. P. (2020). Um modelo teórico para organizar e compreender as oportunidades de aprendizagem dos professores para ensinar matemática. *Zetetiké, 28*, 1-20, DOI: 10.20396/zet.v28i0.8659072.

Stylianides, A. J. & Stylianides, G. J. (2006). Content knowledge for mathematics teaching: the case of reasoning and proving. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th PME International Conference* (Vol. 5, pp. 201-208). PME.

Anexo 1

Considere a tarefa Vamos conhecer as pirâmides, proposta a alunos do 3.º ano. No ano anterior, a turma já tinha contactado com pirâmides e prismas, numa primeira abordagem às suas características. Desta forma, a professora introduziu a tarefa projetando a imagem em baixo e perguntando Qual é o intruso?



Depois da discussão inicial, os alunos iniciaram a resolução da tarefa a pares, usando como material alguns modelos de pirâmides em cartolina e madeira, paus de fósforo, palitos e bolinhas de plasticina.

- Analise a tarefa e explicite quais são as propriedades das pirâmides que poderão emergir a partir da sua resolução.
- Identifique, no documento Aprendizagens Essenciais, os objetivos de aprendizagem para os quais a tarefa pretende contribuir.
- Identifique eventuais processos de raciocínio envolvidos.
- Leia o seguinte diálogo.

A investigadora aproximara-se de um par que estava a resolver a questão 4. Os alunos já tinham analisado a possibilidade de construir uma pirâmide com 13 arestas usando o material, como mostra a imagem. Estavam no momento a analisar a mesma questão com 15 arestas.

> Investigadora — Então vá, com 15 pauzinhos, 15 arestas, o que é que acontecia?
>
> Aluna — Sobrav... faltava 1.
>
> Investigadora — Então e puseste quantos palitos na base?
>
> Aluna — Oito.
>
> Investigadora — Oito. E agora quantos tens para pôr nas arestas laterais?
>
> Aluna — Ai meu Deus...
>
> Investigadora — Então, podes olhar para o que tu fizeste!
>
> Aluna — Sete.
>
> Investigadora — E então, podemos construir com 15?
>
> Aluna — Não... faltava um pauzinho... com números ímpares não dava.

Investigadora — Ah! Então diz lá porque é que será que com números ímpares não dá.

Aluna — Porque falta um ou sobra um.

Investigadora — E isso acontece porquê? O que é que acontece às arestas nas pirâmides?

Aluna — Hum... Aqui (aponta para a base) e aqui (aponta para o lugar onde estariam as arestas laterais) têm de ter o mesmo número.

- Discuta como foi evoluindo o raciocínio da aluna, relacionando com a interação que estabeleceu com a investigadora.
- Explicite o papel do material manipulável nesta situação e ao longo da tarefa.

• Analise a seguinte resposta:

> **5. Regista agora tudo o que descobriste sobre as pirâmides.**
>
> Nós descobrimos quia as pirâmides tenhem de ter sempre 5 ou mais vertices e elas tenhem sempre um vertice em cima.

Imagine que esta resposta surge numa aula sua. O que diria ou perguntaria ao seu autor? Fundamente a sua proposta.

Anexo 2

Vamos conhecer as pirâmides

1. Começa por estudar as pirâmides que o teu grupo tem e preenche os espaços:

Número de faces ____________	Número de faces ____________
Número de vértices __________	Número de vértices __________
Número de arestas ___________	Número de arestas ___________
Base da pirâmide _______________	Base da pirâmide _______________

2. O grupo da Marisa, da Ana, do Pedro e do António está a construir pirâmides com pauzinhos e bolinhas de plasticina, mas têm pouco material.

   A pirâmide da Ana tem na base uma figura com 8 pauzinhos. No topo já colocou 5 pauzinhos, como mostra a imagem.

   – Quantos pauzinhos lhe faltam? ____________________

   – Quantos pauzinhos precisa ao todo? _________________

   – E quantas bolinhas de plasticina precisa ao todo? _______

   O António diz aos colegas: "Guardem 8 bolinhas de plasticina para mim!".

   Como será a base da pirâmide que o António quer fazer?

3. A Marisa está a fazer uma pirâmide com 9 palitos na base. Quantos palitos precisará mais? E se forem 10 palitos na base? Explica como pensaste.

4. No fim do trabalho, todos os grupos mostram as pirâmides que construíram. A professora pergunta:

   – Alguém me pode mostrar uma pirâmide com 13 arestas?".

