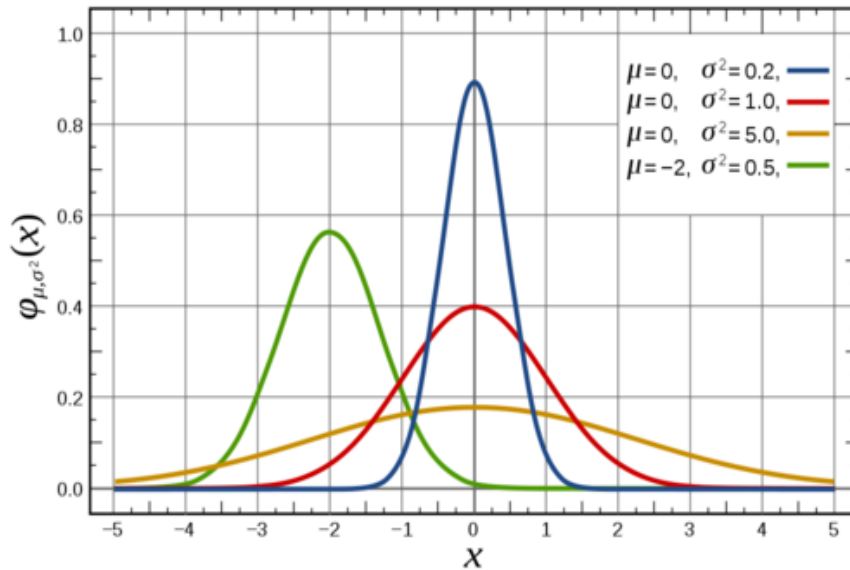




INSTITUTO SUPERIOR DE ENGENHARIA DE LISBOA

Área Departamental de Engenharia Mecânica

ISEL



Distribuições Estatísticas, Testes de Ajuste e Métodos para Estimação de Parâmetros na Área da Fiabilidade

JOSÉ MANUEL FELICIANO ANTUNES

(Licenciado em Engenharia Mecânica)

Trabalho Final de Mestrado para obtenção do grau de Mestre
em Engenharia Mecânica

Orientador:

Doutor José Augusto da Silva Sobral

Júri:

Presidente: Doutor João Manuel Ferreira Calado

Vogais: Doutora Alda Cristina Jesus Nunes de Carvalho

Doutor José Augusto da Silva Sobral

Setembro de 2015



INSTITUTO SUPERIOR DE ENGENHARIA DE LISBOA

Área Departamental de Engenharia Mecânica

ISEL

**Distribuições Estatísticas, Testes de Ajuste e
Métodos para Estimação de Parâmetros na Área
da Fiabilidade**

JOSÉ MANUEL FELICIANO ANTUNES

(Licenciado em Engenharia Mecânica)

Trabalho Final de Mestrado para obtenção do grau de Mestre
em Engenharia Mecânica

Orientador:

Doutor José Augusto da Silva Sobral

Júri:

Presidente: Doutor João Manuel Ferreira Calado

Vogais: Doutora Alda Cristina Jesus Nunes de Carvalho

Doutor José Augusto da Silva Sobral

Setembro de 2015

Resumo

A Fiabilidade tem-se vindo a afirmar nos últimos anos como uma importante ferramenta de sucesso para todos aqueles envolvidos no projecto, produção e venda de bens ou serviços.

Num mundo altamente competitivo, onde a informação está cada vez mais acessível, a falha de bens ou mesmo de serviços, tanto simples como complexos, tem de ser rigorosamente avaliada pelos fabricantes. A avaria prematura desses bens pode causar elevados prejuízos a um fabricante, tanto pelos custos financeiros directos que poderá acarretar, como pela imagem negativa que deixa no mercado.

Desta forma, é essencial avaliar e projectar com rigor a vida de um bem. Para isso, a fiabilidade tem-se desenvolvido bastante nos últimos anos, fruto de um desenvolvimento da estatística e dos sistemas informáticos.

Este trabalho pretende abordar uma área específica da fiabilidade: a análise de alguns testes para determinar se uma distribuição se adapta a um conjunto de dados que representam os tempos (ou outra unidade) até à avaria. Posteriormente são abordados alguns métodos para determinar os parâmetros dessas mesmas distribuições.

No desenvolvido do trabalho, como instrumento de apoio e validação, foi desenvolvida uma ferramenta informática (utilizando Microsoft Excel) para testar e validar a adaptação de um conjunto de dados até à avaria a uma determinada distribuição estatística.

Desta forma pretende-se dar um contributo para a consolidação de alguns conceitos e ferramentas na área da fiabilidade.

Palavras-Chave:

Fiabilidade, Distribuição Estatística, Testes de Ajuste, Estimação de Parâmetros

Abstract

Reliability has been emerging in recent years as an important success tool for all those involved in the project, production and sales of goods or services.

In a highly competitive business world, where data is more and more accessible, the failure of goods, both simple and complex, must be rigorously assessed by the manufacturers.

The premature failure of these goods can cause huge damage to a manufacturer, due to direct finance impact, as well as due to the negative image to the brand, seen by the market.

Thus, it is essential to evaluate and project accurately the life of a good. To achieve this, reliability has greatly developed in recent years, as a result of statistics and IT systems development.

This paper intends to address a specific area of reliability: analyze some goodness-of-fit tests to determine a distribution that fits a set of data. Subsequently, methods to determine the parameters of these distributions are also addressed.

During development phase of this paper, as a support method, a software tool (based on Microsoft Excel) was created to test and validate the adaptation of a set of data until failure, to some specific statistical distribution.

This paper intends to contribute to the consolidation of some concepts and tools in the area of reliability.

Keywords:

Reliability, Statistical distribution, Goodness-of-fit, Parameter estimation

À memória dos meus pais

Agradecimentos

Gostaria de deixar aqui os meus sinceros agradecimentos ao meu orientador, o Professor Doutor José Sobral, que ao longo deste tempo sempre me incentivou e apoiou de uma forma incansável, demonstrando um enorme entusiasmo, paciência e profundos conhecimentos científicos. Sem esse apoio, não teria sido, de todo, possível terminar este trabalho.

Queria igualmente agradecer à Ofélia, à minha esposa, pelo importante apoio que me prestou, tanto de uma forma directa como indirecta, apoio esse que se revelou extremamente importante.

E por último, mas não menos importante, não poderia deixar de agradecer às minhas filhas, a Isaura e a Beatriz, que sempre tiveram palavras de incentivo, apoio e que aceitaram desde o primeiro momento que eu desviasse o meu tempo pessoal para este trabalho e esta formação.

Índice

Resumo.....	i
Abstract.....	ii
Agradecimentos.....	iv
Índice	v
Índice de Figuras	vii
Índice de Tabelas	viii
Capítulo 1- Introdução.....	1
1.1 Enquadramento.....	1
1.2 Objectivo do trabalho	2
1.3 Estrutura do Trabalho	2
Capítulo 2 - Fiabilidade	4
2.1 Importância dos estudos da fiabilidade	4
2.2 Evolução da fiabilidade	5
2.3 Medição da Fiabilidade	7
2.5 Características da fiabilidade.....	9
2.5.1. Intervalo de confiança	9
2.5.2. Efeito do tempo da missão	9
2.5.3. Efeito da idade	10
2.5.4. Efeito do nível de <i>stress</i>	11
2.6 Estado da Arte	12
2.7 Distribuições estatísticas	13
2.7.1. Distribuição Exponencial	13
2.7.2. Distribuição de Weibull	16
2.7.3. Distribuição Normal	19
2.7.4. Distribuição Lognormal.....	22
Capítulo 3 – Testes Estatísticos.....	24
3.1 Teste do Qui-Quadrado	24
3.1.1. Teste do Qui-Quadrado passo a passo	24
3.1.2. Exemplo prático do Teste do Qui-Quadrado	26
3.1.3. Comentários ao Teste do Qui-Quadrado.....	28
3.2 Teste de Kolmogorov-Smirnov	29
3.2.1. O teste de Kolmogorov-Smirnov passo a passo	29
3.2.2. Exemplo prático do Teste de Kolmogorov-Smirnov	30
3.2.3. Comentários ao teste de Kolmogorov-Smirnov	31

3.3 Teste de Anderson-Darling e Cramer-von Mises	31
3.3.1. Introdução	31
3.3.2. Os testes normalizados de Anderson-Darling e de Cramer-von Mises passo a passo.....	32
3.3.2.2. Exemplo prático do Teste de Anderson-Darling	33
3.3.3. Comentários ao Teste de Anderson-Darling e Cramer-von Mises.....	35
Capítulo 4 – Determinação de Parâmetros	36
4.1 Método dos Mínimos Quadrados.....	36
4.1.1 Comentários ao Método dos Mínimos Quadrados	38
4.2 Método dos Momentos	39
4.2.1.Comentários ao Método dos Momentos	40
4.3 Método da Máxima Verosimilhança	40
4.3.1.Comentários ao Método da Máxima Verosimilhança	43
Capítulo 5 – Caso prático.....	44
5.1 Conjunto dos dados	44
5.2 Teste de Kolmogorov-Smirnov	46
5.2.1. Teste de Kolmogorov-Smirnov para a Distribuição Exponencial	46
5.2.2. Teste de Kolmogorov-Smirnov para a Distribuição Weibull	48
5.3 Teste de Anderson-Darling	51
5.3.1. Teste de Anderson-Darling para a Distribuição Exponencial	51
5.3.2. Teste de Anderson-Darling para a Distribuição de Weibull.....	56
5.4 Teste de Cramer-von Mises.....	60
5.4.1. Teste de Cramer-von Mises para a Distribuição Exponencial.....	60
5.4.2. Teste de Cramer-von Mises para a Distribuição de Weibull	63
5.5 Testes adicionais para o conjunto de Dados 1	65
5.5.1. Teste de Kolmogorov-Smirnov para a Distribuição Normal	65
5.5.2. Teste de Anderson-Darling para a Distribuição Normal	66
5.5.3. Teste de Cramer-von Mises para a Distribuição Normal.....	66
5.6 Discussão dos resultados obtidos	71
Capítulo 6 – Conclusões e Trabalhos Futuros.....	72
Referências.....	74
Anexos.....	76

Índice de Figuras

Figura 1 – Efeito do tempo de missão na fiabilidade dos bens.....	10
Figura 2 – Efeito do nível de <i>stress</i> na taxa de avarias e na idade	11
Figura 3 – Aspecto da Exponencial de parâmetro simples vs. Tempo ($f(t) = \lambda e - \lambda t$)	14
Figura 4 – Função densidade de probabilidade da Distribuição de Weibull para vários valores de β	16
Figura 5 – Os efeitos do parâmetro de escala η e do parâmetro de forma β , na taxa de avarias	18
Figura 6 – Influência de diferentes médias e desvio padrão na Distribuição Normal.....	20
Figura 7 – Pontos e recta ajustada que serve de base ao Método dos Mínimos Quadrados	37

Índice de Tabelas

Tabela 1 – Resultados dos testes.....	28
Tabela 2 – Distribuições, funções, variáveis e respectivos coeficientes.....	38
Tabela 3 - Resultados dos passos 1, 3, 4 e 5 do teste de Kolmogorov-Smirnov para a distribuição exponencial, para os Dados 1.....	47
Tabela 4 - Resultados dos passos 1, 3, 4 e 5 do teste de Kolmogorov-Smirnov, para a distribuição exponencial, para os Dados 2.....	48
Tabela 5 – Resultados dos passos 1, 3, 4 e 5 do teste de Kolmogorov-Smirnov, para a distribuição de Weibull, para os Dados 1.....	50
Tabela 6 – Resultados dos passos 1, 3, 4 e 5 do teste de Kolmogorov-Smirnov, para a distribuição de Weibull, para os Dados 2.....	51
Tabela 7 - Resultados dos passos 1, 3, 4 e 5 do teste de Anderson-Darling, para a distribuição exponencial, para os Dados 1 (Avarias 1 a 25).....	53
Tabela 8 - Resultados dos passos 1, 3, 4 e 5 do teste de Anderson-Darling, para a distribuição exponencial, para os Dados 1 (Avarias 26 a 50).....	54
Tabela 9 - Resultados dos passos 1, 3, 4 e 5 do teste de Anderson-Darling, para a distribuição exponencial, para os Dados 2.....	55
Tabela 10 - Resultados dos passos 1, 3, 4 e 5 do teste de Anderson-Darling, para a distribuição de Weibull, para os Dados 1 (Avarias 1 a 25).....	57
Tabela 11 - Resultados dos passos 1, 3, 4 e 5 do teste de Anderson-Darling, para a distribuição de Weibull, para os Dados 1 (Avarias 26 a 50).....	58
Tabela 12 - Resultados dos passos 1, 3, 4 e 5 do teste de Anderson-Darling, para a distribuição de Weibull, para os Dados 2.....	59
Tabela 13 - Resultados dos passos 1, 3, 4 e 5 do teste de CVM, para a distribuição Exp, Dados 1.....	61
Tabela 14 - Resultados dos passos 1, 3, 4 e 5 do teste de Cramer-von Mises, para a distribuição exponencial, para os Dados 2.....	62
Tabela 15 - Resultados dos passos 1, 3, 4 e 5 do teste de CVM, para a distribuição Weibull, Dados 1.....	64
Tabela 16 - Resultados dos passos 1, 3, 4 e 5 do teste de Cramer-von Mises, para a distribuição de Weibull, para os Dados 2.....	65
Tabela 17 - Resultados dos passos 1, 3, 4 e 5 do teste de Kolmogorov-Smirnov, para a distribuição de Normal, para os Dados 1.....	67
Tabela 18 - Resultados dos passos 1, 3, 4 e 5 do teste de Anderson-Darling, para a distribuição de Normal, para os Dados 1 (Avarias 1 a 25).....	68
Tabela 19 - Resultados dos passos 1, 3, 4 e 5 do teste de Anderson-Darling, para a distribuição de Normal, para os Dados 1 (Avarias 26 a 50).....	69
Tabela 20 - Resultados dos passos 1, 3, 4 e 5 do teste de Cramer-von Mises, para a distribuição de Normal, para os Dados 1.....	70

Capítulo 1- Introdução

1.1 Enquadramento

Desde o início dos tempos, o Homem tem tentado prever o futuro. De entre as várias práticas utilizadas pelos nossos longínquos antepassados, destaca-se a observação do voo dos pássaros e do movimento das folhas das árvores.

Com o evoluir da tecnologia, os engenheiros de hoje já não tem que depender de Pítia, a sacerdotisa Grega do antigo Oráculo de Delfos, ou da bola de cristal, para prever o "futuro" de seus produtos.

Nos dias de hoje, através da análise estatística dos dados da vida de um produto, a fiabilidade tem ferramentas para determinar a probabilidade e a capacidade dos bens executarem as tarefas para as quais foram projectadas, para os períodos de tempo previstos, sem avarias e em ambientes controlados [1].

Os dados da vida podem ser considerados o tempo de vida que o produto permanece disponível no mercado ou o tempo que o produto opera com sucesso, sem avarias. Estes tempos de vida podem ser medidos em vários tipos de unidade, como sejam horas, quilómetros, ciclos até à avaria, ciclos de fadiga ou qualquer outra forma com que a vida ou a exposição de um produto ao seu ambiente de trabalho possa ser medido. Todos os dados de tempo de vida desses produtos podem ser englobados nos dados de vida do produto. A análise subsequente e previsão são descritas como análise de dados de vida [1].

No início do estudo da fiabilidade é absolutamente necessário definir exactamente o que constitui uma avaria (ou falha). Por outras palavras, antes de se iniciar uma análise, deve ser claro em que situação é que o produto é considerado como tendo avariado. Isto pode parecer óbvio, mas não são de todo incomuns os problemas com as definições de avaria ou discrepâncias de unidade de tempo que tornam completamente inválidos os resultados dos testes de vida. Deve-se ter em consideração que estes testes são onerosos, demorados e por vezes de análise complexa [1].

Após a definição daquilo que é considerado uma avaria, ter-se-á de definir a forma de recolher os dados dessa mesma avaria. A recolha de dados terá de ser realizada de uma forma uniformizada, para que os dados possam ser considerados fiáveis e assim não surjam, posteriormente, dúvidas sobre a validade do estudo. Após se iniciar a fase da recolha de dados, passamos à fase da análise (a análise pode ser iniciada ao fim da recolha de uma determinada quantidade de dados, e continuar com a recolha de mais dados da avaria); é neste ponto que se pretende determinar qual a lei que rege a avaria dos bens. É nesta fase que é imprescindível obter a lei da estatística, ou melhor dizendo a distribuição estatística que se adapta, aos dados da avaria dos bens. Com o conhecimento da distribuição estatística e também dos respectivos parâmetros dessa distribuição, será então possível realizar estudos sobre a fiabilidade e poder intervir nos factores que afectam essa mesma fiabilidade.

1.2 Objectivo do trabalho

Quando da análise dos dados da vida de um produto e durante a análise de dados de fiabilidade, procura-se a distribuição estatística que melhor se adapta ao universo dos dados recolhidos. Existem hoje em dia, várias distribuições estatísticas disponíveis, cada uma com as suas características próprias e que se adaptam a específicos conjuntos de dados. Devido a esta problemática, foram desenvolvidos vários estudos, que resultaram nos denominados “testes estatísticos”, que permitem definir e validar a utilização de determinada distribuição estatística.

Após esta fase, há que estimar os respectivos parâmetros da distribuição considerada. Também aqui foram desenvolvidos estudos, estando disponíveis vários métodos para a determinação dos parâmetros da distribuição.

De uma forma geral, o objectivo do presente trabalho é analisar o conceito de fiabilidade dos bens e posteriormente referir as distribuições estatísticas mais utilizadas na fiabilidade. Destas, ir-se-ão apresentar os testes estatísticos disponíveis para determinar qual a melhor distribuição de probabilidades a adoptar, em cada conjunto de dados. As distribuições estatísticas a analisar incluem a distribuição exponencial, a distribuição normal, a distribuição de Weibull e a distribuição lognormal. A razão da escolha destas distribuições prende-se com o facto de estas serem bastante utilizadas em fiabilidade.

Neste trabalho ir-se-ão analisar alguns dos vários testes estatísticos disponíveis. Mais precisamente, vai-se analisar o teste do Qui-Quadrado, o teste de Kolmogorov-Smirnov, o teste de Cramer-von Mises e o teste de Anderson-Darling.

Após determinar a melhor distribuição estatística, ir-se-ão analisar os métodos para determinar os parâmetros dessa distribuição.

Relativamente aos métodos para determinação dos parâmetros da distribuição, serão analisados o método dos Mínimos Quadrados, o método da Máxima Verosimilhança e o método dos Momentos.

1.3 Estrutura do Trabalho

Este trabalho pretende contribuir para uma visão da fiabilidade por um aspecto menos explorado. Nos vários programas informáticos para a área da fiabilidade que existem no mercado, estes testes e métodos estão disponíveis, mas o conhecimento dos seus conceitos básicos ficam algo dissimulados. Este trabalho pretende assim explorar os seus conceitos, fundamentos, limitações e campo de utilização.

O trabalho está dividido em 6 capítulos, sendo o seguinte o conteúdo de cada um deles: após a presente Introdução, que corresponde ao Capítulo 1, o Capítulo 2 irá descrever o conceito de fiabilidade, com referência às distribuições mais comuns e suas características, demonstrando alguns conceitos relacionados com esta temática.

No Capítulo 3, ir-se-á detalhar os testes estatísticos do Qui-Quadrado, o teste de Kolmogorov-Smirnov, o teste de Anderson-Darling e o teste de Cramer-von Mises, destacando-se a sua utilização, vantagens e limitações.

O Capítulo 4 descreve os métodos para estimativa dos valores dos parâmetros das várias distribuições. Aqui abordar-se-á o método dos Mínimos Quadrados, o método dos Momentos e o método da Máxima Verosimilhança.

No Capítulo 5 apresentam-se alguns casos práticos, onde serão aplicados os conceitos anteriormente desenvolvidos. Como base para este Capítulo e complemento ao trabalho, foi desenvolvida uma ferramenta em Microsoft Excel para determinar a distribuição estatística que pode ser ajustada ao conjunto de dados em causa. Esta ferramenta é parte integrante deste trabalho.

Finalmente, o Capítulo 6 encerra o trabalho com as conclusões e proposta de trabalhos futuros.

Capítulo 2 - Fiabilidade

2.1 Importância dos estudos da fiabilidade

A primeira questão que se coloca é qual a importância do estudo da fiabilidade. Essa importância, pode resumir-se nos seguintes pontos [1]:

- a) para uma empresa ter sucesso no ambiente altamente competitivo e tecnologicamente complexo de hoje é essencial que tenha conhecimento da fiabilidade de seu produto e ser capaz de o demonstrar aos seus clientes (ou potenciais clientes) a fim de poder produzir com um nível de fiabilidade aceitável. Isto permite otimizar o custo do ciclo de vida e minimizar os custos de produção, garantindo a fiabilidade e qualidade inicialmente projectadas.
- b) a actual dependência da tecnologia, exige que os produtos que compõem a nossa vida diária trabalhem durante o período para os quais foram projectados. Não é aceitável que, um produto trabalhe menos tempo que o previsto para a sua missão, mas ao mesmo tempo, não é viável desenvolver-se um produto para operar muito além do seu tempo de vida previsto, uma vez que este facto acarreta custos adicionais de produção.
- c) as avarias do produto ou dos sistemas têm diferentes efeitos, que vão desde as que causam perturbações menores (tais como a avaria de uma máquina de café), a falhas catastróficas envolvendo a perda de vidas e propriedade, como um acidente de avião. A engenharia da fiabilidade nasceu da necessidade de evitar eventos catastróficos e, com eles, a perda desnecessária de vidas e bens.
- d) o consumidor de hoje é mais informado e consciente do produto que o consumidor de anos passados. O consumidor moderno não tolera produtos que não executem de forma fiável, ou como anunciado pelo fabricante. Insatisfação do cliente com a fiabilidade de um produto pode ter consequências desastrosas, em termos de imagem para o fabricante, com os consequentes efeitos financeiros. As estatísticas anteriores ao aparecimento da Internet e das Redes Sociais, mostravam que quando um cliente está satisfeito com um produto, potencialmente passa a informação a outras oito pessoas; no entanto, um cliente insatisfeito, irá passar a informação a 22 pessoas, em média. Hoje em dia (com o desenvolvimento da Internet e da redes sociais) essa informação tende a difundir a uma velocidade bem mais elevada, sendo na maior das vezes imprevisível as suas repercussões.

Outra questão que se coloca, quando da implementação de um programa de fiabilidade, é exactamente que informação se pretende obter? De outra forma, qual o objectivo do programa de fiabilidade? De seguida, é descrita alguma da informação que se deve obter quando da implementação de um programa de fiabilidade [1]:

- a) definição do período de garantia óptimo e conseqüente possibilidade de calcular os custos de garantia estimados;
- b) definição do tempo de substituição óptimo em manutenção preventiva para bens de um sistema reparável;
- c) definição da quantidade de peças em stock e da taxa de produção, resultando num melhor controlo do stock através da correcta previsão das necessidades de componentes de reposição;
- d) melhor informação sobre os tipos de avarias ocorridas com os bens, que permite obter importante informação para o projecto, pesquisa e desenvolvimento, de forma a minimizar estas avarias;
- e) informação sobre os efeitos da idade, duração da missão e implicação dos níveis de fadiga na fiabilidade;
- f) estimativa dos níveis de redundância necessária para alcançar a fiabilidade especificada;
- g) obtenção de orientações em relação às necessárias acções correctivas para minimizar avarias e reduzir a manutenção e reparação;
- h) ajudar na obtenção de dados para boas práticas de controlo de qualidade;
- i) optimização do objectivo do nível de fiabilidade que devem ser incorporados em bens para um custo total mínimo, durante o período de vida desse bem;
- j) capacidade de obter um compromisso entre os vários parâmetros a considerar no projecto, tais como fiabilidade, manutibilidade, disponibilidade, custo, peso, volume, operacionalidade de manutenção e segurança;
- k) estabelecimento de directrizes para avaliação de fornecedores a partir do ponto de vista da sua fiabilidade do produto;
- l) promoção de vendas com base em índices de fiabilidade e métricas através de departamentos de vendas e marketing.
- m) aumento da satisfação dos clientes e um aumento das vendas como resultado da satisfação do cliente;
- n) promoção da imagem e reputação da empresa.

2.2 Evolução da fiabilidade

Até se chegar ao actual estado de desenvolvimento da fiabilidade, deve-se observar o seu percurso, que na verdade não é muito longo e que está muito ligado ao desenvolvimento paralelo da matemática e nomeadamente da estatística e da informática.

Os primeiros estudos da fiabilidade remontam ao período da Segunda Guerra Mundial, onde a Alemanha aplicou alguns conceitos básicos de fiabilidade para melhorar a disponibilidade dos seus foguetes V1 e V2 [2].

Também durante a Segunda Guerra Mundial, o Departamento de Defesa dos Estados Unidos da América, reconheceu a necessidade de melhoria da fiabilidade de seus equipamentos [2].

Durante o período entre 1945-1950, este Departamento realizou vários estudos sobre a avaria de equipamentos electrónicos, a manutenção de equipamentos e os custos da sua reparação. Os resultados de três desses estudos foram os seguintes [2]:

- 1) Um estudo do Exército indicou que entre dois terços a três quartos dos equipamentos utilizados pelo Exército estavam fora de serviço ou em reparação;
- 2) Um estudo da Força Aérea realizado ao longo de um período de cinco anos revelou que a reparação e os custos de manutenção do equipamento utilizado eram aproximadamente 10 vezes o valor seu custo original;
- 3) Um estudo realizado durante manobras militares da Marinha revelou que o equipamento electrónico estava apenas funcional cerca de 30% do tempo.

