A JUSTIFICAÇÃO DE GENERALIZAÇÕES EM GEOMETRIA NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES

Lina Brunheira
ESELx -Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Lisboa
UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
lbrunheira@eselx.ipl.pt

João Pedro da Ponte
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
jpponte@ie.ulisboa

Resumo: Esta comunicação enquadra-se numa experiência de formação com futuras professoras e educadoras do 2.º ano de uma LEB, em que estas produziram justificações de generalizações num contexto de ensino exploratório. O estudo tem como objetivo compreender a forma como justificam generalizações sobre famílias de figuras geométricas. Os dados foram recolhidos por registos áudio e vídeo e das produções escritas das formandas, focando-se nos argumentos usados para justificar generalizações sobre famílias de figuras. Na análise, mereceu especial atenção o tipo de argumentos, o seu grau de generalidade e a sua validade. Os resultados mostram que as formandas revelam dificuldades sobre o que significa justificar e sobre o processo de justificar generalizações, apresentando inicialmente argumentos inadequados. A associação da justificação ao *investigar o porquê* da generalização, bem como a natureza da tarefa e a interação na sala de aula, potenciaram a melhoria das justificações. Destaca-se a necessidade de enfatizar a construção de um discurso argumentativo que evidencie que a generalização se aplica a todo o domínio considerado.

Palavras-chave: geometria, raciocínio, justificação, generalização, formação inicial.

Introdução

Nas últimas duas décadas tem havido um interesse crescente no raciocínio matemático que, como afirmam Yackel e Hanna (2003), pode ser observado em documentos de orientação curricular como a edição de 2000 dos *Princípios e normas da matemática escolar*, onde se elege o raciocínio e a demonstração como uma das normas de processo que devem ser parte integrante da experiência matemática a iniciar desde o pré-escolar (NCTM, 2007). Em Portugal, também o raciocínio matemático mereceu um especial destaque no Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte et al., 2007), como uma capacidade transversal que "envolve a construção de cadeias argumentativas que começam pela simples justificação de passos e operações na resolução de uma tarefa e evoluem progressivamente para argumentações mais complexas" (p. 8), devendo merecer uma grande atenção em todos os ciclos de ensino.

Também a investigação em educação matemática tem acompanhado o interesse sobre o raciocínio, especialmente no que respeita à argumentação e demonstração (Hanna, 2000; Stylianides, 2007). Do ponto de vista dos temas matemáticos e níveis de escolaridade, como referem Stylianides, Bieda e Morselli (2016), a geometria continua a ser o campo mais profícuo para a investigação, particularmente no ensino secundário. Entre as linhas de investigação identificadas na última década surgiram estudos centrados na sala de aula e que procuram encontrar formas de apoiar os alunos na argumentação e demonstração. Estes autores consideram que esta área beneficiaria com investigação que desenhasse ferramentas práticas, para utilização em sala de aula, baseadas em ideias teóricas. Já na área da formação de professores, consideram que o foco da investigação mantém a incidência na natureza do conhecimento sobre argumentação e prova sugerindo que

> é necessária mais investigação sobre o desenvolvimento do conhecimento matemático dos professores sobre argumentação e prova, com o desenho de intervenções que tenham explicitamente em conta a ideia de que um ensino eficaz de matemática requer que os professores tenham não apenas um bom conhecimento de matemática, mas que sejam também capazes de usar flexivelmente esse conhecimento para apoiar a aprendizagem dos seus alunos. (Stylianides, Bieda & Morselli, 2016, p. 342)

O trabalho aqui apresentado surge justamente da necessidade sentida pela primeira autora, enquanto professora, em apoiar os futuros professores no seu raciocínio matemático, particularmente no que respeita ao processo de justificação em geometria. O seu objetivo é compreender a forma como justificam generalizações sobre famílias de figuras geométricas, pelo que analisamos as seguintes questões: que tipo de argumentos são usados pelas participantes para justificar generalizações sobre famílias de figuras geométricas? Qual o seu grau de generalidade e a sua validade?

Raciocínio matemático e justificação

Lannin, Ellis e Elliot (2011) afirmam que o raciocínio matemático é um processo evolutivo que inclui conjeturar, generalizar, *investigar porquê*, justificar e refutar. No que respeita à generalização, existem dois tipos de atividades: identificar pontos comuns em casos diferentes e estender uma afirmação além do domínio em que foi originada. *Investigar porquê* envolve a identificação de relações que permitem perceber por que uma afirmação é verdadeira ou falsa. Os autores entendem uma justificação válida como uma sequência lógica de afirmações, cada uma apoiando-se em conhecimento já estabelecido, de forma a chegar a uma conclusão. Este tipo de justificação deve conter linguagem geral que demonstre que se aplica a mais do que um caso particular, sem prejuízo de se poderem usar exemplos, mas que devem constituir exemplos genéricos. A sua definição de justificação inclui modos de justificação como a redução ao absurdo, em que uma afirmação fica validada pelo facto de a sua negação ser impossível, que é muitas vezes a única razão que permite compreender que a afirmação é verdadeira, mas, em termos gerais, os autores consideram que no âmbito do ensino *investigar porquê* está intrinsecamente associado ao processo de justificar, na medida que "os alunos constroem justificações para se convencerem a si próprios e aos outros porque é que uma afirmação particular é verdadeira" (p. 35).

