

INSTITUTO POLITÉCNICO DE LISBOA
INSTITUTO SUPERIOR DE CONTABILIDADE E ADMINISTRAÇÃO DE LISBOA



Leilões combinatórios

Guida Maria Pereira Ribeiro

Lisboa, março de 2014

INSTITUTO POLITÉCNICO DE LISBOA
INSTITUTO SUPERIOR DE CONTABILIDADE E ADMINISTRAÇÃO DE LISBOA



Leilões combinatórios

Guida Maria Pereira Ribeiro

Dissertação submetida ao Instituto Superior de Contabilidade e Administração de Lisboa para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Controlo de Gestão e dos Negócios, realizada sob a orientação científica do Professor Doutor José Manuel de Oliveira Pires, Professor-Coordenador, da área científica de Matemática.

Constituição do Júri:

Presidente – Doutora Maria do Rosário Justino

Arguente – Doutor Fernando Miguel Seabra

Arguente – Doutor Aníbal Manuel da Mota Areia

Vogal – Doutor José Manuel de Oliveira Pires

Lisboa, março de 2014

Declaro ser a autora desta dissertação, que constitui um trabalho original e inédito, que nunca foi submetido (no seu todo ou qualquer das suas partes) a outra instituição de ensino superior para a obtenção de um grau académico ou outra habilitação. Atesto ainda que todas as citações estão devidamente identificadas. Mais acrescento que tenho consciência de que o plágio – a utilização de elementos alheios sem referência ao seu autor - constitui uma grave falha de ética, que poderá resultar na anulação da presente dissertação.

Guida Maria Pereira Ribeiro

AGRADECIMENTOS

Concluída que está esta investigação, gostaria de manifestar o meu agradecimento a todas as pessoas que me acompanharam e apoiaram neste percurso, e que graças ao seu empenho profissional e pessoal, me ajudaram a percorre-lo.

Desta forma, em primeiro lugar, agradeço ao meu orientador, Professor Doutor José Manuel de Oliveira Pires, pela enriquecedora partilha de ideias e pensamentos, incondicional disponibilidade, encorajamento e apoio científico prestado, ao longo deste tempo.

À administração e direção da empresa Jaguar Automóveis Lisboa S.A, por permitirem que este projeto se construísse, disponibilizando-me todo o tempo e meios necessários para que a investigação pudesse ser efetuada.

A todos os meus colegas e amigos que me ajudaram a ultrapassar as dificuldades nos tempos mais difíceis, pela força e compreensão em momentos de maior *stress*, apresento o meu reconhecimento.

Por último, mas de longe o agradecimento mais importante, aos meus Pais, sem os quais não seria possível levar a bom porto este projeto, para quem todas as palavras serão sempre insuficientes, mas para quem nunca as deixarei de repetir. Muito obrigado por tudo o que têm feito por mim.

RESUMO

O estudo dos leilões representa uma área importante nas ciências microeconómicas e na teoria dos jogos. A literatura da especialidade tem delineado diversas propriedades de grande utilidade no desenho dos leilões, tais como eficiência, maximização de rendibilidade ou minimização de custos, compatibilidade de incentivos, entre outras.

Os leilões combinatórios têm gerado recentemente um elevado interesse, por permitirem alocações mais eficientes do que nos leilões tradicionais, e pelo fato dos agentes poderem expressar preferências sobre combinações de itens. Estes leilões têm provado ser extremamente úteis em numerosas aplicações reais. A automação deste tipo de leilões constitui provavelmente o maior desafio, ao assegurar o tratamento computacional e retendo, em simultâneo, as propriedades económicas desejáveis.

Nesta dissertação descrevem-se primeiramente os conceitos fundamentais da teoria dos leilões, desde a sua origem até à era moderna, por forma a permitir um melhor enquadramento dos leilões combinatórios. Em particular, apresentam-se conceitos chave, propriedades essenciais no desenho dos seus mecanismos, linguagens de licitação, aplicações reais, bem como o problema da determinação das propostas vencedoras.

PALAVRAS-CHAVE:

Leilões, Leilões combinatórios, Negócios, Otimização combinatória, Programação linear, Programação linear inteira.

ABSTRACT

The auctions' study represents one of the most important areas in microeconomics science and game theory. Several literature approaches have been made on design auction properties, such as efficiency, revenue maximization or cost minimization, expected utilities optimization, among others.

Combinatorial auctions have generated recently a major interest leading to more efficient allocations than traditional auctions, and by enabling agents to fully express their preferences on trading bundles of items. These mechanisms are proving to be extremely useful in large real world applications. When faced from a computational tractability perspective and retaining the economic desirable properties, combinatorial auctions are perhaps the most challenging ones.

In this study are analyzed, from the origins to the current date, the conceptual foundations of auctions theory, leading to an overview of current research literature on combinatorial auctions. Several topics are introduced, such as key design properties, bidding languages, real world applications and the formulation of the winner determination problem.

KEYWORDS

Auctions, Combinatorial auctions, Business, Combinatorial optimization, Linear programming, Integer linear programming.

ÍNDICE

ÍNDICE.....	viii
ÍNDICE DE FIGURAS	xi
ÍNDICE DE TABELAS.....	xii
LISTA DE ABREVIATURAS E ACRÓNIMOS	xiii
1. Introdução.....	1
2. Perspetiva histórica	4
2.1. A origem dos leilões	4
2.2. A evolução dos leilões para a era moderna.....	5
3. Teoria dos leilões	9
3.1. Introdução ao conceito dos leilões.....	9
3.2. Caracterização dos leilões	9
3.3. Requisitos essenciais para o desenho de um leilão.....	14
3.4. Tipos de leilões	15
3.4.1. Leilões primários ou de um único bem ou serviço.....	15
3.4.1.1. Leilão Inglês.....	15
3.4.1.2. Leilão Holandês.....	16
3.4.1.3. Leilão fechado de primeiro preço.....	18
3.4.1.4. Leilão de Vickrey	18
3.4.2. Leilões secundários ou de múltiplos bens	19
3.4.2.1. Leilão chinês	19
3.4.2.2. Leilão silencioso.....	20
3.4.2.3. Leilão duplo.....	20
3.4.2.4. Leilão Walrasiano	21
3.4.2.5. Leilão generalizado de segundo preço	22
3.4.2.6. Leilão de proposta ou licitação única.....	22

3.4.2.7.	Leilões combinatórios	24
4.	Leilões combinatórios	28
4.1.	Introdução aos leilões combinatórios	28
4.2.	Função valor ou função de preferência.....	30
4.3.	A linguagem dos leilões combinatórios.....	32
4.3.1.	Propostas atômicas	33
4.3.2.	Propostas <i>OR</i>	33
4.3.3.	Propostas <i>XOR</i>	34
4.3.4.	Propostas <i>OR*</i>	35
4.4.	O desenho dos leilões combinatórios.....	36
4.5.	Aplicações dos leilões combinatórios.....	36
4.5.1.	Alocação de espectro de rádio – o caso da FCC	37
4.5.2.	Leilões combinatórios de procura.....	39
4.5.2.1	Leilões combinatórios de procura no transporte de cargas por caminhão .	39
4.5.2.2.	Leilões combinatórios de procura em refeições escolares	42
4.5.3.	Planeamento e alocação de tarefas	45
4.5.3.1.	Alocação de tarefas em missões de exploração	46
4.5.3.2.	Alocação de tarefas em operações de resgate e salvamento	48
4.5.4.	Formação de cadeias de abastecimento	51
4.5.5.	Alocação de faixas de aterragem nos aeroportos.....	52
4.5.6.	Alocação de recursos disponíveis em vôos/pacotes de férias.....	55
5.	Problema de alocação combinatória.....	58
5.1.	Definição e formulação.....	58
5.2.	Resolução do problema.....	62
5.2.	Relaxação em PL	63
5.3.	Casos especiais tratáveis	64

5.3.1.	Propostas com ordem linear	66
5.3.2.	Propostas com ordem circular	67
5.3.3.	Propostas com estrutura hierárquica.....	68
5.3.4.	Propostas de comprimento máximo igual a 2.....	69
6.	Conclusões.....	71
	BIBLIOGRAFIA.....	73

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 3.1 - Leilão de oferta	10
Figura 3.2 - Leilão de procura	11
Figura 3.3 - Leilão duplo com intervenientes identificados	12
Figura 3.4 - Leilão duplo com intervenientes não identificados	12
Figura 3.5 - Leilão Inglês	16
Figura 3.6 - Leilão Holandês	17
Figura 3.7 - Leilão de Vickrey.....	18
Figura 3.8 - Oferta e procura num leilão duplo	20
Figura 3.9 – Leilão de licitação ou proposta única.....	23
Figura 3.10 – Exemplo de leilões sequenciais.....	25
Figura 4.1 – Leilões primários vs. leilões combinatórios.....	47
Figura 4.2 – Tipos de agentes.....	48
Figura 4.3 – Cenário de catástrofe simulado	50
Figura 5.1 – Exemplo de um problema de alocação combinatória	59
Figura 5.2 – Exemplo de propostas válidas e não válidas na estrutura de ordem linear.	66
Figura 5.3 – Exemplo de propostas válidas e não válidas na estrutura de ordem circular. .	67
Figura 5.4 – Exemplo de propostas válidas e não válidas na estrutura hierárquica.	69
Figura 5.5 – Exemplo de propostas válidas e não válidas de comprimento máximo igual a 2.	70

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 4.1. – Valorização dos agentes para X , Y e XY	32
Tabela 4.2 – Linguagem OR e subaditividade	34
Tabela 4.3 – Hierarquia das propostas	50
Tabela 5.1 – Exemplo de CAP e linguagem de licitação	60

LISTA DE ABREVIATURAS E ACRÓNIMOS

CAP	<i>Combinatorial Allocation Problem</i>
FCC	<i>Federal Communication Comission</i>
PL	Programação Linear
PLI	Programação Linear Inteira
SPP	<i>Set Packing Problem</i>
TCC	Transporte de Cargas por Camião
TU	Totalmente Unimodular
WDP	<i>Winner Determination Problem</i>

1. Introdução

Desde tempos remotos, os leilões têm sido um mecanismo importante de mercado, constituindo uma das formas mais antigas de efetuar negócios. Possibilitam a venda de bens raros e pouco comuns e aplicam-se em situações em que não existe um mercado convencional, ou seja, onde os vendedores possam colocar os seus bens a um determinado preço.

A motivação para a escolha deste tema teve origem na crescente importância que se tem vindo a observar, na utilização dos leilões em inúmeras aplicações. Tais aplicações verificam-se em variadas áreas de negócio, tais como, transportes rodoviários de mercadorias, rotas de transportes públicos, chegadas e partidas de passageiros e mercadorias nos aeroportos, afetação do espectro de rádio nos serviços de comunicações, em comunicações sem fios (*wireless*), *procurement* industrial, formação de cadeias de fornecimento, contratação de refeições escolares, *e-business: e-selling, e-procurement, e-logistics*, trocas *Business-to-Business (B2B)*, entre outras.

De realçar que a existência dos leilões remonta à antiguidade, evoluindo durante milénios até chegar aos mecanismos atualmente conhecidos. Uma das publicações mais influentes data de 1961, destacando um artigo de William Vickrey, premio Nobel de Economia em 1996, que criou um formato de leilão onde o agente vendedor paga o valor da segunda licitação mais elevada de determinado bem ou serviço. Este formato incentiva os intervenientes a licitarem de acordo com o custo de oportunidade desse bem ou serviço, enfatizando a eficiência como característica inovadora deste mecanismo.

Na sua versão clássica, um leilão consiste em afetar um único bem ou serviço, a um dos vários agentes, quer sejam licitantes ou licitadores. Basicamente, e segundo Vickrey (1961), existem quatro tipos de leilões: de preço ascendente ou Inglês, muito conhecido e utilizado em numerosos leilões de consumo *online*, de preço descendente ou Holandês, proposta selada de primeiro preço, muito utilizados em situações de *procurement* de organizações públicas, e de proposta selada de segundo preço, ou leilão de Vickrey.

Os leilões evoluíram e cresceram muito para além destes quatro tipos de mecanismos apresentados anteriormente, nomeadamente no que refere aos leilões secundários, ou seja, leilões de múltiplos bens ou serviços.

Os leilões combinatórios caracterizam-se por serem leilões onde são vendidos vários bens ou serviços em simultâneo, ou seja, os licitantes efetuam licitações sobre um pacote ou uma combinação de bens ou serviços, em vez de licitarem individualmente cada bem ou serviço. Por exemplo, considerando três bens ou serviços, X,Y e Z, um licitante poderá colocar lances para sete possíveis combinações, em particular, {X}, {Y}, {Z}, {XY}, {YZ}, {ZX} e {XYZ}. Neste tipo de leilões, o valor de um bem ou serviço que um licitante irá ganhar, depende do conjunto dos restantes bens ou serviços que ele ganhar.

Os leilões combinatórios têm-se tornado atrativos por permitirem apresentar propostas sobre pacotes de bens ou serviços, e por possibilitarem aos agentes expressar totalmente as suas preferências sobre os bens ou serviços que pretendem comprar ou vender.

Um aspeto crucial nos leilões combinatórios é o da alocação das propostas, isto é, o da determinação das propostas vencedoras. Dada a natureza combinatória subjacente a este tipo de leilões, a utilização da otimização combinatória revela-se de enorme importância para a resolução deste problema.

Esta dissertação foca-se sobre os leilões combinatórios, um tipo de leilões largamente utilizado nos últimos anos, nomeadamente, sobre as origens conceptuais e o desenvolvimento dos leilões, os aspetos mais relevantes no seu desenho e conceção, as suas aplicações práticas e modelos de otimização para a resolução do problema de alocação das propostas vencedoras.

Neste contexto, o objetivo desta dissertação é o de apresentar um estudo sobre os leilões combinatórios e o seu enquadramento na teoria dos leilões. Esse estudo incide sobre as características base presentes nos leilões e outras mais específicas dos leilões combinatórios, tais como a linguagem e alocação das propostas, bem como a sua aplicabilidade a diversas áreas de negócio.

Após a revisão da literatura da especialidade, considerou-se estruturar esta dissertação em seis capítulos.

No capítulo dois, apresenta-se um levantamento bibliográfico sobre as origens e a evolução dos leilões, desde a antiguidade até ao seu formato atual, por forma a enquadrar o tema em estudo, ou seja, os leilões combinatórios. De fato, os leilões constituem um mecanismo de realização de negócios, largamente utilizado ao longo dos tempos. Os primeiros exemplos conhecidos, reportam-se a leilões de casamentos babilónicos e tiveram lugar 500 anos a.C. Os leilões têm estado presentes em quase todos os séculos, em todo o tipo de áreas de

negócios, expressos em todas as nacionalidades, e constituem a forma mais antiga de fazer negócios.

No capítulo três, descreve-se a teoria dos leilões, nomeadamente, os diversos tipos de leilões existentes, as principais características dos seus mecanismos e requisitos essenciais que devem ser considerados no desenho de um leilão. De acordo com Milgrom (2004), a teoria dos leilões envolve a caracterização das diferentes formas de leilões numa perspetiva económica, caracterização essa que é efetuada, pela sua natureza, seja pela oferta, pela procura ou ambos (duplos), pela forma como são efetuadas as licitações, leilões abertos ou fechados, e pela forma de fixação do preço, leilão de primeiro ou de segundo preço.

No capítulo quatro, efetua-se o levantamento bibliográfico sobre a teoria dos leilões combinatórios, descrevendo aspetos básicos deste tipo de leilões, nomeadamente o seu mecanismo, as suas características, função de valor ou função de preferência, linguagem de licitações e a eficácia do mecanismo desses leilões. O capítulo termina com uma descrição de algumas aplicações reais, por forma a dar uma ideia da enorme aplicabilidade deste tipo de leilões. Para Cramton, Shoham e Steinberg (2006), os leilões na sua essência, distinguem-se não só pelas suas regras, por exemplo ascendentes ou fechados, mas também pelo ambiente do próprio leilão, que engloba o número de agentes, as suas preferências, a informação privada que cada um deles possui, a quantidade de bens ou serviços a serem transacionados, entre outros.

No capítulo cinco, dado que os leilões combinatórios permitem ao licitante apresentar propostas para um pacote de bens ou serviços que deseja adquirir, desenvolve-se um trabalho de pesquisa sobre o problema de alocação das propostas, isto é, da determinação das propostas vencedoras, no que respeita aos modelos matemáticos para o problema, bem como a resolução do mesmo.

Por fim, no sexto e último capítulo, descrevem-se as considerações finais sobre o estudo efetuado.

2. Perspetiva histórica

2.1. A origem dos leilões

A origem da palavra leilão deriva do latim *augere* que significa aumentar e do árabe *al-lion*, que significa anúncio. Em termos muito simples, exprime a venda pública, realizada sob pregões, ou seja licitações em voz alta, para a aquisição de determinados bens, efetivando-se a venda para a maior oferta.

Os leilões constituem um mecanismo de realização de negócios, largamente utilizados ao longo dos tempos, estando presentes em quase todos os séculos, constituindo a forma mais antiga de fazer negócios. A sua origem reporta a tempos tão remotos na história, que não existem registos exatos sobre o seu início. De fato, segundo Cassady (1967), o que realmente se sabe é que um leilão não é um fenómeno de venda moderno, mas sim um mecanismo de venda que teve as suas origens na antiguidade.

A História conhecida dos leilões remonta ao ano de 500 a.C., conforme registos dos escribas da Grécia antiga. O autor Herodotos (480 a.C.) escreveu sobre o uso de leilões onde as mulheres eram leiloadas com o propósito de serem desposadas. De acordo com o mesmo, nenhum pai entregaria a sua filha a um homem que não garantisse que a iria desposar. Efetivamente, era considerado ilegal permitir que uma filha fosse vendida fora do método dos leilões.

Nessa altura, os homens formavam um círculo em redor de um conjunto de mulheres jovens, agrupadas com o propósito de serem vendidas numa feira anual. As mais bonitas eram sujeitas a lances vigorosos e eram destinadas aos homens mais abastados, chegando a atingir preços bastante elevados.

Nestes leilões, existia uma lei que obrigava a uma garantia, ou seja, o comprador podia ser ressarcido do valor pago, caso a relação conjugal não resultasse, isto porque, contrariamente a um cavalo, por exemplo, as damas não podiam ser experimentadas antes do leilão.

Em Cassady (1967), os vendedores das mulheres menos atraentes tinham que adicionar um dote ou outras ofertas monetárias por forma a efetuarem a venda. Nestes casos, era utilizado um método de leilão descendente, que começava por um preço elevado e decrescia até à primeira pessoa que licitasse, desde que estivesse garantido o preço mínimo para o vendedor.

No império romano, existia um leiloeiro autorizado chamado *Magister Auctionarium*. Estes leilões eram simbolizados por uma lança, que era atirada ao chão pelo leiloeiro no início de cada leilão. Desconhece-se qual o formato destes leilões, no entanto, e de acordo com o autor, o nome incorporado no mecanismo do mercado conduz à dedução de se tratar de leilões ascendentes, uma vez que a palavra *actus* em latim significa aumentar. Assim, assumia-se que as licitações eram feitas de forma ascendente, isto é, incrementava-se o valor da licitação anterior.

Geralmente, os leilões efetuados no império romano destinavam-se a liquidar espólios de guerra, no entanto, existiam outras utilizações: o grande Marcus Aurélius, um dos mais importantes filósofos estoicos e um dos últimos imperadores do império romano, leiloou o seu mobiliário para pagar dívidas durante vários meses.

Um dos mais notáveis leilões de todos os tempos teve lugar em 193 a.C., treze anos após Roma ter perdido o seu imperador Marcus Aurelius, todo o império romano colapsou e foi leiloado, num único lote, pela Guarda Pretoriana. A 23 de março do mesmo ano, a Guarda assassinou o imperador Pertinax, oferecendo todo o império a quem por ele mais pagasse. O vencedor do leilão foi Didius Julianus que pagou cerca de 6.250 dracmas a cada guarda¹.

Para além dos relatos anteriores dos leilões romanos, há ainda evidências do uso de leilões pelos monges budistas na China em busca de financiamento para a construção de templos. Tornou-se também prática habitual leiloar a propriedade de monges falecidos para essa mesma finalidade.

2.2. A evolução dos leilões para a era moderna

Os primeiros registos dos leilões da era moderna apareceram no dicionário inglês de Oxford, no ano de 1595, embora a presença dos leilões em Inglaterra tenha surgido antes, desconhecendo-se, no entanto, a data precisa.

Em 1649, quando o Rei Charles I de Inglaterra foi decapitado, toda a sua coleção de arte foi leiloadada em saldo, para colecionadores e investidores estrangeiros. Posteriormente, já no início do século XVIII, foram criadas as grandes casas de leilões: a Sotherby's, fundada em 1744, e a Christie's em 1766.

¹ Naquele tempo, uma família de três pessoas poderia viver apenas com meio dracma por dia.

Os registos mais antigos do uso de leilões nos Estados Unidos da América ocorreram nos estados situados a sul, onde os escravos capturados em África, acorrentados e embarcados para o continente americano, eram frequentemente vendidos em leilões. Os leilões continuaram muito populares durante a era da colonização, através de importações, da venda de colheitas, madeiras, gado, ferramentas, tabaco, e mesmo propriedades inteiras. A venda em leilão constituía a forma mais rápida e mais eficiente para converter bens, ou serviços, em dinheiro.

Para além dos registos conhecidos do uso dos leilões em Inglaterra e nos Estados Unidos da América, os leilões foram igualmente utilizados na Holanda e na Alemanha, no final do século XIX. Na Holanda, os leilões datam de 1887 e eram utilizados para vender fruta e vegetais. Registos da época evidenciam a história de um produtor de nome Jongerling que, ao chegar ao porto de Broek op Langendijk, no norte da Holanda, e ao verificar a enorme procura dos seus produtos, em vez de utilizar o método tradicional de venda a um único comprador, permitiu a competição entre todos os potenciais compradores, utilizando para isso o formato de um leilão.

No mesmo ano, mas agora na Alemanha, os pescadores começaram a utilizar o mecanismo dos leilões para vender o seu pescado, quando chegavam ao porto. Desta forma, os leilões permitiam aos pescadores vender rapidamente o seu peixe, resultando numa economia de tempo, traduzida em mais tempo disponível para a pesca e uma maior possibilidade de satisfazer a procura dos seus consumidores.

