



A DIVISÃO NO 4ºANO DE ESCOLARIDADE

Helena Isabel da Silva Alcobia

Dissertação apresentada para obtenção do grau de Mestre em Educação Matemática
na Educação Pré-Escolar e nos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico

2014



A DIVISÃO NO 4º ANO DE ESCOLARIDADE

Helena Isabel da Silva Alcobia

Professora orientadora:
Professora Doutora Maria de Lurdes Marquês Serrazina

Dissertação apresentada para obtenção do grau de Mestre em Educação Matemática
na Educação Pré-Escolar e nos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico

2014

Resumo

Este estudo tem como objetivos: (i) perceber qual a compreensão que os alunos do 4º ano de escolaridade têm do conceito de divisão e (ii) analisar o desempenho que os alunos evidenciam na resolução de problemas que têm implícito o conceito de divisão. Para tal, procurou responder-se a quatro questões:

- a) Como é que os alunos reconhecem a operação de divisão na resolução de problemas? (problemas que têm implícito o conceito de divisão);
- b) Que estratégias utilizam os alunos na resolução de problemas de divisão?;
- c) Que dificuldades manifestam os alunos quando resolvem tarefas de divisão?;
- d) Quais os aspetos do sentido do número revelados pelos alunos na resolução de tarefas de divisão?

De acordo com a problemática em estudo, a abordagem metodológica adotada foi de natureza qualitativa com carácter interpretativo (Bogdan & Biklen, 1994), na modalidade de estudo de caso (Yin, 2009). O estudo consistiu na criação de uma sequência de aprendizagem, constituída por seis problemas de divisão, tendo sido a mesma aplicada numa turma do 4º ano do Ensino Básico, na qual era professora de apoio educativo, no ano letivo 2013/2014. A que se seguiu a análise das estratégias utilizadas por quatro alunos na resolução dos problemas. Os alunos estavam integrados na turma e pertenciam ao mesmo grupo de trabalho.

Os resultados do estudo revelam que os alunos recorrem a estratégias aditivas e multiplicativas muito diversificadas, tendo sido identificadas as seguintes: adição de dobros, adição repetida de parcelas iguais, usar a subtração, usar fatores de referência, usar múltiplos de 10, usar o dobro, multiplicar sucessivamente, multiplicar em coluna. Recorrem ainda às seguintes estratégias: usar o valor de posição e tentativa e erro. Os alunos fazem também a representação do algoritmo da divisão, mas recorrem para isso a uma estratégia multiplicativa.

Os alunos optam por utilizar estratégias multiplicativas na resolução de problemas de divisão, com grande frequência e com sucesso, embora também recorram, com menor frequência, a estratégias aditivas, com recurso à adição e subtração.

Palavras-chave: conceito de divisão, sentido do número, cálculo mental, resolução de problemas, sentidos da divisão, estratégias de cálculo.

Abstract

This study aims to: (i) realize what is the comprehension that students from 4th grade have of the concept of division, and (ii) analyze their performance in solving problems in which the division concept is implicit. To do so, four questions were raised:

- a) How do students recognize the division operation in solving problems? (problems with the concept of division implicit);
- b) Which strategies students use in solving division problems?;
- c) What difficulties affect students when they solve division tasks?;
- d) What aspects of number sense revealed by students in solving division tasks?.

According to the issues under study, the methodological approach adopted was qualitative with interpretive nature (Bogdan & Biklen, 1994), in the form of case study (Yin, 2009). The study consisted in the development of a learning sequence, composed of six division problems, that was applied to a class of 4th year of basic education, for which I was the educational support teacher in the school year 2013/2014. Then the strategies used by four students in solving problems were analyzed. These students were integrated in the same group work.

The study results show that students resort to several additive and multiplicative strategies, including the following: adding doubles, repeated addition of equal amounts, using subtraction, using reference factors, using double, using multiples of 10, multiplying successively, multiplication column method. They also rely to other strategies such as: using the position value and trial-and-error. Some students make also the representation of the division algorithm, but use a multiplicative strategy.

Students choose to use, frequently and successfully, multiplicative strategies in solving division problems, although they also apply but not so often, additive strategies using the addition and subtraction.

Keywords: concept of division, number sense, mental math, problem solving, sense of division, calculation strategies.

Agradecimentos

À minha orientadora, Professora Lurdes Serrazina, por todo o apoio que sempre me deu, as sugestões que apresentou e por tudo o que me ensinou.

Aos meus pais, Maria do Rosário e Aníbal, pela paciência que demonstraram e apoio.

Ao meu irmão Carlos, pelo seu incentivo para iniciar este trabalho, pelo apoio técnico e por ter sempre acreditado em mim.

Ao Agrupamento de Escolas, por ter autorizado a realização deste estudo.

À professora titular da turma, que se disponibilizou desde o primeiro momento a cooperar neste estudo e que colaborou de forma entusiasta.

À turma do 4º ano que colaborou neste estudo, em especial, aos quatro alunos participantes.

À Professora Florinda Costa por ter despoletado em mim o interesse pela investigação na área da Matemática.

À Maria dos Reis e Rosário Rego por me terem incentivado e apoiado, principalmente na fase inicial deste percurso. Maria, acredito que onde estiveres, deves estar feliz por mim.

À Paula Antunes, por todos os contributos que deu no percurso deste trabalho.

Ao João Gonçalves, pela ajuda na revisão do trabalho.

À Patrícia Santos, pela colaboração dada, especialmente na fase final desta etapa.

Aos colegas da turma de Mestrado e respetivos professores, pelo seu incentivo e apoio.

Por todos os que se cruzaram comigo neste percurso e que verdadeiramente acreditaram em mim.

Índice

Capítulo 1- Introdução.....	1
Problema e objetivos.....	1
Questões de investigação	2
Pertinência e Contexto do estudo	3
Organização do estudo	4
Capítulo 2 - Enquadramento Teórico.....	7
Sentido do número.....	7
Cálculo mental	12
Resolução de problemas envolvendo as operações de multiplicação e divisão	15
Sentidos da divisão.....	16
Estratégias de resolução de problemas de multiplicação e divisão	18
Um caminho possível para a compreensão da divisão	32
Enquadramento Curricular	34
Capítulo 3 - Metodologia de investigação	39
Opções metodológicas.....	39
Os Participantes.....	41
O Agrupamento de escolas e a Escola do 1º Ciclo	41
A turma.....	42
Os alunos	43
Recolha de dados	44
Sequência de aprendizagem.....	45
Análise de dados	46

Capítulo 4 - A resolução da sequência de aprendizagem pelos alunos	49
Estratégias utilizadas pela Nídia	49
Síntese	64
Estratégias utilizadas pelo Luís	67
Síntese	85
Estratégias utilizadas pela Joana	88
Síntese	104
Estratégias utilizadas pela Ivone	107
Síntese	123
Síntese global	126
Capítulo 5 - Conclusões, limitações do estudo e recomendações	131
Síntese do estudo	131
Conclusões	132
Reconhecimento da operação de divisão pelos alunos.....	132
Estratégias utilizadas pelos alunos	133
Dificuldades manifestadas pelos alunos	135
Sentido de número dos alunos	137
Reflexão.....	138
Limitações do estudo e recomendações	139
Referências bibliográficas	141
Anexos.....	146
Anexo 1 - Informação à Direção da Escola	147
Anexo 2 - Pedido de autorização aos Encarregados de Educação	148
Anexo 3 - Enunciados dos problemas do questionário.....	149
Anexo 4 - Enunciados dos problemas da sequência de aprendizagem.....	150

Índice de quadros

Quadro 1 - Diferentes significados da operação da divisão (adaptado de Brocardo, Serrazina & Rocha, 2008).....	17
Quadro 2 - Modelos intuitivos para a multiplicação e divisão (adaptado de Mulligan & Mitchelmore, 1997).....	23
Quadro 3 - Estratégias de cálculo para a resolução de problemas de multiplicação e divisão (adaptado de Mulligan & Mitchelmore, 1997).....	24
Quadro 4 - Categorias de estratégias identificadas para a divisão com números inteiros (adaptado de van Putten, Snijders & Beishuizen, 2005).....	28
Quadro 5 - Categorias de estratégias de cálculo (adaptado de Mulligan & Mitchelmore, 1997; Hartnett, 2007; Ambrose et al., 2003; Kouba, 1989; van Putten et al., 2005).....	47
Quadro 6 - Estratégias utilizadas por Nídia na resolução dos seis problemas.....	64
Quadro 7 - Estratégias utilizadas por Luís na resolução dos seis problemas.....	85
Quadro 8 - Estratégias utilizadas por Joana na resolução dos seis problemas.....	104
Quadro 9 - Estratégias utilizadas por Ivone na resolução dos seis problemas.....	123
Quadro 10 - Estratégias utilizadas pelos alunos na resolução dos seis problemas...	129

Índice de figuras

Figura 1 - Resolução da Nídia do problema 1 "Vamos sentar as pessoas".....	50
Figura 2 - Resolução da Nídia do problema 1: "Vamos sentar as pessoas".....	51
Figura 3 - Resolução da Nídia do problema 1: "Vamos sentar as pessoas".....	51
Figura 4 - Resolução da Nídia do problema 2: "As mesas".....	53
Figura 5 - Resolução da Nídia do problema 2: "As mesas".....	55
Figura 6 - Resolução da Nídia do problema 2: "As mesas".....	55
Figura 7 - Resolução da Nídia do problema 2: "As mesas".....	56
Figura 8 - Resolução da Nídia do problema 3: "A multiplicar por 25".....	57
Figura 9 - Resolução da Nídia do problema 3: "A multiplicar por 25".....	57
Figura 10 - Resolução da Nídia no quadro do problema 3: "A multiplicar por 25".....	58
Figura 11 - Resolução da Nídia do problema 4: "Os autocarros".....	58

Figura 12 - Resolução da Nídia do problema 4: "Os autocarros"	59
Figura 13 - Resolução da Nídia do problema 4: "Os autocarros"	59
Figura 14 - Resolução da Nídia do problema 4: "Os autocarros"	60
Figura 15 - Resolução da Nídia do problema 5: "Número de alunos"	60
Figura 16 - Resolução da Nídia do problema 5: "Número de alunos"	61
Figura 17 - Resolução da Nídia do problema 6: "A multiplicar por 625"	62
Figura 18 - Resolução da Nídia no quadro do problema 6: "A multiplicar por 625"	63
Figura 19 - Resolução do Luís do problema 1: "Vamos sentar as pessoas"	69
Figura 20 - Resolução do Luís do problema 1: "Vamos sentar as pessoas"	70
Figura 21 - Resolução do Luís do problema 1: "Vamos sentar as pessoas"	70
Figura 22 - Resolução do Luís do problema 2: "As mesas"	72
Figura 23 - Resolução do Luís do problema 2: "As mesas"	74
Figura 24 - Resolução do Luís do problema 2: "As mesas"	74
Figura 25 - Resolução do Luís do problema 2: "As mesas"	75
Figura 26 - Resolução do Luís do problema 3: "A multiplicar por 25"	76
Figura 27 - Resolução do Luís do problema 3: "A multiplicar por 25"	76
Figura 28 - Resolução do Luís do problema 4: "Os autocarros"	77
Figura 29 - Resolução do Luís do problema 4: "Os autocarros"	78
Figura 30 - Resolução do Luís do problema 4: "Os autocarros"	79
Figura 31 - Resposta do Luís do problema 4: "Os autocarros"	80
Figura 32 - Resolução do Luís do problema 5: "Número de alunos"	81
Figura 33 - Resolução do Luís do problema 5: "Número de alunos"	82
Figura 34 - Resolução do Luís do problema 6: "A multiplicar por 625"	83
Figura 35 - Resolução do Luís do problema 6: "A multiplicar por 625"	84
Figura 36 - Resolução do Luís do problema 6: "A multiplicar por 625"	84
Figura 37 - Resolução da Joana do problema 1: "Vamos sentar as pessoas"	89
Figura 38 - Resolução da Joana do problema 1: "Vamos sentar as pessoas"	90
Figura 39 - Resolução da Joana do problema 1: "Vamos sentar as pessoas"	91
Figura 40 - Resolução da Joana do problema 2: "As mesas"	92
Figura 41 - Resolução da Joana do problema 2: "As mesas"	94
Figura 42 - Resolução da Joana do problema 2: "As mesas"	94
Figura 43 - Resolução da Joana do problema 2: "As mesas"	95
Figura 44 - Resolução da Joana do problema 3: "A multiplicar por 25"	96
Figura 45 - Resolução da Joana do problema 3: "A multiplicar por 25"	96

Figura 46 - Resolução da Joana do problema 4: "Os autocarros"	97
Figura 47 - Resolução da Joana do problema 4: "Os autocarros"	98
Figura 48 - Resolução da Joana do problema 4: "Os autocarros"	99
Figura 49 - Resposta da Joana do problema 4: "Os autocarros"	99
Figura 50 - Resolução da Joana do problema 5: "Número de alunos"	100
Figura 51 - Resolução da Joana do problema 5: "Número de alunos"	101
Figura 52 - Resposta da Joana do problema 5: "Número de alunos"	101
Figura 53 - Resolução da Joana do problema 6: "A multiplicar por 625"	103
Figura 54 - Resolução da Joana do problema 6: "A multiplicar por 625"	103
Figura 55 - Resposta da Joana do problema 6: "A multiplicar por 625"	103
Figura 56 - Resolução da Ivone do problema 1: "Vamos sentar as pessoas"	108
Figura 57 - Resolução da Ivone do problema 1: "Vamos sentar as pessoas"	109
Figura 58 - Resolução da Ivone do problema 1: "Vamos sentar as pessoas"	109
Figura 59 - Resolução da Ivone do problema 2: "As mesas"	111
Figura 60 - Resolução da Ivone do problema 2: "As mesas"	111
Figura 61 - Resolução da Ivone do problema 2: "As mesas"	112
Figura 62 - Resolução da Ivone do problema 2: "As mesas"	112
Figura 63 - Resolução da Ivone do problema 3: "A multiplicar por 25"	114
Figura 64 - Resolução da Ivone do problema 3: "A multiplicar por 25"	114
Figura 65 - Resolução da Ivone do problema 3: "A multiplicar por 25"	114
Figura 66 - Resposta da Ivone do problema 3: "A multiplicar por 25"	115
Figura 67 - Resolução da Ivone do problema 4: "Os autocarros"	116
Figura 68 - Resposta da Ivone do problema 4: "Os autocarros"	117
Figura 69 - Resolução da Ivone do problema 4: " Os autocarros"	118
Figura 70 - Resolução da Ivone do problema 5: "Número de alunos"	118
Figura 71 - Resolução da Ivone do problema 5: "Número de alunos"	119
Figura 72 - Resolução da Ivone do problema 5: "Número de alunos"	119
Figura 73 - Resolução da Ivone do problema 6: " A multiplicar por 625"	120
Figura 74 - Resolução da Ivone do problema 6: "A multiplicar por 625"	121
Figura 75 - Resolução da Ivone do problema 6: "A multiplicar por 625"	121
Figura 76 - Resposta da Ivone do problema 6: "A multiplicar por 625"	122
Figura 77 - Resolução da Ivone do problema 6: "A multiplicar por 625"	122

Capítulo 1- Introdução

Este capítulo apresenta uma introdução ao estudo que realizei e inclui o problema, os objetivos, as questões que impulsionaram a investigação efetuada, a justificação da sua pertinência e o contexto em que foi desenvolvido. Termina com a descrição do modo como está organizado o relatório do presente estudo.

Problema e objetivos

O desenvolvimento do sentido de número é um tópico muito importante no ensino da Matemática. Nos Princípios e Normas para a Matemática Escolar (NCTM, 2007) são objetivos, entre outros, que os alunos do 3º ao 5º ano continuem a desenvolver o sentido do número, com mais ênfase na multiplicação e na divisão. Deverão aprofundar a sua compreensão dos significados destas operações, à medida que são confrontados com diferentes representações e situações problemáticas, estabelecendo relações entre estas e desenvolver a capacidade de calcular com destreza, consolidando a compreensão do sistema numérico decimal, através do trabalho continuado e com números com maior ordem de grandeza. O cálculo mental também ocupa uma posição de relevo neste documento, pois é importante que os alunos adquiram destreza de cálculo, no sentido de possuírem e saberem utilizar métodos de cálculo eficazes e precisos, assim como, a resolução de problemas que é encarada como uma parte integrante de toda a aprendizagem Matemática.

No Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte, Serrazina, Guimarães, Breda, Guimarães, Sousa, Menezes, Martins & Oliveira, 2007) a noção de sentido de número constitui-se como uma das três ideias chave do tema Números e Operações, juntamente com a compreensão dos números e operações e com o desenvolvimento da fluência no cálculo. A operação da divisão deverá ser a última a ser introduzida no 1º ciclo. Neste documento também é atribuída grande importância à resolução de problemas na aprendizagem da Matemática, constituindo-se como uma das três capacidades transversais a todo o programa. A aprendizagem do conceito de divisão e do respetivo algoritmo revelam geralmente grandes dificuldades aos alunos do 1º Ciclo

do Ensino Básico. Para Ferreira (2005) a escola tem valorizado em demasia os procedimentos formais, baseados na repetição, mecanização e na memorização de factos e regras, em detrimento de processos de raciocínio informais, em que a primazia são as estratégias utilizadas pelos alunos e por conseguinte a construção de novos conceitos e novas aprendizagens, desenvolvendo um conhecimento mais formal.

Segundo Brocardo, Serrazina & Rocha (2008) o estudo da divisão é acrescido de uma dificuldade, em comparação com as outras três operações elementares, a existência de resto na divisão não exata.

Será então necessário conhecer quais as estratégias que os alunos utilizam na resolução de problemas que têm implícito o conceito da divisão, o que poderá ajudar a definir linhas orientadoras para uma aprendizagem significativa do conceito de divisão.

Tendo em conta tudo o que foi referido, considereei pertinente realizar este estudo onde procuro perceber qual a compreensão que os alunos do 4º ano do Ensino Básico têm do conceito de divisão e analisar o desempenho que os mesmos evidenciam na resolução de problemas de divisão.

Para isso, foi criada uma sequência de aprendizagem, constituída por seis problemas de divisão, tendo sido aplicada numa turma do 4º ano do Ensino Básico. Por último, realizou-se a análise das estratégias utilizadas pelos quatro alunos na resolução dos problemas.

De acordo com o problema apresentado foram definidos dois objetivos: (i) perceber qual a compreensão que os alunos do 4º ano de escolaridade têm do conceito de divisão e (ii) analisar o desempenho que os alunos evidenciam na resolução de problemas que têm implícito o conceito de divisão.

Questões de investigação

Este estudo procura, através de uma sequência aprendizagem, dar resposta às seguintes questões:

1. Como é que os alunos reconhecem a operação de divisão na resolução de problemas? (problemas que têm implícito o conceito de divisão);

2. Que estratégias utilizam os alunos na resolução de problemas de divisão?;
3. Que dificuldades manifestam os alunos quando resolvem tarefas de divisão?;
4. Quais os aspetos do sentido do número revelados pelos alunos na resolução de tarefas de divisão?

Pertinência e Contexto do estudo

Ao longo da minha escolaridade, o algoritmo da divisão sempre me despertou interesse pela sua diferença em relação às outras operações mas também pela forma mecanizada/ formal como era ensinada e pelo modo conseqüente como levava a uma aprendizagem não significativa.

Com base na minha prática profissional em contexto educativo no 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico, tenho observado que, no campo das operações aritméticas, os estudantes revelam falta de compreensão relativamente ao conceito da divisão.

No que se refere à investigação, esta é pouco realizada, no que diz respeito à operação de divisão, focando-se principalmente em contextos de adição, subtração e multiplicação.

Estes três aspetos justificam a necessidade de investigar a compreensão que os alunos têm do conceito da divisão, na medida em que o seu percurso escolar parece não permitir a aprendizagem deste conceito com o carácter significativo desejado.

O estudo foi realizado numa escola de território educativo de intervenção prioritária, numa turma de 4º ano de escolaridade, constituída por doze alunos, da qual era professora de apoio educativo, no ano letivo 2013/2014. Através da aplicação de um questionário (anexo 3) selecionei quatro alunos da turma: Nídia, Luís, Joana e Ivone.

Enquanto professora de apoio educativo dos alunos envolvidos na investigação, este estudo constitui-se relevante para a minha formação profissional, no sentido em que permite uma melhor perceção dos conhecimentos e dificuldades dos alunos e poderá contribuir para uma melhoria da minha prática letiva, no sentido de

desenvolver nos alunos aprendizagens significativas ao invés de aprendizagens rotineiras e desprovidos de sentido.

Enquanto investigadora, creio que este estudo poderá contribuir para um avanço do campo científico, no domínio da educação matemática, pois permitirá um aprofundamento da compreensão sobre questões fundamentais relativas ao conceito de divisão, analisando o seu desempenho na resolução de problemas. Não é demais sublinhar que a finalidade última deste estudo se prende com o aumento de conhecimentos sobre o tema, pelo que poderá ter interesse para a comunidade educativa em geral.

Organização do estudo

Este relatório é constituído por cinco capítulos. O primeiro capítulo apresenta uma introdução ao estudo e inclui o problema, os objetivos, as questões que impulsionaram a investigação efetuada, a justificação da sua pertinência e o contexto em que foi desenvolvido.

O segundo capítulo contextualiza o problema definido através da análise de referenciais teóricos. Para isso, estão presentes quatro temáticas, procurando (i) analisar a importância do sentido do número, na sua relação com a compreensão dos números e com a aprendizagem significativa das operações aritméticas, (ii) clarificar o que é o cálculo mental, perceber de que forma está associado ao desenvolvimento do sentido do número e perceber qual a sua relação com a compreensão dos números e com a aprendizagem significativa das operações aritméticas, (iii) contextualizar a importância da resolução de problemas no desenvolvimento da compreensão dos números e das operações, nomeadamente da divisão, através dos seus diferentes sentidos. Apresentando-se para isso, as diferentes estratégias utilizadas pelos alunos nas suas resoluções, tendo como base a análise de investigações empíricas realizadas a nível nacional e internacional. Inclui-se ainda um possível caminho para a compreensão da divisão, considerando os pressupostos de base e as opções enunciadas e (iv) enquadrar curricularmente os referenciais teóricos deste estudo, tendo em conta as diretrizes nacionais e internacionais.

O terceiro capítulo apresenta e justifica as opções metodológicas seguidas, de acordo com os objetivos e as questões do estudo, e refere os diferentes processos utilizados na sua realização. Para tal, descreve: os participantes, nomeadamente o Agrupamento de Escolas e a Escola do 1.º Ciclo do Ensino Básico onde se realizou o estudo, a turma e os alunos selecionados, as técnicas utilizadas na recolha de dados, a sequência de aprendizagem criada e utilizada neste estudo e o processo de análise dos dados.

O quarto capítulo apresenta a análise da resolução dos seis problemas apresentados e resolvidos pelos quatro alunos, onde se incluem as estratégias utilizadas por cada aluno, acompanhadas de uma síntese em que se relacionam as estratégias privilegiadas por cada um, tendo em conta os diferentes sentidos da divisão apresentados nos problemas e a ordem de grandeza dos números utilizados. E, por fim, apresenta-se uma síntese global com as características comuns às estratégias utilizadas por todos os alunos.

O quinto capítulo inclui as conclusões do estudo realizado e, a terminar, uma reflexão sobre a minha própria aprendizagem, decorrente do trabalho desenvolvido. As conclusões que apresento estão organizadas em quatro aspetos: o reconhecimento da operação de divisão pelos alunos, as estratégias utilizadas, as dificuldades manifestadas e os aspetos do sentido de número revelados. Inclui ainda, as limitações e recomendações do presente estudo.

Capítulo 2 - Enquadramento Teórico

Este capítulo pretende contextualizar o problema definido através da análise de referenciais teóricos. Numa primeira fase, analiso a importância do sentido do número, na sua relação com a compreensão dos números e com a aprendizagem significativa das operações aritméticas. Numa segunda fase, clarifico o que é o cálculo mental, tentando perceber de que forma está associado ao desenvolvimento do sentido do número e perceber qual a sua relação com a compreensão dos números e com a aprendizagem significativa das operações aritméticas. Numa terceira fase, contextualizo a importância da resolução de problemas no desenvolvimento da compreensão dos números e das operações, nomeadamente da divisão, através dos seus diferentes sentidos. Decorrente da contextualização anterior, apresento as diferentes estratégias utilizadas pelos alunos nas suas resoluções, tendo como base a análise de investigações empíricas realizadas a nível nacional e internacional. Em seguida, considerando os pressupostos de base e as opções enunciadas, proponho um possível caminho para a compreensão da divisão. Por último, enquadro curricularmente os referenciais teóricos deste estudo, tendo em conta as diretrizes nacionais e internacionais.

Sentido do número

Na perspetiva deste trabalho de investigação é importante referir que o desenvolvimento do sentido do número está diretamente relacionado com a compreensão dos números e a aprendizagem significativa das operações. Daí a necessidade de clarificar o que é o sentido do número, como surgiu, como é percebido no trabalho matemático com os alunos e quais as implicações traduzidas na compreensão dos números e nas suas relações, nomeadamente com as operações aritméticas.

O sentido do número é um termo que surge na literatura da educação matemática na segunda metade dos anos oitenta, geralmente associado aos conhecimentos matemáticos trabalhados. É uma expressão difícil de definir, mas analisada teoricamente percebe-se que é identificada em exemplos práticos de

atividade matemática, associada ao cálculo mental flexível, a estimativas de quantidades numéricas e a julgamentos quantitativos (Greeno, 1991).

O termo sentido do número surge da preocupação assumida ao longo da história, da necessidade da compreensão global e intuitiva sobre os números e as operações, em oposição a um ensino centrado no treino de regras e procedimentos algorítmicos, onde essa compreensão é pouco valorizada. Esta necessidade surge da comparação entre o que os alunos aprendem na escola, os métodos formais para a resolução das quatro operações e o que os adultos utilizam de facto na resolução de problemas, o cálculo mental e as estimativas. Esses factos levaram à necessidade de reflexão sobre o uso de diferentes estratégias de cálculo na resolução de problemas, tendo em conta os processos de resolução utilizados e os resultados obtidos (McIntosh, Reys & Reys, 1992).

De acordo com alguns autores (Menon, 2003; Eil, 2001) o sentido do número é construído em cada aluno de forma diferente, tendo em conta as experiências matemáticas em que são envolvidos. A perceção de número é construída de acordo com as relações numéricas estabelecidas e com o desenvolvimento dos conceitos matemáticos. Neste sentido, também Brocardo et al. (2008) da experiência realizada no Projeto “Desenvolvendo o sentido do número: perspetivas e exigências curriculares” invocam que “quanto mais ricas e diversificadas forem as experiências das crianças no universo numérico, maior e mais consistente será o seu desenvolvimento do sentido de número” (p.132).

Na análise realizada por Serrazina (2012) à investigação em Portugal, baseada em projetos institucionais, dissertações de mestrado e teses de doutoramento, incidindo sobre tópicos relativos ao tema Números e Operações, numa perspetiva de sentido de número, com alunos do 1º ciclo do Ensino Básico, foi evidente que ao nível da sala de aula, estes trabalhos fizeram com que os alunos progredissem no seu conhecimento e desenvolvimento do seu sentido do número, constituindo as tarefas realizadas um benefício em termos curriculares.

Apoiando os resultados anteriores, também o estudo realizado por Markovitz e Sowder (1994) a uma turma da sétima série, com base em unidades experimentais, numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número, onde os alunos tiveram a oportunidade de explorar os números, estabelecer relações numéricas e descobrir regras para inventarem algoritmos, foi evidente em entrevistas realizadas antes desta

instrução, após a mesma e alguns meses mais tarde, que os alunos passaram a estar mais predispostos a utilizarem estratégias que refletiam o sentido de número.

No relatório técnico da universidade de Auckland, apresentado por Ell (2001) sobre as estratégias e o pensamento dos alunos, com idades compreendidas entre os 9 e os 11 anos de idade, é feita uma revisão do conhecimento teórico sobre o conhecimento dos números, as estratégias utilizadas e a aprendizagem dos números. Esta sugere que existe uma progressão do pensamento dos alunos baseado em modelos físicos e de contagem, para pensamentos abstratos, que utilizam os números e os relacionam. Esta progressão é caracterizada por três pontos-chave, as estratégias de contagem, a evolução do pensamento aditivo para a utilização de estratégias de multiplicação e destas, para a utilização de um raciocínio proporcional. Por parte dos professores, a utilização das conclusões deste estudo revelou uma melhoria no ensino da matemática.

McIntosh et al. (1992) definem sentido do número como:

O Sentido do número é a compreensão geral de um indivíduo sobre números e operações, juntamente com a capacidade e predisposição para usar essa compreensão de modo flexível para fazer juízos matemáticos e para desenvolver estratégias úteis para lidar com os números e com as operações. Reflete uma capacidade e uma predisposição de usar os números e métodos quantitativos, como meio de comunicação, processamento e interpretação de informações. (p.3)

McIntosh et al. (1992) propõem um quadro para a análise das diferentes dimensões que constituem o sentido do número, identificando três grandes áreas:

- a) o conhecimento e a facilidade com os números;
- b) o conhecimento e a facilidade com as operações;
- c) a aplicação do conhecimento e a facilidade com os números e as operações nos contextos de cálculo.

Cada uma destas áreas é dividida em vários componentes que por sua vez, se subdividem em aspetos mais precisos. No sentido de aprofundar cada uma delas, apresento os elementos que as definem. A primeira área, o conhecimento e facilidade com os números, engloba: o sentido da ordenação dos números; as suas múltiplas representações; a grandeza relativa e absoluta dos números e o sistema de valores de

referência. A segunda área, o conhecimento e a facilidade com as operações, engloba a compreensão do efeito das operações; das suas propriedades e das relações entre as operações. A terceira área, a aplicação do conhecimento e a facilidade com os números e as operações nos contextos de cálculo, engloba: a compreensão para relacionar o contexto de um problema e os cálculos necessários; a consciencialização da existência de várias estratégias; a inclinação para usar uma representação e /ou método eficiente e a inclinação para rever os dados e a razoabilidade dos resultados.

A definição de sentido do número acima proposta por McIntosh et al. (1992) será assumida como orientação ao longo deste estudo. Assim, são apresentadas, em seguida, de modo mais detalhado, as três áreas que compõem as diferentes dimensões que constituem o sentido do número.

O sentido de ordenação dos números está relacionado com o sistema de numeração Indo-Árabe, nas suas características e na forma como consideram a construção dos números. A compreensão do sistema numérico possibilita aos alunos estruturarem mentalmente a comparação dos números, pela sua ordem de grandeza, valor de posição e diferentes representações. Ao trabalharem com os números na reta numérica, os alunos identificam padrões, oralmente e por escrito, que servirão de apoio à sequência de contagem.

A facilidade com que os alunos trabalham com os números implica que reconheçam as suas múltiplas representações, para isso, é fundamental que percebam que os números surgem em diferentes contextos e que podem ser expressos numa variedade de representações simbólicas e gráficas. Por exemplo, reconhecer que 8 é mesmo que $2 + 2 + 2 + 2$ ou que 4×2 .

A grandeza, relativa e absoluta dos números, diz respeito à capacidade de os alunos perceberem o tamanho dos números em termos absolutos, aplicados a diferentes contextos. Os autores dão como exemplo, proporcionar aos alunos a experiência de pensarem no tamanho do número 1000, associado a diferentes contextos, como por exemplo, quanto tempo demora a contar 1000? Ou será que já vivemos 1000 dias?

No entendimento acerca dos números é necessário que os alunos encontrem valores de referência (*benchmarks*), pois estes são muito importantes na avaliação de respostas ou para proceder a arredondamentos, de modo a facilitar os cálculos. Os referenciais numéricos são geralmente múltiplos de 2, 5 e 10, ou representações de metade de uma unidade, como $1/2$ ou 50% e de um quarto da unidade, como $1/4$ ou

25%. Estes números, utilizados como referência, podem surgir e evoluir a partir de experiências em sala de aula ou através de experiências pessoais do cotidiano dos alunos. No que se refere às experiências pessoais, os autores dão o seguinte exemplo: uma pessoa de 50 kg pode usar essa informação para estimar o peso de outra pessoa.

A compreensão do efeito das operações está associada à reflexão sobre as interações entre as operações e os números com os quais se opera. Os alunos devem ter a possibilidade de experimentarem uma variedade de contextos e modelos para cada uma das operações. Estas ações estimulam a reflexão e possibilitam o desenvolvimento do seu sentido do número.

As propriedades matemáticas são, muitas vezes, trabalhadas na escola como sendo regras formais a serem aplicadas, mas sem a sua correta compreensão por parte dos alunos. Se as propriedades matemáticas forem trabalhadas pelos alunos, com o objetivo de facilitar o cálculo em diferentes situações, a sua aplicação torna-se consciente e a sua compreensão aumenta. Os autores dão como exemplo, a aplicação da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e à subtração, em que para calcular 4×36 , se pode decompor 36 em $35+1$ e efetuar a soma de produtos parciais, como $(4 \times 35) + (4 \times 1)$, ou utilizar outras formas equivalentes, como $(4 \times 40) - (4 \times 4)$ ou $(30 \times 4) + (6 \times 4)$. Todas estas relações na aplicação da propriedade distributiva da multiplicação, em múltiplas situações, evidenciam a presença do sentido do número.

A compreensão das relações entre as operações permite aumentar as conexões entre as várias operações e a sua aplicação permite facilitar o cálculo, de acordo com o contexto apresentado no problema. Os autores referem o conhecimento da relação entre a adição repetida e a multiplicação, revelando as diferentes formas de pensar para o mesmo problema e o grau de eficiência na aplicação das mesmas. Consideram igualmente relevante o conhecimento das relações entre as operações inversas, nomeadamente entre a multiplicação e a divisão. Para um aluno que sinta mais dificuldades na operação da divisão, pode recorrer à multiplicação se souber estabelecer a relação entre os dois conceitos.