Como resultado destes estudos, o Departamento de Defesa dos EUA estabeleceu uma comissão *ad-hoc* sobre a fiabilidade, em 1950. Em 1952, esta comissão evoluiu para um grupo permanente conhecido como o Grupo Consultivo sobre a Fiabilidade de Equipamentos Electrónicos (original, *Advisory Group on the Reliability of Electronic Equipment*, conhecido pelas iniciais AGREE). Em 1957, o grupo emitiu o seu relatório, designado por *AGREE*, que resultou na elaboração de uma especificação sobre a fiabilidade de equipamentos electrónicos militares [2].

No ano de 1954, foi pela primeira vez realizado (nos Estados Unidos), um Simpósio Nacional de Controlo de Qualidade e Fiabilidade. Dois anos mais tarde, em 1956, foi publicado o primeiro livro comercialmente disponível sobre fiabilidade. O programa de mestrado em engenharia de fiabilidade do sistema, foi iniciado no *Air Force Institute of Technology* da Força Aérea dos EUA, no ano de 1962 [2].

Estes factos, relevam que foi basicamente a partir dos anos de 1940 que o conceito de fiabilidade (e também de qualidade) se começa a desenvolver. Vejamos alguns marcos no seu desenvolvimento, ao longo do século XX [3]:

- 1940-50 – Dados relativos a defeitos e avarias começam a ser sistematicamente recolhidos e analisados. Acções correctivas são empreendidas. O conceito de controlo estatístico da qualidade é desenvolvido. Reconhece-se que a qualidade deve ser construída “dentro do componente”. Os conceitos de qualidade de projecto tornam-se importantes.
- 1950-60 - A garantia da qualidade é reconhecida como um meio para o desenvolvimento e a produção de um componente com um nível de qualidade previamente especificado. Acções preventivas são acrescentadas aos testes e às medidas correctivas. Reconhece-

se que o funcionamento correcto de curto prazo não significa necessariamente fiabilidade. Revisões sistemáticas de projecto e análise de avarias (dados da avaria e mecanismos de falha), realizados muitas vezes na fase de pesquisa e desenvolvimento, levam a melhorias importantes na fiabilidade.

- 1960-70 - A fiabilidade, como um ramo da Engenharia, é reconhecida e integrada como um método para desenvolver e produzir um bem com uma fiabilidade pré-especificada. São desenvolvidos métodos para a estimativa da fiabilidade. Reconhece-se que a fiabilidade não pode ser simplesmente demonstrada por um teste de aceitação. Em vez de um valor específico para a fiabilidade (ex: MTBF, *Mean Time Between Failures*, Tempo Médio Entre Avarias), as exigências contratuais são então definidas como um *programa de garantia da fiabilidade*. Disponibilidade, manutibilidade e apoio logístico tornam-se conceitos importantes.
- 1970-80 - Devido à crescente complexidade técnica e custos de manutenção de equipamentos/sistemas, os aspectos da interface homem-máquina e de custo de ciclo de vida tornam-se importantes. Conceitos como garantia do produto, custo e engenharia de sistemas são introduzidos. O conceito de responsabilidade do produto torna-se importante. A garantia de qualidade e fiabilidade são integradas no projecto e passa a existir uma estreita cooperação com todos engenheiros envolvidos no projecto. Os clientes exigem demonstração de fiabilidade e manutibilidade, nomeadamente durante o período de garantia.
- 1980-90 - O aspecto da testabilidade ganha significado. Estratégias de teste e sistemas de triagem são desenvolvidos de forma a reduzir o custo dos testes e dos serviços de garantia. Devido ao rápido desenvolvimento da microelectrónica, maiores possibilidades ficam disponíveis para a redundância e para estruturas tolerantes a avarias. O conceito de qualidade em *programas informáticos* é então introduzido.
- Após 1990- A necessidade de reduzir ainda mais o tempo de desenvolvimento, leva ao conceito de engenharia concorrente. *Total Quality Management (TQM)* aparece como um refinamento ao conceito de garantia de qualidade, tal como usado no final dos anos setenta.

2.3 Medição da Fiabilidade

A questão que se coloca quando se pretende medir a fiabilidade de um componente ou de um sistema, é como realizar essa medição e quais os factores influentes na fiabilidade que pretendemos medir.

A fiabilidade é uma probabilidade, determinada pela relação entre o número de bens sobreviventes ao fim de uma missão de tempo “t” para o número total de bens no início da missão. Isto significa que na análise de fiabilidade, é exigida a conclusão de uma missão. Visto na forma

matemática, tem-se no numerador o número de bens sobreviventes na missão de duração t , $NS(t)$, e no denominador o número total de bens no início da missão, $NT(t)$ [4].

Assim temos a fiabilidade (média ou ponto estimado):

$$R(t) = \frac{NS(t)}{NT(t)} \quad (1)$$

Reescrevendo o numerador:

$$R(t) = \frac{NT(t) - NF(t)}{NT(t)} \quad (2)$$

ou, desenvolvendo a expressão:

$$R(t) = 1 - \frac{NF(t)}{NT(t)} \quad (3)$$

Colocando numa outra forma:

$$R(t) = 1 - F(t) \quad (4)$$

Sendo:

$NF(t)$ o número de unidades que avariaram até ao tempo “ t ”

$F(t)$ = média de não-fiabilidade ou probabilidade de avaria acumulada [4].

Pode-se também referir a fiabilidade tendo em consideração uma experiência aleatória de um total de N_0 unidades, onde ao fim de um tempo “ t ” sobrevivem NS unidades ($NS(t)$) e estão em avaria NF unidades ($NF(t)$), sendo $N_0 = NS + NF$.

No caso hipotético de todas as unidades avariarem, então o $NS(t) = 0$, e da expressão anterior, $R(t) = 0$. Se todas as unidades chegarem ao fim do tempo “ t ” sem qualquer avaria, então $NS(t) = NT(t)$, e da expressão (3), vem que $R(t) = 1$. Consequentemente, a fiabilidade tem um valor entre 0 e 1.

$R(t)$ é apenas uma estimativa devido ao número limitado ou finito de missões totais realizadas. A estimativa aproxima-se da verdadeira fiabilidade, quando o número total de eventos ou missões realizadas por uma unidade, ou por diversas unidades idênticas se aproxima do infinito.

$$\lim_{NT \rightarrow \infty} R(t) = R(t) = \text{verdadeira fiabilidade} \quad (5)$$

A condição de NT a tender para infinito, referida na expressão anterior, pode ser obtida se um número muito elevado de amostras for testado relativamente à sua fiabilidade.

A fiabilidade é igual a 1 no início de cada missão, porque todo o equipamento foi testado para garantir que está operacionalmente pronto, assumindo-se assim uma probabilidade de avaria igual a zero.

Desta forma:

$$NS(0) = NT(0) \quad (6)$$

e

$$R(0) = \frac{NS(0)}{NT(0)} \quad (7)$$

O que implica :

$$R(0) = 1 \quad (8)$$

Dito de outra forma, esta é uma condição na fiabilidade devido ao facto que, no início de uma missão, é assumido que o equipamento está disponível e pronto a começar a missão com sucesso quando assim requerido, ou seja, a disponibilidade do equipamento é de 100% [4].

2.5 Características da fiabilidade

Na operação de um bem (equipamento ou sistema), existem factores que influenciam a fiabilidade, De seguida, descrevem-se alguns desses factores [4]:

2.5.1. Intervalo de confiança

Intervalo de confiança é a probabilidade de um dado parâmetro situar-se entre dois limites, ou seja, situa-se acima de um limite inferior e abaixo de um limite superior. Normalmente, expressam-se estimativas estatísticas em termos de intervalos, com uma probabilidade associada (ou nível de confiança), do valor verdadeiro se encontrar dentro de tais intervalos. Os pontos finais dos intervalos são chamados de limites de confiança.

2.5.2. Efeito do tempo da missão

A fiabilidade depende fortemente da idade com que o bem se apresenta no início de uma missão. A fiabilidade em função da idade é expressa por:

$$R(t|T) = \frac{R(T+t)}{R(T)} \quad (9)$$

A expressão (9) significa que a fiabilidade para uma missão de duração t , começando a missão na idade T , é igual ao quociente entre a fiabilidade no fim desse período ($T + t$), e a fiabilidade para idade T , sendo “ t ” a duração da missão. Para o caso em que a taxa de avarias é constante, típico na fase de vida útil, a expressão (9) apresenta-se na seguinte forma:

$$R(t|T) = \frac{e^{-\lambda(T+t)}}{e^{-\lambda T}} \quad (10)$$

Ou simplificando :

$$R(t|T) = e^{-\lambda t} \quad (11)$$

A expressão (11) significa que, durante o período de vida útil, a fiabilidade com que o bem se apresenta no fim da missão, é independente da que o mesmo apresenta no início da mesma e é apenas uma função da duração dessa missão.

2.5.3. Efeito da idade

Deverá ter-se em conta que, quando um valor de fiabilidade é citado, o período de tempo a que se refere também é dado. Este período de tempo é o tempo referente ao fim da missão, t , nas expressões (9) e (10). Se pretendemos obter uma fiabilidade elevada, podemos obtê-la, fazendo o tempo de missão (a qual pretendemos sem avarias), tão curto quanto possível. Após este período, deve-se inspeccionar o equipamento, para garantir que está em condições aceitáveis de funcionamento (estado operacional) antes de iniciar uma nova missão. Sob estas condições, é possível obter fiabilidades muito elevadas. Deve-se no entanto salientar, que se o sistema tem de operar por longos períodos sem interrupção (o que é frequente em inúmeras situações), para reduzir a sua taxa de avaria, durante o período de vida útil, então deveremos ter uma configuração em que são utilizadas redundâncias paralelas ou “standby”. A utilização de uma redundância é sem dúvida a abordagem mais utilizada para obter fiabilidades mais elevadas [4].

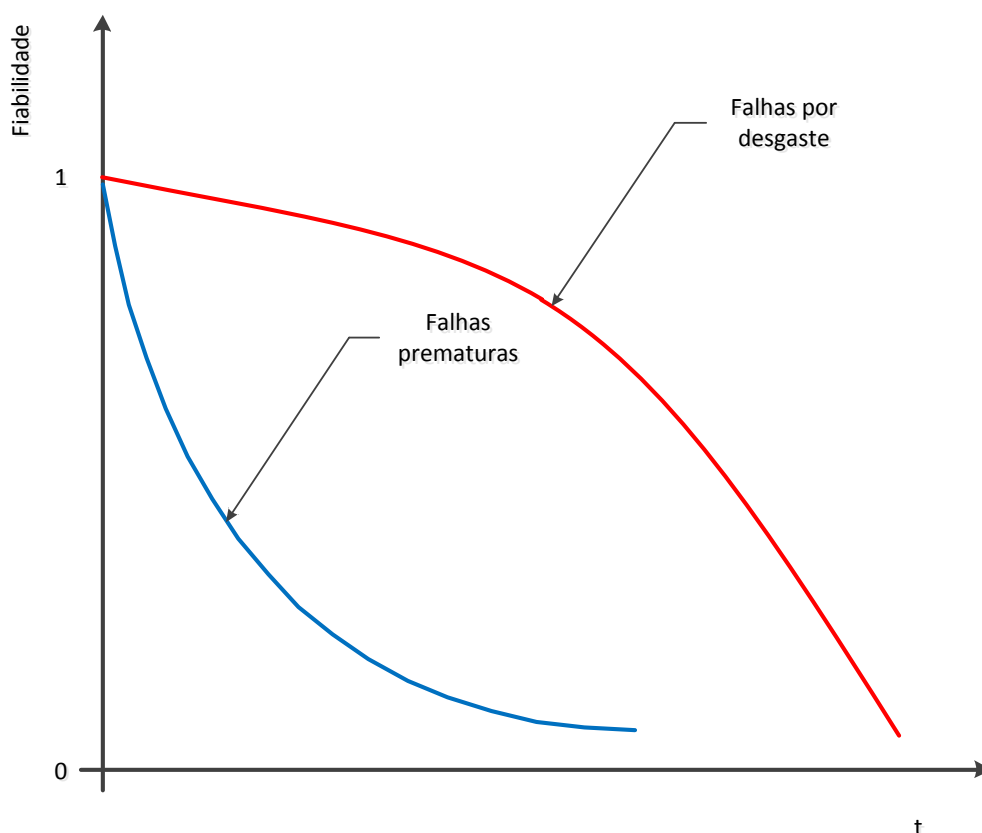


Figura 1 – Efeito do tempo de missão na fiabilidade dos bens

O efeito da idade na fiabilidade é ilustrado na Figura 1, para o caso em que a idade no início da missão é zero. A Figura 1 mostra como a fiabilidade diminui com o aumento do tempo de missão. A fiabilidade diminui mais drasticamente para os bens que apresentem avarias iniciais, isto é, no

início da missão; por outro lado, o tempo de missão aumenta a probabilidade de avarias de desgaste. A probabilidade dos bens apresentarem avarias devido a desgaste é muita baixa perto da idade zero, porque estas raramente ocorrem a uma idade tão precoce; no entanto, a fiabilidade vai diminuindo ao longo da vida, quando as avarias por desgaste começam a surgir.

2.5.4. Efeito do nível de *stress*

A melhor maneira de ilustrar o efeito do nível de *stress* sobre a taxa de avarias, no caso exclusivo de estarmos a analisar bens reparáveis é estudar as curvas de vida, conhecidas mais frequentemente por curvas da banheira e suas variantes.

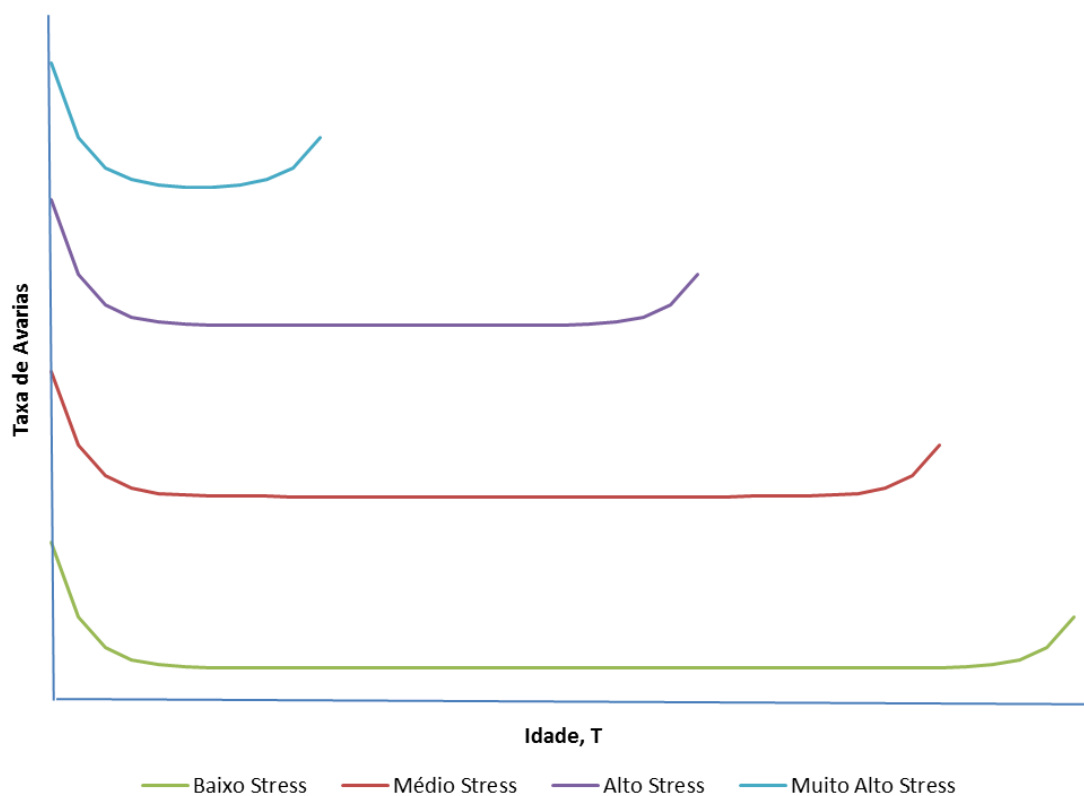


Figura 2 – Efeito do nível de *stress* na taxa de avarias e na idade

Pode ser observado que para níveis mais elevados de *stress*, a taxa de avarias prematura é mais elevada, o fim de vida é mais curto, o período de vida útil é também mais curto e o período de desgaste começa substancialmente mais cedo. A taxa de avarias por desgaste inicia-se mais cedo nos níveis mais elevados de *stress*, e ao nível de *stress* muito elevado, dificilmente é observado um período de vida útil, onde a taxa de avarias seja constante. Consequentemente, uma elevada atenção deve ser dada para os níveis de *stress* a que um bem é submetido durante a sua operação, pois estes afectam drasticamente a sua fiabilidade.

2.6 Estado da Arte

Importa nesta fase, dar a conhecer alguns exemplos do actual estado de desenvolvimento da fiabilidade. Estes exemplos, apresentados de uma forma sucinta, permitem dar uma ideia do estado de desenvolvimento e da aplicação da fiabilidade nos dias de hoje.

Verifica-se que existe uma diversidade de estudos e aplicações na área da fiabilidade, assim como a utilização de várias ferramentas complementares de engenharia. Relativamente a áreas de aplicação pode-se dizer que abrangem não só o desenvolvimento de novos produtos, como também a análise do comportamento dos bens em vida. Por outro lado, constata-se que os estudos podem também ser centrados na fiabilidade de um serviço ou em muitos casos incidir mesmo sobre a própria fiabilidade humana.

Para dar uma visão das análises de fiabilidade que são executadas incorporando ferramentas complementares, podem ser referidos vários estudos, como por exemplo o realizado por Chang e Lin [5] que utiliza a lógica fuzzy numa análise de fiabilidade de um sistema produtivo, com o objectivo de avaliar a fiabilidade em termos dos vários postos de trabalho e ajudar à tomada de decisão. Outro trabalho realizado por Jensen *et al.* [6] analisa a fiabilidade de modelos de elementos finitos na análise de fiabilidade, enquanto Catellani *et al.* [7] utiliza a simulação de Monte Carlo para avaliar a taxa de avarias e análise da fiabilidade com o objectivo de avaliar a propagação e quantificação da incerteza em todo o processo analisado, desde os dados de entrada até aos resultados obtidos. O uso de Redes de Petri nas análises de fiabilidade também se encontra colocado em vários trabalhos, como o desenvolvido por Whiteley *et al.* [8], onde é realizada uma análise de fiabilidade a membranas de células de combustível. Também as redes neuronais artificiais (ANN) aparecem associadas a estudos de fiabilidade, como é o caso do trabalho realizado por Chojaczyk *et al.* [9] incidindo sobre optimização no projecto estrutural.

Quanto a aplicações também se encontra uma grande variedade, mostrando a importância do tema, independentemente da área de negócio em apreço. Por exemplo, An *et al.* [10] realizaram uma análise de fiabilidade estrutural sobre cabos suspensos, que incluem linhas de transmissão, cabos de suspensão de pontes e cabos de suporte de telhados com o objectivo de analisar a segurança estrutural de um cabo suspenso e perceber quais os factores de maior influência e a sua relação do ponto de vista probabilístico. Li *et al.* [11] realizaram um estudo sobre a corrosão de pipelines, propondo uma metodologia que associa esta degradação a defeitos na tubagem. Outros estudos analisam a fiabilidade de sistemas mais complexos como é o exemplo do trabalho publicado por Alderson *et al.* [12] sobre instalações de tratamento de águas residuais ou o trabalho realizado por Issaad e Abene [13] sobre optimização de sistemas de distribuição de energia baseada numa manutenção centrada na fiabilidade (RCM). De igual modo Kim e Lee [14] apresentam um estudo sobre a fiabilidade de estruturas de suporte de aerogeradores instalados offshore sujeitas a cargas oceânicas extremas. Outros trabalhos mais generalistas mostram a

importância dos estudos e análise de fiabilidade, como é o exemplo do trabalho apresentado por Labib [15] sobre diversos acidentes ocorridos devido a falhas de bens, desde o acidente de Bhopal até ao mais recente ocorrido em Fukushima.

2.7 Distribuições estatísticas

Nesta secção, descrevem-se algumas das distribuições estatísticas mais utilizadas em fiabilidade, e as suas principais características.

2.7.1. Distribuição Exponencial

A distribuição exponencial é uma das distribuições mais utilizadas em fiabilidade porque representa a distribuição no tempo (ou outra unidade) até à avaria dos bens de natureza complexa, com componentes de diferentes distribuições de vida, exibindo a característica de ter uma taxa de avarias constante com o tempo de operação. As avarias que resultam numa taxa de avarias constante, são denominadas avarias aleatórias. Consequentemente, a distribuição do tempo para a avaria das falhas aleatórias, é uma exponencial [4].

A definição matemática da função densidade de probabilidade referente à distribuição exponencial de um parâmetro é a seguinte:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad (12)$$

ou

$$f(t) = \frac{1}{MTBF} e^{-\frac{t}{MTBF}}, \quad t \geq 0, > 0, MTBF > 0 \quad (13)$$

onde:

λ é a taxa de avarias constante, em avarias por unidade de período medido; por exemplo, avarias por hora, por milhão de horas, por milhão de ciclos, etc.

$$\lambda = 1 / MTBF$$

MTBF= tempo médio até à avaria

t= tempo de operação, vida ou idade, em horas, ciclos, milhas, actuações, etc.

Esta distribuição requer apenas a estimação de um único parâmetro para a sua aplicação, ou seja, λ [4].

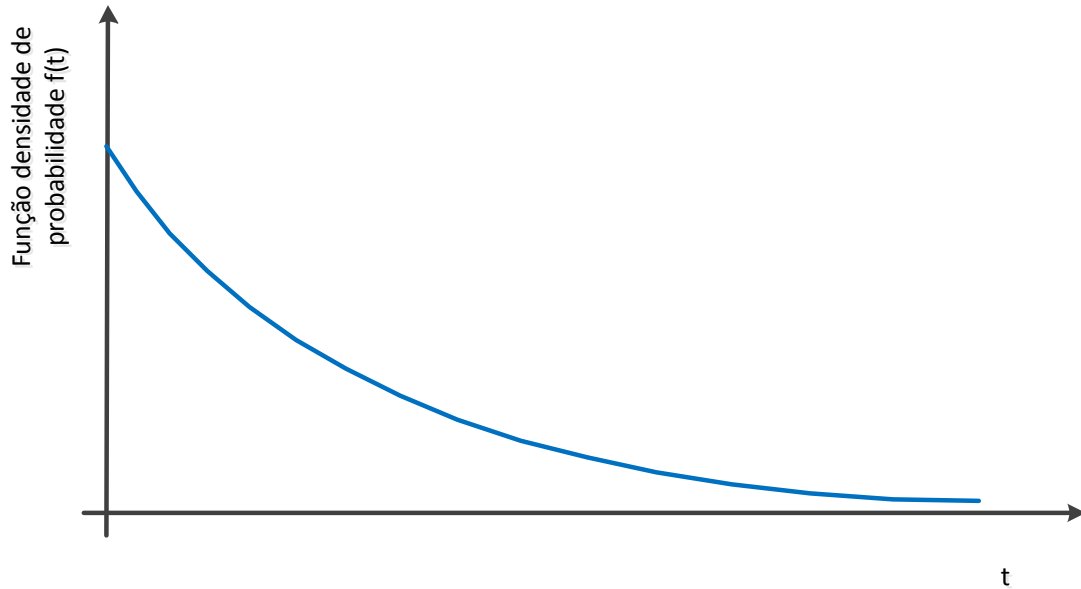


Figura 3 – Aspecto da Exponencial de parâmetro simples vs. Tempo ($f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$)

A Figura 3 ilustra a expressão (12). Algumas das características desta distribuição são as seguintes [4]:

- a) O parâmetro de localização é zero, o que significa que a hipótese de avaria começa a ocorrer à idade zero (parâmetro simples);
- b) O parâmetro da escala é $1/\lambda$. Quando λ decresce em valor, a distribuição é puxada para a direita; e quando λ aumenta, a distribuição é puxada para a origem.
- c) A distribuição não tem parâmetro de forma, visto ter apenas um formato, isto é, o formato exponencial; e o único parâmetro que tem é a taxa de avarias, λ .
- d) A distribuição começa em $t = 0$, ao nível de $f(t = 0) = \lambda$ e decresce subsequentemente, exponencialmente com o aumento de t e é convexa. Tendo em conta que t tende para infinito, $f(t)$ tende para zero.
- e) A fiabilidade para a missão de duração de $t = m = 1/\lambda$, ou a duração de um MTBF é sempre 0.3679 ou 36.79%. Isto significa que a fiabilidade de uma missão que tem a duração de um MTBF é relativamente baixa e não é recomendada, porque apenas 36.8% das missões serão cumpridas com sucesso, ou dos equipamentos que realizam essa missão, apenas 36.8% irão sobreviver.
- f) A função de fiabilidade condicional é:

$$R(t|T) = \frac{R(t+T)}{R(T)} \quad (14)$$

ou

$$R(t|T) = \frac{e^{-\lambda(t+T)}}{e^{-\lambda T}} \quad (15)$$

ou

$$R(t|T) = e^{-\lambda t} \quad (16)$$

o que significa que a fiabilidade para a missão de duração t , realizada após o componente ou equipamento ter já acumulado T horas de operação, desde a idade zero, é apenas uma função da duração da missão e não uma função da idade no início e no fim da missão, desde que durante a missão, a taxa de avarias permaneça constante no valor λ .