Esta visão da justificação inclui os papéis de validação e de compreensão de um resultado e uma dimensão comunicativa que busca a legitimidade da atividade matemática – aspetos que associamos à demonstração. Na verdade, os conceitos de justificação e demonstração são muito próximos, o que deriva de a demonstração assumir vários significados, quer no âmbito da investigação em educação matemática (Stylianides et al., 2016), quer na matemática, onde existem muitas opiniões conflituosas sobre o seu papel e o que a torna aceitável (Hanna, 2000; Harel & Sowder, 2007). Tradicionalmente, o termo demonstração aparece associado a um certo grau de formalidade e de complexidade próprios do ensino secundário ou superior, mas a valorização atual destas ideias desde o pré-escolar trouxe um significado mais abrangente, embora pouco claro, ao termo demonstração. Com o propósito de conceptualizar a demonstração tendo em conta os primeiros anos de escolaridade, Stylianides (2007) apresenta uma definição fundada na literatura sobre filosofia da matemática e educação matemática:

> Uma demonstração (*proof*) é um argumento matemático, uma sequência de afirmações interligadas, a favor ou contra uma afirmação matemática, com as seguintes características: 1. Usa afirmações aceites na comunidade da sala de aula (um conjunto de afirmações aceites) que são verdadeiras e disponíveis sem justificação adicional; 2. Emprega formas de raciocínio (modos de argumentação) que são válidas e conhecidas, ou ao alcance conceptual, da comunidade de sala de aula; e 3. É comunicada usando formas de expressão (modos de representação de argumentos) que são apropriadas e conhecidas, ou ao alcance conceptual, da comunidade de sala de aula. (p. 291)

Neste estudo utilizamos o termo "justificação" com o significado aqui atribuído por Stylianides para demonstração[1], de forma incluir formas de argumentação com diferentes graus de formalidade e referentes a vários níveis de escolaridade. Doravante será esse o termo utilizado.

Formação de professores e o processo de justificar

Lo e McCrory (2009) defendem que os futuros professores dos primeiros anos[2] devem aprender a justificar e sobre justificação a três níveis: a) enquanto uma ferramenta para mostrar ou verificar a verdade ou falsidade de uma afirmação; b) enquanto objeto matemático que se regula por algumas regras e padrões, tais como tornar os passos explícitos, saber quais as premissas em que se pode basear e os princípios referidos por Stylianides (2007); e c) enquanto fator de desenvolvimento dos alunos, o que depende do seu nível de ensino, o tipo de argumentos que são capazes de formular, as representações que podem usar… Estes três níveis correspondem ao que as autoras indicam como *saber justificar*, *compreender a natureza da justificação* e *adaptar a justificação ao nível de desenvolvimento* dos alunos, em que os dois primeiros estão associados ao conhecimento matemático e o terceiro ao didático.

[1] No contexto português, o termo "demonstração" está associado a uma conceção mais formal, pelo que optamos pelo termo "justificação" que se aproxima mais do conceito de Stylianides (2007).
[2] Referidos como K-6, que se inicia no jardim de infância e termina no 6.º ano.

Contudo, Stylianides e Stylianides (2009) referem a existência de vários estudos que mostram que os futuros professores que lecionam os primeiros anos têm predominantemente ideias erradas sobre a justificação, particularmente sobre o papel dos argumentos empíricos, em alguns casos mesmo depois de terem tido formação sobre justificação. Também Lin et al. (2012b) referem que para muitos professores deste nível a sua convicção num resultado assenta mais na autoridade de entidades externas (como manuais ou colegas que reconhecem como mais competentes) do que no seu raciocínio, o que revela fraca autoconfiança na sua capacidade. No que respeita a estudos que procuram desenvolver o conhecimento dos professores e futuros professores nesta área, referem que são em número reduzido e resumem as orientações dos estudos encontrados: resolver tarefas de justificação individualmente ou em pequenos grupos; realizar discussões coletivas; partilhar e criticar as justificações uns dos outros; promover desafios cognitivos e o estabelecimento de convicção nos resultados.

Justificar generalizações em geometria: a construção de um modelo de análise

A construção de um modelo de análise sobre a justificação de generalizações em geometria afigura-se-nos como um desafio que deve responder a algumas questões. Por um lado, deve captar em que medida a justificação cumpre o seu papel na sala de aula – convencer-se a si próprio e aos outros porque é verdadeira uma afirmação particular. Por outro lado, consideramos relevante atender à sua validade, verificando se corresponde a um argumento ou conjunto de argumentos lógicos baseados em ideias previamente compreendidas, e se a linguagem e o raciocínio apoiam a relação geral, mostrando que se aplica em todos os exemplos do domínio considerado.

Atendendo a que o estudo incide sobre a justificação de generalizações para famílias de objetos geométricos, consideramos necessário construir um quadro de análise que tenha em conta a especificidade destes objetos e a natureza da atividade proposta, que se insere no âmbito do raciocínio geométrico. Nesse sentido, convocamos as ideias de Battista (2009) que afirma que operar mentalmente com objetos geométricos (por exemplo, compará-los, decompô-los e analisá-los) requer que estes tenham sido abstraídos a um nível suficientemente profundo. Para isso, há duas formas fundamentais de abstração em geometria – a *estruturação espacial* e a construção de *modelos mentais*:

> A estruturação espacial é o ato mental de organizar um objeto ou um conjunto de objetos através da identificação das suas componentes e do estabelecimento de relações entre elas. Os modelos mentais são versões não verbais, versões mentais das situações que capturam a estrutura das situações que representam. (pp. 94-95).

Para o autor, o raciocínio envolve a ativação destes modelos mentais para que seja possível imaginar diferentes cenários e soluções para os problemas.

Desta forma, consideramos que a construção de justificações em geometria que permitam compreender a razão pela qual uma generalização é verdadeira é um processo que implica necessariamente a estruturação espacial dos objetos. Mais ainda, uma vez que uma justificação implica a explicitação de argumentos, é necessário ir além da dimensão mental a que se refere a estruturação espacial, entrando assim na estruturação geométrica que "descreve a estruturação espacial através de conceitos formais" (Battista, 2007, p. 861). Isto significa que, ao estruturar geometricamente um objeto ou situação espacial, um indivíduo usa conceitos tais como congruência, paralelismo, ângulo, transformação geométrica ou sistema de coordenadas para conceptualizar e operar sobre a situação. A estruturação geométrica assenta na estruturação espacial, pois sem a construção de modelos mentais que capturem a estrutura da situação, a estruturação geométrica não tem significado para o indivíduo.