Conforme abordado nesta pequena resenha histórica, os leilões têm perdurado ao longo dos tempos por diversos motivos, na sua essência, por constituírem uma das formas mais puras de mercado, onde os compradores e vendedores negociam entre si, até chegarem a um preço mutuamente aceitável.

Com o avanço da tecnologia, o processo ancião de negócio, que caracteriza os leilões, encontra um novo método, desenvolve-se na Internet em vez de ocorrer numa localização geográfica específica, onde compradores e vendedores estão fisicamente presentes.

De fato, a adoção generalizada da Internet, tem segmentado mercados em diversas plataformas de comércio eletrónico, onde são disponibilizados milhões de bens e serviços a preços muito variados, desenhadas para reunir compradores e vendedores locais, nacionais e internacionais. De fato, segundo Thompson, Strickland e Gamble (2009), o formato de leilão eletrónico apresenta as seguintes vantagens:

1. Facilita a troca de informação e a condução dos negócios entre compradores e vendedores;
2. Permite eliminar a intermediação, reduzindo custos;
3. Permite alcançar um elevado número de participantes;
4. Não restringe horários e fornece informação sempre atualizada;
5. Fomenta o sentido de comunidade entre indivíduos que partilham os mesmos interesses.

Os *sites* de leilões, por sua vez, variam em diversos aspetos, nomeadamente, nos seus inventários, no processo de licitação, nos serviços adicionais e comissões, no suporte técnico, na funcionalidade, e no sentido de comunidade entre os seus utilizadores.

A popularidade dos leilões *online* aumentou exponencialmente nos últimos anos, uma vez que a Internet fomenta a concorrência e, conseqüentemente, aumenta a rendibilidade para o operador destes leilões. Esta rendibilidade poderá ser gerada quando o operador cobra taxas sobre a venda de bens ou serviços, comissões sobre as vendas, ou vendendo publicidade nos seus *websites*, ou ainda pela venda do seu próprio *merchandising* (novo ou usado) pela via dos leilões *online*. Recentemente, e segundo os mesmos autores, a possibilidade de aquisição por parte dos compradores, dos bens ou serviços, mesmo antes do leilão encerrar, constitui a opção de geração de rendibilidade que mais tem crescido. Nesta opção, o operador poderá vender os seus próprios produtos, ou permitir a outros vendedores que ofereçam os seus bens ou serviços num formato de leilão de preço fixo.

Essencialmente, e de acordo com McAfee e McMillan (1987) um leilão é um mecanismo económico cujo propósito é alocar bens ou serviços e formar o preço desses bens ou serviços, através de um processo chamado de licitação. Já Milgrom (1989) descreve que, dependendo das características dos compradores, também designados por licitantes ou agentes, e da natureza dos bens ou serviços a serem leiloados, alguns formatos de leilões poderão ser mais eficientes ou mais rentáveis para os vendedores, também designados por licitadores.

Os criativos que desenham os leilões *online* partem do princípio que os indivíduos irão agir estrategicamente, e que a maioria irá reter na sua posse informação relevante para a decisão, como em qualquer outro mecanismo económico desenhado de forma eficaz.

Desta forma, e segundo Milgrom (2011: 24), «o desenho [de um leilão] estimula a entrada e a competição», assentando num cauteloso equilíbrio entre encorajar os licitadores a

revelar o quanto valorizam determinado bem, desencorajando batotas ou conluios, e maximizando a rendibilidade para todos os intervenientes dos leilões.

3. Teoria dos leilões

3.1. Introdução ao conceito dos leilões

Os autores McAfee e McMillan (1987) consideram que um leilão constitui um mecanismo de negociação que obedece a uma série de regras, à especificação da forma de determinação da proposta vencedora e do valor que deverá ser pago pelo vencedor.

Uma característica predominante nos leilões é a presença de informação assimétrica (a informação não é conhecida de forma igual por todos os intervenientes na transação económica), e a assunção desta propriedade torna necessária a caracterização destes mecanismos, uma vez que diferentes tipos de leilões podem conduzir a resultados distintos.

A teoria dos leilões envolve a caracterização de diferentes formas de leilões numa perspetiva económica, que é efetuada de acordo com:

1. A sua natureza, leilões de oferta, de procura ou duplos (oferta e procura);
2. A forma como são efetuadas as licitações, leilões abertos ou fechados;
3. A forma de fixação do preço, leilões de primeiro ou de segundo preço.

Os bens a leiloar podem também possuir, ou não, um preço de reserva, que constitui o valor mínimo para que o vendedor aceite a sua negociação no leilão.

Neste capítulo efetua-se uma visão global sobre a teoria dos leilões, abordando notações e definições base, assim como conceitos teóricos utilizados no contexto desta dissertação. Nas subsecções seguintes descrevem-se diversas abordagens de autores da literatura da especialidade na caracterização dos leilões, na definição dos requisitos essenciais no desenho dos mesmos e tipologias existentes, terminando o capítulo com a introdução dos leilões combinatórios, tema fulcral deste trabalho.

3.2. Caracterização dos leilões

A natureza de um leilão é determinada pelo papel assumido pelos seus intervenientes: um leilão pode ser unilateral, o que significa que só compradores ou só vendedores poderão submeter licitações, ou pode ser bilateral, onde múltiplos compradores e vendedores submetem licitações em simultâneo. Desta assunção, em Guttman e Maes (1998) resulta a distinção entre leilões de oferta, de procura ou duplos.

Um leilão de oferta pode ser esquematizado, segundo os mesmos autores, de acordo com a Figura 3.1.

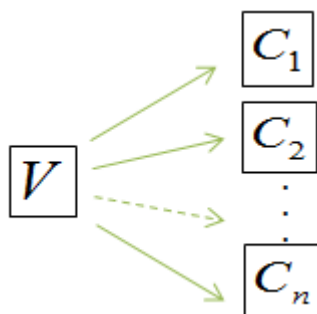


Figura 3.1 - Leilão de oferta

Fonte: Adaptado de Guttman e Maes (1998)

A Figura 3.1 representa a oferta de um determinado bem ou serviço, a vários compradores (C_1, C_2, \dots, C_n), por um vendedor (V), que pretende vender ao maior preço. O preço é determinado pelo vendedor, que estabelece um preço mínimo de reserva, abaixo do qual não pretende efetuar negócio. Neste caso, a proposta vencedora, será a do lance de oferta com valor mais elevado, ou seja, a do comprador que apresentar a proposta com o maior preço.

Em Thompson *et. al.* (2009), é apresentado o e-Bay como exemplo desta categoria de leilões, onde o leiloeiro fixa um valor de licitação mínimo (preço de reserva) que serve de preço de abertura do leilão. De fato, este *site* apresenta mais de 10 milhões de visitantes por mês, fornecendo a massa crítica de compradores (licitadores) e vendedores (licitantes), que fixam preços de mercado para venderem os seus bens ou serviços. Quanto mais licitações são colocadas, maior é a competição e maior é a probabilidade de fixar preços mais elevados.

Um outro exemplo desta categoria de leilões é dado por Sandholm (2002) que apresenta o *eAuctionHouse*², mecanismo de leilão *online*, que permite aos seus utilizadores comprarem e venderem bens ou serviços, assim como configurarem mercados, através de agentes de *software* que funcionam como terceiros na negociação. O autor considera o *eAuctionHouse*

² *eAuctionHouse* - mais informações disponíveis em <http://www.cs.cmu.edu/~amem/eAuctionHouse/eauctionhouse/home.htm>

como o primeiro e único *site* da Internet que suporta mecanismos de leilões combinatórios, um tipo de leilões que será apresentado mais à frente.

Num leilão de procura, os vendedores licitam para vender um determinado bem, que o comprador pretende adquirir ao preço mais baixo. Este leilão pode ser representado através da Figura 3.2.

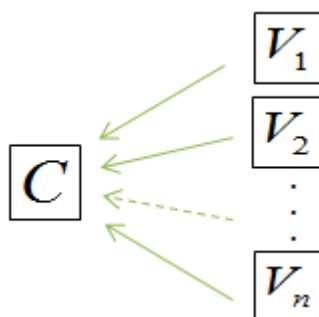


Figura 3.2 - Leilão de procura

Fonte: Adaptado de Guttman e Maes (1998)

De acordo com a Figura 3.2, vários vendedores (V_1, V_2, \dots, V_n) apresentam as suas propostas a um comprador (C) que determinará, como vencedora, a proposta que apresentar o menor valor. O comprador pode estabelecer um valor máximo (de reserva) que representa o limite que está disposto a pagar para efetuar o negócio.

Como exemplo destes leilões, Sadeddin, Serenko e Hayes (2007), consideram vários *sites* para comparação de preços, entre eles, o *FindTheBest.com*³. Trata-se de aplicações de *software* que auxiliam os consumidores a procurar, identificar e comparar preços e características de vários bens e serviços oferecidos por diversos fornecedores *online*, com o objetivo final de efetuar o melhor negócio possível.

Num leilão duplo, segundo Guttman e Maes (1998), vendedores e compradores negociam bens e serviços de forma bilateral e competitiva. O preço de fecho é estabelecido no intervalo das licitações de oferta e procura, de acordo com as regras previamente estabelecidas, conforme apresentado na Figura 3.3.

³ FindTheBest.com - mais informações disponíveis em <http://www.findthebest.com/>

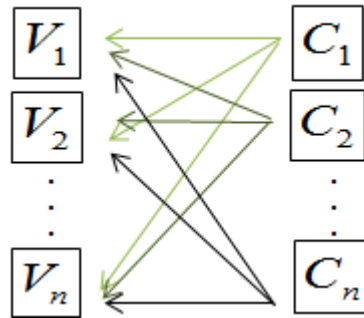


Figura 3.3 - Leilão duplo com intervenientes identificados

Fonte: Adaptado de Guttman e Maes (1998)

Esta negociação também poderá ocorrer com a participação de um leiloeiro conforme exemplificado na Figura 3.4.



Figura 3.4 - Leilão duplo com intervenientes não identificados

Fonte: Adaptado de Guttman e Maes (1998)

De acordo com a figura anterior, vendedores (V_1, V_2, \dots, V_n) e compradores (C_1, C_2, \dots, C_n) negociam entre si indiretamente, por intermédio de um leiloeiro.

Em Wurman, Wellman e Walsh (1998) os leilões são classificados de outra forma:

- ✓ Leilões simples ou duplos, descritos na secção anterior, onde se enquadram por exemplo, os leilões simples, os leilões Inglês, Holandês, fechados de primeiro e segundo preço (a abordar mais à frente), e os leilões duplos, por exemplo, leilões de ações ou opções;
- ✓ Leilões fechados ou abertos, no primeiro caso, as licitações submetidas pelos participantes não são conhecidas até o leilão fechar. Nos leilões abertos, as licitações são efetuadas publicamente;

- ✓ Leilões ascendentes ou descendentes, onde as licitações começam por um valor baixo (respetivamente, alto) e vão aumentando (respetivamente, diminuindo) no decorrer do leilão;
- ✓ Leilões de bens ou serviços simples, ou de múltiplos bens ou serviços, quando são leiloados um bem ou serviço ou vários bens ou serviços, respetivamente. Neste último, os bens ou serviços podem ser classificados como homogéneos ou heterogéneos;
- ✓ Leilões de atributos simples ou de múltiplos atributos. Num leilão, o atributo geralmente utilizado é o preço, neste caso, os leilões são classificados como sendo de um único atributo. No entanto, outros atributos podem ser considerados em simultâneo, tais como, qualidade e condições de entrega, passando o leilão a ser classificado como de múltiplos atributos;
- ✓ Leilões sequenciais, paralelos ou combinatórios, onde os bens ou serviços são leiloados um a seguir ao outro de forma sequencial, ou negociados em simultâneo, ou ainda licitados em combinações de bens, respetivamente.

Em Sandholm (2000) são apresentadas três tipologias de leilões: leilões de valor privado, de valor comum e de valor correlacionado, que assentam em requisitos qualitativos sobre a forma como os vendedores e os compradores valorizam os bens ou serviços (a valorização representa o valor monetário que traduz a utilidade esperada desses bens ou serviços).

No que se refere a leilões de valor privado, o valor dos bens ou serviços depende exclusivamente das preferências dos intervenientes do leilão. O licitante vencedor não pretende revender o bem ou serviço, nem terá qualquer utilidade em revelar antecipadamente a sua própria valorização, uma vez que o valor do bem ou serviço irá depender das valorizações de todos os outros licitantes e licitadores.

Em leilões de valor comum, a valorização de um bem ou serviço depende das valorizações dos outros intervenientes, ou seja, a valorização é afetada pelas preferências de vários licitantes e licitadores. Neste caso, enquadram-se, por exemplo, os leilões de títulos de dívida pública.

Por último, em leilões de valor correlacionado, a valorização atribuída por cada interveniente depende parcialmente, das preferências de outros intervenientes no processo do leilão.

3.3. Requisitos essenciais para o desenho de um leilão

Os autores Kalagnanan e Parkes (2004) sugerem uma matriz onde descrevem os requisitos que devem ser considerados para classificar e desenhar um leilão. Esses requisitos são:

- ✓ Os recursos, um leilão envolve um conjunto de recursos, para que a venda seja conduzida. Os recursos poderão ser um único tipo de bem ou serviço ou múltiplos tipos de bens ou serviços, com uma ou mais unidades de cada um deles;
- ✓ A estrutura do mercado, um leilão constitui um mecanismo de negociação entre compradores e vendedores. Nos leilões de oferta, um único vendedor vende recursos a vários compradores. Num leilão de procura, um único comprador tenta adquirir bens ou serviços a diversos vendedores. Os leilões onde existem vários compradores e vários vendedores são chamados de leilões duplos ou de intercâmbio;
- ✓ A estrutura de preferências, o tipo de preferências dos intervenientes de um leilão é importante e exerce impacto noutros fatores. As preferências definem a utilidade para cada interveniente, com diferentes resultados. Por exemplo, quando se negociam vários bens ou serviços, os intervenientes podem atribuir uma utilidade marginal decrescente para bens ou serviços adicionais;
- ✓ A estrutura das licitações, esta estrutura define a flexibilidade pela qual os intervenientes expressam os requisitos dos seus recursos. Para um único bem ou serviço, é apenas necessário expressar vontade de pagar ou aceitar o preço proposto. No entanto, para vários bens ou serviços idênticos, as licitações têm de expressar o preço e as quantidades a adquirir, o que possibilita a introdução de descontos de volume ou licitações do tipo tudo ou nada;
- ✓ A correspondência entre a oferta e a procura, trata-se de um aspeto chave de qualquer leilão, também denominado por *market clearing* ou *winner determination*. A questão prende-se com a escolha do mecanismo de leilão: um único vendedor para um único comprador, vários vendedores para um único comprador ou vários compradores para um único vendedor;
- ✓ O *feedback* de informação, o mecanismo de um leilão poderá fornecer ou não informação aos intervenientes, como por exemplo sinalização do preço das licitações. Nestas circunstâncias os compradores poderão ajustar as suas licitações de acordo com essa informação.

As escolhas efetuadas sobre qualquer um destes requisitos irão ter um impacto substancial na complexidade da análise para caracterizar a estrutura do mercado, na complexidade dos seus intervenientes e intermediários para implementar o mecanismo, e por fim na habilidade de desenhar mecanismos que sejam eficazes na satisfação de propriedades computacionais.

3.4. Tipos de leilões

Nesta secção são abordados de forma breve vários tipos de leilões que usualmente constam da literatura clássica da especialidade, e que servem de base à introdução do tema central deste trabalho, ou seja, os leilões combinatórios.

3.4.1. Leilões primários ou de um único bem ou serviço

Segundo Vickrey (1961), existem quatro tipos básicos de leilões, ou seja, leilões primários, onde é alocado um único bem ou serviço de cada vez:

1. Leilão aberto de primeiro preço, ascendente, também designado por leilão Inglês;
2. Leilão aberto de preço descendente, ou leilão Holandês;
3. Leilão fechado de primeiro preço;
4. Leilão fechado de segundo preço, ou leilão de Vickrey.

3.4.1.1. *Leilão Inglês*

Também conhecido como leilão aberto de preço ascendente (ou aberto de primeiro preço), o leilão Inglês constitui o tipo de leilão mais comum e tem sido frequentemente usado para vender peças de arte, antiguidades, bens imobiliários, vinho, entre outros. Para a sua realização são necessários no mínimo dois participantes.

De acordo com Cassady (1967), o leiloeiro abre o leilão a um preço de reserva, ou seja, ao preço mínimo que está disposto a leiloar o bem ou serviço (que poderá ser zero), e cada licitador é livre de aumentar o valor da sua licitação. Quando mais nenhum licitador demonstrar vontade em aumentar o valor da última licitação, o leilão termina e a licitação de maior valor será a vencedora.

O funcionamento do leilão Inglês é, de acordo com o mesmo autor, ilustrado na Figura 3.5.

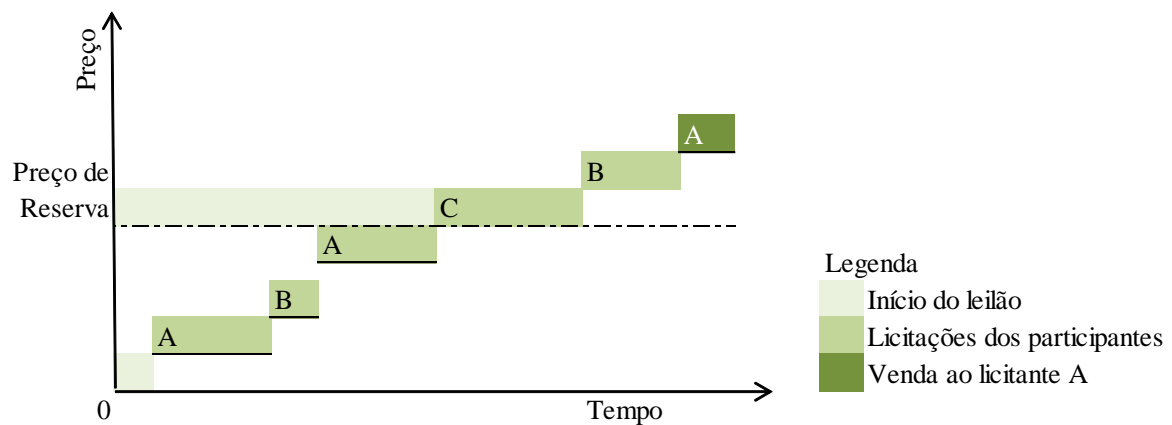


Figura 3.5 - Leilão Inglês

Fonte: Adaptado de Cassady (1967: 58)

Esta figura descreve o funcionamento do leilão Inglês em duas situações distintas:

- ✓ Quando não existe preço de reserva, as licitações começam no momento zero, sucedendo-se os lances de forma progressiva, até à maior oferta;
- ✓ Na existência de um preço de reserva fixado pelo vendedor (a tracejado), que constitui o valor mínimo pelo qual o bem ou serviço será leilado, sucedem-se as licitações a partir desse valor, até à de maior oferta. Quando não existem licitações superiores ao preço de reserva, o bem ou serviço não é vendido.

Os autores McAfee e McMillan (1987) defendem que as licitações poderão ser feitas diretamente pelos participantes, ou por alguém nomeado por eles, a seu favor e de acordo com as suas instruções, ou ainda submetidas eletronicamente (neste caso apresentadas publicamente). Segundo os mesmos autores, assim que o leilão começa, o leiloeiro vai incrementando um valor a cada licitação (valor previamente definido), continuando, até que não exista mais ninguém interessado em aumentar o valor desse bem ou serviço. Nesta fase, o leilão termina e quem efetuou a licitação final (a de maior valor), recebe o bem ou serviço ao preço que licitou.

Este tipo de leilão, assim como o leilão Holandês que a seguir se descreve, é conhecido como um leilão de primeiro preço, porque o vencedor paga o valor que licitou.

3.4.1.2. Leilão Holandês

O leilão Holandês é também um leilão aberto de primeiro preço, conforme refere Milgrom (1989), mas descendente, ou seja, o leiloeiro abre o leilão a um preço mais elevado do que o bem ou serviço realmente vale. O seu valor vai progressivamente decrescendo até que

3.4.1.3. *Leilão fechado de primeiro preço*

Neste tipo de leilão, cada participante submete uma única licitação, sob a forma de proposta, num envelope selado. Posteriormente, todos os envelopes são abertos numa única ronda e a licitação mais elevada é anunciada como sendo a proposta vencedora. Este tipo de leilão é frequentemente utilizado na área financeira, nomeadamente, em refinanciamento de crédito e câmbios monetários.

Para McAfee e McMilan (1987), o que distingue este tipo de leilão dos anteriores é não haver possibilidade de rever e ajustar as licitações no decorrer do leilão, conforme pode ocorrer, por exemplo, no leilão Inglês.

3.4.1.4. *Leilão de Vickrey*

Este tipo de leilão é também conhecido como leilão de segundo preço. O funcionamento é semelhante ao do leilão de primeiro preço, com exceção que o licitador que apresentar o valor mais elevado adquire o bem ou serviço, mas irá pagar o segundo preço, imediatamente abaixo do seu.

Segundo Vickrey (1961), num leilão de segundo preço são oferecidos dois ou mais bens ou serviços idênticos, podendo existir mais do que um vencedor. No final do leilão, os bens ou serviços serão vendidos a um único preço, e se o número de propostas vencedoras exceder o número de bens ou serviços a leiloar, será dada prioridade a quem submeteu primeiro a sua oferta.

A Figura 3.7 apresenta um exemplo para o funcionamento deste leilão.