- g) A duração da missão, que garante o objectivo de fiabilidade, enquanto a unidade se mantém em vida útil, até ao fim da missão de duração tR , é dada por:

$$R(tR) = e^{-\lambda tR} \quad (17)$$

$$\log_e[R(tR)] = -\lambda tR \quad (18)$$

$$tR = -\frac{\log_e\{R(tR)\}}{\lambda} \quad (19)$$

Onde

tR é a vida expectável.

Deve-se igualmente referir o caso da distribuição exponencial de dois parâmetros. Nesta distribuição, o segundo parâmetro é o parâmetro de localização, γ . A expressão da distribuição para a função de densidade de probabilidade, para a expressão de dois parâmetros, toma a seguinte forma [4]:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda(t-\gamma)} \quad (20)$$

em que : $f(t) \geq 0$, $\lambda > 0$, $t \geq \gamma$

Esta expressão aplica-se quando a amostra (ou a completa população) inicia a actividade no $t=0$, mas não existe qualquer avaria até ao momento γ . Após este período as avarias ocorrem segundo a distribuição exponencial de apenas um parâmetro.

Algumas das características são descritas de seguida [4]:

- O primeiro ponto da probabilidade não nula da distribuição é em $t = \gamma$, no ponto $f(t = \gamma) = \lambda$; a partir desse ponto diminui exponencialmente na medida em que t aumenta, sendo a distribuição convexa.
- Quando t tende para infinito, a função tende para zero
- O parâmetro de localização, γ , desloca o início da função densidade de probabilidade para uma distância de exactamente γ para a direita da origem

2.7.2. Distribuição de Weibull

A distribuição de Weibull é uma das distribuições estatísticas mais utilizadas ao nível da ciência e nomeadamente da fiabilidade, devido às suas características. A distribuição tem uma elevada exactidão. [4].

A função densidade da probabilidade para a distribuição de Weibull é dada por:

$$f(t) = \left(\frac{\beta}{\eta}\right) \cdot \left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta-1} \cdot e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^\beta} \quad (21)$$

Onde:

$$f(t) \geq 0, t \geq \gamma, \beta > 0, \eta > 0, -\infty < \gamma < \infty$$

β é o parâmetro de forma

η é o parâmetro de escala

γ é o parâmetro de localização

Esta é a denominada forma triparamétrica da distribuição de Weibull. A figura 4 mostra o formato da distribuição para vários valores de β . O parâmetro de localização γ , tal como o nome indica, localiza a distribuição ao longo da abcissa. Quando $\gamma = 0$, a distribuição começa em $t = 0$, ou seja, na origem. Se γ é positivo, a distribuição começa numa localização à direita da origem; se γ é negativo, a distribuição começa à esquerda da origem [4].

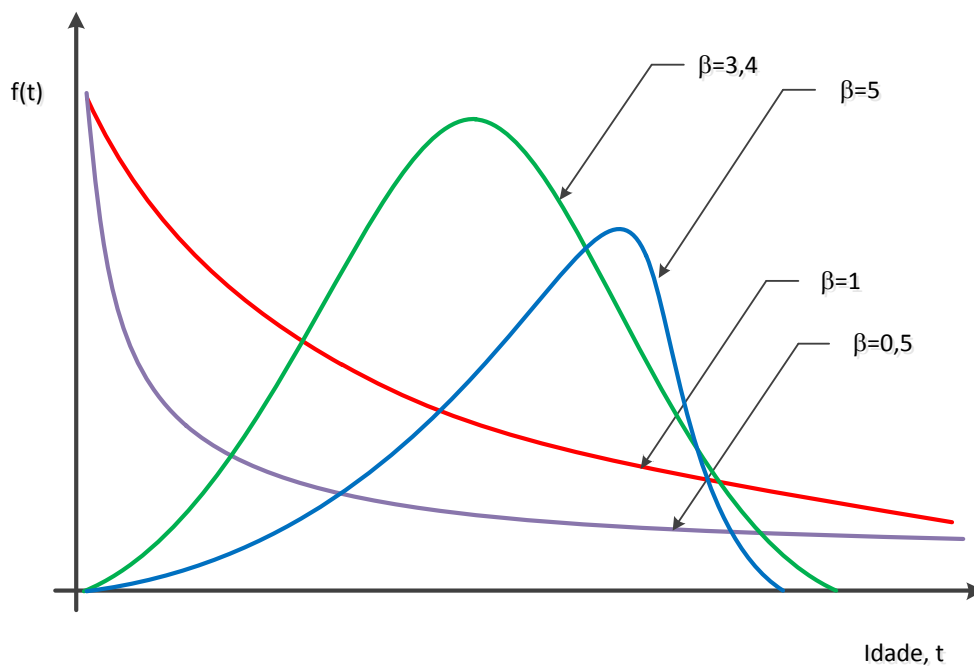


Figura 4 – Função densidade de probabilidade da Distribuição de Weibull para vários valores de β

No caso em que a distribuição começa na origem, temos a distribuição de Weibull na forma biparamétrica. Este caso aplica-se essencialmente a bens novos, sem vida inicial e a distribuição apresenta-se com uma maior simplicidade [4].

A expressão (22), traduz a forma biparamétrica da função densidade de probabilidade da distribuição de Weibull:

$$f(t) = \left(\frac{\beta}{\eta}\right) \cdot \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} \cdot e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta} \quad (22)$$

Quando temos $\beta = 1$, a distribuição de Weibull apresenta-se na forma monoparamétrica, e resulta numa simples distribuição exponencial.

A expressão (23), apresentada de seguida, traduz a forma monoparamétrica da função densidade de probabilidade da distribuição de Weibull:

$$f(t) = \left(\frac{1}{\eta}\right) \cdot e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)} \quad (23)$$

Os parâmetros η e γ têm as mesmas unidades que t , como sejam horas, quilómetros, ciclos, actuações, etc. até à avaria. O parâmetro γ pode assumir todos os valores e proporciona uma estimativa de quão cedo uma avaria poderá ser observada [4].

2.7.2.1 Características da distribuição de Weibull

A expressão de fiabilidade para a distribuição de Weibull é a seguinte:

$$R(t) = e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^\beta} \quad (24)$$

Algumas das características desta função, são as seguintes [4]:

- a) Para $\beta=1$ e o mesmo η , $R(t)$ decresce, mas menos acentuadamente do que para $0<\beta<1$, sendo convexa.
- b) Para $\beta>1$, $R(t)$ decresce quando t aumenta, mas menos acentuadamente do que antes; e quando o desgaste se acentua, decresce rapidamente e faz uma inflexão.
- c) A fiabilidade de uma missão de duração $\gamma+\eta$, iniciando-se a missão na idade zero, é sempre igual a 0.368.
- d) A expressão Weibull da fiabilidade condicionada é dada pela equação (14). Transformado a expressão, poderemos obter:

$$R(t|T) = \frac{e^{-\left(\frac{T+t-\gamma}{\eta}\right)^\beta}}{e^{-\left(\frac{T-\gamma}{\eta}\right)^\beta}} \quad (25)$$

ou

$$R(t|T) = e^{-\left[\left(\frac{T+t-\gamma}{\eta}\right)^\beta - \left(\frac{T-\gamma}{\eta}\right)^\beta\right]} \quad (26)$$

Esta expressão representa a fiabilidade para uma nova missão de duração t , tendo já acumulado T horas de operação até ao início desta nova missão [4].

2.7.2.2. Características da taxa de avarias na distribuição de Weibull

A taxa de avarias $\lambda(t)$ na distribuição de Weibull é dada por:

$$\lambda(T) = \frac{\beta}{\eta} \cdot \left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta-1} \quad (27)$$

O traçado da taxa de avarias pode-se observar na seguinte figura:

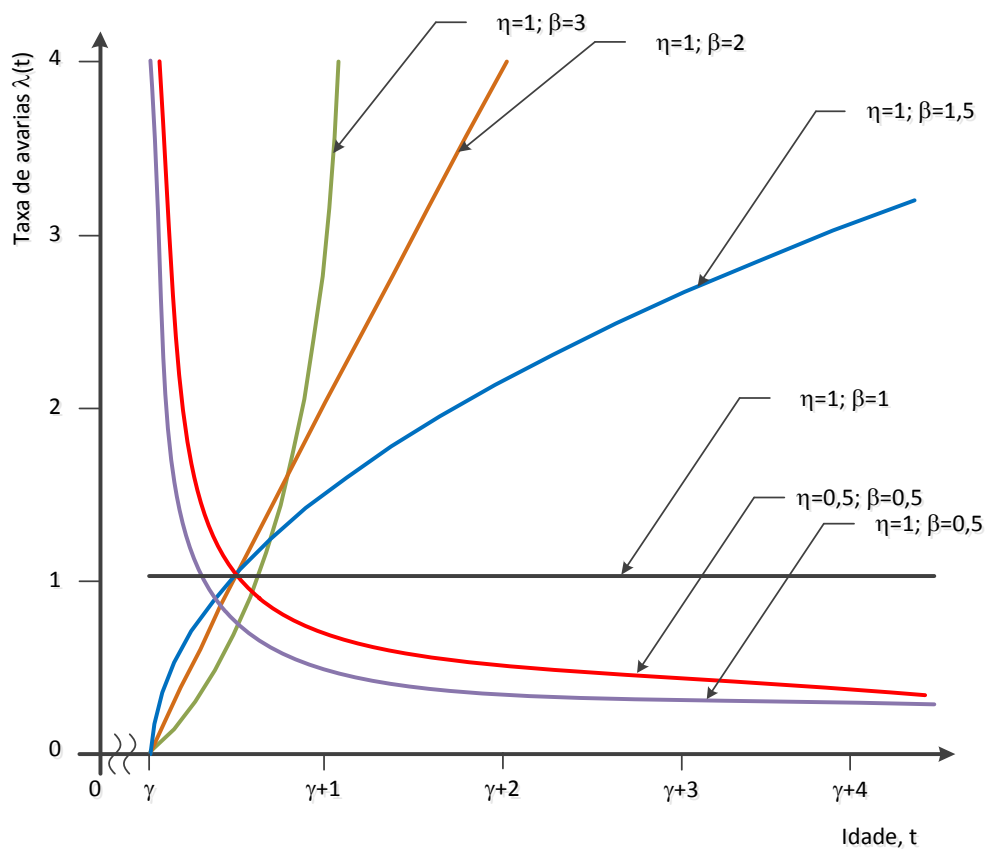


Figura 5 – Os efeitos do parâmetro de escala η e do parâmetro de forma β , na taxa de avarias

Algumas das características desta expressão, que podem ser observadas na figura anterior, são as seguintes [4]:

- a) Quando o parâmetro de forma toma os valores no intervalo $0 < \beta < 1$, a taxa de avarias inicia-se num valor de (tendência) infinito quando $t=\gamma$. O valor da taxa de avarias decresce posteriormente. A taxa de avarias aproxima-se do valor zero quando t tende para infinito, ou seja, matematicamente, $\lambda(\infty) = 0$. Este comportamento é adequado para representar a taxa de avarias de unidades que exibem avarias prematuras, para as quais a taxa de avarias decresce com a idade.
- b) Para $\beta=1$, a taxa de avarias é uma constante em relação ao tempo sendo representada por

$$\lambda(t) = \frac{1}{\eta} \quad (28)$$

Esta expressão representa a taxa de avarias em período de vida útil.

- c) Para valores de β maiores que 1, a taxa de avarias cresce quando t aumenta e torna-se assim adequada para representar a taxa de avarias de unidades que exibem avarias do tipo desgaste:
- i) Para $1 < \beta < 2$, a taxa de avarias é uma curva côncava; conseqüentemente, a taxa de avarias aumenta numa escala mais moderada, quando t aumenta.
- ii) Para $\beta=2$ a taxa de avarias toma a forma de uma relação directa entre $\lambda(t)$ e t , iniciando no valor de $\lambda(t)=0$ a $t=\gamma$ e aumentando a partir daí com um declive de $\frac{2}{\eta^2}$. Conseqüentemente, a taxa de avarias aumenta, a uma taxa constante quando t aumenta.
- iii) Para $\beta > 2$, a taxa de avarias é uma curva convexa, com um declive crescente à medida que t aumenta. Conseqüentemente, a taxa de avarias aumenta a uma taxa crescente, quando t aumenta.

2.7.2.3. Aplicação da distribuição de Weibull

Algumas das aplicações da distribuição de Weibull são descritas de seguida [4]:

- a) Tempos até à avaria de relés, condensadores e rolamentos;
- b) Tempos até à avaria de motores e fadiga em têxteis;
- c) Resistência à corrosão, fugas em baterias, projecções de marketing de medicamentos;
- d) A distribuição dos ciclos até à avaria de sólidos sujeitos a tensões.

2.7.3. Distribuição Normal

A distribuição normal (ou de Gauss) é o tipo de distribuição mais amplamente conhecido e cuja função densidade de probabilidade é dada por:

$$f(t) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{t-\mu}{\sigma} \right)^2} \quad (29)$$

Em que

$$f(t) \geq 0, \quad -\infty < t < \infty, \quad -\infty < \mu < \infty, \quad \sigma > 0,$$

onde

μ = média dos tempos até à avaria, em horas,

e

σ = desvio padrão dos tempos até à avaria, em horas.

Trata-se portanto de uma distribuição com dois parâmetros, μ e σ , isto é, respectivamente a média e o desvio padrão. De forma a demonstrar as características destes dois parâmetros, pode-se observar a Figura 8 onde estão representadas quatro diferentes distribuições normais as quais têm diferentes médias e desvio padrão. Nestas quatro distribuições verifica-se que a distribuição 1 tem a mesma média da distribuição 2 enquanto o desvio padrão da distribuição 1 é maior que o da 2. Por outro lado, o desvio padrão da distribuição 1 é igual ao da 3 e o da distribuição 2 é igual ao da 4, mas a média da 1 é igual à da 2 enquanto a média da 3 é igual à da 4. Desta forma é possível observar o diferente comportamento da distribuição com a alteração tanto da média como do desvio padrão [4].

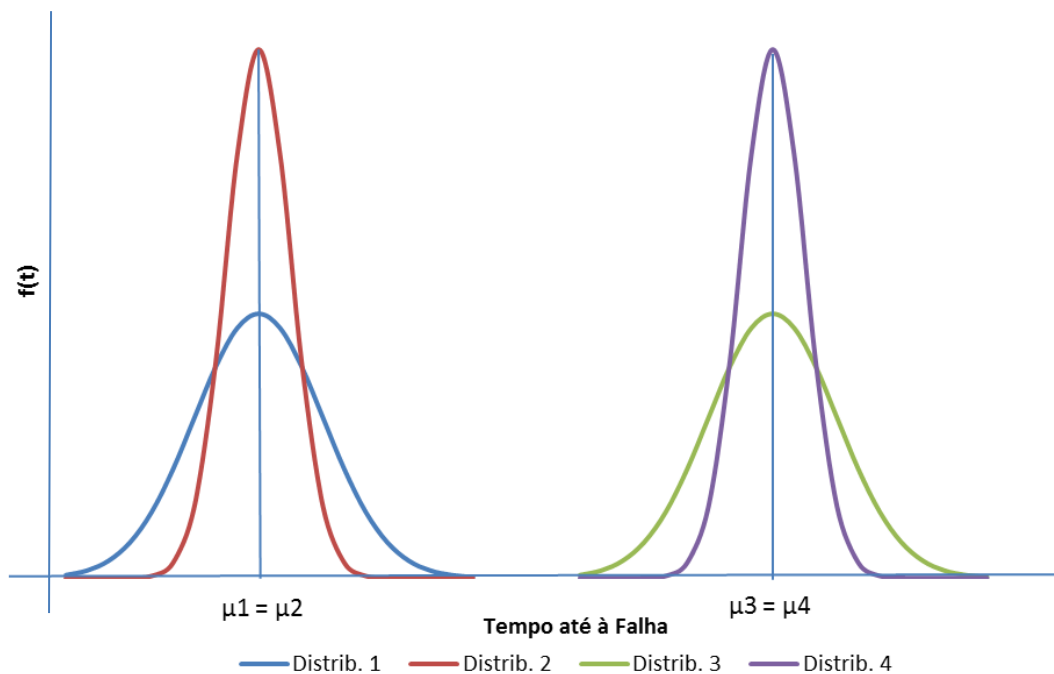


Figura 6 – Influência de diferentes médias e desvio padrão na Distribuição Normal

Alguns dos aspectos característicos de uma função densidade de probabilidade normal são as seguintes [4]:

Um dos dois parâmetros, a média, ou tempo médio de vida, ou MTBF, μ , é também o parâmetro de localização da distribuição normal, determinando assim o posicionamento da distribuição no eixo das abcissas. Pode assumir-se que os valores da média variam entre mais e menos infinito, matematicamente, $-\infty < \mu < \infty$. Quanto maior for o valor de μ , maior é o tempo médio de vida do item considerado, seja um componente, equipamento ou dos próprios sistemas. Quanto mais tempo de vida tiver o projecto, maior será o valor de μ . A distribuição normal tem a forma de um sino e é simétrica em torno da sua média, ou seja, a média é o seu eixo de simetria.

O segundo parâmetro é o desvio padrão, σ , que influencia a forma da distribuição normal. À medida que o desvio padrão σ diminui, a distribuição torna-se mais estreita em torno da sua média. Este facto, pode ser observado na Figura 6, onde o desvio padrão da Distribuição 2 (com o mesmo valor da Distribuição 4), é menor que o desvio padrão da Distribuição 1 (que tem o mesmo valor da Distribuição 3). À medida que o desvio padrão, σ aumenta, a distribuição atinge valores mais longe da sua média, isto é, em termos gráficos, torna-se mais larga e baixa. O desvio padrão assume unicamente valores positivos. Quanto maior a variabilidade dos dados, maior será o valor do desvio padrão, sendo a inversa também verdadeira. O desvio padrão é também a distância entre a média e o ponto de inflexão da distribuição em cada lado da média. O ponto de inflexão é o ponto da distribuição em que o declive muda de um valor decrescente para um valor crescente, ou onde a segunda derivada da distribuição tem um valor igual a zero.

A distribuição normal começa em $t = -\infty$ com $f(t) = 0$. À medida que t vai aumentando, $f(t)$ também aumenta, atravessa o seu ponto de inflexão e atinge o seu valor máximo quando $t = \mu$. Depois, $f(t)$ começa a decrescer, atravessa o seu ponto de inflexão e atinge o valor $f(t) = 0$ quando $t = +\infty$.

A função densidade de probabilidade para distribuição normal tem uma média, μ que é igual à mediana, e também igual à moda.

A distribuição normal não tem qualquer parâmetro de forma, como pode ser visto na expressão (29). Isto significa que uma distribuição normal tem uma e apenas uma forma (a de sino), e esta não altera [4].

Uma outra característica de uma distribuição normal são as áreas específicas, que são aquelas que se encontram a certas distâncias da média. Estas têm valores constantes e são as seguintes:

- Entre $\mu - 1\sigma$ e $\mu + 1\sigma$ cerca de 68.3% da área da distribuição;
- Entre $\mu - 2\sigma$ e $\mu + 2\sigma$ cerca de 95.5% da área da distribuição;
- Entre $\mu - 3\sigma$ e $\mu + 3\sigma$ cerca de 99.79% da área da distribuição

A função de densidade da probabilidade normal estandardizada, que tem uma média de zero e um desvio padrão de um, é dada por:

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \quad (30)$$

Esta função é obtida de $f(t)$ utilizando as duas transformações

$$Z = \frac{t - \mu}{\sigma} \quad (31)$$

e

$$f(t) dt = \phi(z) dz. \quad (32)$$

2.7.4. Distribuição Lognormal

A distribuição lognormal, de dois parâmetros, é dada pela seguinte expressão [4]:

$$f(t) = \frac{1}{t \sigma' \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{t' - \mu'}{\sigma'} \right)^2} \quad (33)$$

em que

$$F(t) \geq 0, t \geq 0, -\infty < t' < \infty, \sigma' > 0 \quad \text{e} \quad t' = \log_e t$$

Sendo :

t' a média do logaritmo neperiano (ou natural) da unidade considerada (horas, ciclos, etc.)

σ' o desvio padrão do logaritmo neperiano (ou natural) da unidade considerada

Considera-se que a variável segue uma distribuição lognormal, se o logaritmo dessa variável aleatória segue uma distribuição normal.

Este facto justifica que a expressão que define a função, tem os seus dois parâmetros, μ' e σ' , dado em termos do logaritmo do valor dado.

Estes dois parâmetros são determinados através das seguintes expressões:

$$t' = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log_e t_i \quad (34)$$

e

$$\mu' = \left(\frac{\sum_{i=1}^n (t_i t')^2 - n (t')^2}{n-1} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (35)$$

Em que n representa a quantidade de observações realizadas.

Devido ao facto da função densidade de probabilidade não ser directamente integrável, tal como na distribuição normal, esta terá de ser transformada. Desta forma a função densidade de probabilidade terá de ser transformada através de

$$\log_e t = t'. \quad (36)$$

Quando os logaritmos da distribuição lognormal de variável aleatória é normalmente distribuída, a distribuição é dada pela seguinte expressão:

$$f(t') = \frac{1}{\sigma' \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{t' - \mu'}{\sigma'} \right)^2} \quad (37)$$

Onde, μ' e σ' são calculadas através das expressões (34) e (35), respectivamente, tendo em consideração a expressão (36).

Através de uma sequência de cálculos, a função densidade de probabilidade para a distribuição lognormal, é dada pela seguinte expressão:

$$f(t) = \frac{0,43429}{t \sigma'' \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{t'' - \mu''}{\sigma''} \right)^2} \quad (38)$$

onde a sua média μ'' e desvio padrão σ'' , são determinados usando as expressões (34) e (35), sendo os vários t' substituídos por t'' usando a expressão

$$t'' = \log_{10} t. \quad (39)$$

Algumas das características da função densidade de probabilidade da distribuição lognormal são as seguintes [4]:

- a) Em termos gráficos e em comparação com a distribuição normal, esta distribuição está distorcida para a direita
- b) A média, dada pelo parâmetro μ' é o parâmetro de escala (e não o parâmetro de localização, tal como na distribuição normal)
- c) O desvio padrão, dado pelo parâmetro σ' é o parâmetro de forma (e não o de escala como numa distribuição normal)

Esta distribuição não irá ser considerada no Capítulo 5, Caso Prático.

Capítulo 3 – Testes Estatísticos

Após no capítulo anterior se ter analisado algumas das distribuições estatísticas mais habitualmente utilizadas em fiabilidade, pretende-se neste capítulo abordar algumas das metodologias disponíveis para determinar se determinada distribuição estatística é adequada para um conjunto de dados até à avaria, recolhidos em ambiente real.

Assim, neste Capítulo ir-se-á referir o Teste do Qui-Quadrado, o Teste de Kolmogorov-Smirnov, o Teste de Anderson-Darling e o Teste de Cramer-von Mises.

3.1 Teste do Qui-Quadrado

O teste do Qui-Quadrado é um dos testes utilizados para determinar qual a distribuição estatística mais adequada a um conjunto de dados de tempos até à avaria.

3.1.1. Teste do Qui-Quadrado passo a passo

Seguidamente ir-se-á descrever a metodologia deste teste, passo a passo. Este teste é composto de um total de 6 passos, que são descritos de seguida [16]:

1º passo – Calcular a estimativa da média aritmética

A estimativa da média, \bar{t} , é definida como o valor da média aritmética dos dados, t_i , ou seja:

$$\bar{t} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i \quad (40)$$

2º passo – Calcular o desvio padrão

A estimativa do desvio padrão, $\hat{\sigma}$, é dada por

$$\hat{\sigma} = \left[\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2 \right]^{1/2} \quad (41)$$

3º passo – Calcular o número de intervalos de classes

Ao desenvolver o histograma, os dados são agrupados num número adequado de intervalos de classes, e a frequência observada em cada intervalo é assim registada. O número ótimo de intervalos, k , poder ser estimado a partir da Regra de Sturges, ou

$$k = 1 + 3.322 \log_{10}(n) \quad (42)$$

onde n é o tamanho da amostra. A largura da classe, ω , é dada por

$$\omega = \frac{r}{k} \quad (43)$$

Onde

$r = t_{\max} - t_{\min}$. ω é arredondado para o valor mais próximo de medida de precisão.

Os valores iniciais da classe são determinados, iniciando-se pelo mínimo valor observado e adicionando-lhe sucessivamente a largura da classe, ω . Os valores finais da classe são determinados adicionando a cada valor inicial de cada classe a quantidade $(\omega - \epsilon)$, onde ϵ é a precisão. O limite inferior esperado de um intervalo de classe é determinado subtraindo a quantidade $\epsilon/2$ ao valor inicial da classe e o limite superior é determinado adicionando $\epsilon/2$ ao valor final da classe.

4º passo – Determinar as frequências observadas

As frequências observadas em cada classe são determinadas pela contagem do número de observações dentro dessa classe.

5º passo – Determinar a frequência esperada

A frequência esperada obtém-se multiplicando o número total de observações, n , pela área sob a função densidade de probabilidade da distribuição adoptada, entre os limites superior e inferior da classe em questão. Para assegurar que a frequência total esperada coincide com a frequência total observada, a área sob a função densidade de probabilidade à esquerda do limite inferior da primeira classe é incluída na área sob a primeira classe, e a área sob a função densidade de probabilidade à direita do limite superior da classe n é incluída na área sob a última classe.

6º passo – Determinar o valor do Qui-quadrado

O valor do Qui-Quadrado, X^2_o , é calculado a partir de:

$$X^2_o = \sum_{i=1}^k \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i} \quad (44)$$

Onde

o_i = frequência observada na classe i ,

e_i = frequência esperada na classe i

Se as frequências observadas forem idênticas às frequências esperadas, ou dito de outra forma, se os dados experimentais se ajustam exactamente à distribuição teórica, então o valor do Qui-Quadrado, X^2_o , será zero. O valor de X^2_o é sempre positivo e finito; isto significa que, quanto maior for o valor de X^2_o , pior o ajuste dos dados experimentais à distribuição adoptada.