   Como ninguém responde, a professora pede outra pirâmide com 15 arestas. Então o Pedro responde:

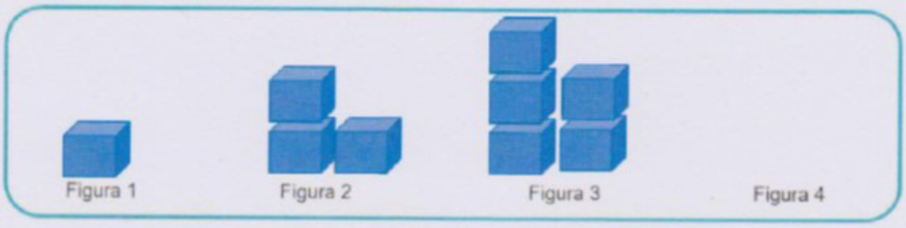
   – Não dá para construir pirâmides com esses números.

   Achas que o Pedro tem razão? Porquê?

5. Regista agora tudo o que descobriste sobre as pirâmides.

Anexo 3

Repara na seguinte sequência de figuras. Podes construí-la usando os cubos.



1. Descobre como será a figura 4.

1.1. Quantos cubos tem a figura 4? Mostra como chegaste ao teu resultado.

R: A figura 4 tem 8 cubos.

2. Quantos cubos tem a figura 6? Mostra como chegaste ao teu resultado.

R: Tem 10 cubos.

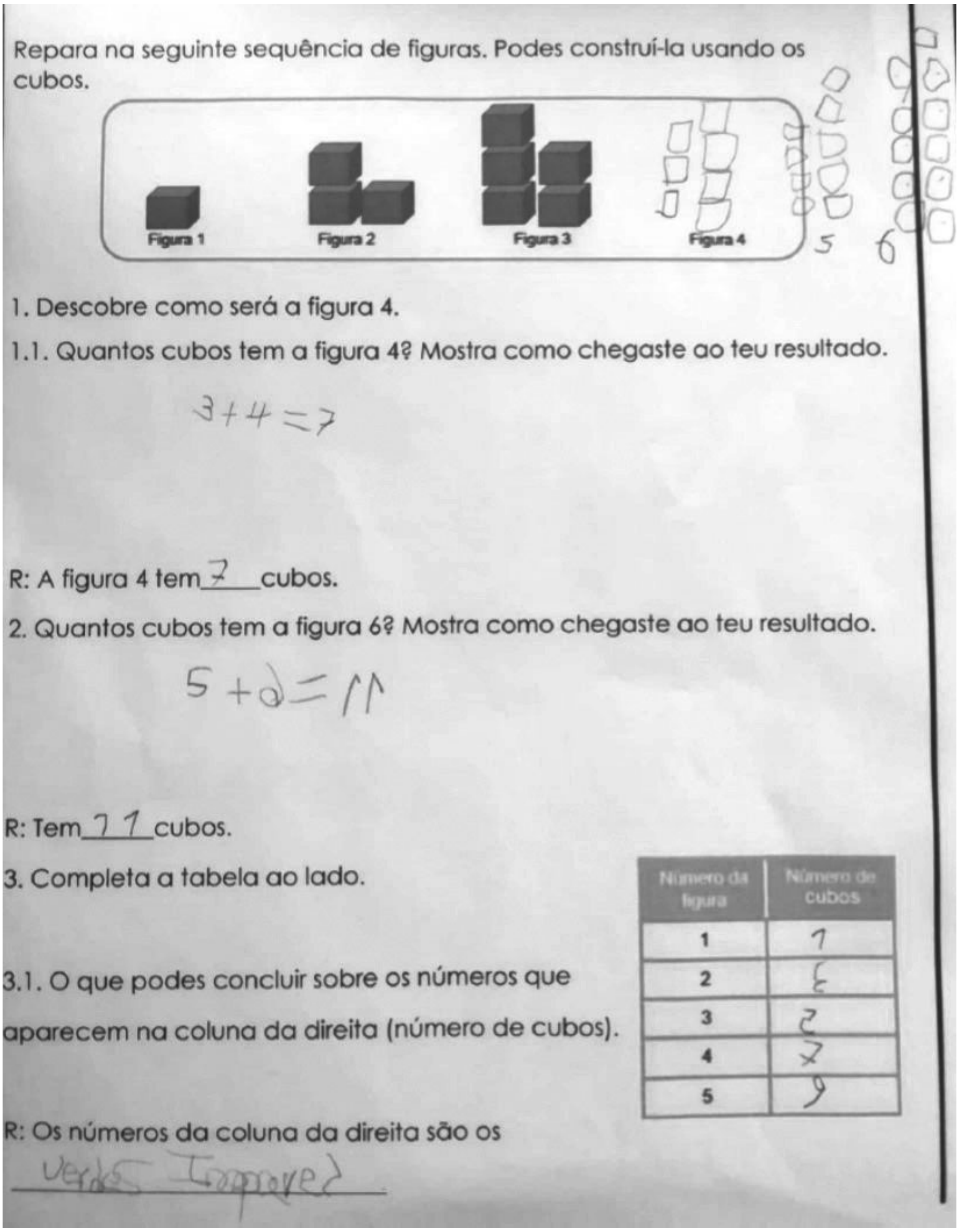
3. Completa a tabela ao lado.