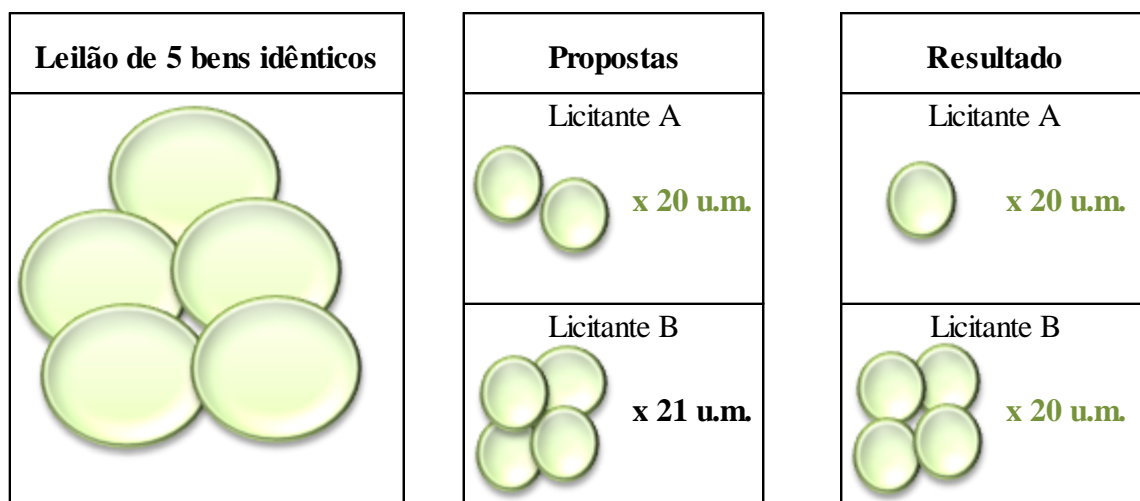


Figura 3.7 - Leilão de Vickrey

Nesta figura são considerados cinco bens idênticos para leiloar e dois participantes: A e B. O participante A pretende dois bens ao preço de 20 unidades monetárias (u.m.) por cada um, e o participante B pretende quatro bens e oferece 21 u.m. por cada um. No final, o participante B recebe a totalidade dos bens licitados, por ter oferecido um valor superior ao do participante A, e pagará 20 u.m. por cada, ou seja, o segundo valor de licitação mais elevado. O formato de leilão exemplificado nesta figura, permite ao participante A recusar a compra parcial dos bens que licitou, por apenas ficar com um bem, em vez dos dois inicialmente pretendidos.

Os leilões de Vickrey são frequentemente estudados nas ciências económicas, mas a sua utilização não é muito comum devido à complexidade na sua implementação. De fato, embora a estratégia dominante seja atrativa, (uma vez que os licitadores reportam as suas valorizações reais, maximizando o resultado final do leilão), apresenta diversas fragilidades, conforme descrito por Ausubel e Milgrom (2002): rendibilidades reduzidas ou inexistentes para o vendedor, vulnerabilidade a conluios entre os licitadores, a assunção de substituíbilidades entre as licitações, entre outros.

No entanto, os programas de publicidade *online* do Google⁴ e do Yahoo!⁵ utilizam uma extensão natural do leilão de Vickrey, o leilão de segundo preço generalizado, usualmente denotado por *GSP*, do inglês *generalized second-price auction*, mecanismo a ser abordado numa das subseções seguintes.

3.4.2. Leilões secundários ou de múltiplos bens

Conforme abordado anteriormente, um leilão em que são submetidos mais do que um bem ou serviço, é chamado de leilão de múltiplos bens ou serviços. As subseções seguintes apresentam alguns destes tipos de leilões.

3.4.2.1. Leilão chinês

Este leilão resulta de uma combinação entre tómbola e leilão, usualmente utilizado em eventos de caridade. O que diferencia este leilão de uma tómbola é que, numa tómbola todos os participantes concorrem para todos os prémios em jogo, enquanto num leilão chinês os agentes podem focar-se apenas nos prémios específicos que lhes interessa ganhar.

⁴ Google - mais informações disponíveis em: <https://www.google.com/adsense/afs.pdf>

⁵ Yahoo! - mais informações disponíveis em: <http://advertising.yahoo.com/>

Assim, os licitantes compram bilhetes, todos do mesmo valor, representando cada um deles, uma hipótese de ganhar. Quanto maior o volume de bilhetes adquirido e apostado por participante em cada bem, maior a probabilidade de ganhar o bem leilado.

3.4.2.2. *Leilão silencioso*

De acordo com Cassady (1967), a designação de leilão silencioso deve-se ao facto de não existir leiloeiro: os participantes escrevem as suas propostas numa folha de papel e deixam-nas numa mesa junto ao bem a leiloar. Este tipo de leilão é frequentemente utilizado em eventos de caridade, onde vários bens são leiloados em simultâneo, com uma data de término comum. Difere do leilão chinês, uma vez que os licitantes submetem o valor que estão dispostos a pagar pelo bem que pretendem adquirir. A proposta que apresentar o valor mais elevado será a vencedora e o licitante pagará o preço proposto.

3.4.2.3. *Leilão duplo*

Um leilão duplo pode ser analisado como se de um jogo se tratasse. Segundo os autores Kalagnanam e Parkes (2004), os jogadores são múltiplos compradores e vendedores presentes em simultâneo no mercado, apresentando propostas e fixando preços respetivamente, detendo valorizações próprias por cada bem ou serviço transacionado. De fato, McAfee e McMillan (1987) descrevem que tanto os vendedores como os compradores submetem licitações pelo valor que estão dispostos a vender e a comprar, respetivamente.

O comportamento da oferta e da procura deste leilão, encontra-se descrito na Figura 3.8.

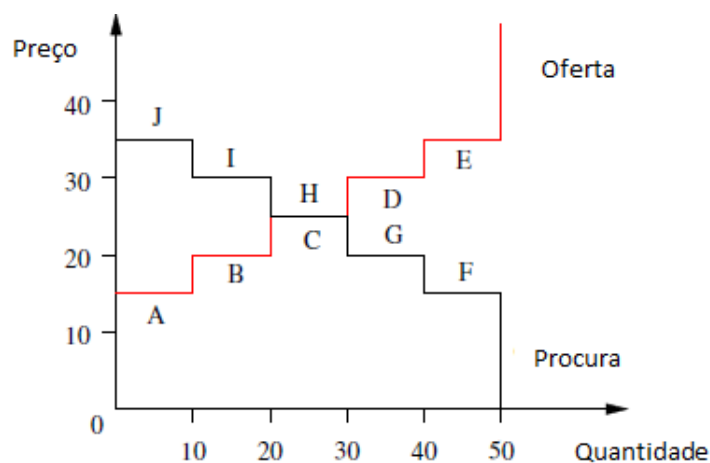


Figura 3.8 - Oferta e procura num leilão duplo

Fonte: Adaptado de Kalagnanam e Parkes (2004)

Considerando o ilustrado na Figura 3.8, existem cinco vendedores: A, B, C, D e E, com o propósito único de fornecer dez bens ou serviços, com preços limitados inferiormente por 15, 20, 25, 30 e 35 u.m. respectivamente, e cinco compradores F, G, H, I e J que procuram comprar os bens a preços limitados superiormente por 15, 20, 25, 30 e 35 u.m., respectivamente.

Conforme se constata nesta figura, se o preço for fixado abaixo das 15 u.m., nenhum vendedor estará disposto a vender. Por outro lado, se o preço se situar entre as 15 e as 20 u.m., apenas o vendedor A irá efetuar negócio, e assim sucessivamente. De igual forma, preços superiores a 35 u.m. não irão ter compradores, e entre 30 e 35 u.m., apenas o comprador J efetuará negócio.

A interseção da oferta e da procura irá conduzir a um determinado intervalo de quantidade e de preço. Neste exemplo, o preço de equilíbrio será de 25 u.m. e representa o valor que irá satisfazer todo o mercado: todos os vendedores e compradores negociam bens e serviços ao preço de 25 u.m.

Segundo os mesmos autores, a utilização de leilões duplos não é frequente, devido a dificuldades em modelar o comportamento entre compradores e vendedores, no que refere ao equilíbrio de estratégias, à racionalidade e às suas preferências.

3.4.2.4. *Leilão Walrasiano*

O modelo do leilão duplo apresentado anteriormente assemelha-se ao leilão Walrasiano, conforme descrito por Álvarez (2012). O autor descreve que neste tipo de leilão se estabelece uma dicotomia entre o processo negocial e a formação do preço dos bens ou serviços, evitando o tratamento de comportamentos estratégicos, através de um sistema de equilíbrio generalizado.

O leilão Walrasiano, desenvolvido por Leon Walras, é um leilão simultâneo no qual os agentes reportam antecipadamente ao leiloeiro, os seus valores de oferta e de procura para os bens ou serviços a leiloar. Por sua vez, com base nessa informação, o leiloeiro estabelece preços e quantidades possíveis para o leilão desses bens ou serviços. Num cenário de concorrência perfeita, onde a informação é simétrica e isenta de custos de transação, aumentam-se ou diminuem-se progressivamente os preços propostos, dependendo da oferta e da procura dos intervenientes, num processo chamado de *tatonnement*.

Segundo Walras (1926), o processo de *tatonnement* consiste na triagem dos preços e os intervenientes registam a quantidade de bens ou serviços que pretendem oferecer e os que pretendem adquirir. Não há transações nem produção a preços de desequilíbrio, sendo que os preços são ajustados para baixo no caso de excesso de oferta e para cima no caso de excesso de procura.

3.4.2.5. Leilão generalizado de segundo preço

De acordo com Eldman, Ostrovsky e Schwarz (2007), o leilão generalizado de segundo preço é um mecanismo especialmente adaptado ao ambiente único dos anúncios *online*, presentes nos motores de busca acedidos diariamente pelos utilizadores da Internet, para leiloar múltiplos bens ou serviços.

Cada vez que um utilizador efetua uma pesquisa num qualquer motor de busca, é-lhe disponibilizada uma página com diversos *links* que, ao serem clicados, direcionam-no para páginas *web* patrocinadas. Desta forma, o anunciante paga ao motor de busca pelos cliques/direcionamentos para as suas páginas, de forma distinta, consoante o posicionamento do seu anúncio na página *web*. Esta situação ocorre porque, como o número de anúncios a exibir ao visitante por página é limitado, o posicionamento do *link* na página (no topo) é fundamental para otimizar o número de visualizações dos visitantes. Os mesmos autores consideram que é mais provável que seja clicado um *link* no início da página, do que no final da mesma.

O funcionamento deste leilão começa pela submissão das propostas pelos anunciantes. Posteriormente, os anunciantes são ordenados de forma descendente, de acordo com o valor das suas propostas, sendo que o primeiro anunciante paga por clique o valor que iguala a proposta do segundo anunciante, adicionado de um valor incremental; por sua vez, o segundo anunciante paga o valor do terceiro anunciante, adicionado de um valor incremental e assim sucessivamente. Desta forma, é necessário que os motores de busca utilizem um sistema para alocar o posicionamento dos anunciantes e, segundo os autores, a escolha mais natural e mais utilizada atualmente, tem por base um leilão generalizado de segundo preço.

3.4.2.6. Leilão de proposta ou licitação única

Este tipo de leilão surgiu recentemente, adquirindo uma crescente atenção por parte de utilizadores de *sites* da Internet. Estes *sites* desenvolveram mecanismos inovadores de venda de bens ou serviços sob a forma de leilões de proposta ou licitação única, onde cada

apostador poderá efetuar as licitações que quiser, pagando um montante fixo (*fee*) para cada uma delas. Por sua vez, as licitações potencialmente vencedoras são únicas e não podem concorrer com outras do mesmo valor.

Segundo Samorodnitzky, Tromer e Wool (2013), o mecanismo deste leilão é muitas vezes referido como se de uma lotaria se tratasse, uma vez que os licitantes pagam um *fee* para efetuarem as suas apostas e o fator sorte é um elemento chave na determinação do vencedor. Inúmeros bens ou serviços podem ser leiloados desta forma, estando atualmente entre os mais populares: *ipads*, *smartphones*, *iphones*, *tablets*, leitores de MP3, entre outros.

O leilão de proposta ou licitação única termina assim que dois requisitos estejam cumpridos, ou seja, quando um determinado número de propostas previamente definidas é submetido e quando o tempo previsto para a duração do leilão é atingido. Após o encerramento do leilão, existem duas formas de determinar o vencedor: pela proposta única de maior valor, ou seja, a proposta que apresentar o maior valor e sem correspondência com nenhuma outra, vence; ou pela proposta única de menor valor, ou seja, vencendo a proposta que apresentar o menor valor e sem nenhuma outra correspondência.

De seguida apresenta-se na Figura 3.9 um exemplo deste tipo de leilão.

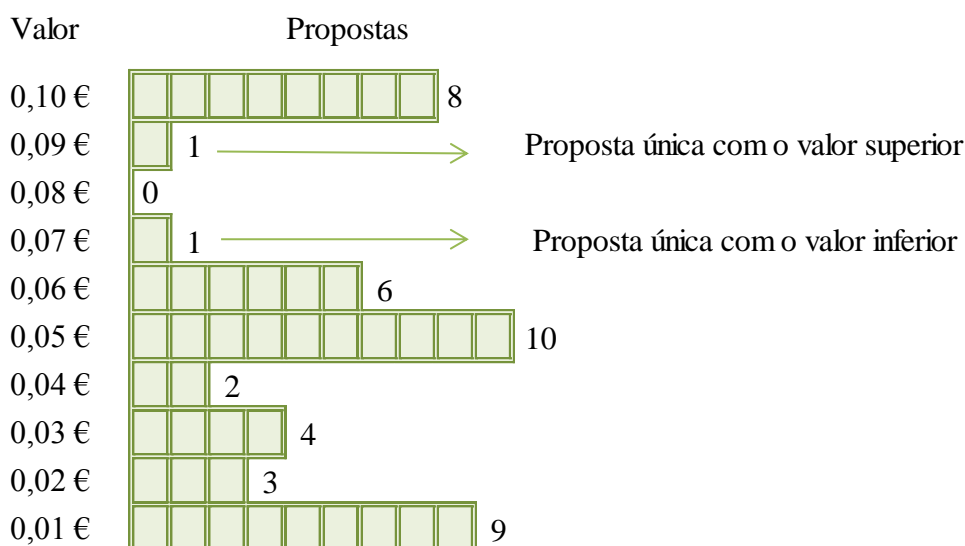


Figura 3.9 – Leilão de licitação ou proposta única

Considere-se um conjunto de propostas valorizadas pelos agentes entre 0,01€ e 0,10€, agrupadas e ordenadas hierarquicamente considerando o seu respetivo valor.

Analisando a figura e de acordo com o mencionado anteriormente, caso se tratasse de um leilão de proposta única de menor valor, o licitante que submeteu a proposta de 0,07€ ganhava o leilão, uma vez que o seu lance é o único com o valor mais baixo. Caso se tratasse de um leilão de proposta única de maior valor, ganharia o licitante que submeteu o lance de 0,09€, por apresentar a proposta única com o valor mais elevado.

Apesar de alguns bens ou serviços leiloados serem de valor elevado, podem, sob algumas circunstâncias, ser ganhos por lances de valor substancialmente inferiores ao seu justo valor. Desta forma, o promotor destes leilões cobra tipicamente um *fee* que face a um elevado número de participações, irá exceder o valor dos bens ou serviços vendidos, garantindo a sua rentabilidade.

Face à necessidade de um elevado número de participantes para que este mecanismo de leilão seja rentável, existe uma forte dependência das tecnologias, nomeadamente a utilização da Internet ou serviços de mensagens de texto dos operadores de telecomunicações, que cobram de forma reversa, o valor que o licitante pretende apostar.

3.4.2.7. Leilões combinatórios

Nesta seção é introduzido o conceito de leilões combinatórios, isto é, leilões onde os licitadores efetuam licitações sobre combinações de bens ou serviços, em vez de licitações individuais. Por uma questão de simplificação e também seguindo a terminologia usada na literatura da especialidade, os licitadores, licitantes, compradores, vendedores ou leiloeiros, são, em geral, designados por agentes. Pela mesma razão, utiliza-se o termo itens para designar bens ou serviços. Também os termos pacote e subconjunto serão utilizados como sinónimo de combinação.

O mecanismo dos leilões combinatórios é especialmente útil em situações em que é necessário alocar, em simultâneo, itens múltiplos e heterogéneos, a agentes que têm preferências sobre diferentes combinações de itens. Efetivamente, permite a colocação de uma licitação para a totalidade dos itens de um conjunto, bem como a colocação de licitações sobre subconjunto de itens desse conjunto.

De acordo com Narahari e Dayama (2005), existem três abordagens distintas para vender um conjunto de itens em simultâneo: leilões sequenciais, paralelos ou combinatórios.

Nos leilões sequenciais, os itens são leiloados um de cada vez. Quando os agentes exprimem algumas preferências sobre combinações de itens, torna-se complicado através desta abordagem saber que itens vão receber a seguir. Esta situação ocorre porque, para valorizar um item, cada agente tem que prever quais os itens que irá receber nos leilões seguintes, ou seja, vai especular sobre o que os outros vão licitar, porque isso irá afetar o valor do item que vai receber, e assim sucessivamente. Na Figura 3.10 apresenta-se um exemplo para ilustrar o funcionamento deste tipo de leilões.

		Itens		
		A	B	AB
Agente		100	50	250

Sequência de Leilões	
1°	2°
Item	Item
A	B

Figura 3.10 – Exemplo de leilões sequenciais

De acordo com a figura, um agente atribui diferentes valorizações para *A*, *B* e *AB*, e os itens serão leiloados sequencialmente: em primeiro lugar o item *A* e seguidamente o item *B*. Desta forma, se o agente licitar *A* por 100, poderá perder para outro agente que licite *A* por 150, e verificar que posteriormente iria ganhar, por exemplo, *B* por 100. Se o agente licitar *A* por um valor superior a 100, poderá deparar-se, por exemplo, no leilão seguinte, com *B* a ser licitado por 500, um valor que o agente poderá não estar disposto a pagar. Desta forma, a sequência poderá gerar alocações ineficientes, e os agentes poderão não receber as suas combinações preferidas.

Nos leilões paralelos, os itens são leiloados em leilões simultâneos e as licitações são realizadas durante um determinado período de tempo. Nestes leilões, o valor de uma licitação está dependente do valor dos outros itens que se pretende adquirir nos outros leilões, que por sua vez dependem dos valores de licitação que os outros agentes irão colocar. Adicionalmente, cada agente tentará otimizar as suas licitações, submetendo-as apenas no final do leilão, na expectativa de minimizar o valor, dados os preços finais. Assim sendo, não se submetem licitações porque todos os agentes vão querer esperar. Embora se diminua a incerteza e a necessidade de antecipação que ocorre nos leilões sequenciais, os leilões paralelos conduzem às mesmas ineficiências.

O mecanismo dos leilões combinatórios, segundo aqueles autores, pode ser utilizado para ultrapassar a necessidade de previsões e ineficiências dos dois mecanismos anteriores. De fato, os agentes ao poderem expressar complementaridade nas combinações de itens, não necessitam de especular qual o impacto na valorização de um item, caso obtenham um que não satisfaça na íntegra, a sua preferência. Assim, neste mecanismo, os agentes licitam sobre combinações de itens, expressando restrições lógicas sobre esses itens, tais como, de só haver interesse em obter o item A se também obtiverem o item B.

A utilização deste tipo de leilões, segundo Cramton *et. al.* (2006), permite eliminar o risco do agente obter um subconjunto de itens menos valorizado, obtendo-se alocações mais eficientes, ou seja, alocando os recursos a quem mais os valoriza. Os agentes podem expressar completamente as suas preferências, o que é particularmente importante, quando os itens são complementares ou substitutos, gerando sinergias entre si. Como exemplo, os autores consideram haver sinergias positivas num par de sapatos, onde o valor dos dois sapatos (esquerdo e direito) é maior do que a soma do valor de cada um deles. Desta forma, os agentes expressam complementaridade entre os itens, em vez de especularem na valorização de um item o impacto de eventualmente obterem o outro item.

Neste tipo de leilão, os leiloeiros são confrontados com um conjunto de ofertas de valor para várias combinações de itens, e o seu objetivo é alocar os bens ou serviços de forma a maximizar a sua rentabilidade. Ao permitirem que os compradores expressem totalmente as suas preferências, melhoram a eficiência económica e geram maiores receitas.

Conforme abordado anteriormente, o interesse sobre os leilões e, em particular, sobre os leilões combinatórios, ressurgiu com o desenvolvimento da Internet. De fato, observa-se que os leilões constituem um protocolo de negociação de sucesso, contabilizando um enorme volume de transações diárias na Internet, como acontece por exemplo, no e-Bay e no Amazon.com.

Atualmente, os leilões combinatórios são utilizados em diversas áreas de negócio na alocação ou procura de diferentes recursos e na resolução de vários problemas, tais como, na alocação de faixas de aterragem em aeroportos, mercados de transporte de cargas por camião, concessões petrolíferas, programação e planeamento na produção, licenças de poluição, fornecimento de refeições escolares, mercado de eletricidade, abastecimento público e industrial, negociação de títulos financeiros, licenças de espectro de rádio, missões espaciais, missões de resgate e salvamento, entre muitas outras. Efetivamente, existem

várias outras aplicações onde é desejável o uso destes mecanismos, nomeadamente, quando se adquirem itens que estão de alguma forma relacionados. Nesta categoria incluem-se entre outros, pacotes de viagens, onde existem vários itens que o compõe, por exemplo, um programa de mergulho na Ilha da Madeira, incluindo o bilhete de avião, a estadia no hotel e acesso ao centro de mergulhos (e equipamentos necessários). Neste contexto, os três itens estão relacionados, uma vez que o comprador do pacote de férias terá que efetuar a viagem para chegar ao centro de mergulho, e, uma vez que os programas são extensíveis a vários dias, torna-se necessário ficar hospedado numa unidade hoteleira.

Na sua forma atual, os leilões combinatórios foram propostos por Jackson em 1976 para a atribuição de direitos do espectro de radio. No entanto, o primeiro grande trabalho sobre estes leilões é devido a Rassenti, Smith e Bulfin (1982) que utilizou este mecanismo para a atribuição de faixas horárias de aterragem em aeroportos congestionados como La Guardia, Washington National, Kennedy International e O'Hare International, nos Estados Unidos da América, e introduziu importantes ideias, incluindo um modelo matemático para o problema de determinação das propostas vencedoras.

4. Leilões combinatórios

4.1. Introdução aos leilões combinatórios

Neste capítulo apresentam-se as noções principais sobre os leilões combinatórios, através de uma visão global da pesquisa que tem sido efetuada pela comunidade científica da especialidade. Nas subsecções seguintes definem-se conceitos, funções de preferência, linguagens de licitações e algumas aplicações reais, ilustrados com alguns exemplos.

À semelhança do que acontece em leilões onde os bens ou serviços são leiloados individualmente (ver secção 3.2), os leilões combinatórios podem também, quanto à sua natureza, serem leilões de oferta (venda), de procura (compra) e duplos ou de intercâmbio (venda e procura).