Para a implementação do teste do Qui-Quadrado, o valor do X^2_o calculado através da expressão (44) é comparado com o valor crítico X^2_{cr} apresentado no Anexo B. O valor de X^2_{cr} é escolhido de forma a que a área sob a função densidade de probabilidade X^2_o à direita do X^2_{cr} , seja igual ao nível de risco, α .

Este valor de X^2_{cr} depende do número de graus de liberdade, n , o qual é o parâmetro da função densidade de probabilidade do X^2 cujo X^2_{cr} é solicitado. Quanto maior o número de graus de

liberdade, maior será o valor de X^2_{cr} para um determinado nível de confiança. O número de graus de liberdade, n , é dado por:

$$n = k-1-m, \quad (45)$$

onde

k = número de classes

m = número de parâmetros estimados para a amostra.

A razão de ter m na expressão é devido ao facto de m restrições serem impostas ao valor de X^2_{cr} . Como exemplo, na distribuição normal, $m=2$, uma vez que a média e o desvio padrão devem ser estimados para os dados da amostra. A justificação para a expressão $(k-1)$ na expressão é devido ao facto que, se $(k-1)$ das frequências esperadas for conhecido, a frequência nas restantes classes é determinada singularmente [16].

Tal como referido anteriormente, o valor do Qui-Quadrado calculado pela expressão (43), ou X^2_o é comparado com o valor crítico obtido do Anexo B (valor de X^2_{cr}) correspondente ao nível de confiança pretendido, $1-\alpha$, ou nível de significância (nível de risco), α , e os graus de liberdade, n .

Se o valor de Qui-Quadrado calculado é inferior ao valor crítico, o ajuste é considerado bom para o nível de confiança pretendido, $1-\alpha$, ou seja, se

$$X^2_o < X^2_{cr}, \quad (46)$$

não se rejeita a distribuição testada como capaz de representar de uma forma aceitável os dados, com nível de confiança, $1-\alpha$. No entanto, se:

$$X^2_o \geq X^2_{cr}, \quad (47)$$

rejeita-se a distribuição ajustada.

A probabilidade de uma distribuição aceitável ser rejeitada por este teste não pode exceder o nível de risco, α [16].

3.1.2. Exemplo prático do Teste do Qui-Quadrado

O caso apresentado de seguida, segundo Nick e Shiangxi [17], demonstra um estudo de fiabilidade, onde a dado passo, na determinação da melhor distribuição que se adapta aos dados recolhidos, foi utilizado o teste do Qui-Quadrado (nota: o teste de Kolmogorov-Smirnov foi também utilizado; este teste é referido no capítulo seguinte). Este estudo analisa a fiabilidade de equipamentos mecânicos. Mais precisamente, são analisadas as avarias mecânicas e consequentes tempos de reparação, de uma frota de retroescavadoras (13 unidades), utilizadas numa mina subterrânea na zona de Sudbury, Ontário, Canadá, referente ao período entre Janeiro de 2006 a Maio de 2007.

A base do estudo tem em consideração que as avarias nos equipamentos e a consequente manutenção não programada, contribuem significativamente para perdas na produção e investimentos desnecessários em maquinaria extra. A investigação foi iniciada para avaliar as características da manutenção da maquinaria e fornecer uma análise estatística das causas das avarias do equipamento.

No estudo utilizaram-se métodos gráficos conjuntamente com métodos estatísticos e analíticos, tendo sido aplicadas duas abordagens na realização da análise da manutenção: uma abordagem básica da manutenção e uma abordagem baseada na fiabilidade. Primeiramente foi efectuada a abordagem básica da manutenção por forma a determinar padrões de avaria das máquinas em estudo. Depois, aplicou-se uma abordagem baseada na fiabilidade por forma a indicar as futuras características operacionais da maquinaria, através da utilização de técnicas de modelos de distribuição de probabilidade.

Ajustamento à distribuição da probabilidade teórica

Um dos passos do estudo, após a recolha e análise inicial dos dados (nomeadamente na existência de tendências) consistiu em determinar a distribuição de probabilidade teórica que se adaptam aos dados dos tempos entre avarias, com o objectivo de determinar o modelo de distribuição de avarias para cada retroescavadora e para toda a frota. A fiabilidade de cada retroescavadora e de toda a frota foi calculada através da conhecida expressão geral da fiabilidade: $R(t) = 1 - Q(t)$.

As distribuições de Weibull, lognormal e exponencial foram consideradas para este estudo por serem as mais frequentemente utilizadas na análise das avarias do equipamento móvel da exploração mineira.

Avaliação da capacidade de ajuste

Para avaliar quão bem os dados se ajustam nos modelos de distribuição de probabilidade, foram utilizados dois testes para determinar a capacidade de ajuste do conjunto de dados: o teste do Qui-Quadrado e o teste de Kolmogorov-Smirnov (K-S). O quadro seguinte ilustra os resultados destes dois testes para os dados dos tempos entre avarias.

Tabela 1 – Resultados dos testes

Número da retro- escavadora	Exponencial (E)		Lognormal (L)		Melhor ajuste
	Q-Q	K-S	Q-Q	K-S	
855	11.66	0.1152	17.28	0.1475	Exponencial
845	26.62	0.1422	20.78	0.0999	Lognormal
145	13.37	0.1853	07.89	0.1112	Lognormal
192	18.25	0.1325	20.25	0.1407	Exponencial
171	19.69	0.1625	04.69	0.0484	Lognormal
157	19.25	0.1437	N/A	N/A	Exponencial
391	8.863	0.1330	115.40	0.2059	Exponencial
389	13.85	0.0975	117.10	0.1679	Exponencial
313	28.27	0.1457	07.81	0.0640	Lognormal
299	20.90	0.0970	34.37	0.1318	Exponencial
262	18.21	0.0930	19.26	0.1128	Exponencial
240	45.00	0.1651	40.03	0.1213	Lognormal
729	00.15	0.1368	00.15	0.0972	Lognormal
Frota completa	237.60	0.1213	185.90	0.0805	Lognormal

Deve-se acrescentar, que para a distribuição de Weibull, não foram gerados quaisquer resultados com estes dois testes.

A distribuição de probabilidade Exponencial e a distribuição de probabilidade Lognormal são aquelas que melhor se adaptam aos dados da maioria das retroescavadoras e aos dados do tempo entre avarias da frota.

A partir do ponto em que os dados tenham sido correctamente ajustados a uma distribuição de probabilidade, a fiabilidade do equipamento pode ser calculada, utilizando a função de fiabilidade da distribuição de probabilidade adoptada.

Após esta fase, o estudo mostra os resultados previstos da fiabilidade baseados em, por exemplo, 50 horas de operação para cada retroescavadora e para o toda a frota, nomeadamente o Tempo Médio Entre Avarias (MTBF) [17].

3.1.3. Comentários ao Teste do Qui-Quadrado

1. Este teste adapta-se bem a distribuições discretas.
2. Este teste pode ser utilizado tanto nos casos em que a distribuição esperada está completamente especificada, como nos casos em que os parâmetros da distribuição esperada são desconhecidos e necessitam de ser estimados a partir da amostra.

3. Este teste não é muito robusto, é menos eficaz que o teste de Kolmogorov-Smirnov e que outros testes.
4. Este teste não pode ser usado eficientemente em casos de amostras de pequena dimensão i.e., inferiores a 25 dados, devido à imposição de que cada intervalo de classes deva ter no mínimo menos cinco observações [16].

3.2 Teste de Kolmogorov-Smirnov

O teste de fiabilidade do ajuste de Kolmogorov-Smirnov é o segundo teste a ser analisado. Na versão dos testes apresentada neste trabalho, o teste apenas é válido para distribuições contínuas com parâmetros conhecidos (existem versões modificadas para distribuições onde os parâmetros não são conhecidos, não fazendo no entanto parte deste trabalho).

Neste teste utiliza-se o cálculo da máxima diferença entre a distribuição cumulativa esperada no momento da avaria e a distribuição cumulativa observada no momento da avaria.

3.2.1. O teste de Kolmogorov-Smirnov passo a passo

Seguidamente, ir-se-á descrever a metodologia do teste, passo a passo, num total de 8 passos [16]:

1º passo – Ordenar todos os “tempos até à avaria” por ordem crescente de valor.

2º passo – Determinar o número total de avarias, n .

3º passo – Após cada avaria sucessiva, determinar o número total de avarias já observadas, f_i . Dividir este número pelo número total de avarias, n . Cada um destes cálculos mostra a probabilidade observada de avaria, ou

$$Qo(t_i) = \frac{f_i}{n}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (48)$$

4º passo – Dentro da mesma ordem, calcular, utilizando a expressão da distribuição seleccionada, a probabilidade de avaria teórica ou esperada, $QE(t_i)$, para cada avaria que tenha ocorrido.

5º passo – Determinar a diferença absoluta, em modulo, D_i , entre $QE(t_i)$ e $QO(t_i)$, calculando para cada avaria

$$D_i = |QE(t_i) - QO(t_i)| \quad (49)$$

6º passo – Determinar a diferença máxima absoluta, D_{max} ;

7º passo – Nas tabelas de valor crítico para o teste de K-S, apresentadas no Anexo C, procurar o valor aceitável ou de diferença crítica, D_{cr} , para a amostra de tamanho n , no nível desejado de significância, geralmente 0,05.

8º passo – Se a diferença máxima absoluta calculada for menor que o valor crítico aceitável dado na tabela, isto é,

$$D_{max} < D_{cr} \quad (50)$$

então a distribuição escolhida não é rejeitada como representativa dos dados de teste ou dados operacionais para o nível de significância escolhido. Se a diferença calculada for maior ou igual que o valor crítico aceitável, isto é,

$$D_{max} \geq D_{cr} \quad (51)$$

então a distribuição escolhida é rejeitada como representativa dos dados, para o nível de significância escolhido.

3.2.2. Exemplo prático do Teste de Kolmogorov-Smirnov

De seguida, refere-se um caso de um projecto, no qual, para a determinação da melhor distribuição a adoptar para o universo de dados, foi utilizado o teste de Kolmogorov-Smirnov. Este estudo analisa a fiabilidade de turbinas eólicas.

A necessidade de analisar a fiabilidade da produção de energia de um parque eólico, através da avaliação da capacidade e manutenção das turbinas eólicas é essencial para assegurar o sucesso de um projecto energético. Uma fiabilidade adequada e de acordo com o projecto, permite reduzir a necessidade de reparações (normalmente dispendiosas), assim como do tempo de paragem das unidades. Por outro lado, um excesso de reacções vibratórias pode resultar em efeitos adversos tanto na capacidade das unidades, como na manutenção das turbinas eólicas, assim como a indisponibilidade para a produção de energia. Por exemplo, vibrações excessivas induzidas pelo vento no fuso-motor das turbinas eólicas podem afectar negativamente a capacidade destas, levando ao possível funcionamento deficiente dos bens sensíveis à aceleração e consequente interferência na sua correcta operação. Do mesmo modo, uma deriva excessiva do topo da estrutura de suporte pode afectar negativamente a capacidade de produção de energia das turbinas eólicas

O estudo, desenvolvido por Maryam *et al.* [18], propõe uma formulação probabilística para avaliar a capacidade das estruturas de suporte de turbinas eólicas, instaladas em alto mar, baseada na probabilidade e tempo expectável de excederem limites de deriva, previamente especificados. Para este fim, foram desenvolvidos novos modelos probabilísticos por forma a calcular a média e o desvio padrão de reacção da deriva das estruturas de suporte das turbinas eólicas; estas suportam cargas de uma forma contínua, que devem ser analisadas em função da sua geometria, das propriedades dos materiais e das condições da própria carga. Os modelos propostos são avaliados, utilizando uma base de dados resultante da geração de experiências virtuais, usando modelos detalhados e tridimensionais de elementos finitos não-lineares, retirados de um conjunto representativo de configurações de turbinas eólicas. Os modelos assim desenvolvidos são depois

utilizados numa formulação de vibração aleatória para estimar a probabilidade e tempo esperado de ultrapassagem de limiares de deriva específicos.

Especificamente, a formulação proposta permite calcular estimativas da probabilidade e do tempo esperado para que a reacção da deriva, no topo da estrutura de suporte da turbina eólica não exceda o limite especificado. No estudo, são desenvolvidos modelos para estimar a média e o desvio padrão da resposta derivacional.

O estudo requereu a criação de fórmulas para se avaliar a capacidade de serviço das turbinas eólicas que operam de uma forma contínua, sob carga.

As abordagens tradicionais para estimativa da capacidade de turbinas eólicas baseiam-se no histórico da velocidade do vento ou no histórico das taxas de falha das turbinas eólicas. Contudo, uma metodologia baseada na resposta vibracional da estrutura das turbinas eólicas pode fornecer uma estimativa mais precisa da capacidade das turbinas eólicas.

No desenvolvimento do estudo foram desenvolvidos e analisados dados de diagnóstico numa suposição de distribuição normal das respostas, da deriva, em relação a uma amostra de nove turbinas eólicas. Foi utilizado o teste de aderência de Kolmogorov-Smirnov para avaliar a validade da capacidade de ajuste da suposição da utilização da distribuição normal [18].

3.2.3. Comentários ao teste de Kolmogorov-Smirnov

O teste de Kolmogorov-Smirnov é mais robusto que o teste do Qui-Quadrado, para qualquer dimensão da amostra. Na generalidade dos casos, este teste pode ser utilizado em pequenas amostras, enquanto o teste do Qui-Quadrado, para pequenas amostras apresenta resultados questionáveis [16].

3.3 Teste de Anderson-Darling e Cramer-von Mises

3.3.1. Introdução

De seguida são apresentados os últimos dois testes deste trabalho, que têm metodologias de cálculo muito semelhantes.

Estes testes são baseados na função de distribuição empírica. Os valores críticos correspondentes a cada teste são diferentes. No entanto, teoricamente, todos eles devem chegar à mesma conclusão para a mesma amostra, em termos de rejeitar ou não rejeitar a distribuição dada como hipótese, embora tenham entre eles diferentes formas de discriminação para cada uma das distribuições.

Os testes normalizados de Anderson-Darling e de Cramer-von Mises são unicamente válidos para as distribuições contínuas completamente especificadas. Estes não podem ser utilizados em distribuições discretas, nem em dados não agrupados. No entanto, podem ser modificados de

forma a poderem ser aplicados a dados não agrupados e nos casos em que se desconhecem os parâmetros da distribuição. Esta possibilidade não foi no entanto explorada neste trabalho [16].

3.3.2. Os testes normalizados de Anderson-Darling e de Cramer-von Mises passo a passo

3.3.2.1. O teste de Anderson-Darling passo a passo

De seguida descreve-se passo a passo a metodologia do teste de Anderson-Darling [16]:

1º passo – Dispor todos os tempos até à avaria por ordem crescente de valor.

2º passo – Determinar o número total de avarias, o que equivale a n .

3º passo – Para cada avaria sucessiva, determinar o número total de avarias já observado, $f_i = i$. Calcular o valor de A_i , em que:

$$A_i = \frac{(2i-1)}{n} \quad (52)$$

4º passo – Dentro da mesma ordem, calcular usando a expressão da distribuição seleccionada, a probabilidade de avaria teórica ou esperada, $Q_E(t_i)$, para cada avaria ocorrida.

5º passo – Dentro da mesma sequência, calcular os seguintes valores para cada avaria:

$$\log_e[Q_E(t_i)] \quad (53)$$

$$\log_e[1 - Q_E(t_{n+1-i})] \quad (54)$$

$$A_i = \frac{2i-1}{n} \{ \log_e[Q_E(t_i)] + \log_e[1 - Q_E(t_{n+1-i})] \} \quad (55)$$

6º passo – Calcular a estatística do teste de Anderson-Darling para a fiabilidade do ajuste a partir de

$$A_N^2 = - \sum_{i=1}^n \frac{2i-1}{n} \{ \log_e[Q_E(t_i)] + \log_e[1 - Q_E(t_{n+1-i})] \} - n \quad (56)$$

ou, de outra forma,

$$- \sum_{i=1}^n A_i - n \quad (57)$$

para a amostra dada.

7º passo – Na tabela de valores críticos do teste modificado de Anderson-Darling para a fiabilidade do ajuste, no Anexo D, procura-se o valor de percentil estatístico crítico ou permitido, A_{CR}^2 , para o tamanho da amostra n , para o nível de significância desejado ou requerido (normalmente 0,05).

8º passo – Se o valor calculado pelo teste estatístico for inferior ao valor de percentil estatístico crítico da tabela, isto é,

$$A_N^2 < A_{CR}^2 \quad (58)$$

então não se rejeita a distribuição seleccionada como capaz de representar os dados reais, de teste ou operacionais, para o nível de significância escolhido. Se o valor calculado pelo teste estatístico for igual ou superior ao valor de percentil estatístico crítico da tabela, isto é,

$$A_N^2 \geq A_{CR}^2 \quad (59)$$

então a distribuição seleccionada deve ser rejeitada como capaz de representar os dados reais, para o nível de significância escolhido.

3.3.2.2. Exemplo prático do Teste de Anderson-Darling

O exemplo seguinte apresenta uma aplicação prática do teste de Anderson-Darling, demonstrando assim a sua aplicação na indústria.

O estudo aqui referido, desenvolvido por Fanmao *et al*, [19], teve o intuito de avaliar a fiabilidade operacional de um centro de maquinaria horizontal; assim, foram recolhidas durante o período de um ano as falhas de 14 unidades do centro de maquinaria horizontal, de uma fábrica de uma grande empresa de fabrico automóvel na China. Contrariamente à abordagem clássica que apenas junta os dados de todas as unidades sob a suposição de que cada cópia é modelada pelos mesmos processos da lei da potência (*power law processes*, PLP), no estudo, é proposto um novo modelo de análise baseado nos modelos lineares mistos generalizados (*generalized linear mixed models*, GLMM) para a análise dos dados de falha de todas as unidades do centro de maquinaria horizontal. A ideia básica deste método é a de presumir a existência de heterogeneidade entre todas as unidades de centro de maquinaria horizontal, assim como também a de que subjacente ao modelo de cada unidade individual existe um modelo de processos da lei da potência com diferentes parâmetros de configuração e escala nos modelos lineares mistos generalizados. Este método permite fazer inferências tanto acerca da população como de cada unidade individual. No estudo, o teste modificado de Anderson-Darling é adaptado como teste de fiabilidade de ajuste deste modelo. Os resultados da análise sugerem que este método é eficaz na análise da fiabilidade das unidades de centro de maquinaria horizontal.

Dando apenas um curto resumo deste estudo e assumindo que uma unidade do centro de maquinaria horizontal é considerada um sistema reparável, que pode ser restaurado para uma operação por quaisquer métodos, que não a substituição de todo o sistema.

O estudo foi estruturado da seguinte forma: inicialmente descrevem-se os conceitos básicos e metodologia da abordagem (baseada nos já referidos modelos lineares mistos generalizados), o método de estimativa dos parâmetros e o teste de fiabilidade do ajuste do modelo. No estudo, é apresentado um estudo detalhado da aplicação deste método aos dados de avarias das 14 unidades do centro de maquinaria horizontal.

Entre os testes de aderência utilizados para testar a hipótese de que os dados de tempo até à avaria de um sistema reparável, foi utilizado o teste de Anderson-Darling, sendo um dos mais largamente utilizados neste campo. Neste artigo, escolheu-se uma variante do teste de Anderson-

Darling (modificado de Park), que validou os respectivos dados. A análise de variantes não consta do presente trabalho [19].

3.3.2.3. O teste de Cramer-von Mises passo a passo

De seguida descreve-se passo a passo a metodologia do teste de Cramer-von Mises [16]:

1º passo – Testar a avaria em toda a amostra de dimensão n . Dispor todos os tempos até à avaria por ordem crescente de valor.

2º passo – Determinar o número total de avarias, o que equivale a n .

3º passo – Para cada avaria sucessiva, determinar o número total de avarias já observado, f_i , em T_i . Calcular o valor de A , em que:

$$A = \frac{(i-0.5)}{n} \quad (60)$$

4º passo – Dentro da mesma ordem, calcular usando a expressão da distribuição seleccionada, a probabilidade de avaria teórica ou esperada, $QE(ti)$, para cada avaria ocorrida.

5º passo – Dentro da mesma ordem, calcular o valor de

$$(QE(ti) - A)^2 \quad (61)$$

para cada avaria ocorrida.

6º passo – Calcular a estatística do teste de Cramer-von Mises para a fiabilidade do ajuste a partir de

$$W_N^2 = \sum_{i=1}^N \left[QE(ti) - \frac{i-0.5}{n} \right]^2 + \frac{1}{12n}, \quad (62)$$

para a amostra dada.

7º passo – Calcular a estatística do teste modificado de Cramer-von Mises para a fiabilidade do ajuste a partir de

$$W_N^{2*} = (W_N^2 - 0.4/n + 0.6/n^2)(1.0 + 1.0/n) \quad (63)$$

para a amostra dada.

8º passo – Na tabela de valores críticos do teste modificado de Cramer-von Mises para a fiabilidade do ajuste, Anexo D, procura-se o valor de percentil estatístico crítico ou permitido, W_{CR}^{2*} , para o tamanho da amostra N , para o nível de significância desejado ou requerido, normalmente 0.05.

9º passo – Se o valor calculado (modificado) pelo teste estatístico for inferior ao valor de percentil estatístico crítico da tabela, isto é,

$$W_N^{2*} < W_{CR}^{2*} \quad (64)$$

então não se rejeita a distribuição seleccionada como capaz de representar os dados reais, de teste ou operacionais, para o nível de significância escolhido. Se o valor calculado (modificado) pelo teste estatístico for igual ou superior ao valor de percentil estatístico crítico da tabela, ou seja,

$$W_N^{2*} \geq W_{CR}^{2*} \quad (65)$$

então a distribuição seleccionada é rejeitada como capaz de representar os dados reais, para o nível de significância escolhido.

3.3.3. Comentários ao Teste de Anderson-Darling e Cramer-von Mises

Relativamente a estes testes, pode-se fazer os seguintes comentários [16]:

1. Estes testes (tal como o de Kolmogorov-Smirnov) são mais robustos que o teste do Qui-Quadrado, para qualquer dimensão da amostra.
2. Estes testes podem ser utilizados com qualquer dimensão da amostra (recorde-se que o Teste do Qui-Quadrado pode dar resultados pouco fiáveis para amostras de pequena dimensão)
3. Quando os parâmetros não são conhecidos com exactidão, o teste de Cramer-von Mises e especialmente o de Anderson-Darling são mais robustos que o teste de Kolmogorov-Smirnov.

Capítulo 4 – Determinação de Parâmetros

No capítulo anterior descreveram-se alguns dos testes utilizados para determinar se uma distribuição estatística seria ou não rejeitada. Após essa fase, surge a necessidade de estimar os parâmetros dessa distribuição. Para isso, existem vários métodos disponíveis. Neste Capítulo ir-se-á referir três dos mais conhecidos métodos: o Método dos Mínimos Quadrados, o Método dos Momentos e o Método da Máxima Verossimilhança.

4.1 Método dos Mínimos Quadrados

O método dos mínimos quadrados baseia-se na adaptação de uma recta a um conjunto de dados, de tal forma que a soma dos quadrados dos desvios relativamente aos pontos da recta seja mínimo [16].

Consideremos então uma variável aleatória Y , que seja uma função linear de uma variável independente mensurável, x , ou seja

$$Y = a + bX, \quad (66)$$

então

$$Y_i = a + bx_i + e_i, \quad (67)$$

..., n , $j = 1, 2, \dots, n$, $i \neq j$,

onde a e b são parâmetros constantes desconhecidos que é preciso estimar, e e_i é o erro do modelo. Em termos gráficos, observe-se a figura 7 onde é ilustrado o conjunto de pontos correspondente ao universo de dados e à recta que a eles se adapta [16].