Assim, o modelo de análise das justificações sobre generalizações foca-se, em primeiro lugar, na natureza dos argumentos produzidos no que diz respeito à incidência na estruturação geométrica dos objetos. Interessa-nos compreender em que medida as formandas investigam a razão pela qual as generalizações são válidas recorrendo à forma como os objetos estão estruturados, ou seja, de que forma se compõem e como se relacionam as suas componentes. Em segundo lugar, procuramos compreender se o raciocínio apoia a relação geral mostrando que se aplica em todos os exemplos desse domínio (Lannin et al., 2011), pelo que estabelecemos indicadores que, por um lado, evidenciam a natureza dos argumentos usados e, por outro, identificam o grau de generalização da justificação. Adotamos a aceção de “exemplo genérico” de Balacheff (1988) que

> envolve tornar explícitas as razões da validade de uma afirmação através de operações ou transformações de um objeto que não é apresentado pelo seu valor próprio, mas como um representante característico da sua classe. Esta descrição envolve as propriedades e estruturas características da classe. (p. 219)

Quadro 1. Quadro de análise das justificações de generalizações

<table>
<tr><th>Natureza dos argumentos</th><th>Indicadores</th><th>Validade [3] da justificação</th></tr>
<tr><td rowspan="5">Com base na correta estruturação geométrica da família de figuras</td><td rowspan="2">Mobiliza as propriedades relevantes e já estabelecidas sobre a família de figuras, usando uma linguagem genérica sobre a família</td><td>Completa ou quase completa</td></tr>
<tr><td>Incompleta</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Mobiliza as propriedades relevantes e já estabelecidas sobre a família de figuras a partir de um exemplo genérico</td><td>Completa ou quase completa</td></tr>
<tr><td>Incompleta</td></tr>
<tr><td>Mobiliza as propriedades relevantes e já estabelecidas sobre uma ou mais figuras da família sem generalizar</td><td>Incompleta</td></tr>
<tr><td>Com base numa estruturação geométrica incompleta ou errada da família de figuras</td><td>Não reconhece propriedades relevantes ou acrescenta propriedades inexistentes ou não estabelecidas</td><td>Incorreta</td></tr>
</table>

[3] Neste trabalho, consideramos que uma justificação completa ou quase completa é válida e uma justificação incompleta não é válida, embora contenha argumentos legítimos.

Sem recurso à estruturação geométrica da família de figuras	Mobiliza relações numéricas sem relacionar com a estruturação das figuras	Incompleta ou incorreta
	Recorre a uma fonte externa de validação (por exemplo, o GeoGebra, um colega ou um manual).	Incorreta

Metodologia de investigação

Este estudo tem um propósito interventivo, visando modificar as práticas da formação inicial de professores e educadores, por forma a melhorar as suas aprendizagens e contribuir para o conhecimento sobre a sua formação, partindo da compreensão que construímos sobre a forma como desenvolvem o seu raciocínio geométrico. A investigação foca-se na aprendizagem em contexto, a partir da conceção de estratégias e ferramentas de ensino, pelo que optámos pela metodologia de investigação baseada em *design*, na modalidade de experiência de formação (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer & Schauble, 2003) em que a professora (a primeira autora do artigo) tem também o papel de investigadora. Esta modalidade é referida por Stylianides et al. (2016) como sendo uma "abordagem promissora na resposta às necessidades de desenvolvimento de formas eficazes para abordar as dificuldades de alunos e professores relativamente à argumentação e prova" (p. 344).

Os dados que apresentamos foram recolhidos durante o segundo ciclo do estudo, no ano letivo de 2014/15, envolvendo uma turma de 25 formandas que frequentavam a disciplina de Geometria (2.º ano da Licenciatura em Educação Básica). As tarefas foram realizadas em grupos de 4/5 elementos, mas cada participante realizou um registo individual que, em muitos casos, refletiu a discussão no grupo, mas também particularidades do raciocínio da sua autora. A recolha de dados foi feita a partir dos registos áudio e vídeo das aulas e foi ainda realizada a análise documental das produções escritas, todas elaboradas na sala de aula. A análise de dados é feita a partir do quadro apresentado no ponto anterior.

Neste artigo discutimos a justificação de generalizações a partir de duas tarefas, uma sobre a congruência dos ângulos verticalmente opostos e outra sobre a soma das amplitudes dos ângulos internos de um polígono. As duas tarefas foram antecedidas por outra em que, com recurso ao GeoGebra, as formandas conjeturaram sobre as relações envolvidas nas tarefas. Deste modo, estas tarefas correspondem a *tarefas de transição entre conjetura e justificação* de acordo com a classificação de Lin et al. (2012a), ou seja, tarefas em que os alunos são convidados a justificar conjeturas que os próprios estabeleceram.

Em ambas as tarefas estão envolvidas famílias de figuras: na primeira, a figura com os ângulos verticalmente opostos deve ser entendida como representante de um número infinito de casos, uma vez que a amplitude dos ângulos exibidos é irrelevante, podendo servir apenas como exemplo genérico; na segunda, o conceito de família de figuras surge duplamente – os hexágonos apresentados são tanto representantes de uma infinidade de hexágonos como representantes de um qualquer polígono de *n* lados.

Resultados e discussão

Tarefa 1 – Ângulos verticalmente opostos

Anteriormente descobriste que dois ângulos verticalmente opostos têm a mesma amplitude. Encontra uma justificação que explique a razão pela qual essa relação é sempre verdadeira.