A compreensão para relacionar o contexto de um problema e os cálculos necessários pressupõe que os alunos percebam se têm de utilizar os valores exatos ou aproximados na estratégia de cálculo, tendo em conta a resposta à questão, se serve um valor exato ou aproximado. Os autores dão como exemplo se, num problema

é apresentado o custo de 2,07€ em maçãs, 1,71€ em bananas e 2,70€ em laranjas, ao perguntar-se quanto custa comprar todos, a resposta será sempre um valor exato. No entanto, na mesma situação, se a pergunta for, com uma nota de 10€, é possível comprar estas mesmas quantidades e tipos de fruta, basta usar valores aproximados e fazer uma estimativa do custo das frutas, comparando-a com o valor da nota.

Ter consciência da existência de várias estratégias para um mesmo problema, possibilita saber identificar aquela que parece ser mais produtiva na resolução da situação proposta. Possibilita, ainda, encontrar outra estratégia mais adequada, caso a primeira se revele inadequada na resolução do problema. Por último, a exploração de diferentes estratégias na resolução do mesmo problema, possibilita a comparação de métodos e a revisão dos resultados numa dada situação.

A inclinação para usar uma representação e/ou método eficiente, pressupõe que os alunos tenham consciência de que algumas estratégias de cálculo são mais eficientes do que outras, sendo um indicador que os alunos possuem sentido do número.

A inclinação para rever os dados e a razoabilidade dos resultados mostra que os alunos que revelam sentido do número examinam a resposta de acordo com a pergunta, tendo em conta o seu contexto e os números utilizados. Esta avaliação pode envolver uma reflexão acerca das estratégias que poderiam ter sido utilizadas.

Cálculo mental

Na perspetiva deste trabalho de investigação assume-se a importância que o cálculo mental tem no desenvolvimento do sentido do número, referido por diferentes autores (Buys, 2008; Sowder, 1988 em Hartnett, 2007). Daí a necessidade de clarificar o que se entende por cálculo mental, perceber se o cálculo mental é somente aquele que é realizado na “cabeça” ou se pode ter um registo escrito, assim como perceber se o cálculo mental é um cálculo mecanizado e ainda que implicação tem na compreensão dos números e das operações aritméticas.

Existem várias descrições referentes às operações aritméticas em épocas cronológicas distintas que caracterizam, de forma diferente, o que se entende por cálculo mental, tendo em conta a conceção de ensino e de aprendizagem. O cálculo

mental é caracterizado por Sowder (1988, em Hartnett, 2007) como um processo de efetuar cálculos aritméticos sem a ajuda de meios externos. McIntosh, Reys & Reys (1997) opõem o cálculo mental ao cálculo escrito, com a utilização de lápis e papel e ao uso da calculadora, referem-se a ele como um cálculo efetuado na cabeça. Buys (2008) associa à ideia de cálculo mental a expressão aritmética mental, caracterizada como o “cálculo flexível e habilidoso baseado no conhecimento sobre as relações numéricas e as características dos números” (p.121).

O cálculo mental é apresentado por Buys (2008), com as seguintes características:

- a) opera com números e não com dígitos;
- b) utiliza as propriedades das operações, relações numéricas e combinações entre elas;
- c) apoiado por um bom conhecimento dos números e os factos numéricos elementares com números até 20 e até 100;
- d) com a possibilidade de recorrer a registos intermédios em papel, mas principalmente, realizado mentalmente. É este o significado de cálculo mental que será assumido como orientação ao longo deste estudo.

De acordo com Buys (2008) o cálculo mental assume três formas básicas de cálculo: a) cálculo em linha; b) cálculo recorrendo à decomposição decimal; c) cálculo mental usando estratégias variadas. No cálculo em linha os números são vistos como se estivessem em cima da reta numérica e as operações são movimentos ao longo da reta. No cálculo que recorre à decomposição decimal, opera-se a partir das decomposições decimais dos números. Finalmente, no cálculo baseado em estratégias variadas, os números podem ser estruturados de diferentes formas e as operações podem ser efetuadas se for escolhida uma estrutura apropriada e se forem selecionadas as propriedades aritméticas adequadas.

Relativamente a entender se o cálculo mental é um cálculo mecanizado e à possibilidade de existirem registos escritos quando a ele se recorre, Noteboom, Boklove & Nelissen (2008) referem:

O cálculo mental é um cálculo pensado sobre representações mentais dos números. Envolve o uso de factos, de propriedades dos números ou das operações e das relações entre os números e as operações. Não é calcular na cabeça mas sim calcular com a cabeça e fazer alguns registos escritos, se

necessário. Nesse sentido, não deve ser visto como oposto ao cálculo escrito.
(p.90)

Noteboom et al. (2008) referem ainda que a aritmética mental inclui uma reflexão, que pode ocorrer antes, durante ou após o processo de resolução, em que os alunos pensam sobre como foram executadas as operações e onde se inclui uma forma flexível de pensamento.

McIntosh (1998) opondo-se ao ensino direto de qualquer operação aritmética, apresenta aos professores algumas sugestões para incentivar os alunos a utilizarem os próprios métodos de cálculo. Sugere assim, que deve ser dado tempo aos alunos para criarem o seu próprio algoritmo, que estes devem ser incentivados a explicarem como fizeram o cálculo mental e que deve partir dos próprios o interesse no salto para a prática dos algoritmos mentais.

Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) sublinham a importância que o cálculo mental tem no desenvolvimento do sentido do número, revelando que “a aquisição de destrezas de cálculo mental promove o desenvolvimento da compreensão numérica, uma vez que encoraja a procura de processos mais fáceis baseados nas propriedades dos números e das operações” (p.54).

Menon (2003), através da sua experiência com estudantes de vários países e de vários níveis de ensino, atribui especial destaque à utilização de atalhos¹, por parte dos alunos, na resolução de problemas. Refere que os atalhos são uma forma de motivação, principalmente dos alunos com mais dificuldades e indica, que se estes forem ensinados a utilizarem relações numéricas, aumentam o sentido do número, desenvolvem o cálculo mental, permitem a utilização de estimativas e a compreensão de conceitos.

Brocardo et al. (2008) reforçam a importância que o uso de estratégias de cálculo mental tem na progressão para um nível de cálculo formal e na aprendizagem significativa das operações.

Rocha, Rodrigues e Menino (2007) salientam a importância da utilização de estratégias de cálculo mental no estudo da divisão, por parte dos alunos. Os autores assumem que se devem proporcionar aos alunos tarefas que permitam estabelecer relações e em que se utilizem estratégias de cálculo mental. Assim, sugerem as

¹ Cálculos mentais rápidos.

seguintes situações na resolução de problemas: manter o divisor constante e alterar o dividendo para o dobro ou para o quádruplo, ou manter o dividendo constante e alterar o divisor para o dobro ou para o quádruplo. Sugerem ainda, manter constante o dividendo e duplicar-se sucessivamente o divisor. Com estas situações, os alunos descobrem relações formais e potencia-se a descoberta de novas relações, como mostra o exemplo seguinte: “perceber que quando temos de dividir por 4, basta dividir por 2 e depois por 2. Por exemplo, o cálculo de $460 \div 4$ é facilitado se fizermos: $460 \div 2 \div 2 = 230 \div 2 = 115$ ” (p.22). O uso desta estratégia permite que os alunos desenvolvam um cálculo flexível em diferentes contextos.

Rocha et al. (2007) referem que o uso da propriedade distributiva potencia o uso do cálculo mental como é referido no seguinte exemplo: “Se quiseres calcular $116 \div 4$, é muito simples se utilizarmos a decomposição do 116 e aplicarmos a propriedade distributiva fazendo $100 \div 4 + 16 \div 4$ ” (p.22).

Resolução de problemas envolvendo as operações de multiplicação e divisão

Neste trabalho de investigação o ambiente de aprendizagem em Matemática é centrado na resolução de problemas, dado o seu reconhecimento no desenvolvimento da atividade matemática e o papel de relevo que assume na aprendizagem matemática (Abrantes, 1988; Schoenfeld, 1996; NCTM, 2008; Ponte et al., 2007).

Considerar uma situação como um bom problema, é relativo, pois depende dos conhecimentos anteriores dos alunos e de razões de natureza educativa. Se um aluno dispuser de procedimentos que o levem à solução, a situação proposta pode não ser considerada um problema, mas sim um exercício (Abrantes, 1988).

Para Abrantes (1988) os problemas de palavras são frequentes no 1º ciclo e caracterizam-se pela vantagem de atribuírem um significado concreto às operações, mas alerta que a sua excessiva repetição pode transformá-los em exercícios.

Neste estudo, a resolução de problemas vai funcionar em grupo, pois as interações entre alunos são potencialmente mais ricas do que numa aula organizada de uma forma tradicional (Ponte & Santos, 1998).

Tal como é apontado por Schoenfeld (1996) a resolução de problemas pode ser o ponto de partida para discussões matemáticas onde a comunicação tem um papel fundamental. Durante a partilha de argumentos e raciocínios matemáticos em

sala de aula, os alunos devem dar explicações diferentes, eficazes, simples e aceitáveis, sendo estas consideradas por todos como justificações matematicamente corretas, definindo assim normas socio matemáticas (Yackel & Cobb,1996).

Neste estudo, irei centrar-me na operação divisão, uma vez que esta operação assume um papel importante no 4.º ano de escolaridade e na operação da multiplicação, pela estreita relação que com aquela mantém.

O início da aprendizagem da divisão deve ser feita tendo em conta os conhecimentos que os alunos possuem sobre a multiplicação, de forma informal e não somente a partir de subtrações sucessivas (Brocardo et al., 2008; Treffers & Buys, 2008; Fosnot & Dolk, 2001). Para que os alunos consigam reconhecer a necessidade de dividir em diferentes situações e muito para além de saberem utilizar o algoritmo tradicional, devem compreender as relações entre a multiplicação e a divisão, criando relações entre os números de modo a desenvolver um cálculo flexível (Mendes, 2013; Fosnot & Dolk, 2001;Treffers & Buys, 2008).

O modelo retangular é uma estrutura útil para mostrar as relações entre os contextos de divisão como medida e divisão como partilha, evidenciando a relação entre a multiplicação e a divisão (Brocardo et al., 2008).

McIntosh et al. (1992) referem que existe uma conexão valiosa na relação inversa entre operações, nomeadamente entre a multiplicação e a divisão. Entendem que o facto de um aluno utilizar a multiplicação como estratégia num problema de divisão, revela o seu à vontade na relação entre conceitos e não mostra a sua incapacidade em utilizar a divisão. “Por exemplo, quando é perguntado a um aluno o quociente de $480 \div 8$, este pode analisar que $8x?=480$, não o resolvendo como um problema de divisão” (p.7). Os autores referem que quando as relações entre as duas operações são descobertas e entendidas pelos alunos, as suas estratégias na resolução de problemas passam a ser mais diversificadas.

Sentidos da divisão

Brocardo et al. (2008) apresentam a classificação dos problemas de divisão, de acordo com o contexto, identificados por autores como Carpenter, Fenemma, Franke, Levi e Empson (1999) em situações de divisão como partilha e situações de divisão como medida. Apontam que os alunos tendem inicialmente a separar os dois tipos de

problemas, com base no próprio contexto e nas suas características, levando-os a resolverem-nos de formas muito distintas. Identificam ainda nos problemas de divisão um outro sentido, o de divisão como razão, que envolve problemas mais complexos.

Cada um dos diferentes significados que a operação de divisão pode assumir, e que irei seguir ao longo deste trabalho, à exceção da divisão como razão, encontram-se descritos e exemplificados no quadro 1.

Quadro 1 - Diferentes significados da operação da divisão (adaptado de Brocardo, Serrazina & Rocha, 2008)

Operação	Sentido	Exemplo
Divisão	Partilha - uma dada quantidade (neste caso, o número total de pessoas) é repartida igualmente por um dado número de recetores.	Queremos distribuir igualmente 24 pessoas por 6 mesas. Quantas pessoas ficam em cada mesa?
	Medida - é dado o número total de objetos a repartir e o número de objetos em cada grupo, sendo que se quer saber o número de grupos.	Queremos distribuir 24 pessoas, sendo que em cada mesa ficam 6 pessoas. Quantas mesas são necessárias?
	Razão - Não é um problema de partição ou agrupamento, porque envolve uma razão em vez do número de objetos.	O pai do João ganha 1000 € por mês e o pai do Francisco ganha 500 € também por mês. Compara os dois vencimentos.
	Operação inversa da multiplicação - A relação entre a multiplicação e a divisão pode ser explicada de forma simples: $24 \div 6 = 4$ porque $4 \times 6 = 24$	Qual o número que multiplicado por 6 é igual a 24?

A divisão não exata caracteriza-se pela existência de um resto, que vem acrescer o grau de dificuldade ao estudo da divisão. Neste caso, os alunos necessitam de interpretar não só o quociente, mas também o resto, para poderem dar uma resposta correta ao problema apresentado. A capacidade de avaliar a importância do

resto, de forma a responder corretamente ao problema colocado, implica a presença constante do sentido do número e o domínio da multiplicação (Brocardo et al., 2008).

A apresentação da divisão deve ser feita aos alunos através do uso de contextos que envolvam os diferentes sentidos da operação, estabelecendo o desenvolvimento de diferentes estratégias de cálculo, de forma a ajudar os alunos na progressão para o cálculo formal (Brocardo et al., 2008; Gravemeijer, 2005; Fosnot & Dolk, 2001; Treffers & Buys, 2008).

Treffers e Buys (2008) defendem que na fase inicial de formação do conceito da divisão é essencial a apresentação de um contexto, nomeadamente na divisão não exata, pela sua especificidade e importância na resolução do problema.

Normalmente, os professores iniciam o estudo da divisão através do sentido de partilha, pela sua relação com situações reais e próximas aos alunos. Na resolução deste tipo de problemas os alunos recorrem, normalmente, à distribuição um a um, o que se revela ineficaz para números grandes (Brocardo et al., 2008). Apresentam-se assim, dificuldades na resolução de situações de partilha, relacionadas com a utilização de procedimentos informais, acrescido da necessidade de os alunos compreenderem a relação parte-todo, tendo que considerar em simultâneo, o número de grupos, o número em cada grupo e o todo (Fosnot & Dolk, 2001).

O sentido dos problemas de divisão como medida favorece de forma mais natural, o recurso à utilização da adição, subtração e da multiplicação (Brocardo et al., 2008). Afirmam ainda que a aprendizagem das operações, nomeadamente da divisão, só tem utilidade no desenvolvimento do poder matemático dos alunos, se tiver em conta a lógica de desenvolvimento do número e das operações, o que implica a não concordância com a aprendizagem rotineira dos algoritmos tradicionais quando desprovidos de sentido. Também Clarke (2004) defende que nos cinco primeiros anos de escolaridade não há lugar para o ensino dos algoritmos convencionais de cálculo formal.

Estratégias de resolução de problemas de multiplicação e divisão

Apresento nesta secção as diferentes estratégias utilizadas pelos alunos nas suas resoluções, tendo como base a análise de investigações empíricas realizadas a

nível nacional e internacional. De modo a facilitar a leitura, as estratégias estão organizadas por estratégias comuns às quatro operações aritméticas, estratégias de multiplicação, estratégias de multiplicação e divisão e estratégias de divisão.

Estratégias comuns às quatro operações aritméticas

Hartnett (2007) realiza, um estudo com 27 alunos do 3º ano, em Queensland, durante um ano, em que reconhecendo a importância do cálculo mental na aprendizagem da matemática, reuniu um quadro com a categorização das principais estratégias de cálculo utilizadas pelos alunos. Desta forma, pretende apoiar os professores a reconhecerem e a identificarem as estratégias de cálculo que são utilizadas pelos alunos nas categorias criadas, assim como ajudar os alunos a descreverem melhor os seus raciocínios, uma vez que foi utilizada uma linguagem simples e acessível.

A autora identifica cinco categorias de estratégias de cálculo mental e vinte e uma subcategorias, que podem ser aplicadas no 1º e 2º ciclos do Ensino Básico. As categorias encontradas são comuns às quatro operações aritméticas com os diferentes tipos de números que poderão encontrar: números naturais, números racionais na representação decimal e números racionais na forma de fração. As cinco categorias que identificou são as seguintes: contar para a frente e para trás, ajustar e compensar, usar dobros e metades, usar partições dos números e usar valor de posição.

Foxman e Beishuizen (2002) realizam um estudo relativamente à análise de estratégias de cálculo mental utilizadas por 247 alunos com 11 anos, em Inglaterra, País de Gales e Irlanda do Norte, que abrangem as quatro operações aritméticas, em que identificam duas grandes categorias: estratégias de número completo e estratégias de decomposição. Ambas encontradas em cálculos com números em contexto e sem contexto. Os alunos foram divididos em três grupos, de acordo com as pontuações obtidas numa prova escrita. Concluíram que os alunos que obtiveram melhores resultados optaram por utilizar estratégias sequenciais em que um dos números ficou completo, enquanto os alunos com resultados inferiores preferiram utilizar estratégias de decomposição dos números. Os alunos do grupo médio utilizaram com mais frequência o algoritmo.

Estratégias de multiplicação

Treffers e Buys (2008) descrevem que a aprendizagem da multiplicação é feita através de diferentes níveis de desenvolvimento do cálculo: por contagem, por estruturação e formal. Na resolução de problemas de multiplicação, os alunos utilizam diferentes estratégias, como por exemplo: adição repetida, contagem por saltos, o uso de dobros, de dobros e de metades, agrupamentos tendo em conta os números envolvidos, o recurso a produtos conhecidos, a relações numéricas, a propriedades aritméticas, nomeadamente as propriedades da multiplicação.

Mendes, Brocardo e Oliveira (2013) apresentam parte de uma investigação, realizada com alunos do 3º ano do 1º Ciclo do Ensino Básico, tendo como propósito a compreensão do modo como os alunos aprofundam a aprendizagem da multiplicação numa perspetiva de desenvolvimento do sentido do número, no âmbito de uma trajetória de aprendizagem. A análise das produções dos alunos e os episódios relativos às discussões coletivas revelam uma evolução significativa dos procedimentos usados pelos alunos, tendo em conta as características das tarefas propostas, como os números e o contexto, bem como pelo ambiente de sala de aula. Esta evolução não se processou da mesma forma para todos os alunos, existindo aspetos críticos nos procedimentos relacionados com os números envolvidos nos cálculos, nomeadamente com números racionais não negativos na representação decimal e no uso de alguns procedimentos, como compensar e ajustar e o uso de relações de dobro e de metade. O estudo identifica dois grandes grupos de procedimentos de cálculo associados à multiplicação, no primeiro incluem-se procedimentos em que os cálculos consideram os números como um todo e em que são tidas em conta as relações numéricas, no segundo grupo incluem-se cálculos em que se realizam decomposições, decimais ou não, de um ou dois fatores envolvidos.

Foxman e Beishuizen (2002) no estudo já referido anteriormente, identificam ainda uma outra categoria, que é utilizada em cálculos multiplicativos, associada às estratégias de número completo e de partição, que está associada à substituição de um número por outro, de modo a simplificar um cálculo e que compensam de seguida, a que designaram por arredondar, multiplicar e compensar. De forma a ilustrar a situação atrás descrita, os autores dão como exemplo, a pergunta seis do estudo: Quanto terás de pagar por 4 fitas, se cada uma custa 1,99 €? Os alunos arredondam

1,99 € para 2 € e de seguida multiplicam por 4, ($4 \times 2 = 8$) e depois compensam retirando 4 cêntimos, ($8 - 0,04 = 7,96$), obtendo desta forma o custo exato das 4 fitas.

Baek (1998, 2006, em Mendes et al., 2013) identificam as seguintes categorias de estratégias na resolução de problemas de multiplicação: modelação direta, número completo em que são utilizadas a adição repetida e o uso de dobros e por último, compensação e partição de números.

Ambrose, Baek e Carpenter (2003) realizam um estudo com alunos dos 8 aos 11 anos de idade, no sentido de analisar as estratégias que os alunos utilizam em problemas de multiplicação, identificam as seguintes categorias de estratégias: modelação direta, utilização de adições e de dobros e algoritmos inventados usando o número dez. Nestas categorias, incluem-se estratégias mais específicas, por exemplo, na categoria de estratégias de adição e do uso de dobros inclui: adição de dobros, uso complexo de dobros e estratégias de construção a partir de outros fatores. Enquanto, a categoria de algoritmos inventados usando o número dez contém: partição do multiplicador em dezenas e unidades e partição de ambos, do multiplicador e do multiplicando em dezenas e unidades.

Mendes, Brocardo e Oliveira (2012) realizam a análise dos procedimentos utilizadas pelos alunos do 3º ano em problemas de multiplicação, no âmbito do estudo realizado pela primeira autora e já referido anteriormente, tendo identificado quatro categorias: procedimentos de contagem, procedimentos aditivos, procedimentos subtrativos e procedimentos multiplicativos. Para cada uma destas categorias foram identificados procedimentos específicos utilizados pelos alunos, tendo em conta os contextos e os números utilizados. Na análise realizada, as autoras incidem sobre três aspetos. O primeiro está relacionado com facto de os alunos utilizarem diferentes procedimentos para o mesmo cálculo, o segundo com a frequência de utilização de certos procedimentos, o terceiro refere-se à preferência, de alguns alunos, por determinados procedimentos. As autoras verificam que os alunos, numa fase inicial, utilizaram mais do que um procedimento, iniciando com um processo multiplicativo e comprovando com processos aditivos, o que interpretam pela falta de segurança dos alunos em procedimentos multiplicativos. Ao longo da experiência de ensino, a apresentação de diferentes procedimentos foi diminuindo, pois os alunos optam por resolver o problema da forma mais adequada. No que diz respeito à utilização de procedimentos, verificam que foram utilizados com maior frequência, procedimentos aditivos, procedimentos multiplicativos com fatores de referência e com a partição de

números. O porquê da utilização destes procedimentos foi relacionada com a confiança que neles depositavam. Também a preferência de alguns alunos por determinados procedimentos, mesmo quando contactaram com outros procedimentos mais rápidos e poderosos, é devida à confiança que depositam na sua utilização.

Estratégias de multiplicação e divisão

No estudo de Joanne Mulligan e Michael Mitchelmore (1997), que teve como objetivo perceber quais os modelos intuitivos² utilizados na resolução de problemas de multiplicação e divisão, com números inteiros, foram analisadas as estratégias de cálculo utilizadas por alunos do 2º e 3º ano de escolaridade em 24 problemas de palavras. Foram identificados três modelos intuitivos: contagem direta, adição repetida e operação multiplicativa. Tendo sido utilizado na divisão, também o modelo da subtração repetida. Estes três modelos intuitivos foram identificados tendo por base a identificação de 12 estratégias de cálculo diferentes que foram utilizadas (quadro 2). Mulligan e Mitchelmore (1997) concluem que os modelos intuitivos utilizados não correspondem necessariamente à estrutura semântica dos problemas apresentados, uma vez que aqueles foram empregues em todos os problemas apresentados. A escolha do modelo intuitivo deve-se à grandeza dos números utilizados, aos múltiplos envolvidos ou à presença das pistas verbais que foram fornecidas. Os autores referem que a existência de grupos de igual tamanho, permitem a utilização de diferentes modelos intuitivos: contagem direta, subtração/adição repetida e operações multiplicativas para a resolução de problemas de multiplicação e divisão. Os autores concluem que a utilização de um modelo intuitivo depende da experiência anterior do aluno, da aprendizagem formal que tiveram sobre o assunto e do conhecimento que os mesmos têm dos números. Os autores do estudo salientam a importância da utilização dos diferentes modelos intuitivos e na necessidade de estes serem utilizados consoante a situação proposta, ao invés de os alunos partirem de um modelo para outro. Referem ainda, que as crianças deveriam ter a oportunidade de relacionar a multiplicação e a divisão ao mesmo tempo, colocando em causa, a separação que é feita entre as duas operações. Apontam também, para o desenvolvimento de

² Estrutura mental/ interna correspondente a uma classe de estratégias de cálculo.

atividades destinadas a desenvolver o sentido multiplicativo do número, a partir do 1º ano de escolaridade, como forma de melhorar a eficiência do cálculo.

Quadro 2 - Modelos intuitivos para a multiplicação e divisão (adaptado de Mulligan & Mitchelmore, 1997)

Modelos intuitivos	Estratégias de cálculo
	Multiplicação
Contagem direta	Contagem unitária
Adição repetida	Contagem rítmica para a frente Contagem por saltos para a frente Adição repetida Adicionando o dobro ³
Operação multiplicativa	Conhecimento de factos multiplicativos Factos multiplicativos derivados
	Divisão
Contagem direta	Correspondência um para muitos Contagem unitária Partilha Agrupando por tentativa e erro
Subtração repetida	Contagem rítmica para trás Contagem por saltos para trás Subtração repetida Adicionar metades ⁴
Adição repetida	Contagem rítmica para a frente Contagem para a frente Adição repetida Adicionando dobros
Operação multiplicativa	Conhecimento de factos multiplicativos Factos multiplicativos derivados

³ Por exemplo: 3 e 3 são 6, 6 e 6 são 12.

⁴ Por exemplo: Cortar 8 em duas metades, faz 4 e 4.

O estudo de Joanne Mulligan e Michael Mitchelmore, tem como base os resultados de outro estudo, sobre as operações de multiplicação e divisão, (Kouba, 1989) que indica que os alunos têm condições para resolverem problemas multiplicativos, antes de qualquer instrução formal sobre o tema e ainda que os alunos conseguem utilizar uma variedade de estratégias de cálculo para resolverem problemas de multiplicação e de divisão. Com base no estudo referido, Mulligan e Mitchelmore (1997), encontram cinco categorias de estratégias de cálculo utilizadas pelos alunos na resolução de problemas de multiplicação e divisão, envolvendo números inteiros, apresentadas no quadro 3.

Quadro 3 - Estratégias de cálculo para a resolução de problemas de multiplicação e divisão (adaptado de Mulligan & Mitchelmore, 1997)

Estratégia	Definição
Contagem direta	São utilizados materiais físicos para modelar o problema e os objetos são contados sem qualquer referência à estrutura multiplicativa.
Contagem rítmica	É feita uma contagem seguindo a estrutura do problema (1,2,3,4,5,6,... ou 6,5,4,3,2,1). Simultaneamente é feita uma segunda contagem do número de grupos.
Contagem por saltos	A contagem é realizada por múltiplos (2,4,6... ou 6,4,2), fazendo mais facilmente a contagem do número de grupos.
Cálculo aditivo	A contagem é substituída por cálculos, como $2+2=4$; $4+2=6$ ou $6-2=4$; $4-2=2$
Cálculo multiplicativo	O cálculo parte de factos conhecidos (Ex: 3×2 é 6) ou derivações do facto conhecido (Ex: $3 \times 2 = 2 \times 2 + 2$)

Estas cinco categorias de estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de problemas de multiplicação e divisão, têm em conta as duas classificações atribuídas por Kouba (1989), que refere que as estratégias apropriadas dependem de dois fatores: o grau de abstração e a utilização de objetos físicos.

Para encontrar as classificações referidas anteriormente, Kouba (1989) realizou um estudo com 128 alunos dos anos 1, 2 e 3 de uma escola do centro oeste de Nova York, em que foram analisadas as estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de

problemas de palavras de multiplicação e divisão. Para isso, realizou entrevistas a cada um dos alunos, onde incluiu dois problemas de multiplicação e quatro problemas de divisão, através dos sentidos de divisão por medida e por partilha, tendo neles sido utilizados diferentes estruturas semânticas. O autor apresenta os dados relativos à análise de 56 estratégias utilizadas pelos alunos, tendo em conta o grau de abstração e a utilização de objetos físicos.

As estratégias utilizadas pelos alunos foram classificadas por grau de abstração em cinco categorias: a) representação direta; b) dupla contagem; c) contagem de transição; d) aditiva e subtrativa; e) recordar números conhecidos. Dentro de cada categoria as estratégias podem ser classificadas de acordo com o uso ou não de objetos físicos. A categoria de representação direta caracteriza-se pela utilização de uma estratégia de representação direta, onde normalmente são utilizados materiais físicos para modelar o problema, recorrendo a contagens um a um no cálculo da resposta, de uma forma sequencial. A dupla contagem recorre a um processamento mais abstrato que envolve a integração de duas sequências de contagem. Estando presente apenas em problemas de divisão, nos de medida foram formados grupos até se atingir o dividendo, enquanto nos de partilha a contagem dupla foi feita ao lidar com os objetos, um a um ou por tentativa e erro. Na categoria de contagem de transição os alunos utilizaram uma sequência de contagem com base em múltiplos de um, dos fatores do problema. Na categoria aditiva e subtrativa os alunos identificaram e utilizaram adições ou subtrações repetidas para calcular uma resposta intermédia. Na categoria recordar números conhecidos, os alunos recorreram a factos conhecidos para encontrar a resposta. Em todas as categorias foram utilizados materiais físicos à exceção da última que foi referida.

Verschaffel, Greer e Torbeyns (2006), na sua análise de estudos no domínio da multiplicação e divisão de vários dígitos, identificam a utilização de diversas estratégias de cálculo mental utilizadas pelos alunos: modelação direta, número completo, partição de números e estratégias de compensação. Verificam ainda que após a introdução dos algoritmos na sala de aula, os alunos tendem a utilizar o algoritmo padrão e a utilizar menos as estratégias de cálculo mental, mesmo que estas sejam mais facilitadoras na resolução dos problemas.

Gonçalves (2003) investiga como é que alunos do 3º ano do 1º ciclo, lidam com problemas de multiplicação e divisão, identificando as estratégias e os recursos utilizados na sua resolução de acordo com o tipo de problema apresentado. Os

resultados mostram que os alunos utilizam estratégias baseadas em procedimentos algorítmicos, consoante o tipo de problema apresentado, existindo alguns totalmente desconhecidos, como os de combinatória, disposição retangular, divisão com resto e divisão como razão. O estudo revela ainda que os alunos tendem a utilizar os seus próprios métodos na resolução de problemas, antes de lhes ser ensinado procedimentos a seguir. Aponta assim, para a dificuldade de compreensão das operações de multiplicação e de divisão, dada a utilização recorrente a estratégias baseadas em regras e procedimentos pré-estabelecidos.

Heirdsfield, Cooper, Mulligan e Irons (1999) realizam um estudo longitudinal com 95 alunos do 4º ao 6º ano em Queensland, em que analisam as estratégias utilizadas na resolução de problemas de palavras de multiplicação e divisão, com números até três dígitos. Para isso realizam entrevistas clínicas aos alunos, onde se incluem seis problemas: três problemas de multiplicação, dois de divisão por partilha e um de divisão por medida, tendo sido neles utilizados contextos familiares aos alunos. Foram identificadas cinco categorias: estratégias de contagem, uso de factos básicos, decompor os números segundo o valor de posição e calcular da direita para a esquerda e desta para a direita e estratégias holísticas. Concluem que houve evolução na utilização de estratégias mais sofisticadas, holísticas, embora não tenha correspondido àquilo que era esperado, pois continuam a existir alunos do 6º ano que recorrem a estratégias de contagem. No que se refere aos resultados do problema de divisão com dois dígitos, os autores identificam que os alunos mais fracos utilizam a estratégia de partilha, embora sem sucesso, devido à memorização exigida. Recorrem à estratégia de tentativa e erro nas estratégias de contagem e no uso de factos básicos, pela eficácia e confiança que nela depositam.

Os autores defendem que deve ser dado mais ênfase ao trabalho associado às propriedades aritméticas e estratégias de cálculo flexíveis e não ao trabalho com os algoritmos escritos, pois assim, desenvolvem-se abordagens mais facilitadoras da aprendizagem das operações da multiplicação e da divisão.

Estratégias de divisão

Bryant, Correa e Nunes (1998) investigam a compreensão inicial de alunos ingleses (moradores de um bairro de classe socio económica baixa de Oxford), dos 5

aos 7 anos de idade, sobre o conceito de divisão, que nunca tinham recebido qualquer ensino formal sobre a multiplicação e divisão. Este estudo envolve duas experiências independentes que tinham como objetivo perceber se crianças pequenas são capazes de compreender as relações inversas entre o divisor e o quociente, em problemas de divisão por partilha e por medida que não envolvem cálculos. Participam na investigação 120 crianças distribuídas em dois grupos e os problemas foram resolvidos oralmente. Os resultados demonstram que as crianças mais novas, principalmente as de 5 anos, são capazes de fazer estimativas, mas, ao realizar essa atividade, cometem dois tipos de erros: focalizam a atenção no tamanho do dividendo, esquecendo o divisor; ou focalizam a atenção no divisor, esquecendo o tamanho do dividendo. Por volta dos 6 anos, esses erros tendem a diminuir e a criança passa a demonstrar uma compreensão qualitativamente superior no sentido da compreensão das relações entre os termos envolvidos na operação de divisão.

O estudo de Cornelis van Putten, Petra Brom-Snijders e Meindert Beishuizen (2005), apresenta uma análise aprofundada da forma como os alunos holandeses desenvolvem estratégias de divisão que são, inicialmente informais e evoluem até se tornarem esquemáticas ou formais. Os principais objetivos do estudo foram: a) enumerar a diversidade de estratégias de divisão utilizada por alunos do 4º ano que estudavam em escolas onde era ensinada a EMR⁵; b) medir a evolução das estratégias empregues pelos alunos ao longo do ano letivo; c) comparar o grau dessa evolução entre alunos considerados mais fracos e outros considerados melhores e por último d) verificar o possível efeito na aprendizagem dos alunos sujeitos a um maior foco na estruturação da divisão, comparando a utilização de dois livros distintos para o ensino da matemática.