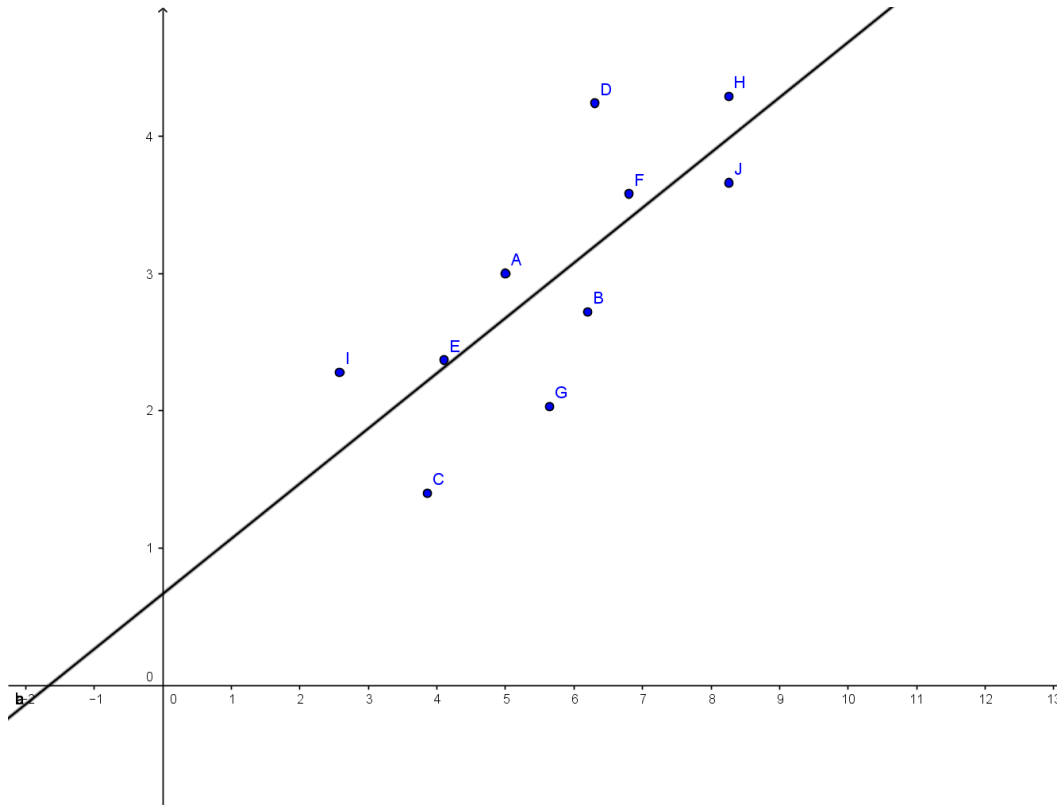


Figura 7 – Pontos e recta ajustada que serve de base ao Método dos Mínimos Quadrados

Suponha-se que um conjunto de pares de dados $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N)$ foi obtido e traçado, conforme indicado na Figura 7. Pode-se assim verificar que estimar a e b é o equivalente a encontrar a linha recta na Figura 7 que melhor se ajusta aos dados. De acordo com o princípio dos mínimos quadrados, que minimiza o quadrado da distância vertical entre os dados e a linha recta que a eles melhor se ajusta, a recta que melhor se ajusta a estes dados é dada pela expressão [16]:

$$y = \hat{a} + \hat{b} x, \quad (68)$$

de tal modo que

$$\sum_{i=1}^N (\hat{a} + \hat{b}x_i - y_i)^2 = \min(a,b) \sum_{i=1}^N (a + bx_i - y_i)^2, \quad (69)$$

e \hat{a} e \hat{b} são os mínimos quadrados estimados de a e b

Para obter \hat{a} e \hat{b} , façamos

$$S = \sum_{i=1}^N (a + bx_i - y_i)^2 \quad (70)$$

Derivando S relativamente a a e b , e resolvendo as expressões, obtemos então:

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \bar{x} \quad (71)$$

e

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i y_i - (\sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N y_i) / N}{\sum_{i=1}^N x_i^2 - (\sum_{i=1}^N x_i)^2 / N} \quad (72)$$

ou representando de outra forma:

$$\hat{b} = \frac{L_{xy}}{L_{xx}}, \quad (73)$$

onde

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \quad (74)$$

$$\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i, \quad (75)$$

$$L_{xy} = \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}), \quad (76)$$

$$L_{xx} = \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2. \quad (77)$$

As variáveis e coeficientes para a distribuição exponencial, para a distribuição de Weibull e para a distribuição normal, pelo método dos Mínimos Quadrados, é calculada segundo as fórmulas dadas na Tabela 2 [16]:

Tabela 2 – Distribuições, funções, variáveis e respectivos coeficientes

Distribuição	Função distribuição	y	X	a	b
Exponencial	$F(t) = 1 - e^{-\lambda(t-\gamma)}$	$\log_e[1 - F(t)]$	t	λY	$-\lambda$
Weibull	$F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta}$	$\log_e\{-\log_e[1 - F(t)]\}$	t	$-\beta \log_e \eta$	β
Normal	$F(t) = \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^*$	$\Phi^{-1}[F(t)]$	t	$-\frac{\mu}{\sigma}$	$\frac{1}{\sigma}$

Nota: * $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{T^2}{2}} dT$

4.1.1 Comentários ao Método dos Mínimos Quadrados

Relativamente ao método dos mínimos quadrados [16]:

1. A estimativa fornecida pelo método dos mínimos quadrados é bastante boa para funções que possam ser linearizadas.
2. O cálculo é fácil e directo.
3. O coeficiente de correlação dá-nos uma boa medida da fiabilidade do ajuste da distribuição escolhida.

4. Para algumas distribuições complexas, é no entanto um método difícil e por vezes mesmo impossível de implementar.

4.2 Método dos Momentos

Este é o segundo método que vai ser apresentado neste Capítulo.

Se X for uma variável aleatória com função densidade de probabilidade $f(x; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$, onde $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ são k parâmetros desconhecidos que têm de ser estimados, e x_1, x_2, \dots, x_n é uma amostra aleatória de x com tamanho n , os primeiros k momentos da amostra em torno da origem serão dados por [16]:

$$m'_r = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n x_i^r, \quad r = 1, 2, \dots, k. \quad (78)$$

Sendo as primeiras k populações de momentos em torno da origem dadas por

$$\mu'_r = E(X^r) = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) dx, \quad r = 1, 2, \dots, k. \quad (79)$$

A população de momentos, μ'_r , será, em geral, função de k parâmetros desconhecidos, θ_i .

Fixando

$$\mu'_r = m'_r, \quad r = 1, 2, \dots, k, \quad (80)$$

E resolvendo a expressão (79) simultaneamente para $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$, temos as estimativas $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_k$ que são chamadas de estimadores de momentos.

Como exemplo, a resolução deste expressão para a distribuição normal, para estimar os parâmetros μ e σ utilizando o método dos momentos.

Numa distribuição normal, o primeiro momento em torno da origem é dado por [16]:

$$\mu'_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx. \quad (81)$$

O segundo momento em torno da origem é dado por

$$\mu'_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx. \quad (82)$$

Resolvendo estas equações, no final iremos obter a seguinte solução

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}, \quad (83)$$

e

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (84)$$

Como exemplo adicional, ir-se-á mostrar a adaptação do Método dos Momentos para estimar o parâmetro da distribuição exponencial (com parâmetro simples).

Vamos supor que X_1, X_2, \dots, X_n é uma amostra aleatória de uma distribuição exponencial com parâmetro, λ . Desta forma, como apenas temos de estimar um parâmetro, vai-se equiparar $E(X)$ à média μ . No caso da distribuição exponencial, tem-se que [20]:

$$E(X) = 1/\lambda \quad (85)$$

Sendo

$$E(X) = \mu \quad (86)$$

Resulta que

$$\mu = \frac{1}{\lambda} \quad (87)$$

por isso

$$\lambda = \frac{1}{\mu} \quad (88)$$

sendo este o estimador para o parâmetro λ [20].

4.2.1. Comentários ao Método dos Momentos

Do exposto, pode-se fazer os seguintes comentários [16]:

1. Os parâmetros no método dos momentos são geralmente fáceis de calcular, desde que as amostras tenham os dados completos e que estes sejam fiáveis.
2. As variâncias estimadas, ou os erros de amostragem, são por norma demasiado grandes, se forem utilizados momentos de ordens mais elevadas.
3. Os parâmetros apenas representam uma parte da globalidade da amostra, não sendo deste modo tão precisos para distribuições muito assimétricas.
4. Os parâmetros no método dos momentos são geralmente ineficientes, pelo que apenas devem ser utilizados na ausência de melhores estimadores.
5. Os parâmetros no método dos momentos têm pouca justificação teórica, de onde resulta que a sua utilização é principalmente intuitiva.

4.3 Método da Máxima Verosimilhança

O último método apresentado para a estimativa de parâmetros é o Método da Máxima Verosimilhança.

Se x for uma variável aleatória contínua com uma função densidade de probabilidade, dada por [16]:

$$F(x; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k),$$

ou se x for uma variável aleatória discreta com uma função de probabilidade,

$$p(x; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k),$$

onde $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ são k parâmetros constantes desconhecidos que precisam ser estimados, conduzir uma experiência e obter N observações independentes, x_1, x_2, \dots, x_N , de forma a que a função de verosimilhança é dada por

$$L(x_1, x_2, \dots, x_N | \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) = L = \prod_{i=1}^N f(x_i; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (89)$$

Esta expressão é aplicável para as variáveis aleatórias contínuas.

A seguinte expressão define a função da máxima verosimilhança para as variáveis aleatórias discretas [16]:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_N | \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) = L = \prod_{i=1}^N p(x_i; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (90)$$

A função logarítmica da verosimilhança para variáveis aleatórias contínuas é dada por:

$$\log_e L = \sum_{i=1}^N \log_e f(x_i; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) \quad (91)$$

A mesma expressão para as variáveis discretas é dada por:

$$\log_e L = \sum_{i=1}^N \log_e p(x_i; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) \quad (92)$$

Maximizar as expressões (89) e (90) é equivalente a maximizar as expressões (91) e (92) o que é mais fácil de trabalhar computacionalmente.

Os estimadores da máxima verosimilhança de $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ são as soluções das equações.

$$\frac{\partial(\log_e L)}{\partial \theta_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k, \quad (93)$$

o que representa as condições necessárias, e

$$\frac{\partial^2(\log_e L)}{\partial^2 \theta_j} < 0, \quad j = 1, 2, \dots, k, \quad (94)$$

que representa as condições suficientes.

Seguidamente, como exemplo, ir-se-á dar a solução para estimar os parâmetros de uma Distribuição Exponencial, utilizando o Método da Máxima Verosimilhança.

Se tivermos x_1, x_2, \dots, x_n parte de n observações, então a função da verosimilhança para a função densidade de probabilidade para a distribuição exponencial (dois parâmetros) é dada por:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n | \lambda, \gamma) = L = \prod_{i=1}^n [\lambda e^{-\lambda(x_i - \gamma)}], \quad (95)$$

ou

$$L = \begin{cases} \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n (x_i - \gamma)} & , \quad x_i \geq \gamma, \quad i = 1, 2, \dots, n \\ 0, & \end{cases} \quad (96)$$

Logaritimizando (logaritmo natural) ambos os lados da expressão (92) temos,

$$\log_e(L) = n \log_e \lambda - \lambda \sum_{i=1}^n (x_i - \gamma) \quad (97)$$

Tirando a primeira derivada da expressão (97) temos

$$\frac{\partial(\log_e L)}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n (x_i - \gamma) = 0, \quad (98)$$

Após resolução, verifica-se que não existe uma solução global. É no entanto possível determinar uma solução localizada, considerando λ como um valor fixo.

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{\mu}} \quad (99)$$

e

$$\hat{\mu} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (100)$$

Seguidamente ir-se-á exemplificar a utilização do Método da Máxima Verosimilhança, para determinação dos parâmetros μ e σ para uma distribuição normal.

A função densidade de probabilidade para uma distribuição normal é dada por:

$$f(t) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}. \quad (101)$$

Se t_1, t_2, \dots, t_n for uma amostra de uma população normal, então a função da verosimilhança é dada por:

$$L(t_1, t_2, \dots, t_n | \bar{\mu}, \sigma) = \quad (102)$$

$$L = \prod_{i=1}^n \left[\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{t_i - \mu}{\sigma}\right)^2} \right] \quad (103)$$

$$L = \frac{1}{(\sigma \sqrt{2\pi})^N} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i - \mu}{\sigma}\right)^2}, \quad (104)$$

Logaritmizando a expressão, obtemos:

$$\log_e L = -\frac{n}{2} \log_e(2\pi) - n \log_e \sigma - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i - \mu}{\sigma}\right)^2. \quad (105)$$

Derivando e resolvendo as respectivas equações, obtêm-se a seguinte solução:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n t_i, \quad (106)$$

e

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (t_i - \mu)^2 \quad (107)$$

Deve-se acrescentar que, devido à natureza matemática da distribuição de Weibull, uma solução definitiva para o parâmetro de forma não está disponível, significando desta forma que as soluções se baseiam em soluções iterativas. Adicionalmente, os estimadores da máxima verosimilhança têm uma tendência positiva, obrigando assim à utilização de algoritmos de correcção, para se chegar à solução mais aproximada [21].

4.3.1.Comentários ao Método da Máxima Verosimilhança

Do exposto, pode-se fazer os seguintes comentários [16]:

1. Os estimadores da máxima verosimilhança são consistentes e assintoticamente eficientes.
2. Os estimadores da máxima verosimilhança dos parâmetros da função densidade de probabilidade da distribuição de Weibull não se comportam bem na vizinhança do ponto de transição.
5. Quando o parâmetro de posição é conhecido, os estimadores da máxima verosimilhança das distribuições resultantes, calculam-se, com certa facilidade em termos computacionais. Contudo, a introdução de parâmetros limiares (ou de posição) cria complicações, o que leva a que os estimadores da máxima verosimilhança sejam por vezes difíceis de calcular.
6. Não é aconselhável a utilização de estimadores da máxima verosimilhança para a distribuição de Weibull de três parâmetros,
8. Os estimadores da máxima verosimilhança são bons para distribuições de um ou dois parâmetros; deve-se ter alguns cuidados na sua utilização para distribuições de três e quatro parâmetros.

Capítulo 5 – Caso prático

No Capítulo 5 serão realizados alguns testes práticos para verificação da adequação de um conjunto de dados até à avaria, a uma determinada distribuição estatística.

Tal como referido anteriormente, no desenvolvimento deste trabalho foi criada uma ferramenta, através de uma folha Excel, onde é possível testar, para um conjunto de dados (e através dos testes anteriormente referidos) a sua adequação a determinada distribuição estatística.

Por ter sido desenvolvida de raiz e com finalidade de servir apenas em termos académicos para demonstração da teoria anunciada, esta ferramenta está actualmente limitada a um número máximo de 50 dados.

Nos próximos parágrafos, ir-se-á demonstrar alguns exemplos de testes realizados por essa ferramenta, através da análise de dois conjuntos de dados, que se designaram por Dados 1 e Dados 2. Deve-se notar que estes valores foram gerados aleatoriamente, devendo no entanto, para efeitos de teste, ser considerados como dados recolhidos até à avaria de um bem.

Em resumo, nos próximos parágrafos, serão demonstrados os seguintes testes (tanto para o conjunto de Dados 1 como Dados 2):

- Teste de Kolmogorov-Smirnov para a distribuição exponencial e de Weibull;
- Teste de Anderson-Darling para a distribuição exponencial e de Weibull;
- Teste de Cramer-von Mises para a distribuição exponencial e de Weibull;

5.1 Conjunto dos dados

São os seguintes os valores do conjunto de dados aleatórios, designados como “Dados 1”:

Nr.	Dados 1	Nr.	Dados 1	Nr.	Dados 1
1	5250	18	6847	35	6130
2	6223	19	6951	36	7215
3	7845	20	5222	37	5698
4	6825	21	6548	38	6315
5	4952	22	5659	39	6847
6	6822	23	7451	40	7812
7	4988	24	7322	41	7843
8	6098	25	5369	42	7321
9	6055	26	5998	43	6165
10	6133	27	6149	44	5748
11	7251	28	7725	45	6358
12	5366	29	7697	46	6849
13	7659	30	4988	47	7456
14	7201	31	5698	48	7126
15	5126	32	6888	49	5997
16	5698	33	7746	50	7741
17	6544	34	7695		

Este conjunto de dados tem 50 observações e apresenta a seguinte média aritmética e desvio-padrão:

- Média Aritmética = 6532,2
- Desvio Padrão = 897,3

São os seguintes o valor do conjunto de aleatórios designados por “Dados 2”:

Nr.	Dados 2	Nr.	Dados 2
1	77	14	398
2	155	15	78
3	311	16	156
4	467	17	313
5	623	18	470
6	856	19	627
7	1012	20	863
8	30	21	1020
9	61	22	63
10	122	23	631
11	183	24	741
12	245	25	892
13	336		

Este conjunto de dados tem 25 observações e apresenta a seguinte média aritmética e desvio-padrão:

- Média Aritmética = 429,2
- Desvio Padrão = 325,5

5.2 Teste de Kolmogorov-Smirnov

5.2.1. Teste de Kolmogorov-Smirnov para a Distribuição Exponencial

A Tabela 3 mostra os cálculos referentes aos passos número 1, 3, 4 e 5 do teste para o conjunto de Dados 1 e a Tabela 4 mostra os mesmos passos, para o conjunto de Dados 2.

Deve-se recordar que, o passo número 1 consiste na ordenação crescente dos dados. O passo número 2 é o cálculo do número de observações, neste caso de 50 para os Dados 1 e 25 para os Dados 2.

O passo número 3 consiste em calcular, para cada observação, o número de avarias observadas, de uma forma cumulativa ou seja, do valor da não-fiabilidade observado.

O passo 4 consiste no cálculo do valor (para cada observação), da não-fiabilidade esperada.

O passo 5 é o cálculo da diferença entre o valor observado e o valor expectável, individualmente para cada observação.

O passo número 6 é o cálculo do valor máximo da diferença absoluta calculada no passo número 5. Os valores do passo 6 são os seguintes:

- Dados 1: 0,511
- Dados 2: 0,092

O passo número 7 consiste em verificar, através da tabela do Anexo C, o valor crítico (máximo permitido), tendo em consideração o número de observações e a significância escolhida, (foi adoptada como referência em todo o trabalho o valor de significância de 0,05)

Neste caso, o valor crítico para o teste de Kolmogorov-Smirnov é de:

- Dados 1: 0,192
- Dados 2: 0,270

O último passo, consiste na comparação entre o valor crítico (passo 7) e o valor máximo da diferença observada (passo 6). Desta forma, verifica-se que no caso dos Dados 1, o valor observado excede o valor crítico e assim a distribuição exponencial não deve ser utilizada para este conjunto de dados.

Para os Dados 2 verifica-se que o valor observado é menor que o valor crítico e assim a distribuição exponencial pode ser utilizada neste conjunto de dados.

Tabela 3 – Resultados dos passos 1, 3, 4 e 5 do teste de Kolmogorov-Smirnov para a distribuição exponencial, para os Dados 1

Avaria # (i)	Passo 1		Passo 3	Passo 4	Passo 5
	Tempos até avaria	Tempos até avaria, ordem crescente	Nr. avarias Já Observadas Qo(Ti)	QE(Ti) Valor da formula Exponencial	Diferença Absoluta
1	5250	4952	0,02	0,531440	0,511440
2	6223	4988	0,04	0,534015	0,494015
3	7845	4988	0,06	0,534015	0,474015
4	6825	5126	0,08	0,543756	0,463756
5	4952	5222	0,1	0,550412	0,450412
6	6822	5250	0,12	0,552335	0,432335
7	4988	5366	0,14	0,560215	0,420215
8	6098	5369	0,16	0,560417	0,400417
9	6055	5659	0,18	0,579505	0,399505
10	6133	5698	0,2	0,582008	0,382008
11	7251	5698	0,22	0,582008	0,362008
12	5366	5698	0,24	0,582008	0,342008
13	7659	5748	0,26	0,585196	0,325196
14	7201	5997	0,28	0,600710	0,320710
15	5126	5998	0,3	0,600771	0,300771
16	5698	6055	0,32	0,604240	0,284240
17	6544	6098	0,34	0,606836	0,266836
18	6847	6130	0,36	0,608758	0,248758
19	6951	6133	0,38	0,608937	0,228937
20	5222	6149	0,4	0,609894	0,209894
21	6548	6165	0,42	0,610848	0,190848
22	5659	6223	0,44	0,614288	0,174288
23	7451	6315	0,46	0,619683	0,159683
24	7322	6358	0,48	0,622178	0,142178
25	5369	6544	0,5	0,632785	0,132785
26	5998	6548	0,52	0,633009	0,113009
27	6149	6822	0,54	0,648085	0,108085
28	7725	6825	0,56	0,648246	0,088246
29	7697	6847	0,58	0,649429	0,069429
30	4988	6847	0,6	0,649429	0,049429
31	5698	6849	0,62	0,649536	0,029536
32	6888	6888	0,64	0,651623	0,011623
33	7746	6951	0,66	0,654966	0,005034
34	7695	7126	0,68	0,664087	0,015913
35	6130	7201	0,7	0,667922	0,032078
36	7215	7215	0,72	0,668633	0,051367
37	5698	7251	0,74	0,670454	0,069546
38	6315	7321	0,76	0,673967	0,086033
39	6847	7322	0,78	0,674017	0,105983
40	7812	7451	0,8	0,680391	0,119609
41	7843	7456	0,82	0,680636	0,139364
42	7321	7659	0,84	0,690408	0,149592
43	6165	7695	0,86	0,692109	0,167891
44	5748	7697	0,88	0,692204	0,187796
45	6358	7725	0,9	0,693520	0,206480
46	6849	7741	0,92	0,694270	0,225730
47	7456	7746	0,94	0,694504	0,245496
48	7126	7812	0,96	0,697575	0,262425
49	5997	7843	0,98	0,699007	0,280993
50	7741	7845	1	0,699099	0,300901

Tabela 4 – Resultados dos passos 1, 3, 4 e 5 do teste de Kolmogorov-Smirnov, para a distribuição exponencial, para os Dados 2

	Passo 1	Passo 3	Passo 4	Passo 5	
Avaria # (i)	Tempos até avaria	Tempos até avaria, ordem crescente	Nr. avarias Já Observadas Qo(Ti)	QE(Ti) Valor da formula Exponencial	Diferença Absoluta
1	77	30	0,04	0,067511	0,027511
2	155	61	0,08	0,132487	0,052487
3	311	63	0,12	0,136520	0,016520
4	467	77	0,16	0,164231	0,004231
5	623	78	0,2	0,166176	0,033824
6	856	122	0,24	0,247421	0,007421
7	1012	155	0,28	0,303116	0,023116
8	30	156	0,32	0,304738	0,015262
9	61	183	0,36	0,347128	0,012872
10	122	245	0,4	0,434943	0,034943
11	183	311	0,44	0,515484	0,075484
12	245	313	0,48	0,517736	0,037736
13	336	336	0,52	0,542899	0,022899
14	398	398	0,56	0,604382	0,044382
15	78	467	0,6	0,663134	0,063134
16	156	470	0,64	0,665481	0,025481
17	313	623	0,68	0,765790	0,085790
18	470	627	0,72	0,767963	0,047963
19	627	631	0,76	0,770115	0,010115
20	863	741	0,8	0,822088	0,022088
21	1020	856	0,84	0,863906	0,023906
22	63	863	0,88	0,866107	0,013893
23	631	892	0,92	0,874855	0,045145
24	741	1012	0,96	0,905379	0,054621
25	892	1020	1	0,907126	0,092874

5.2.2. Teste de Kolmogorov-Smirnov para a Distribuição Weibull

A Tabela 5 demonstra os cálculos referentes aos passos número 1, 3, 4 e 5 do teste, para o conjunto de Dados 1 e a Tabela 6 mostra os mesmos passos, para o conjunto de Dados 2.

Parâmetros da distribuição de Weibull:

Dados 1:

Par. Localização (γ) = 2000

Par. Escala (η) = 900

Par. Forma (β) = 1,5

Dados 2:

Par. Localização (γ) = 0

Par. Escala (η) = 500

Par. Forma (β) = 1,5

A metodologia de cálculo é a mesma da do parágrafo anterior.

Os valores do passo 6 são os seguintes:

- Dados 1: 0,977
- Dados 2: 0,161

Neste caso, o valor crítico para o teste de Kolmogorov-Smirnov (Anexo C) é de:

- Dados 1: 0,192
- Dados 2: 0,270

O último passo, consiste na comparação entre o valor crítico (passo 7) e o valor máximo da diferença observada (passo 6). Desta forma, verifica-se que no caso dos Dados 1, o valor observado excede o valor crítico e assim a distribuição de Weibull não deve ser utilizada para este conjunto de dados.

Para os Dados 2, verifica-se que o valor observado é menor que o valor crítico e assim a distribuição de Weibull pode ser utilizada neste conjunto de dados.