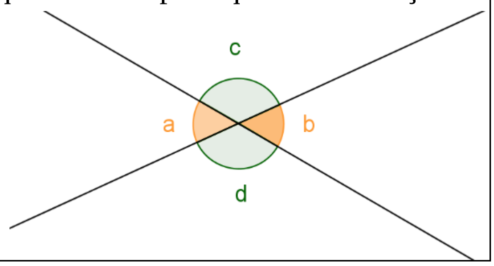


Figura 1. Tarefa para a justificação da congruência de ângulos verticalmente opostos

A justificação da congruência dos ângulos verticalmente opostos não foi a primeira tarefa de justificação envolvendo ângulos, mas foi a primeira em que não foi fornecido qualquer valor, pelo que a reação das formandas foi muito diferente das anteriores. Surgiram apenas duas resoluções escritas da tarefa (Figuras 2 e 3):

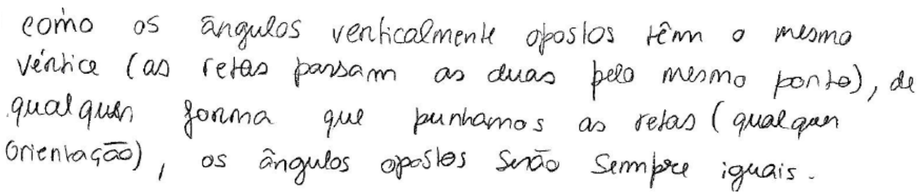

como os ângulos verticalmente opostos têm o mesmo vértice (as retas passam as duas pelo mesmo ponto), de qualquer forma que punhamos as retas (qualquer orientação), os ângulos opostos serão sempre iguais.

Figura 2. Resposta de Helena à tarefa 1

A resposta de Helena faz referência a uma propriedade dos ângulos verticalmente opostos, mas essencialmente a sua justificação não recorre à estruturação geométrica pois, ao afirmar "de qualquer forma que púnhamos as retas", a formanda está a recorrer à sua experiência anterior com o GeoGebra em que manipulou os lados dos ângulos verticalmente opostos e estes mantiveram a relação de igualdade. Desta forma, a sua justificação recorre implicitamente a uma fonte externa – o GeoGebra – para validar a afirmação, pelo que a justificação é incorreta. Embora baseada em experiência empírica, a utilização do *software* assume também o caráter de autoridade à qual a formanda atribui confiança nos resultados.

A resposta de Teresa (Figura 3) reproduz por escrito o que muitas formandas exprimiram em intervenções orais:

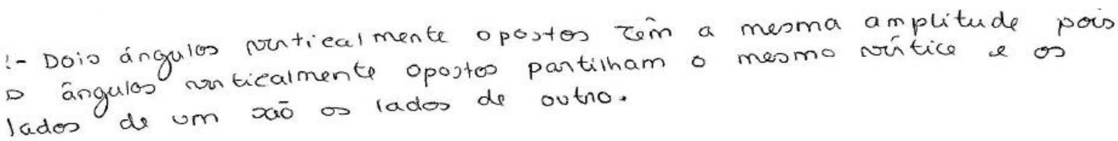

1- Dois ângulos verticalmente opostos têm a mesma amplitude pois os ângulos verticalmente opostos partilham o mesmo vértice e os lados de um são os lados de outro.

Figura 3. Resposta de Teresa à tarefa 1

Esta resposta não é uma justificação válida, mas sim uma caracterização de ângulos verticalmente opostos que mais se assemelha a uma definição. De acordo com o quadro de análise, os argumentos apresentados por Teresa baseiam-se numa estruturação geométrica incompleta pois não mobiliza uma propriedade fundamental para justificar corretamente – os pares de ângulos adjacentes são também suplementares – o que conduz a uma justificação incorreta.

Esta dificuldade foi sentida em vários grupos, como mostra o seguinte diálogo:

> *Marina:* Têm de ser iguais porque têm o vértice em comum e os lados de um são os lados do outro.
> *Profª:* Mas o que vocês me estão a dizer é quase a definição de ângulos verticalmente opostos. Essa afirmação não justifica que eles tenham de ser iguais.
> *Marina:* Então como é que vamos justificar?

Na tentativa de ajudar o grupo, a professora sugere a introdução de um valor:

> *Profª:* Imaginem que o *a* é igual a 30º. Procurem encontrar os valores dos outros ângulos sem usarem a propriedade.
> *Marina: Que propriedade?*
> *Profª:* A que querem justificar. Que os ângulos verticalmente opostos são congruentes. Encontrem os outros valores a partir de outras relações.
> *Marina:* Ah! Então… *c* é 150… porque com o *a* dá 180 graus. São… suplementares.
> *Profª: OK…*
> *Marina:* Depois o *b* é 30 porque é verticalmente oposto ao *a*.
> *Profª:* Atenção! Combinámos que não podemos usar essa propriedade. Percebes porquê? Não podes justificar que uma propriedade é verdadeira se estiveres a usá-la no teu raciocínio. É uma espécie de pescadinha de rabo na boca!
> *Marina:* Está bem… Ah, *b* é 30 porque é suplementar de *c* que é 150.
> *Profª:* OK. Como veem chegaram aos valores 30 e 150, portanto à conclusão que eles são iguais sem usarem a propriedade. Agora, procurem usar esse raciocínio sem concretizar para um valor particular, como fizeram aqui.

Neste diálogo, Marina revela algumas dificuldades. Por um lado, não distingue a caracterização dos ângulos verticalmente opostos da justificação da sua congruência. Este problema pode ser particularmente sentido devido à forte perceção que temos de que os ângulos têm mesmo de ser congruentes pela forma como estão construídos. Por outro lado, a versão simplificada do problema usando um valor concreto mostra também que Marina não reconhece que não pode usar a propriedade que está a procurar justificar – outro problema relativo à conceção do que é uma justificação. Finalmente, consegue justificar que os valores de *a* e *b* são os mesmos usando apenas o dado de que *a* e *c* são suplementares. Esta estratégia foi seguida em vários grupos que também conseguiram concluir a relação usando valores concretos. Contudo, nenhum grupo escreveu uma resposta para a justificação do caso geral. Este episódio evidencia a dificuldade em transitar de um raciocínio que incide num caso particular para um raciocínio geral para o domínio considerado.