Este estudo tem por base a investigação de Mulligan e Mitchelmore (1997) e o conceito de esquematização progressiva, a que se refere Treffers (1987, em Mulligan, 1997) cuja abordagem didática se baseia em esquemas com a utilização da subtração repetida para resolver problemas de divisão e a utilização de contextos concretos para que os alunos mobilizem conhecimentos prévios e estratégias informais. O estudo realiza-se em 10 escolas em Leiden, localizadas em bairros de classe socioeconómica média, onde em 5 delas utilizam um dos manuais e nas outras 5, o outro manual, sendo um total de 259 alunos, com uma média de 10 anos de idade. O teste de

⁵ Educação Matemática Realista

rapidez matemática é aplicado 100 alunos, dos quais 50 alunos, fortes ao nível do raciocínio matemático e os outros, 50 alunos, fracos ao nível do raciocínio matemático. Existe uma representação equitativa de ambos os manuais.

No quadro 4, são apresentadas as diferentes categorias de estratégias utilizadas pelos alunos em problemas de divisão, complementadas com exemplos.

Quadro 4 - Categorias de estratégias identificadas para a divisão com números inteiros (adaptado de van Putten, Snijders & Beishuizen, 2005)

Categorias de estratégias		Exemplos	
Problema: 432 crianças vão ser transportadas em autocarros de 15 lugares. Quantos autocarros serão necessários?			
1- Sem agrupamentos	Subtraindo	$15 / 432$	
	Subtraindo	$\begin{array}{r} -15 \\ 417 \end{array}$	1
	Acrescentando	$\begin{array}{r} -15 \\ 402 \end{array}$	1
	Contagem	$\begin{array}{r} -15 \\ 387 \end{array}$	1
	Partilhando	$\begin{array}{r} -15 \\ etc. \end{array}$	1
2- Particionamento	Vários dígitos	$400 : 15 = 26$	
	Vários dígitos	$30 : 15 = 2$	
	Um dígito	$2 : 15 = 1$	
3- Agrupamentos simples	Dobros	$15 + 15 = 30$	
	Simple	$30 + 30 = 60$	
	Progressivamente simples	$60 + 60 = 120$	
	Dobros e metades	$120 + 120 = 240$	
		$240 + 240 = 480$	
4- Agrupamento simples esquematizado	Simple com esquema	$\begin{array}{r} 432 \\ \underline{60} \\ 372 \end{array}$	$4 \times$
	Simple progressivo com esquema	$\begin{array}{r} \underline{60} \\ 312 \end{array}$	$4 \times$
	Simple com esquema e lista	$\begin{array}{r} \underline{60} \\ etc. \end{array}$	$4 \times$

Quadro 4 (continuação)

5- Agrupamentos complexos Complexo Complexo com lista	Complexo $10 \times 15 = 150$ $150 + 150 = 300$ $30 + 30 + 30 + 30 + 15$
6- Agrupamentos complexos esquematizados Complexo com esquema Complexo com esquema e lista Complexo e simples com esquema e lista	Complexo com esquema $\begin{array}{r} 432 \\ \underline{300} \\ 132 \\ \underline{120} \\ 12 \end{array} \quad \begin{array}{l} 20 \times \\ \\ 8 \times \\ 28 \times \end{array}$
7- Algoritmo tradicional	$15 \overline{)432} \ 28 \text{ r.}12$ $\begin{array}{r} 30 \\ \underline{132} \\ \underline{120} \\ 12 \end{array}$
8- Cálculo mental	
9- Procedimento errado	$400 : 15 = 4 : 1500 = 4100$ $30 : 15 = 3 : 2 = 2$
10- Incerto	
99- Em falta	

van Putten et al., (2005), obtiveram os seguintes resultados para cada um dos objetivos enunciados anteriormente: acerca do objetivo a), as dez categorias de estratégias identificadas foram suficientes; no que diz respeito ao objetivo b), os resultados revelam que os alunos mostraram maior tendência para a utilização de estratégias de agrupamentos complexos e uma maior tendência a utilizarem sempre a mesma estratégia para todas as divisões; os resultados mostram que quanto ao objetivo c) do estudo, os alunos com maiores dificuldades evoluem mais na segunda ficha do que os alunos considerados melhores; quanto ao objetivo d), verifica-se que todos os alunos aumentam o número de respostas corretas, destacando-se os alunos do segundo manual, que apesar de obterem resultados mais fracos na primeira ficha são os que apresentam uma trajetória de crescimento mais elevada, tendo ultrapassado os alunos do primeiro manual que haviam tido resultados mais positivos na primeira ficha. Os alunos partem de diferentes níveis e aprendem com o apoio de diferentes manuais, progredem mais na relação numérica, com a utilização do 1º

manual e progredem mais na esquematização com a utilização do 2º manual. Este estudo mostra ainda que os alunos que são encorajados a utilizar as suas próprias estratégias começam por utilizar categorias de estratégias mais informais, mas alcançam níveis de desempenho mais avançados.

Mendes et al. (2013) identificam duas grandes categorias de estratégias dos procedimentos na resolução de problemas de divisão: número completo e baseadas na decomposição. Na primeira, as estratégias têm em conta as características dos números, que são trabalhados como um todo. A segunda engloba procedimentos baseados em decomposições do dividendo.

Ambrose et al. (2003), no estudo já referido anteriormente, analisam também as estratégias que os alunos utilizam na resolução de problemas de divisão de partilha e de medida, em que identificam as seguintes categorias de estratégias: trabalhar com um grupo de cada vez; não decompor o dividendo, decompor o dividendo e estratégias de construção.

No que se refere a trabalhar com um grupo de cada vez, verificam que podem existir três situações diferentes: utilização de subtrações sucessivas do divisor ao dividendo, adição do divisor até obter o dividendo ou um valor próximo, (em que o divisor é sempre um número menor e o dividendo um número maior) e procedimento distributivo. As duas primeiras verificam-se principalmente em problemas de medida, enquanto a última em problemas de partilha. Na categoria de não decompor o dividendo utilizam-se procedimentos mais abstratos, em que se recorre à subtração de múltiplos de dez do divisor a partir do dividendo, recorrendo à estrutura decimal. Na categoria de decompor o dividendo recorre-se à decomposição do dividendo pelas suas ordens, para se dividirem pelo divisor e de seguida, adicionam-se os restos, até ser possível fazê-lo. Na última categoria, estratégia de construção, recorre-se a múltiplos do divisor, para encontrar um valor próximo do dividendo e, por fim, adiciona-se o que falta à soma dos múltiplos do divisor utilizados. As três últimas categorias de estratégias são utilizadas em problemas de partilha e de medida.

Ferreira (2005) realiza ao longo de quatro anos um trabalho com alunos do 1º ao 4º ano de escolaridade, para perceber o modo como os alunos desenvolvem o conceito de divisão e aumentar o seu conhecimento sobre a construção e aprendizagem desse conceito. A investigadora sugere que os alunos devem resolver desde cedo tanto problemas de divisão como medida, como de divisão como partilha, dado que os alunos não revelaram dificuldades na resolução dos dois tipos de

problemas e mostram relativa facilidade na resolução de problemas de divisão como medida. Salienta ainda que mesmo na resolução dos problemas de divisão como partilha, os alunos tentam encontrar uma medida, embora muitas vezes por tentativa e erro, mas que a mesma se revelava facilitadora na resolução dos dois tipos de problemas. A utilização de estratégias pessoais, por parte dos alunos, na resolução dos problemas, antes e depois da introdução do algoritmo, foi uma opção assumida e valorizada na construção do conceito de divisão.

Jesus (2005) realiza uma experiência de ensino com alunos do 3º ano de escolaridade do 1º ciclo do Ensino Básico e apresenta a aprendizagem que um aluno concretiza acerca do desenvolvimento do sentido da divisão. Recorre à utilização das estratégias pessoais do aluno, das suas intuições e experiências anteriores, para posteriormente introduzir o algoritmo. Conclui que a confiança sentida pelo aluno, o desenvolvimento progressivo do sentido do número, das operações de adição, subtração e multiplicação, bem como o cálculo mental são determinantes para a sua apropriação do conceito da divisão. É de referir ainda que o aluno resolve diversos problemas de divisão mesmo antes de a ter aprendido formalmente. Após a introdução do algoritmo, o aluno continuou a preferir estratégias alternativas, tendo em conta as suas experiências e intuições anteriores.

Anghileri (2001) realiza um estudo com alunos do 5º ano, com 9 e 10 anos de idade, em 10 escolas Inglesas, onde analisa as estratégias utilizadas em dois testes, constituídos por dez problemas de divisão, dos quais, cinco são de palavras, com sentido de partilha e de medida e com contexto e outros cinco são simbólicos e sem contexto, aplicados em janeiro e junho do mesmo ano letivo. Nestes dois momentos, os números utilizados nos problemas foram os mesmos, mas houve uma troca entre os problemas de contexto e sem contexto, mantendo-se a apresentação dos problemas com contexto em primeiro lugar. Os números selecionados para os problemas convidam à utilização de estratégias de cálculo mental e ao uso de factos conhecidos. O estudo tem como objetivo identificar as mudanças na abordagem da divisão, com a introdução do algoritmo padrão.

A autora identifica, inicialmente, quinze categorias diferentes de estratégias: usar marcas de registo, adição repetida do divisor, subtração repetida do divisor ao dividendo, partilha, operar com dígitos de forma independente, decomposição do dividendo pelas suas ordens, adição de pequenos subtotais, usar o dobro do divisor, usar a metade do divisor ou dividendo, usar múltiplos, o algoritmo padrão, cálculo

mental, erro, estratégia confusa e nenhuma tentativa. Mais tarde, resume-as em oito categorias de estratégias: a primeira é caracterizada pela utilização de cálculos longos, sem nenhuma tentativa de serem mais eficientes; a segunda é caracterizada pela utilização de decomposição dos números, tendo em conta o seu valor de posição; a terceira é caracterizada pela utilização de múltiplos do divisor, com a tentativa de ganhar eficiência, apesar de ainda serem utilizados cálculos longos; a quarta é caracterizada pela utilização de múltiplos e curtos procedimentos; a quinta é caracterizada pela utilização do algoritmo padrão; a sexta categoria é caracterizada pela utilização de cálculo mental, a sexta, define uma operação errada; a sétima, uma estratégia confusa e a oitava e última, em que não existe nenhuma tentativa de resolução do problema.

Os resultados do estudo realizado por Anghileri (2001) apontam para a continuidade da utilização de estratégias informais por parte dos alunos, mesmo depois da introdução do algoritmo padrão da divisão. Conclui que a utilização das mesmas proporciona o desenvolvimento de estratégias mais sofisticadas, holísticas, ao contrário da utilização do algoritmo, que leva a procedimentos mais mecânicos e incorretos. Refere ainda, que as estratégias informais que os alunos utilizam na resolução de problemas de divisão podem ser influenciadas pelo tipo e grandeza dos números e pela presença de contexto. Verifica que a presença de contexto nos problemas leva a um melhor desempenho por parte dos alunos.

Um caminho possível para a compreensão da divisão

Gravemeijer (2005) ajuda-nos a perceber o que torna a matemática tão difícil e em concreto, a razão pela qual o ensino de um simples algoritmo, se torna problemático. Uma das principais razões apontadas é o grande fosso que existe entre o conhecimento abstrato dos professores e o conhecimento experimental dos alunos, em que a ideia principal de ensinar Matemática é a de fazer conexões com um corpo de conhecimentos já pronto e construído. O autor propõe alternativas, tendo em conta o problema com o algoritmo escrito da divisão e de acordo com dois aspetos da teoria EMR: a reinvenção guiada e a modelação emergente. No que diz respeito à reinvenção guiada do algoritmo da divisão, sugere que os alunos devem descobrir ao

seu nível e ritmo, estabelecendo atalhos de forma a construírem o seu conhecimento experimental, tendo o contexto do problema um papel decisivo no processo de reinvenção. Tendo em conta a modelação emergente, o autor refere que os alunos resolvem um problema modelando o mesmo. Os alunos iniciam este percurso utilizando modelos de contextos específicos, ligando-os a situações e experiências reais, em que recorrem, nesta altura, a estratégias informais. Seguidamente, o modelo evolui para outro que tem em conta as estratégias que recolheram em experiências com problemas semelhantes, tornando-se num modelo para um raciocínio mais formal.

Brocardo et al. (2008) defendem que devem ser propostas aos alunos experiências de aprendizagem que favoreçam a construção e uso de procedimentos fortalecendo o sentido do número e que ajudem a desenvolver capacidades de resolução de problemas, em que estão implícitos os diferentes sentidos da divisão. Referem que a aprendizagem deste algoritmo com sentido pode ser mais demorado que a aprendizagem do algoritmo tradicional, mas que apresenta uma continuidade em situações em que o divisor apresenta um ou mais dígitos, o que não acontece em relação ao algoritmo tradicional.

Anghileri (2001) reforça a necessidade de os professores ajudarem os alunos a desenvolverem as suas abordagens intuitivas e estratégias informais, num processo construído através da modelagem direta, da adição e/ou subtração repetida, do uso de factos conhecidos e multiplicativos, antes da introdução do algoritmo, no sentido de promover a compreensão dos alunos em problemas de divisão.

Fuson (2003) propõe a criação de métodos de cálculo acessíveis de divisão, em que os alunos recorrem à utilização de um modelo retangular tendo em conta a compreensão sobre a multiplicação, o uso de estimativas, o recurso a produtos conhecidos e a relação inversa entre a multiplicação e divisão. Para a autora, os métodos acessíveis para a divisão dependem da fluência dos alunos com a adição, a subtração e a multiplicação. O trabalho com os alunos deve incidir em conceitos acessíveis e abordagens facilitadoras da compreensão da multiplicação e da divisão longa⁶ de números formados por vários dígitos.

⁶ Expressão utilizada em alguns Países, para designar a operação de divisão de números com vários dígitos, que recorre a um esquema/andaime na sua resolução, em

Martin (2009) refere que associadas à apresentação de um problema de divisão devem ser feitas questões adicionais, pois esta é uma forma de compreender o pensamento do aluno e centrar a sua atenção sobre o possível valor para o quociente, tendo em conta o sentido dos números com os quais se está a trabalhar. O aluno realiza assim, mais facilmente, estimativas para o valor do quociente e está mais desperto para a razoabilidade do resultado, principalmente para números com elevada ordem de grandeza. Este é também um fator decisivo para uma boa utilização de suportes tecnológicos, como a calculadora. As questões que devem ser feitas aos alunos, aquando da resolução de problemas de divisão, devem obrigatoriamente ter em conta, a identificação da posição dos diferentes dígitos que compõem o quociente (de acordo com a sua ordem no número). Neste processo são reforçados e trabalhados: os conhecimentos prévios dos alunos acerca do sentido do número, do conceito de ordem de grandeza, os múltiplos de dez, a conexão entre a multiplicação e a divisão, o conceito de divisão, as destrezas computacionais e o cálculo mental.

Gravemeijer (2005); Brocardo et al., (2008); Fuson (2003) e Martin (2009) referem a importância de utilizar múltiplos do divisor para subtrair ao dividendo, apresentam como sugestão a utilização do dobro ou de potências de 10, por permitirem uma maior facilidade no cálculo.

Enquadramento Curricular

Nesta secção, enquadro curricularmente os referenciais teóricos deste estudo, tendo em conta as diretrizes curriculares nacionais e internacionais, apresentando como o sentido do número, o cálculo mental e a resolução de problemas, que envolvem as operações multiplicação e divisão, são tratados pelos currículos de matemática.

Nas orientações internacionais, nomeadamente a nível das normas definidas pelo NCTM (2007), para o tema dos Números e Operações é dado primordial destaque ao desenvolvimento do sentido número. Assim, todos os alunos do pré-escolar ao 12º ano deverão ser capazes de: a) compreender os números, formas de

que são subtraídas sucessivamente múltiplos do divisor ao dividendo, até se encontrar o número máximo dessas cópias.

representação dos números, relações entre números e sistemas numéricos; b) compreender o significado das operações e o modo como elas se relacionam entre si e c) calcular com destreza e fazer estimativas plausíveis.

No programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte et al., 2007) o desenvolvimento do sentido do número constitui-se como propósito principal de ensino no tema dos números operações, assim como, a compreensão dos números e das operações e a capacidade de cálculo mental e escrito, bem como a capacidade de utilizar estes conhecimentos e capacidades para resolver problemas em contextos diversos:

A capacidade para decompor números, usar como referência números particulares, tais como 5, 10, 100 ou $1/2$, usar relações entre operações aritméticas para resolver problemas, estimar, compreender que os números podem assumir vários significados (designação, quantidade, localização, ordenação e medida) e reconhecer a grandeza relativa e absoluta de números. (Ponte et al., 2007, p. 13)

Também nas orientações internacionais, nomeadamente a nível das normas definidas pelo NCTM (2007), o cálculo mental ocupa uma posição de relevo no tema dos Números e Operações. É importante que os alunos adquiram destreza de cálculo, no sentido de possuírem e saberem utilizar métodos de cálculo eficazes e precisos. Essa destreza poderá ser a combinação de estratégias mentais e a utilização de um suporte escrito, com papel e lápis ou apenas através deste último, nomeadamente quando estão perante números com elevada ordem de grandeza. Acrescenta ainda que “independentemente do método utilizado, os alunos deverão ser capazes de explicar, compreender que existem muitos outros métodos, e ver a utilidade de métodos que são eficazes, precisos e de aplicação generalizada” (p.34).

No programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte et al., 2007), o desenvolvimento da fluência do cálculo é uma das ideias principais do tema Números e Operações. Dada a importância do cálculo mental e o seu relacionamento com o sentido do número é recomendado que este deve ser desenvolvido desde o início do 1º ciclo de escolaridade, dado que “a destreza do cálculo é essencial para a manutenção de uma forte relação com os números, para que os alunos sejam capazes de olhar para eles criticamente e interpretá-los de modo apropriado” (p. 10).

O cálculo mental é desenvolvido pelos alunos em diversas situações que lhes devem ser proporcionadas, devendo ser “trabalhadas diferentes estratégias de cálculo

baseadas na composição e decomposição de números, nas propriedades das operações e nas relações entre números e operações. Devem ser também praticadas na aula rotinas de cálculo mental, podendo este ser apoiado por registos escritos” (p. 14).

Nas orientações internacionais, nomeadamente a nível das normas definidas pelo NCTM (2007), a resolução de problemas constitui uma parte integrante de toda a aprendizagem Matemática. Neste documento é definido que todos os alunos, no final do 12.º ano de escolaridade deverão ser capazes de: a) construir novos conhecimentos matemáticos através da resolução de problemas; b) resolver problemas que surgem em matemática e noutros contextos; c) aplicar e adaptar uma diversidade de estratégias adequadas para resolver problemas e d) analisar e refletir sobre o processo de resolução matemática de problemas.

No programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte et al., 2007), no domínio dos números e operações, no 1º ciclo, a capacidade para resolver problemas em contextos diversos é um dos propósitos principais de ensino, associado à capacidade de cálculo mental e escrito, a par com o desenvolvimento do sentido de número e a compreensão dos números e das operações.

Neste estudo, irei centrar-me na operação da divisão, e pela sua inter-relação com a multiplicação, também dedicarei atenção a esta operação, uma vez que estas desempenham um papel importante no 3.º e 4º anos de escolaridade.

Nas orientações internacionais, nomeadamente a nível das normas definidas pelo NCTM (2007), para o tema dos Números e Operações é dado destaque às operações matemáticas, assim, todos os alunos do pré-escolar ao 12º ano deverão ser capazes de: a) compreender o significado das operações e o modo como elas se relacionam entre si; b) compreender os diversos significados da multiplicação e da divisão; c) compreender os efeitos de multiplicar e dividir números inteiros; d) identificar e usar, na resolução de problemas, as relações entre as operações, tais como a divisão ser o inverso da multiplicação e, por último, e) compreender e usar as propriedades das operações.

No programa de Matemática para o Ensino Básico de Matemático (Ponte et al., 2007), no domínio dos números e operações, no 1º ciclo, é referida a aprendizagem dos algoritmos com compreensão. Para isso, devem-se desenvolver gradualmente as quatro operações com a valorização do sentido do número. É referido que os alunos, num primeiro momento, devem “ter a possibilidade de usar formas de cálculo

informais, de construir os seus próprios algoritmos ou de realizar os algoritmos usuais com alguns passos intermédios” (p.14). No que se refere ao algoritmo da divisão, é sugerida a sua iniciação “através do cálculo de quocientes parciais, que depois são adicionados (por exemplo, múltiplos de 10) e através de subtrações sucessivas” (p.14). Dado que, desta forma, se trabalha com os números por inteiro e os procedimentos são registados, o que tal contribui também para a compreensão do sentido da divisão.

Também no Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte et al., 2007) é contemplada a necessidade de resolução de problemas em que estejam presentes todos os sentidos da divisão (medida, partilha e razão) e a necessidade de ter em conta a relação entre a multiplicação e a divisão em contextos diversos.

Neste documento, é destacada a necessidade particular de continuar a desenvolver-se o trabalho com os algoritmos no 2º ciclo, particularmente com o algoritmo da divisão, dado que é o último a ser introduzido no 1º ciclo do Ensino Básico.

Durante a recolha de dados para a realização deste estudo o atual Programa de Matemática para o Ensino Básico (Bivar, Grosso, Oliveira & Timóteo, 2013) não estava ainda em vigor no 4º ano de escolaridade, mas parece-me adequado contemplar a análise do mesmo, tendo em conta a sua introdução no ano letivo 2014/2015.

No documento referido, no domínio dos números e operações, no 1º ciclo, o termo sentido do número não é referido e não é explícita a sua utilização. Dada a importância que o desenvolvimento do sentido do número adquire na aprendizagem da matemática com sentido e que foi atrás evidenciada nos documentos internacionais e nacionais apresentados, o programa de Matemática para o Ensino Básico (Bivar et al, 2013) não segue essas orientações, o que no meu entender é empobrecedor ao nível do trabalho matemático com os números e as operações.

No mesmo documento, no domínio dos números e operações, no 1º ciclo, é dado destaque ao domínio que os alunos devem ter em relação ao cálculo mental, como condição de fluência de cálculo e destreza na aplicação dos quatro algoritmos. Refere ainda o papel dos professores “são pois fortemente encorajados a trabalhar com os seus alunos essa capacidade, propondo as atividades que considerarem convenientes e apropriadas a esse efeito” (p.6). Na escolha dos problemas, o

programa refere que “deve atender-se ao número de passos necessários às resoluções, aumentando-se a respetiva complexidade ao longo do ciclo” (p.6).

No que diz respeito à resolução de problemas no Programa de Matemática (Bivar et al., 2013), o conhecimento dos factos e procedimentos, o raciocínio matemático, a comunicação matemática e a matemática como um todo coerente, em conjunto e de um modo integrado, desde o nível mais elementar de escolaridade, permitem que os objetivos que traduzem os desempenhos definidos para cada ciclo sejam alcançados. Acerca da resolução de problemas é considerado que “envolve, da parte dos alunos, a leitura e interpretação dos enunciados, a mobilização de conhecimentos de factos, conceitos e relações, a seleção e aplicação adequada de regras e procedimentos, previamente estudados e treinados, a revisão, sempre que necessária, da estratégia preconizada e a interpretação dos resultados finais” (p.5).

Na minha opinião e tendo por base a revisão da literatura realizada em documentos internacionais e nacionais, parece existir um retrocesso nas recomendações dadas por este programa, pois é mais valorizada o treino de regras e procedimentos, ao invés da sua compreensão e utilização com sentido.

No que diz respeito à operação da divisão, no Programa de Matemática (Bivar et al., 2013), no 4º ano de escolaridade, no domínio dos números e operações e no subdomínio dos números naturais, no objetivo geral: efetuar divisões inteiras, encontram-se os seguintes descritores: a) algoritmo da divisão inteira; b) determinação dos divisores de um número natural até 100 e c) problemas de vários passos envolvendo números naturais e as quatro operações.

Capítulo 3 - Metodologia de investigação

Este capítulo apresenta e justifica as opções metodológicas tomadas no presente estudo de acordo com os seus objetivos e as questões apresentadas e refere os diferentes processos utilizados na sua realização. Para isso, descreve: os participantes, nomeadamente o Agrupamento de Escolas e a Escola do 1.º Ciclo do Ensino Básico onde se realizou o estudo, a turma e os alunos selecionados, as técnicas utilizadas na recolha de dados, a sequência de aprendizagem criada e utilizada neste estudo e o processo de análise dos dados.

Opções metodológicas

Nesta secção fundamento as opções metodológicas que foram tomadas, de modo a serem adequadas com as características e os objetivos do estudo que pretendia realizar. Um dos objetivos do estudo é perceber qual a compreensão que os alunos do 4º ano de escolaridade do Ensino Básico têm do conceito da divisão. O outro objetivo é analisar o desempenho que os alunos evidenciam na resolução de problemas que têm implícito o conceito de divisão. No âmbito de uma sequência de aprendizagem, procuro dar resposta às seguintes questões:

1. Como é que os alunos reconhecem a operação de divisão na resolução de problemas? (problemas que têm implícito o conceito de divisão);
2. Que estratégias utilizam os alunos na resolução de problemas de divisão?;
3. Que dificuldades manifestam os alunos quando resolvem tarefas de divisão?;
4. Quais os aspetos do sentido do número revelados pelos alunos na resolução de tarefas de divisão?

Tendo em conta o objetivo em estudo e as questões às quais procuro obter resposta, sigo uma metodologia de natureza qualitativa, tendo por base as características deste tipo de investigação descritas por Bogdan e Biklen (1994): 1) a fonte direta de dados é o ambiente natural, sendo o investigador o instrumento

principal; 2) é uma investigação descritiva e os dados recolhidos incluem vídeos e gravação áudio, notas de campo, fotografias e outros documentos; 3) o interesse principal do investigador é pelo processo e não pelos resultados ou produtos; 4) a análise dos dados é realizada de forma indutiva, uma vez que os dados recolhidos não têm o objetivo de confirmar hipóteses construídas previamente; e 5) preocupação do investigador por tentar compreender o ponto de vista dos participantes.

Nesta investigação qualitativa abordo a problemática em estudo de forma naturalista e interpretativa, ou seja, estudo o problema em ambiente natural, procurando interpretar os fenómenos em termos do que significam para os alunos. De acordo com Erickson (1986), o principal interesse de uma investigação interpretativa/qualitativa reside nos significados imediatos e locais das ações, definidos pelo ponto de vista dos participantes envolvidos no estudo.

Tendo em conta o paradigma interpretativo e a problemática em estudo, adoto uma metodologia de estudo de caso, pois, e de acordo com Yin (2009) e Ponte (1994): a) o objetivo principal é compreender em profundidade o “como” e o “porquê” da problemática em estudo; b) como investigadora, não pretendo intervir ou alterar o contexto, mas compreendê-lo tal como ele é; e c) o foco do trabalho está na problemática em estudo indissociável do contexto em que ocorre.

Segundo Ponte (1994) o estudo de caso não é somente descritivo, pode confrontar a situação com outras situações conhecidas e com a teoria existente e pode também ajudar a alcançar novas questões e novas teorias para futuras investigações. Também para Merriam, citado por Ponte (1994), o estudo de caso não é somente descritivo, sendo o mesmo também interpretativo, na medida em que o grau de análise ao caso em estudo é elevado.

Dadas as limitações de tempo para a realização deste estudo, a sequência de aprendizagem foi concretizada com todos os alunos da turma do 4º ano de escolaridade, mas foram recolhidos os dados de apenas quatro alunos, sendo considerado um estudo de caso múltiplo, que ocorrerá no seu ambiente natural, neste caso, a escola, tirando partido de fontes múltiplas de evidências (Yin, 2009), como observações, documentos, registos vídeo e áudio e produções dos alunos. Assumo assim, um duplo papel, o de professora de apoio educativo e o de investigadora.

De acordo com Bogdan e Biklen (1994) a presença de um investigador, neste caso, um terceiro adulto, pode alterar o comportamento dos alunos que pretendo estudar, tendo como consequência aquilo que chamam como “efeito do observador”.

Desta forma, ao assumir o estudo com os alunos da minha turma de apoio, vão-se anular possíveis alterações de comportamento, garantindo que o contexto em que ocorrem, tão importante na metodologia de estudo de caso, se mantenha inalterado.

Por outro lado, quando o professor assume o papel de investigador pode existir a dificuldade em distanciar-se, quer de preocupações pessoais, quer do conhecimento prévio que possui das situações, o que poderá enviesar a análise e, conseqüentemente, os resultados obtidos. No entanto, os métodos utilizados na recolha de dados, que resultam numa grande quantidade de dados, a par do período de tempo extenso, para essa mesma recolha, tendem a minimizar a subjetividade do investigador aquando da sua análise. Também Yin (2009) reforça a necessidade da utilização de múltiplas fontes de evidência, que neste estudo passam pela observação participante, o uso de notas de campo, fotografias dos registos dos alunos e gravações vídeo e áudio, integralmente transcritas.

Os Participantes

O Agrupamento de escolas e a Escola do 1º Ciclo

O estudo foi realizado numa turma do 4º ano do Ensino Básico, numa escola pertencente a um Agrupamento englobado na Área Pedagógica da Frente Ribeirinha de Lisboa, situado num dos bairros típicos da cidade.

O Agrupamento de escolas é constituído por uma escola do 2.º e 3.º ciclos e três escolas com os níveis pré-escolar e 1.º ciclo.

A escola do 2.º e 3.º ciclos é frequentada por cerca de quinhentos alunos com idades entre os nove e os dezoito anos. A sua zona de inserção apresenta características muito diversificadas em termos económicos, sociais e culturais.

A escola do 1.º ciclo onde realizei a sequência de aprendizagem e procedi à recolha de dados situa-se num Bairro da cidade de Lisboa que foi criado para realojamento da população de um antigo espaço. É um bairro com características socioculturais particulares que se refletem nas relações no seio da própria comunidade

escolar. O débil nível socioeconómico, as características socioculturais desta comunidade e as fracas expectativas face à escola condicionam as aprendizagens.

O acompanhamento familiar dos alunos é insuficiente e a sua postura face à escola é, por vezes, desajustada.

Face a estas características da população, o percurso escolar dos alunos é muito irregular e o insucesso escolar é muito significativo. Muitas destes alunos transportam consigo sequelas de dramas familiares profundos que afetam significativamente o seu desenvolvimento afetivo, cognitivo e social.

No ano letivo em que procedi à recolha de dados, 2013/2014, a respetiva escola integrada em território educativo de intervenção prioritária era frequentada por cerca de 100 alunos, distribuídos por quatro turmas do 1º ciclo, do 1.º ao 4.º ano de escolaridade e duas turmas do pré-escolar.

Procedi aos respetivos pedidos de autorização para a realização deste estudo, e o primeiro contacto foi através de conversa informal com a professora titular da turma do 4º ano de escolaridade, que se manifestou imediatamente disponível, para que eu realizasse este estudo na sua turma.

Solicitei a respetiva autorização para a realização do estudo à Direção do Agrupamento de Escolas, que foi devidamente concedida.

Por último, e após as autorizações anteriores concedidas, foram solicitadas as respetivas autorizações aos Encarregados de Educação dos quatro alunos selecionados, de forma a poderem participar no estudo, assim como, para garantir que as imagens ou som resultantes das gravações vídeo e áudio das aulas, objeto de estudo, não fossem divulgadas nem utilizadas para quaisquer outros fins, sendo as mesmas apenas utilizadas no âmbito deste estudo, sendo sempre preservado o anonimato dos alunos. Houve da parte de todos, um parecer positivo.

A turma

A turma onde foi realizada a sequência de aprendizagem deste estudo é do 4.º ano de Escolaridade. Não foi identificada a professora titular, assim como, o Agrupamento de escolas e a Escola do 1º ciclo onde se realizou a sequência de aprendizagem do presente estudo, de forma a manter-se o anonimato dos participantes.

A turma é mista, sendo constituída por dezasseis alunos, doze do 4.º ano de escolaridade, com sete rapazes e cinco raparigas e quatro do 2.º ano de escolaridade, com três rapazes e uma rapariga. Sendo eu, professora de apoio dos alunos do 4.º ano de escolaridade da referida turma. Os alunos da turma já frequentam a escola desde o pré-escolar, à exceção de um aluno. Existem três alunos que já tiveram uma retenção durante o seu percurso escolar.

A turma, no que se refere aos alunos do 4º ano, apresenta resultados bastante heterogéneos, existindo mais dificuldades no Português e na Matemática. Os alunos são, de uma forma geral, bastante participativos nas atividades, embora apresentem dificuldades de compreensão e interpretação das atividades propostas.

Os alunos mantêm-se com a professora titular há dois anos letivos, antes disso, tiveram um percurso muito complicado com a mudança constante de professor nos dois primeiros anos do 1º ciclo do Ensino Básico, o que se reflete nas suas aprendizagens. A professora titular tem feito um trabalho notável, com um ensino o mais individualizado possível, apesar de ter dois anos de escolaridade juntos na mesma turma.

Como professora de apoio dos alunos do 4.º ano de escolaridade e dadas as circunstâncias da constituição da turma, foi-me possível desenvolver um trabalho sistemático a Matemática com os alunos. Desenvolvi com eles diversas atividades e recorri a diferentes estratégias, na tentativa de superação das suas dificuldades.

Os alunos

Para se conhecer bem o fenómeno em estudo, os participantes devem permitir recolher o máximo de informação possível, a escolha dos sujeitos envolvidos não deve ter em conta a quantidade, mas sim, a riqueza da informação que contêm (Patton, 2002). Assim, na escolha de mais do que um caso deve ser garantido o equilíbrio e a variedade entre os sujeitos (Stake, 2007). Tendo em conta as ideias atrás descritas, foram selecionados quatro alunos para este estudo, que foram escolhidos pela identificação da utilização de diferentes estratégias nas respostas a um questionário (anexo 3), criado para esse mesmo fim, constituído por problemas de divisão com diferentes sentidos e com um aumento da ordem de grandeza dos números

envolvidos. O questionário (anexo 3) não constitui um instrumento de recolha de dados para este estudo, não sendo as respostas dadas alvo de análise.