Tabela 5 – Resultados dos passos 1, 3, 4 e 5 do teste de Kolmogorov-Smirnov, para a distribuição de Weibull, para os Dados 1

Avaria # (i)	Passo 1		Passo 3	Passo 4	Passo 5
	Tempos até avaria	Tempos até avaria, ordem crescente	Nr. avarias Já Observadas Qo(Ti)	QE(Ti) Valor da formula Weibull	Diferença Absoluta
1	5250	4952	0,02	0,997369	0,977369
2	6223	4988	0,04	0,997641	0,957641
3	7845	4988	0,06	0,997641	0,937641
4	6825	5126	0,08	0,998456	0,918456
5	4952	5222	0,1	0,998857	0,898857
6	6822	5250	0,12	0,998953	0,878953
7	4988	5366	0,14	0,999278	0,859278
8	6098	5369	0,16	0,999284	0,839284
9	6055	5659	0,18	0,999725	0,819725
10	6133	5698	0,2	0,999759	0,799759
11	7251	5698	0,22	0,999759	0,779759
12	5366	5698	0,24	0,999759	0,759759
13	7659	5748	0,26	0,999796	0,739796
14	7201	5997	0,28	0,999914	0,719914
15	5126	5998	0,3	0,999914	0,699914
16	5698	6055	0,32	0,999930	0,679930
17	6544	6098	0,34	0,999940	0,659940
18	6847	6130	0,36	0,999946	0,639946
19	6951	6133	0,38	0,999947	0,619947
20	5222	6149	0,4	0,999950	0,599950
21	6548	6165	0,42	0,999953	0,579953
22	5659	6223	0,44	0,999961	0,559961
23	7451	6315	0,46	0,999972	0,539972
24	7322	6358	0,48	0,999976	0,519976
25	5369	6544	0,5	0,999988	0,499988
26	5998	6548	0,52	0,999988	0,479988
27	6149	6822	0,54	0,999996	0,459996
28	7725	6825	0,56	0,999996	0,439996
29	7697	6847	0,58	0,999996	0,419996
30	4988	6847	0,6	0,999996	0,399996
31	5698	6849	0,62	0,999996	0,379996
32	6888	6888	0,64	0,999997	0,359997
33	7746	6951	0,66	0,999998	0,339998
34	7695	7126	0,68	0,999999	0,319999
35	6130	7201	0,7	0,999999	0,299999
36	7215	7215	0,72	0,999999	0,279999
37	5698	7251	0,74	0,999999	0,259999
38	6315	7321	0,76	0,999999	0,239999
39	6847	7322	0,78	0,999999	0,219999
40	7812	7451	0,8	1,000000	0,200000
41	7843	7456	0,82	1,000000	0,180000
42	7321	7659	0,84	1,000000	0,160000
43	6165	7695	0,86	1,000000	0,140000
44	5748	7697	0,88	1,000000	0,120000
45	6358	7725	0,9	1,000000	0,100000
46	6849	7741	0,92	1,000000	0,080000
47	7456	7746	0,94	1,000000	0,060000
48	7126	7812	0,96	1,000000	0,040000
49	5997	7843	0,98	1,000000	0,020000
50	7741	7845	1	1,000000	0,000000

Tabela 6 – Resultados dos passos 1, 3, 4 e 5 do teste de Kolmogorov-Smirnov, para a distribuição de Weibull, para os Dados 2

Avaria # (i)	Passo 1		Passo 3	Passo 4	Passo 5
	Tempos até avaria	Tempos até avaria, ordem crescente	Nr. avarias Já Observadas Qo(Ti)	QE(Ti) Valor da formula Weibull	Diferença Absoluta
1	77	30	0,04	0,014589	0,025411
2	155	61	0,08	0,041718	0,038282
3	311	63	0,12	0,043740	0,076260
4	467	77	0,16	0,058644	0,101356
5	623	78	0,2	0,059755	0,140245
6	856	122	0,24	0,113547	0,126453
7	1012	155	0,28	0,158526	0,121474
8	30	156	0,32	0,159933	0,160067
9	61	183	0,36	0,198622	0,161378
10	122	245	0,4	0,290362	0,109638
11	183	311	0,44	0,387712	0,052288
12	245	313	0,48	0,390607	0,089393
13	336	336	0,52	0,423555	0,096445
14	398	398	0,56	0,508445	0,051555
15	78	467	0,6	0,594507	0,005493
16	156	470	0,64	0,598024	0,041976
17	313	623	0,68	0,751134	0,071134
18	470	627	0,72	0,754450	0,034450
19	627	631	0,76	0,757733	0,002267
20	863	741	0,8	0,835385	0,035385
21	1020	856	0,84	0,893546	0,053546
22	63	863	0,88	0,896437	0,016437
23	631	892	0,92	0,907711	0,012289
24	741	1012	0,96	0,943837	0,016163
25	892	1020	1	0,945726	0,054274

5.3 Teste de Anderson-Darling

5.3.1. Teste de Anderson-Darling para a Distribuição Exponencial

As Tabelas 7 e 8 demonstram os cálculos referentes aos passos número 1, 3, 4 e 5 do teste de Anderson-Darling para o conjunto de Dados 1 e a Tabela 9 mostra os mesmos passos, para o conjunto de Dados 2.

Recorde-se que o passo número 1 consiste na ordenação crescente dos dados. O passo número 2 é o cálculo do número de observações, neste caso de 50 para os Dados 1 e 25 para os Dados 2.

O passo número 3 consiste no cálculo da equação $A=(2i-1)/N$.

O passo 4 consiste no cálculo do valor expectável da não-fiabilidade, para cada avaria.

O passo 5 consiste no cálculo de varias expressões intermédias (designadas por 5.1, 5.2 e 5.3), que culminam no passo 6 que é o cálculo da estatística de Anderson-Darling, através da expressão (57).

Os valores do passo 6 são os seguintes:

- Dados 1: 17,126
- Dados 2: 0,524

O passo 7 consta em verificar o valor crítico do teste, valores estes que se encontram no Anexo D, para o nível de significância de 0,05. Neste caso o valor crítico é de 2,492, em ambos os casos.

Comparando o valor calculado com o valor crítico, verifica-se que no caso dos Dados 1 o valor observado excede o valor crítico, pelo que a distribuição exponencial não deve ser utilizada para este conjunto de dados.

Para os Dados 2 o valor calculado é menor que o valor crítico, pelo que a distribuição exponencial pode ser utilizada neste conjunto de dados.

Tabela 7 - Resultados dos passos 1, 3, 4 e 5 do teste de Anderson-Darling, para a distribuição exponencial, para os Dados 1 (Avarias 1 a 25)

	Passo 1	Passo 3	Passo 4	Passo 5.1	Passo 5.2	Passo 5.3		
	Ordenar tempos até à avaria	Calcular o valor da equação	Calculo do valor expectavel	Calcular o logaritmo de QE(Ti)	Calcular o logaritmo de $\log_e[1-QE(T_{N+1-i})]$	Calcular Ai		
Avaria # (i)	Tempos até avaria	Tempos até avaria, ordem crescente	$A=(2i-1)/N$	QE(Ti) Valor da formula Exponencial	$\log_e[QE(Ti)]$	N+1-i (nº da avaria)	$\log_e[1-QE(T_{N+1-i})]$	$Ai = A*(\log_e[QE(Ti)] + \log_e[1-QE(T_{N+1-i})])$
1	5250	4952	0,02	0,531440	-0,632165	50	-1,200974	-0,036663
2	6223	4988	0,06	0,534015	-0,627331	49	-1,200667	-0,109680
3	7845	4988	0,1	0,534015	-0,627331	48	-1,195922	-0,182325
4	6825	5126	0,14	0,543756	-0,609254	47	-1,185818	-0,251310
5	4952	5222	0,18	0,550412	-0,597088	46	-1,185053	-0,320785
6	6822	5250	0,22	0,552335	-0,593600	45	-1,182603	-0,390765
7	4988	5366	0,26	0,560215	-0,579435	44	-1,178317	-0,457015
8	6098	5369	0,3	0,560417	-0,579074	43	-1,178010	-0,527125
9	6055	5659	0,34	0,579505	-0,545580	42	-1,172499	-0,584147
10	6133	5698	0,38	0,582008	-0,541270	41	-1,141422	-0,639423
11	7251	5698	0,42	0,582008	-0,541270	40	-1,140657	-0,706409
12	5366	5698	0,46	0,582008	-0,541270	39	-1,120909	-0,764602
13	7659	5748	0,5	0,585196	-0,535809	38	-1,120756	-0,828282
14	7201	5997	0,54	0,600710	-0,509643	37	-1,110039	-0,874629
15	5126	5998	0,58	0,600771	-0,509541	36	-1,104528	-0,936160
16	5698	6055	0,62	0,604240	-0,503784	35	-1,102385	-0,995825
17	6544	6098	0,66	0,606836	-0,499496	34	-1,090904	-1,049664
18	6847	6130	0,7	0,608758	-0,496335	33	-1,064113	-1,092314
19	6951	6133	0,74	0,608937	-0,496040	32	-1,054469	-1,147376
20	5222	6149	0,78	0,609894	-0,494470	31	-1,048498	-1,203515
21	6548	6165	0,82	0,610848	-0,492907	30	-1,048192	-1,263701
22	5659	6223	0,86	0,614288	-0,487291	29	-1,048192	-1,320515
23	7451	6315	0,9	0,619683	-0,478548	28	-1,044824	-1,371035
24	7322	6358	0,94	0,622178	-0,474529	27	-1,044365	-1,427760
25	5369	6544	0,98	0,632785	-0,457625	26	-1,002419	-1,430843

Tabela 8 - Resultados dos passos 1, 3, 4 e 5 do teste de Anderson-Darling, para a distribuição exponencial, para os Dados 1 (Avarias 26 a 50)

	Passo 1	Passo 3	Passo 4	Passo 5.1	Passo 5.2	Passo 5.3		
	Ordenar tempos até à avaria	Calcular o valor da equação	Calculo do valor expectavel	Calcular o logaritmo de QE(Ti)	Calcular o logaritmo de $\log_e[1-QE(T_{N+1-i})]$	Calcular Ai		
Avaria # (i)	Tempos até avaria	Tempos até avaria, ordem crescente	$A=(2i-1)/N$	QE(Ti) Valor da formula Exponencial	$\log_e[QE(Ti)]$	N+1-i (nº da avaria)	$\log_e[1-QE(T_{N+1-i})]$	$Ai = A*(\log_e[QE(Ti)] + \log_e[1-QE(T_{N+1-i})])$
26	5998	6548	1,02	0,633009	-0,457270	25	-1,001806	-1,488258
27	6149	6822	1,06	0,648085	-0,433734	24	-0,973332	-1,491490
28	7725	6825	1,1	0,648246	-0,433485	23	-0,966749	-1,540257
29	7697	6847	1,14	0,649429	-0,431662	22	-0,952665	-1,578133
30	4988	6847	1,18	0,649429	-0,431662	21	-0,943786	-1,623029
31	5698	6849	1,22	0,649536	-0,431497	20	-0,941337	-1,674857
32	6888	6888	1,26	0,651623	-0,428290	19	-0,938887	-1,722643
33	7746	6951	1,3	0,654966	-0,423172	18	-0,938428	-1,770079
34	7695	7126	1,34	0,664087	-0,409342	17	-0,933529	-1,799447
35	6130	7201	1,38	0,667922	-0,403584	16	-0,926947	-1,836132
36	7215	7215	1,42	0,668633	-0,402520	15	-0,918221	-1,875452
37	5698	7251	1,46	0,670454	-0,399800	14	-0,918067	-1,924087
38	6315	7321	1,5	0,673967	-0,394575	13	-0,879949	-1,911785
39	6847	7322	1,54	0,674017	-0,394501	12	-0,872294	-1,950864
40	7812	7451	1,58	0,680391	-0,385088	11	-0,872294	-1,986663
41	7843	7456	1,62	0,680636	-0,384728	10	-0,872294	-2,036376
42	7321	7659	1,66	0,690408	-0,370473	9	-0,866324	-2,053082
43	6165	7695	1,7	0,692109	-0,368011	8	-0,821928	-2,022897
44	5748	7697	1,74	0,692204	-0,367875	7	-0,821469	-2,069459
45	6358	7725	1,78	0,693520	-0,365975	6	-0,803711	-2,082041
46	6849	7741	1,82	0,694270	-0,364895	5	-0,799424	-2,119060
47	7456	7746	1,86	0,694504	-0,364558	4	-0,784728	-2,137671
48	7126	7812	1,9	0,697575	-0,360145	3	-0,763602	-2,135120
49	5997	7843	1,94	0,699007	-0,358095	2	-0,763602	-2,176092
50	7741	7845	1,98	0,699099	-0,357963	1	-0,758091	-2,209786

-67,126632

Tabela 9 - Resultados dos passos 1, 3, 4 e 5 do teste de Anderson-Darling, para a distribuição exponencial, para os Dados 2

	Passo 1	Passo 3	Passo 4	Passo 5.1	Passo 5.2	Passo 5.3		
	Ordenar tempos até à avaria	Calcular o valor da equação	Calculo do valor expectavel	Calcular o logaritmo de QE(Ti)	Calcular o logaritmo de $\log_e[1-QE(T_{N+1-i})]$	Calcular Ai		
Avaria # (i)	Tempos até avaria	Tempos até avaria, ordem crescente	$A=(2i-1)/N$	QE(Ti) Valor da formula Exponencial	$\log_e[QE(Ti)]$	N+1-i (nº da avaria)	$\log_e[1-QE(T_{N+1-i})]$	$Ai = A*(\log_e[QE(Ti)] + \log_e[1-QE(T_{N+1-i})])$
1	77	30	0,04	0,067511	-2,695471	25	-2,376514	-0,202879
2	155	61	0,12	0,132487	-2,021270	24	-2,357875	-0,525497
3	311	63	0,2	0,136520	-1,991283	23	-2,078285	-0,813914
4	467	77	0,28	0,164231	-1,806479	22	-2,010718	-1,068815
5	623	78	0,36	0,166176	-1,794705	21	-1,994408	-1,364081
6	856	122	0,44	0,247421	-1,396663	20	-1,726468	-1,374177
7	1012	155	0,52	0,303116	-1,193638	19	-1,470177	-1,385184
8	30	156	0,6	0,304738	-1,188302	18	-1,460857	-1,589496
9	61	183	0,68	0,347128	-1,058061	17	-1,451538	-1,706527
10	122	245	0,76	0,434943	-0,832539	16	-1,095061	-1,464976
11	183	311	0,84	0,515484	-0,662650	15	-1,088071	-1,470605
12	245	313	0,92	0,517736	-0,658290	14	-0,927307	-1,458749
13	336	336	1	0,542899	-0,610831	13	-0,782852	-1,393683
14	398	398	1,08	0,604382	-0,503549	12	-0,729264	-1,331437
15	78	467	1,16	0,663134	-0,410778	11	-0,724604	-1,317043
16	156	470	1,24	0,665481	-0,407246	10	-0,570829	-1,212813
17	313	623	1,32	0,765790	-0,266847	9	-0,426375	-0,915053
18	470	627	1,4	0,767963	-0,264014	8	-0,363467	-0,878473
19	627	631	1,48	0,770115	-0,261215	7	-0,361137	-0,921081
20	863	741	1,56	0,822088	-0,195907	6	-0,284250	-0,749045
21	1020	856	1,64	0,863906	-0,146292	5	-0,181733	-0,537961
22	63	863	1,72	0,866107	-0,143746	4	-0,179404	-0,555818
23	631	892	1,8	0,874855	-0,133697	3	-0,146785	-0,504867
24	741	1012	1,88	0,905379	-0,099402	2	-0,142125	-0,454070
25	892	1020	1,96	0,907126	-0,097474	1	-0,069897	-0,328047

-25,524291

5.3.2. Teste de Anderson-Darling para a Distribuição de Weibull

As Tabela 10 e 11 demonstram os cálculos referentes aos passos número 1, 3, 4 e 5 do teste para o conjunto de Dados 1 e a Tabela 12 mostra os mesmos passos, para o conjunto de Dados 2.

Os valores dos parâmetros da distribuição de Weibull mantêm-se, de forma a existir consistência no teste e são os seguintes:

Dados 1:

Par. Localização (γ) = 2000

Par. Escala (η) = 900

Par. Forma (β) = 1,5

Dados 2:

Par. Localização (γ) = 0

Par. Escala (η) = 500

Par. Forma (β) = 1,5

A metodologia de cálculo é a mesma do parágrafo anterior.

Os valores do passo 6 são os seguintes:

- Dados 1: 37,640
- Dados 2: 1,015

O passo 7 consiste na comparação entre os valores calculados e o valor crítico. Neste caso o valor crítico é de 2,492, em ambos os casos (Anexo D).

Desta forma, verifica-se que no caso dos Dados 1, o valor observado excede o valor crítico e assim a distribuição de Weibull não deve ser utilizada para este conjunto de dados.

Para os Dados 2 verifica-se que o valor observado é menor que o valor crítico e assim a distribuição de Weibull pode ser utilizada neste conjunto de dados.

Tabela 10 - Resultados dos passos 1, 3, 4 e 5 do teste de Anderson-Darling, para a distribuição de Weibull, para os Dados 1 (Avarias 1 a 25)

	Passo 1	Passo 3	Passo 4	Passo 5.1	Passo 5.2	Passo 5.3		
	Ordenar tempos até à avaria	Calcular o valor da equação	Calculo do valor expectavel	Calcular o logaritmo de QE(Ti)	Calcular o logaritmo de $\log_e[1-QE(T_{N+1-i})]$	Calcular Ai		
Avaria # (i)	Tempos até avaria	Tempos até avaria, ordem crescente	$A=(2i-1)/N$	QE(Ti) Valor da formula Weibull	$\log_e[QE(Ti)]$	N+1-i (nº da avaria)	$\log_e[1-QE(T_{N+1-i})]$	$Ai = A*(\log_e[QE(Ti)] + \log_e[1-QE(T_{N+1-i})])$
1	5250	4952	0,02	0,997369	-0,002635	50	-16,550572	-0,213159
2	6223	4988	0,06	0,997641	-0,002362	49	-16,542078	-0,630023
3	7845	4988	0,1	0,997641	-0,002362	48	-16,410607	-1,016644
4	6825	5126	0,14	0,998456	-0,001545	47	-16,131868	-1,393972
5	4952	5222	0,18	0,998857	-0,001144	46	-16,110817	-1,781862
6	6822	5250	0,22	0,998953	-0,001047	45	-16,043513	-2,165226
7	4988	5366	0,26	0,999278	-0,000723	44	-15,925958	-2,556034
8	6098	5369	0,3	0,999284	-0,000716	43	-15,917572	-2,915059
9	6055	5659	0,34	0,999725	-0,000275	42	-15,766881	-3,251726
10	6133	5698	0,38	0,999759	-0,000241	41	-14,926149	-3,557912
11	7251	5698	0,42	0,999759	-0,000241	40	-14,905636	-3,930954
12	5366	5698	0,46	0,999759	-0,000241	39	-14,379657	-3,909361
13	7659	5748	0,5	0,999796	-0,000204	38	-14,375605	-4,164542
14	7201	5997	0,54	0,999914	-0,000086	37	-14,092864	-4,497642
15	5126	5998	0,58	0,999914	-0,000086	36	-13,948185	-4,830800
16	5698	6055	0,62	0,999930	-0,000070	35	-13,892056	-5,082475
17	6544	6098	0,66	0,999940	-0,000060	34	-13,592650	-4,780082
18	6847	6130	0,7	0,999946	-0,000054	33	-12,902552	-5,063009
19	6951	6133	0,74	0,999947	-0,000053	32	-12,657066	-5,078043
20	5222	6149	0,78	0,999950	-0,000050	31	-12,505887	-5,283508
21	6548	6165	0,82	0,999953	-0,000047	30	-12,498151	-5,308071
22	5659	6223	0,86	0,999961	-0,000039	29	-12,498151	-5,202455
23	7451	6315	0,9	0,999972	-0,000028	28	-12,413156	-5,444420
24	7322	6358	0,94	0,999976	-0,000024	27	-12,401581	-5,583935
25	5369	6544	0,98	0,999988	-0,000012	26	-11,359702	-0,000012

Tabela 11 - Resultados dos passos 1, 3, 4 e 5 do teste de Anderson-Darling, para a distribuição de Weibull, para os Dados 1 (Avarias 26 a 50)

	Passo 1	Passo 3	Passo 4	Passo 5.1	Passo 5.2	Passo 5.3		
	Ordenar tempos até à avaria	Calcular o valor da equação	Calculo do valor expectavel	Calcular o logaritmo de QE(Ti)	Calcular o logaritmo de $\log_e[1-QE(T_{N+1,i})]$	Calcular Ai		
Avaria # (i)	Tempos até avaria	Tempos até avaria, ordem crescente	$A=(2i-1)/N$	QE(Ti) Valor da formula Weibull	$\log_e[QE(Ti)]$	N+1-i (nº da avaria)	$\log_e[1-QE(T_{N+1,i})]$	$Ai = A*(\log_e[QE(Ti)] + \log_e[1-QE(T_{N+1,i})])$
26	5998	6548	1,02	0,999988	-0,000012	25	-11,344718	-0,000012
27	6149	6822	1,06	0,999996	-0,000004	24	-10,655334	-0,000004
28	7725	6825	1,1	0,999996	-0,000004	23	-10,498021	-0,000004
29	7697	6847	1,14	0,999996	-0,000004	22	-10,164075	-0,000004
30	4988	6847	1,18	0,999996	-0,000004	21	-9,955401	-0,000004
31	5698	6849	1,22	0,999996	-0,000004	20	-9,898090	-0,000005
32	6888	6888	1,26	0,999997	-0,000003	19	-9,840889	-0,000004
33	7746	6951	1,3	0,999998	-0,000002	18	-9,830176	-0,000003
34	7695	7126	1,34	0,999999	-0,000001	17	-9,716149	-0,000002
35	6130	7201	1,38	0,999999	-0,000001	16	-9,563625	-0,000001
36	7215	7215	1,42	0,999999	-0,000001	15	-9,362685	-0,000001
37	5698	7251	1,46	0,999999	-0,000001	14	-9,359173	-0,000001
38	6315	7321	1,5	0,999999	-0,000001	13	-8,498369	-0,000001
39	6847	7322	1,54	0,999999	-0,000001	12	-8,328880	-0,000001
40	7812	7451	1,58	1,000000	0,000000	11	-8,328880	-0,000001
41	7843	7456	1,62	1,000000	0,000000	10	-8,328880	-0,000001
42	7321	7659	1,66	1,000000	0,000000	9	-8,197470	0,000000
43	6165	7695	1,7	1,000000	0,000000	8	-7,242487	0,000000
44	5748	7697	1,74	1,000000	0,000000	7	-7,232816	0,000000
45	6358	7725	1,78	1,000000	0,000000	6	-6,862167	0,000000
46	6849	7741	1,82	1,000000	0,000000	5	-6,773678	0,000000
47	7456	7746	1,86	1,000000	0,000000	4	-6,473210	0,000000
48	7126	7812	1,9	1,000000	0,000000	3	-6,049328	0,000000
49	5997	7843	1,94	1,000000	0,000000	2	-6,049328	0,000000
50	7741	7845	1,98	1,000000	0,000000	1	-5,940333	0,000000

-87,640976

Tabela 12 - Resultados dos passos 1, 3, 4 e 5 do teste de Anderson-Darling, para a distribuição de Weibull, para os Dados 2

	Passo 1	Passo 3	Passo 4	Passo 5.1	Passo 5.2	Passo 5.3		
	Ordenar tempos até à avaria	Calcular o valor da equação	Calculo do valor expectavel	Calcular o logaritmo de QE(Ti)	Calcular o logaritmo de $\log_e[1-QE(T_{N+1-i})]$	Calcular Ai		
Avaria # (i)	Tempos até avaria	Tempos até avaria, ordem crescente	$A=(2i-1)/N$	QE(Ti) Valor da formula Weibull	$\log_e[QE(Ti)]$	N+1-i (nº da avaria)	$\log_e[1-QE(T_{N+1-i})]$	$Ai = A * (\log_e[QE(Ti)] + \log_e[1-QE(T_{N+1-i})])$
1	77	30	0,04	0,014589	-4,227456	25	-2,913703	-0,285646
2	155	61	0,12	0,041718	-3,176832	24	-2,879491	-0,726759
3	311	63	0,2	0,043740	-3,129489	23	-2,382826	-1,102463
4	467	77	0,28	0,058644	-2,836269	22	-2,267573	-1,429076
5	623	78	0,36	0,059755	-2,817498	21	-2,240039	-1,820714
6	856	122	0,44	0,113547	-2,175539	20	-1,804149	-1,751063
7	1012	155	0,52	0,158526	-1,841834	19	-1,417715	-1,694966
8	30	156	0,6	0,159933	-1,833000	18	-1,404256	-1,942354
9	61	183	0,68	0,198622	-1,616352	17	-1,390840	-2,044890
10	122	245	0,76	0,290362	-1,236628	16	-0,911364	-1,632473
11	183	311	0,84	0,387712	-0,947492	15	-0,902652	-1,554121
12	245	313	0,92	0,390607	-0,940053	14	-0,710182	-1,518216
13	336	336	1	0,423555	-0,859071	13	-0,550876	-1,409947
14	398	398	1,08	0,508445	-0,676398	12	-0,495292	-1,265425
15	78	467	1,16	0,594507	-0,520023	11	-0,490553	-1,172267
16	156	470	1,24	0,598024	-0,514124	10	-0,343000	-1,062833
17	313	623	1,32	0,751134	-0,286172	9	-0,221422	-0,670024
18	470	627	1,4	0,754450	-0,281766	8	-0,174274	-0,638455
19	627	631	1,48	0,757733	-0,277424	7	-0,172601	-0,666037
20	863	741	1,56	0,835385	-0,179862	6	-0,120527	-0,468607
21	1020	856	1,64	0,893546	-0,112558	5	-0,061615	-0,285644
22	63	863	1,72	0,896437	-0,109328	4	-0,060434	-0,291990
23	631	892	1,8	0,907711	-0,096830	3	-0,044726	-0,254799
24	741	1012	1,88	0,943837	-0,057802	2	-0,042613	-0,188780
25	892	1020	1,96	0,945726	-0,055803	1	-0,014697	-0,138179

5.4 Teste de Cramer-von Mises

5.4.1. Teste de Cramer-von Mises para a Distribuição Exponencial

A Tabela 13 demonstra os cálculos referentes aos passos número 1, 3, 4 e 5 do teste de Cramer-von Mises para o conjunto de Dados 1 e a Tabela 14 mostra os mesmos passos, para o conjunto de Dados 2.

Recorde-se que o passo número 1 consiste na ordenação crescente dos dados. O passo número 2 é o cálculo do número de observações, neste caso de 50 para os Dados 1 e 25 para os Dados 2.

O passo número 3 consiste no cálculo da equação $A=(i-0,5)/N$.

O passo 4 consiste no cálculo do valor expectável da não-fiabilidade, para cada avaria.

O passo 5 consiste no cálculo da diferença entre o valor expectável e o valor observado, que culminam no passo 6 que é o cálculo da estatística de Cramer-von Mises, através da expressão (58).

São os seguintes os resultados deste passo:

- Dados 1: 3,670
- Dados 2: 0,073

O passo 7 consta do cálculo da estatística transformada de Cramer-von Mises, de acordo com a seguinte expressão (63).

São os seguintes os resultados deste passo:

- Dados 1: 3,735
- Dados 2: 0,060

O passo 8 do teste consiste em verificar o valor crítico (Anexo D), para o nível de significância de 0,05. Neste caso concreto o valor crítico é de 0,461.

Comparando o valor calculado com o valor crítico, verifica-se que no caso dos Dados 1 o valor observado excede o valor crítico, pelo que a distribuição exponencial não deve ser utilizada para este conjunto de dados.

Para os Dados 2 o valor observado é menor que o valor crítico, pelo que a distribuição exponencial pode ser utilizada neste conjunto de dados.