O entendimento do que significa justificar foi abordado pela professora na discussão coletiva da tarefa:

> *Profª:* ... Portanto, é preciso perceber a diferença entre caracterizar algo e justificar uma propriedade. Por exemplo, vocês sabem porque é que a soma dos ângulos internos de um triângulo dá 180º?

> *Jacinta:* Não, mas sabemos que é assim!
> *Profª:* Pois. Vocês induziram essa propriedade porquê? Porque viram muitos casos em que isso acontecia! [aludindo à investigação com o GeoGebra]
> *Lúcia:* Então mas se nós estivermos a construir um ângulo de 90º e depois outro de 90º, depois já não conseguimos fazer um triângulo!
> *Profª:* Certo, é verdade, mas isso não obriga a que a soma dos ângulos internos seja 180º, estás a ver?…

De seguida, a professora usa um triângulo em papel para justificar que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º, através de dobragens (Figura 4) e propriedades já estabelecidas.

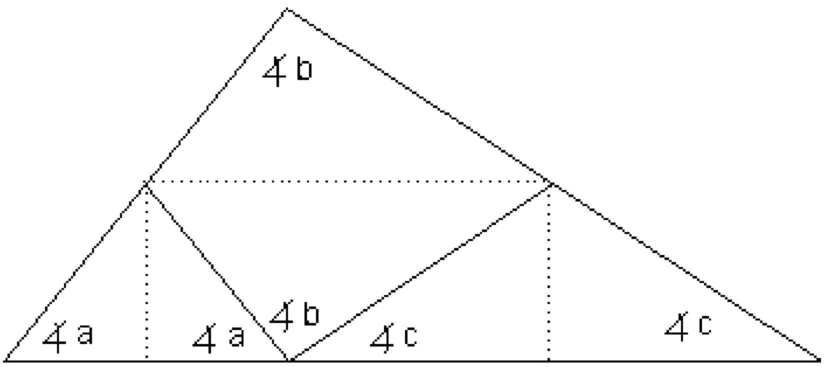


Figura 4. Modelo da representação usada para justificar a soma dos ângulos internos de um triângulo

Tarefa 2 – Soma as amplitudes dos ângulos internos de um polígono.

Na tarefa "Relações entre ângulos" encontraste uma generalização para a soma dos ângulos internos de um polígono qualquer de *n* lados. Vamos procurar justificá-la. Para isso, observa as três figuras seguintes. Todas elas partem do mesmo hexágono, no qual se iniciou uma estratégia possível para chegar a justificação procurada. Usa uma das figuras e completa a justificação recorrendo ainda a outras relações que já tenhas estabelecido.

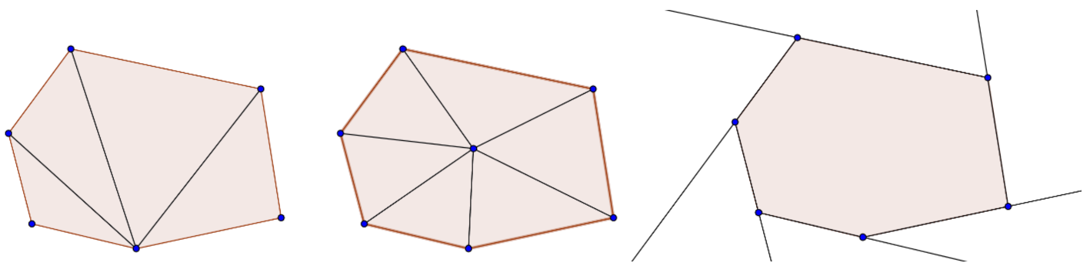


Figura 5. Tarefa para justificação da soma de ângulos internos de um polígono

A tarefa 2 parte também do trabalho realizado na semana anterior em que, recorrendo ao GeoGebra, a turma estudou a soma das amplitudes dos ângulos internos de um polígono e formulou três generalizações (a última das quais reproduzimos na figura 6):

A. A soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360º. Sempre que se acrescenta um lado, acrescenta-se 180º à soma dos ângulos internos. (1ª abordagem)

360+180 (n-4) , n>4 e n = nº de lados de um polígono (2ª abordagem)

B. Soma dos ângulos internos = 180 ×(nº de lados – 2). Ex: pentágono 180 × (5-2) = 180 × 3 = 540

C.

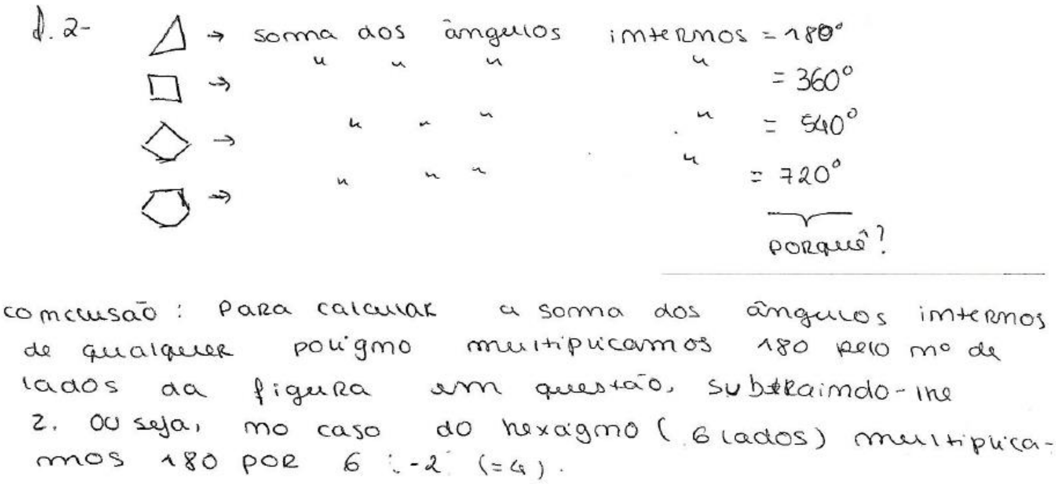


Figura 6. Generalização de Teresa sobre a soma das amplitudes de ângulos internos de um polígono