Número da figura	Número de cubos
1	
2	
3	
4	
5	

3.1. O que podes concluir sobre os números que aparecem na coluna da direita (número de cubos).

R: Os números da coluna da direita são os ______________________

Anexo 4



Repara na seguinte sequência de figuras. Podes construí-la usando os cubos.

1. Descobre como será a figura 4.

1.1. Quantos cubos tem a figura 4? Mostra como chegaste ao teu resultado.

3+4=7

R: A figura 4 tem 7 cubos.

2. Quantos cubos tem a figura 6? Mostra como chegaste ao teu resultado.

5+2=11

R: Tem 11 cubos.

3. Completa a tabela ao lado.

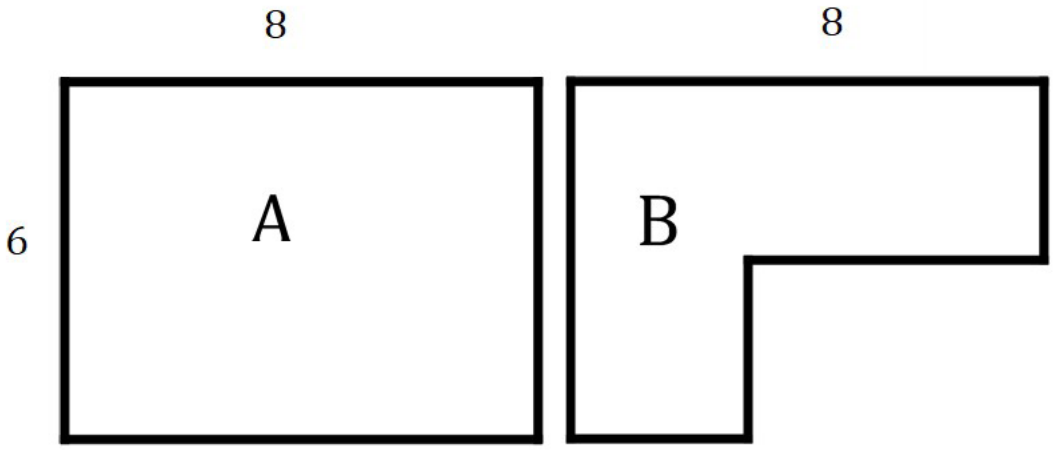
Número da figura	Número de cubos
1	1
2	3
3	5
4	7
5	9

3.1. O que podes concluir sobre os números que aparecem na coluna da direita (número de cubos).

R: Os números da coluna da direita são os [illegible]

Anexo 5

Comparar perímetros

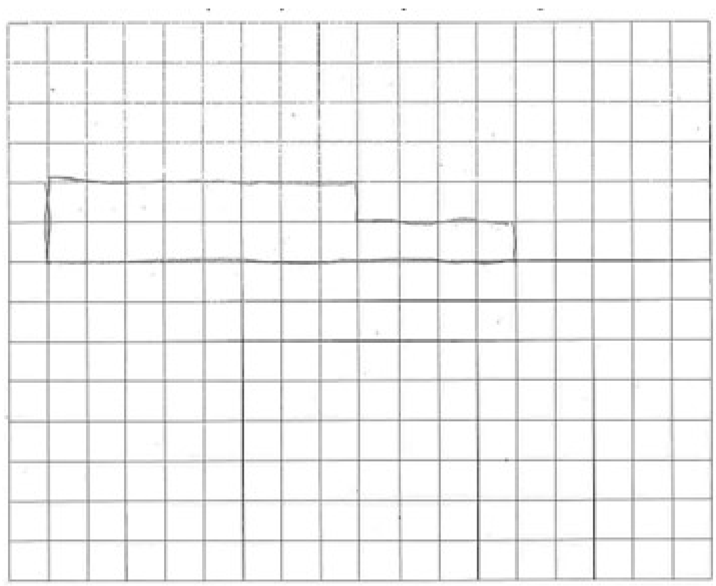


- Compara os perímetros das figuras A e B. Qual das figuras terá maior perímetro? Ou será que têm o mesmo perímetro?
- Desenha duas figuras com 6 lados e com o mesmo perímetro de B. (Podes usar papel quadriculado).
- A Maria diz que há muitas figuras com 6 lados que têm o mesmo perímetro de B. Concordas? Explica porquê.