Tabela 13 - Resultados dos passos 1, 3, 4 e 5 do teste de CVM, distribuição Exponencial Dados 1

Avaria # (i)	Tempos até avaria	Passo 1	Passo 3	Passo 4	Passo 5
		Ordenar tempos até à avaria	Calcular o valor da equação	Valor expectável da Distr. Exponencial	Calcular o quadrado da diferença $[QE(Ti)-A]^2$ (resultado do Passo 4-result. Passo 5)
		Tempos até avaria, ordem crescente	$A=(i-0.5)/N$ i - nr. avaria	QE(Ti) Não fiabilidade expectável	$[QE(Ti)-A]^2$
1	5250	4952	0,01	0,531440	0,271899
2	6223	4988	0,03	0,534015	0,254031
3	7845	4988	0,05	0,534015	0,234271
4	6825	5126	0,07	0,543756	0,224445
5	4952	5222	0,09	0,550412	0,211980
6	6822	5250	0,11	0,552335	0,195661
7	4988	5366	0,13	0,560215	0,185085
8	6098	5369	0,15	0,560417	0,168442
9	6055	5659	0,17	0,579505	0,167695
10	6133	5698	0,19	0,582008	0,153671
11	7251	5698	0,21	0,582008	0,138390
12	5366	5698	0,23	0,582008	0,123910
13	7659	5748	0,25	0,585196	0,112356
14	7201	5997	0,27	0,600710	0,109369
15	5126	5998	0,29	0,600771	0,096579
16	5698	6055	0,31	0,604240	0,086577
17	6544	6098	0,33	0,606836	0,076638
18	6847	6130	0,35	0,608758	0,066956
19	6951	6133	0,37	0,608937	0,057091
20	5222	6149	0,39	0,609894	0,048353
21	6548	6165	0,41	0,610848	0,040340
22	5659	6223	0,43	0,614288	0,033962
23	7451	6315	0,45	0,619683	0,028792
24	7322	6358	0,47	0,622178	0,023158
25	5369	6544	0,49	0,632785	0,020387
26	5998	6548	0,51	0,633009	0,015131
27	6149	6822	0,53	0,648085	0,013944
28	7725	6825	0,55	0,648246	0,009652
29	7697	6847	0,57	0,649429	0,006309
30	4988	6847	0,59	0,649429	0,003532
31	5698	6849	0,61	0,649536	0,001563
32	6888	6888	0,63	0,651623	0,000468
33	7746	6951	0,65	0,654966	0,000025
34	7695	7126	0,67	0,664087	0,000035
35	6130	7201	0,69	0,667922	0,000487
36	7215	7215	0,71	0,668633	0,001711
37	5698	7251	0,73	0,670454	0,003546
38	6315	7321	0,75	0,673967	0,005781
39	6847	7322	0,77	0,674017	0,009213
40	7812	7451	0,79	0,680391	0,012014
41	7843	7456	0,81	0,680636	0,016735
42	7321	7659	0,83	0,690408	0,019486
43	6165	7695	0,85	0,692109	0,024929
44	5748	7697	0,87	0,692204	0,031612
45	6358	7725	0,89	0,693520	0,038604
46	6849	7741	0,91	0,694270	0,046539
47	7456	7746	0,93	0,694504	0,055458
48	7126	7812	0,95	0,697575	0,063718
49	5997	7843	0,97	0,699007	0,073437
50	7741	7845	0,99	0,699099	0,084623
					3,668593

Tabela 14 - Resultados dos passos 1, 3, 4 e 5 do teste de Cramer-von Mises, para a distribuição exponencial, para os Dados 2

	Passo 1	Passo 3	Passo 4	Passo 5	
	Ordenar tempos até à avaria	Calcular o valor da equação	Valor expectável da Distr. Exponencial	Calcular o quadrado da diferença $[QE(Ti)-A]^2$ (resultado do Passo 4-result. Passo 5)	
Avaria # (i)	Tempos até avaria	Tempos até avaria, ordem crescente	$A=(i-0.5)/N$ i - nr. avaria	QE(Ti) Não fiabilidade expectável	$[QE(Ti)-A]^2$
1	77	30	0,02	0,067511	0,002257
2	155	61	0,06	0,132487	0,005254
3	311	63	0,1	0,136520	0,001334
4	467	77	0,14	0,164231	0,000587
5	623	78	0,18	0,166176	0,000191
6	856	122	0,22	0,247421	0,000752
7	1012	155	0,26	0,303116	0,001859
8	30	156	0,3	0,304738	0,000022
9	61	183	0,34	0,347128	0,000051
10	122	245	0,38	0,434943	0,003019
11	183	311	0,42	0,515484	0,009117
12	245	313	0,46	0,517736	0,003333
13	336	336	0,5	0,542899	0,001840
14	398	398	0,54	0,604382	0,004145
15	78	467	0,58	0,663134	0,006911
16	156	470	0,62	0,665481	0,002068
17	313	623	0,66	0,765790	0,011192
18	470	627	0,7	0,767963	0,004619
19	627	631	0,74	0,770115	0,000907
20	863	741	0,78	0,822088	0,001771
21	1020	856	0,82	0,863906	0,001928
22	63	863	0,86	0,866107	0,000037
23	631	892	0,9	0,874855	0,000632
24	741	1012	0,94	0,905379	0,001199
25	892	1020	0,98	0,907126	0,005311
					0,070338

5.4.2. Teste de Cramer-von Mises para a Distribuição de Weibull

A Tabela 15 demonstra os cálculos referentes aos passos número 1, 3, 4 e 5 do teste para o conjunto de Dados 1 e a Tabela 16 para o conjunto de Dados 2.

Os valores dos parâmetros da distribuição de Weibull mantêm-se, de forma a existir consistência no teste, e são os seguintes:

Dados 1:

Par. Localização (γ) = 2000

Par. Escala (η) = 900

Par. Forma (β) = 1,5

Dados 2:

Par. Localização (γ) = 0

Par. Escala (η) = 500

Par. Forma (β) = 1,5

A metodologia de cálculo é a mesma do parágrafo anterior.

Os valores do passo 6 (estatística de Cramer-von Mises) são os seguintes:

- Dados 1: 16,640
- Dados 2: 0,133

No passo 7, correspondente ao cálculo da estatística transformada de Cramer-von Mises, obteve-se os seguintes dados:

- Dados 1: 16,965
- Dados 2: 0,122

O passo 8, consiste em verificar o valor crítico que consta da tabela do Anexo D, que neste caso é de 0,461 para ambos os casos.

Desta forma, verifica-se que no caso dos Dados 1, o valor observado excede o valor crítico e assim a distribuição de Weibull não deve ser utilizada para este conjunto de dados.

Para os Dados 2 verifica-se que o valor observado é menor que o valor crítico e assim a distribuição de Weibull pode ser utilizada neste conjunto de dados.

Tabela 15 - Resultados dos passos 1, 3, 4 e 5 do teste de CVM, para a dist. Weibull, Dados 1

	Passo 1	Passo 3	Passo 4	Passo 5	
	Ordenar tempos até à avaria	Calcular o valor da equação	Valor expectável da Distr. Weibull	Calcular o quadrado da diferença $[QE(Ti)-A]^2$ (resultado do Passo 4-result. Passo 5)	
Avaria # (i)	Tempos até avaria	Tempos até avaria, ordem crescente	$A=(i-0.5)/N$ i - nr. avaria	QE(Ti) Não fiabilidade expectável	$[QE(Ti)-A]^2$
1	5250	4952	0,01	0,997369	0,974897
2	6223	4988	0,03	0,997641	0,936328
3	7845	4988	0,05	0,997641	0,898023
4	6825	5126	0,07	0,998456	0,862030
5	4952	5222	0,09	0,998857	0,826020
6	6822	5250	0,11	0,998953	0,790238
7	4988	5366	0,13	0,999278	0,755643
8	6098	5369	0,15	0,999284	0,721284
9	6055	5659	0,17	0,999725	0,688443
10	6133	5698	0,19	0,999759	0,655709
11	7251	5698	0,21	0,999759	0,623719
12	5366	5698	0,23	0,999759	0,592528
13	7659	5748	0,25	0,999796	0,562194
14	7201	5997	0,27	0,999914	0,532774
15	5126	5998	0,29	0,999914	0,503978
16	5698	6055	0,31	0,999930	0,476003
17	6544	6098	0,33	0,999940	0,448819
18	6847	6130	0,35	0,999946	0,422430
19	6951	6133	0,37	0,999947	0,396833
20	5222	6149	0,39	0,999950	0,372039
21	6548	6165	0,41	0,999953	0,348044
22	5659	6223	0,43	0,999961	0,324856
23	7451	6315	0,45	0,999972	0,302470
24	7322	6358	0,47	0,999976	0,280875
25	5369	6544	0,49	0,999988	0,260088
26	5998	6548	0,51	0,999988	0,240089
27	6149	6822	0,53	0,999996	0,220896
28	7725	6825	0,55	0,999996	0,202496
29	7697	6847	0,57	0,999996	0,184897
30	4988	6847	0,59	0,999996	0,168097
31	5698	6849	0,61	0,999996	0,152097
32	6888	6888	0,63	0,999997	0,136898
33	7746	6951	0,65	0,999998	0,122498
34	7695	7126	0,67	0,999999	0,108899
35	6130	7201	0,69	0,999999	0,096099
36	7215	7215	0,71	0,999999	0,084099
37	5698	7251	0,73	0,999999	0,072900
38	6315	7321	0,75	0,999999	0,062500
39	6847	7322	0,77	0,999999	0,052900
40	7812	7451	0,79	1,000000	0,044100
41	7843	7456	0,81	1,000000	0,036100
42	7321	7659	0,83	1,000000	0,028900
43	6165	7695	0,85	1,000000	0,022500
44	5748	7697	0,87	1,000000	0,016900
45	6358	7725	0,89	1,000000	0,012100
46	6849	7741	0,91	1,000000	0,008100
47	7456	7746	0,93	1,000000	0,004900
48	7126	7812	0,95	1,000000	0,002500
49	5997	7843	0,97	1,000000	0,000900
50	7741	7845	0,99	1,000000	0,000100
					16,638730

Tabela 16 - Resultados dos passos 1, 3, 4 e 5 do teste de Cramer-von Mises, para a distribuição de Weibull, para os Dados 2

	Passo 1	Passo 3	Passo 4	Passo 5	
	Ordenar tempos até à avaria	Calcular o valor da equação	Valor expectável da Distr. Weibull	Calcular o quadrado da diferença $[QE(Ti)-A]^2$ (resultado do Passo 4-result. Passo 5)	
Avaria # (i)	Tempos até avaria	Tempos até avaria, ordem crescente	$A=(i-0.5)/N$ i - nr. avaria	QE(Ti) Não fiabilidade expectável	$[QE(Ti)-A]^2$
1	77	30	0,02	0,014589	0,000029
2	155	61	0,06	0,041718	0,000334
3	311	63	0,1	0,043740	0,003165
4	467	77	0,14	0,058644	0,006619
5	623	78	0,18	0,059755	0,014459
6	856	122	0,22	0,113547	0,011332
7	1012	155	0,26	0,158526	0,010297
8	30	156	0,3	0,159933	0,019619
9	61	183	0,34	0,198622	0,019988
10	122	245	0,38	0,290362	0,008035
11	183	311	0,42	0,387712	0,001043
12	245	313	0,46	0,390607	0,004815
13	336	336	0,5	0,423555	0,005844
14	398	398	0,54	0,508445	0,000996
15	78	467	0,58	0,594507	0,000210
16	156	470	0,62	0,598024	0,000483
17	313	623	0,66	0,751134	0,008305
18	470	627	0,7	0,754450	0,002965
19	627	631	0,74	0,757733	0,000314
20	863	741	0,78	0,835385	0,003068
21	1020	856	0,82	0,893546	0,005409
22	63	863	0,86	0,896437	0,001328
23	631	892	0,9	0,907711	0,000059
24	741	1012	0,94	0,943837	0,000015
25	892	1020	0,98	0,945726	0,001175
					0,129905

5.5 Testes adicionais para o conjunto de Dados 1

Tendo verificado que, os vários testes realizados ao conjunto de Dados 1 conduziu à rejeição da distribuição exponencial e da distribuição de Weibull, ir-se-á realizar um novo conjunto de testes, desta vez para testar para a distribuição Normal.

De seguida ir-se-á demonstrar os cálculos efectuados com os testes de Kolmogorov-Smirnov, Cramer-von Mises e Anderson-Darling.

A metodologia dos testes é exactamente a mesma já anteriormente referida.

5.5.1. Teste de Kolmogorov-Smirnov para a Distribuição Normal

A tabela 17 demonstra os cálculos referentes aos passos número 1, 3, 4 e 5 do teste, para o conjunto de Dados 1.

O valor do passo 6 (maior diferença observada entre os valores observados e valores calculados) é de 0,086.

Neste caso, o valor crítico para o teste de Kolmogorov-Smirnov (Anexo C) é de 0,192.

O último passo (passo 7), consiste na comparação entre o valor crítico e o valor máximo da diferença observada (passo 6). Desta forma, verifica-se que no caso dos Dados 1 para a distribuição Normal, o valor observado é menor que o valor crítico e assim a distribuição normal pode ser utilizada para este conjunto de dados.

5.5.2. Teste de Anderson-Darling para a Distribuição Normal

As tabelas 18 e 19 demonstram os cálculos referentes aos passos número 1, 3, 4 e 5 do teste, para o conjunto de Dados 1.

O valor do passo 6 (cálculo da estatística de Anderson-Darling) é de 0,716.

O passo 7 consiste em verificar o valor crítico do teste, valor que se encontram no Anexo D, para o nível de significância de 0,05. Neste caso o valor crítico é de 2,492.

O último passo é a comparação do valor calculado com o valor crítico. Verifica-se assim que o valor observado é menor que o valor crítico e assim, segundo este teste a distribuição normal não é rejeitada para este conjunto de dados.

5.5.3. Teste de Cramer-von Mises para a Distribuição Normal

A Tabela 20 demonstra os cálculos referentes aos passos número 1, 3, 4 e 5 do teste de Cramer-von Mises para o conjunto de Dados 1.

O passo 6 (cálculo da estatística de Cramer-von Mises), tem neste caso o valor de 0,100.

O passo 7, que consta do cálculo da estatística transformada de Cramer-von Mises, tem neste caso o valor de 0,094.

O passo 8 do teste consiste em verificar o valor crítico (Anexo D), para o nível de significância de 0,05. Neste caso concreto o valor crítico é de 0,461.

Comparando o valor calculado com o valor crítico, verifica-se que no caso dos Dados 1 o valor observado é menor que o valor crítico, pelo que a distribuição normal não é rejeitada para este conjunto de dados.

Tabela 17 - Resultados dos passos 1, 3, 4 e 5 do teste de Kolmogorov-Smirnov, para a distribuição de Normal, para os Dados 1

Falha # (i)	Passo 1		Passo 3	Passo 4	Passo 5	
	Tempos até falha	Tempos até falha, ordem crescente	Nr. Falhas Já Observadas Qo(Ti)	QE(Ti) Probabilidade Avaria Esperada (Valor a entrar na Tabela da Normal (z))	Tabela Normal Normalizada Anexo A-2	Diferença Absoluta
1	5250	4952	0,02	-1,760916	0,039204	0,019204
2	6223	4988	0,04	-1,720799	0,042716	0,002716
3	7845	4988	0,06	-1,720799	0,042716	0,017284
4	6825	5126	0,08	-1,567017	0,059380	0,020620
5	4952	5222	0,1	-1,460038	0,072145	0,027855
6	6822	5250	0,12	-1,428836	0,077804	0,042196
7	4988	5366	0,14	-1,299570	0,098525	0,041475
8	6098	5369	0,16	-1,296226	0,098525	0,061475
9	6055	5659	0,18	-0,973061	0,166023	0,013977
10	6133	5698	0,2	-0,929601	0,178786	0,021214
11	7251	5698	0,22	-0,929601	0,178786	0,041214
12	5366	5698	0,24	-0,929601	0,178786	0,061214
13	7659	5748	0,26	-0,873883	0,192150	0,067850
14	7201	5997	0,28	-0,596407	0,277595	0,002405
15	5126	5998	0,3	-0,595292	0,277595	0,022405
16	5698	6055	0,32	-0,531774	0,298056	0,021944
17	6544	6098	0,34	-0,483856	0,315614	0,024386
18	6847	6130	0,36	-0,448197	0,329969	0,030031
19	6951	6133	0,38	-0,444853	0,329969	0,050031
20	5222	6149	0,4	-0,427024	0,337243	0,062757
21	6548	6165	0,42	-0,409194	0,344578	0,075422
22	5659	6223	0,44	-0,344561	0,366928	0,073072
23	7451	6315	0,46	-0,242040	0,405165	0,054835
24	7322	6358	0,48	-0,194122	0,424655	0,055345
25	5369	6544	0,5	0,013149	0,503989	0,003989
26	5998	6548	0,52	0,017607	0,503989	0,016011
27	6149	6822	0,54	0,322942	0,625516	0,085516
28	7725	6825	0,56	0,326285	0,625516	0,065516
29	7697	6847	0,58	0,350801	0,636831	0,056831
30	4988	6847	0,6	0,350801	0,636831	0,036831
31	5698	6849	0,62	0,353030	0,636831	0,016831
32	6888	6888	0,64	0,396490	0,651732	0,011732
33	7746	6951	0,66	0,466695	0,677242	0,017242
34	7695	7126	0,68	0,661708	0,745373	0,065373
35	6130	7201	0,7	0,745286	0,770350	0,070350
36	7215	7215	0,72	0,760887	0,776373	0,056373
37	5698	7251	0,74	0,801004	0,788145	0,048145
38	6315	7321	0,76	0,879009	0,807850	0,047850
39	6847	7322	0,78	0,880123	0,810570	0,030570
40	7812	7451	0,8	1,023876	0,846136	0,046136
41	7843	7456	0,82	1,029448	0,846136	0,026136
42	7321	7659	0,84	1,255664	0,894350	0,054350
43	6165	7695	0,86	1,295781	0,901475	0,041475
44	5748	7697	0,88	1,298009	0,901475	0,021475
45	6358	7725	0,9	1,329212	0,906582	0,006582
46	6849	7741	0,92	1,347041	0,909877	0,010123
47	7456	7746	0,94	1,352613	0,911492	0,028508
48	7126	7812	0,96	1,426161	0,922196	0,037804
49	5997	7843	0,98	1,460706	0,927855	0,052145
50	7741	7845	1	1,462935	0,927855	0,072145

Tabela 18 - Resultados dos passos 1, 3, 4 e 5 do teste de Anderson-Darling, para a distribuição de Normal, para os Dados 1 (Avarias 1 a 25)

	Passo 1	Passo 3	Passo 4	Passo 5.1	Passo 5.2	Passo 5.3			
	Ordenar tempos até à falha	Calcular o valor da equação	Valor expectável da Distr. Normal	Calcular o logaritmo de QE(Ti)	Calcular o logaritmo de $\log_e[1-QE(T_{N+1-i})]$	Calcular Ai			
Falha # (i)	Tempos até avaria	Tempos até avaria, ordem crescente	A=(2i-1)/N	QE(Ti)	1-F(z) (Tabela Normal) QE(Ti) Não fiabilidade expectável	$\log_e[QE(Ti)]$	N+1-i (nº da falha)	$\log_e[1-QE(T_{N+1-i})]$	$Ai = A*(\log_e[QE(Ti)] + \log_e[1-QE(T_{N+1-i})])$
1	5250	4952	0,02	-1,760916	0,039204	-3,238979	50	-2,629077	-0,117361
2	6223	4988	0,06	-1,720799	0,042716	-3,153177	49	-2,629077	-0,346935
3	7845	4988	0,1	-1,720799	0,042716	-3,153177	48	-2,553564	-0,570674
4	6825	5126	0,14	-1,567017	0,059380	-2,823799	47	-2,424662	-0,734785
5	4952	5222	0,18	-1,460038	0,072145	-2,629077	46	-2,406584	-0,906419
6	6822	5250	0,22	-1,428836	0,077804	-2,553564	45	-2,370676	-1,083333
7	4988	5366	0,26	-1,299570	0,098525	-2,317442	44	-2,317442	-1,205070
8	6098	5369	0,3	-1,296226	0,098525	-2,317442	43	-2,317442	-1,390465
9	6055	5659	0,34	-0,973061	0,166023	-1,795627	42	-2,247626	-1,374706
10	6133	5698	0,38	-0,929601	0,178786	-1,721564	41	-1,871685	-1,365434
11	7251	5698	0,42	-0,929601	0,178786	-1,721564	40	-1,871685	-1,509164
12	5366	5698	0,46	-0,929601	0,178786	-1,721564	39	-1,663738	-1,557239
13	7659	5748	0,5	-0,873883	0,192150	-1,649478	38	-1,649478	-1,649478
14	7201	5997	0,54	-0,596407	0,277595	-1,281591	37	-1,551851	-1,530059
15	5126	5998	0,58	-0,595292	0,277595	-1,281591	36	-1,497774	-1,612032
16	5698	6055	0,62	-0,531774	0,298056	-1,210474	35	-1,471199	-1,662637
17	6544	6098	0,66	-0,483856	0,315614	-1,153236	34	-1,367956	-1,663987
18	6847	6130	0,7	-0,448197	0,329969	-1,108758	33	-1,130852	-1,567727
19	6951	6133	0,74	-0,444853	0,329969	-1,108758	32	-1,054782	-1,601020
20	5222	6149	0,78	-0,427024	0,337243	-1,086952	31	-1,012886	-1,637874
21	6548	6165	0,82	-0,409194	0,344578	-1,065434	30	-1,012886	-1,704222
22	5659	6223	0,86	-0,344561	0,366928	-1,002589	29	-1,012886	-1,733308
23	7451	6315	0,9	-0,242040	0,405165	-0,903461	28	-0,982206	-1,697100
24	7322	6358	0,94	-0,194122	0,424655	-0,856479	27	-0,982206	-1,728364
25	5369	6544	0,98	0,013149	0,503989	-0,685200	26	-0,701158	-1,358631

Tabela 19 - Resultados dos passos 1, 3, 4 e 5 do teste de Anderson-Darling, para a distribuição de Normal, para os Dados 1 (Avarias 26 a 50)

	Passo 1	Passo 3	Passo 4	Passo 5.1	Passo 5.2	Passo 5.3			
	Ordenar tempos até à falha	Calcular o valor da equação	Valor expectável da Distr. Normal	Calcular o logaritmo de QE(Ti)	Calcular o logaritmo de $\log_e[1-QE(T_{N+1-i})]$	Calcular Ai			
Falha # (i)	Tempos até avaria	Tempos até avaria, ordem crescente	$A=(2i-1)/N$	QE(Ti)	1-F(z) (Tabela Normal) QE(Ti) Não fiabilidade expectável	$\log_e[QE(Ti)]$	N+1-i (nº da falha)	$\log_e[1-QE(T_{N+1-i})]$	$Ai = A*(\log_e[QE(Ti)] + \log_e[1-QE(T_{N+1-i})])$
26	5998	6548	1,02	0,017607	0,503989	-0,685200	25	-0,701158	-1,414085
27	6149	6822	1,06	0,322942	0,625516	-0,469179	24	-0,552785	-1,083281
28	7725	6825	1,1	0,326285	0,625516	-0,469179	23	-0,519471	-1,087515
29	7697	6847	1,14	0,350801	0,636831	-0,451252	22	-0,457172	-1,035602
30	4988	6847	1,18	0,350801	0,636831	-0,451252	21	-0,422476	-1,030999
31	5698	6849	1,22	0,353030	0,636831	-0,451252	20	-0,411346	-1,052370
32	6888	6888	1,26	0,396490	0,651732	-0,428122	19	-0,400431	-1,043977
33	7746	6951	1,3	0,466695	0,677242	-0,389727	18	-0,400431	-1,027205
34	7695	7126	1,34	0,661708	0,745373	-0,293870	17	-0,379233	-0,901958
35	6130	7201	1,38	0,745286	0,770350	-0,260910	16	-0,353902	-0,848440
36	7215	7215	1,42	0,760887	0,776373	-0,253123	15	-0,325170	-0,821175
37	5698	7251	1,46	0,801004	0,788145	-0,238074	14	-0,325170	-0,822336
38	6315	7321	1,5	0,879009	0,807850	-0,213379	13	-0,213379	-0,640137
39	6847	7322	1,54	0,880123	0,810570	-0,210017	12	-0,196972	-0,626763
40	7812	7451	1,58	1,023876	0,846136	-0,167075	11	-0,196972	-0,575195
41	7843	7456	1,62	1,029448	0,846136	-0,167075	10	-0,196972	-0,589757
42	7321	7659	1,66	1,255664	0,894350	-0,111658	9	-0,181550	-0,486725
43	6165	7695	1,7	1,295781	0,901475	-0,103723	8	-0,103723	-0,352659
44	5748	7697	1,74	1,298009	0,901475	-0,103723	7	-0,103723	-0,360957
45	6358	7725	1,78	1,329212	0,906582	-0,098073	6	-0,080997	-0,318746
46	6849	7741	1,82	1,347041	0,909877	-0,094445	5	-0,074880	-0,308172
47	7456	7746	1,86	1,352613	0,911492	-0,092672	4	-0,061216	-0,286232
48	7126	7812	1,9	1,426161	0,922196	-0,080997	3	-0,043655	-0,236840
49	5997	7843	1,94	1,460706	0,927855	-0,074880	2	-0,043655	-0,229958
50	7741	7845	1,98	1,462935	0,927855	-0,074880	1	-0,039993	-0,227448

-50,716557

Tabela 20 - Resultados dos passos 1, 3, 4 e 5 do teste de Cramer-von Mises, para a distribuição de Normal, para os Dados 1