Como referido, foram selecionados para este estudo quatro alunos: a Nídia, o Luís, a Joana e a Ivone, (nomes fictícios) escolhidos pela identificação da utilização de diferentes estratégias nas respostas a um questionário. Os alunos, Nídia e Luís apresentam mais facilidade com os números e as operações e talvez por isso, sejam mais descontraídos e extrovertidos no trabalho matemático. As alunas, Joana e Ivone revelaram-se mais tímidas perante a câmara, apesar de serem empenhadas e fundamentais no trabalho de grupo. Durante a investigação os quatro alunos trabalharam sempre integrados no mesmo grupo de trabalho. Os nomes dos alunos foram alterados de modo a assegurar o seu anonimato.

Recolha de dados

A recolha de dados foi feita através das seguintes técnicas: observação participante e naturalista e recolha de documentos. Os documentos utilizados como fontes de informação incluem: (a) os registos vídeo e áudio, (b) as notas de campo e (c) os trabalhos elaborados pelos quatro alunos (fotografias).

Sendo utilizadas diferentes técnicas de recolha de dados, estas apresentam um denominador comum, a sua análise dependerá fundamentalmente das capacidades integradoras e interpretativas do investigador (Coutinho, 2011).

De acordo com Pourtois e Desmet, citados por Lessard-Hebert, Goyette e Boutin (1990) a observação participante é uma técnica de recolha de dados em que o próprio investigador é o principal instrumento de observação. A técnica transcende o aspeto descritivo da abordagem para tentar descobrir o sentido, a dinâmica e os processos dos atos e dos acontecimentos. Neste estudo, enquanto professora e investigadora estou inserida na turma e participo nas atividades propostas, para desta forma obter dados mais significativos. De acordo com Everston e Green, citados por Lessard-Hebert et al. (1990), o investigador pode assumir um grau de participação, ativo ou passivo, consoante o registo de dados seja realizado após a observação ou durante a mesma. Neste estudo foi realizada uma observação ativa, uma vez que o

observador esteve envolvido nos acontecimentos e só os regista após os mesmos terem tido lugar.

Lessard-Hebert et al. (1990) indicam também que a observação participante permite recolher dois tipos de dados: os que são registados nas «notas do trabalho de campo» que são do tipo da descrição da narração e aqueles que anota no seu «diário de bordo» que apelam à sua própria subjetividade e que pertencem ao tipo da compreensão. Ao longo do estudo foram efetuados registos destes dois tipos. Os relatos descritivos constituem a informação da perceção dos alunos acerca da situação experienciada no estudo, bem como ajudam a compreender o fenómeno em estudo. As notas reflexivas, registadas no diário de bordo, incluem reflexões daquilo que observo tendo em conta a fundamentação teórica presente no estudo.

De acordo com Bruyne et al. (1995), a recolha de documentos trata-se de uma técnica de recolha de dados, que tem a função de complementar a investigação qualitativa a realizar.

Sequência de aprendizagem

Foi elaborada por mim e com a colaboração da professora titular uma sequência de aprendizagem, constituída por seis problemas de divisão, com números naturais e com diferentes sentidos: de partilha, de medida e de divisão como operação inversa da multiplicação, em diferentes contextos. Os números neles envolvidos foram criteriosamente escolhidos para que fosse aumentando progressivamente a ordem de grandeza dos mesmos. É importante referir que a escolha dos problemas que compõem a sequência de aprendizagem tiveram em conta a realidade da escola, nomeadamente o facto de pertencer a uma escola com características de intervenção prioritária e as dificuldades reveladas pelos alunos, no que se refere a dificuldades de interpretação dos problemas, devido ao seu percurso escolar irregular, com a constante mudança de professor nos dois primeiros anos da sua escolaridade.

A sequência de aprendizagem foi proposta a todos os alunos do 4º ano de escolaridade, tendo os dados recolhidos incidido apenas nos quatro alunos selecionados. Os problemas foram resolvidos pelos alunos da turma e, na análise às estratégias utilizadas, tento perceber se as mesmas são influenciadas pela

apresentação de problemas de divisão com diferentes sentidos e com o aumento da ordem de grandeza dos números neles envolvidos.

No conjunto dos problemas de divisão, houve a preocupação de incluir um em que a divisão fosse não exata, no sentido de se verificar se influencia as estratégias utilizadas pelos alunos, bem como se o resto é tido em conta na avaliação e na interpretação da resposta do problema

Existiu entre mim e a professora titular, uma constante discussão e reflexão sobre essas aulas, no sentido da planificação das mesmas ir sendo adaptada à realidade da turma, tal como aconteceu durante todo o ano letivo.

É importante referir que a dinamização da sequência de aprendizagem foi realizada somente por mim, no que se refere à proposta dos problemas aos alunos, ao apoio durante o trabalho de grupo e à correção em coletivo com toda a turma. Tendo a professora titular nessas aulas prestado maior acompanhamento aos alunos do 2º ano de escolaridade.

Análise de dados

As gravações áudio realizadas durante a realização da sequência de aprendizagem foram integralmente transcritas, complementadas com os dados recolhidos nas gravações vídeo, com os dados das minhas notas de campo e do diário de bordo e com as fotografias tiradas às fichas de cada aluno.

Comecei por analisar as estratégias utilizadas por cada aluno aos seis problemas da sequência e, nesse sentido, elaborei um quadro com a identificação de cada problema, o sentido da divisão associado e a identificação das estratégias de cálculo utilizadas.

Para realizar a identificação das estratégias utilizadas por cada aluno aos seis problemas, elaborei um novo quadro, (ver quadro 5) com um resumo das principais categorias de estratégias de cálculo, tendo em conta o enquadramento teórico do estudo. Utilizei para isso, as categorias de estratégias de cálculo identificadas por diferentes autores (Mulligan & Mitchelmore, 1997; Hartnett, 2007; Ambrose et al., 2003; Kouba, 1989; Putten et al., 2005).

Quadro 5 - Categorias de estratégias de cálculo (adaptado de Mulligan & Mitchelmore, 1997; Hartnett, 2007; Ambrose et al., 2003; Kouba, 1989; van Putten et al., 2005)

Categorias de estratégias de cálculo		
Aditivas	<ul style="list-style-type: none"> - Contagem para a frente - Adição repetida - Adicionar dobros - Contagem para trás - Subtração repetida - Adicionar metades 	<ul style="list-style-type: none"> - Usar o valor de posição - Usar a tentativa e erro
Multiplicativas	<ul style="list-style-type: none"> - Usar factos multiplicativos de referência (produtos conhecidos) - Usar dobros e metades - Usar múltiplos de 10 - Arredondar, multiplicar e compensar - Multiplicar sucessivamente - Multiplicar em coluna 	

De seguida, elaborei uma síntese em que relaciono as estratégias privilegiadas por cada aluno, tendo em conta os diferentes sentidos da divisão apresentados nos problemas e a ordem de grandeza dos números utilizados.

Elaborei ainda, uma síntese global com as características comuns às estratégias utilizadas pelos quatro alunos, nesse sentido, elaborei um quadro resumo, (ver quadro 10) com a identificação de cada problema, o sentido da divisão associado e a identificação das estratégias de cálculo utilizadas.

Por último, estabeleço o confronto entre os dados empíricos obtidos pelas diferentes técnicas com a análise dos referenciais teóricos que contextualizam o problema definido, de forma a obter resposta às questões impulsionadoras do estudo.

Capítulo 4 - A resolução da sequência de aprendizagem pelos alunos

Neste capítulo apresento a análise da resolução dos seis problemas apresentados (ver Anexo 4) focando-se a mesma nas estratégias utilizadas por cada aluno, sendo explicitada de acordo com a ordem cronológica em que os problemas foram apresentados. Desta forma, pretendo compreender a evolução das estratégias utilizadas por cada aluno. Incluo também uma síntese em que relaciono as estratégias privilegiadas por cada aluno, tendo em conta os diferentes sentidos da divisão em cada um dos problemas e a ordem de grandeza dos números utilizados. No final, apresento ainda uma síntese global com as características comuns às estratégias utilizadas por todos os alunos.

Estratégias utilizadas pela Nídia

A Nídia, de 10 anos, é uma aluna muito extrovertida e com grande confiança em si própria. Gosta imenso de ser o centro das atenções e tem grande facilidade em comunicar. Apresenta bons resultados escolares em todas as áreas curriculares. Ao nível da Matemática, revela facilidades no cálculo e no raciocínio, embora apresente, por vezes, dificuldades na interpretação dos enunciados, o que a leva a não ter o sucesso esperado. No trabalho em grupo é muito colaborativa e participativa.

Problema 1: “Vamos sentar as pessoas”

A aluna começa por verbalizar para os colegas do grupo, uma adição de parcelas iguais ao número de pessoas, 60, que por sua vez, adiciona duas a duas, através do cálculo do dobro, até ao número 240.

Nídia: Estou a fazer 60 mais 60 que dá 120, 120 mais 120 é ...

Joana: 240

Ivone: 240 + 240

Nessa altura dá “um salto” para um procedimento multiplicativo, de $6 \times 6 = 36$ e estabelece a relação com $6 \times 60 = 360$, ao acrescentar um zero.

Nídia: (...) 6×6 é ...

(...)

Nídia: Não, 6×6

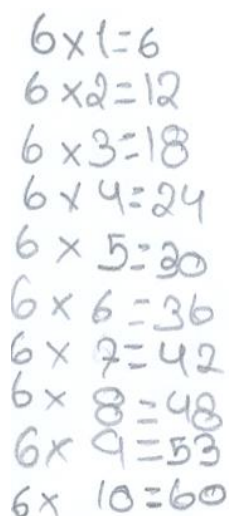
Luís: É 36

Nídia: 36? Acrescenta zero e dá 360. Por isso não é. E 6×7 ? O melhor é fazermos a tabuada do 6 toda.

Luís: É 6×8 . 6×8 é 48.

Nídia: Olha, eu vou fazer a tabuada

Ao verificar que ainda não atingiu o número de pessoas a distribuir pelas mesas, prossegue utilizando o conhecimento que tem sobre a tabuada do número seis.



Handwritten multiplication table for the number 6:

$6 \times 1 = 6$
$6 \times 2 = 12$
$6 \times 3 = 18$
$6 \times 4 = 24$
$6 \times 5 = 30$
$6 \times 6 = 36$
$6 \times 7 = 42$
$6 \times 8 = 48$
$6 \times 9 = 54$
$6 \times 10 = 60$

Figura 1 - Resolução da Nídia do prolema 1 "Vamos sentar as pessoas"

(...)

Nídia: E 6×7 é quanto?

Luís: 42

Nídia: Ah, iá. (continua até ao 6×8 e faz uma grande festa) Já cheguei ao resultado. Já descobri.

Ao alcançar o $6 \times 8 = 48$, estabelece a ligação com $60 \times 8 = 480$. Esta estratégia é próxima de colocar as pessoas nas sessenta mesas, até todas estarem sentadas, para assim associar ao número de pessoas que ficam em cada mesa.

De seguida faz o algoritmo de 60×8 , para confirmar o seu raciocínio.

$$\begin{array}{r} 60 \\ \times 8 \\ \hline 480 \end{array} \quad \begin{array}{r} 60 \\ \times 8 \\ \hline + 480(8 \times 60) \\ \hline 480 \end{array}$$

Figura 2 - Resolução da Nídia do problema 1: "Vamos sentar as pessoas"

Investigadora: Como é que está o vosso trabalho? Que raciocínios é que fizeram?

Nídia: Vimos o 48 (apontando para a tabuada 6×8) e se acrescentássemos um zero no sessenta, ficava este resultado (apontando para o 480 que estava no enunciado) e depois fizemos esta conta (apontando para a conta em pé de 60×8) para confirmar.

Investigadora: Na pergunta: queremos distribuir igualmente 480 pessoas por 60 mesas. Quantas pessoas ficam em cada mesa?

Nídia: 8

Apresenta também o registo escrito do algoritmo da divisão.

$$\begin{array}{r} 480 \overline{) 60} \\ - 480 \\ \hline 000 \end{array}$$

Em cada mesa fica 8 pessoas.

Figura 3 - Resolução da Nídia do problema 1: "Vamos sentar as pessoas"

A aluna recorre ao registo do algoritmo da divisão, incentivada pelo colega Luís, mas apresenta as suas justificações baseadas em raciocínios multiplicativos. É ainda relevante notar que durante a correção em grande grupo, a aluna identifica o

problema como sendo de divisão, pois ela indica à colega do seu grupo para utilizar a representação do algoritmo da divisão no quadro.

Nídia: Não te esqueças de fazer a de dividir, faz lá.

Problema 2: “As mesas”

O primeiro raciocínio utilizado pela Nídia foi o de recorrer a uma estratégia subtrativa, a subtração de 60 a 480. Utiliza esta estratégia muito próxima de retirar uma mesa completa, para assim associar o número de vezes que subtrai ao número de mesas necessárias. A aluna abandona esta estratégia por falta de confiança na mesma. O facto de o problema ser de divisão no seu sentido de medida pode ter contribuído para que Nídia utilize uma estratégia subtrativa.

Nídia: iá, $480-60$ dá 420. Não, não, não...não tem sentido.

Como o problema 2 e o problema 1 apresentam os mesmos números envolvidos e contextos semelhantes, embora as situações apresentadas apelem à divisão com sentidos diferentes, uma no seu sentido de partilha e a outro no sentido de medida, penso que a aluna associou a utilização dos mesmos números para chegar às oito mesas necessárias, embora se tenha esquecido que o número de pessoas por mesa já se encontra especificado no problema.

Nídia: 8 mesas necessárias porque pode ser 1 em cada mesa. Pode ser 8 mesas para 8 pessoas, porque pode se sentar em cada mesa 1 pessoa.

(...)

Luís: Ficam 60 pessoas numa mesa, não ficam 8.

A aluna reconhece o problema como sendo de divisão e, pretende calcular $480\div 60$, mas volta a abandonar esta ideia por algum tempo, porque os colegas do grupo a assemelham à utilizada no problema anterior.

Nídia: Mas como é que nós vamos mostrar os nossos cálculos?

(...)

Luís: 60 pessoas em cada mesa.

Nídia: $480 \div 60$

Ivone: Isso é igual à outra.

Opta, juntamente com os colegas de grupo a efetuar $60 \div 8$.

Nídia: Só se fosse $60 \div 8$. Quanto é que é?

A handwritten calculation on a piece of paper. It shows a long division: 60 divided by 8. The result is 7 with a remainder of 4. The text "8 x antiga" is written next to the division. The calculation is as follows:

60		8	x antiga
-56		7	
04			

Figura 4 - Resolução da Nídia do problema 2: "As mesas"

(Luís e Joana contam pelos dedos, Nídia aguarda a resposta dos colegas)

Luís: Quanto é 8×7 ?

Joana: 8×8 é 64.

Luís: 8×7 é 56. Podemos fazer com 7.

(...)

Luís: 6 para 10, 4 e vai 1, e vai 1. Dá resto 4. Podíamos tentar o 6.

Joana: Dá 48.

Luís: Já não dá, então é o 7. Cada mesa fica com 7 pessoas... não ficam com 7 mesas.

Nídia: Vai sobrar 4 mesas.

Luís: (Acena que sim com a cabeça).

Nídia: Vai ser necessário 7 mesas.

Luís: ... Mas ainda sobram 4 mesas.

Nídia: São necessárias 7 mesas, mas sobram 4.

Pensa num número que multiplicado por 8 seja o mais próximo de 60, encontra o 7 e como resto 4. Diz que são necessárias 7 mesas e que sobram 4. Embora não consiga atribuir qualquer significado ao que está a fazer.

Investigadora: Então a que conclusões estão a chegar? Então expliquem-me lá, o que é que vocês fizeram.

Nídia: Nós fizemos 60×8 , dá 7, que dá 56 e depois sobra 4

Investigadora: 60×8 ou $60 \div 8$?

Nídia: $60 \div 8$? (e os colegas confirmam), desculpe enganei-me, e depois fizemos o 7...

Joana: 7×8 que é 56

Investigadora: Sim

Nídia: E depois...

Luís: E sobrou 4

Nídia: E sobrou 4 e como já não há nenhum múltiplo de 8 que dê 4.

Solicito que tentem averiguar se o resultado está de acordo com a questão apresentada.

Investigadora: E se vocês tentarem fazer um esquema, para ver se está bem.

Após o meu pedido para voltarem a ler a pergunta, entendem a questão à qual têm que dar resposta. Mas tudo aponta para que devido à utilização dos mesmos números que os do problema anterior, a Nídia continue a ter presente o número oito, pois este não surge no enunciado do problema. Sugere assim, calcular $480 \div 8$.

Joana: Queremos distribuir 480 pessoas, sendo que em cada mesa ficam 60 pessoas. Quantas mesas são necessárias?

Nídia: Enganámo-nos. São 480 pessoas e em cada mesa ficam 60 pessoas. Numa mesa ficam 60 pessoas.

(..)

Nídia: Ou então só se fizermos $480 \div 8$

(...)

Nídia: Porque nós já sabemos que precisamos de 8 mesas.... que pergunta é que era a outra?

Investigadora: Era parecida a esta.

Nídia: E ajudava-nos a chegar ao resultado.

Neste momento, a Nídia segue a ideia da Ivone, que propõe realizar 60×7 , na procura do número que multiplicado por 60 é igual a 480.

Ivone: 60×7 , para ver se dá 480.

Nídia: 6×7 é 36, ai não é 42.

Joana: Dá 420

Nídia: Lá, não é...

$$\begin{array}{r} 60 \times 7 \\ \times 7 \\ \hline 420 \end{array}$$

Figura 5 - Resolução da Nídia do problema 2: "As mesas"

Como 60×7 dá 420 seguem para 60×8 .

Joana: É a mesma coisa que fizemos na outra, fizemos de menos e não deu.

Tu até fizeste aqui (apontando para a folha da Nídia)

Ivone: Então vamos para o 8?

$$\begin{array}{r} 60 \checkmark \\ \times 8 \\ \hline 480 \end{array}$$

É necessário 8 mesas.

Figura 6 - Resolução da Nídia do problema 2: "As mesas"

Nídia volta a querer executar o seu raciocínio anterior e realiza o algoritmo da divisão, $480 \div 8$.

Nídia: E se fizermos $480 \div 8$?

Luís: Dá 60. Estamos a fazer ao contrário...

Nídia: Podemos fazer assim para ver se está certo.

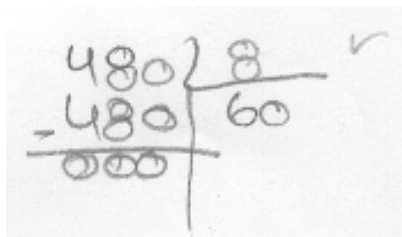

$$\begin{array}{r} 480 \overline{) 8} \\ \underline{-480} \\ 000 \end{array} \quad \checkmark$$

Figura 7 - Resolução da Nídia do problema 2: "As mesas"

Reconhece o problema como sendo de divisão e, para determinar o quociente utiliza em parte o raciocínio que seguiu com o grupo, ou seja, a procura de um número que multiplicado por 60 é igual a 480, utilizando estratégias multiplicativas. Apesar de não realizar por escrito a operação $480 \div 60$, é evidenciado quando faz 60×7 e 60×8 .

Problema 3: "A multiplicar por 25"

A Nídia considera imediatamente o problema fácil, apesar de começar pelo pensamento do cálculo 20×50 e só depois perceber, em diálogo com os colegas do grupo, que o número que procura tem que ser múltiplo de 25. Experimenta de seguida 25×5 e verifica que não obtém 150.

Nídia: 25×5 , enganámo-nos.

Continua a utilizar estratégias multiplicativas e experimenta 25×6 , onde encontra o múltiplo de 25 pretendido.

$$\begin{array}{r}
 25 \\
 \times 6 \\
 \hline
 150
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 25 \\
 \times 6 \\
 \hline
 30(6 \times 5) \\
 + 120(6 \times 20) \\
 \hline
 150
 \end{array}$$

$6 \times 25 = 150 \quad 25 \times 6 = 150$

Figura 8 - Resolução da Nídia do problema 3: "A multiplicar por 25"

Nídia: (...) É 6, porque 6×25 é igual a 150.

A aluna recorre também ao registo da divisão na sua folha de resposta, incentivada pelo colega Luís.

$$\begin{array}{r}
 150 \overline{) 25} \\
 \underline{-150} \\
 000
 \end{array}
 \quad 6$$

É seis porque $6 \times 25 = 150$.

Figura 9 - Resolução da Nídia do problema 3: "A multiplicar por 25"

Na correção do problema em grande grupo, é curioso que Nídia inicia o registo com o algoritmo da divisão. Mas é evidente que apresenta as suas justificações baseadas em raciocínios multiplicativos, pois determina o quociente através do uso da operação da multiplicação (figura 10).

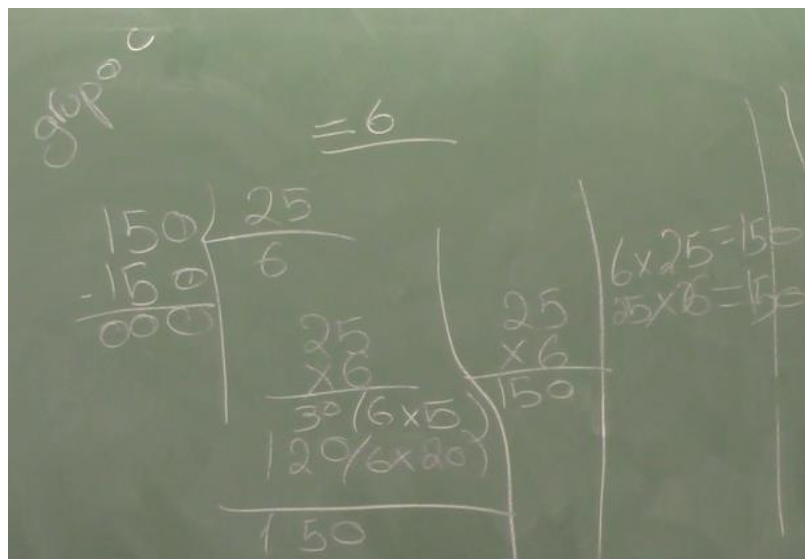


Figura 10 - Resolução da Nídia no quadro do problema 3: "A multiplicar por 25"

Problema 4: "Os autocarros"

Nídia reconhece o problema como sendo de divisão e propõe rapidamente calcular $1230 \div 50$.

Nídia: É de dividir. Temos de dividir 1230 pessoas por 50 autocarros. Certo?

$$\begin{array}{r}
 1230 \overline{) 50} \\
 - 1000 \quad 20 \\
 \hline
 0230 \quad 4 \\
 - 200 \quad 24 \\
 \hline
 0030
 \end{array}$$

Figura 11 - Resolução da Nídia do problema 4: "Os autocarros"

Para calcular o quociente inicia a procura do número que multiplicado por cinquenta é igual a 1230.

Nídia: Olhem fiz 20×50 dá 1000, já é uma ajuda...

$$\begin{array}{r}
 50 \\
 \times 20 \\
 \hline
 000 \\
 + 1000 \\
 \hline
 1000
 \end{array}$$

Figura 12 - Resolução da Nídia do problema 4: "Os autocarros"

A sua resolução evidencia a utilização de estratégias multiplicativas, em que inicia o cálculo com o número 20, um múltiplo de 10, talvez por lhe ser facilitador de obter um número próximo do pretendido. Depois ainda calcula 6×50 , mas vê que já obtém 300, o que ultrapassa os 230 que sobraram. Opta então, juntamente com o grupo, em utilizar 4×50 , cujo produto é 200, que subtraem a 230 e que obtém 30.

$$\begin{array}{r}
 50 \\
 \times 4 \\
 \hline
 200
 \end{array}$$

Figura 13 - Resolução da Nídia do problema 4: "Os autocarros"

Interrogados por mim, sobre a ida ou não destes 30 alunos, a Nídia começa por afirmar que não vão de autocarro e propõem a sua ida ao torneio de carro. Diz que são necessários 24 autocarros e que sobram 30 alunos. Ao que volto a questionar sobre se esses 30 alunos ficam na escola e tento relacionar a situação do problema com as suas visitas de estudo, e se acontecesse o mesmo facto na turma deles, se ficariam esses alunos sem ir ao torneio. É aí que o grupo, incluindo a Nídia, pensa que é injusto estes alunos não participarem. Pelo que sugere a necessidade de mais um autocarro e da possibilidade de não ir completo. Na correção em grande grupo, a aluna é bastante explícita na resolução deste problema.

Nídia: Na tabuada do 50, não há 30, porque 1×50 é...50. Por isso, sobrou 30. Então a resposta tem de resolver o problema destas 30 pessoas. É um bocado

injusto dizer que não vão, o Luís disse que ficavam de castigo, mas não. Nós escrevemos: Eles alugaram 25 autocarros, não é Esta conta está bem, (apontando para o 24 no quociente) mas a resposta foi diferente...

Investigadora: Tu tiveste em conta o quê?

Nídia: Que estas pessoas tinham de ir (apontando para o 30 do resto), mas então tinha que se meter mais um autocarro, só que ficavam lugares vazios. Por isso era, eles alugaram 25 autocarros, mas sobraram 20 lugares.

Tal como evidencia no seu registo escrito.

Eles alugaram 25 autocarros mas sobram 20 lugares.

Figura 14 - Resolução da Nídia do problema 4: "Os autocarros"

Problema 5: "Número de alunos"

Este problema foi de fácil resolução para Nídia. Rapidamente partilha com os colegas do grupo a necessidade de realizar o cálculo $1230 \div 6$.

$$\begin{array}{r} 1230 \overline{) 6} \\ \underline{1200} \\ 0030 \\ \underline{0030} \\ 0000 \\ \hline \end{array}$$

Em cada grupo ficam 205 alunos.

Figura 15 - Resolução da Nídia do problema 5: "Número de alunos"

Regista a operação divisão e usa um procedimento multiplicativo associado, em que calcula 200×6 e 5×6 , posteriormente, com recurso a uma estratégia aditiva, calcula $200 + 5$, chegando à solução do problema, ou seja, 205 pessoas. A análise detalhada da sua resolução evidencia que dá uma resposta correta, mas que se engana no cálculo do quociente do algoritmo da divisão.

A aluna elabora nos seus registos escritos, 205×6 , pelo facto de os seus colegas de grupo sentirem necessidade de confirmar o resultado.

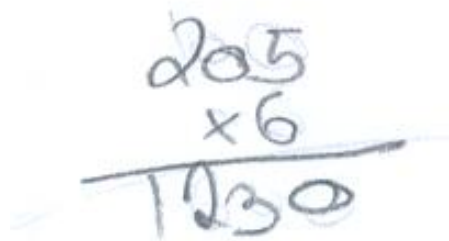

$$\begin{array}{r} 205 \\ \times 6 \\ \hline 1230 \end{array}$$

Figura 16 - Resolução da Nídia do problema 5: "Número de alunos"

Interpela ainda a sua colega Ivone, que necessita de recorrer à adição repetida de seis parcelas de 205, no sentido de averiguar se estava a proceder de forma correta, para lhe dizer "Mas é a mesma coisa que 6×205 ".

Durante a correção no quadro é importante salientar a associação que a aluna utiliza para calcular 200×6 , sem recorrer ao registo por escrito. Recorre ao conhecimento que tem sobre a tabuada do número seis, $6 \times 2 = 12$ e acrescenta dois zeros, talvez por associar à multiplicação por 100, fazendo-o mentalmente.

Nídia: Nós não fizemos a conta de vezes, porque nós vimos logo que 2×6 é 12, acrescentas dois zeros dá 1200.

Problema 6: "A multiplicar por 625"

A aluna começa por verbalizar aos colegas de grupo a ideia de recorrer à adição de duas parcelas iguais a 625.

Nídia: Se calhar podemos meter 625 mais 625?

É do diálogo com os colegas, que surge a ideia de utilizar uma estratégia multiplicativa, para facilitar o cálculo, 2×625 .

Joana: Mas assim estamos sempre a somar.

Ivone: Sim, mas depois podemos fazer de vezes.

Nídia: 2×625 .

Luís: Dá 1500

Nídia: Como é que sabes?

Luís: Sabendo.

Nessa altura assume a seguinte estratégia.

$$\begin{array}{r} \textcircled{1} \\ 625 \\ \hline 1250 \\ \textcircled{2} \\ \hline 1875 \\ \hline 2500 \end{array}$$

Ora que é multiplicado por 625 e 4.

Figura 17 - Resolução da Nídia do problema 6: "A multiplicar por 625"

A análise detalhada da sua resolução evidencia que continua a recorrer à adição de parcelas iguais a 625, até obter 2500. Durante este percurso existem erros de cálculo que dificultam o percurso. Esta estratégia é próxima de adicionar repetidamente 625, até perfazer 2500, para assim associar o número de vezes que a parcela foi utilizada à resposta do problema.

Durante a intervenção de Nídia, na correção com toda a turma no quadro, explica, de forma muito clara, quais foram as estratégias que seguiu juntamente com o seu grupo. "Nós fizemos a tabuada, experimentámos 625×2 (fez a conta em pé) deus este resultado (1250) e depois acrescentámos mais 625 (...) depois não dava para

chegar ao 2500 e depois fizemos mais 625... e depois vimos que chegou a 2500. Depois contamos quanta vezes é que nós metemos o 625, aqui já vão duas, mais uma e mais uma. Depois fizemos 625×4 e chegámos à resposta 2500. O número que é multiplicado por 625 é o 4."

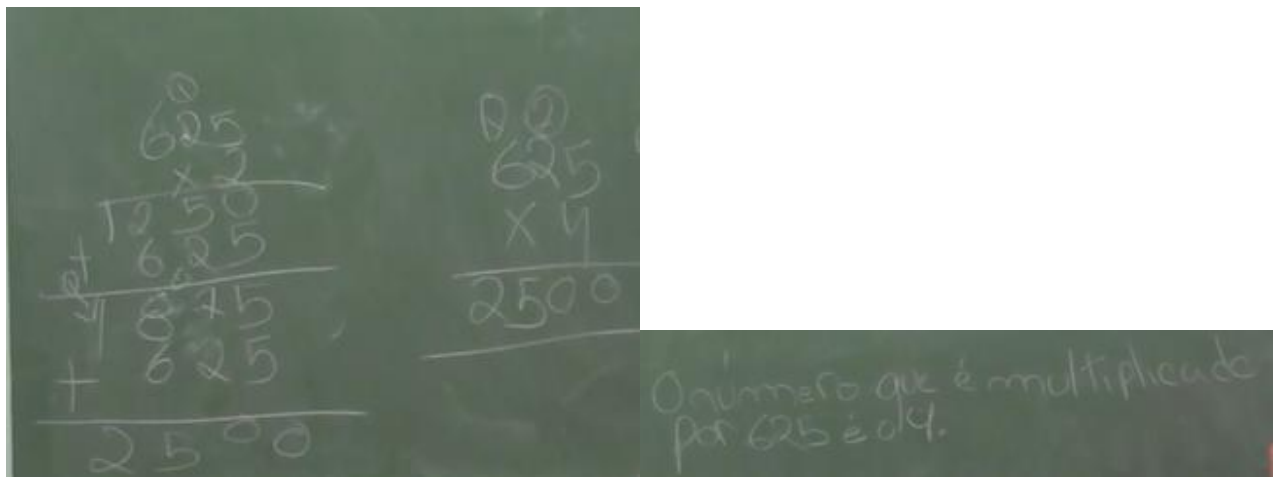


Figura 18 - Resolução da Nídia no quadro do problema 6: "A multiplicar por 625"

Foi apenas durante a correção em grupo com toda a turma que a aluna teve a necessidade de deixar o registo escrito do cálculo de 625×4 . Tudo aponta que percebe a relação entre a adição e a multiplicação.

Síntese

As estratégias utilizadas por Nídia, nos seis problemas apresentados, encontram-se descritas no quadro 6.

Quadro 6 - Estratégias utilizadas por Nídia na resolução dos seis problemas

	Problema	Sentido	Estratégias de resolução
Divisão	1 - “Vamos sentar as pessoas”	Partilha	<ul style="list-style-type: none"> - Estratégia aditiva: Adiciona dobros - Estratégias multiplicativas: Usa fatores de referência Usa múltiplos de 10 Multiplica sucessivamente Multiplica em coluna - Outras: Usa o valor de posição Representa a divisão, utilizando uma estratégia multiplicativa
	2 - “As mesas”	Medida	<ul style="list-style-type: none"> - Estratégia subtrativa - Estratégias multiplicativas: Multiplica sucessivamente Multiplica em coluna - Outras: Usa o valor de posição - Representa a divisão, utilizando uma estratégia multiplicativa
	3 - “A multiplicar por 25”	Operação inversa da multiplicação	<ul style="list-style-type: none"> - Estratégias multiplicativas: Multiplica sucessivamente Multiplica em coluna Outras: Usa o valor de posição - Representa a divisão, utilizando uma estratégia multiplicativa

Quadro 6 (continuação)

	4 - “Os autocarros”	(Não exata) Medida	<ul style="list-style-type: none"> - Representa a divisão, utilizando uma estratégia multiplicativa - Estratégias multiplicativas: <ul style="list-style-type: none"> Multiplica sucessivamente Multiplica em coluna - Estratégia aditiva (adiciona os múltiplos de 50) Outras: <ul style="list-style-type: none"> Usa o valor de posição
	5 - “Número de alunos”	Partilha	<ul style="list-style-type: none"> - Representa a divisão, utilizando uma estratégia multiplicativa - Estratégias multiplicativas: <ul style="list-style-type: none"> Usa fatores de referência Usa múltiplos de 10 Multiplica sucessivamente Multiplica em coluna - Estratégia aditiva (adiciona os múltiplos de 6)
	6 - “A multiplicar por 625”	Operação inversa da multiplicação	<ul style="list-style-type: none"> - Estratégia aditiva: <ul style="list-style-type: none"> Adição repetida - Estratégias multiplicativas: <ul style="list-style-type: none"> Usa o dobro Multiplica em coluna Usa fatores de referência

Todos os problemas foram resolvidos pela Nídia com relativa facilidade.