A fase inicial de trabalho na tarefa 2 não foi fácil. Tal como na tarefa 1, nas figuras não constam quaisquer valores e algumas formandas pensaram que para chegarem à soma dos ângulos internos do polígono precisariam do valor de cada ângulo. Uma das formandas chegou a perguntar se não poderiam usar o valor 90 para um ângulo interno que parecia mesmo ser reto. A professora frisou então que deveriam prosseguir as estratégias iniciadas e que, para saber a soma, não precisamos de conhecer cada parcela. Os grupos progressivamente foram assim avançando na atividade pretendida.

De seguida, apresentamos resoluções que ilustram o trabalho desenvolvido pelos grupos.

O primeiro hexágono está dividido em 4 triângulos. Todos os vértices de cada triângulo cobrem todos os ângulos internos do polígono. Se soubermos que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º, basta multiplicarmos 180 por 4 (4 triângulos) e conseguimos obter a amplitude de todo o polígono. A expressão que generaliza é (n-2)×180.

Se um polígono tiver 10 lados, é possível desenhar 8 triângulos; se tiver 6 lados, desenhamos 4 triângulos. Se tiver n lados, desenhamos n-2 triângulos.

Figura 7. Resposta de Célia a partir da primeira figura

A resposta de Célia parte da estratégia sugerida pela primeira figura. Baseia-se na correta estruturação geométrica da família de figuras pois identifica duas propriedades relevantes – a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo e a possibilidade de decompor o polígono em *n-2* triângulos cujos ângulos compõem os ângulos do polígono original. Célia usa o hexágono e ainda o decágono com a clara intenção de os tratar como exemplos genéricos, pois explicita propriedades que todos os elementos da classe possuem. Desta forma, podemos considerar que a sua justificação é quase completa[4].

Todos os grupos usaram a primeira figura para justificarem a generalização, mas a maioria resolveu seguir também as outras estratégias. A resposta seguinte (Figura 8) pertence a Anita e é representativa do seu grupo. Note-se, porém, que a utilização da terceira figura surge a partir da discussão no seio do grupo onde Teresa explica a sua ideia às colegas:

> *Teresa:* Estes todos dão 180º [os ângulos formados por cada ângulo interno juntamente com o externo]. Então 6×180. Mas os externos não queremos, estão a mais. Mas os externos todos juntos dão 360! Portanto, vamos ao 6×180 e tiramos os 360!