Nos leilões combinatórios de venda, também conhecidos na literatura por *forward combinatorial auctions*, existe um conjunto de itens heterogéneos oferecidos pelo vendedor, para o qual existe um conjunto de compradores interessados em adquirir alguns subconjuntos desses itens.

Nos leilões combinatórios de procura ou reversos, muitas vezes designados de *combinatorial procurement auctions*, um conjunto de itens diferentes é procurado pelo comprador, e existem vários vendedores (fornecedores) interessados em vender subconjuntos dos itens ao comprador. Trata-se de um tipo de leilões muito relevante, que se caracteriza pela inversão dos papéis entre os vários agentes. Tradicionalmente, os licitantes competem para obter bens e serviços e os preços normalmente são crescentes. No leilão reverso, os licitadores competem entre si para fornecer bens e serviços, e os preços decrescem tipicamente, no decorrer do tempo da negociação.

Este último tipo de leilões é frequentemente utilizado em processos de compra, para a satisfação de contratos de abastecimento em setores públicos ou privados. Como exemplo, considere-se que um determinado licitante decide procurar um conjunto de itens, enviando para isso um pedido de propostas para diversos licitadores. Os licitadores respondem enviando propostas para combinações de itens desse conjunto. O problema reside na seleção do melhor *mix* de propostas que minimizem o custo total desse processo de aquisição. Esta é uma das maiores áreas de aplicação dos leilões de múltiplos itens heterogéneos, uma vez que a procura de itens de forma conjunta, poderá conduzir à

redução de custos de logística, dos tempos de resposta e, conseqüentemente, a uma redução dos custos totais.

Nos leilões combinatórios duplos, muitas vezes referidos na literatura por *combinatorial exchange auctions*, existem vários vendedores e vários compradores. Neste tipo de leilões, as propostas a apresentar pelos agentes indicam também se estes são vendedores ou compradores.

Em Nisan (2000) descrevem-se quatro aspetos básicos a considerar no mecanismo dos leilões combinatórios:

1. A forma de apresentação das propostas;
2. A alocação das propostas, ou seja, a forma eficiente de alocar as propostas aos agentes;
3. A forma como é efetuado o pagamento (pelos agentes das propostas vencedoras);
4. A estratégia.

Neste trabalho serão abordados os dois primeiros aspetos, que constituem os principais problemas nos leilões combinatórios e que estão, de algum modo, ligados entre si: o da apresentação das propostas que será abordado na secção 4.3 e o problema de determinação das propostas vencedoras que será abordado no capítulo seguinte. Deste modo, aspetos ou regras relativas ao pagamento e às estratégias que os agentes podem usar não serão abordadas neste trabalho. A questão da estratégia constitui o tema central do desenho do mecanismo destes leilões e é usualmente abordado à luz da teoria dos jogos.

Os leilões combinatórios têm-se tornado atrativos por permitirem apresentar propostas sobre pacotes de combinações de itens, e por possibilitarem aos agentes expressar totalmente as suas preferências sobre os itens que pretendem comprar ou vender. Neste contexto, destacam-se dois conceitos muito importantes subjacentes a estes leilões e que têm motivado a sua utilização, o conceito de complementaridade e o conceito de substituíbilidade, que não podem ser usados nem nos leilões sequenciais nem nos leilões paralelos por conduzirem a alocações ineficientes.

Dois itens dizem-se complementares, quando a sua utilidade conjunta é superior à soma das utilidades individuais desses mesmos itens.

De modo idêntico, dois itens dizem-se substitutos quando a utilidade conjunta desses itens é inferior à soma das utilidades de cada um deles. Um agente poderá demonstrar vontade de pagar pelo pacote de itens, menos do que o valor que estaria disposto a pagar pela soma

de todos os itens, contrariamente ao que acontece no caso dos dois itens serem complementares. Esta situação ocorre quando existem orçamentos limitados, ou os itens são semelhantes ou substituíveis entre si.

4.2. Função valor ou função de preferência

Num leilão de venda, uma licitação sobre um pacote de itens é uma proposta de compra que determinado agente efetua sobre esse subconjunto de itens. Uma licitação combinatória é um conjunto de licitações sobre pacotes de itens efetuadas pelo mesmo agente. Em muitas situações, quando um agente licita para uma combinação de itens, não são permitidas alocações parciais dessa combinação.

Num leilão combinatório, de acordo com Vries e Vohra (2000), quando um agente apresenta uma proposta, indica o subconjunto de itens que pretende adquirir e o preço ou o valor que está disposto a pagar para obter esse conjunto de itens. Designando por M o conjunto dos itens, uma proposta é então definida por um par $(S, v_j(S))$, onde $S \subseteq M$ e $v_j(S)$ é o valor que o agente j está disposto a pagar para obter o conjunto de itens S . Designando por \mathcal{F} a família dos subconjuntos de M , isto é, $\mathcal{F} = \{S : S \subseteq M\}$, pode definir-se, para cada agente j , a função valor ou função de preferência

$$v_j : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}_0^+,$$

onde, a cada elemento S de \mathcal{F} corresponde um valor não negativo $v_j(S)$, que é exatamente o preço que o agente j está disposto a pagar para obter o pacote de itens S . Note-se que $|\mathcal{F}| = 2^m$.

A função valor ou função de preferência representa o valor que é percebido pelo agente, sobre o item ou pacote de itens e corresponde ao valor máximo que o agente está disposto a pagar pelo item ou pacote de itens. Por uma questão de simplificação de escrita, muitas vezes utiliza-se o termo valorização para significado de função valor ou função preferência. Assume-se, como é comum na literatura da especialidade, que esta função valor é monótona não decrescente, normalizada e não existem externalidades.

Uma função valor diz-se monótona não decrescente (*free disposal*) se o valor associado a cada item é não negativo. Então para quaisquer dois conjuntos de itens S e T , a função valor v_j satisfaz a condição

$$S \subseteq T \Rightarrow v_j(S) \leq v_j(T)$$

Esta propriedade significa que, ao retirar um item a uma proposta, o respetivo valor da mesma não pode aumentar. Por exemplo, para um dado agente j , não se pode ter $v_j(S) = 3$, $v_j(T) = 4$ e $v_j(ST) = 2$.

Por sua vez, uma função valor diz-se normalizada se $v_j(\{\}) = 0$. Isto significa que o agente j não paga nada quando não ganha nada.

A não existência de externalidades indica que a valorização apresentada por cada agente depende apenas do conjunto de itens que deseja obter e não de qualquer outro factor externo.

Em geral, cada agente j pode ter os seguintes tipos de funções valor ou funções de preferência:

- a) **Aditiva** se $v_j(S) + v_j(T) = v_j(S \cup T)$, para todo $S, T \subseteq M$, com $S \cap T = \{\}$;
- b) **Superaditiva**, se $v_j(S) + v_j(T) \leq v_j(S \cup T)$, para todo $S, T \subseteq M$, com $S \cap T = \{\}$;
- c) **Subaditiva**, se $v_j(S) + v_j(T) \geq v_j(S \cup T)$, para todo $S, T \subseteq M$, com $S \cap T = \{\}$.

De fato, como referem os mesmos autores, a superaditividade capta a noção intuitiva de complementaridade (itens têm mais valor quando considerados conjuntamente do que individualmente), enquanto a subaditividade capta o aspeto de substituibilidade (itens têm menos valor quando considerados conjuntamente do que individualmente).

Considere-se um vendedor ou leiloeiro, que tem interesse em leiloar os ténis da atleta Rosa Mota, maratonista e vencedora do Ouro Olímpico em Seul no ano de 1988, e os ténis do atleta Carlos Sá, ultramaratonista e vencedor da ultramaratona Badwater (considerada a corrida mais dura do mundo), no Estado da Carolina do Norte (Estados Unidos da América), no ano de 2013. Considere-se ainda que os itens X e Y designam respetivamente, os ténis da Rosa Mota e os ténis do Carlos Sá. O leiloeiro convida interessados a licitarem sobre X e Y através de um leilão *online*. Supondo que existem três agentes (compradores), os agentes 1, 2, e 3, interessados em adquirir apenas um dos itens ou ambos. Para simplificação de notação, considere-se X , Y e XY em vez de $\{X\}$, $\{Y\}$ e $\{XY\}$. Tal simplificação será utilizada ao longo deste trabalho.

As valorizações de cada agente para cada item e para os dois itens constam da tabela 4.1.

Tabela 4.1. – Valorização dos agentes para X , Y e XY

		Itens		
		X	Y	XY
Agentes	1	6	8	24
	2	10	10	10
	3	12	4	16

Fonte: Adaptado de Narahari e Dayama (2005)

De acordo com a tabela 4.1, assume-se que os agentes têm valorizações distintas para X , para Y e para a combinação de ambos os itens. De fato, o agente 1 valoriza X em 6, Y em 8, e o conjunto XY em 24, o que significa que prefere obter ambos os itens (atribui um valor mais elevado à combinação dos dois itens do que à soma dos seus valores individuais). Assim, X e Y são itens complementares para o agente 1, sendo a correspondente função valor superaditiva.

O agente 2 atribui um valor igual a cada item que é o mesmo que atribui ao conjunto dos dois itens. Logo, este agente não tem preferência por nenhum dos itens em particular e não atribui nenhum benefício extra para obter a combinação dos dois. Assim, para o agente 2, o valor pelo pacote XY representa um valor inferior à soma dos valores de X e Y , sendo X e Y itens substitutos e a respetiva função valor subaditiva.

Para o agente 3, o valor da combinação dos dois itens é 16, valor que corresponde à soma individual dos valores dos dois itens, pelo que neste caso a função valor aditiva.

4.3. A linguagem dos leilões combinatórios

Nos leilões combinatórios, de acordo com Cramton *et. al.* (2006), cada agente pode apresentar propostas envolvendo qualquer combinação de itens, nomeadamente todas as combinações possíveis. Sendo M o conjunto de itens, com $|M|=m$, existem $2^m - 1$ subconjuntos não vazios de M pelo que cada agente pode apresentar $2^m - 1$ propostas para as combinações possíveis de itens, com exceção da vazia. Por exemplo, para um leilão com 20 itens cada agente pode apresentar 1.048.575 propostas, um número que, na prática se torna incomportável, mesmo para valores mais pequenos de m .

Com o objetivo de contornar este problema, várias linguagens têm sido propostas por diversos autores, para codificar as licitações comunicadas pelos licitadores aos leiloeiros. Nesse sentido, esta sintaxe, permite aos agentes apresentarem propostas, expressando as suas preferências, sem a obrigação de enumerar todas as combinações possíveis.

Pretende-se com estas linguagens, de acordo com Nisan (2000), obter um compromisso entre expressividade e simplicidade, ou seja:

- ✓ Utilizar uma linguagem expressiva, que possa representar qualquer função valor satisfazendo a condição de *free-disposal* e a normalização;
- ✓ Que essa linguagem expresse essas funções valor de uma forma compacta (simples).

Existem vários tipos de linguagens de licitação usadas para submeter propostas nos leilões combinatórios. A seguir apresentam-se os mais básicos tipos de linguagem bem como uma outra que pode substituir a combinação de dois desses tipos. No seguimento, e de acordo com a literatura, escrever-se-á proposta X em vez de propostas na linguagem X .

4.3.1. Propostas atômicas

Cada agente j pode submeter apenas uma proposta, isto é, um par $(S, v_j(S))$, em que $S \subseteq M$ e $v_j(S)$ é o valor que o agente j está disposto a pagar para obter o subconjunto de itens S . Neste caso, a função valor $v_j(S)$ é definida do seguinte modo:

$$v_j(T) = \begin{cases} v_j(T) & \text{se } T \supseteq S \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Numa proposta atômica, cada agente está interessado em adquirir todos os itens incluídos em S e não mais.

4.3.2. Propostas OR

Nesta linguagem, cada agente j pode submeter um número qualquer de propostas atômicas, ou seja, uma coleção de pares $(S, v_j(S))$ onde S é um qualquer subconjunto de itens de M e $v(S_j)$ é o preço que o agente está disposto a pagar por aquele subconjunto.

Neste caso, o agente deseja obter qualquer número de propostas atômicas disjuntas. As licitações *OR* representam propostas que não incluem substituíbidades e apenas essas. Desta forma, em Sandholm (2002) a linguagem *OR* assume implicitamente que as

propostas são superaditivas, capturando assim sinergias positivas entre os itens. De fato, esta linguagem não capta situações de subaditividade, conforme é ilustrado através do exemplo da tabela 4.2.

Tabela 4.2 – Linguagem OR e subaditividade

		Itens		
		A	B	AB
Agente		10	8	14

De acordo com a tabela, neste exemplo, existem dois itens e apenas um agente que apresenta a proposta $(A,10)$ OR $(B,8)$ OR $(AB,14)$. Desta forma, o leiloeiro poderá alocar ao agente os itens A e B em separado, e o valor da proposta para a combinação passará a ser $v(A)+v(B)=18$ em vez de $v(AB)=14$. Esta situação é ultrapassada utilizando a linguagem XOR.

4.3.3. Propostas XOR

Neste tipo de linguagem, cada agente pode submeter um número qualquer de propostas atômicas e deseja obter, quando muito, uma proposta.

As licitações XOR são mutuamente exclusivas, permitindo ao agente expressar todas as suas preferências, quer incluam sinergias positivas, ou negativas. Desta forma, para o exemplo da figura anterior, teríamos $(A,10)$ XOR $(B,8)$ XOR $(AB,14)$, e seria alocada ao agente a proposta $(AB,14)$.

Considere-se um outro exemplo em que o agente apresenta duas propostas utilizando a linguagem XOR:

$$(\{\text{café, pastel de nata}\}, 1,00\text{€}) \text{ XOR } (\{\text{chá, scone}\}, 1,50\text{€})$$

Neste caso, o agente apenas pode ganhar uma das propostas e nunca ambas.

Em Nisan (2000) define-se comprimento de uma proposta na linguagem OR ou XOR como sendo o número de propostas atômicas nela incluídas. Deste modo, e como o autor refere, é fácil verificar que a função valor aditiva sobre m itens pode ser representada por

propostas *OR* de comprimento m enquanto a representação por propostas *XOR* expressa comprimento 2^m .

As linguagens *OR* e *XOR* podem ser combinadas para obter outros tipos de linguagem, nomeadamente *OR of XOR* (onde se submete um número arbitrário de licitações *XOR*), *XOR of OR* (onde são submetidas arbitrariamente licitações *OR* e se obtém no máximo uma) e *OR/XOR* (onde se submetem arbitrariamente licitações *OR* e *XOR*). Estas linguagens encontram-se detalhadas pelo autor na sua obra, e segundo o mesmo, podem ser substituídas com vantagem por um outro tipo de linguagem, *OR**, que será apresentada de seguida.

4.3.4. Propostas *OR**

Esta linguagem permite a expressão das propostas *XOR* como se tratassem de variantes de propostas *OR*, em particular, os agentes podem incluir explicitamente itens fictícios nas suas combinações, para simular *XOR* na linguagem *OR*. Estes itens não têm valor intrínseco para nenhum dos agentes, mas serão utilizados indiretamente para expressar restrições. Por exemplo, utilizando o exemplo dado anteriormente, e ao introduzir o item fictício “gelado”, força-se a exclusividade

$$(\{\text{café}, \text{pastel de nata}\}, 1,00\text{€}) \text{XOR} (\{\text{chá}, \text{scone}\}, 1,50\text{€})$$

pode ser representado por

$$(\{\text{café}, \text{pastel de nata}, \text{gelado}\}, 1,00\text{€}) \text{OR} (\{\text{chá}, \text{scone}, \text{gelado}\}, 1,50\text{€})$$

Deste modo, a linguagem *OR** utiliza itens fictícios para modelar exclusividades e representar todas as valorizações: a rendibilidade é maximizada, cada item é alocado no máximo uma vez, e cada agente poderá ganhar no máximo uma das propostas dos seus subconjuntos *XOR*.

Nas seções anteriores, foi efetuada uma visão global sobre a linguagem padrão utilizada para modelar preferências nos leilões combinatórios. De seguida, apresenta-se sucintamente, uma das maiores decisões no desenho destes leilões, ou seja, a seleção do formato a utilizar.

4.4. O desenho dos leilões combinatórios

O mecanismo dos leilões combinatórios pode ser desenhado como sendo de ronda única, ou de múltiplas rondas. Num leilão de ronda única, a submissão das licitações é efetuada de uma só vez e, no final, o leiloeiro determinará as alocações vencedoras. Um leilão de múltiplas rondas, envolve diversas iterações de submissão de propostas e de tentativas de alocação (tentativas de determinação das propostas vencedoras) por parte do leiloeiro, até que um determinado critério seja atingido e o leilão termine. Na maior parte dos casos, a informação do preço é dada aos agentes após cada tentativa de alocação.

Em Vickrey (1961), é descrito o mecanismo de leilão generalizado, conhecido por *Generalized Vickrey Auction (GVA)*, um leilão combinatório de segundo preço e ronda única, onde a licitação de maior valor vence, pagando o segundo valor lícitado, mais elevado, à semelhança do exemplo apresentado na subsecção 3.4.1.4. Este mecanismo de leilão, segundo o autor, fornece o melhor resultado em termos de eficiência, em situações de equilíbrio, uma vez que, o agente expõe a sua valorização real, ganhando sempre a licitação de maior valor (ou menor custo no caso dos leilões reversos).

Os autores Cramton *et al.* (2006) defendem que o leilão generalizado de Vickrey proporciona incentivos aos agentes para revelarem as suas valorizações reais e atingir resultados eficientes, no entanto, diversos autores sugerem a implementação de um formato de leilão combinatório iterativo, por forma a melhorar a eficiência e maximizar rendibilidades. Em Parkes (2001), considera-se que a informação sobre o preço num leilão iterativo fornece *feedback* valioso aos agentes, que podem ajustar as suas licitações de forma dinâmica, por exemplo, licitando sobre outros itens se o valor para as combinações desejadas estiver além das suas expectativas. Desta forma, um formato de leilão iterativo conduz a comportamentos mais estratégicos, uma vez que a informação libertada pelo leiloeiro, após cada ronda, pode ser utilizada como um jogo estratégico nas próximas rondas.

4.5. Aplicações dos leilões combinatórios

Existem numerosas aplicações na literatura revista onde são utilizados os leilões combinatórios. Os exemplos que se seguem referem-se à alocação de um determinado conjunto de itens a um determinado conjunto de agentes, constituindo um problema de alocação de recursos, ou seja, um problema de alocação combinatória, que será abordado

no capítulo seguinte. De fato, na literatura da especialidade, considera-se a relevância de tal problema para um vasto e interessante leque de aplicações reais, incluindo planejamento, logística, programação de redes, entre outros. Recentemente atraíram uma considerável atenção por parte da comunidade acadêmica, pela sua aplicação em leilões de licenças de espectro de rádio pela *Federal Communication Commission (FCC)*.

4.5.1. Alocação de espectro de rádio – o caso da FCC

A FCC é a agência federal dos Estados Unidos da América que aloca licenças de espectro de rádio a empresas de telecomunicações com tecnologia sem fios. A venda de frequências de espectro de rádio em leilões *online* já havia sido tentada, primeiramente na Nova Zelândia em 1989, depois em Inglaterra em 1990 e, mais tarde, na Austrália em 1993. No entanto, segundo Narahari e Dayama (2005), a alocação de espectro de rádio utilizando leilões *online* até essa data não tinha obtido sucesso/retorno esperado, devido a falhas no desenho do mecanismo dos leilões.

Em 1994, a FCC dividiu geograficamente os Estados Unidos da América e o espectro de rádio pelo alcance das frequências, gerando 2500 licenças. Consideraram 51 áreas principais de negócio, cada uma das quais com dois grandes blocos de espectro de 30 MHz. Por sua vez, estas áreas principais foram subdivididas em 492 áreas secundárias, cada uma das quais com um bloco de espectro de 20 MHz e quatro blocos de espectro de 10 MHz. De seguida, apoiados por conselhos técnicos de célebres teóricos em leilões, desenvolveram, testaram e implementaram mecanismos de leilões, vendendo frequências de espectro de rádio às maiores empresas de telecomunicações, incluindo as de longa distância, locais, telecomunicações móveis e de televisão por cabo. O desenho destes leilões teve em consideração diversos objetivos, tais como a eficiência, a prevenção de monopólios e a maximização da rentabilidade. A receita a gerar pela implementação destes leilões, foi inicialmente estimada em 10 bilhões de dólares americanos.

De acordo com Parkes (2001), a agregação de licenças constitui um fator importante para potenciais compradores, uma vez que a mobilidade geográfica dos consumidores origina um valor sinérgico entre licenças de áreas geográficas adjacentes. Por exemplo, espera-se que o valor de uma licença sem fios para a área metropolitana de Nova Iorque, adquirindo em simultâneo a licença para as áreas de Filadélfia e de Boston, seja muito superior ao valor da soma individual das várias licenças. De fato, as empresas que agregam mais licenças são potencialmente mais eficientes, maximizando o seu valor, uma vez que:

1. Diluem os custos fixos da aquisição de tecnologia e de desenvolvimento da carteira de clientes;
2. Ao operarem com licenças adjacentes, podem evitar a interferência de outras frequências nos limites das suas áreas geográficas, diminuindo os seus custos operacionais;
3. Um maior número de licenças permite-lhes uma cobertura geográfica razoável, capacitando-as a oferecer serviços de *roaming*;
4. Quando não conseguem obter uma licença, podem licitar outra em sua substituição, dado que cada área está dividida em diversas fatias de espectro de rádio.

As três primeiras razões, atrás mencionadas, correspondem à complementaridade dos itens, e a última, à substituibilidade dos mesmos, conceitos que foram abordados na seção 4.1. Os autores Narahari e Dayama (2005), consideram que a alocação das 2500 licenças deve ser efetuada ao mesmo tempo, uma vez que diferentes empresas valorizam combinações diferentes de forma distinta, e o desenho deste mecanismo de leilão deve ser suficientemente flexível, para permitir aos licitantes, a construção das suas próprias sinergias por agregação de licenças.

Inicialmente a FCC optou por implementar um leilão simultâneo (paralelo) de rondas múltiplas, em vez de um tradicional leilão aberto, revelando-se num mecanismo de sucesso nessa altura. Neste formato, os licitantes submetiam licitações fechadas em simultâneo em cada ronda, sobre as diversas licenças individuais. As licitações eram anunciadas abertamente após cada ronda, incrementadas de um valor mínimo. Este formato de leilão, conhecido como um leilão simultâneo ascendente, permitia aos licitantes obter vantagens pela informação revelada durante as sucessivas rondas, e fornecia a flexibilidade necessária para a agregação das suas licenças.