A Nídia apenas recorre à adição de dobros no problema 1, “Vamos sentar as pessoas”, cujo sentido da divisão apresentada é o de partilha. Parece que o fez pelas indicações que são dadas, de distribuir as 480 pessoas por 60 mesas. Ao adicionar dobros, iniciando em 60+60, desta forma está a “distribuir” as pessoas pelas mesas, com o objetivo que fiquem todas sentadas. Tudo aponta para que tenha recorrido à adição de dobros, pela facilidade que tem em trabalhar com estes números mentalmente.

A aluna apenas utiliza a estratégia subtrativa no problema 2, “As mesas”, cujo sentido da divisão é o de medida. Tudo aponta que o tenha feito pelo facto de estar especificado no problema o número de pessoas que se sentam em cada mesa, ou seja, a medida que é retirada sucessivamente ao todo, até esgotar as pessoas.

Utiliza a representação do algoritmo da divisão em todos os problemas, à exceção do último que foi apresentado, o problema 6, “A multiplicar por 625”. Este facto parece estar relacionado com a forma como está formulada a questão, que incita à utilização da multiplicação. A aluna não utiliza apenas estratégias multiplicativas, mas volta a utilizar estratégias aditivas neste problema. O que leva a crer que está a retroceder nas estratégias que utiliza, uma vez que já tinha recorrido a estratégias mais eficientes.

Apesar de identificar os problemas como sendo de divisão, opta por utilizar estratégias multiplicativas para confirmar o resultado. Por norma, a aluna multiplica o quociente com o divisor para confirmar se obtém o dividendo. A aluna parece reconhecer, frequentemente, a relação particular existente entre as operações divisão e multiplicação, uma vez que opta, na maioria das vezes, por procedimentos multiplicativos para resolver problemas de divisão.

Na resolução dos problemas a aluna tende a utilizar os números que surgem no enunciado. Como o problema 2 e o problema 1 apresentam os mesmos números envolvidos e contextos semelhantes, embora com sentidos de divisão diferentes, um de partilha e outro de medida, na resolução do problema 2, “As mesas”, utiliza um dado que não estava no enunciado do problema, mas que tinha sido descoberto no problema 1, “Vamos sentar as pessoas”. Este facto fez com que a aluna se perdesse no objetivo do problema, ou seja, na questão à qual tinha que apresentar resposta.

Apresenta mais dificuldade no problema 4, “Os autocarros”, cuja divisão é não exata e cujo sentido é de medida. Facto que se deve à dificuldade de interpretação do resto para chegar à resposta. Apesar disso, a Nídia parece ter feito uma evolução nas estratégias que utiliza nos problemas de divisão com sentido de medida, apesar de a ordem de grandeza dos números envolvidos ter aumentado.

A aluna parece apresentar igual facilidade na resolução de problemas de partilha e de medida. O que traduz alguma diferença de desempenho prende-se com a apresentação do problema de divisão não exata, no que diz respeito à dificuldade de interpretação do resto e, por outro lado, ao facto de por vezes, a aluna se baralhar com a apresentação seguida de problemas com números iguais e contextos

semelhantes, apesar de apresentarem sentidos de divisão diferentes, de partilha e de medida.

Nos problemas de divisão com sentido de partilha, a aluna parece também ter evoluído, pelas estratégias que utiliza na sua resolução. No problema 1, “Vamos sentar as pessoas”, recorre a estratégias aditivas e multiplicativas e apenas reconhece o problema como sendo de divisão, pelo incentivo do seu colega de grupo Luís. Enquanto no problema 5, “Número de alunos”, a aluna reconhece imediatamente o problema como sendo de divisão.

Na resolução dos problemas, a Nídia tende a utilizar muitas vezes o recurso à tentativa e erro. Assim como, recorre sistematicamente, a valores de referência, como por exemplo a tabuada do seis, para estabelecer o cálculo mental, talvez por lhe ser familiar. No sentido de aumentar a ordem de grandeza dos números aos quais recorre, utiliza frequentemente múltiplos de 10.

Nos dois problemas de divisão apresentados, cujo sentido é a operação inversa da multiplicação, problemas 3, “A multiplicar por 25” e 6, “A multiplicar por 625”, a aluna reconhece o primeiro, como sendo de divisão e utiliza estratégias multiplicativas associadas, enquanto no segundo problema utiliza novamente estratégias aditivas e multiplicativas. Este facto pode estar relacionado com o aumento da ordem de grandeza dos números envolvidos e por serem diferentes dos anteriormente apresentados nos problemas 4, “Os autocarros” e 5, “Número de alunos”, cujos números eram semelhantes entre si, assim como os contextos, apesar de apresentarem sentidos de divisão diferentes.

A aluna tem em conta o valor de posição dos números com que trabalha, o que é evidenciado nos vários problemas, quando multiplica sucessivamente um fator na busca constante do múltiplo pretendido. Isto significa que Nídia domina o sistema de numeração decimal.

Estratégias utilizadas pelo Luís

O Luís, de 11 anos, é um aluno introvertido e por vezes, com alguma falta de segurança em si próprio. Gosta de passar despercebido e comunica com mais facilidade com os colegas mais próximos, fazendo-o apenas para o grande grupo,

quando sente confiança e domínio nos conteúdos. Apresenta dificuldades na área curricular de Português, na interpretação e compreensão de textos. Ao nível da Matemática, revela grande facilidade no cálculo e no raciocínio, embora as dificuldades na interpretação dos enunciados o levem a não ter o sucesso esperado. Mas apesar disso, é um aluno muito esforçado e não desiste até compreender o que está a ser feito. No trabalho em grupo é muito interessado e colaborativo, contribuindo para que todos os seus colegas do grupo se sintam à vontade para esclarecerem as suas dúvidas.

Problema 1: “Vamos sentar as pessoas”

O Luís começa por partilhar com as colegas do grupo a ideia de utilizar o algoritmo da divisão, como estratégia para resolver o problema. Enquanto estas, discutem estratégias aditivas.

Nídia: Estou a fazer 60 mais 60 que dá 120, 120 mais 120 é ...

Joana: 240

Ivone: $240 + 240$

Luís: Mas também podemos fazer a dividir.

Nídia: Sim, mas é um bocado mais fácil assim.

O aluno abandona esta estratégia, por algum tempo, pelo facto de as colegas não lhe reconhecerem valor, em especial a Nídia, que domina o trabalho do grupo. Desta forma, o aluno colabora com as colegas nas suas estratégias de resolução do problema, nomeadamente, nas estratégias multiplicativas.

Nídia: 6×6 ?

Luís: É 12.

Nídia: Ah, 6×6 é 12?

Luís: Ah, Desculpa.

Nídia: Não, 6×6 (e olha para os placards que se encontram na sala com as tabuadas).

(..)

Luís: (Apesar de não estar de costas para os placards, efetua a contagem pelos dedos).

Nídia: Temos de mostrar todos os cálculos.

Luís: É 36.

Nídia: 36?

(A Joana e Luís olham para os registos escritos que a Nídia está a fazer na folha)

Nídia: Acrescenta zero e dá 360. Por isso não é (faz contagem pelos dedos). E 6×7 ? O melhor é fazermos a tabuada do 6 toda.

O episódio atrás descrito evidencia que o aluno segue o raciocínio da colega Nídia, que utiliza o conhecimento que tem da tabuada do seis, para relacionar com 60, efetuando a multiplicação por 10. Enquanto a colega prossegue no registo da tabuada do seis, para encontrar os múltiplo de seis, o Luís descobre o valor mais próximo do pretendido.

Luís: (Debruça-se por detrás da colega e olha fixamente para os placards que têm as tabuadas). É 6×8 (ri-se de contente). 6×8 é 48.

Mais uma vez, o grupo não dá atenção àquilo que o Luís diz e os restantes alunos do grupo continuam a registar a tabuada do seis. É nessa altura que o aluno decide efetuar o registo do algoritmo da divisão.

$$\begin{array}{r|l} 480 & 60 \\ -480 & \\ \hline 000 & 8 \end{array}$$

Figura 19 - Resolução do Luís do problema 1: "Vamos sentar as pessoas"

Em parte, o Luís aproveita o raciocínio do grupo para estabelecer a relação de $6 \times 8 = 48$ então $60 \times 8 = 480$ e, para determinar o quociente pensa num número que multiplicado por 60 é igual a 480, utilizando estratégias multiplicativas, evidenciadas nos registos de 60×8 .

$$\begin{array}{r} 60 \\ 4 \times 8 \\ \hline 480 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 60 \\ \times 8 \\ \hline 480 \end{array} \quad (8 \times 60)$$

←

$$480$$

Em queda mesa fica 8 pessoas.

Figura 20 - Resolução do Luís do problema 1: "Vamos sentar as pessoas"

Este facto mostra que o aluno compreende o raciocínio utilizado pelo grupo e reconhece o problema como sendo de divisão. Assim como, reconhece também a relação existente entre a operação divisão e multiplicação, uma vez que opta, por estratégias multiplicativas para resolver o problema de divisão.

É curioso que Luís recorre também ao registo da tabuada do seis, incentivado pela colega Nídia. Apesar de ter identificado, com a ajuda dos placards da sala, o resultado de 6×8 .

$$\begin{array}{l} 6 \times 1 = 6 \\ 6 \times 2 = 12 \\ 6 \times 3 = 18 \\ 6 \times 4 = 24 \\ 6 \times 5 = 30 \\ 6 \times 6 = 36 \\ 6 \times 7 = 42 \\ 6 \times 8 = 48 \\ 6 \times 9 = 54 \\ 6 \times 10 = 60 \end{array}$$

Figura 21 - Resolução do Luís do problema 1: "Vamos sentar as pessoas"

Problema 2: “As mesas”

O primeiro raciocínio utilizado pelo Luís foi o de recorrer a uma estratégia subtrativa, a subtração de 60 a 480 e utiliza esta estratégia, muito próxima de retirar uma mesa completa, para assim associar o número de vezes que subtrai ao número de mesas necessárias.

(...)

Luís: $480-60$

Joana: 480×60

Nídia: Podes chegar ao resultado, mas isso dá muito mais, dá bué.

Joana: Não... Mas vamos experimentar.

Nídia: Queres experimentar? Dá o mesmo resultado.

Luís: Podemos fazer de menos.

O aluno abandona esta estratégia por falta de confiança na mesma e pelo grupo não lhe atribuir atenção. O facto de o problema ser de divisão no seu sentido de medida pode ter contribuído para que o Luís utilize uma estratégia subtrativa.

Reconhece o problema como sendo de divisão, mas volta a abandonar esta estratégia por falta de colaboração do grupo e pelo facto de Nídia não aceitar a mesma.

Luís: Podíamos fazer a dividir?

Nídia: Apaga, não tem sentido.

Luís: Podíamos tentar a dividir.

Segue depois o raciocínio da Nídia, sem perceber muito bem o que está em causa.

Nídia: 8 mesas necessárias porque pode ser 1 em cada mesa. Pode ser 8 mesas para 8 pessoas, porque pode se sentar em cada mesa 1 pessoa.

Luís: Sim, também dá.

Com a colaboração da Joana, que identifica através de uma leitura atenta ao enunciado do problema, que se sentam 60 pessoas em cada mesa, o Luís reconhece que este dado se encontra especificado no enunciado.

Joana: 60 pessoas em cada mesa

Nídia: Mas como é que nós vamos mostrar os nossos cálculos?

Luís: 60 pessoas em cada mesa.

(...)

Luís: Ficam 60 pessoas numa mesa, não ficam 8.

Como o grupo associa o problema 2 ao problema 1, utiliza a resposta dada àquele problema, oito, e relaciona-o com os números que constam em ambos os enunciados, 480 pessoas e 60. Embora este último dado apresente significados distintos nos dois problemas, no primeiro são 60 mesas e no segundo são 60 pessoas que ficam em cada mesa, pois as situações apresentadas apelam à divisão com sentidos diferentes, uma no seu sentido de partilha e a outro no sentido de medida. Luís evidencia que tem de utilizar o número oito, apesar de não conseguir atribuir significado àquilo que está a fazer.

(...)

Ivone: Ficam 8.

Luís: Temos que fazer $60 \div 8$.

Mais uma vez, o aluno segue as ideias da colega Nídia, que decide realizar o algoritmo da divisão, $60 \div 8$.

$$\begin{array}{r|l} 7 & 60 \\ \hline & 56 \\ \hline & 04 \end{array}$$

Figura 22 - Resolução do Luís do problema 2: "As mesas"

Nídia: Só se fosse $60 \div 8$. Quanto é que é?

(Luís e Joana contam pelos dedos, Nídia aguarda a resposta dos colegas).

Luís: Quanto é 8×7 ?

Joana: 8×8 é 64.

Luís: 8×7 é 56. Podemos fazer com 7.

(começam todos a registar)

Luís: 6 para 10, 4 e vai 1. Dá resto 4. Podíamos tentar o 6.

Joana: Dá 48.

Luís: Já não dá, então é o 7. Cada mesa fica com 7 pessoas... não, ficam com 7 mesas.

Nídia: Vai sobrar 4 mesas.

Luís: (Acena que sim com a cabeça).

Nídia: Vai ser necessário 7 mesas.

Luís: ... mas ainda sobram 4 mesas.

Mais uma vez, o Luís não consegue atribuir um significado ao que está a fazer. Procura um número que multiplicado por 8 seja o mais próximo de 60, diz que são necessárias 7 mesas e que sobram 4.

Após o meu pedido para voltarem a ler a pergunta, o Luís volta a não entender a questão à qual tem que dar resposta. Mas tudo aponta para que, devido à utilização dos mesmos números que os do problema anterior, o aluno continue a ter presente o número oito, pois este não surge no enunciado do problema. Sugere assim, calcular $60 \div 8$.

Investigadora: Posso pedir para voltarem a ler a pergunta. Quem é que quer ler?

Joana: Queremos distribuir 480 pessoas, sendo que em cada mesa ficam 60 pessoas. Quantas mesas são necessárias?

Nídia: Enganámo-nos. São 480 pessoas e em cada (reforçando em tom mais alto) mesa ficam 60 pessoas. Numa mesa ficam 60 pessoas.

Luís: Temos de fazer $60 \div 8$

Neste momento, o Luís e o grupo encontram-se confusos com a analogia entre o problema 2 e o problema 1.

Nídia: Porque nós já sabemos que precisamos de 8 mesas. Lá (com tom de admiração) ... que pergunta é que era a outra?

(...)

Nídia: E ajudava-nos a chegar ao resultado.

Luís: Aquela (pergunta 1) eram pessoas e esta (pergunta 2) são mesas...

(...)

Nídia: Pois, esquece o 8.

Luís: Precisamos das 8 mesas. Das 7 para colocar 60 pessoas.

Solicito, então, que tentem averiguar se o resultado está de acordo com a questão apresentada.

Investigadora: E se vocês tentarem fazer um esquema, para ver se está bem.

Ivone: 60×7 , para ver se dá 480.

Luís segue o raciocínio do grupo e elabora o algoritmo da multiplicação, 60×7 .

$$\begin{array}{r} 60 \\ \times 7 \\ \hline 420 \end{array}$$

Figura 23 - Resolução do Luís do problema 2: "As mesas"

(...)

Ivone: Então vamos para o 8?

Luís: É 60×8 , não é?

$$\begin{array}{r} 60 \\ \times 8 \\ \hline 480 \end{array}$$

Figura 24 - Resolução do Luís do problema 2: "As mesas"

Nídia: É 480. Ivone o resultado é 480.

Ao verificar que 60×8 é 480, Luís identifica a resposta do problema.

Luís: É necessário 8 mesas.

E o aluno reconhece a possibilidade de realizar o algoritmo da divisão, de $480 \div 8$, com a ajuda da Nídia.

Nídia: E se fizermos $480 \div 8$?

Luís: Dá 60. Estamos a fazer ao contrário...

Nídia: Podemos fazer assim para ver se está certo.

Luís: $480 \div 8$? Não é?

The image shows a handwritten multiplication table on a light blue background. On the left side, the number 480 is written three times, with a horizontal line under the bottom 480. A vertical line is drawn to the right of the 480s. To the right of the vertical line, the number 8 is written above a horizontal line, and the number 60 is written below it. Below the multiplication table, the text "É necessário 8 mesas" is written in cursive.

Figura 25 - Resolução do Luís do problema 2: "As mesas"

O aluno recorre ao registo do algoritmo da divisão, incentivado pela colega, mas apresenta as suas justificações baseadas em raciocínios multiplicativos.

Problema 3: "A multiplicar por 25"

O aluno reconhece imediatamente o problema como sendo de divisão e efetua o algoritmo $150 \div 25$.

$$\begin{array}{r|l}
 750 & 25 \\
 150 & 6 \\
 \hline
 000 &
 \end{array}$$

O número multiplicado por 25 é 6.

Figura 26 - Resolução do Luís do problema 3: "A multiplicar por 25"

Para calcular $150 \div 25$, procura o número que multiplicado por 25 é igual a 150.

$$\begin{array}{r}
 3 \\
 25 \\
 \times 6 \\
 \hline
 150
 \end{array}$$

Figura 27 - Resolução do Luís do problema 3: "A multiplicar por 25"

Durante a resolução deste problema, o Luís manteve-se em silêncio e a trabalhar sozinho parece que, o facto de nos problemas anteriores o grupo não o ter escutado, tenha feito com que se isolasse ou ainda, então, pela confiança na sua própria estratégia de resolução do problema.

Problema 4: "Os autocarros"

O aluno reconhece o problema como sendo de divisão e segue em conjunto com o grupo a mesma estratégia de resolução.

$$\begin{array}{r|l}
 1230 & 50 \\
 7200 & 24 \\
 \hline
 6030 &
 \end{array}$$

Figura 28 - Resolução do Luís do problema 4: "Os autocarros"

(...)

Nídia: (volta a ler a pergunta em voz alta) Estão a organizar um torneio interescolar, em que irão participar 1230 alunos. Vão alugar autocarros que podem transportar 50 pessoas. AHHH...Quantos autocarros são necessários?

Luís: Não sabem é quantos autocarros são.

Ivone: Temos de fazer uma conta...

Luís: Temos de fazer a dividir como ela estava a dizer. Para saber quantos autocarros são.

Ivone: Ah, bora.

Luís: Ela estava certa.

O aluno tenta encontrar por tentativas qual o número que multiplicado por 50 é igual a 1230.

Luís: 50×20 é 100, não é?

Ivone: Sim, depois acrescentas um zero, dá mil

(...)

Luís: $50 \times$ vinte e tal ...

Nídia: Olhem fiz 20×50 dá 1000, já é uma ajuda...

(...)

Luís: Estou a fazer por tentativas.

(...)

Nídia: AH, então e nós também estamos por tentativas. Nós metemos 20.

Luís: Estou lá quase.

Ivone: 30 autocarros.

(...)

Ivone: É 30, iá. Eu pus 20 e depois 4

Joana: Mas tu tens que somar isto (apontando para o 20 e para o 4), não é isto.

Ivone: (ri-se) É 24.

Luís: Então 24×50 dá 1200... 50 não dá para dividir por 30... então é 30 autocarros.

$$\begin{array}{r} 50 \\ \times 24 \\ \hline 200 \\ 760 \\ \hline 1200 \end{array}$$

Figura 29 - Resolução do Luís do problema 4: "Os autocarros"

Pelas evidências apresentadas parece que o aluno se confunde um pouco entre o resto, 30 e o quociente, 24. Tudo aponta para que o faça pelos comentários da colega Ivone.

Ivone: Vamos fazer de vezes (x).

Luís: Não dá, é 30 autocarros... Só pode ser 30. 25 já passa, 25×50 é 1250. Já passa.

Nídia: Não, espera.

Ivone: 30 autocarros. Não é 25 é 24.

Luís: Com 25 é 1250.

Ivone: Primeiro fiz 50×20 .

Nídia: Tem de ser 24 autocarros.

Luís: 24?

Ivone: Não, 30.

Nídia: 24.

Luís: 24.

Nídia: E sobram 30 pessoas.

Ivone: iá.

Nídia: Então são 24 autocarros e sobram 30 pessoas.

Luís: Então são 24 autocarros e sobraram 30 pessoas.

Interrogados por mim, sobre a ida ou não destes 30 alunos, o Luís começa por afirmar que não vão, porque estão de castigo.

Investigadora: E essas 30 pessoas não vão? Esses 30 alunos não vão ao torneio?

Luís: Não.

(...)

Investigadora: Então e se eles tiverem de ir? Como é que eles vão?

(...)

Luís: Não vão, estão de castigo.

O aluno diz que são necessários 24 autocarros e que sobram 30 alunos, pois a hipótese de $25 \times 50 = 1250$ o que já ultrapassa o número de alunos, 1230.

$$\begin{array}{r} 56 \\ \times 25 \\ \hline 280 \\ 1120 \\ \hline 1400 \end{array}$$

The image shows a handwritten calculation where the student has written 56 multiplied by 25. The intermediate steps are 280 and 1120, but the final result written is 1250, which is incorrect.

Figura 30 - Resolução do Luís do problema 4: "Os autocarros"

Luís: 25×50 dá 1250, já passa.

Investigadora: mas podem sobrar lugares, ou não?

Luís: Não sobram lugares.

Investigadora: Mas podem ir lugares livres no autocarro ou não?

Luís: Não sei. (O Luís e a Nídia olham pela janela)

É curioso o facto de à minha questão sobre a possibilidade de sobrares lugares no autocarro, o Luís reagir espreitando pela janela da sala, no sentido de

visualizar se há autocarros com lugares livres, a deslocarem-se na avenida junto à escola.

Ao que volto a questionar se esses 30 alunos que ficam na escola e tento relacionar o facto com as suas visitas de estudo. Se acontecesse o mesmo facto, na turma deles, ficariam esses alunos sem ir ao torneio. É aí que o grupo, incluindo o Luís, pensa que é injusto os restantes alunos não participarem. Pelo que sugere a necessidade de mais um autocarro e da possibilidade de não ir completo.

Investigadora: Essas 30 pessoas também têm que ir, não podem ficar na escola?

Luís: Então vão 25 autocarros.

(...)

Luís: São necessários 25 autocarros e sobraram 20 lugares.

Figura 31 - Resposta do Luís do problema 4: "Os autocarros"

Na correção em grande grupo, o aluno aproveita para reforçar aos colegas da turma a razão pela qual é necessário mais 1 autocarro.

(...)

Investigadora: Alguns meninos deste grupo ainda pensaram em apenas 24 autocarros, porque o quociente era 24, mas sobravam 30 alunos. E porque eles também queriam ir ao torneio interescolar, é necessário mais 1 autocarro.

Luís: Sobravam eram lugares.

Investigadora: Sobravam eram lugares livres.

Luís: O que interessa é que eles vão. Quando nós vamos a passeios às vezes sobram lugares.

Problema 5: "Número de alunos"

O Luís segue a iniciativa da colega Nídia, de realizar o cálculo $1230 \div 6$.

Luís: (Lê em voz alta o problema) No torneio interescolar, os 1230 (vamos sublinhar) alunos que irão participar vão ser divididos em 6 grupos. Quantos alunos ficam em cada grupo?

Nídia: Temos de fazer 1230 a dividir por 6.

Confunde qual o objetivo do problema ao qual tem que apresentar resposta.

Luís: Para dar quantos grupos vão ficar.

Nídia: Não, para dar quantas pessoas é que vão ficar em cada grupo.

Luís: Sim.

Rapidamente dá a resposta ao problema.

$$\begin{array}{r|l} 7230 & \text{B} \\ -1200 & 200 \\ \hline 630 & +5 \\ -600 & \hline 000 & 205 \end{array}$$

Figura 32 - Resolução do Luís do problema 5: "Número de alunos"

Luís: Já está, é 205.

(Nídia ouve o colega e olha para a folha de resposta do Luís).

(...)

Luís: Vão ficar 205 pessoas em 6 grupos.

Para calcular $1230 \div 6$, o Luís efetua a procura do número que multiplicado por 6 é próximo de 1230. Parece que utiliza números que lhe são familiares e com os quais consegue realizar mentalmente o cálculo, como é o caso do 200 e de 5. Dado, uma vez que o aluno não regista os algoritmos da multiplicação, 6×200 e 6×5 e apenas regista o algoritmo 6×205 , para confirmar se de facto obtém 1230.

Luís: Pode ser 205×6 . Temos de fazer a conta de vezes, o que sobrou e o que somámos (faz a conta)... Está certo.

$$\begin{array}{r} 205 \\ \times 6 \\ \hline 1230 \end{array}$$

Em quada grupo ficam 205 alunos

Figura 33 - Resolução do Luís do problema 5: "Número de alunos"

O Luís reconhece o problema como sendo de divisão e para determinar o quociente e confirmar o resultado utiliza estratégias multiplicativas.

Problema 6: "A multiplicar por 625"

O aluno começa por verbalizar a ideia de recorrer ao algoritmo da divisão, para calcular, $625 \div 2500$. Tal iniciativa revela falta de compreensão da grandeza dos números apresentados no problema e da relação entre a multiplicação e a divisão. Mas rapidamente abandona esta estratégia.

Luís: Então podemos fazer 625 a dividir por 2500.

O Luís segue o raciocínio da colega Nídia e realiza a adição repetida da parcela 625 até obter 2500. Durante este processo comete erros de cálculo, que fazem com que demore mais algum tempo a chegar à resposta correta.

Nídia: Se calhar podemos meter 625 mais 625?

Joana: Mas assim estamos sempre a somar.

Ivone: Sim, mas depois podemos fazer de vezes (x).

Nídia: 2×625 .

(...)

Luís: Dá 1500

Nídia: Como é que sabes?

Luís: Sabendo.

(...)

Luís: Ai não é não.

Nídia: 1200, pois.

Luís: 1250

The image shows handwritten mathematical work. At the top, there is a vertical addition of 625 four times. The first 625 has a small '1' above the '6'. The second 625 is added to the first, resulting in 1250. The third 625 is added to 1250, resulting in 1875. The fourth 625 is added to 1875, resulting in 2500. Below this, there is a multiplication check: 4 times 625 equals 2500. The numbers are written in a simple, slightly messy hand.

Figura 34 - Resolução do Luís do problema 6: "A multiplicar por 625"

Esta estratégia é próxima de adicionar repetidamente 625, até perfazer 2500, para assim associar o número de vezes que a parcela foi utilizada na resposta ao problema. O aluno passa para uma estratégia multiplicativa de confirmação do resultado, ou seja, depois de adicionar quatro vezes a parcela 625, efetua o algoritmo da multiplicação, 4×625 . Esta estratégia evidencia a percepção da relação entre a adição e a multiplicação.

(...)

Luís: 4×625 e para mim deu 2490, mas se somar mais 625 já passa.

$$\begin{array}{r}
 72 \\
 625 \\
 \times 54 \\
 \hline
 2500
 \end{array}$$

O número multiplicado por 625 é 4.

Figura 35 - Resolução do Luís do problema 6: "A multiplicar por 625"

Após o meu pedido para voltar a rever os cálculos, o aluno corrige o algoritmo da multiplicação, como se verifica na figura 35, assim como, o da adição repetida da parcela 625, que consta da figura 34.

(...)

Luís: está certo, é 4.

É curioso que o aluno recorre também ao registo do algoritmo da divisão, mas não efetua o cálculo. Parece que identifica o problema como sendo de divisão, mas talvez por uma questão de tempo ou de já ter chegado à resposta pretendida, abandona esta estratégia.

$$2500 \overline{) 625}$$

Figura 36 - Resolução do Luís do problema 6: "A multiplicar por 625"

Síntese

As estratégias utilizadas por Luís, nos seis problemas apresentados, encontram-se descritas no quadro 7.

Quadro 7 - Estratégias utilizadas por Luís na resolução dos seis problemas

	Problema	Sentido	Estratégias de resolução
Divisão	1 - “Vamos sentar as pessoas”	Partilha	- Estratégias multiplicativas: Usa fatores de referência Usa múltiplos de 10 Multiplica sucessivamente Multiplica em coluna - Outras: Usa o valor de posição Representa a divisão, utilizando uma estratégia multiplicativa
	2 - “As mesas”	Medida	- Estratégia subtrativa - Estratégias multiplicativas: Multiplica sucessivamente Multiplica em coluna - Outras: Usa o valor de posição - Representa a divisão, utilizando uma estratégia multiplicativa
	3 - “A multiplicar por 25”	Operação inversa da multiplicação	- Representa a divisão, utilizando uma estratégia multiplicativa - Estratégias multiplicativas: Multiplica sucessivamente Multiplica em coluna Outras: Usa o valor de posição

Quadro 7 (continuação)

	4 - “Os autocarros”	(Não exata) Medida	<ul style="list-style-type: none"> - Representa a divisão, utilizando uma estratégia multiplicativa - Estratégias multiplicativas: Multiplica sucessivamente Multiplica em coluna Outras: Usa o valor de posição
	5 - “Número de alunos”	Partilha	<ul style="list-style-type: none"> - Representa a divisão, utilizando uma estratégia multiplicativa - Estratégias multiplicativas: Usa fatores de referência Multiplica sucessivamente Multiplica em coluna - Estratégia aditiva (adiciona os múltiplos de 6)
	6 - “A multiplicar por 625”	Operação inversa da multiplicação	<ul style="list-style-type: none"> - Estratégia aditiva: Adição repetida de parcelas iguais, 625. - Estratégias multiplicativas: Multiplica em coluna Outras: Usa o valor de posição - Representa a divisão

O aluno reconhece imediatamente os diferentes problemas como sendo de divisão, à exceção do último e transmite essa ideia ao grupo, que na maioria das vezes, não lhe reconhece valor o que o leva a abandonar esse caminho. Por norma, o Luís segue as indicações de resolução das colegas, principalmente da Nídia, o que revela falta de confiança nas suas próprias estratégias.

O aluno apenas utiliza a estratégia subtrativa no problema 2, “As mesas”, cujo sentido da divisão é o de medida. Tudo aponta que o tenha feito pelo facto de estar especificado no problema o número de pessoas que se sentam em cada mesa, ou seja, a medida que é retirada sucessivamente ao todo, até esgotar as pessoas.

O Luís apenas utiliza a estratégia da adição repetida de parcelas iguais no problema 6, “A multiplicar por 625”, cujo sentido da divisão é o de operação inversa da multiplicação e foi o último problema apresentado. Este facto pode estar relacionado com o aumento da ordem de grandeza dos números envolvidos e por serem diferentes dos anteriormente apresentados nos problemas 4, “Os autocarros” e 5, “Número de alunos”, cujos números eram semelhantes entre si, assim como os contextos, apesar de apresentarem sentidos de divisão diferentes. Também é de salientar que o aluno confirma o resultado da adição repetida de parcelas iguais através do algoritmo da multiplicação, o que revela que compreende a relação entre a adição e a multiplicação. Não obstante, se por um lado nos leva a crer que está a retroceder nas estratégias que utiliza, uma vez que já tinha recorrido a estratégias mais eficientes, por outro, é notório que evolui de estratégias aditivas para uma estratégia multiplicativa. E ainda reconhece a divisão como estratégia de resolução do problema, apesar de não realizar o cálculo.

O aluno identifica todos os problemas como sendo de divisão. No problema 6, “A multiplicar por 625”, apenas regista a intenção de realizar o algoritmo da divisão, mas não chega a concretizá-lo. Tudo aponta para que o tenha feito por uma questão de tempo ou por já ter chegado à resposta pretendida, o que o leva a abandonar esta estratégia.

Apesar de identificar os problemas como sendo de divisão, realiza estratégias multiplicativas para confirmar o resultado. Por norma, o aluno multiplica o quociente pelo divisor para confirmar se obtém o dividendo. O aluno parece reconhecer, frequentemente, a relação particular existente entre as operações divisão e multiplicação, uma vez que opta, na maioria das vezes, por procedimentos multiplicativos para resolver problemas de divisão.

Apresenta mais dificuldade no problema 4, “Os autocarros”, cuja divisão é não exata e cujo sentido é de medida. Facto que se deve à dificuldade de interpretação do resto para chegar à resposta. O aluno parece ter compreendido o significado do resto, quando é feita uma comparação com a sua própria experiência na deslocação da sua turma em visitas de estudo. Curioso foi também o “espreitar” pela janela da sala, no sentido de confirmar se existem autocarros que se deslocam com lugares vazios.

O Luís parece ter feito uma evolução nas estratégias que utiliza nos problemas de divisão com sentido de medida, apesar de a ordem de grandeza dos números envolvidos ter aumentado. Enquanto na resolução do problema 2, “As mesas”, o aluno

utiliza estratégias subtrativas, multiplicativas e só reconhece depois o problema como sendo de divisão. No Problema 4, “Os autocarros”, o aluno reconhece imediatamente o problema como sendo de divisão.

Nos problemas de divisão com sentido de partilha, problema 1, “Vamos sentar as pessoas” e problema 5, “Número de alunos”, o aluno parece ter tido igual à vontade em ambos os problemas, apesar da ordem de grandeza dos números ter aumentado. No primeiro problema apenas não utilizou logo a representação do algoritmo da divisão na resolução do mesmo pela não-aceitação das colegas, mas este facto não o impediu de afirmar mais tarde a sua ideia.

O Luís parece apresentar igual facilidade na resolução de problemas de partilha e de medida. A diferença de desempenho parece estar relacionada com a apresentação do problema de divisão não exata, no que diz respeito à dificuldade de interpretação do resto e, por outro lado, ao facto de, por vezes, o aluno se confundir com a apresentação seguida de problemas com números iguais e contextos semelhantes, embora apresentando sentidos de divisão diferentes (de partilha e de medida), nomeadamente nos problemas 1 e 2.

Na resolução dos problemas, o Luís tende a utilizar muitas vezes o recurso à tentativa e erro.

O aluno domina o sistema de numeração decimal, uma vez que tem em conta o valor de posição dos números com que trabalha, o que é evidenciado nos vários problemas, quando multiplica sucessivamente um fator na busca constante do múltiplo pretendido.