1. Resolva a tarefa.
   - Que objetivos de aprendizagem consideraria para uma aula onde propusesse a tarefa acima apresentada? Apresente algumas razões que fundamentem a sua escolha.
   - Indique processos de raciocínio que podem ser mobilizados pelos alunos na realização desta tarefa.
   - Antecipe possíveis dificuldades dos alunos na realização da tarefa e indique possíveis ações do professor para apoiar os alunos a superar essas dificuldades.

2. Numa turma do 4.º ano, três alunos apresentaram as seguintes resoluções e explicações sobre a resolução da questão 3.

Gonçalo e Matilde

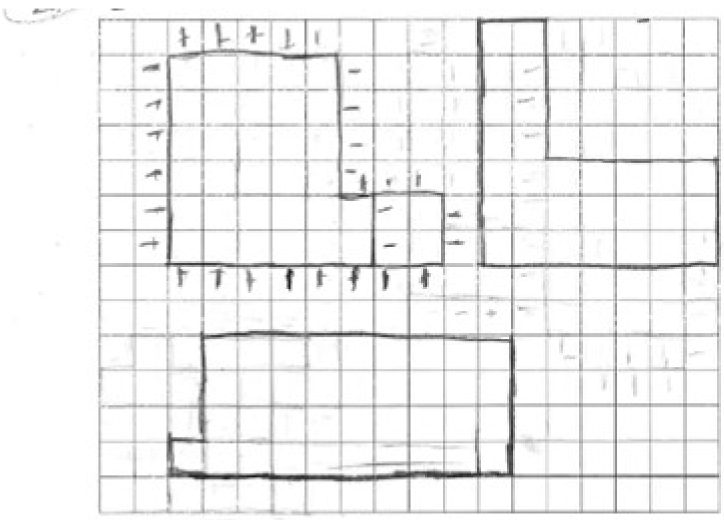


Explica agora se é verdade o que diz a Maria.

Sim é verdade porque conseguimos fazer outro com 6 lados e o perímetro do B.

3

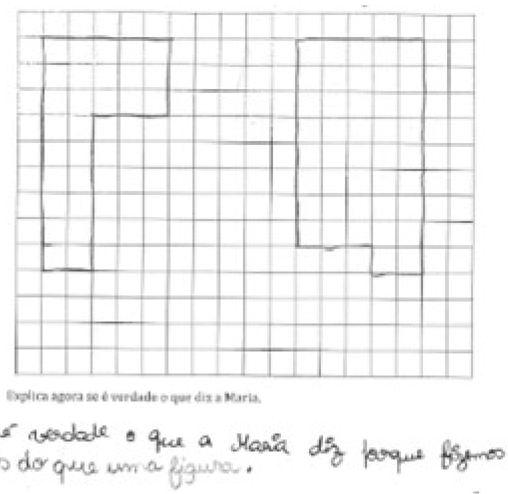
Melissa e Diogo



Explica agora se é verdade o que diz a Maria.

Sim é verdade, porque se tem o mesmo número de lado tera o mesmo perímetro.

Areana e Luna



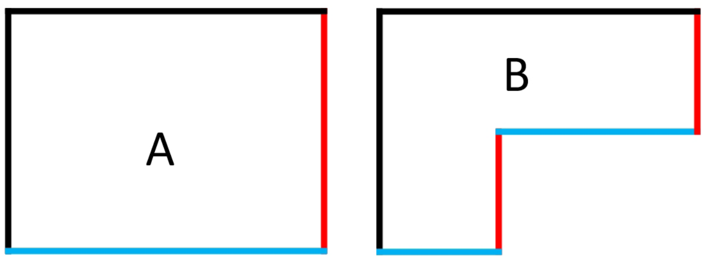
– Indique os processos de raciocínio que identifica nas resoluções dos alunos e nas explicações que deram.

– Identifique dificuldades dos alunos que as resoluções apresentadas evidenciam.

– Como poderia apoiar estes alunos a melhorar o seu raciocínio na resolução da tarefa?

3. Na resolução da questão 1 uma aluna do 5.º ano deu a seguinte justificação:

[As figuras A e B] têm o mesmo perímetro. Porque pego neste lado (aponta para o lado a vermelho em A) e passo-o para ali (aponta para os lados a vermelho de B). E assim estes lados ficam iguais ao do retângulo [A]. E posso fazer o mesmo com os lados a azul. Por isso os lados em B ficam iguais aos lados em A. O perímetro é igual.



– Como poderia preparar a exploração da tarefa de modo a que todos os alunos da sua turma pudessem chegar a uma justificação deste tipo na resolução da questão 3 (A Maria diz que há muitas figuras com 6 lados que têm o mesmo perímetro de B. Concordas? Explica porquê).