No entanto, o formato de leilões simultâneos ascendentes utilizados inicialmente pela FCC não permitia licitações combinatórias, constituindo uma grande desvantagem, uma vez que a agregação de licenças pretendida pelos licitantes, poderia não ser obtida. Por exemplo ao considerar a agregação das licenças de Nova Iorque NI , Filadélfia F e Boston B , geravam-se três leilões simultâneos ascendentes, um para NI , outro para F , e o terceiro para B . Se um agente pretendesse a combinação NIF ou a combinação F,B seria forçado a licitar nos três leilões, podendo no final obter zero, uma, duas ou as três licenças,

conforme descrito no início deste capítulo. Neste caso, poderia obter combinações indesejáveis, tais como *NI, F, B, NIB ou NIFB*, ou no limite, poderia não obter nenhuma, ou seja {}.

Recentemente esta questão foi ultrapassada, e a utilização de licitações combinatórias permitiu aumentar ainda mais a eficiência deste mecanismo. De fato, se o agente colocar licitações apenas nos itens que desejar, em particular, *NIF* e *FB*, obtém os benefícios da complementaridade, e poderá estar disposto a licitar por um valor superior para obter a agregação de licenças pretendida, aumentando desta forma a eficiência e a maximização da rendibilidade, neste mecanismo de leilão.

4.5.2. Leilões combinatórios de procura

A área de *procurement* engloba a gestão de todo o processo de fornecimento, desde as especificações dos produtos, à escolha dos possíveis fornecedores e à negociação múltipla e em simultâneo, de preços e condições, utilizando determinados parâmetros, tais como qualidade, quantidade e preço.

Os gestores de *procurement*, motivados maioritariamente pela economia de custos, utilizam leilões combinatórios em cenários negociais complexos, conforme descrito por Cramton *et.al.* (2006). A utilização de combinações de licitações permite-lhes representar complementaridades ou substituíbilidades, pelas reduções de custos de produção ou de transporte, bem como incorporar na combinação não só o valor do pacote da licitação, mas também atributos não financeiros que influenciam o valor real do fornecimento.

No seguimento, os leilões combinatórios criam oportunidades para impactar a estrutura de mercado, uma vez que permitem fragmentar contratos volumosos em contratos de menores dimensões. Esta fragmentação favorece a concorrência entre fornecedores de diversas dimensões, grandes e pequenos, contrariamente aos leilões tradicionais baseados apenas no preço (que obrigam a licitar pelo contrato no seu todo).

4.5.2.1 Leilões combinatórios de procura no transporte de cargas por camião

O transporte de cargas por camião (TCC) é responsável por uma parcela substancial do mercado de transporte comercial por todo o mundo. De acordo com Ma (2008), neste tipo de transporte as cargas são movidas de origens para destinos, sem qualquer escala intermédia.

Os dois maiores intervenientes no mercado de TCC, são os expedidores, (produtores, retalhistas, distribuidores, e quaisquer outras organizações que necessitem deslocar cargas) e os transportadores (empresas detentoras de camiões ou de outros recursos de transporte). As faixas, também chamadas de vias ou pistas, são as unidades básicas que representam um movimento unidirecional de uma origem para um destino, num determinado período de tempo. Num contrato de TCC, uma faixa é tipicamente o item que é contratado ou leiloado. No seguimento, um nodo representa um ponto ou zona de carga ou descarga, que poderá ser uma origem ou um destino, na prática, um terminal de carga, um ponto de venda, um armazém, uma cidade, entre outros. Após a determinação dos nodos, definem-se as faixas e forma-se a rede de expedição.

A utilização de leilões combinatórios nos serviços de transporte (incorporando pacotes de licitações e restrições) cresceu significativamente durante a década de 90. Nos leilões combinatórios reversos no mercado de TCC, existe tipicamente um expedidor (leiloeiro) e muitos transportadores (licitadores) que procuram ganhar contratos para transportar as cargas do expedidor no futuro, durante um período específico de tempo.

Estes leilões combinatórios constituem alocações mais eficientes (alocando os itens a quem mais os valoriza), uma vez que os transportadores poderão ter preferências sinérgicas potenciais em determinadas faixas (o conjunto valer mais do que a soma individual de cada item), levando-os a licitar de forma mais agressiva para a combinação desejada, sem receio de obter combinações incompletas que representam menor valor. Por outro lado, os expedidores reduzem os custos de fornecimento externo (*outsourcing*) e mantêm níveis elevados no serviço de transporte das suas cargas. No geral, a introdução deste mecanismo de leilão na área de negócio de TCC, conduziu a uma interação mais precisa, colaborativa e compreensiva entre expedidores e transportadores

As diferenças entre os leilões tradicionais e os leilões combinatórios reversos de TCC incluem a importância de delinear os itens a serem leiloados, o nível de incerteza dos contratos que daí resultam e as condições do negócio a considerar, em termos de variedade e quantidade, para o vencedor da proposta.

O objetivo principal de qualquer leilão de procura (na perspetiva do expedidor ou leiloeiro) é encontrar o fornecedor que apresente o custo mais reduzido. Nos leilões combinatórios reversos de TCC o objetivo é semelhante, mas não é único: a maioria dos expedidores considera não só o custo como atributo, mas também objetivos de faixas e de sistema, de

eficiência nos resultados do leilão, de robustez e a rapidez no processo de determinação da proposta vencedora.

Em Cramton *et al.* (2006), os objetivos de faixa são descritos como sendo recompensas ou penalizações alocadas às licitações, baseadas em diversos atributos ou serviços. Por exemplo, se a performance de entrega de uma carga está fixada em 90%, as licitações com um nível de performance acima dos 90% são recompensadas, de 90% a 80% são penalizadas, e abaixo dos 80% não se qualificam para participar no leilão. Os autores descrevem ainda objetivos de sistema que minimizem o risco do negócio, tais como, garantias de negócio, a dimensão da rede de transportadores, nível do serviço, o *mix* de transportadores, entre outros.

Relativamente à eficiência, o expedidor ou leiloeiro, tem um grande interesse em garantir que os vencedores sejam os transportadores que realmente valorizam mais cada faixa leiloadada, uma vez que o serviço futuro dependerá da forma como este novo negócio se enquadra na capacidade e na rede existente do transportador.

Um critério muito importante nos resultados de um leilão consiste na sua robustez, ou seja, quando ocorrem alterações súbitas na rede de transporte, tais como a saída de fornecedores ou clientes do mercado, encerramento de portos, ou alterações extremas de volume de negócios, entre outros, não resultam num elevado aumento de custos. Este critério é muito relevante nesta área de negócio, devido à pequena dimensão geral dos transportadores, na sua maioria com situações financeiras instáveis.

A simplicidade e a rapidez são outros objetivos importantes uma vez que estes leilões podem envolver centenas de faixas (itens) e dezenas de transportadores (licitadores), requerendo um elevado esforço por parte do expedidor (leiloeiro) para preparar os itens para leiloar, gerir o processo do leilão e recompensar o vencedor.

Na perspetiva do transportador, o objetivo principal neste tipo de leilões é descobrir e retirar vantagem da interdependência das suas operações de transporte, determinando o seu ótimo ao licitar nos pacotes que maximizem a sua utilidade. Uma característica importante no serviço de transporte é como efetuar o regresso regular dos seus recursos (camiões sem carga e motoristas). Por exemplo, um serviço de transporte para deslocar uma carga de Lisboa para o Porto terá um custo inferior se no regresso, contemplar o transporte de outras cargas do Porto para Lisboa. No seguimento, um transportador com, por exemplo, cinco cargas frequentes por semana de Lisboa para o Porto, sem retorno ou cargas incompletas,

poderá obter benefícios extra se transportar cinco cargas entre Aveiro e Santarém, faixas que embora aparentemente ser disjuntas, constituem um complemento à sua rede.

Os mesmos autores consideram ainda vários benefícios da utilização dos leilões combinatórios no mercado de TCC:

1. Em primeiro lugar, este tipo de leilões força os expedidores a fornecer uma maior quantidade e qualidade de informação aos transportadores, para que estes possam elaborar licitações mais complexas e mais eficientes contrariamente aos leilões tradicionais, onde apenas a origem e o destino eram facultados;
2. Em segundo lugar, permitem uma maior criatividade aos transportadores na formulação das suas propostas, e aos expedidores o conhecimento da realidade económica e da interligação das faixas e nodos para os transportadores, complexidades ignoradas nos leilões tradicionais de TCC;
3. Em terceiro lugar, outras informações não financeiras passam a ser consideradas pelos expedidores, tais como o nível de serviço, entre outros, fatores ignorados nos leilões tradicionais, onde apenas é relevante o valor da licitação.

A dificuldade nestes leilões reside em determinar o melhor conjunto de faixas a licitar, uma vez que, existe um número exponencial de possíveis combinações de faixas. É então necessário que o leiloeiro resolva um problema de otimização para alocar os vencedores, simplificando as negociações, com vista a atingir economias de escala, identificando e maximizando lucros potenciais.

4.5.2.2. Leilões combinatórios de procura em refeições escolares

A seguinte aplicação descrita por Olivares, Weintraub, Epstein e Yung (2012), foca-se num contexto de procura de serviços de fornecimento de refeições escolares no Chile, para múltiplas unidades territoriais, onde as sinergias de custo para os fornecedores (licitadores) podem ser divididas em duas categorias distintas:

- ✓ Economias de escala que dependem do somatório de unidades servidas (descontos de volume nas matérias primas);
- ✓ Economias de densidade, obtidas pela utilização de plataformas logísticas comuns no fornecimento de regiões contíguas, eficiência de transporte e de recursos humanos.

Desde 1999, que os contratos para o fornecimento de refeições escolares no Chile são adjudicados através de leilões combinatórios de uma única ronda, fechados de primeiro preço, através de um sistema informático desenvolvido pelo departamento de Engenharia Industrial da Universidade do Chile. São estabelecidas refeições padrão e as empresas fornecedoras competem pelo preço. A área geográfica do Chile está dividida em unidades territoriais, e as empresas fornecedoras podem submeter licitações sobre vários grupos de unidades territoriais, definindo o carácter combinatório deste tipo de leilão.

Os programas de nutrição infantil, administrados pelo governo do Chile e implementados por empresas privadas, estão entre os mais conceituados de todo o mundo. Diariamente são servidas cerca de 2,2 milhões de refeições (pequenos almoços e almoços), a 1,8 milhões de estudantes em idade escolar, em 9.800 escolas primárias e secundárias por todo o país.

Estes programas, para além de desempenharem um papel ativo na melhoria da nutrição das crianças, reduzindo drasticamente incidentes de má nutrição, têm aumentado a taxa de afluência escolar para níveis muito perto dos 100%. Num país em vias de desenvolvimento, onde cerca de 14% das crianças com menos de 18 anos vivem abaixo da linha de pobreza, muitos estudantes dependem destas refeições gratuitas como fonte essencial de nutrição.

Na sua fundação, os programas de alimentação escolar no Chile eram operacionalizados por agências governamentais – a JUNAEB⁶ e a JUNJI⁷ - desde a administração, à contratação e à formação de cozinheiros para a preparação das refeições. À medida que os programas e as instituições cresceram, foi decidido pelo governo do Chile contratar empresas privadas para o fornecimento do serviço de alimentação escolar, sob a supervisão e administração da JUNAEB. Os fornecedores são classificados com base em vários fatores, em duas categorias principais: a sua capacidade operacional e financeira, e as suas competências técnicas e de gestão.

Do lado público, desta parceria publico privada, são controlados os requisitos de nutrição e variedade, incluindo o número de calorias por refeição, quantidade de proteína, de frutas e de vegetais. Baseados nestes critérios, os fornecedores privados submetem propostas para fornecerem a alimentação escolar para uma ou mais áreas territoriais. Todos os anos a JUNAEB aceita propostas de fornecimento de refeições para 1/3 dos contratos nacionais,

⁶ JUNAEB - La Junta Nacional de Auxilio Escolar y Becas mais informação disponível em <http://www.junaeb.cl/>

⁷ JUNJI – La Junta Nacional de Jardines Infantiles, mais informação disponível em www.junji.cl

logo, os contratos são renegociados num ciclo de três anos. Para cada ciclo a JUNAEB recebe cerca de 100.000 propostas (um único fornecedor poderá oferecer múltiplas propostas para servir as diferentes áreas).

O processo de leilão inicia-se quando a JUNAEB contacta e regista os potenciais fornecedores, através de uma chamada para a apresentação de propostas, eliminando os que não obedecem aos requisitos mínimos de fiabilidade (gestão, técnicos e financeiros). Os licitadores submetem as suas propostas de acordo com as regras anunciadas, através de um sistema *online*. Cada proposta inclui o projeto técnico do serviço de fornecimento e elaboração das refeições, bem como o seu respetivo preço. Uma licitação pode abranger de uma a doze unidades territoriais, de acordo com a classificação atribuída a cada fornecedor.

Em simultâneo com a variedade de refeições (cerca de trinta, uma vez que os requisitos de nutrição variam com a idade e necessidades específicas das crianças), é solicitado aos fornecedores que considerem vários níveis de fornecimento por cada licitação: 80-100%, 60-80% e menos que 60% das refeições estimadas por licitação, dado que o número de estudantes que participam nestes programas poderá variar. Os fornecedores, por sua vez, podem colocar as licitações que desejarem, sendo aceites ou rejeitadas na sua totalidade. Uma vez aceites pela JUNAEB, as empresas vencedoras fornecem todas as refeições nas unidades territoriais correspondentes.

A colocação de licitações está aberta a qualquer empresa fornecedora nacional ou estrangeira, e todas competem de forma igual (não há preferências sobre empresas sediadas no Chile). Por forma a assegurar que os preços permaneçam competitivos e estáveis, no caso de incumprimento por parte de qualquer empresa fornecedora, não são aceites contratos de fornecimento da mesma empresa que sejam superiores a 16% da capacidade total da JUNAEB.

O objetivo do modelo descrito pelos autores consiste em selecionar uma combinação de licitações, capaz de fornecer ao mínimo custo, todas as unidades territoriais. Ao combinarem todas as variações possíveis, considerando várias estruturas alimentares e níveis de procura, geraram-se mais de 700 cenários para análise. Para encontrar a solução ótima por cenário, formularam o problema como um modelo de programação inteira binária para cada proposta, que consiste em aceitar ou recusar a proposta. Foram também

definidas variáveis binárias auxiliares, que correspondem às restrições que limitam o número de empresas fornecedoras por região e atribuição das empresas vencedoras.

Ao utilizar um modelo matemático para alocar contratos, a JUNAEB conseguiu poupanças significativas devido à:

- ✓ Transparência e objetividade em todo o processo, eliminando pressões dos fornecedores no processo de tomada de decisão;
- ✓ Imparcialidade e fiabilidade, incentivando a concorrência, a produtividade, qualidade de serviço e melhores práticas de gestão entre os potenciais fornecedores;
- ✓ Existência de economias de escala para os fornecedores, traduzindo-se no valor das licitações, ao permitirem o abastecimento de diversas unidades territoriais;
- ✓ Possibilidade de obter uma solução ótima (menor custo) observando todas as restrições, para todos os cenários, solução que seria extremamente difícil de conseguir sem recurso ao modelo.

Em abril de 2009, a JUNAEB pagou aproximadamente 1,13 dólares americanos pelo pequeno-almoço e almoço de cada estudante por dia. Os autores estimam que o sistema informatizado de avaliação de propostas utilizado nos programas de nutrição escolar, poupa aos cofres do governo Chileno cerca de 40 milhões de dólares americanos por ano, o equivalente ao custo de alimentar cerca de 300.000 crianças anualmente.

4.5.3. Planeamento e alocação de tarefas

Os leilões combinatórios têm sido recentemente utilizados em diversos cenários de alocação de recursos, conforme descrito por Narahari e Dayama (2005). Considere-se, por exemplo, uma unidade fabril onde existem tarefas para serem executadas por um determinado conjunto de máquinas. Cada tarefa possui um prazo para ser executada, passando por diversas máquinas durante o seu processamento. O problema de alocação passará por seleccionar a melhor combinação de máquinas para a execução das tarefas, que rentabilizem prazos ou minimizem atrasos no processo produtivo. Os autores consideram também outros cenários de alocação de recursos como a alocação de rotas de transportes públicos, alocação de faixas de aterragem, aplicações em automação e robótica, entre outros.

De fato, no que refere à robótica e automação, a literatura da especialidade considera diversas situações onde as tarefas de exploração efetuadas por robôs podem ocorrer, entre

as quais, missões de limpeza ambiental, missões espaciais e missões de resgate e salvamento, a desenvolver na subseção seguinte.

4.5.3.1. Alocação de tarefas em missões de exploração

Em Gerkey e Mataric (2002), uma equipa de robôs heterogêneos, com níveis de habilidades distintos, necessita de visitar um número predefinido de locais (alvos), num ambiente parcialmente desconhecido. O objetivo é alocar cada tarefa da forma mais eficiente possível, baseado no que se pretende otimizar, minimizando, por exemplo:

- ✓ A utilização de recursos;
- ✓ A tempo de finalização das tarefas;
- ✓ O excesso de informação.

Em Berhault, Huang, Keskinocak, Koenig, Elmaghrabi, Griffin e Kleywegt (2003), os leilões estão particularmente adequados para os domínios da robótica, pela sua dimensão, divisibilidade e controlo de dados, eficiência computacional e comunicação. Os robôs modernos estão equipados com um sistema de comunicações de elevada largura de banda, e um elevado número de sensores, que devem ser explorados de forma cooperativa, partilhando informação e aproveitando as habilidades uns dos outros, a nível do grupo.

Os autores consideram no seu mecanismo a necessidade de alocação contínua dos alvos para os robôs, em presença de um cenário que não é conhecido integralmente, uma vez que poderão surgir obstáculos que os impeçam de chegar ao alvo, por exemplo, uma parede que os separe. Para efetuar essa alocação contínua, os robôs utilizam leilões entre eles, vendendo e comprando alvos, atingindo assim o objetivo de equipa, que é minimizar a soma dos custos para visitar todos os alvos. O custo de atingir determinado alvo, para um robô, é a soma de todos os custos durante o trajeto percorrido, desde a sua localização até ao alvo a visitar.

Os robôs seguem sempre o trajeto com o menor custo, para visitar todos os alvos alocados. Sempre que um robô adquire mais informação sobre o ambiente, partilha essa informação com os outros robôs. Se o trajeto de pelo menos um dos robôs estiver bloqueado, toda a restante equipa de robôs coloca os alvos não visitados em leilão. O leilão, por sua vez, encerra após um determinado período de tempo. Cada robô irá ganhar no máximo uma única combinação. Em cada leilão, os robôs ganham novos alvos ou trocam alvos com outros robôs, e o ciclo repete-se.

A Figura 4.1 compara de forma sucinta, a performance subótima da utilização de um mecanismo de leilão de um único item e, a eficiência obtida ao utilizar um mecanismo de leilão combinatório na alocação de tarefas de exploração de robôs.

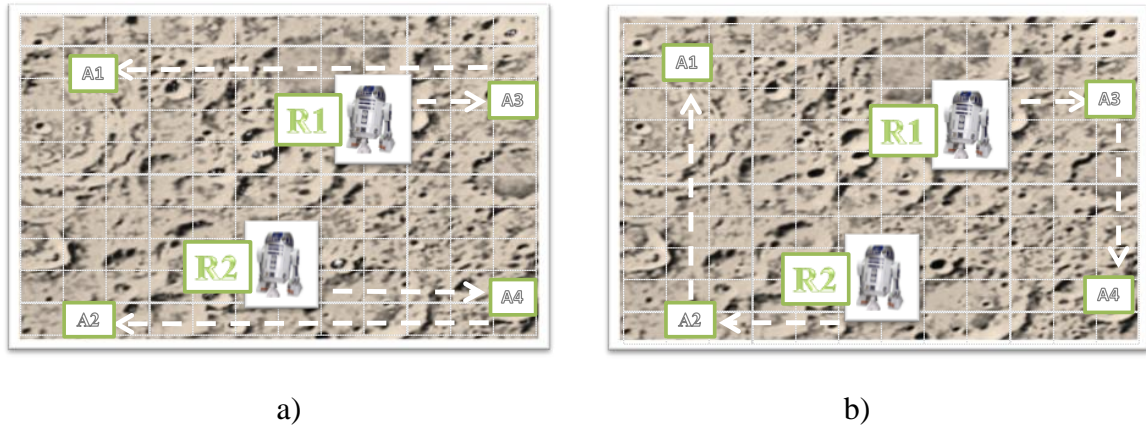


Figura 4.1 – Leilões primários vs. leilões combinatórios

Fonte: Adaptado de Berhault *et al.* (2003)

Nesta figura estão representados dois robôs, R1 e R2, que operam na superfície lunar dispondo de um mapa em duas dimensões, onde cada quadrícula representa uma unidade de distância (u.d.) e com quatro alvos a visitar: A1, A2, A3, e A4. Neste cenário, os robôs são os licitadores e as tarefas de exploração (alvos) são os itens a licitar. O leiloeiro é um agente virtual, que não têm nenhuma informação nem controlo sobre os robôs, sendo apenas responsável pelos leilões e determinação dos vencedores. Em a) apresenta-se um leilão de único item, onde a distância total das viagens executadas por R1 para A3 e A1, e do R2 para A4 e A2, corresponde a 27 u.d. Em b) apresenta-se um leilão combinatório, onde cada robô licita para um conjunto de alvos e a valorização de cada conjunto é o menor custo necessário para visitar todos os alvos dessa combinação. Os itens são alocados da seguinte forma, R1 desloca-se a A3 e depois a A4, ganhando a combinação A3A4, e R2 desloca-se a A2 e depois a A1, ganhando a combinação A2A1, com a distância total de 20 u.d.

Devido à proximidade de A3 e A4, existe uma considerável sinergia (positiva) para o R1, que poderá atingir o segundo alvo com uma viagem de custo inferior. A sinergia torna-se negativa para os alvos A1 e A3, por estarem em lados opostos. Desta forma, a utilização de leilões combinatórios ultrapassa as desvantagens dos leilões de um único item, obtendo uma otimização da performance da equipa, incorporando nas licitações todas as sinergias positivas e negativas entre os alvos, minimizando o total dos custos nos trajetos a realizar.