Estratégias utilizadas pela Joana

A Joana, de 11 anos, é uma aluna que está a realizar pela segunda vez o 4º ano de escolaridade. Normalmente, é uma aluna comunicativa e expressiva, embora tenha manifestado alguma timidez perante a câmara na fase inicial. Tem maior maturidade que os colegas da sua turma. Apresenta resultados satisfatórios a Matemática. É muito esforçada e empenhada na realização das tarefas escolares e colaborativa no trabalho em grupo.

Problema 1: "Vamos sentar as pessoas"

Inicia a resolução do problema com uma estratégia aditiva.

Nídia: (Depois de escrever o nome, olha para a folha dos colegas, Joana e Luís. Começa a ler em voz alta, como para que os outros ouçam o que ela está a dizer). Estou a fazer 60 mais 60 que dá 120, 120 mais 120 é ... (pedindo a confirmação dos colegas do grupo).

Joana: 240

Segue para uma estratégia multiplicativa, que a colega Nídia indica, $6 \times 6 = 36$ para estabelecer a relação com $6 \times 60 = 360$.

Nídia: (...) 6×6 é ...

(...)

Luís: É 36.

Nídia: 36? Acrescenta zero e dá 360. Por isso não é. E 6×7 ? O melhor é fazermos a tabuada do 6 toda.

Luís: É 6×8 . 6×8 é 48.

(...)

Nídia: Fazemos a tabuada aqui (folha) e depois é mais fácil.

Joana: Então vamos fazer a tabuada do seis.

A Joana recorre à contagem pelos dedos para escrever a tabuada do 6.

Handwritten multiplication table for 6:

$6 \times 1 = 6$	
$6 \times 2 = 12$	
$6 \times 3 = 18$	
$6 \times 4 = 24$	
$6 \times 5 = 30$	$6 \times 6 = 36$
$6 \times 7 = 42$	
$6 \times 8 = 48$	
$6 \times 9 = 54$	
$6 \times 10 = 60$	

Figura 37 - Resolução da Joana do problema 1: "Vamos sentar as pessoas"

Como se esquece de registar na tabuada o produto de 6×6 , coloca-o de lado. Ao alcançar o $6 \times 8 = 48$ estabelece a ligação com $60 \times 8 = 480$. Esta estratégia é próxima de colocar as pessoas nas sessenta mesas, até todas estarem sentadas, para assim associar ao número de pessoas que ficam em cada mesa.

De seguida, a aluna, faz o algoritmo de 60×8 , para confirmar o seu raciocínio.

Figura 38 - Resolução da Joana do problema 1: "Vamos sentar as pessoas"

Na correção em grande grupo a Joana indica a toda a turma, qual o caminho que segue, juntamente com o grupo, na resolução do problema.

(...)

Joana: Nós primeiro fizemos a tabuada do 6 toda e depois chegámos ao 6×8 que dá 48.

(...)

Investigadora: Joana tu tens $6 \times 8 = 48$ e depois como é que passaram para o 480?

Joana: Porque nós pensámos que $6 \times 8 = 48$ e $60 \times 8 = 480$

A aluna recorre ao registo do algoritmo da divisão, incentivada pelo colega Luís, mas apresenta as suas justificações baseadas em raciocínios multiplicativos.

$$\begin{array}{r|l}
 480 & 60 \\
 -480 & 8 \\
 \hline
 000 &
 \end{array}$$

Figura 39 - Resolução da Joana do problema 1: "Vamos sentar as pessoas"

Problema 2: "As mesas"

A Joana parece um pouco confusa após a leitura do enunciado do problema, talvez pelo facto dos números do mesmo serem iguais aos utilizados no anterior e sugere a utilização de uma estratégia multiplicativa para resolvê-lo.

(...)

Joana: Isto não faz muito sentido

Ivone: $8 \times 60 = 480$

Luís: $480 - 60$

Joana: 480×60

Nídia: Podes chegar ao resultado, mas isso dá muito mais, dá bué.

Joana: Não... Mas vamos experimentar.

A estratégia que a Joana propõe revela falta de sentido crítico e de valor numérico. Tudo aponta que o tenha feito, com o objetivo de utilizar os números que constam do enunciado. Abandona rapidamente esta estratégia por falta de colaboração do grupo.

Mais tarde, a aluna, relembra ao grupo que em cada mesa se sentam 60 pessoas, mas continua confusa com o facto de os números deste problema, serem iguais aos do anterior.

(...)

Nídia: 8 mesas necessárias porque pode ser 1 em cada mesa. Pode ser 8 mesas para 8 pessoas, porque pode se sentar em cada mesa 1 pessoa.

Luís: Sim, também dá.

Nídia: Dá, eu acho que pode ser.

Joana: 60 pessoas em cada mesa.

(...)

Nídia: $480 \div 6$ (e depois corrige rapidamente para) $480 \div 60$.

Ivone: Isso é igual à outra.

Luís: Ficam 60 pessoas numa mesa, não ficam 8.

Nídia: Sim... Mas primeiro temos que mostrar os cálculos, para a professora ver como é que nós chegámos.

Joana: No outro é que era 60×8 , aqui é 480.

Segue o raciocínio da Nídia, que propõe realizar $60 \div 8$.

Nídia: Só se fosse $60 \div 8$. Quanto é que é?

$$\begin{array}{r} 60 \overline{) 8} \\ - 56 \\ \hline 04 \end{array}$$

Figura 40 - Resolução da Joana do problema 2: "As mesas"

Colabora com o grupo com o objetivo de encontrar um número que multiplicado por 8 seja o mais próximo de 60, encontram o 7 e como resto 4.

Luís: Quanto é 8×7 ?

Joana: 8×8 é 64.

Luís: 8×7 é 56. Podemos fazer com 7.

(começam todos a registar)

Luís: 6 para 10, 4 e vai 1, e vai 1. Dá resto 4. Podíamos tentar o 6.

Joana: Dá 48.

Luís: Já não dá, então é o 7. Cada mesa fica com 7 pessoas... não ficam com 7 mesas

Nídia: Vai sobrar 4 mesas

Luís: (Acena que sim com a cabeça)

Nídia: Vai ser necessário 7 mesas

Luís: ... Mas ainda sobram 4 mesas

Nídia: São necessárias 7 mesas, mas sobram 4.

(...)

Investigadora: Então a que conclusões estão a chegar? Então expliquem-me lá, o que é que vocês fizeram

Nídia: Nós fizemos 60×8 , dá 7, que dá 56 e depois sobra 4

Investigadora: 60×8 ou $60 \div 8$?

Nídia: $60 \div 8$? (e os colegas confirmam), desculpe enganei-me, e depois fizemos o 7...

Joana: 7×8 que é 56

Investigadora: Sim

Nídia: E depois...

Luís: E sobrou 4

Nídia: E sobrou 4 e como já não há nenhum múltiplo de 8 que dê 4.

Assim, solicito que tentem averiguar se o resultado está de acordo com a questão apresentada.

Investigadora: E se vocês tentarem fazer um esquema, para ver se está bem.

Joana: Queremos distribuir 480 pessoas, sendo que em cada mesa ficam 60 pessoas. Quantas mesas são necessárias?

Nídia: Enganámo-nos. São 480 pessoas e em cada mesa ficam 60 pessoas.

Numa mesa ficam 60 pessoas.

(..)

Nídia: Ou então só se fizermos $480 \div 8$

(...)

Nídia: Porque nós já sabemos que precisamos de 8 mesas.... que pergunta é que era a outra?

Investigadora: Era parecida a esta.

Nídia: E ajudava-nos a chegar ao resultado.

A Joana apenas segue as ideias da Nídia e da Ivone e tenta averiguar se o resultado está de acordo com a questão apresentada, tal como solicitado novamente pela investigadora.

Investigadora: E se vocês tentarem fazer um esquema, para ver se está bem.

Neste momento, a Joana segue a ideia da Ivone, que propõe realizar 60×7 , na procura do número que multiplicado por 60 é igual a 480.

Ivone: 60×7 , para ver se dá 480.

Nídia: 6×7 é 36, aí não é 42.

Joana: Dá 420

Nídia: lá, não é...

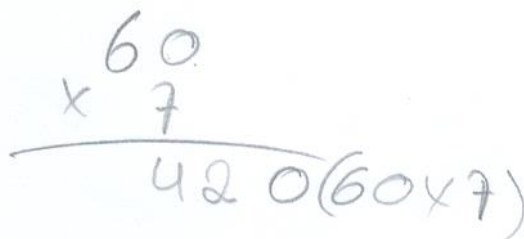

$$\begin{array}{r} 60 \\ \times 7 \\ \hline 420 (60 \times 7) \end{array}$$

Figura 41 - Resolução da Joana do problema 2: "As mesas"

Como 60×7 dá 420 seguem para 60×8 .

Joana: É a mesma coisa que fizemos na outra, fizemos de menos e não deu.

Tu até fizeste aqui (apontando para a folha da Nídia)

Ivone: Então vamos para o 8?

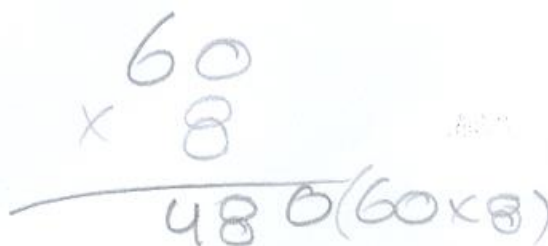

$$\begin{array}{r} 60 \\ \times 8 \\ \hline 480 (60 \times 8) \end{array}$$

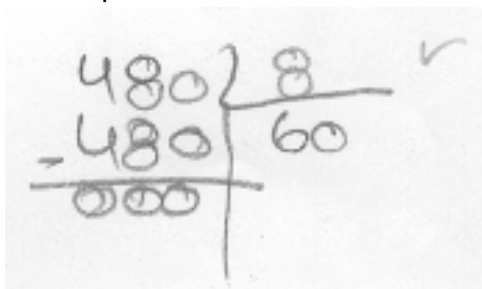
Figura 42 - Resolução da Joana do problema 2: "As mesas"

A Joana volta novamente a executar o raciocínio da Nídia e realiza o algoritmo da divisão, $480 \div 8$.

Nídia: E se fizermos $480 \div 8$?

Luís: Dá 60. Estamos a fazer ao contrário...

Nídia: Podemos fazer assim para ver se está certo.



The image shows a handwritten long division problem. On the left, 480 is written above a horizontal line, with a minus sign and 480 written below it, and 000 written below that. On the right, 8 is written above a horizontal line, and 60 is written below it. A vertical line separates the two parts. A checkmark is visible to the right of the 8.

Figura 43 - Resolução da Joana do problema 2: "As mesas"

A aluna recorre ao registo do algoritmo da divisão, incentivada pela colega Nídia, mas apresenta as suas justificações baseadas em raciocínios multiplicativos. E para determinar o quociente utiliza, em parte, o raciocínio que seguiu com o grupo, ou seja, a procura de um número que multiplicado por 60 é igual a 480. Apesar de não realizar por escrito a operação $480 \div 60$, a mesma operação é evidenciada quando faz 60×7 e 60×8 .

Problema 3: "A multiplicar por 25"

Num primeiro momento, Joana fica parada a olhar para aquilo que Nídia está a fazer, como que a seguir o seu raciocínio. Mas é certo é que entende o objetivo da questão e o pensamento do grupo é encontrar um número que multiplicado por 25 seja igual a 150. E enquanto as colegas propõem números mais descabidos, a Joana acerta em cheio, parecendo que utiliza o valor de posição dos números com que está a trabalhar.

Ivone: É 25×8 , acho eu.

(...)

Ivone: Agora estou a fazer de cabeça.

(A Nídia e a Joana estão a trabalhar sozinhas)

Joana: É 6.

Ivone: Lá, 25×6 .

(Joana ri-se para o Luís, Ivone conta pelos dedos)

Nídia: 25×5 , enganámo-nos.

Joana: Não. É 25×6 .

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times 6 \\ \hline 150 \end{array}$$

$6 \times 25 = 150$ ou $25 \times 6 = 150$

Figura 44 - Resolução da Joana do problema 3: "A multiplicar por 25"

Pela resposta dada, verifico que a Joana utiliza a propriedade comutativa da multiplicação na resolução do problema.

De seguida, a aluna recorre ao registo do algoritmo da divisão, incentivada pelos colegas Luís e Ivone, mas apresenta as suas justificações baseadas em raciocínios multiplicativos. Para determinar o quociente utiliza, em parte, o raciocínio que seguiu com o grupo, ou seja, a procura de um número que multiplicado por 25 é igual a 150.

$$\begin{array}{r|l} 250 & 25 \\ - 150 & 6 \\ \hline 000 & \end{array}$$

Figura 45 - Resolução da Joana do problema 3: "A multiplicar por 25"

Problema 4: “Os autocarros”

O primeiro raciocínio da Joana foi indicar uma estratégia multiplicativa, como possível caminho para resolução do problema.

(...)

Joana: Eu acho que é de vezes.

Ivone: Eu também acho que era de vezes.

Nídia: Eu acho que é de dividir.

Joana: Vamos ver.

Ivone: Lá, não, porque assim precisamos de 50 autocarros.

Nídia: Não se for de vezes, nós temos que saber quantas pessoas podemos dividir por 50 autocarros. Porque não podemos fazer uma conta de vezes. Só podemos fazer uma conta de dividir.

Ivone: Eu sei lá.

Joana: Mas não são 50 autocarros, são 50 pessoas.

No diálogo entre a Joana e as suas colegas é evidente que a aluna não tem em conta a questão à qual tem que dar resposta e, por outro lado, parece “lançar” para a discussão um “palpite”, sem perceber muito bem a relação entre os dados do problema. Só através do diálogo com as colegas é que entende e ajuda o grupo a perceber que não são 50 autocarros, mas sim, 50 pessoas.

O grupo segue esta indicação e, com a ajuda da Nídia e do Luís, prossegue para a realização do algoritmo de $1230 \div 50$.

$$\begin{array}{r} 1230 \overline{) 50} \\ - 1000 \\ \hline 0230 \\ - 200 \\ \hline 030 \end{array}$$

Figura 46 - Resolução da Joana do problema 4: "Os autocarros"

(...)

Luís: Temos de fazer a dividir como ela estava a dizer. Para saber quantos autocarros são.

Ivone: Ah bora.

Luís: Ela estava certa.

Para calcular o quociente a Joana inicia a procura do número que multiplicado por cinquenta é igual a 1230.

Luís: 50×20 é 100, não é?

Joana: 50×20 é 100, então como é que eu estou a fazer esta porcaria. Dá a borracha (e apaga).

A Joana revela falta de confiança no seu trabalho e decide apagar o que está a fazer, uma vez que o seu colega dissera que o resultado do algoritmo 50×20 é 100.

Mais tarde, a aluna verifica que estava a proceder bem e regista-o na sua folha.

(...)

Nídia: Olhem fiz 20×50 dá 1000, já é uma ajuda...

Joana: Então tinha certo.

$$\begin{array}{r} 50 \\ \times 20 \\ \hline 1000(20 \times 50) \\ \hline 1000 \end{array}$$

Figura 47 - Resolução da Joana do problema 4: "Os autocarros"

A sua resolução evidencia a utilização de estratégias multiplicativas, em que inicia o cálculo com o número 20, um múltiplo de 10, talvez por lhe ser facilitador na obtenção de um número próximo do pretendido. Curioso o facto de que a Joana não realiza por escrito o algoritmo 4×50 , mas coloca-o no algoritmo $1230 \div 50$ e quando

realiza o algoritmo 50×24 , tudo aponta para que o tenha feito mentalmente. Certo é que ajuda a colega Ivone a entender qual é a resposta ao problema, ou seja, o quociente, pois esta está a fazer confusão com o resto.

Ivone: 30 autocarros.

(...)

Ivone: É 30, iá. Eu pus 20 e depois 4

Joana: Mas tu tens que somar isto (apontando para o 20 e para o 4), não é isto.

Ivone: (ri-se) É 24.

Joana realiza ainda o algoritmo 50×24 , no sentido de confirmar se obtém 1200 e se sobram 30 alunos.

$$\begin{array}{r} 50 \\ \times 24 \\ \hline 200 \text{ (} 4 \times 50 \text{)} \\ 1000 \text{ (} 20 \times 50 \text{)} \\ \hline 1200 \end{array}$$

Figura 48 - Resolução da Joana do problema 4: "Os autocarros"

A Joana continua a seguir o caminho do grupo, quando se coloca a questão se os 30 alunos que sobram, deveriam ou não ir ao torneio interescolar. Tudo aponta para que compreenda que é necessário mais 1 autocarro, que leva 20 lugares livres, pois altera o seu registo na resposta ao problema. Mas durante a discussão, a Joana não se manifesta verbalmente.

Alugaram 29 autocarros e sobram 20 lugares.

Figura 49 - Resposta da Joana do problema 4: "Os autocarros"

Problema 5: "Número de alunos"

Na correção em grande grupo, a Joana explicita claramente as estratégias utilizadas pelo grupo. Reconhece o problema como sendo de divisão.

Joana: Nós fizemos 1230 a dividir por 6. E depois tentámos 200×6 dá 1200.

$$\begin{array}{r|l} 1230 & 6 \\ -1200 & 200 \\ \hline 0030 & 35 \\ -30 & 205 \\ \hline 0000 & \end{array}$$

Figura 50 - Resolução da Joana do problema 5: "Número de alunos"

Investigadora: (Lê novamente o problema e chama a atenção para a palavra divididos) Qual a operação que é necessário realizar? Ela dividiu 1230 por 6.

Luís: Depois nós vimos 6×5 dá 30

(...)

Nídia: Tens que somar (referindo-se ao 200 e ao 5)

A aluna reconhece o problema como sendo de divisão e, para determinar o quociente procura um número que multiplicado por 6 é igual ou próximo de 1230, utilizando estratégias multiplicativas. No final, multiplica o quociente com o divisor para confirmar se obtém o dividendo.

Joana: Depois para ver se estava bem nós fizemos 205×6 . Depois fiz 6×5 é 30 e 6×200 é 1200 e somei e dá 1230.

$$\begin{array}{r}
 205 \\
 \times 6 \\
 \hline
 30 \text{ (} 6 \times 5 \text{)} \\
 + 200 \text{ (} 6 \times 200 \text{)} \\
 \hline
 1230
 \end{array}$$

Figura 51 - Resolução da Joana do problema 5: "Número de alunos"

Investigadora: Está de acordo com o número de alunos (o dividendo)?

Joana: Sim

Investigadora: Sobrou algum aluno?

Joana: Não

Investigadora: É uma divisão?

Joana: Inteira e exata.

Investigadora: Porque o resto é zero. Quantos alunos ficam em cada grupo?

Joana: Em cada grupo ficam 205 alunos.

Em cada grupo ficam 205 alunos.

Figura 52 - Resposta da Joana do problema 5: "Número de alunos"

Problema 6: "A multiplicar por 625"

A Joana identifica imediatamente a multiplicação como estratégia de resolução do problema. Procura um número que multiplicado por 625 é igual a 2500.

Ivone: Qual o número que multiplicado por 625 é igual a 2500?

Luís: Posso dar uma opinião?

(...)

Luís: Então podemos fazer 625 a dividir por 1500.

Joana: Podíamos era fazer como fizemos a outra. Nós não fizemos a tabuada?

Luís: Fizemos.

Joana: Atão.

Luís: No outro não.

A aluna reconhece as vantagens da multiplicação em relação à adição, dado que estão a trabalhar com números com maior ordem de grandeza e defende a sua ideia no grupo.

Joana: Este tem números maiores. Podemos fazer.

Ivone: Podemos fazer por tentativas.

Nídia: Se calhar podemos meter 625 mais 625?

Joana: Mas assim estamos sempre a somar.

Começa então por multiplicar 2×625 , por sugestão da Nídia, e avança para 3×625 , na procura de 2500 como resultado.

(...)

Nídia: 2×625 .

Ivone: Não.

Luís: Dá 1500

Nídia: Como é que sabes?

Luís: Sabendo.

Joana: E 3?

Nídia: Não, eu vou meter, eu vou meter.

Joana: Eu vou meter 3 já.

$$\begin{array}{r}
 625 \\
 \times 3 \\
 \hline
 15 \text{ (3} \times 5\text{)} \\
 60 \text{ (3} \times 20\text{)} \\
 1800 \text{ (3} \times 600\text{)} \\
 + \\
 \hline
 1875
 \end{array}$$

Figura 53 - Resolução da Joana do problema 6: "A multiplicar por 625"

Como o resultado do algoritmo 625×3 é igual a 1875, a Joana avança para 625×4 , para confirmar se obtém o múltiplo de 625 pretendido.

$$\begin{array}{r}
 625 \\
 \times 4 \\
 \hline
 20 \text{ (4} \times 5\text{)} \\
 80 \text{ (4} \times 20\text{)} \\
 2400 \text{ (4} \times 600\text{)} \\
 + \\
 \hline
 2500
 \end{array}$$

Figura 54 - Resolução da Joana do problema 6: "A multiplicar por 625"

Ao encontrar o número que multiplicado por 625 é igual a 2500, a aluna dá a resposta ao problema.

o número multiplicado por 625 é 4.

Figura 55 - Resposta da Joana do problema 6: "A multiplicar por 625"

Síntese

As estratégias utilizadas por Joana, nos seis problemas apresentados, encontram-se descritas no quadro 8.

Quadro 8 - Estratégias utilizadas por Joana na resolução dos seis problemas

	Problema	Sentido	Estratégias de resolução
Divisão	1- “Vamos sentar as pessoas”	Partilha	<ul style="list-style-type: none"> - Estratégia aditiva: Adiciona dobros - Estratégias multiplicativas: Usa fatores de referência Usa múltiplos de 10 Multiplica sucessivamente Multiplica em coluna - Outras: Usa o valor de posição - Representa a divisão, utilizando uma estratégia multiplicativa
	2 - “As mesas”	Medida	<ul style="list-style-type: none"> - Estratégias multiplicativas: Multiplica sucessivamente Multiplica em coluna - Outras: Usa o valor de posição - Representa a divisão, utilizando uma estratégia multiplicativa
	3 - “A multiplicar por 25”	Operação inversa da multiplicação	<ul style="list-style-type: none"> - Estratégias multiplicativas: Multiplica sucessivamente Multiplica em coluna Outras: Usa o valor de posição - Representa a divisão, utilizando uma estratégia multiplicativa

Quadro 8 (continuação)

	4 - “Os autocarros”	(Não exata) Medida	<ul style="list-style-type: none"> - Representa a divisão, utilizando uma estratégia multiplicativa - Estratégias multiplicativas: <ul style="list-style-type: none"> Multiplica sucessivamente Multiplica em coluna - Estratégia aditiva (adiciona os múltiplos de 50) Outras: <ul style="list-style-type: none"> Usa o valor de posição
	5 - “Número de alunos”	Partilha	<ul style="list-style-type: none"> - Representa a divisão, utilizando uma estratégia multiplicativa - Estratégias multiplicativas: <ul style="list-style-type: none"> Usa fatores de referência Usa múltiplos de 10 Multiplica sucessivamente Multiplica em coluna - Estratégia aditiva (adiciona os múltiplos de 6)
	6 - “A multiplicar por 625”	Operação inversa da multiplicação	<ul style="list-style-type: none"> - Estratégias multiplicativas: <ul style="list-style-type: none"> Usa o dobro Multiplica em coluna Usa fatores de referência Usa múltiplos de 625

A Joana nunca recorre à subtração como estratégia de resolução em qualquer dos problemas apresentados, pois reconhece a eficiência e as vantagens da multiplicação e divisão na resolução dos mesmos.

Também, no que se refere à utilização de uma estratégia aditiva, colabora com as colegas, quando adiciona dobros, no problema 1, “Vamos sentar as pessoas” mas rapidamente percebe a vantagem da multiplicação em relação a esta operação.

Apenas no último problema apresentado, problema 6, “A multiplicar por 625” a aluna não o identifica como sendo de divisão. Tudo aponta que este facto se deva à ordem de grandeza dos números envolvidos, comparativamente com a dos números

usados nos problemas realizados anteriormente e também pela forma como está formulada a questão, que incita à utilização da multiplicação.

Tende a realizar estratégias multiplicativas para confirmar o resultado do algoritmo da divisão. Por norma, a aluna multiplica o quociente pelo divisor para confirmar se obtém o dividendo. Parece reconhecer, frequentemente, a relação particular existente entre as operações divisão e multiplicação, uma vez que opta, na maioria das vezes, por procedimentos multiplicativos para resolver problemas de divisão.

Nos problemas de divisão com sentido de partilha, a aluna parece ter evoluído, relativamente às estratégias que utiliza na sua resolução. No problema 1, “Vamos sentar as pessoas”, recorre a estratégias aditivas e multiplicativas e apenas reconhece o problema como sendo de divisão, pelo incentivo do seu colega de grupo Luís. No entanto, no problema 5, “Número de alunos”, a aluna reconhece imediatamente o problema como sendo de divisão.

A Joana parece ter feito uma evolução nas estratégias que utiliza nos problemas de divisão com sentido de medida, apesar de a ordem de grandeza dos números envolvidos ter aumentado. No problema 2, “As mesas”, a aluna utiliza estratégias multiplicativas e só no final o reconhece como sendo de divisão, enquanto no problema 4, “Os autocarros”, reconhece-o imediatamente como sendo de divisão e recorre a estratégias multiplicativas para chegar ao quociente.

A aluna parece utilizar iguais estratégias de resolução em problemas de divisão com sentido de partilha e de medida.

Utiliza frequentemente múltiplos de 10, para multiplicar pelo quociente com o intuito de obter o dividendo.

Como os problemas 1 e 2 apresentam os mesmos números envolvidos e contextos semelhantes, embora com sentidos de divisão diferentes, um de partilha e outro de medida, parece que a aluna se confunde com o objetivo dos problemas.

Nos dois problemas de divisão apresentados, cujo sentido da divisão é a operação inversa da multiplicação, problemas 3, “A multiplicar por 25” e 6, “A multiplicar por 625”, a aluna reconhece, no primeiro, o problema como sendo de divisão, faz a representação do algoritmo da divisão e recorre para isso a estratégias multiplicativas, enquanto no segundo, utiliza somente a multiplicação. Este facto parece estar relacionado com o aumento da ordem de grandeza dos números.

A aluna tem em conta o valor de posição dos números com que trabalha, o que é evidenciado nos vários problemas, quando multiplica sucessivamente um fator na busca constante do múltiplo pretendido. Isto significa que Joana domina o sistema de numeração decimal.

Foi evidente ao longo da apresentação dos diferentes problemas que Joana se sentiu gradualmente mais à vontade e esqueceu a câmara.

Estratégias utilizadas pela Ivone

A Ivone, de 10 anos, é uma aluna introvertida, calma e que não gosta de ser o centro das atenções. Apresenta bons resultados escolares em todas as áreas curriculares. Ao nível da Matemática, revela facilidades no cálculo e na resolução de problemas. É uma aluna participativa no trabalho em grupo e com vontade em aprender. Revela, por vezes, dificuldades em expor o seu raciocínio.

Problema 1: “Vamos sentar as pessoas”

A aluna segue, juntamente com a colega Joana a estratégia aditiva iniciada pela colega Nídia.

(...)

Nídia: Estou a fazer 60 mais 60 que dá 120, 120 mais 120 é ... (pede a confirmação dos colegas do grupo).

Joana: 240.

Ivone: $240 + 240$.

(...)

Continua a seguir as indicações da colega Nídia e avança para um procedimento multiplicativo, de $6 \times 6 = 36$ e estabelece a relação com $6 \times 60 = 360$, ao acrescentar um zero.

Nídia: (...) 6×6 é ...

(...)

Nídia: Não, 6×6 .

Ivone: (encontra-se a fazer a tabuada pelos dedos, pois está de costas para os placards da sala que contêm as tabuadas).

Luís: É 36.

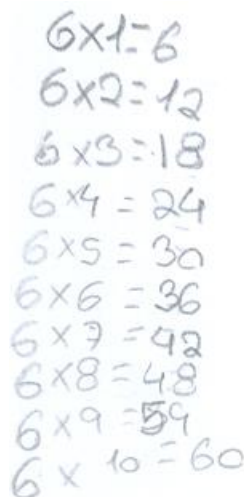
Nídia: 36? Acrescenta zero e dá 360. Por isso não é. E 6×7 ? O melhor é fazermos a tabuada do 6 toda.

Luís: É 6×8 . 6×8 é 48.

Nídia: Olha, eu vou fazer a tabuada.

Ivone: Sim, assim é mais fácil, depois podemos ver pela tabuada.

A aluna segue, com o grupo, a estratégia de utilizar como referência a tabuada do seis.



Handwritten multiplication table for the number 6:

$6 \times 1 = 6$
$6 \times 2 = 12$
$6 \times 3 = 18$
$6 \times 4 = 24$
$6 \times 5 = 30$
$6 \times 6 = 36$
$6 \times 7 = 42$
$6 \times 8 = 48$
$6 \times 9 = 54$
$6 \times 10 = 60$

Figura 56 - Resolução da Ivone do problema 1: "Vamos sentar as pessoas"

Quando a colega Nídia chega a $6 \times 8 = 48$, a Ivone confirma que está encontrado o número que pretendiam. No sentido de aumentar a ordem de grandeza dos números aos quais recorre, utiliza um múltiplo de 10 e estabelece a ligação com $60 \times 8 = 480$. Tudo aponta para que utilize uma estratégia próxima de colocar as pessoas nas sessenta mesas, até todas estarem sentadas, para assim associar ao número de pessoas que ficam em cada mesa.

(...)

Nídia: E 6×7 é quanto?

Luís: 42

Nídia: Ah, iá. (continua até ao 6×8 e faz uma grande festa) Já cheguei ao resultado. Já descobri.

Luís: Eu disse.

Ivone: Já fizemos.

De seguida, aluna faz o algoritmo de 60×8 , para confirmar o seu raciocínio.

$$\begin{array}{r} 60 \\ \times 8 \\ \hline + 480 \text{ (} 8 \times 60 \text{)} \\ \hline 480 \end{array}$$

Figura 57 - Resolução da Ivone do problema 1: "Vamos sentar as pessoas"

E apresenta também o registo escrito do algoritmo da divisão.

$$\begin{array}{r} 50 \overline{) 406} \\ - 400 \\ \hline 6 \\ 8 \\ \hline 000 \end{array}$$

Em cada mesa ficam 8 pessoas

Figura 58 - Resolução da Ivone do problema 1: "Vamos sentar as pessoas"

A aluna recorre ao registo do algoritmo da divisão, incentivada pelo colega Luís e apresenta também estratégias multiplicativas, baseadas nos raciocínios multiplicativos utilizados pelos seus colegas do grupo. Demonstra assim, a sua compreensão sobre a relação entre a multiplicação e a divisão.

Problema 2: “As mesas”

A Ivone partilha com os colegas que este problema é semelhante ao anterior, levando-os a refletir sobre o assunto.

(...)

Nídia: $480 \div 60$.

Ivone: É igual ao outro.

Nídia: Não, não é. (Parece confusa)

(...)

Ivone reconhece que o problema pode ser resolvido através de uma estratégia multiplicativa. Utiliza o número 8, que parece já ter automatizado da solução do problema anteriormente apresentado, uma vez que não consta do enunciado atual. O grupo ignora a estratégia apresentada pela Ivone, o que a leva a abandonar a mesma.

(...)

Ivone: $8 \times 60 = 480$

A aluna reconhece que a representação do algoritmo da divisão apresentada pela colega Nídia para resolver o problema, $480 \div 60$, é igual à utilizada no problema anterior, cujos números apresentados são iguais, mas apesar de terem sentidos da divisão diferentes, o anterior de partilha e este de medida.

Nídia: Mas como é que nós vamos mostrar os nossos cálculos?

(...)

Luís: 60 pessoas em cada mesa.

Nídia: $480 \div 60$.

Ivone: Isso é igual à outra.

Na discussão em grupo sobre as diferenças entre os dois problemas, a aluna reforça que agora é especificado o número de pessoas que se sentam em cada mesa, 60. E continua a reconhecer que são necessárias 8 mesas, embora o grupo não a escute.

(...)

Joana: No outro é que era 60×8 , aqui é 480.

Nídia: Não tinha as mesmas coisas. Mas o outro era quantas pessoas é que se vão sentar numa mesa, (corrige) nas mesas, agora aqui (referindo-se ao problema 2) é quantas mesas são necessárias.

Ivone: Sendo que em cada mesa ficam 60 pessoas.

Nídia: Ah...

Ivone: Ficam 8.

(...)

A Ivone continua a colaborar com o grupo e segue as ideias dos colegas, uma vez que não consegue que os outros entendam o seu raciocínio. Nesse sentido, regista o algoritmo da divisão $60 \div 8$, sem atribuir qualquer significado ao que está a fazer.

$$\begin{array}{r} 60 \overline{) 8} \\ \underline{-56} \\ 04 \end{array}$$

Figura 59 - Resolução da Ivone do problema 2: "As mesas"

Após o meu pedido para o grupo voltar a ler a pergunta com atenção, todos os alunos, incluindo a Ivone, continuam a seguir o raciocínio da Nídia, de realizar o algoritmo da divisão $480 \div 8$.

(...)

Nídia: Ou então só se fizermos $480 \div 8$

$$\begin{array}{r} 480 \overline{) 8} \\ \underline{-480} \\ 000 \end{array}$$

Figura 60 - Resolução da Ivone do problema 2: "As mesas"

Após resolverem o algoritmo da divisão $480 \div 8$, o grupo parece não conseguir encontrar a resposta ao problema e decide finalmente seguir a ideia da Ivone, que propõe realizar 60×7 , na procura do número que multiplicado por 60 é igual a 480.

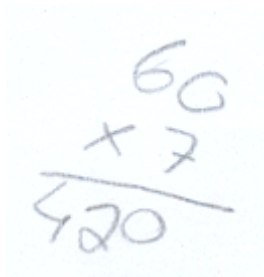

$$\begin{array}{r} 60 \\ \times 7 \\ \hline 420 \end{array}$$

Figura 61 - Resolução da Ivone do problema 2: "As mesas"

(...)