	Passo 1	Passo 3	Passo 4	Passo 5		
	Ordenar tempos até à falha	Calcular o valor da equação	Valor expectável da Distr. Normal	Calcular o quadrado da diferença $[QE(T_i)-A]^2$ (resultado do Passo 4-result. Passo 5)		
Falha # (i)	Tempos até avaria	Tempos até avaria, ordem crescente	$A=(i-0.5)/N$ i - nr. Falha	$QE(T_i)$	1-F(z) (Tabela Normal) $QE(T_i)$ Não fiabilidade expectável	$[QE(T_i)-A]^2$
1	5250	4952	0,01	-1,760916	0,039204	0,000853
2	6223	4988	0,03	-1,720799	0,042716	0,000162
3	7845	4988	0,05	-1,720799	0,042716	0,000053
4	6825	5126	0,07	-1,567017	0,059380	0,000113
5	4952	5222	0,09	-1,460038	0,072145	0,000319
6	6822	5250	0,11	-1,428836	0,077804	0,001037
7	4988	5366	0,13	-1,299570	0,098525	0,000991
8	6098	5369	0,15	-1,296226	0,098525	0,002650
9	6055	5659	0,17	-0,973061	0,166023	0,000016
10	6133	5698	0,19	-0,929601	0,178786	0,000126
11	7251	5698	0,21	-0,929601	0,178786	0,000974
12	5366	5698	0,23	-0,929601	0,178786	0,002623
13	7659	5748	0,25	-0,873883	0,192150	0,003347
14	7201	5997	0,27	-0,596407	0,277595	0,000058
15	5126	5998	0,29	-0,595292	0,277595	0,000154
16	5698	6055	0,31	-0,531774	0,298056	0,000143
17	6544	6098	0,33	-0,483856	0,315614	0,000207
18	6847	6130	0,35	-0,448197	0,329969	0,000401
19	6951	6133	0,37	-0,444853	0,329969	0,001603
20	5222	6149	0,39	-0,427024	0,337243	0,002783
21	6548	6165	0,41	-0,409194	0,344578	0,004280
22	5659	6223	0,43	-0,344561	0,366928	0,003978
23	7451	6315	0,45	-0,242040	0,405165	0,002010
24	7322	6358	0,47	-0,194122	0,424655	0,002056
25	5369	6544	0,49	0,013149	0,503989	0,000196
26	5998	6548	0,51	0,017607	0,503989	0,000036
27	6149	6822	0,53	0,322942	0,625516	0,009123
28	7725	6825	0,55	0,326285	0,625516	0,005703
29	7697	6847	0,57	0,350801	0,636831	0,004466
30	4988	6847	0,59	0,350801	0,636831	0,002193
31	5698	6849	0,61	0,353030	0,636831	0,000720
32	6888	6888	0,63	0,396490	0,651732	0,000472
33	7746	6951	0,65	0,466695	0,677242	0,000742
34	7695	7126	0,67	0,661708	0,745373	0,005681
35	6130	7201	0,69	0,745286	0,770350	0,006456
36	7215	7215	0,71	0,760887	0,776373	0,004405
37	5698	7251	0,73	0,801004	0,788145	0,003381
38	6315	7321	0,75	0,879009	0,807850	0,003347
39	6847	7322	0,77	0,880123	0,810570	0,001646
40	7812	7451	0,79	1,023876	0,846136	0,003151
41	7843	7456	0,81	1,029448	0,846136	0,001306
42	7321	7659	0,83	1,255664	0,894350	0,004141
43	6165	7695	0,85	1,295781	0,901475	0,002650
44	5748	7697	0,87	1,298009	0,901475	0,000991
45	6358	7725	0,89	1,329212	0,906582	0,000275
46	6849	7741	0,91	1,347041	0,909877	0,000000
47	7456	7746	0,93	1,352613	0,911492	0,000343
48	7126	7812	0,95	1,426161	0,922196	0,000773
49	5997	7843	0,97	1,460706	0,927855	0,001776
50	7741	7845	0,99	1,462935	0,927855	0,003862
						0,098769

5.6 Discussão dos resultados obtidos

Em resumo, os resultados obtidos nos testes aos dois conjuntos de dados demonstram o seguinte:

- A distribuição exponencial tal como a distribuição de Weibull foram rejeitadas pelos testes de ajuste de Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling e Cramer-von Mises como capazes de representar de forma aceitável o conjunto de Dados 1, para o nível de significância escolhido;
- A distribuição normal, não foi rejeitada pelos testes de ajuste de Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling e Cramer-von Mises como capaz de representar de forma aceitável o conjunto de Dados 1, para o nível de significância escolhido;
- A distribuição exponencial, tal como a distribuição de Weibull não foram rejeitadas pelos testes de ajuste de Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling e Cramer-von Mises como capazes de representar de forma aceitável o conjunto de Dados 2, para o nível de significância escolhido.

Devido a não existir discordância nos resultados referidos, este facto poderia comprovar uma consistência nos resultados destes testes; no entanto, seria necessário testar um maior número de amostras para se poder fazer esta afirmação.

Da mesma forma, embora os resultados iniciais assim o indiquem, seriam necessário um maior número de testes para afirmar que esta ferramenta tem a robustez requerida e projectada no início do trabalho.

Estes dados são apenas dois exemplos, para os vários testes, que foram trabalhados na ferramenta em folha de Excel. A ferramenta está preparada para qualquer conjunto de dados (de momento limitada a 50 observações), dentro dos testes e distribuições estatísticas analisadas nos Capítulos anteriores deste trabalho. Desta forma, é possível iniciar um estudo de fiabilidade, com base nas distribuições estatísticas referidas anteriormente, com dados reais de vida, utilizando esta ferramenta e as regras e princípios referidos.

Capítulo 6 – Conclusões e Trabalhos Futuros

O fenómeno da globalização cria em toda a indústria, novos desafios. Uma empresa, mesmo local, sabe que a concorrência lhe pode chegar de qualquer ponto do globo. Nada deve ser deixado ao acaso!

Isto significa que a fiabilidade de um bem está intimamente ligada à imagem de marca do seu fabricante. O conhecimento da fiabilidade de um qualquer bem, nomeadamente de novos bens a produzir, torna-se vital, não só para o êxito desse mesmo bem, como para a imagem da marca. É assim importante definir desde início a fiabilidade expectável desse bem e posteriormente conseguir na prática que atinja esse objectivo (ou eventualmente superior). Note-se que quando se refere um bem, não deveremos limitar o estudo a um produto, mas igualmente a um serviço.

Desta forma, essencialmente os fabricantes, investem hoje em dia em testes (normalmente testes acelerados) na fase de lançamento de um produto. Quando se atinge a fase de análise estatística dos dados, até à avaria, e a necessária escolha da análise estatística a utilizar, é importante existirem metodologias para determinar, com uma precisão científica, que se está a utilizar a distribuição mais correcta.

É nesta fase que têm muita importância os Testes Estatísticos analisados neste trabalho e os Métodos para cálculo dos parâmetros dessa distribuição. Embora estes testes estatísticos possam estar facilitados nalguns *software* disponíveis no mercado, quando da sua utilização, é importante se ter noção dos cálculos associados, das suas vantagens e limitações.

Assim, neste trabalho pretendeu-se primeiro que tudo demonstrar a importância actual (com alguma resenha histórica) da fiabilidade, tendo-se referido alguns dos factores que a influenciam. Seguidamente, referiram-se as distribuições estatísticas mais utilizadas nas análises de fiabilidade. Seguidamente analisou-se ao detalhe três dos mais clássicos testes estatísticos, nomeadamente da sua metodologia de cálculo; posteriormente analisou-se, também através de metodologias conhecidas, a determinação dos parâmetros das distribuições estudadas.

Finalmente, de forma a realizar um enquadramento de toda a análise teórica que se realizou, foi criada uma ferramenta para realizar os testes anteriormente referidos. Alguns exemplos dos resultados e potencialidades desta ferramenta foram demonstrados no Capítulo 5.

A utilização desta ferramenta permitiu verificar a sua exactidão, como também que os testes estudados têm consistência nos resultados finais obtidos. No entanto, como referido anteriormente, seria necessário um maior número de testes para demonstrar a real consistência desta ferramenta e possíveis limitações. Este facto é bastante importante, de forma a propiciar uma segurança na sua utilização, permitindo escolher o teste ou testes mais convenientes, tendo em consideração os casos particulares.

Como trabalho futuro, sugere-se que a ferramenta seja testada com um maior número de amostras, devendo ao mesmo tempo ser mais automatizada e protegida para uma possível

situação de múltiplos utilizadores (a trabalharem em simultâneo). É também bastante conveniente, que nesta mesma ferramenta seja incluída informação pertinente para o utilizador, relativamente a limitações de cada um dos métodos (que poderão tornar os resultados inconsistentes, inconclusivos ou mesmo errados) de forma a bloquear um cálculo que esteja fora do limite de cada um dos métodos.

Considera-se assim, que existe um vasto campo de aplicação num trabalho futuro.

Referências

- [1] Reliasoft's Life Data Analysis Reference, Reliability Engineering eTextbook Library, obtido através do site da Reliasoft na Internet em: http://reliawiki.org/index.php/Life_Data_Analysis_Reference
- [2] Dhillion, B.S. (2007), Applied Reliability and Quality – Fundamentals, Methods and Procedures, Springer Series in Reliability Engineering
- [3] Birolini, Alessandro (2007), Reliability Engineering, Theory and Practice, Fifth Edition, Springer Berlin Heidelberg New York
- [4] Kececioglu, Dimitri (2002), Reliability Engineering Handbook, Volume 1, Destech Publications, USA
- [5] Ping-Chen Chang, Yi-Kuei Lin (2015), Reliability analysis for an apparel manufacturing system applying fuzzy multistate network, Computers & Industrial Engineering, Volume 88, Pages 458-469
- [6] H.A. Jensen, F. Mayorga, C. Papadimitriou (2015), Reliability sensitivity analysis of stochastic finite element models, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Volume 296, Pages 327-351
- [7] M. Catelani, L. Ciani, M. Venzi (2015), Sensitivity analysis with MC simulation for the failure rate evaluation and reliability assessment, Measurement, Volume 74, Pages 150-158
- [8] Michael Whiteley, Ashley Fly, Johanna Leigh, Sarah Dunnett, Lisa Jackson (2015), Advanced reliability analysis of Polymer Electrolyte Membrane Fuel Cells using Petri-Net analysis and fuel cell modelling techniques, International Journal of Hydrogen Energy, Volume 40, Issue 35, Pages 11550-11558
- [9] A.A. Chojaczyk, A.P. Teixeira, L.C. Neves, J.B. Cardoso, C. Guedes Soares (2015), Review and application of Artificial Neural Networks models in reliability analysis of steel structures, Structural Safety, Volume 52, Part A, Pages 78-89
- [10] Xuwen An, P.D. Gosling, Xiaoyi Zhou (2016), Analytical structural reliability analysis of a suspended cable, Structural Safety, Volume 58, Pages 20-30
- [11] Qin Li, Chunmei Sun, Zhiqiang Huang, Xiang Xiao, Haiping Thang, Shiyong Zhao (2015), Reliability analysis of Lan Chengyu corroded pipeline with associated defects, Petroleum, In Press, Corrected Proof
- [12] Michael P. Alderson, André B. dos Santos, Cesar R. Mota Filho (2015). Reliability analysis of low-cost, full-scale domestic wastewater treatment plants for reuse in aquaculture and agriculture, Ecological Engineering, Volume 82, Pages 6-14
- [13] Yssaad, A. Abene (2015). Rational Reliability Centered Maintenance Optimization for power distribution systems, International Journal of Electrical Power & Energy Systems, Volume 73, Pages 350-360
- [14] Dong Hyawn Kim, Sang Geun Lee (2015). Reliability analysis of offshore wind turbine support structures under extreme ocean environmental loads, Renewable Energy, Volume 79, Pages 161-166
- [15] Ashraf Labib (2015). Learning (and unlearning) from failures: 30 years on from Bhopal to Fukushima an analysis through reliability engineering techniques, Process Safety and Environmental Protection, Volume 97, Pages 80-90

- [16] Kececioglu, Dimitri (2002), Reliability and Life testing Handbook, Volume 1, Destech Publications Inc. USA
- [17] Nick Vayenas, Xiangxi Wu (2009), Maintenance and reliability analysis of a fleet of load-haul-dump vehicles in an underground hard rock mine, International Journal of Mining, Reclamation and Environment, 23:3, pages 227-238
- [18] Maryam Mardfekri, Paolo Gardoni & Vahid Bisadi (2013): Service reliability offshore wind turbines, International Journal of Sustainable Energy, DOI:10.1080/14786451.2013.827683
- [19] Fanmao Liu, a,b Haiping Zhu, a Xinyu Shaoa and Guibing Gaoa (2011), Analysis of Horizontal Machining Center Field Failure Data Based on Generalized Linear Mixed Model - A case study, Qual. Reliability Engineering, Int. 2011, 27 pages 239-248
- [20] Montgomery, Douglas and Runger, George (2011), Applied Statistics and Probability for Engineers, John Wiley and Sons, Fifth Edition
- [21] Gaeddert, Joseph D.(2005), Parametric Estimation of Stochastic Fading, Master of Science Thesis, Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University, USA

Anexos

ANEXO A - Valores da Distribuição Normal (Estandarizada) Acumulada

$$1 - F(z) = \int_z^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Z	1 - F(z)	Z	1 - F(z)	Z	1 - F(z)	Z	1 - F(z)
0	0,50000	0,41	0,34090	0,82	0,20611	1,23	0,10935
0,01	0,49601	0,42	0,33724	0,83	0,20327	1,24	0,10749
0,02	0,49202	0,43	0,33360	0,84	0,20045	1,25	0,10565
0,03	0,48803	0,44	0,32997	0,85	0,19766	1,26	0,10383
0,04	0,48405	0,45	0,32636	0,86	0,19489	1,27	0,10204
0,05	0,48006	0,46	0,32276	0,87	0,19215	1,28	0,10027
0,06	0,47608	0,47	0,31918	0,88	0,18943	1,29	0,09853
0,07	0,47210	0,48	0,31561	0,89	0,18673	1,30	0,09680
0,08	0,46812	0,49	0,31207	0,90	0,18406	1,31	0,09510
0,09	0,46414	0,50	0,30854	0,91	0,18141	1,32	0,09342
0,10	0,46017	0,51	0,30503	0,92	0,17879	1,33	0,09176
0,11	0,45620	0,52	0,30153	0,93	0,17619	1,34	0,09012
0,12	0,45224	0,53	0,29806	0,94	0,17361	1,35	0,08851
0,13	0,44828	0,54	0,29460	0,95	0,17106	1,36	0,08691
0,14	0,44433	0,55	0,29116	0,96	0,16853	1,37	0,08534
0,15	0,44038	0,56	0,28774	0,97	0,16602	1,38	0,08379
0,16	0,43644	0,57	0,28434	0,98	0,16354	1,39	0,08226
0,17	0,43251	0,58	0,28096	0,99	0,16109	1,40	0,08076
0,18	0,42858	0,59	0,27760	1,00	0,15866	1,41	0,07927
0,19	0,42465	0,60	0,27425	1,01	0,15625	1,42	0,07780
0,20	0,42074	0,61	0,27093	1,02	0,15386	1,43	0,07636
0,21	0,41683	0,62	0,26763	1,03	0,15151	1,44	0,07493
0,22	0,41294	0,63	0,26435	1,04	0,14917	1,45	0,07353
0,23	0,40905	0,64	0,26109	1,05	0,14686	1,46	0,07215
0,24	0,40517	0,65	0,25785	1,06	0,14457	1,47	0,07078
0,25	0,40129	0,66	0,25463	1,07	0,14231	1,48	0,06944
0,26	0,39743	0,67	0,25143	1,08	0,14007	1,49	0,06811
0,27	0,39358	0,68	0,24825	1,09	0,13786	1,50	0,06681
0,28	0,38974	0,69	0,24510	1,10	0,13567	1,51	0,06552
0,29	0,38591	0,70	0,24196	1,11	0,13350	1,52	0,06426
0,30	0,38209	0,71	0,23885	1,12	0,13136	1,53	0,06301
0,31	0,37828	0,72	0,23576	1,13	0,12924	1,54	0,06178
0,32	0,37448	0,73	0,23270	1,14	0,12714	1,55	0,06057
0,33	0,37070	0,74	0,22965	1,15	0,12507	1,56	0,05938
0,34	0,36693	0,75	0,22663	1,16	0,12302	1,57	0,05821
0,35	0,36317	0,76	0,22363	1,17	0,12100	1,58	0,05705
0,36	0,35942	0,77	0,22065	1,18	0,11900	1,59	0,05592
0,37	0,35569	0,78	0,21770	1,19	0,11702	1,60	0,05480
0,38	0,35197	0,79	0,21476	1,20	0,11507	1,61	0,05370
0,39	0,34827	0,8	0,21186	1,21	0,11314	1,62	0,05262
0,40	0,34458	0,81	0,20897	1,22	0,11123	1,63	0,05155

ANEXO A (continuação)

Z	$1 - F(z)$	Z	$1 - F(z)$	Z	$1 - F(z)$	Z	$1 - F(z)$
1,64	0,05050	2,05	0,02018	2,46	0,00695	2,87	0,00205
1,65	0,04947	2,06	0,01970	2,47	0,00676	2,88	0,00199
1,66	0,04846	2,07	0,01923	2,48	0,00657	2,89	0,00193
1,67	0,04746	2,08	0,01876	2,49	0,00639	2,90	0,00187
1,68	0,04648	2,09	0,01831	2,50	0,00621	2,91	0,00181
1,69	0,04551	2,10	0,01786	2,51	0,00604	2,92	0,00175
1,70	0,04457	2,11	0,01743	2,52	0,00587	2,93	0,00169
1,71	0,04363	2,12	0,01700	2,53	0,00570	2,94	0,00164
1,72	0,04272	2,13	0,01659	2,54	0,00554	2,95	0,00159
1,73	0,04182	2,14	0,01618	2,55	0,00539	2,96	0,00154
1,74	0,04093	2,15	0,01578	2,56	0,00523	2,97	0,00149
1,75	0,04006	2,16	0,01539	2,57	0,00508	2,98	0,00144
1,76	0,03920	2,17	0,01500	2,58	0,00494	2,99	0,00139
1,77	0,03836	2,18	0,01463	2,59	0,00480	3,00	0,00135
1,78	0,03754	2,19	0,01426	2,60	0,00466	3,01	0,00131
1,79	0,03673	2,20	0,01390	2,61	0,00453	3,02	0,00126
1,80	0,03593	2,21	0,01355	2,62	0,00440	3,03	0,00122
1,81	0,03515	2,22	0,01321	2,63	0,00427	3,04	0,00118
1,82	0,03438	2,23	0,01287	2,64	0,00415	3,05	0,00114
1,83	0,03362	2,24	0,01255	2,65	0,00402	3,06	0,00111
1,84	0,03288	2,25	0,01222	2,66	0,00391	3,07	0,00107
1,85	0,03216	2,26	0,01191	2,67	0,00379	3,08	0,00104
1,86	0,03144	2,27	0,01160	2,68	0,00368	3,09	0,00100
1,87	0,03074	2,28	0,01130	2,69	0,00357	3,10	0,00097
1,88	0,03005	2,29	0,01101	2,70	0,00347	3,11	0,00094
1,89	0,02938	2,30	0,01072	2,71	0,00336	3,12	0,00090
1,90	0,02872	2,31	0,01044	2,72	0,00326	3,13	0,00087
1,91	0,02807	2,32	0,01017	2,73	0,00317	3,14	0,00084
1,92	0,02743	2,33	0,00990	2,74	0,00307	3,15	0,00082
1,93	0,02680	2,34	0,00964	2,75	0,00298	3,16	0,00079
1,94	0,02619	2,35	0,00939	2,76	0,00289	3,17	0,00076
1,95	0,02559	2,36	0,00914	2,77	0,00280	3,18	0,00074
1,96	0,02500	2,37	0,00889	2,78	0,00272	3,19	0,00071
1,97	0,02442	2,38	0,00866	2,79	0,00264	3,20	0,00069
1,98	0,02385	2,39	0,00842	2,80	0,00256	3,23	0,00066
1,99	0,02330	2,40	0,00820	2,81	0,00248	3,24	0,00064
2,00	0,02275	2,41	0,00798	2,82	0,00240	3,25	0,00062
2,01	0,02222	2,42	0,00776	2,83	0,00233	3,26	0,00060
2,02	0,02169	2,43	0,00755	2,84	0,00226	3,27	0,00058
2,03	0,02118	2,44	0,00734	2,85	0,00219	3,28	0,00056
2,04	0,02068	2,45	0,00714	2,86	0,00212	3,29	0,00054

ANEXO A (continuação)

Z	1 - F(z)	Z	1 - F(z)	Z	1 - F(z)	Z	1 - F(z)
3,30	0,00048	3,68	0,00012	4,06	0,00002	4,44	0,00000
3,31	0,00047	3,69	0,00011	4,07	0,00002	4,45	0,00000
3,32	0,00045	3,70	0,00011	4,08	0,00002	4,46	0,00000
3,33	0,00043	3,71	0,00010	4,09	0,00002	4,47	0,00000
3,34	0,00042	3,72	0,00010	4,10	0,00002	4,48	0,00000
3,35	0,00040	3,73	0,00010	4,11	0,00002	4,49	0,00000
3,36	0,00039	3,74	0,00009	4,12	0,00002	4,50	0,00000
3,37	0,00038	3,75	0,00009	4,13	0,00002	4,51	0,00000
3,38	0,00036	3,76	0,00008	4,14	0,00002	4,52	0,00000
3,39	0,00035	3,77	0,00008	4,15	0,00002	4,53	0,00000
3,40	0,00034	3,78	0,00008	4,16	0,00002	4,54	0,00000
3,41	0,00032	3,79	0,00008	4,17	0,00002	4,55	0,00000
3,42	0,00031	3,80	0,00007	4,18	0,00001	4,56	0,00000
3,43	0,00030	3,81	0,00007	4,19	0,00001	4,57	0,00000
3,44	0,00029	3,82	0,00007	4,20	0,00001	4,58	0,00000
3,45	0,00028	3,83	0,00006	4,21	0,00001	4,59	0,00000
3,46	0,00027	3,84	0,00006	4,22	0,00001	4,60	0,00000
3,47	0,00026	3,85	0,00006	4,23	0,00001	4,61	0,00000
3,48	0,00025	3,86	0,00006	4,24	0,00001	4,62	0,00000
3,49	0,00024	3,87	0,00005	4,25	0,00001	4,63	0,00000
3,50	0,00023	3,88	0,00005	4,26	0,00001	4,64	0,00000
3,51	0,00022	3,89	0,00005	4,27	0,00001	4,65	0,00000
3,52	0,00022	3,90	0,00005	4,28	0,00001	4,66	0,00000
3,53	0,00021	3,91	0,00005	4,29	0,00001	4,67	0,00000
3,54	0,00020	3,92	0,00004	4,30	0,00001	4,68	0,00000
3,55	0,00019	3,93	0,00004	4,31	0,00001	4,69	0,00000
3,56	0,00019	3,94	0,00004	4,32	0,00001	4,70	0,00000
3,57	0,00018	3,95	0,00004	4,33	0,00001	4,71	0,00000
3,58	0,00017	3,96	0,00004	4,34	0,00001	4,72	0,00000
3,59	0,00017	3,97	0,00004	4,35	0,00001	4,73	0,00000
3,60	0,00016	3,98	0,00003	4,36	0,00001	4,74	0,00000
3,61	0,00015	3,99	0,00003	4,37	0,00001	4,75	0,00000
3,62	0,00015	4,00	0,00003	4,38	0,00001	4,76	0,00000
3,63	0,00014	4,01	0,00003	4,39	0,00001	4,77	0,00000
3,64	0,00014	4,02	0,00003	4,40	0,00001	4,78	0,00000
3,65	0,00013	4,03	0,00003	4,41	0,00001	4,79	0,00000
3,66	0,00013	4,04	0,00003	4,42	0,00000	4,80	0,00000
3,67	0,00012	4,05	0,00003	4,43	0,00000		

ANEXO B - Valor crítico para o teste do Qui-Quadrado (nível de significância de 5%)

Valor de n	Valor do X^2_{cr} , (Qui-Quadrado Critico) para Nível de Significância de 5%
1	3,8415
2	5,9915
3	7,8147
4	9,4877
5	11,0705
6	12,5916
7	14,0671
8	15,5073
9	16,9189
10	18,3070
11	19,6752
12	21,0261
13	22,3621
14	23,6848
15	24,9958
16	26,2963
17	27,5872
18	28,8693
19	30,1436
20	31,4104

ANEXO C

Valor crítico para o teste de Kolmogorov-Smirnov (nível de significância de 5%)

Dimensão da amostra	Valor Critico para o teste de Kolmogorov-Smirnov Nível de Significância de 5%
1	0,975
2	0,842
3	0,708
4	0,624
5	0,454
6	0,521
7	0,486
8	0,457
9	0,432
10	0,410
11	0,391
12	0,375
13	0,361
14	0,349
15	0,338
16	0,328
17	0,318
18	0,309
19	0,301
20	0,294
21	0,289
22	0,284
23	0,279
24	0,274
25	0,270
26	0,264
27	0,258
28	0,252
29	0,246
30	0,240
31	0,238
32	0,236
33	0,234
34	0,232
> 35	$\frac{1,36}{\sqrt{N}}$

ANEXO D - Valor crítico para os testes de Anderson-Darling e Cramer-von Mises

Valores críticos dos testes		Valores percentuais				
		15%	10%	5%	2,5%	1%
Anderson-Darling	A_{CR}^2	1,610	1,933	2,492	3,070	3,857
Cramer-von Mises	W_{CR}^{2*}	0,284	0,347	0,461	0,581	0,743