4.5.3.2. *Alocação de tarefas em operações de resgate e salvamento*

A gestão de catástrofes constitui uma preocupação e um desafio sério, envolvendo vários agentes distintos, em diversos ambientes dinâmicos e de situações imprevisíveis. Um ambiente simulado para cenários de emergência, constitui uma ferramenta muito importante não só para avaliar planos de emergência como também auxiliar na tomada de decisões.

Em López, Suárez e De la Rosa (2003), o cenário é fornecido pela plataforma Robocup Rescue⁸ para enquadrar o problema. O desastre natural é um tremor de terra, que provoca a queda de edifícios, incêndios, bloqueios de estradas e pessoas em pânico, envolvendo equipas multidimensionais de resgate e salvamento. Estas equipas heterogêneas interagem com um único objetivo: diminuir o impacto da catástrofe numa cidade populosa. Neste sentido, equipas de bombeiros, forças policiais e ambulâncias têm que ser coordenadas para salvar vitimas, extinguir incêndios e desbloquear estradas. O ponto-chave é alocar equipas de salvamento a estas tarefas, de acordo com as suas capacidades específicas, com o objetivo final de obter o maior benefício para todo o sistema. Os autores propõem a alocação de tarefas com base em leilões combinatórios e defendem que, se cada agente maximizar os seus benefícios, é possível obter uma performance global superior, considerando as equipas como se de um todo se tratasse.

De seguida apresentam-se os vários agentes envolvidos no ambiente simulado.



Figura 4.2 – Tipos de agentes

Fonte: Adaptado de López, Suárez e De la Rosa (2003:235)

⁸ O projeto RoboCup Rescue é um dos projetos que promove a pesquisa e o desenvolvimento desta questão social séria, a vários níveis, envolvendo a condenação de equipas multidisciplinares. Mais informações deste projeto encontram-se disponíveis em <http://www.robocuprescue.org/>.

A Figura 4.2 ilustra a classificação dos agentes envolvidos neste cenário: os agentes civis (tarefas), cujas possibilidades de sobrevivência dependem dos agentes de salvamento móveis (ambulâncias, equipas de bombeiros ou forças policiais) e fixos (centrais de ambulâncias, corporações de bombeiros e esquadras de policia), respetivamente, licitadores e leiloeiros. Cada agente tem propriedades genéricas (identificação, ferimentos, posição no local do incidente, se está impedido de se mover, entre outros) e capacidades específicas (comunicação, perceção e ação), que se interligam ou são interdependentes (neste último caso, por exemplo, os agentes móveis podem visualizar o cenário, enquanto os agentes fixos dependem da informação que lhes é fornecida). Inicialmente, quando os agentes chegam ao local apenas exploram a situação que os rodeia, não existindo operações de salvamento para serem executadas.

Para se iniciar o leilão combinatório, é necessário que os licitadores recolham a informação sobre as tarefas a realizar (potenciais vitimas a socorrer, incêndios para apagar e estradas para desbloquear). Os agentes enviam licitações às centrais de resgate, correspondentes a combinações de tarefas, a serem realizadas segundo uma ordem sequencial. As tarefas selecionadas pelos agentes têm em consideração a distância que ocorre entre a sua localização e o local onde o resgate é necessário. A licitação inclui o custo de execução dessas tarefas, por exemplo, o custo de desbloquear uma estrada. A distância e o custo de executar uma tarefa representam fatores cruciais na determinação do custo global dessa tarefa. As licitações recebidas pelas centrais são processadas, utilizando um algoritmo para a determinação da proposta vencedora.

Em Sandholm (2003), quando os licitadores colocam as suas licitações sobre as tarefas, estão dispostos a aceitar qualquer alocação, mas não pretendem obter mais do que uma. Em particular, os licitadores submetem licitações utilizando a linguagem *XOR*, ou seja, licitações sobre combinações, de tal forma que, apenas uma das licitações é aceite. Esta linguagem permite aos licitadores expressarem as suas preferências gerais, de acordo com os critérios de complementaridade e de substituibilidade, abordados na seção 4.1.

Como exemplo, apresenta-se um ambiente simulado de catástrofe natural na Figura 4.3.



Figura 4.3 – Cenário de catástrofe simulado

Supondo que uma esquadra policial (leiloeiro) tem conhecimento de quatro estradas bloqueadas (tarefas), que impedem o acesso das equipas de bombeiros a edifícios em chamas. Observando a Figura 4.3. constata-se que as tarefas estão identificadas como 154, 615, 1250 e 1914, e existem três divisões de polícias (licitadores), que colocam licitações para executar combinações de tarefas.

As licitações submetidas pelos licitadores, são ordenadas pelo leiloeiro conforme apresentado na tabela seguinte, eliminando combinações de itens idênticas com um custo superior.

Tabela 4.3 – Hierarquia das propostas

Licitações	Combinações	Valor (custo)
1	{1250,1914}	5
2	{1250,615,154}	9
3	{154,615}	5
4	{154,615,1250}	10
5	{1914,154}	8
6	{1914,1250,615}	7
7	{1914,1250}	6

De acordo com a tabela 4.3, é retirado o conjunto de licitações {1,2,3,4,5,6} que irá ser submetido ao problema de alocação combinatória, utilizando o algoritmo proposto pelo autor.

O resultado será a alocação da combinação mais eficiente, maximizando a performance global da equipa e expressando a complementaridade e substituibilidade dos agentes nas suas licitações.

4.5.4. Formação de cadeias de abastecimento

Uma cadeia de abastecimento, de acordo com Walsh e Wellman (2003), é uma rede de produção e troca de relações, que abrange múltiplos níveis de produção, ou de decomposição de tarefas, isto é, existe uma cadeia de abastecimento sempre que estamos em presença de um agente que compra *inputs* e vende *outputs*. No seguimento, a formação de uma cadeia de abastecimento é o processo de determinação dos seus participantes, em particular, quem vai trocar o quê com quem, e quais as condições dessa troca.

A formação de cadeias de abastecimento representa uma importante área de aplicação dos leilões combinatórios, uma vez que existem fortes complementaridades nas suas operações. Estas complementaridades envolvem não só a relação existente entre os *inputs* e os *outputs*, mas também as relações de transformação (produção) ao longo de todos os níveis da cadeia de abastecimento.

Os autores consideram um exemplo da indústria automóvel, para o problema da formação de uma cadeia de abastecimento, onde os agentes são caracterizados pela sua capacidade e interesse em completar diversas tarefas. Para poderem executar algumas tarefas, os agentes poderão decompor e delegar subáreas, formando uma cadeia de abastecimento. Os recursos comuns e por vezes escassos, constituem restrições na realização das tarefas pelos agentes.

Tradicionalmente, uma cadeia de abastecimento na indústria automóvel é composta por vários níveis, formados e negociados durante um longo horizonte temporal. Considerando duas empresas, *A* e *B* produtoras de determinado modelo automóvel, e que precisam de incorporar nos seus modelos, caixas de velocidades *X*. Enquanto *A* pode produzir *X*, *B* tem que recorrer ao fornecimento externo a um fabricante *C*. Por sua vez *C* tem capacidade para produzir *X* para *A* e *B*, mas não para ambas. Em simultâneo, *A* e *C* contratam serviços a uma empresa de metalurgia *D*, que não tem capacidade para fornecer

serviços a ambas. Assim, os contratos com D e o fornecimento de X , constituem os dois recursos (escassos) a serem alocados.

Os autores Giovannucci, Cerquides, Endriss e Rodríguez-Aguilar (2010) defendem que, embora a abordagem de Walsh e Wellman (2003) seja muito importante, não define nenhuma linguagem de licitação, nem a estrutura e os critérios que a cadeia de abastecimento deve seguir, como por exemplo, a periodicidade, ou processos que só podem produzir um único *output*. Desta forma, apresentam uma generalização dos leilões combinatórios, de múltiplos atributos, seguindo requisitos adicionais tais como expressividade, computabilidade e análise formal, onde os agentes podem negociar sobre operações de cadeias de abastecimento, cada uma caracterizada por um conjunto de *inputs* e *outputs*. Giovannucci *et. al.* (2010) distinguem três tipos de operações numa cadeia de abastecimento:

1. O fornecimento das operações de produção;
2. O fornecimento de um conjunto de *inputs*;
3. O pedido de um conjunto de *inputs*.

Desta forma, os agentes negociam sobre conjuntos de operações, colocando licitações sobre combinações de diferentes recursos, podendo oferecer quaisquer números dessas operações, incluindo várias cópias das mesmas. Se os agentes não obtiverem todos os componentes sobre o subconjunto requerido, então a transação não terá qualquer valor para os mesmos.

4.5.5. Alocação de faixas de aterragem nos aeroportos

A crescente procura no acesso aos maiores aeroportos comerciais mundiais, em paralelo com a capacidade operacional limitada dos mesmos, gerou um elevado congestionamento do tráfego aéreo, aumentando em muitos milhões, os custos anuais pelos atrasos. De fato, de acordo com Cramton *et al.* (2006), passageiros, tripulações, aeronaves, companhias aéreas, aeroportos e demais intervenientes na área dos transportes aéreos, operam como uma rede, interligando-se de tal forma que, uma rutura numa das operações, provoca danos por toda a rede. Por exemplo, um atraso num determinado local por más condições climáticas, irá afetar todas as operações relacionadas, em áreas geográficas remotas, a esse condicionante climático.

Um aeroporto está congestionado quando a capacidade de aterragem num determinado período (janela) de tempo, é inferior ao número de chegadas agendadas para essa mesma

janela de tempo. Estas limitações referem-se a restrições nas pistas (entre aviões, por questões de segurança), disponibilidade das portas e controlo do espaço aéreo. Uma faixa de aterragem refere-se à reserva de uma aterragem ou descolagem de uma aeronave, por uma companhia aérea, numa determinada janela de tempo. Um dia é dividido em várias janelas de tempo.

Segundo Harsha (2009), em simultâneo com o aperfeiçoamento de medidas de capacidade dos aeroportos, tais como adicionar mais pistas ou utilização de tecnologias mais sofisticadas, é essencial a utilização de técnicas de gestão da procura, que não requerem investimentos a longo prazo, mas que apresentam efeitos imediatos na redução dos atrasos e no alívio dos congestionamentos em aeroportos com capacidades limitadas. Essas técnicas são simplesmente a alocação de recursos limitados (faixas de aterragem) às companhias aéreas, ou seja, um problema de alocação de faixas de aterragem.

A valorização de combinações de faixas de aterragem nos aeroportos, depende das operações que as companhias aéreas executam, em toda a rede em que operam. Para obter tal valorização, é necessário resolver vários problemas, tais como o planeamento de escalas, as frotas, o marketing e a gestão da rentabilidade, que por sua vez assentam em critérios incertos, como por exemplo, qual o nível da procura futura, qual o valor das tarifas a aplicar e quais os respetivos custos a incorrer.

Desde a década de 60, que o controlo do congestionamento nos aeroportos é exercido utilizando diversos mecanismos, tais como, a utilização de direitos adquiridos pelas companhias aéreas (por antiguidade) sobre as faixas de aterragem, a utilização de lotarias para a atribuição das faixas, ou a fixação de tarifas (independentemente do nível da procura existente). No entanto, estes mecanismos apresentam ineficiências na alocação de recursos raros e atuam como barreiras à entrada de novos agentes no mercado.

No decorrer da década de 80, mecanismos como leilões de faixas de aterragem, têm sido propostos como um método alternativo contornando essas ineficiências, ao utilizarem técnicas de formação de preços transparentes, para obter alocações eficientes. Em Ausubel e Milgrom (20025), a utilização de leilões para alocar faixas de aterragem, traduz-se em eficiência (pela utilização ótima de recursos escassos e incentivo real ao investimento), robustez, maximização do bem-estar social, fixação das quantidades seguindo valores de mercado, estabilidade nas alocações a longo prazo, níveis de congestionamento de forma previsivelmente baixa e, na sua essência, flexibilidade.

Em Harsha (2009), é proposto um modelo de leilão de faixas baseado numa estratégia de gestão da procura, onde o número de faixas de aterragem a leiloar (que incorporam a respetiva faixa de descolagem), depende das pistas, portas, bagagens e capacidades dos terminais, bem como do montante anual implementado para leilão (por exemplo leiloar 20% do total de aterragens por ano). Em aeroportos que apresentam períodos prolongados de congestionamento, as faixas são alocadas num horizonte de tempo longo, normalmente durante alguns anos. Neste caso, as companhias aéreas podem estabelecer a sua estratégia e as suas prioridades, antecipar requisitos e planear para o longo prazo, nas faixas que lhes são alocadas. Outras técnicas de alocação são utilizadas em tempo real, nomeadamente quando ocorrem circunstâncias imprevistas, tais como mau tempo, originando quebras bruscas na capacidade operacional diária dos aeroportos. Neste caso, devido à natureza aleatória das condições atmosféricas e à dinâmica das atualizações da capacidade de resposta dos aeroportos, são efetuadas novas alocações cada vez que uma nova capacidade é obtida, e as companhias aéreas têm que estar preparadas para dar resposta, em tempo real, a essas alocações.

O autor apresenta um modelo de leilão combinatório iterativo por rondas, onde companhias aéreas com restrições orçamentais, licitam sobre faixas de aterragem. No seguimento, o leilão é composto por:

- ✓ Um modelo de valorização e um modelo estratégico, que estimam o valor real de cada combinação, e quais as licitações a considerar no leilão, respetivamente;
- ✓ Um leiloeiro (módulo virtual), que conduz o leilão mediante regras que minimizam conflitos e promovem a consistência das licitações, e um módulo de determinação da proposta vencedora, que aloca provisoriamente as faixas de aterragem, incrementando os preços em cada ronda do leilão.

São consideradas três etapas distintas mas relacionadas, neste leilão combinatório iterativo, para obter a alocação final:

- 1) A alocação primária das faixas;
- 2) A reorganização das escalas por parte das companhias aéreas, face às alterações ocorridas entre a faixa de aterragem alocada e a faixa efetiva de chegada;
- 3) Trocas de faixas, entre companhias aéreas.

A troca de faixas entre companhias aéreas permite a obtenção dos objetivos individuais das companhias aéreas e permite a minimização do desperdício de faixas, resultantes dos eventuais cancelamentos dos voos.

4.5.6. Alocação de recursos disponíveis em vôos/pacotes de férias

Para Morris e Maes (2000), os leilões *online* são uma forma muito popular de vender inventários perecíveis na área do turismo (por exemplo, a venda de lugares disponíveis nos voos entre determinada origem e destino), devido ao seu custo reduzido e à facilidade de acesso. Atualmente, a utilização de leilões primários para a venda de determinados bilhetes de avião e pacotes de férias, é comum nos *sites* das agências de viagens.

No entanto, apesar do crescimento e utilização destes *site* como, por exemplo, o *e-bay* e o *amazon.com*, existe a necessidade de uma experiência de licitações mais dinâmica e personalizada, que vá para além do requisito exclusivo do preço da negociação. Nestes *sites* é requerido aos clientes o pagamento de todas as licitações aceites, o que muitas vezes, desencoraja a licitar para mais do que um item em simultâneo. No seguimento, no *site priceline.com*, é utilizado um modelo de leilão de ronda única, incorporando apenas requisitos básicos de preferência do comprador (origem, destino, hora e valor a pagar). No final de cada ronda, é exigido ao comprador que adquira qualquer proposta de vôo que seja aceite. Esta situação pode levar a alocações de vôos indesejados, com fracos horários e escalas múltiplas, obrigando o comprador a licitar sempre para o pior cenário. Desta forma, gera-se uma ineficiência dupla: o comprador não tem oportunidade de demonstrar a real valorização para o seu vôo ideal, e o vendedor é impedido de obter um valor superior, para os seus vôos com maior procura.

Para contornar estas ineficiências, Dietrich e Vohra (2002) apresentam uma aplicação real, utilizando um leilão fechado iterativo para vender o excesso de recursos das companhias aéreas (lugares vazios nos vôos), entre duas determinadas cidades. Neste formato de leilão, os licitadores especificam um conjunto de bilhetes que pretendem adquirir, para um conjunto de vôos aceites, e o respetivo valor de licitação por cada um desses bilhetes. No modelo proposto, os autores consideram a extensão do problema para vôos entre mais do que duas cidades, podendo incorporar nas combinações outros serviços, nomeadamente, estadias em hotéis, aluguer de viaturas, entre outros.

O mecanismo permite a obtenção de informação imediata, ou seja, se a licitação é aceite provisoriamente, ou se é rejeitada (neste caso, é divulgado o valor mínimo das licitações

não aceites, para possibilitar a reformulação das propostas dos licitadores). As licitações provisoriamente aceites podem, no entanto, ser retiradas por outras de valor superior, no decorrer do leilão.

O leiloeiro, que poderá ser simultaneamente o vendedor (companhia aérea), antes de iniciar o leilão combinatório, estabelece os requisitos fundamentais do seu funcionamento, nomeadamente, os recursos disponíveis a leiloar, o preço de reserva (que poderá variar consoante os dias de semana, ou informação histórica da procura), as eventuais porções entre propostas vencedoras e quantidades de bilhetes por licitação, entre outros.

Os licitadores são os clientes que visitam os *sites* em busca de lugares disponíveis nos vãos, para serem leiloados. Após especificarem requisitos fundamentais tais como, local de partida e chegada, e datas aproximadas das viagens, submetem o número de bilhetes pretendidos e o valor das suas licitações. O sistema, ao fornecer informação imediata sobre a licitação, permite ao licitador aumentar o valor da sua proposta, o seu cancelamento, ou mesmo introduzir alterações de outros requisitos para além do preço, na licitação (estas situações ocorrem unicamente, se houver rejeição da proposta pelo sistema). Quando a licitação é aceite, passa a reserva efetiva, por um determinado período de tempo, mas não obriga ao pagamento imediato. O licitador poderá decidir, qual é a companhia aérea que lhe fornece a melhor escolha, podendo mudar de ideias, durante o tempo em que decorre o leilão.

Desta forma, a utilização de um mecanismo de leilão combinatório na alocação de lugares vazios em vãos, permite:

- ✓ Avaliar e selecionar produtos com base em utilidades e multicritérios dos compradores;
- ✓ Efetuar várias licitações em vários produtos, aumentando a hipótese de correspondência perfeita entre ambos;
- ✓ Utilizar mecanismos de alocação de propostas mais eficientes pelo vendedor, baseados em critérios mais complexos, para além do preço, gerando uma maior rentabilidade.

As aplicações apresentadas anteriormente bem como muitas outras que têm sido reportadas na literatura da especialidade, mostram que os leilões combinatórios são extremamente

úteis e de amplo alcance em várias áreas de negócios, conforme descrito pelos autores referenciados ao longo deste trabalho.

5. Problema de alocação combinatória

5.1. Definição e formulação

Um problema que surge em qualquer tipo de leilão é o da determinação das propostas vencedoras que, no caso dos leilões de venda, consiste em selecionar, entre as propostas apresentadas, as que maximizam o proveito total para o vendedor. Tal problema é de fácil resolução quando se trata de leilões não combinatórios. Basta, para o efeito, selecionar a proposta de maior valor para cada item. Este procedimento tem uma complexidade de $O(nm)$, onde n é o número de propostas e m o número de itens, conforme descrito por Sandholm (2002). O problema é ainda computacionalmente tratável quando a valorização dos itens é aditiva, de acordo com Tennenholtz (2002). No entanto, situação contrária ocorre no caso dos leilões combinatórios onde o problema é de difícil resolução. Assim, vários trabalhos de investigação têm sido desenvolvidos acerca deste problema.

Como já se referiu anteriormente, um dos problemas de maior interesse nos leilões combinatórios consiste na determinação das propostas vencedoras. Este problema é usualmente designado na literatura da especialidade por problema do leilão combinatório (*Combinatorial Auction Problem*) ou problema de alocação combinatória (*Combinatorial Allocation Problem*) e usualmente denotado por CAP, ou ainda, por problema de determinação do vencedor (*Winner Determination Problem*) e, neste caso, denotado por WDP. Optou-se, ao longo deste capítulo, por utilizar a designação CAP.

No que se segue, considera-se o caso dos leilões combinatórios de venda e assume-se que esses leilões são de primeiro preço, de única ronda e de proposta selada. Assume-se ainda que o modelo é de valor privado e que não considera aspetos relacionados com a estratégia dos agentes.

Formalmente, o CAP pode ser definido como se segue. Seja $M = \{1, \dots, m\}$ um conjunto de itens indivisíveis que um vendedor possui para venda a um conjunto $N = \{1, \dots, n\}$ de potenciais compradores (agentes). Como se referiu no capítulo 4, uma proposta feita por um agente j é um par $(S, v_j(S))$ onde $S \subseteq M$ e onde $v_j(S) \in \mathbb{R}_0^+$ designa a quantia que o agente j está disposto a pagar para obter o pacote de itens S . O problema de alocação das propostas consiste em determinar, entre as propostas apresentadas pelos agentes, as que

maximizam o proveito total do vendedor sujeito à restrição que cada *item* pode, quando muito, ser alocado a um agente.

Seguindo Parkes (2001), um simples exemplo do problema de alocação combinatória é apresentado esquematicamente na Figura 5.1.