Ivone: 60×7 , para ver se dá 480.

Nídia: 6×7 é 36, aí não é 42.

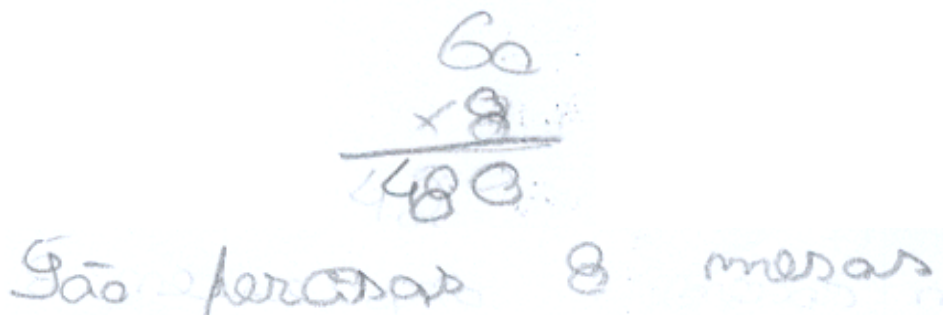
Joana: Dá 420

Nídia: lá, não é...

(...)

Como 60×7 é 420, propõem avançar para 60×8 .

Ivone: Então vamos para o 8?


$$\begin{array}{r} 60 \\ \times 8 \\ \hline 480 \end{array}$$

São 8 mesas

Figura 62 - Resolução da Ivone do problema 2: "As mesas"

Apenas através da minha legitimação, o grupo confirma e dá "ouvidos" àquilo que há muito a Ivone havia sugerido.

(...)

Investigadora: O que disseste Ivone?

Ivone: Pode ser 8 mesas.

(...)

Ivone: Eu disse logo ao início que eram precisas 8 mesas.

Joana: Eu não ouvi.

Luís: Eu também não.

Nídia: Nem eu, não disse não.

Ivone: (Fica um pouco triste)

Problema 3: “A multiplicar por 25”

A aluna reconhece o problema como fácil e inicia a sua resolução para encontrar o número que multiplicado por 25 é 150. Ajuda a colega Nídia a perceber que o número que procura tem de ser múltiplo de 25.

Nídia: Ah, fácil.

Ivone: Mesmo.

(...)

Nídia: Eu vou meter 20×50

(...)

Ivone: 20×50 ? (admirada)

Nídia: Sim, vamos fazer 20×50 .

Ivone: Ou 25?

Nídia: Vamos fazer 20×50 ?

Ivone: 25 (já com um tom de zangada).

Nídia: Está bem.

Reconhece ainda que o produto de 25×50 é muito distante do número pretendido, 150. Sugere então, a utilização de um número de menor ordem de grandeza.

(...)

Ivone: 50?

Luís: É 50 Nídia?

Ivone: É 25×8 , acho eu.

(...)

Ivone: Agora estou a fazer de cabeça.

(...)

Joana: É 6.

Ivone: iá, 25×6 .

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times 6 \\ \hline 30 \text{ (6 x 5)} \\ + 120 \text{ (6 x 20)} \\ \hline 150 \end{array}$$

Figura 63 - Resolução da Ivone do problema 3: "A multiplicar por 25"

É curioso ainda o facto de a Ivone registar na sua folha a compreensão da igualdade entre 6×25 e 25×6 , o que demonstra que compreende que a multiplicação goza da propriedade comutativa.

$$\begin{array}{l} 6 \times 25 = 150 \text{ ou} \\ 25 \times 6 = 150 \end{array}$$

Figura 64 - Resolução da Ivone do problema 3: "A multiplicar por 25"

A aluna reconhece, incentivada pelo colega Luís, o problema como sendo de divisão, mas apresenta as suas justificações baseadas em raciocínios multiplicativos.

Luís: Podemos fazer $150 \div 25$, para ver o resultado.

Ivone: Também pode ser.

$$\begin{array}{r} 150 \overline{) 25} \\ - 150 \\ \hline 000 \end{array}$$

Figura 65 - Resolução da Ivone do problema 3: "A multiplicar por 25"

O numero multiplicado por 25 é 6 porque $6 \times 25 = 150$

Figura 66 - Resposta da Ivone do problema 3: "A multiplicar por 25"

Problema 4: "Os autocarros"

A Ivone apresenta como primeira sugestão, a utilização de uma estratégia multiplicativa, mas abandona-a devido à posição assumida pela colega Nídia. Apesar disso, demonstra não compreender a razão pela qual não obtém o número de autocarros necessários, multiplicando o número de alunos, 1230, pela lotação de cada autocarro, 50 pessoas.

Ivone: Eu acho que a conta é de vezes.

Nídia: Quantos autocarros são necessários?

(...)

Nídia: É de dividir. Temos de dividir 1230 pessoas por 50 autocarros. Certo? Deem todos a vossa opinião.

Ivone: Ai eu não sei.

Joana: Eu acho que é de vezes.

Ivone: Eu também acho que era de vezes.

(...)

Ivone: Iá, não, porque assim precisamos de 50 autocarros.

(...)

Ivone: Eu sei lá.

Opta assim, mais uma vez, por representar o algoritmo da divisão identificado pela Nídia e calcula $1230 \div 50$.

$$\begin{array}{r|l}
 1230 & 50 \\
 -1000 & 20 \\
 \hline
 0230 & +4 \\
 0200 & \hline
 0030 & 24
 \end{array}$$

Figura 67 - Resolução da Ivone do problema 4. "Os autocarros"

Ivone: Temos de fazer uma conta...

Luís: Temos de fazer a dividir como ela estava a dizer. Para saber quantos autocarros são.

Ivone: Atão bora [sic].

E inicia, juntamente com o colega Luís, a procura do número que multiplicado por 50 é igual a 1230.

Luís: Ela estava certa. 50×20 é 100 não é?

(...)

Ivone: Sim, depois acrescentas um zero, dá mil.

Apesar de efetuar corretamente o algoritmo da divisão, a aluna não responde corretamente à questão apresentada e interpreta o resto, 30, como o número de autocarros necessários. Apenas com a ajuda da colega Joana, percebe que tem de somar os números que se encontram no quociente, 20 e 4. Mas apesar disso e da ajuda dada pelos colegas, continua a revelar falta de segurança na resposta apresentada.

(...)

Ivone: É 30, iá. Eu pus 20 e depois 4.

Joana: Mas tu tens que somar isto (apontando para o 20 e para o 4), não é isto.

Ivone: (ri-se) É 24.

(...)

Ivone: 30 autocarros. Não, é 25. É 24.

Luís: Com 25 é 1250.

(...)

Nídia: Tem de ser 24 autocarros.

Luís: 24?

Ivone: Não, 30.

Nídia: 24

Luís: 24

Nídia: E sobram 30 pessoas.

Ivone: iá

As ideias expressas pela Ivone revelam que se encontra confusa com o que está a fazer, mas apesar disso, e quando coloco a questão da ida dos 30 alunos, a aluna confirma que sobram 20 lugares no autocarro que os leva, assim como na resposta dada por escrito.

(...)

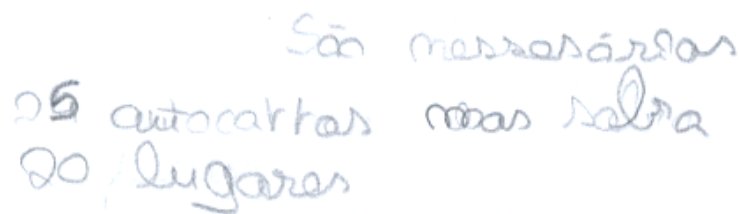
Luís: Então vão 25 autocarros.

Nídia: E sobraram não sei quantos lugares.

(...)

Luís: Sobrou...

Ivone: Sobraram 20 lugares.



São necessários
25 autocarros mas sobra
20 lugares

Figura 68 - Resposta da Ivone do problema 4: "Os autocarros"

A Ivone realiza ainda a multiplicação do divisor pelo quociente, no sentido de confirmar se obtém o dividendo.

$$\begin{array}{r}
 50 \\
 \times 34 \\
 \hline
 200 \quad (4 \times 0) \\
 0 \quad (4 \times 5) \\
 + 150 \quad (3 \times 0) \\
 \hline
 1700 \quad (3 \times 5)
 \end{array}$$

Figura 69 - Resolução da Ivone do problema 4: " Os autocarros"

Uma análise detalhada da sua resolução evidencia que comete erros de cálculo quando efetua a multiplicação, decompondo o multiplicando e o multiplicador.

Problema 5: "Número de alunos"

A Ivone reconhece imediatamente o problema como sendo de divisão.

Nídia: Temos de fazer 1230 a dividir por 6.

(...)

Nídia: Não, para dar quantas pessoas é que vão ficar em cada grupo.

Luís: Sim.

Ivone: Vamos fazer a dividir.

$$\begin{array}{r}
 1230 \mid 6 \\
 - 1200 \quad 200 \\
 \hline
 30 \quad 5 \\
 - 30 \\
 \hline
 000
 \end{array}$$

Em cada grupo ficam 205

Figura 70 - Resolução da Ivone do problema 5: "Número de alunos"

(...)

Luís: ...vão ficar 205 pessoas em 6 grupos.

Ivone: já

A análise detalhada da sua resolução evidencia que dá uma resposta correta, mas que não efetua a adição das parcelas que coloca no quociente do algoritmo. Apesar disso, efetua corretamente a multiplicação do divisor pelo quociente, no sentido de averiguar se obtém o dividendo revelando que interpreta corretamente o quociente como resposta do problema e relaciona a divisão com a multiplicação.

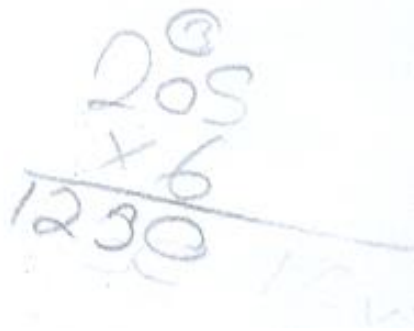

$$\begin{array}{r} 205 \\ + 6 \\ \hline 1230 \end{array}$$

Figura 71 - Resolução da Ivone do problema 5: "Número de alunos"

Curioso ainda é o facto de, no final, a Ivone recorrer a uma estratégia aditiva, no sentido de confirmar os cálculos anteriores. No meu entender, a aluna fê-lo para colocar mais cálculos na sua folha de resposta e utilizar outra estratégia, dado que já tinha utilizado estratégias mais eficientes.

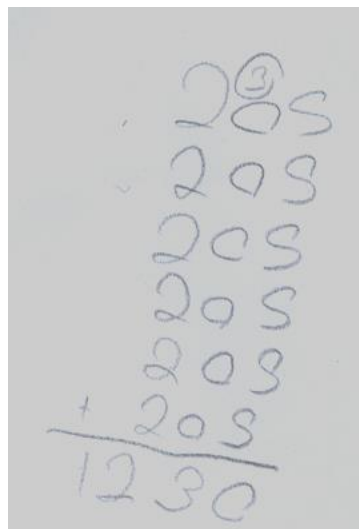

$$\begin{array}{r} 205 \\ 205 \\ 205 \\ 205 \\ 205 \\ + 205 \\ \hline 1230 \end{array}$$

Figura 72 - Resolução da Ivone do problema 5: "Número de alunos"

Problema 6: "A multiplicar por 625"

A aluna inicia a resolução do problema através de uma estratégia multiplicativa, em que, por tentativa e erro, se aproxima do número que multiplicado por 625 é igual a 2500.

Ivone: Qual o número que multiplicado por 625 é igual a 2500?

(...)

Joana: Este tem números maiores. Podemos fazer.

Ivone: Podemos fazer por tentativas.

A Ivone reconhece a facilidade da multiplicação em relação à adição de parcelas iguais e sugere-o a uma colega do grupo.

(...)

Nídia: Se calhar podemos meter 625 mais 625?

Joana: Mas assim estamos sempre a somar.

Ivone: Sim, mas depois podemos fazer de vezes.

Nídia: 2×625 .

Ivone: Não.

No meu entender, a resposta dada pela Ivone sugere que reconhece que o produto de 2×625 não é igual a 2500 e que ainda se encontra distante desse resultado. Apesar disso, regista o algoritmo da multiplicação na sua folha de registo.

The image shows handwritten mathematical work on a piece of paper. At the top, there is a multiplication problem: 625×2 . Below it, the result 1250 is written. To the right of this, there are several calculations in parentheses: (2×3) , (2×20) , and (2×600) . Below these, there is a list of numbers: 40 , 200 , and 250 , with a horizontal line drawn through them. The handwriting is in blue ink on a white background.

Figura 73 - Resolução da Ivone do problema 6: "A multiplicar por 625"

A aluna segue para o algoritmo da multiplicação de 625×3 , no sentido de verificar se obtém o produto pretendido, 2500. Ao contrário dos seus colegas de grupo, que cometem erros de cálculo, a Ivone não o faz, talvez por utilizar a estratégia de decompor o número 625 em fatores e assim atribuir significado ao que está a fazer.

$$\begin{array}{r}
 625 \\
 \times 3 \\
 \hline
 15 \quad (3 \times 5) \\
 + 1800 \quad (3 \times 20) \\
 \hline
 1875 \quad (3 \times 600)
 \end{array}$$

Figura 74 - Resolução da Ivone do problema 6: "A multiplicar por 625"

Em seguida, continua a utilizar a estratégia multiplicativa e avança para 625×4 e obtém o produto pretendido, 2500.

$$\begin{array}{r}
 625 \\
 \times 4 \\
 \hline
 20 \quad (4 \times 5) \\
 + 2400 \quad (4 \times 20) \\
 \hline
 2500 \quad (4 \times 600)
 \end{array}$$

Figura 75 - Resolução da Ivone do problema 6: "A multiplicar por 625"

E assim, a Ivone é a primeira aluna do grupo a chegar à resposta do problema.

(...)

Ivone: Já descobri, é 4.

Nídia: Não é.

Joana: É, é.

Ivone: É.

O número Multiplicado por 625 é 4 para dar 2500

Figura 76 - Resposta da Ivone do problema 6: "A multiplicar por 625"

Curioso ainda é o facto de a Ivone voltar a recorrer, no final, a uma estratégia aditiva, no sentido de confirmar os cálculos anteriores. No meu entender, a aluna volta a fazê-lo para colocar mais cálculos na sua folha de resposta e utilizar outra estratégia. No início da resolução deste problema foi a Ivone que sugeriu à colega Nídia a utilização da multiplicação, em substituição da adição repetida de parcelas iguais, o que aponta que percebe as vantagens da multiplicação em relação à adição.

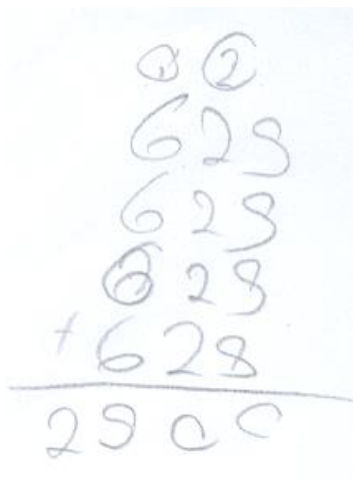

$$\begin{array}{r} 00 \\ 625 \\ 625 \\ 625 \\ +625 \\ \hline 2500 \end{array}$$

Figura 77 - Resolução da Ivone do problema 6: "A multiplicar por 625"

Síntese

As estratégias utilizadas por Ivone, nos seis problemas apresentados, encontram-se descritas no quadro 9.

Quadro 9 - Estratégias utilizadas por Ivone na resolução dos seis problemas

	Problema	Sentido	Estratégias de resolução
Divisão	1- “Vamos sentar as pessoas”	Partilha	<ul style="list-style-type: none"> - Estratégia aditiva: Adiciona dobros - Estratégias multiplicativas: Usa fatores de referência (tabuada do 6) Usa múltiplos de 10 Multiplica sucessivamente Multiplica em coluna - Outras: Usa o valor de posição Tentativa e erro Representa a divisão, utilizando uma estratégia multiplicativa
	2 - “As mesas”	Medida	<ul style="list-style-type: none"> - Estratégias multiplicativas: Multiplica sucessivamente Multiplica em coluna - Outras: Usa o valor de posição Tentativa e erro - Representa a divisão, utilizando uma estratégia multiplicativa
	3 - “A multiplicar por 25”	Operação inversa da multiplicação	<ul style="list-style-type: none"> - Estratégias multiplicativas: Multiplica sucessivamente Multiplica em coluna Outras: Usa o valor de posição Tentativa e erro - Representa a divisão, utilizando uma estratégia multiplicativa

Quadro 9 (continuação)

	4 - “Os autocarros”	(Não exata) Medida	- Estratégias multiplicativas: Multiplica sucessivamente Multiplica em coluna - Representa a divisão, utilizando uma estratégia multiplicativa - Estratégia aditiva (adiciona os múltiplos de 50) Outras: Usa o valor de posição
	5 - “Número de alunos”	Partilha	- Representa a divisão, utilizando uma estratégia multiplicativa - Estratégias multiplicativas: Usa fatores de referência Usa múltiplos de 10 Multiplica sucessivamente Multiplica em coluna - Estratégia aditiva (adição repetida de parcelas iguais, 205)
	6 - “A multiplicar por 625”	Operação inversa da multiplicação	- Estratégias multiplicativas: Usa o dobro Multiplica em coluna Usa fatores de referência - Estratégia aditiva (adição repetida de parcelas iguais, 625) - Outras: Usa o valor de posição Tentativa e erro

Por não ser “escutada” pelos seus colegas de grupo, a Ivone tende a não seguir os seus raciocínios, o que leva a que se “arraste” nas estratégias dos outros elementos do grupo.

A aluna apenas utiliza a adição de dobros, no problema 1, “Vamos sentar as pessoas”, pelo facto de seguir o raciocínio da sua colega Nídia.

Nos problemas 5, “Número de alunos” e 6, “A multiplicar por 625”, cujos sentidos da divisão são respetivamente o de partilha e o de divisão como operação inversa da multiplicação, a aluna tende a utilizar estratégias multiplicativas com o

objetivo de encontrar a resposta correta, mas é curioso que depois de as apresentar recorre a uma estratégia aditiva, em que efetua a adição repetida de parcelas iguais. Como já referi, a aluna fá-lo para apresentar mais cálculos na sua folha de resposta, pois compreende as vantagens da multiplicação em relação à adição.

Nos problemas de divisão com sentido de partilha, a aluna parece ter evoluído, pelas estratégias que utiliza na sua resolução. No problema 1, “Vamos sentar as pessoas”, recorre a estratégias aditivas e multiplicativas e apenas reconhece o problema como sendo de divisão, pelo incentivo do seu colega de grupo Luís. Enquanto no problema 5, “Número de alunos”, a aluna reconhece imediatamente o problema como sendo de divisão.

Nos problemas de divisão com sentido de medida, a Ivone parece ter mais dificuldades no problema 4, cuja divisão é não exata. A aluna interpreta o resto da divisão como a resposta ao problema. Nos dois problemas apresentados de divisão com sentido de medida, problemas 2, “As mesas” e problema 4, “Os autocarros”, a aluna não evolui nas estratégias que utiliza, ao que parece, pelo segundo problema apresentar números com maior ordem de grandeza e pela divisão ser não exata.

O facto de os problemas 1 e 2 apresentarem os mesmos números envolvidos e contextos semelhantes, embora com sentidos de divisão diferentes, um de partilha e outro de medida, faz com que a aluna utilize a resposta do problema 1 para resolver o problema 2, pela associação que faz entre os dois.

Nos dois problemas de divisão apresentados, cujo sentido da divisão é a operação inversa da multiplicação, problemas 3, “A multiplicar por 25” e 6, “A multiplicar por 625”, a aluna parece ter apresentado mais dificuldades na resolução do problema 6, “A multiplicar por 625”, no meu entender, pelo aumento da ordem de grandeza dos números apresentados. No problema 3, “A multiplicar por 25”, utiliza estratégias multiplicativas e reconhece o problema como sendo de divisão, enquanto no problema 6, “A multiplicar por 625”, apresenta também estratégias multiplicativas e regride para estratégias aditivas, em que recorre à adição repetida de parcelas iguais.

A aluna reconhece os problemas apresentados como sendo de divisão, à exceção do último (problema 6, “A multiplicar por 625”). No meu entender, esta situação é explicada pelo aumento da ordem de grandeza dos números apresentados, por serem diferentes dos anteriormente apresentados nos problemas 4, “Os autocarros” e 5, “Número de alunos”, cujos números eram semelhantes entre si, assim

como os contextos, apesar de apresentarem sentidos de divisão diferentes e pelo facto da pergunta formulada poder induzir à utilização da multiplicação.

A aluna relaciona com facilidade a multiplicação e a divisão, dado que, para confirmar se a operação de divisão está correta, efetua sempre a multiplicação entre o divisor e quociente, no sentido de averiguar se obtém o dividendo.

Nas estratégias multiplicativas que a aluna utiliza é evidente que recorre, com frequência, à tentativa e erro. Neste processo, tende a utilizar valores de referência, que lhe sejam fáceis de manipular mentalmente. Assim como também demonstra que tem em conta o valor de posição dos números quando multiplica sucessivamente um fator na busca constante do múltiplo pretendido, o que significa que domina o sistema de numeração decimal.

Síntese global

Após a análise das estratégias utilizadas pelos quatro alunos na resolução dos seis problemas apresento uma síntese dos aspetos comuns. No sentido de melhor comparar as estratégias, estas foram organizadas num quadro (ver quadro 10), de acordo com o sentido de cada problema.

Todos os alunos reconhecem os problemas como sendo de divisão, à exceção do último apresentado, o problema 6, “A multiplicar por 625”. Tudo aponta que se deva à forma como está formulada a questão, que incita à utilização da multiplicação, à ordem de grandeza dos números envolvidos e por ser diferente dos problemas anteriormente apresentados (problemas 4, “Os autocarros” e 5, “Número de alunos”), cujos números eram semelhantes entre si, assim como os contextos, apesar de apresentarem sentidos de divisão diferentes.

Apesar de reconhecerem os problemas apresentados como sendo de divisão, todos os alunos realizam estratégias multiplicativas para confirmarem o resultado. Por norma, multiplicam o quociente pelo divisor para confirmarem se obtém o dividendo. Reconhecem, frequentemente, a relação particular existente entre as operações divisão e multiplicação, uma vez que optam, na maioria das vezes, por procedimentos multiplicativos para resolverem problemas de divisão.

Todos os alunos têm em conta o valor de posição dos números com que trabalham, o que é evidenciado nos vários problemas, quando multiplicam

sucessivamente um fator na busca constante do múltiplo pretendido. Isto significa que dominam o sistema de numeração decimal.

Todos os alunos associam os problemas 1 e 2, por apresentarem os mesmos números envolvidos e contextos semelhantes, embora com sentidos de divisão diferentes, um de partilha e outro de medida. A Ivone utiliza imediatamente a resposta do problema 1 para resolver o problema 2 e os outros alunos, embora não o façam logo e ainda que fiquem confusos quanto ao objetivo do problema, se se trata de descobrir quantas pessoas ficam em cada grupo ou de quantas são as mesas necessárias, recorrem à resposta do problema 1 para responderem ao problema 2.

Todos os alunos revelam uma evolução nas estratégias utilizadas nos problemas de divisão, cujo sentido é o de partilha, problema 1, “Vamos sentar as pessoas” e problema 5, “Número de alunos”, apesar do aumento da ordem de grandeza dos números.

À exceção da aluna Ivone, todos os outros alunos, também parecem ter evoluído nas estratégias que utilizam nos problemas de divisão, cujo sentido é o de medida, problema 2, “As mesas” e problema 4, “Os autocarros”, apesar de também ter aumentado a ordem de grandeza dos números e a divisão passar a ser não exata.

No que se refere à ordem de grandeza dos números utilizados nos problemas de divisão, com sentido de partilha e de medida, três dos alunos demonstraram que esse facto não influencia a evolução das estratégias utilizadas. Acerca do aumento da ordem de grandeza nos problemas cujo sentido da divisão é a operação inversa da multiplicação, problemas 3, “A multiplicar por 25” e 6, “A multiplicar por 625”, verifico que este facto influencia o desempenho dos alunos, fazendo com que os mesmos demonstrassem mais dificuldades.

Da análise dos dados efetuada verifico que utilizam estratégias semelhantes na resolução de problemas de divisão com sentido de medida e de partilha e que demonstram igual à vontade em ambos os sentidos da divisão.

Os alunos tendem a utilizar os números que se encontram no enunciado dos diferentes problemas, embora nem sempre o façam corretamente e com sentido numérico.

Os alunos, de uma forma geral, manifestam mais dificuldades no problema 4, “Os autocarros”, cuja divisão é não exata e cujo sentido é de medida. Facto que se deve à dificuldade de interpretação do resto para chegar à resposta, assim como no aumento da ordem de grandeza dos números envolvidos relativamente aos problemas

apresentados anteriormente. Dois alunos, inicialmente, excluem os alunos que sobram, ou seja, que se encontram no resto, de participarem no torneio interescolar. Uma aluna confunde o resto com o quociente do problema e outra aluna segue a estratégia apresentada pelos colegas e pouco participa oralmente, o que deixa dúvidas se consegue interpretar o resto.

Os alunos tendem a utilizar valores de referência, que lhes sejam mais fáceis operar. Exemplo disso é a utilização da tabuada do seis no problema 1, “Vamos sentar as pessoas”, para assim mais facilmente obterem o múltiplo de seis pretendido, relacionando-o com 60.

No sentido de aumentarem a ordem de grandeza dos números aos quais recorrem, utilizam frequentemente múltiplos de 10, isto é, trabalham com dezenas exatas.

As alunas Nídia, Joana e Ivone utilizam a adição de dobros no problema 1, cujo sentido da divisão é o de partilha. Parece que o fazem pelas indicações que são dadas, de distribuir as 480 pessoas por 60 mesas. Ao adicionar dobros, iniciando em $60+60$, desta forma estão a “distribuir” as pessoas pelas mesas, com o objetivo de que fiquem todas sentadas. Tudo aponta para que tenham recorrido à adição de dobros, pela facilidade que têm em trabalhar com estes números mentalmente.

Existem dois alunos que utilizam a subtração no problema 2, cujo sentido da divisão é o de medida. Tudo aponta que o tenham feito pelo facto de estar especificado no problema o número de pessoas que se sentam em cada mesa, ou seja, a medida que é retirada sucessivamente ao todo, até esgotar as pessoas. Utilizam esta estratégia muito próxima de retirar uma mesa completa, para assim associar o número de vezes que subtraem ao número de mesas necessárias.

Quadro 10 - Estratégias utilizadas pelos alunos na resolução dos seis problemas

Estratégias utilizadas na resolução dos problemas					
Problema	Sentido	Nídia	Luís	Joana	Ivone
1 - “Vamos sentar as pessoas”	Partilha	<ul style="list-style-type: none"> - Estratégia aditiva: Adiciona dobros - Estratégias multiplicativas: Usa fatores de referência Usa múltiplos de 10 Multiplica sucessivamente Multiplica em coluna - Outras: Usa o valor de posição Representa a divisão, utilizando uma estratégia multiplicativa 	<ul style="list-style-type: none"> - Estratégias multiplicativas: Usa fatores de referência Usa múltiplos de 10 Multiplica sucessivamente Multiplica em coluna - Outras: Usa o valor de posição Representa a divisão, utilizando uma estratégia multiplicativa 	<ul style="list-style-type: none"> - Estratégia aditiva: Adiciona dobros - Estratégias multiplicativas: Usa fatores de referência Usa múltiplos de 10 Multiplica sucessivamente Multiplica em coluna - Outras: Usa o valor de posição Representa a divisão, utilizando uma estratégia multiplicativa 	<ul style="list-style-type: none"> - Estratégia aditiva: Adiciona dobros - Estratégias multiplicativas: Usa fatores de referência (tabuada do 6) Usa múltiplos de 10 Multiplica sucessivamente Multiplica em coluna - Outras: Usa o valor de posição Tentativa e erro Representa a divisão, utilizando uma estratégia multiplicativa
2 - “As mesas”	Medida	<ul style="list-style-type: none"> - Estratégia subtrativa - Estratégias multiplicativas: Multiplica sucessivamente Multiplica em coluna - Outras: Usa o valor de posição Representa a divisão, utilizando uma estratégia multiplicativa 	<ul style="list-style-type: none"> - Estratégia subtrativa - Estratégias multiplicativas: Multiplica sucessivamente Multiplica em coluna - Outras: Usa o valor de posição Representa a divisão, utilizando uma estratégia multiplicativa 	<ul style="list-style-type: none"> - Estratégias multiplicativas: Multiplica sucessivamente Multiplica em coluna - Outras: Usa o valor de posição Representa a divisão, utilizando uma estratégia multiplicativa 	<ul style="list-style-type: none"> - Estratégias multiplicativas: Multiplica sucessivamente Multiplica em coluna - Outras: Usa o valor de posição Tentativa e erro Representa a divisão, utilizando uma estratégia multiplicativa
3 - “A multiplicar por 25”	Operação inversa da multiplicação	<ul style="list-style-type: none"> - Estratégias multiplicativas: Multiplica sucessivamente Multiplica em coluna Outras: Usa o valor de posição - Representa a divisão, utilizando uma estratégia multiplicativa 	<ul style="list-style-type: none"> - Representa a divisão, utilizando uma estratégia multiplicativa - Estratégias multiplicativas: Multiplica sucessivamente Multiplica em coluna Outras: Usa o valor de posição 	<ul style="list-style-type: none"> - Estratégias multiplicativas: Multiplica sucessivamente Multiplica em coluna Outras: Usa o valor de posição - Representa a divisão, utilizando uma estratégia multiplicativa 	<ul style="list-style-type: none"> - Estratégias multiplicativas: Multiplica sucessivamente Multiplica em coluna Outras: Usa o valor de posição Tentativa e erro - Representa a divisão, utilizando uma estratégia multiplicativa

Quadro 10 (continuação)

		Estratégias utilizadas na resolução dos problemas			
Problema	Sentido	Nídia	Luís	Joana	Ivone
4 - “Os autocarros”	(Não exata) Medida	<ul style="list-style-type: none"> - Representa a divisão, utilizando uma estratégia multiplicativa -Estratégias multiplicativas: Multiplica sucessivamente Multiplica em coluna - Estratégia aditiva (adiciona os múltiplos de 50) Outras: Usa o valor de posição 	<ul style="list-style-type: none"> - Representa a divisão, utilizando uma estratégia multiplicativa - Estratégias multiplicativas: Multiplica sucessivamente Multiplica em coluna Outras: Usa o valor de posição 	<ul style="list-style-type: none"> - Representa a divisão, utilizando uma estratégia multiplicativa - Estratégias multiplicativas: Multiplica sucessivamente Multiplica em coluna - Estratégia aditiva (adiciona os múltiplos de 50) Outras: Usa o valor de posição 	<ul style="list-style-type: none"> - Estratégias multiplicativas: Multiplica sucessivamente Multiplica em coluna - Representa a divisão, utilizando uma estratégia multiplicativa - Estratégia aditiva (adiciona os múltiplos de 50) Outras: Usa o valor de posição
5 - “Número de alunos”	Partilha	<ul style="list-style-type: none"> - Representa a divisão, utilizando uma estratégia multiplicativa - Estratégias multiplicativas: Usa fatores de referência Usa múltiplos de 10 Multiplica sucessivamente Multiplica em coluna - Estratégia aditiva (adiciona os múltiplos de 6) 	<ul style="list-style-type: none"> - Representa a divisão, utilizando uma estratégia multiplicativa - Estratégias multiplicativas: Usa fatores de referência Multiplica sucessivamente Multiplica em coluna - Estratégia aditiva (adiciona os múltiplos de 6) 	<ul style="list-style-type: none"> - Representa a divisão, utilizando uma estratégia multiplicativa - Estratégias multiplicativas: Usa fatores de referência Usa múltiplos de 10 Multiplica sucessivamente Multiplica em coluna - Estratégia aditiva (adiciona os múltiplos de 6) 	<ul style="list-style-type: none"> - Representa a divisão, utilizando uma estratégia multiplicativa - Estratégias multiplicativas: Usa fatores de referência Usa múltiplos de 10 Multiplica sucessivamente Multiplica em coluna - Estratégia aditiva (adição repetida de parcelas iguais, 205)
6 - “A multiplicar por 625”	Operação inversa da multiplicação	<ul style="list-style-type: none"> - Estratégia aditiva: Adição repetida - Estratégias multiplicativas: Usa o dobro Multiplica em coluna Usa fatores de referência 	<ul style="list-style-type: none"> - Estratégia aditiva: Adição repetida de parcelas iguais, 625. - Estratégias multiplicativas: Multiplica em coluna Outras: Usa o valor de posição - Representa a divisão, utilizando uma estratégia multiplicativa 	<ul style="list-style-type: none"> - Estratégias multiplicativas: Usa o dobro Multiplica em coluna Usa fatores de referência Usa múltiplos de 625 	<ul style="list-style-type: none"> - Estratégias multiplicativas: Usa o dobro Multiplica em coluna Usa fatores de referência - Estratégia aditiva (adição repetida de parcelas iguais, 625) - Outras: Usa o valor de posição Tentativa e erro

Capítulo 5 - Conclusões, limitações do estudo e recomendações

Síntese do estudo

O presente estudo tem dois objetivos: (i) perceber qual a compreensão que os alunos do 4º ano de escolaridade têm do conceito de divisão e (ii) analisar o desempenho que os alunos evidenciam na resolução de problemas que têm implícito o conceito de divisão.

No sentido de perceber a compreensão dos alunos do 4º ano de escolaridade acerca do conceito de divisão, e analisar o seu desempenho na resolução de problemas de divisão, realizei uma sequência de seis problemas numa turma de 4º ano de escolaridade, na qual era professora de apoio educativo, no ano letivo 2013/2014, onde selecionei com a ajuda de um questionário, quatro alunos e procedi à respetiva recolha de dados.