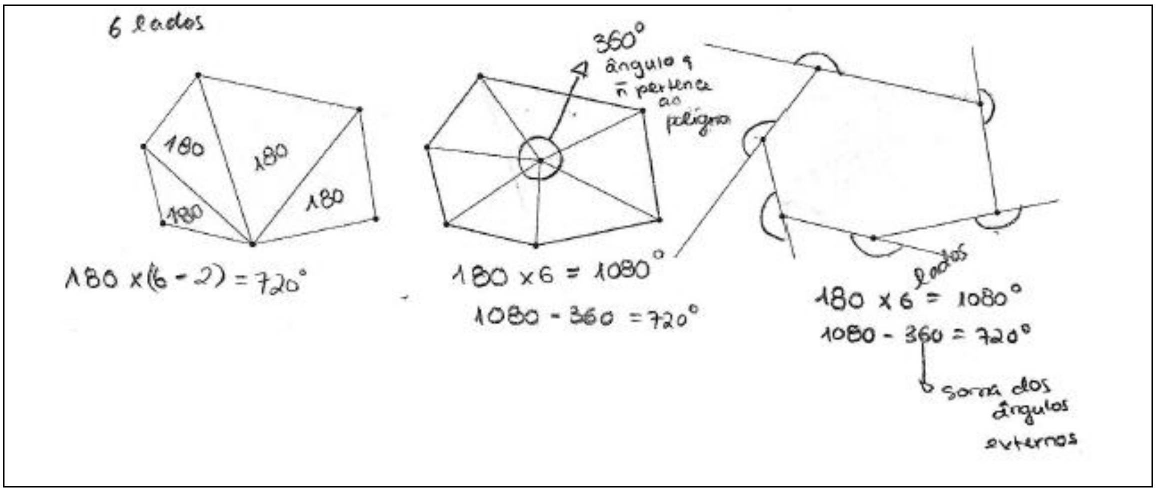


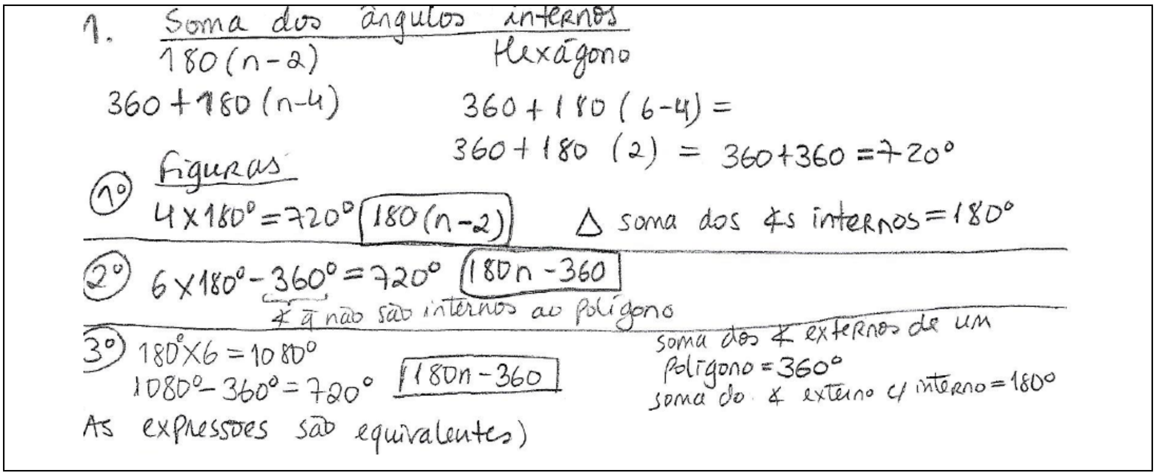
Figura 8. Resposta de Anita à tarefa 2

A resposta do grupo de Anita apoia-se numa correta estruturação geométrica, mobilizando propriedades relevantes já estabelecidas (soma dos ângulos internos de um triângulo, o ângulo giro formado na segunda figura, a soma dos ângulos externos de um polígono e a relação entre um ângulo externo e um interno), sem explicar a relação entre o número de lados do polígono e o número de triângulos em que é decomposto. No entanto, estas propriedades incidem apenas no caso do hexágono que não é tratado como exemplo genérico (o número de triângulos da decomposição é variável para a classe) e não são explicitadas convenientemente, pelo que a justificação é incompleta.

A próxima resposta (Figura 9) pertence ao grupo que propôs a expressão *360 + 180 (n-4)* (generalização A). Acontece que esta expressão não se relaciona diretamente com nenhuma das figuras apresentadas, pelo que as formandas usam outras expressões:

---

[4] Note-se que apenas estamos a considerar a qualidade dos argumentos, sem ter em conta erros de linguagem.



1. Soma dos ângulos internos
180(n-2)   Hexágono
360+180(n-4)   360+180(6-4) =
360+180 (2) = 360+360 = 720°
1° figuras
4×180° = 720° $\boxed{180(n-2)}$ △ soma dos ∢s internos = 180°
2° 6×180° − 360° = 720° $\boxed{180n - 360}$
∢ q não são internos ao polígono
3° 180°×6 = 1080°   soma dos ∢ externos de um polígono = 360°
1080° − 360° = 720° $\boxed{180n - 360}$ soma do ∢ externo c/ interno = 180°
As expressões são equivalentes)

Figura 9. Resposta de Isabel à tarefa 2

A justificação de Isabel é sobretudo uma interpretação das expressões encontradas e não elabora um texto que articule as várias ideias. Contudo, o seu registo revela claramente que os seus argumentos se baseiam na estruturação geométrica, pois mobiliza quase todas as propriedades que são relevantes, omitindo a relação numérica entre o número de lados do polígono e o número de triângulos em que é decomposto e a sua justificação. Nesta resposta, o hexágono é usado como um exemplo que ilustra e explica as expressões utilizadas, mas não há uma explicação no sentido de o tornar claramente num exemplo genérico, apesar de a formanda explicitar as propriedades comuns à classe. Esse aspeto foi abordado pela professora junto do grupo:

> *Profª:* Sim, mas esse caso será para o hexágono. E se tivermos outros polígonos? Por exemplo, com 10 lados?
> *Isabel*: Fazemos… 8 triângulos. Tiramos dois aos lados.
> *Profª*: E então?
> *Isabel*: Exato. Então dá (n-2) × 180!
> *Andreia*: E para o outro fazemos 6×180 e tiramos depois dois triângulos. 2×180.
> *Profª*: E porque é que tiras os ângulos de dois triângulos?
> *Isabel*: Pois… Isso és tu a forçar para dar igual…
> *Profª*: É isso. Têm de ver que se tiverem que tirar alguma coisa, algum valor, isso tem de fazer sentido…

Este diálogo mostra que as formandas estavam conscientes da relação entre o número de lados do polígono e o número de triângulos da decomposição (para o caso da primeira figura), mas não o explicitaram no seu registo.

Pelas razões explicitadas, consideramos que esta justificação é incompleta. Além disso, salientamos alguns aspetos adicionais. Em primeiro lugar, esta tarefa levou a que o grupo pensasse na propriedade em causa de várias perspetivas. A sua primeira abordagem à generalização foi de natureza numérica, pois as formandas identificaram que por cada lado que acrescentavam ao polígono, a soma das amplitudes acrescia 180º. De seguida, usaram uma expressão que não se relacionava com qualquer das figuras apresentadas, pelo que usaram outras expressões (uma delas desconhecida). Em segundo lugar, este grupo parece querer corresponder ao desafio da professora de dar sentido às expressões utilizadas, o que corresponde a uma visão da justificação como explicação do porquê. Este aspeto é percetível no seu registo, mas particularmente no discurso de Isabel, quando diz a Anabela que tirar dois triângulos é “forçar para dar igual”. Da mesma forma, o registo de Teresa (Figura 6) releva esta curiosidade quando a formanda escreve “porquê?” junto dos valores encontrados.

Conclusão

A primeira tarefa revelou dificuldades das formandas relacionadas essencialmente com dois fatores: a natureza da afirmação a justificar – uma generalização – que se apoia numa representação genérica onde não surgem quaisquer valores; os princípios de uma justificação, nomeadamente a impossibilidade de se fundamentar num só exemplo ou de usar como premissa a propriedade que se pretende justificar. O facto de as formandas conseguirem resolver uma tarefa semelhante com a introdução de um valor, mostrou que as dificuldades não advêm da identificação das propriedades relevantes e já estabelecidas, mas da construção de uma argumentação que aplique essa estruturação a toda a família de figuras. Isto significa que as formandas revelaram dificuldades quer sobre a dimensão *saber justificar*, quer *compreender a natureza da justificação* (Lo & McCrory, 2009).