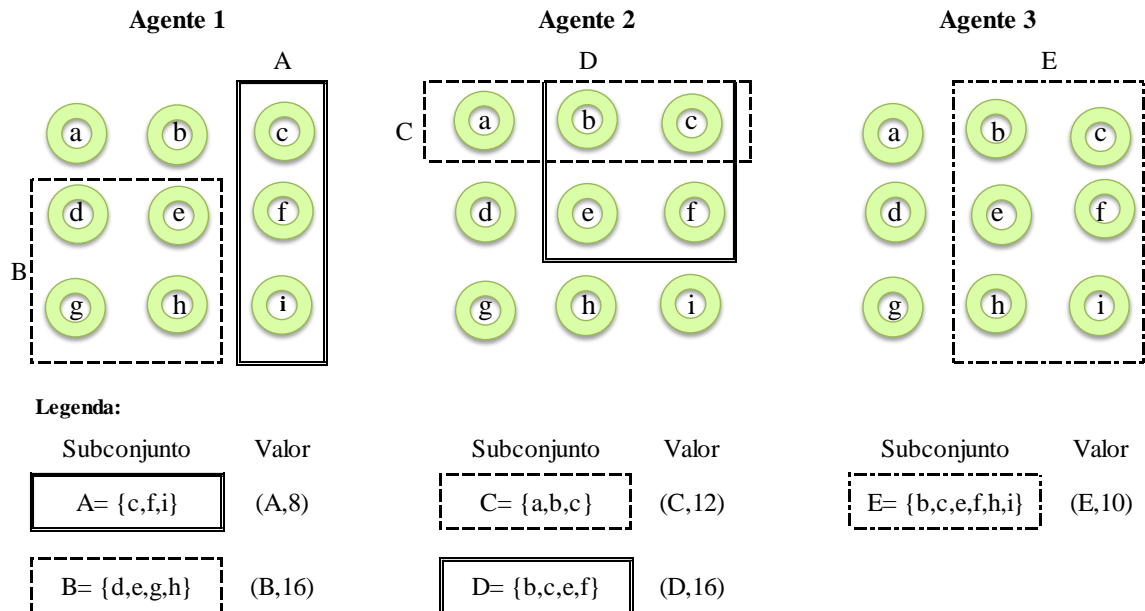


Figura 5.1 – Exemplo de um problema de alocação combinatória

Fonte: Adaptado de Parkes (2001: 9)

Neste exemplo, existem nove itens e três agentes que apresentam as propostas indicadas na figura, cujas valorizações são positivas. Por exemplo, o agente 1 apresenta uma proposta para a combinação de itens identificada por A com valorização de 8 e uma outra para a combinação de itens identificada por B com valorização de 16. A solução ótima, que maximiza o valor total sobre todos os agentes, garantindo que as propostas selecionadas são disjuntas, consiste em alocar o pacote B ao agente 1 e o pacote C ao agente 2, não existindo qualquer alocação ao agente 3. O valor total desta alocação é igual a 28.

O CAP pode ser formulado como um problema de programação linear inteira (PLI), ver por exemplo Cramton *et. al.* (2006). Para tal considerem-se as variáveis binárias $x_j(S)$ para indicar se a proposta para o subconjunto $S \subseteq M$ é, ou não, alocada ao agente j , isto é, $x_j(S) = 1$, se a proposta para o subconjunto $S \subseteq M$ está na solução ótima, e $x_j(S) = 0$, no caso contrário. Tem-se então a seguinte formulação em PLI:

$$\max \sum_{j=1}^n \sum_{S \subseteq M} v_j(S) x_j(S) \quad (5.1)$$

$$s. a. \sum_{j=1}^n \sum_{S \subseteq M, S \ni i} x_j(S) \leq 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, m\} \quad (5.2)$$

$$x_j(S) \in \{0, 1\} \quad \forall j \in \{1, \dots, n\} ; \forall S \subseteq M \quad (5.3)$$

A função objetivo (5.1) maximiza o proveito total sobre as propostas apresentadas. As restrições (5.2) garantem que um item i ($i = 1, \dots, m$) não é alocado a mais de um agente j ($j = 1, \dots, n$). As restrições (5.3) indicam a natureza (binária) das variáveis. Note-se que, como referem aqueles autores, quando existe mais do que um agente a apresentar propostas para o mesmo subconjunto de itens, basta considerar a proposta de maior valor, pelo que as restantes não necessitam de estar incluídas no modelo. No entanto, por uma questão de simplicidade, o modelo anterior inclui todas as propostas apresentadas pelos agentes.

O modelo (5.1) – (5.3) é um modelo válido quando as propostas são apresentadas na linguagem *OR* (função valor superaditiva). No caso de as propostas serem apresentadas na linguagem *XOR* (função valor não ser necessariamente superaditiva), este modelo deixa de ser válido, como se ilustra no exemplo que se segue.

Exemplo 5.1: Considere-se um leilão combinatório envolvendo o conjunto de itens $M = \{a, b\}$ e o conjunto de agentes $N = \{1, 2, 3\}$. As propostas apresentadas pelos agentes, bem como os respetivos valores, constam da tabela 5.1.

Tabela 5.1 – Exemplo de CAP e linguagem de licitação

		Propostas		
		{a}	{b}	{a,b}
Agentes	1	2	3	6
	2	4	5	8
	3	3	3	6

O modelo (5.1) – (5.3) para esta instância, considerando as propostas não dominadas, é dado por:

$$\begin{aligned}
\max \quad & 4x_2(\{a\}) + 5x_2(\{b\}) + 8x_2(\{a,b\}) \\
\text{s. a.} \quad & x_2(\{a\}) + x_2(\{a,b\}) \leq 1 \\
& x_2(\{b\}) + x_2(\{a,b\}) \leq 1 \\
& x_j(S) \in \{0,1\} \quad \forall S \subseteq M
\end{aligned}$$

A solução deste problema, que pode também facilmente ser obtida por inspeção, é:

$$x_2(\{a\}) = x_2(\{b\}) = 1 \text{ e restantes variáveis iguais a zero.}$$

Esta solução é válida se as propostas forem apresentadas na linguagem *OR*. Contudo, tal solução deixa de ser válida se as propostas forem apresentadas na linguagem *XOR* porque o agente 2 consegue obter os dois itens através de duas propostas, o que não pode ocorrer neste tipo de linguagem. Note-se que o aspeto da substituibilidade não é contemplado naquela solução.

Existem duas maneiras de contornar esta situação. Uma delas consiste na introdução da restrição

$$x_2(\{a\}) + x_2(\{b\}) + x_2(\{a,b\}) \leq 1$$

que impede o agente 2 de ganhar mais de uma proposta. Com a introdução desta restrição a solução do problema será

$$x_2(\{a,b\}) = 1 \text{ e restantes variáveis iguais a zero.}$$

Mais geralmente, introduzindo, no modelo (5.1) – (5.3), as restrições

$$\sum_{S \subseteq M} x_j(S) \leq 1 \quad \forall j \in \{1, \dots, n\} \quad (5.4)$$

obtem-se um modelo válido para este tipo de linguagem. As restrições (5.4) garantem, como já foi referido, que um agente não obtém mais do que um pacote de itens. Então, o modelo (5.1) – (5.4) modela corretamente o problema CAP quando as propostas são apresentadas na linguagem *XOR*.

A outra forma de contornar o problema consiste em introduzir um item fictício f para o agente 2. Nesse caso M é substituído por $M \cup \{f\}$ enquanto $x_2(\{a\})$, $x_2(\{b\})$ e $x_2(\{a,b\})$, serão substituídos por $x_2(\{a\} \cup \{f\})$, $x_2(\{b\} \cup \{f\})$ e $x_2(\{a,b\} \cup \{f\})$, respetivamente. Deste modo, a solução obtida pelo modelo (5.1) – (5.3) para a instância do

exemplo 5.1 não pode ocorrer, pois caso contrário o item fictício f seria alocado mais do que uma vez, o que contraria as restrições (5.2).

Então, de um modo geral, o modelo (5.1) – (5.3) é ainda válido para a linguagem *XOR* ou quando a função é subaditiva através da introdução de itens fictícios, um para cada agente, como se refere em Vries e Vohra (2000).

O modelo (5.1) – (5.3) é idêntico ao modelo em *PLI* para o problema do empacotamento com pesos, usualmente denotado na literatura da especialidade por *SPP* (*weighted set packing problem*), como se refere em Rothkopf, Pekeč e Harstad (1998). Neste problema, dado um conjunto M e uma família \mathcal{F} de subconjuntos de M , a cada um dos quais está associado um peso não-negativo, pretende-se determinar a família, de peso máximo, de subconjuntos disjuntos dois a dois. Seja $a_{ij} = 1$ se o elemento $i \in M$ pertence ao subconjunto j de \mathcal{F} , e $a_{ij} = 0$, no caso contrário. Considerando as variáveis $x_j = 1$, se o subconjunto j de \mathcal{F} com peso c_j é selecionado, e $x_j = 0$, no caso contrário, o problema pode ser formulado do seguinte modo:

$$\max \sum_{j=1}^n c_j x_j \tag{5.5}$$

$$s. a. \sum_{j \in \mathcal{F}} a_{ij} x_j \leq 1 \quad \forall i \in M \tag{5.6}$$

$$x_j \in \{0, 1\} \quad \forall j \in \mathcal{F} \tag{5.7}$$

O modelo (5.5) – (5.7) é então um modelo válido para o *CAP*. A vantagem em relacionar o *CAP* com o *SPP*, que é um problema clássico de otimização combinatoria largamente estudado, deve-se ao facto de poder transpor para o *CAP* muitas técnicas e algoritmos utilizadas no *SPP*.

5.2. Resolução do problema

Este problema pertence à classe dos problemas *NP-difíceis* (*Non-deterministic Polynomial-time hard*), conforme descrito em Karp (1972) e em Rothkopf *et. al.* (1998), isto é, dos problemas para os quais não existe um algoritmo eficiente para a sua resolução. Designa-se por algoritmo eficiente aquele em que o tempo necessário para a resolução de qualquer instância é limitado superiormente por uma função polinomial na dimensão do problema.

Para resolver o CAP, três abordagens têm sido utilizadas. Uma delas consiste no desenvolvimento de algoritmos exatos que permitem a obtenção da solução ótima mas cujo tempo para obter essa solução é, para algumas instâncias, demasiado elevado. Uma outra abordagem consiste na utilização de algoritmos aproximados, também designados de heurísticas, que permitem obter uma solução sem garantir que a mesma é ótima, podendo mesmo nem sequer estar próxima da solução ótima. Contudo, o tempo utilizado por estes algoritmos é normalmente muito inferior ao tempo utilizado pelos algoritmos exatos e daí a sua importância na resolução do problema. O valor da solução encontrada pelos algoritmos aproximados constitui um limite inferior para o valor da solução ótima de uma instância do problema. Finalmente, a última abordagem consiste em restringir as combinações de itens, de modo que o problema possa ser resolvido de modo eficiente.

Os métodos exatos recorrem, muitas vezes, ao uso de algoritmos enumerativos do tipo *branch-and-bound*, que constitui uma técnica bastante usada na resolução de problemas de otimização combinatoria. O sucesso desta técnica depende, em grande parte, dos limites superior e inferior para o valor da solução ótima de uma instância do problema.

Os limites superiores para um problema de maximização, como é o caso do CAP, são geralmente obtidos por recurso a uma relaxação de uma formulação em PLI para o problema. Uma relaxação possível e de grande uso é a relaxação em programação linear (PL). Este tipo de relaxação permite também em determinados casos, como se verá mais à frente, obter a solução ótima do problema original, isto é, do problema em PLI.

5.2. Relaxação em PL

A relaxação em PL do modelo (5.5) – (5.7) é o modelo que se obtém substituindo as restrições de integralidade (5.7) pelas restrições de não negatividade. Obtém-se assim o seguinte modelo de PL:

$$\max \quad \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (5.5)$$

$$s. a. \quad \sum_{j \in S_j} a_{ij} x_j \leq 1 \quad \forall i \in M \quad (5.6)$$

$$x_j \geq 0 \quad \forall j \in \mathcal{F} \quad (5.7')$$

Como se referiu antes, o modelo (5.5) – (5.7') fornece um limite superior para o valor da solução ótima do correspondente modelo inteiro (5.5) – (5.7). Contudo, quando a solução da relaxação em PL é inteira, essa solução é também solução ótima do modelo inteiro. Na secção seguinte serão apresentados casos especiais onde a relaxação em PL resolve o CAP. Note-se que o modelo definido por (5.5) – (5.7') descreve também o problema de alocação combinatória quando é permitida a divisibilidade dos itens.

Em tais casos, a teoria da dualidade em PL permite uma interpretação económica das variáveis duais. Note-se que cada proposta inclui um preço para o pacote de itens incluído nessa proposta. O modelo dual de (5.5) – (5.7') é descrito por:

$$\min \sum_{i=1}^m y_i \quad (5.8)$$

$$s. a. \sum_{i \in M} a_{ij} y_i \geq c_j \quad \forall j \in \mathcal{F} \quad (5.9)$$

$$y_i \geq 0 \quad \forall i \in M \quad (5.10)$$

Como é sabido, o valor da solução ótima do modelo (5.8) – (5.10) é igual ao valor da solução do modelo primal, definido por (5.5) – (5.7'). O valor de cada variável dual y_i , nessa solução, pode ser interpretado como sendo o preço associado a cada item.

5.3. Casos especiais tratáveis

Apesar do CAP ser de difícil resolução, existem casos especiais onde o problema pode ser resolvido de modo eficiente. Tais casos reportam a propostas que têm uma estrutura especial conforme apresentado em Rothkopf *et. al.* (1998), Nisan (2000) e Vries e Vohra (2000). Nesses casos, o problema pode ser resolvido através da relaxação em PL do correspondente modelo em PLI. Alternativamente, devido a essa estrutura especial, existem algoritmos mais eficientes do que os existentes para resolução de problemas de PL. Contudo, a utilização da PL revela-se importante por permitir uma interpretação económica das variáveis do problema dual, como se referiu anteriormente.

Quando as coordenadas de todos os vértices do poliedro associado à relaxação em PL de um modelo PLI assumem valores inteiros, o problema pode ser resolvido de modo eficiente como um problema de PL. A questão que se coloca é a de saber em que circunstâncias o poliedro associado à relaxação em PL de um modelo de PLI é um poliedro

inteiro, isto é, um poliedro cujas coordenadas dos vértices assumem valores inteiros. Várias condições suficientes têm sido estabelecidas para o efeito. Uma das mais conhecidas é a total unimodularidade.

Definição 5.1: Uma matriz A de dimensão $m \times n$ é totalmente unimodular (TU) se toda a submatriz quadrada de A tem determinante igual a 1, -1 ou 0.

A partir da definição, é evidente que se uma matriz A é TU então cada elemento de A é igual a +1, -1 ou 0, isto é, $a_{ij} \in \{+1, -1, 0\}$ para todo i e j . Note-se se uma matriz A é TU então a sua transposta A^T também é TU.

A proposição seguinte, cuja demonstração pode ser encontrada em Nemhauser e Wolsey (1988), revela-se bastante importante, pois permite afirmar que se A é TU e b um vetor de inteiros, então a solução ótima do problema linear $\max\{c^T x : Ax \leq b, x \in \mathbb{R}_+^n\}$, se for finita, é inteira.

Proposição 5.1: Seja A uma matriz inteira TU e b um vetor de inteiros. Então todos os vértices do poliedro $\{x \in \mathbb{R}_+^n : Ax \leq b\}$ são inteiros.

Note-se, que no modelo (5.5) – (5.7) o vetor b é um vetor cujos elementos são todos iguais a 1. Logo, se a matriz A , dos coeficientes das restrições, é TU, então a relaxação em PL daquele modelo resolve o problema.

Não é fácil, a partir da definição 5.1, verificar se uma matriz é TU. No entanto, algumas condições simples e importantes que permitem reconhecer quando é que uma matriz é TU, podem ser obtidas como consequência da caracterização de matrizes TU, dada pela proposição que se segue, apresentada pelos mesmos autores.

Proposição 5.2: Seja A uma matriz de elementos 1, 0 e -1, e seja N o conjunto das colunas de A . Se para cada $J \subseteq N$ existe uma partição (J_1, J_2) de J tal que

$$\left| \sum_{j \in J_1} a_{ij} - \sum_{j \in J_2} a_{ij} \right| \leq 1 \quad i = 1, \dots, n$$

então A é TU. A recíproca também é verdadeira.

O fato de a transposta de uma matriz TU ser também uma matriz TU permite declarar a proposição anterior em termos de partição de subconjuntos de linhas. Basta, para o efeito,

de problema cuja complexidade computacional é $O(n^2)$. Vries e Vohra (2000) referem que o CAP com esta estrutura é equivalente ao problema do conjunto independente de peso máximo para um grafo arco-circular, que também pode ser resolvido em tempo polinomial. Uma situação real onde a apresentação de propostas pode seguir esta estrutura verifica-se, por exemplo, na atribuição de licenças de rádio onde existe vantagem em licitar licenças de áreas geográficas adjacentes conforme apresentado em 4.5.1. Outra situação, descrita pelos mesmos autores, refere-se ao leilão de lotes de terreno ao longo da costa, onde, do ponto de vista dos agentes, faz mais sentido apresentar propostas para lotes de terreno contíguos.

5.3.2. Propostas com ordem circular

Este caso difere do anterior apenas no facto dos itens serem ordenados em forma circular, de modo a que o último item seja contíguo com o primeiro, como se ilustra com o exemplo apresentado na figura seguinte.

Exemplo 5.2: Considere-se um leilão combinatório envolvendo o conjunto de itens $M = \{a, b, c, d, e, f\}$ ordenados de acordo com a Figura 5.3a).

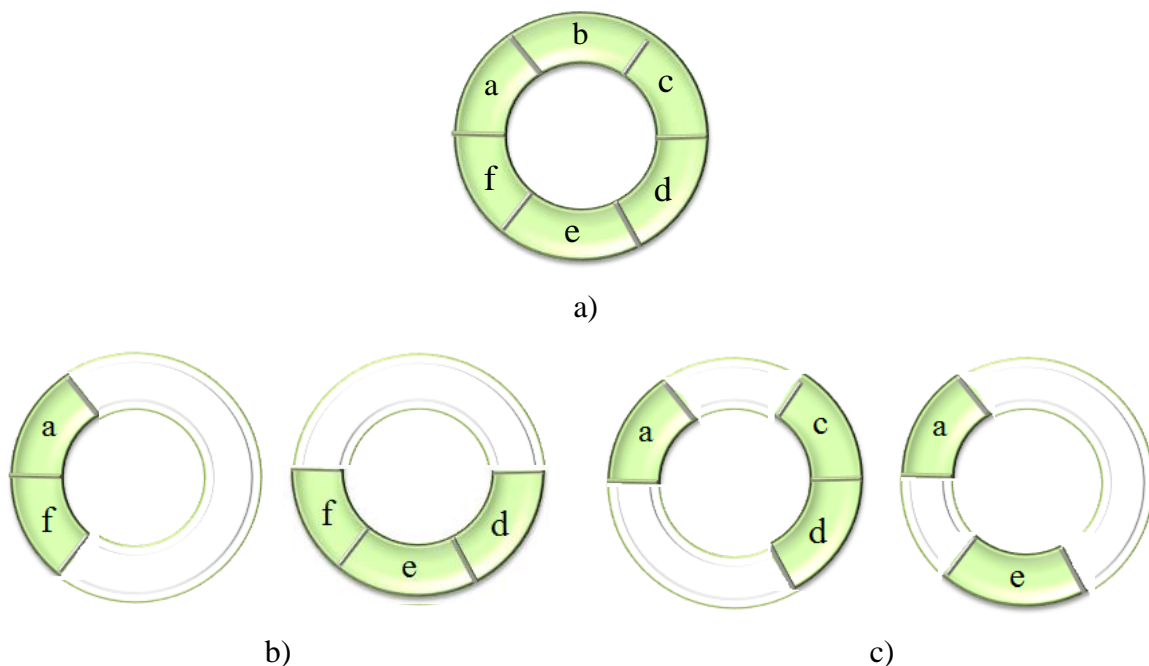


Figura 5.3 – Exemplo de propostas válidas e não válidas na estrutura de ordem circular.

São exemplos de propostas válidas neste exemplo, as apresentadas para os subconjuntos $A = \{f, a\}$ e $B = \{d, e, f\}$, representadas em 5.3b), enquanto as propostas para os

subconjuntos $C = \{a, c, d\}$ e $D = \{e, a\}$, representadas em 5.3c), são exemplos de propostas inválidas.

Neste caso, a matriz associada às restrições tem a propriedade de uns circulares (*circular ones property*). Uma matriz de elementos 0 e 1 tem a propriedade de uns circulares se os elementos diferentes de zero em cada coluna (linha) ocorrem consecutivamente, sendo o primeiro e último elemento de cada coluna (linha) tratados como consecutivos.

Apesar de este tipo de matriz não ser totalmente unimodular, o problema pode ainda ser resolvido em tempo polinomial. Em Rothkopf *et. al.* (1998) apresenta-se um algoritmo polinomial para resolver o PAC com esta estrutura. Este algoritmo consiste em repetir n vezes um algoritmo para o caso da estrutura com ordem linear, tomando cada um dos n elementos (itens) como o primeiro de uma estrutura com ordem linear.

Uma situação real onde ocorre este tipo de propostas ocorre em leilões de lotes de terreno à volta de um lago ou ao longo da orla costeira de uma ilha, como se refere em Vries e Vohra (2000).

5.3.3. Propostas com estrutura hierárquica

Nesta estrutura os subconjuntos de itens associados às propostas ou são disjuntos dois a dois, ou um é subconjunto do outro.

Exemplo 5.3: Considere-se um leilão combinatório envolvendo o conjunto de itens $M = \{a, b, c, d, e, f\}$ ordenados de acordo com a figura 5.4a).

Neste caso, são exemplos de propostas válidas, as apresentadas para os subconjuntos $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, $B = \{a, b, c\}$, $C = \{d, e, f\}$ e $D = \{b\}$, representadas em 5.4b), enquanto as propostas para os subconjuntos $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, $B = \{a, b, c\}$, $C = \{d, e, f\}$ e $D = \{b, e\}$, representadas em 5.4c), são exemplos de propostas inválidas.



a)

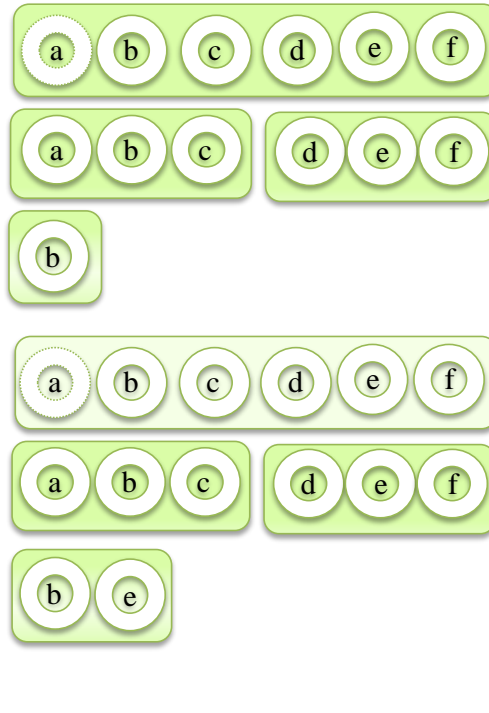


Figura 5.4 – Exemplo de propostas válidas e não válidas na estrutura hierárquica.

Como se refere em Nisan (2000), este caso constitui um caso particular da estrutura de propostas com ordem linear. Consequentemente, a matriz associada às restrições é TU, pelo que a solução ótima do problema é sempre inteira.