De acordo com a problemática em estudo, a abordagem metodológica adotada foi de natureza qualitativa com carácter interpretativo (Bogdan & Biklen, 1994), na modalidade de estudo de caso (Yin, 2009).

Dos dois objetivos do estudo decorrem quatro questões, uma primeira associada ao reconhecimento da operação de divisão pelos alunos, uma segunda relacionada com a identificação das estratégias utilizadas nesses problemas, uma terceira relativa às dificuldades manifestadas pelos alunos e, uma quarta, relacionada com os aspetos do sentido de número revelados na resolução desses problemas.

Este capítulo inclui as conclusões do estudo realizado e, a terminar, uma reflexão sobre a minha própria aprendizagem, decorrente do trabalho desenvolvido. As conclusões que apresento estão organizadas em quatro aspetos: o reconhecimento da operação de divisão pelos alunos, as estratégias utilizadas, as dificuldades manifestadas e os aspetos do sentido de número revelados. As mesmas resultaram da análise das estratégias de resolução dos seis problemas resolvidos pelos quatro alunos selecionados para este estudo, das sínteses realizadas para cada aluno e da

síntese global feita no final, onde se apresentam as características comuns encontradas entre as estratégias utilizadas por todos os alunos.

Conclusões

Reconhecimento da operação de divisão pelos alunos

Todos os alunos reconhecem os problemas apresentados como sendo de divisão, à exceção do último, o problema 6, “A multiplicar por 625”, cujo sentido da divisão é a operação inversa da multiplicação, no qual recorrem a estratégias multiplicativas. Este facto parece estar associado, em particular, ao contexto do problema proposto, que faz apelo à utilização da multiplicação. De acordo com Mulligan e Mitchelmore (1997) a estrutura semântica pode ser um dos fatores decisivos na escolha do modelo intuitivo a utilizar na resolução do problema.

Embora os alunos reconheçam os problemas apresentados como sendo de divisão, realizam estratégias multiplicativas para confirmarem o resultado. Este facto está de acordo com o mencionado por McIntosh et al. (1992) que referem que existe uma conexão valiosa na relação inversa entre operações, nomeadamente entre a multiplicação e a divisão. Entendem que o facto de um aluno utilizar a multiplicação como estratégia num problema de divisão, revela o seu à vontade na relação entre conceitos e não mostra a sua incapacidade em utilizar a divisão.

Os alunos iniciam a resolução dos problemas 4, “Os autocarros” e 5, “Número de alunos”, cujos sentidos da divisão são de medida e de partilha, com o reconhecimento que são problemas de divisão, à exceção da Ivone, no problema 4. Este facto pode estar associado àquilo a que os autores Mulligan e Mitchelmore (1997) assumem como condições para a escolha do modelo intuitivo a utilizar na resolução de problemas de multiplicação e divisão, que são: a ordem de grandeza dos números envolvidos, a semântica dos problemas apresentados e a experiência anterior dos alunos. De facto, nestes problemas houve propositadamente um aumento da ordem de grandeza dos números e a estrutura semântica dos problemas também foi alterada, com a apresentação de diferentes contextos, o que levou os alunos a preferirem

imediatamente uma estratégia de resolução mais eficiente do que as utilizadas nos três primeiros problemas. Foi também invertida, propositadamente, a ordem de apresentação dos sentidos da divisão dos problemas, relativamente à ordem anteriormente apresentada nos problemas 1, “Vamos sentar as pessoas” e 2, “As mesas”, o que não levantou qualquer problema aos alunos, antes pelo contrário.

Estratégias utilizadas pelos alunos

Os alunos recorrem a estratégias aditivas e multiplicativas muito diversificadas, tendo sido identificadas as seguintes: adição de dobros, adição repetida de parcelas iguais, usar a subtração, usar fatores de referência, usar múltiplos de 10, usar o dobro, multiplicar sucessivamente, multiplicar em coluna. Recorrem ainda às seguintes estratégias: usar o valor de posição e tentativa e erro. Fazem também a representação do algoritmo da divisão, mas recorrem para isso a uma estratégia multiplicativa.

Os alunos optam, com grande frequência, por utilizar com sucesso estratégias multiplicativas na resolução de problemas de divisão, embora também recorram, com menor frequência, a estratégias aditivas, com recurso à adição e subtração. O que vem no sentido do que Fuson (2003) propõe, que a compreensão sobre a multiplicação e, em específico, na relação entre a multiplicação e divisão, assim como, a fluência dos alunos com a adição e subtração criam métodos de cálculos acessíveis de divisão. Tal como refere Jesus (2005) o desenvolvimento progressivo do sentido do número, das operações de adição, subtração e multiplicação, bem como o cálculo mental são determinantes para a apropriação do conceito da divisão por parte dos alunos.

Como o problema 2, “As mesas” e o problema 1, “Vamos sentar as pessoas” apresentam os mesmos números envolvidos e contextos semelhantes, embora com sentidos de divisão diferentes, um de partilha e outro de medida, na resolução do problema 2, todos os alunos tendem a utilizar a resposta encontrada no problema 1 e a recorrer ao conhecimento de factos multiplicativos já utilizados neste. De acordo com Mulligan e Mitchelmore (1997) o conhecimento que os alunos têm dos números e a sua experiência anterior são condições para a escolha do modelo intuitivo a utilizar na resolução de problemas de multiplicação e divisão. Também Kouba (1989) descreve

que os alunos recorrem a factos conhecidos para poderem encontrar a resposta, na categoria de recordar números conhecidos, uma das cinco categorias de estratégias encontradas na resolução de problemas de multiplicação e divisão.

A inclusão de estratégias subtrativas no conjunto das estratégias identificadas está associada à resolução do problema 2, “As mesas”, cujo sentido da divisão é o de medida. Utilizam a estratégia de retirar uma mesa completa, para assim associar o número de vezes que subtraem ao número de mesas necessárias. Também Kouba (1989) indica que em problemas de divisão e em concreto de medida, os alunos utilizam uma dupla contagem, em que recorrem à formação de grupos até se atingir o dividendo. No mesmo sentido, Ambrose et al. (2003) na categoria de trabalhar com um grupo de cada vez, refere a utilização de subtrações sucessivas do divisor ao dividendo principalmente em problemas de medida.

A inclusão de estratégias aditivas, com recurso à adição de dobros, no conjunto das estratégias identificadas está associada à resolução do problema 1, “Vamos sentar as pessoas”, cujo sentido da divisão é o de partilha. Tudo aponta que o tenham feito pela facilidade que têm em trabalhar com estes números mentalmente. Kouba (1989) descreve exatamente que nos problemas de divisão com sentido de partilha, os alunos podem utilizar a contagem com base em múltiplos de um dos fatores do problema. Também Putten (2005) identifica nas categorias de estratégias utilizadas pelos alunos em problemas de divisão, os agrupamentos simples, com recurso a dobros.

Pela descrição, atrás apresentada, de uma das estratégias utilizadas pelos alunos na resolução do problema 1, “Vamos sentar as pessoas”, concluo que os alunos não utilizam procedimentos distributivos, característicos dos problemas de divisão com sentido de partilha, como descreve Ambrose et al. (2003), pois os alunos não distribuem as pessoas pelas mesas, mas sim, começam por somar um dos dados numéricos do problema, 60, encontram o dobro daquele, 120 e seguem com esse raciocínio, até que o abandonam. Parece que estão a tentar encontrar uma medida em problemas com sentido de partilha, tal como identificado por Ferreira (2005).

Dois alunos recorrem a estratégias aditivas nos problemas 5, “Número de alunos” e 6, “A multiplicar por 625” depois de terem utilizado estratégias multiplicativas, de forma a comprovar os resultados. De acordo com Mendes (2012), a preferência de alguns alunos por determinados procedimentos, mesmo quando contactaram com

outros procedimentos mais rápidos e poderosos, é devida à confiança que depositam na sua utilização.

O recurso à tabuada do seis na resolução do problema 1, “Vamos sentar as pessoas”, com o intuito de obter o múltiplo de seis pretendido, de forma a relacionar com 60, foi iniciado pela aluna Nídia, tendo sido importante na resolução e compreensão do problema. De acordo com Brocardo et al. (2008), o uso de estratégias de cálculo mental tem uma grande importância na progressão para um nível de cálculo formal e na aprendizagem significativa das operações. A utilização deste atalho na resolução do problema, por parte dos colegas de grupo, foi uma mais-valia e uma orientação. Para Menon (2003), a utilização destes atalhos são uma forma de motivação, principalmente dos alunos com mais dificuldades e possibilitam a utilização de relações numéricas, que aumentam o sentido de número, desenvolvem o cálculo mental, permitem a utilização de estimativas e a compreensão dos conceitos. Também Gravemeijer (2005), no que diz respeito à reinvenção guiada do algoritmo da divisão, sugere que os alunos descubram ao seu nível e ritmo, pois estabelecem atalhos de forma a construírem o seu conhecimento experimental. Ainda, Ferreira (2005) assume e valoriza a utilização de estratégias pessoais, por parte dos alunos, na resolução dos problemas, antes e depois da introdução do algoritmo, como uma forma de construção do conceito de divisão.

Na resolução do problema 4, “Os autocarros”, cuja divisão é não exata e cujo sentido é de medida, há dois alunos que optam por “espreitar” pela janela da sala de aula, no sentido de confirmar se na Avenida junto à escola, circulam autocarros com lugares vazios. Isto no sentido de avaliarem a possibilidade de existir mais um autocarro para transportar os 30 alunos, que sobram no resto do algoritmo da divisão, mas que deixa 20 lugares vazios. Gravemeijer (2005), refere a modelação emergente, em que os alunos resolvem um problema modelando-o, ligando-o a situações e experiências reais, com recurso a estratégias informais.

Dificuldades manifestadas pelos alunos

Os alunos, de uma forma geral, manifestam mais dificuldades no problema 4, “Os autocarros”, cuja divisão é não exata e cujo sentido é de medida. Facto que se deve à dificuldade de interpretação do resto para chegar à resposta, o que vai no

sentido do que é apresentado por Brocardo et al. (2008), que referem que, na divisão não exata, a existência do resto vem acrescer o grau de dificuldade do estudo da divisão e que a capacidade de avaliar a importância do mesmo, de forma a responder corretamente ao problema colocado, implica a presença constante do sentido do número e o domínio da multiplicação.

Os alunos confundem o objetivo do problema 2, “As mesas” com o objetivo do problema 1, “Vamos sentar as pessoas”, pois têm dificuldades em perceber se a pergunta é quantas pessoas ficam em cada mesa, ou quantas mesas são necessárias. Isto pela apresentação, propositada, em ambos os problemas dos mesmos números envolvidos e contextos semelhantes, embora com sentidos de divisão diferentes, um de partilha e outro de medida. De acordo com Mulligan e Mitchelmore (1997), a estrutura semântica pode ser um dos fatores decisivos na escolha do modelo intuitivo a utilizar na resolução do problema. O facto do sentido da divisão ser diferente nos dois problemas, um de partilha e o outro de medida, leva a que iniciem a resolução dos mesmos com estratégias diferentes, no primeiro recorrem à adição de dobros e no segundo à subtração sucessiva do divisor ao dividendo. No entanto, esse facto não faz com que terminem ambas as resoluções com as mesmas estratégias de resolução, multiplicativas, e ainda por reconhecerem os problemas como sendo de divisão. O que está de acordo com as classificações de estratégias apresentadas por Cornelis et al. (2005), que indicam, no que se refere à evolução das estratégias empregues pelos alunos ao longo do ano letivo, que tendem a utilizar sempre a mesma estratégia para todas as divisões.

Nem todos os alunos conseguem efetuar estimativas para o valor do quociente. Por exemplo, no problema 3, Nídia propõe realizar o algoritmo da multiplicação de 20×50 , quando o valor a encontrar tem que ser múltiplo de 25, o que revela falta de sentido do número. De acordo com Greeno (1991), o sentido de número é identificado em exemplos práticos de atividade matemática, associado ao cálculo mental flexível, a estimativas de quantidades numéricas e a julgamentos quantitativos.

Há alunos que em raras ocasiões, decidem lançar “palpites” para o grupo, no sentido de realizarem qualquer operação com os números envolvidos no enunciado do problema, sem que compreendam o efeito dessa mesma operação, o que demonstra falta de sentido de número. De acordo com a terceira área do quadro de análise de sentido de número proposto por McIntosh et al. (1992), os autores referem que a falta de inclinação dos alunos para reverem os dados e a razoabilidade dos resultados

demonstra pouco conhecimento dos números e das operações nos contextos de cálculo, o que pode indicar que os alunos não possuem sentido de número.

Sentido de número dos alunos

A análise das estratégias de resolução dos problemas utilizadas pelos alunos, tendo em conta as sínteses realizadas para cada aluno e a síntese global, permitiu-me concluir sobre os aspetos do sentido de número revelados na resolução dos problemas. Estes estão organizados de acordo com as três áreas globais, propostas por McIntosh et al. (1992): conhecimento e a facilidade com os números, conhecimento e a facilidade com as operações e aplicação do conhecimento e da facilidade com os números e as operações nos contextos de cálculo.

De acordo com a primeira área, o conhecimento e facilidade com os números, é notório neste estudo, dado que os alunos recorrem sempre que possível, a valores de referência, como por exemplo na utilização da tabuada do seis, no problema 1, “Vamos sentar as pessoas”, para assim mais facilmente obterem o múltiplo de seis pretendido, de forma a relacionarem-no com 60. No que diz respeito, à grandeza relativa e absoluta dos números e ao seu sentido de ordenação, foi evidente na resolução de todos os problemas que os alunos têm em conta o valor de posição dos números com que trabalham, o que é evidenciado quando multiplicam sucessivamente um fator na busca constante do múltiplo pretendido.

Na segunda área do quadro de análise de sentido do número, o conhecimento e a facilidade com as operações, que engloba as relações entre as operações, em concreto a importância na relação entre as operações inversas, nomeadamente entre a multiplicação e a divisão, foi evidente, neste estudo, que os alunos reconhecem os problemas apresentados como sendo de divisão, mas todos realizam estratégias multiplicativas para confirmarem o resultado. Por norma, multiplicam o quociente pelo divisor para que possam confirmar se obtêm o dividendo. Reconhecem, desta forma, a relação particular existente entre as operações divisão e multiplicação.

Na terceira área, a aplicação do conhecimento e a facilidade com os números e as operações nos contextos de cálculo, que engloba a consciencialização da existência de várias estratégias e a inclinação para usar uma representação e/ou método eficiente e de acordo com este estudo, os alunos parecem ter consciência da

existência de várias estratégias de resolução dos problemas que lhes são propostos. Os alunos recorrem, com frequência, a diferentes estratégias na resolução dos problemas, nomeadamente, aditivas e multiplicativas. É evidente que perante um determinado contexto, concebem uma estratégia que se revela improdutivo e são capazes de voltar a pensar noutra, de modo a obter a resposta do problema. No que se refere à inclinação para usar um método eficiente, é notório que os alunos utilizam a multiplicação em todos os problemas.

Reflexão

Ao concluir este estudo considero importante realizar uma reflexão sobre a minha própria aprendizagem enquanto professora e investigadora. Faço ainda, algumas considerações que surgiram ao longo desta investigação e que considero relevante partilhar.

Enquanto professora de apoio dos alunos envolvidos na investigação, este estudo constitui-se relevante para a minha formação profissional, no sentido em que me permitiu ter uma melhor perceção dos conhecimentos e dificuldades dos alunos. Contribuiu para uma melhoria da minha prática letiva, no sentido de desenvolver nos alunos aprendizagens significativas ao invés de aprendizagens rotineiras e desprovidos de sentido.

Enquanto investigadora, creio tratar-se de um estudo que contribui para um avanço do campo científico, no domínio da educação matemática, pois traduz-se num aprofundamento da compreensão sobre questões fundamentais relativas ao conceito de divisão dos alunos, analisando o seu desempenho na resolução de problemas.

Numa reflexão ao meu desempenho em sala de aula, dei conta durante o processo de transcrição das gravações áudio com a ajuda das imagens vídeo, que em algumas situações, quando questiono os alunos dou-lhes pouco tempo para responderem. Tal facto, talvez se deva à constante preocupação de os ajudar a esclarecer as suas dúvidas, durante o trabalho de grupo e mesmo durante a partilha de ideias em coletivo. No meu entender, se lhes tivesse dado mais tempo, estes conseguiriam explicar melhor os seus raciocínios, o que decerto, enriqueceria mais este trabalho.

No meu entender, foi muito positivo verificar na análise de dados, que as duas alunas mais reservadas deram um contributo bastante positivo ao trabalho de grupo, as suas “achegas” aos colegas foram, em muitas situações, fulcrais, no sentido de desenvolverem o conceito de divisão e de sentido de número.

Verifiquei, na análise de dados, que quando os alunos não são ouvidos pelos seus colegas de grupo, tendem a seguir dois caminhos possíveis: abandonam a ideia ou insistem na mesma, mesmo que o façam sozinhos. Só através de uma análise atenta às imagens vídeo, me permitiu identificar esta segunda opção.

Limitações do estudo e recomendações

Limitações

Apesar de todos os problemas terem sido criteriosamente escolhidos, tendo em conta as características daquela turma de 4º ano de escolaridade à qual dava apoio e, em específico, aos quatro alunos selecionados, poderão ter sido limitações deste estudo, a ordem de grandeza dos números envolvidos, ou os contextos dos problemas. Outras limitações poderão ter sido o número de problemas aplicados, assim como, o número de alunos que os resolveram. Neste estudo, tive de ter em conta o tempo disponível para a sua realização, no que diz respeito, ao tempo necessário para a recolha de dados, que se prolongou entre o 2º e 3º períodos letivos, assim como, o tempo necessário para a análise dos dados.

Outra limitação poderá ter sido o facto de ter desempenhado os papéis de professora de apoio e investigadora. O facto de ter tido este duplo papel poderá ter condicionado os dados, embora tenha havido um esforço para que isso não acontecesse, nomeadamente através da utilização do diário de bordo.

Recomendações

Sendo este estudo centrado em problemas de divisão, com números naturais e com os três sentidos da divisão: partilha, medida e divisão como operação inversa da multiplicação em diferentes contextos, parece-me que seria pertinente realizar um estudo sobre o conceito da divisão, em que existissem também problemas de divisão com o sentido de razão e com números racionais não negativos na forma decimal. No meu ponto de vista, teria mais sentido esse estudo ser realizado no 5º ano de escolaridade, dado que envolve problemas mais complexos e tendo em conta as orientações do Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte et al., 2007), em que é destacada a necessidade particular de continuar a desenvolver-se o trabalho com os algoritmos no 2º ciclo, particularmente com o algoritmo da divisão, dado que é o último a ser introduzido no 1º ciclo do Ensino Básico.

Outra recomendação é a hipótese de ser dada continuidade a este estudo, com os mesmos alunos, no próximo ano letivo, ou seja, no 5º ano de escolaridade, dado que todos transitaram e vão frequentar a mesma escola, no sentido de se verificar se existe alguma evolução nas suas estratégias de resolução de problemas que tenham implícito o conceito de divisão.

Por último, e com o intuito de analisar a evolução acerca do conceito de divisão, de um determinado grupo de alunos, poderia ser realizado um estudo longitudinal, em que fossem acompanhados durante todo o percurso do 1º Ciclo do Ensino Básico.

Referências bibliográficas

- Abrantes, P, Serrazina, L., & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na Educação Básica*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica.
- Abrantes, P. (1988). Um (bom) problema (não) é (só)... 8, 7-10.
- Ambrose, R., Baek, J., & Carpenter, T. (2003). Children's invention of multidigit multiplication and division algorithms. Em A. Baroody, & A. Dowker (Edits.), *The development of arithmetic concepts and skills* (pp. 305-336). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Anghileri, J. (2001). Development of division strategies for year 5 pupils in ten English schools. *British Educational Research Journal*, 27 (1), 85-103.
- Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F., & Timóteo, M. C. (2013). *Programa de Matemática para o Ensino Básico: Ministério da Educação*. Lisboa: Ministério da Educação, DGE.
- Bogdan, R. &. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria ue aos métodos*. Porto: Porto Editora.
- Brocardo, J., Delgado, C., & Mendes, F. (2007). A multiplicação no contexto do sentido do número. Em *Desenvolvendo o sentido do número. Perspetivas e Exigências Curriculares* (pp. 9-17). Lisboa: APM.
- Brocardo, J., Serrazina, L., & Rocha, I. (2008). *O Sentido do número: Reflexões que entrecruzam a teoria e a prática*. Lisboa: Escolar Editora.
- Bryant, P., Correa, J., & Nunes, T. (1998). Young Children's of Division: The Relationship Between Division Terms in a Noncomputational Task. *Journal of Educational Psychology*, 90 (2), 321-329.
- Buys, K. (2008). Mental arithmetic. Em *M. Van den Heuvel-Panhuizen (Ed.) Children Learn Mathematics: A Learning-Teaching Trajectory with Intermediate Attainment Targets for Calculation with Whole Numbers in Primary School* (pp. 121-146). Netherlands: Sense Publishers (obra original publicada em 2001).
- Clarke, D. (2004). Issues in the teaching of Algorithms in the Primary Years. Em B. Clarke, & al (Eds.), *International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics* (pp. 21-36). Goteborg: National Center for Mathematics Educations.

- Coutinho, M. C. (2011). *Metodologia de investigação em Ciências Sociais e Humanas*. Coimbra: Almedina.
- Ell, F. (2001). Strategies and Thinking about Number in Children Aged 9-11. *Technical Report 17, University of Auckland*. Auckland: NZ.
- Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. Em *M.C. Wittrock, (Ed.) Handbook of research on teaching (3ªed.)*. New York: Macmillan.
- Ferreira, E. (2005). Um percurso na aprendizagem do conceito de divisão no 1º ciclo. Em GTI (Ed.), *O Professor e o Desenvolvimento Curricular* (pp. 113-137). Lisboa: APM, Grupo de trabalho de Trabalho de Investigação.
- Fosnot, C., & Dolk, M. (2001). *Young mathematicians at work: Constructing multiplication and division*. Portsmouth, NH : Heinemann.
- Foxman, D., & Beishuizen, M. (2002). Mental calculation methods used by 11 year-olds in different attainment bands: A reanalysis of data from the 1987 APU survey in UK. *Educational Studies in Mathematics, 51 (1-2)*, pp. 41-69.
- Fuson, K. (2003). Toward Computational Fluency in Multidigit Multiplication and Division. *Teaching Children Mathematics, 9 (6)*, pp. 300-305.
- Gonçalves, M. (2003). *A multiplicação e a divisão em alunos do 1º Ciclo do Ensino Básico. Dissertação de Mestrado*. Lisboa: Escola Superior de Educação de Lisboa.
- Gravemeijer, K. (2005). What makes mathematics so difficult, and what can we do about this? Em L. Santos, A. Canavarro, & J. Brocardo (Edits.), *Educação matemática: caminhos e encruzilhadas* (pp. 83-101). Lisboa: APM.
- Greeno, J. G. (1991). Number sense as a situated knowing in a conceptual domain. *Journal for Research in Mathematics Education, 22 (3)*, 170-218.
- Hartnett, J. (2007). Categorisation of mental computation strategies to support teaching and encourage classroom dialogue. In J. Watson, & k. Beswick (Ed.), *Mathematics: Essencial Research, Essencial Practice. Proceedings of the thirtieth annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia. (MERGA-30) I* (pp. 345-352). Hobart: MERGA.
- Heirdsfield, A., Cooper, T., Mulligan, J., & Irons, C. (1999). Children's mental multiplication and division strategies. Em O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd Psychology of Mathematics Education Conference* (pp. 89-96). Haifa: Israel.

- Jesus, A. (2005). Construir o conceito da divisão, resolvendo problemas: Um estudo de caso. Em GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 91-111). Lisboa: APM, Grupo de Trabalho de Investigação.
- Kouba, V. (1989). Children's Solution for Equivalent Set Multiplication and Division Word Problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20 (2), 147-158.
- Lessard-Hebert, M., Govette, G., & Boutlin, G. (1990). *Investigação Qualitativa: Fundamentos e Práticas*. Lisboa: Instituto Piaget.
- Markovits, Z., & Sowder, J. (1994). Developing Number sense: An intervention study in Grade 7. *Journal for Research in Mathematics Education* 25 (1), 4-29.
- Martin, J. (April de 2009). The Goal of Long Division. *Teaching Children Mathematics*, 15 (8), 482-487.
- McIntosh, A. (1998). Teaching mental algorithms constructively. Em L. Morrow, & M. Kenney(Eds.), *The teaching and learning of algorithms in school mathematics, 1998 Yearbook of the Council of Teachers of Mathematics* (pp. 44-48). Reston: VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics*, 12 (3), 2-8.
- McIntosh, A., Reys, R. E., & Reys, B. J. (1997). Mental computation in the middle grades: The importance of thinking strategies. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 2 (5), 322-327.
- Mendes, F. (2012). *A aprendizagem da multiplicação numa perspetiva de desenvolvimento de sentido de número: um estudo com alunos do 1º ciclo. Tese de Doutoramento*. Lisboa: Universidade de Lisboa: Instituto de Educação.
- Mendes, F. (2013). A aprendizagem da divisão: um olhar sobre os procedimentos usados pelos alunos. *Da investigação às práticas*, 3 (2), 5-30.
- Mendes, F., Brocardo, J., & Oliveira, H. (2013). A evolução dos procedimentos usados pelos alunos: contributo de uma experiência de ensino centrada na multiplicação. *Quadrante*, XXII, (1), 133-162.
- Mendes, F., Brocardo, J., & Oliveira, H. (2012). 3rd Year Pupils' Procedures to solve Multiplication Tasks. *ICME12 - Congress on Mathematical Education*, (pp. 8-15). Seoul, Korea.
- Menon, R. (2003). Using number relationships for estimation and mental computation. *Mathematics Teaching in the Middle Scholl*, 8 (9), 476-479.

- Mulligan, J., & Mitchelmore, M. (1997). Young Children's Intuitive Models of Multiplication and Division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28, (3), 309-330.
- NCTM. (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Lisboa: APM.
- Noteboom, A., Bokhove, J., & Nelissen, J. (2008). Glossary part I. Em *M. van den Heuvel- Panhuizen (Ed.), Children Learn Mathematics: A Learning- Teaching Trajectory with Intermediate Attainment Targets for Calculation with Whole Numbers in Primary School* (pp. 89-91). Netherlands: Sense Publishers (obra original publicada em 2001).
- Patton, M. (2002). *Qualitative research & evaluation methods (3ªed.)*. Thousand Oaks: Sage.
- Ponte, J. (1994). O estudo de caso em educação Matemática. *Quadrante 3 (1)*, 3-18.
- Ponte, J. P. (1994). O estudo de caso em educação Matemática. *Quadrante 3 (1)*, 19-53.
- Ponte, J., & Santos, L. (1998). Práticas letivas num contexto de reforma curricular. *Quadrante 7 (1)*, 3-33.
- Ponte, j., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa , H., . . . Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico: Ministério da Educação*. Lisboa: DGIDC.
- Putten, C., Snijders, P., & Beishuizen, M. (2005). Progressive Mthemmatization of Long Division Strategies in Dutch Primary Scholls. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36, (1), 44-73.
- Rodrigues, M., Rocha, I., & Menino, H. (2007). A divisão no contexto do sentido do número. Em *Desenvolvendo o Sentido do Número. Perspetivas e Exigências Curriculares (Volume II)* (pp. 19-22). Lisboa: APM.
- Schoenfeld, A. (1996). Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problemas? Em P. Abrantes, L. Leal, & J. Ponte, *Investigar para aprender matemática* (pp. 61-72). Lisboa: APM e Projeto MPT.
- Serrazina, L. (Julho-Dezembro de 2012). O sentido do número no 1º ciclo: uma leitura de investigação. *BOLETIM GEPEM*, 61, 15-28.
- Stake, R. E. (2007). *A Arte da Investigação com estudos de caso*. Lisboa: Fundação Gulbenkian.
- Treffers, A., & Buys, K. (2008). Grade 2 (and 3) - Calculation up to one hundred. In M. van den Heuvel- Panhuizen (Ed.). Em *Children learn mathematics: A Learning-*

- Teaching Trajectory with Intermediate Attainment Targets for Calculation with Whole Numbers in Primary School* (pp. 61-88). Rotterdam, the Netherlands: Sense Publishers.
- Verschaffel, L., Greer, B., & Torbeyns, J. (2006). Numeral thinking. Em A. Guitérrez, P. Boero, & (Edits.), *Handbook of research on the psychology of mathematics. Past, present and future* (pp. 51-82). The Netherlands: Sense Publishers.
- Yaeckel, E., & Cobb, P. (1996). Normas socio matemáticas, argumentação e autonomia em matemática (tradução). *Journal for Research in Mathematics Education*, 27 (4), 458-477.
- Yin, R. K. (2009). *Case Study Research: Design and Methods (4th ed.)*. California: Sage Publications.

Anexos

Anexo 1 - Informação à Direção da Escola

Exma. Sr.^a Presidente da CAP
Agrupamento de Escolas [REDACTED]

Venho por este meio informar que estou a desenvolver um estudo de investigação, relacionado com o meu trabalho de mestrado sob o título: A divisão no 4º ano de escolaridade do *1.º Ciclo do Ensino Básico*, que tem por objetivo aprofundar a temática relacionada com a operação divisão.

O objetivo da investigação é compreender quais as estratégias que são utilizadas pelos alunos do 4º ano de escolaridade do 1.º Ciclo do Ensino Básico, em problemas de divisão, recorrendo, para o efeito, a uma metodologia qualitativa e interpretativa, do tipo estudo de caso.

Assim, contactei, de modo informal, a professora [REDACTED], da Escola EB1/JI [REDACTED] que se disponibilizou a trabalhar comigo nas seguintes condições:

- i. Elaborar/adaptar e discutir, em conjunto comigo, um conjunto de problemas sobre divisão, a serem implementadas no 2º e 3º períodos;
- ii. Deixar-me implementar os problemas elaborados na sua turma de 4.º Ano, da qual sou professora de apoio educativo;
- iii. Discutir e refletir sobre essas aulas, em conjunto comigo, no sentido da planificação das mesmas ir sendo adaptada à realidade da turma.

Neste sentido, venho por este meio solicitar a V^a Ex.^a autorização para que eu, Helena Isabel Silva Alcobia, possa proceder à implementação dos problemas de divisão e recolher os registos áudio e vídeo das mesmas, com vista a recolher dados que sejam objeto de análise no âmbito da investigação que me proponho fazer.

Mais declaro que as imagens daí resultantes não serão divulgadas nem serão utilizadas para quaisquer outros fins. Também e após a vossa resposta, enviarei informação aos encarregados de educação da turma, através da professora [REDACTED], solicitando autorização para os registos áudio e vídeo das aulas referidas.

Com os melhores cumprimentos.

Lisboa, 17 de Janeiro de 2014
A Professora de Apoio Educativo, Helena Alcobia.

Anexo 2 - Pedido de autorização aos Encarregados de Educação

Exmo. Encarregado de Educação do aluno (a) _____
do 4.º Ano, da turma da Professora [REDACTED]

Em continuação do trabalho que tem vindo a ser desenvolvido nas aulas, na área da Matemática, propus-me realizar, nesta turma, a recolha de dados para a dissertação da minha tese de mestrado, no âmbito do desenvolvimento da divisão no 4º ano de escolaridade no 1.º Ciclo do Ensino Básico. Assim, solicito a V. Ex.ª autorização para recolher dados usando meios áudio e vídeo, sobre a forma como os alunos resolvem uma sequência de problemas, construídos em conjunto com a professora [REDACTED], contribuindo, deste modo, para um melhor conhecimento sobre a temática em estudo.

Mais declaro que as imagens ou som daí resultantes não serão divulgadas nem serão utilizadas para quaisquer outros fins, sendo sempre preservado o anonimato dos alunos.

Colocando-me ao dispor para quaisquer esclarecimentos, com os meus melhores cumprimentos.

Lisboa, 17 de Janeiro de 2014
A professora de apoio educativo
Helena Alcobia

.....
Declaro que autorizo o meu filho(a)

_____ a participar na investigação desenvolvida pela professora Helena Alcobia no âmbito da sua tese de mestrado.

_____/_____/_____ (data)

O Encarregado de Educação

Anexo 3 - Enunciados dos problemas do questionário

1 - Queremos distribuir igualmente 114 pessoas por 6 mesas. Quantas pessoas ficam em cada mesa?

2 - Queremos distribuir 114 pessoas, sendo que em cada mesa ficam 6 pessoas. Quantas mesas são necessárias?

3 - Se em vez de 114 pessoas, fossem 113, sendo que em cada mesa ficam 6 pessoas. Quantas mesas seriam necessárias?

4 - Qual o número que multiplicado por 120 é igual a 480?

5 - O pai do Vasco ganha 1000 € por mês e o pai da Laura ganha 500 € também por mês. Compara os dois vencimentos. O que tens a dizer?

Anexo 4 - Enunciados dos problemas da sequência de aprendizagem

1 - “Vamos sentar as pessoas”

Queremos distribuir igualmente 480 pessoas por 60 mesas. Quantas pessoas ficam em cada mesa?

2 - “As mesas”

Queremos distribuir 480 pessoas, sendo que em cada mesa ficam 60 pessoas. Quantas mesas são necessárias?

3 - “A multiplicar por 25”

Qual o número que multiplicado por 25 é igual a 150?

4 - “Os autocarros”

Estão a organizar um torneio interescolar, em que irão participar 1230 alunos. Vão alugar autocarros que podem transportar 50 pessoas. Quantos autocarros são necessários?

5 - “Número de alunos”

No torneio interescolar, os 1230 alunos que irão participar vão ser divididos em 6 grupos. Quantos alunos ficam em cada grupo?

6 - “A multiplicar por 625”

Qual o número que multiplicado por 625 é igual a 2500?