Durante a discussão coletiva, a professora colocou a ênfase da justificação na compreensão do porquê da validade da afirmação, o que foi reforçado com a formulação da tarefa 2, a qual permite *investigar o porquê* confrontando diferentes representações e mobilizando várias propriedades. Esta perspetiva pareceu bem integrada pelas participantes que foram, na maioria dos casos, além do que a tarefa pedia, envolvendo-se em discussões marcadas pelo objetivo de compreender o significado das generalizações. Não houve qualquer sinal de que a resolução da tarefa estabelecesse a validade das generalizações que as formandas nunca colocaram em causa, pelo que a justificação ficou claramente associada à compreensão da razão da sua validade. As várias resoluções da tarefa 2 envolveram uma correta estruturação geométrica da família de figuras, surgindo mais justificações válidas ou que continham argumentos válidos e pertinentes, mesmo que incompletas. Tendencialmente, estas justificações apoiaram-se em exemplos que, nalguns casos, foram assumidos como genéricos.

Assim, no que respeita ao tipo de argumentos usados pelas participantes para justificar generalizações, foi sentida uma diferença entre as duas tarefas, pois estes passaram a apoiar-se mais na correta estruturação das figuras geométricas. Estas diferenças podem estar associadas à especificidade das tarefas, mas podem corresponder também a uma conceção mais correta do que significa justificar. Contudo, as respostas mostram que há dois aspetos importantes a desenvolver. Por um lado, é necessário vencer a resistência em construir um discurso argumentativo, que observamos em resoluções que se reduzem à interpretação esquemática de expressões ou representações visuais, por forma a valorizar a dimensão comunicativa deste processo (Yackel & Hanna, 2003). Por outro lado, é importante elevar o grau de generalidade do discurso que, nalguns casos, é demasiadamente apoiado em exemplos particulares e não evidencia que a generalização se aplica a todo o domínio de figuras, um requisito da justificação (Lannin et al., 2011). Na verdade, existe uma linha pouco definida entre apresentar um exemplo genérico que seja representativo do domínio – uma estratégia aceitável para justificar – e apoiar a justificação em exemplos que valem apenas por si próprios – o que corresponde a um erro e uma conceção errada comum sobre o papel dos resultados empíricos na validade de uma justificação (Stylianides & Stylianides, 2009).

Os resultados aqui apresentados restringem-se a duas tarefas que constituem apenas o início de um percurso no sentido de desenvolver a capacidade de justificar generalizações. Contudo, eles confirmam a relevância da ênfase na compreensão das relações descobertas para dar sentido ao processo de justificar referida por vários autores (e.g., Harel & Sowder, 2007; Lannin et al., 2011; Stylianides et al., 2016). Em particular, o desenho de tarefas que promovam a produção e confronto de diferentes justificações e representações, num ambiente de interação entre pares, parece ser um elemento determinante no desenvolvimento da capacidade de justificar.

Agradecimentos

O presente artigo foi realizado no âmbito do projeto *O raciocínio geométrico e a visualização espacial na formação inicial de professores dos primeiros anos* sedeado no Centro Interdisciplinar de Estudos Educacionais - referência ESEXL/IPL-CIED/2016/A12.

Referências

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. In D. Pimm (Ed.), *Mathematics, teachers and children* (pp. 216–238). London: Hodder & Stoughton.

Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F.K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 843-908). Greenwich, CT: Information Age.

Battista, M. T. (2009). Highlights of research on learning school geometry. In T.V. Craine & R. Rubenstein (Eds.), *Understanding geometry for a changing world* (pp. 91-108). Reston, VA: NCTM.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher, 32*(1), 9–13.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation, and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics, 44*, 5–23.

Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. In F.K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 805–842). Greenwich, CT: Information Age.

Lannin, J.K., Elliott, R., & Ellis, A.B. (2011). *Developing essential understanding of mathematical reasoning for teaching mathematics in prekindergarten-grade 8*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Lin, F.L., Yang, K.L., Lee, K.H., Tabach, M., & Stylianides, G. (2012a). Principles of task design for conjecturing and proving. In G. Hanna & M. de Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education, new ICMI study series 15* (pp. 305–325). Dordrecht: Springer.

Lin, F.L., Yang, K.L., Lo, J.J., Tsamir, P., Tirosh, D., & Stylianides, G. (2012b). Teachers' professional learning of teaching proof and proving. In G. Hanna & M. de Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education, new ICMI study series 15* (pp. 327–346). Dordrecht: Springer.

Lo, J., & McCrory, R. (2009). Proof and proving in mathematics for prospective elementary teachers. In F.L. Lin, F.J. Hsieh, G. Hanna, & M. de Villiers (Eds.), *ICMI Study 19: Proof and proving in mathematics education* (Vol. 2, pp. 41–46). Taipei, Taiwan: Department of Mathematics, National Taiwan Normal University.

National Council of Teachers of Mathematics (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM. (Trabalho original em inglês, publicado em 2000).

Ponte, J.P., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M.E., & Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do ensino básico*. Lisboa: Ministério da Educação/Direção Geral da Inovação e Desenvolvimento Curricular.

Stylianides, A.J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 38,* 289–321.

Stylianides, A.J., Bieda, K. N. & Morselli, F. (2016). Proof and argumentation in mathematics education research. In A. Gutiérrez, G.C. Leder & P. Boero (Eds.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 315-351). Rotherham: Sense.

Stylianides, G.J., & Stylianides, A.J. (2009). Facilitating the transition from empirical arguments to proof. *Journal for Research in Mathematics Education, 40,* 314–352.

Yackel, E., & Hanna, G. (2003). Reasoning and proof. In J. Kilpatrick, W.G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 22–44). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.