Uma situação real onde a apresentação de propostas segue esta estrutura verifica-se quando combinações parciais dos itens criam mais sinergias do que a combinação total desses itens.

Outros casos tratáveis, isto é, resolúveis em tempo polinomial, podem ser encontrados em Rothkopf *et. al.* (1998) e Vries e Vohra (2000).

5.3.4. Propostas de comprimento máximo igual a 2

Neste caso os agentes apenas podem apresentar propostas de comprimento máximo igual a dois. Define-se comprimento de uma proposta como sendo o número de itens incluídos na proposta.

Assim, são exemplos de propostas válidas, as apresentadas para os subconjuntos $A = \{a, c\}$ e $B = \{e\}$, representadas em 5.5b), enquanto a proposta para o subconjunto $C = \{a, b, c\}$, representada em 5.5c) constitui um exemplo de proposta inválida.

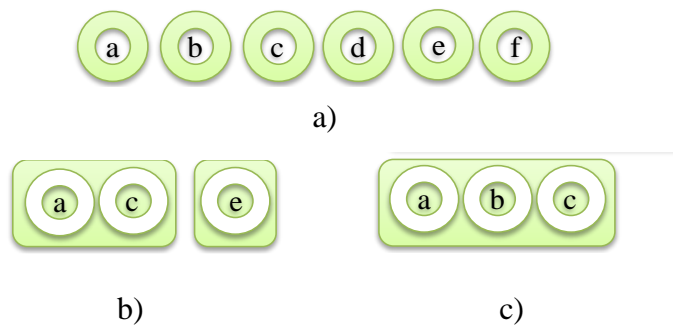


Figura 5.5 – Exemplo de propostas válidas e não válidas de comprimento máximo igual a 2.

Este caso reduz-se ao problema do emparelhamento máximo num grafo que pode ser resolvido em tempo polinomial, como se refere em Rothkopf *et. al.* (1998) e Vries e Vohra (2000). No caso de existirem propostas com um só item é criado um item fictício.

Uma situação real onde a apresentação de propostas segue esta estrutura verifica-se, por exemplo, em leilões para atribuição de direitos de descolagem e aterragem em aeroportos, como se refere em Rothkopf *et. al.* (1998). Por exemplo, a realização de um voo entre Lisboa e Paris necessita de um direito de descolagem em Lisboa, numa determinada faixa horária, e de um direito de aterragem em Paris, numa faixa horária mais tarde, tendo em conta o tempo médio de duração do voo.

Como se refere por exemplo em Sandholm (2002), as propostas com estrutura especial consideradas, introduzem algumas das mesmas ineficiências económicas que as propostas nos leilões não combinatórios, uma vez que limitam as combinações sobre as quais os agentes podem apresentar propostas, podendo mesmo impedi-los de licitar combinações que desejariam obter. Em contrapartida, esse tipo de propostas permite a resolução do problema CAP.

6. Conclusões

A abordagem efetuada ao longo desta dissertação sumariza, nos seus capítulos iniciais, a utilização dos leilões como ferramenta fundamental para a realização de negócios, desde a antiguidade. No seguimento, descreveram-se alguns aspetos importantes da teoria dos leilões, essenciais para o subsequente enquadramento do tema principal deste trabalho, ou seja, os leilões combinatórios. A teoria dos leilões estuda as propriedades formais dos leilões. O desenho dos mecanismos dos leilões surge associado a esta teoria, e tem por base o estudo de como conduzir um leilão, garantindo propriedades económicas, tais como, a eficiência, compatibilidade de incentivos, equilíbrio orçamental, racionalidade individual, entre outras.

Os leilões combinatórios são leilões onde os agentes podem vender ou comprar (ou ambos), combinações de itens numa única transação. Apesar destes leilões serem muito complexos a nível computacional, o fato de permitem aos agentes expressar totalmente as suas preferências sobre combinações de itens, potencia benefícios mútuos nas suas trocas comerciais. De fato, adquirir bens ou serviços em conjunto, permite usufruir da complementaridade ou da substituíbilidade entre os vários itens, conduzindo a alocações mais eficientes.

Este tipo de leilões tem recentemente despertado a atenção de especialistas das áreas de economia, investigação operacional e informática, podendo ser empregues como um mecanismo de alocação, num amplo leque de situações reais. Efetivamente, têm sido propostos e utilizados em muitas áreas de negócio, tais como, na alocação de rotas de transportes de mercadorias, de passageiros, faixas de partida e aterragem de aviões nos aeroportos, na procura industrial pública ou privada, na alocação do espectro de rádio, na formação de cadeias de abastecimento, entre muitos outros cenários.

Licitar em leilões combinatórios constitui o processo de transmitir a valorização ou função de preferência de um agente ao leiloeiro durante um leilão, sobre determinada combinação de itens. As valorizações são representadas por uma linguagem formal designada por linguagem de licitações, que idealmente permite a representação compacta e expressiva da informação a transmitir entre os agentes. Conforme proposto por Nisan (2000), diferentes linguagens diferem no seu poder expressivo, complexidade e compactidade de representação. A linguagem de licitação mais utilizada é a linguagem *OR*, onde cada agente submete um qualquer número de propostas atómicas (combinações de itens a que

corresponde um determinado preço), e onde o leiloeiro poderá alocar um qualquer número de propostas que não se sobreponham, cobrando aos agentes o valor da soma das propostas aceites. Por outro lado, na linguagem *XOR* o leiloeiro só alocará no máximo uma proposta atômica de cada licitador. Outras linguagens e propriedades formais das mesmas são detalhadas pelo autor na sua obra.

Após a escolha da linguagem de licitação, a questão que se coloca é da alocação das propostas, dado um determinado conjunto de licitações. Este problema é chamado de problema de determinação da proposta vencedora (*winner determination problem*) ou o problema de alocação combinatória (*combinatorial allocation problem*), e consiste na seleção das propostas a alocar a cada agente, por forma a maximizar a rendibilidade ou a minimizar o custo, no caso de se tratar de um leilão combinatório de procura, para o leiloeiro. Tal problema é um problema em geral de difícil resolução, e por isso diversos modelos de programação inteira e algoritmos (exatos e aproximados) têm sido propostos para a sua resolução. Contudo, existem casos que limitando as propostas a uma determinada estrutura, podem ser resolvidos de forma eficiente.

O âmbito dos leilões combinatórios tem crescido rapidamente na última década, especialmente influenciado pelo crescimento da Internet e consequente transferência das relações negociais para os mercados eletrónicos. Com este trabalho procurou-se dar uma visão sobre o desenvolvimento deste mecanismo de realização de negócios e aplicações reais deste tema emergente, que integra diversas áreas de conhecimento, conforme referido anteriormente.

BIBLIOGRAFIA

- ÀLVAREZ, Andrés – Price-Takers Vs. Great Numbers: A Critique of the Edgeworth – Walras Covergence à la Debreu-Scarff. In **Papers in Political Economy On perfect competition : definitions, usages and foundations**. Paris: L'Harmattan, 2012. ISBN 978-2-336-00256-6. p. 77-108.
- AUSUBEL, Lawrence M.; MILGROM, Paul - Package Bidding: Vickrey vs Ascending Auctions. In **Revue Economique**. [Em linha]. Vol. 3, N° 3 (2002), p. 391-402. [Consult. 05 Jun. 2013]. Disponível em: http://www.persee.fr/web/revues/home/prescript/article/reco_0035-2764_2002_num_53_3_410411#. ISSN 0035-2764.
- BERHAULT, M; Huang, H; KESKINOCAK, P.; KOENING, S.; ELMAGHRABI, W.; Griffin, P.; KLEYWEGT, A. - Robot Exploration with Combinatorial Auctions. In **International Conference on Intelligent Robotics and Systems**, Nevada: IEEE Publications. 2003, Vol. 4. ISBN 0-7803-7860-1. p. 1957-1962.
- CASSADY, Ralph – **Auctions and Auctioneering**. California: University of California Press, 1967. ISBN 0-520-03978-5.
- CRAMTON, Peter; SHOHAM, Yoav; STEINBERG, Richard - **Combinatorial Auctions**. Boston: MIT Press, 2006. ISBN 0-262-03342-9.
- DIETRICH, Brenda; VOHRA, Rakesh - **Mathematics of the internet: E-Auction and Markets** – New York: Springer-Verlag, 2002. ISBN 0-387-95359-0.
- ELDMAN, Benjamin; OSTROVSKY, Michael; SCHWARZ, Michael - Internet Advertising and the Generalized Second Price auction: Selling Billions of Dollars Worth of Keywords. In **The American Economic Review** [Em linha]. Vol. 97, N° 1 (2007), p. 242-259. [Consult 08 Jun. 2013]. Disponível em: <http://zoo.cs.yale.edu/classes/cs455/fall11/internet%20advertising%202007.pdf>. ISSN 0002-8282.
- GERKEY, Brian P.; MATARIĆ, Maja J. - **Sold!: Auction Methods for Multirobot Coordination. IEEE Transactions on robotics and automation**. Nevada: IEEE Journals & Magazines. ISSN 1042-296X. Vol. 18, N° 5 (2002), p. 758-768.
- GIOVANNUCCI, Andrea; CERQUIDES, Jesús; ENDRIS, Uille; RODRIGUES-AGUILAR, Juan A. - A graphical formalism for mixed multi-unit combinatorial auctions. In **Autonomous Agents and Multi-Agent Systems** [Em linha]. Vol. 20, N°

3 (2010), p. 342-368. [Consult. 28 Jul. 2013]. Disponível em: <http://link.springer.com/article/10.1007%2Fs10458-009-9085-x>. ISSN 1573-7454

GUTTMAN, Robert H; MAES, Pattie - Cooperative vs. Competitive Multi-Agent Negotiations in Retail Electronic. In **Cooperative Information Agents II Learning, Mobility and Electronic Commerce for Information Discovery on the Internet - Second International Workshop, CIA'98 Paris, France, July 4-7, 1998 Proceedings** [Em linha]. Eds. Matthias Klusch, Gerhard Weiß. Paris: Springer Berlin Heidelberg. Vol. 1435 (1998), p. 135-147. [Consult. 5 Mai. 2013]. Disponível em: <http://link.springer.com/chapter/10.1007/BFb0053680>. ISBN 978-3-540-69109-9.

HARSHA, Pavithra – **Mitigating Airport Congestion: Market Mechanisms and Airline Response Models** [Em linha]. Massachusetts: Massachusetts Institute of Technology. 2009. Tese de doutoramento. [Consult. 10 Jul. 2013]. Disponível em: <http://dspace.mit.edu/bitstream/handle/1721.1/46387/427548093.pdf>.

HERODOTUS – **Histories: Herodotus with an English translation** [Em linha]. Trad. Alfred Dennis Godley. Cambridge. Harvard University Press, Vol.1, Cap. 196 (1920). [Consult. 25 Mar. 2013]. Disponível em: <http://www.perseus.tufts.edu/hopper/text?doc=Hdt.+1.196&fromdoc=Perseus:text:1999.01.0126>.

KALAGNANAN, Jayant; PARKES, David - Auctions, Bidding and Exchange Design. In **Handbook of Quantitative Supply Chain Analysis: Modeling in the E-Business Era** [Em linha]. Eds. David Simchi-Levi, S. David Wu, Zuo-Jun Shen. Boston: Kluwer, (2004), p. 143-212 [Consult 15 Mai. 2013]. Disponível em: http://dash.harvard.edu/bitstream/handle/1/4045845/Kalagnanam_Auctions.pdf?sequence=2. ISBN 978-1-4020-7953-5.

KARP, Richard M. – Reducibility among combinatorial problems. In Complexity of Computer Computations. Proceedings of a symposium on the Complexity of Computer Computations at the IBM Thomas J. Watson Research Center [Em linha]. Eds. Raymond. E. Miller, James W. Thatcher, Jean D. Bohlinger. New York: Plenum Press. (1972), p. 85-103 [Consult. 15 Ago. 2013]. Disponível em: <http://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4684-2001-2/page/1>. ISBN 978-1-4684-2001-2.

LÓPEZ, Beatriz; SUÁREZ, Silvia; DE LA ROSA, Josep L. - Task allocation in rescue operations using combinatorial auctions. In **Artificial Intelligence research and Development, Volume 100 de Frontiers in Artificial Intelligence** [Em linha]. Eds. Isabel Aguiló, Llorenç Valverde, M. Teresa Escrig. Neatherlands: IOS Press. (2003), p. 233-243 [Consult. 18 Jul. 2013]. Disponível em: <http://libra.msra.cn/Publication/5186759/task-allocation-in-rescue-operations-using-combinatorial-auctions>. ISBN 1-58603-378-6.

- MA, Zhong - **Combinatorial Auctions for Truckload Transportation Procurement**. [Em linha]. Toronto: Graduate Department of Mechanical & Industrial Engineering University of Toronto. 2008. Tese de doutoramento. [Consult. 15 Jul. 2013]. Disponível em: https://tspace.library.utoronto.ca/bitstream/1807/11230/1/Ma_Zhong_200806_PhD_thesis.pdf.
- MCAFEE, R. Preston; MCMILLAN, John – Auctions and Bidding. In **Journal of Economic Literature** [Em linha]. California: American Economic Association. Vol. 25, Nº 2 (1987), p. 699-738. [Consult. 15 Abr. 2013]. Disponível em: <http://www.jstor.org/discover/10.2307/2726107?uid=3738880&uid=2&uid=4&sid=21102647220513>. ISSN 0022 0515.
- MILGROM, Paul Robert – Auctions and Bidding: A Primer. In **Journal of Economic Perspectives** [Em linha]. Ed. Joseph E. Stiglitz. California: American Economic Association. Vol.3, Nº 3 (1989), p. 3-22 [Consult. 04 Mai. 2013]. Disponível em: <http://www.stanford.edu/~milgrom/publishedarticles/Auctions%20and%20Bidding%20Primer.pdf>. ISSN 0895-3309.
- MILGROM, Paul Robert – **Putting Auction Theory to work** [Em linha]. New York: Press. (2004). [Consult. 24 Jun. 2013]. Disponível em: <http://assets.cambridge.org/97805215/51847/sample/9780521551847ws.pdf>. ISBN 0 521 53672 3.
- MILGROM, Paul Robert - Desenhando mercados do mundo real. In **Selected Works of Joao M De Mello** [Em linha] (2011). p. 24-28. [Consult. 5 Abr. 2013]. Disponível em: http://works.bepress.com/joao_de_mello/19/.
- MORRIS, Joan; MAES, Pattie – Negotiating Beyond the Bid Price. In **Workshop Proceedings of the Conference on Human Factors in Computing Systems (CHI 2000)**. [Em linha]. The Netherlands: The Hague (2000). [Consult. 21 Mai. 2013]. Disponível em: <http://web.media.mit.edu/~joanie/sardine/CHI-Wkshp-Submission.pdf>.
- NARAHARI, Y.; DAYAMA, Pankaj - Combinatorial auctions for electronic business. In **Sadhana Academy Proceedings in Engineering Sciences** [Em linha]. Hyderabad: University of Hyderabad. Vol.30, Nº 2 e 3 (2005), p. 179-211. [Consult. 05 Jun. 2013]. Disponível em: <http://lcm.csa.iisc.ernet.in/hari/all-publications/journals-book-chapters/Combinatorial%20auctions.pdf>. ISSN 0973-7677.

- NEMHAUSER, George L.; WOLSEY, Laurance A. – **Integer and combinatorial optimization**. New York: Wiley Interscience Publications, 1988. ISBN 0-471-82819-X. p. 535-602.
- NISAN, Noam - Bidding and Allocation in Combinatorial Auctions. In **2nd ACM conference on electronic commerce**. New York: ACM, 2000. ISBN 1-58113-272-7. pp. 1-12.
- OLIVARES, Marcelo; WEINTRAUB, Gabriel, EPSTEIN, Rafael; YUNG, Daniel - Combinatorial Auctions for Procurement: An Empirical Study of the Chilean School Meals Auction. In **Management Science** [Em linha]. Vol. 58, Nº 8 (2012), p. 1458-1481. [Consult. 05 Ago. 2013]. Disponível em: <http://mansci.journal.informs.org/content/58/8/1458.full.pdf+html>. . ISSN 1526-5501
- PARKES, David Christopher – **Iterative Combinatorial Auctions: Achieving Economic and Computational Efficiency** [Em linha]. Pennsylvania: University of Pennsylvania. 2001. Tese de doutoramento. [Consult. 10 Mai. 2013]. Disponível em: <http://www.cis.upenn.edu/grad/documents/parkes-d.pdf>
- RASSENTI, Stephen; SMITH, Vernon L; BULFIN, Robert L. – A Combinatorial Auction Mechanism for Airport Time Slot Allocation. In **Bell Journal of Economics** [Em linha]. California: Rand Corporation. Vol.13, Nº 2 (1982), p. 402-417. [Consult. 10 Jun. 2013]. Disponível em: http://econpapers.repec.org/article/rjebellje/v_3a13_3ay_3a1982_3ai_3aautumn_3ap_3a402-417.htm. ISSN 0361-915X.
- ROTHKOPF, Michael H; PEREČ, Aleksandar; HARSTAD, Ronald M. - Computationally Manageable Combinatorial Auctions. In **Management Science**. [Em linha]. Vol. 44, Nº 8 (1998), p. 1131-1147. [Consult. 17 Jun. 2013]. Disponível em: <http://mansci.journal.informs.org/content/44/8.toc>. ISSN 1526-5501
- SADEDDIN, Khaled W; SERENKO, Alexander; HAYES, James – Online shopping bots for electronic commerce: the comparison of functionality and performance. In **International Journal of electronic business** [Em linha]. Olney, Bucks: Inderscience Publications. Vol. 5, Nº 6 (2007), p. 576-589. {Consult. 28 Abr. 2013}. Disponível em: <http://www.inderscience.com/info/inarticle.php?artid=16472>. ISSN 1741-5063.
- SAMORODNITZKY, Ory; TROMER, Eran; WOOL, Avishai - Analyzing Unique-Bid Auction Sites for Fun and Profit. In **20th Annual Network & Distributed System Security Symposium** [Em linha]. San Diego. (2013), [Consult. 11 Mai. 2013]. Disponível em: <http://www.internetsociety.org/doc/analyzing-unique-bid-auction-sites-fun-and-profit>.

- SANDHOLM, Tuomas - Approaches to winner determination in combinatorial auctions. In **Decision Support Systems Journal - Special issue on information and computational economics** [Em linha]. The Netherlands: Elsevier Science Publishers B. V. Amsterdam. Vol.28, Nº 1-2 (2000), p. 165-176. [Consult. 16 Mai. 2013]. Disponível em: http://www.agent.ai/doc/upload/200302/sand00_5.pdf. ISSN 0167-9236.
- SANDHOLM, Tuomas – eMediator: A Next Generation Electronic Commerce Server. In **Computational Intelligence** [Em linha]. New-Jersey: John Wiley & Sons. Vol.18, Nº4 (2002), p. 656-676. [Consult. 3 Mai. 2013]. Disponível em: <http://www.cs.cmu.edu/~sandholm/eMediator.ci.pdf>. ISSN 1467-8640.
- SANDHOLM, Tuomas - Algorithm for optimal winner determination in combinatorial auctions. In **Artificial Intelligence Journal**. [Em linha]. The Netherlands: Elsevier Science Publishers B. V. Amsterdam. Vol. 135, Nº 1-2 (2002a). p. 1-54. [Consult. 9 ago. 2013]. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S000437020100159X>. ISSN 0004-3702
- TENNENHOLTZ, Moshe – Tractable combinatorial auctions and b-matching. In **Artificial Intelligence Journal**. [Em linha]. The Netherlands: Elsevier Science Publishers B.V. Amsterdam. Vol 140, Nº 1-2 (2002). P. 231-243. [Consult. 28 Ago. 2013]. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0004370202002291>.
- THOMPSON, Arthur; STRICKLAND, A. J.; GAMBLE, John E. – The Challenges Facing eBay in 2008: Time for a change in Strategy? In **Crafting & Executing Strategy: The Quest for Competitive Advantage: Concepts and Cases**. 17th ed. New York: McGraw-Hill/Irwin, 2009. ISBN 978-0-07-353042-0. p. 277-299.
- VICKREY, William – Counterspeculation, Auctions, and Competitive Sealed Tenders. In **The Journal of Finance** [Em linha]. New-Jersey: John Wiley & Sons. Vol.16, Nº 1 (1961), p. 8-37. [Consult. 22 Abr. 2013]. Disponível em: <http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1111/j.1540-6261.1961.tb02789.x/pdf>. ISSN: 1540-6261.
- VRIES, Sven; RAKESH Vohra – Combinatorial Auctions: A Survey. In **Inform Journal on Computing** [Em linha]. Maryland: The Institute for Operations Research and the Management Sciences. Vol.15, Nº 3 (2000), p. 284-309. [Consult. 25 Mai. 2013]. Disponível em: <http://joc.journal.informs.org/content/15/3/284>. ISSN 1526-5528.
- WALRAS, Léon – Résolution des équations de la production. Loi d'établissement des prix des produits et des services. In **Éléments D'Économie Politique Pure ou Théorie de la Richesse Sociale** [Em linha]. Paris: R. Pichou et R. Durand-Auzias. Sec..III,

21me. leçon (1926), p. 216-230. [Consult. 22 Abr. 2013]. Disponível em: <http://ecocritique.free.fr/walras74.pdf>.

WALSH, William E.; WELLMAN, Michael P. - Decentralized Supply Chain Formation: A Market Protocol and Competitive Equilibrium Analysis. In **Journal of Artificial Intelligence Research** [Em linha]. California: AI Access Foundation. Vol.19. (2003), p. 513-567. [Consult. 5 Ago. 2013]. Disponível em: <http://www.jair.org/media/1213/live-1213-2219-jair.pdf>. ISSN 1076 - 9757.

WURMAN, Peter R.; WELLMAN, Michael P; WALSH, William E. - The Michigan Internet AuctionBot: A configurable auction server for human and software agents. In **Proceedings of the Second International Conference on Autonomous Agents (AGENTS-98)** [Em linha]. Ed. Katia P. Sycara; Michael Wooldridge. New York: ACM. (1998), p. 301-308. [Consult. 06 Ago. 2013]. Disponível em: <http://ai.eecs.umich.edu/people/wellman/pubs/agents98www.pdf>. ISBN 0-89791-983-1.