



INSTITUTO SUPERIOR DE ENGENHARIA DE LISBOA

Departamento de Engenharia Civil



Observação e análise do comportamento dinâmico de uma ponte pedonal

Daniel Mendes Antunes

(Licenciado em Engenharia Civil)

Trabalho Final de Mestrado para obtenção do grau de Mestre em
Engenharia Civil na Área de Especialização de Estruturas

Orientador:

Doutor Paulo Jorge Henrique Mendes, Prof Adjunto(ISEL)

Júri:

Presidente:

Mestre Cristina Ferreira Xavier de Brito Machado, Prof Adjunto (ISEL)

Vogais:

Doutor Sérgio Bruno Martins de Oliveira, Eq. Prof. Adjunto(ISEL)

Doutor Paulo Jorge Henrique Mendes, Prof. Adjunto (ISEL)

Dedicatória

*Às meus pais Victor e Lurdes
e à Rosarinho*



Agradecimentos

A realização desta dissertação de mestrado contou com importantes ajudas e apoios, que sem os quais não teria alcançado o meu sucesso. Como tal gostaria de agradecer a todos os que participaram nesta minha etapa académica e possibilitaram a sua concretização.

Ao Professor Doutor Paulo Mendes que, no seguimento de todo o trabalho, foi incansável na orientação da dissertação. Deu-me todo o apoio para a melhoria de algumas vertentes e, principalmente, por me ter guiado durante todo este percurso.

Aos meus pais por me terem facultado esta possibilidade de prosseguir com os meus estudos. Sem o seu apoio este meu percurso teria sido mais difícil de se concretizar, é devido a eles que hoje posso entregar o meu trabalho final de mestrado.

Aos meus colegas e amigos de curso, por me irem acompanhando nesta última fase, pelos bons momentos passados para descontrair do trabalho final, em especial ao Miguel Melo, Paulo Rolão, Ian Chong, Andreia Lopes e Bernardo Barradas.

Como não podia deixar de ser, à minha namorada Rosarinho pela paciência, apoio e pelos permanentes incentivos, principalmente nas horas mais decisivas do trabalho.

Aos restantes intervenientes que, diretamente ou indiretamente, estiveram presentes e que de alguma forma me ajudaram a concluir este caminho.



Resumo

Neste trabalho apresenta-se um estudo que envolve a observação e análise do comportamento dinâmico de uma ponte pedonal, através da análise e comparação de resultados de modelos numéricos e resultados experimentais obtidos com a realização de ensaios de vibrações, tendo em vista a caracterização dos parâmetros fundamentais da resposta dinâmica, designadamente frequências naturais e modos de vibração.

Numa primeira fase apresenta-se uma revisão sobre os fundamentos da abordagem clássica da dinâmica de estruturas, no domínio do tempo e da frequência, e um estudo sobre a formulação de estado, para osciladores de um grau de liberdade, que posteriormente é generalizada para sistemas de vários graus de liberdade, recorrendo-se a um modelo físico de uma viga metálica, idealizado com três graus de liberdade.

São introduzidos e discutidos os principais aspetos relacionados com a ação de peões, em pontes pedonais, e alguns procedimentos e requisitos regulamentares utilizados em projetos de obras deste tipo.

Abordam-se os conceitos essenciais à realização de ensaios dinâmicos, apresentando os principais tipos de ensaios, as metodologias e equipamentos associados, focando-se principalmente nos ensaios de vibração ambiental. Discutem-se alguns dos principais cuidados a ter no processamento da informação experimental, adquirida nesse tipo de ensaios.

São também descritos alguns métodos de identificação modal, que permitem identificar as características dinâmicas das estruturas, a partir de séries temporais de aceleração, obtidas em ensaios de vibração ambiental. A introdução desses conceitos foi baseada na aplicação a resultados gerados numericamente e obtidos experimentalmente, para o modelo físico de uma viga metálica, idealizado com três graus de liberdade.

O trabalho termina com a apresentação do estudo de caso da referida ponte pedonal, que envolve a caracterização do seu comportamento dinâmico, tendo como ponto de partida a apresentação das principais hipóteses assumidas para o desenvolvimento do modelo numérico. Segue-se uma descrição de dois ensaios de vibração ambiental, realizados com o intuito de avaliar os parâmetros modais da obra: o primeiro recorrendo a um sistema de observação clássico (sistema de aquisição de dados e sensores); e o segundo recorrendo apenas à utilização de um *Smartphone*, que pode ser interessante numa análise preliminar. Finalmente, é efetuada uma comparação entre resultados experimentais e numéricos com o intuito de calibrar o modelo numérico da estrutura.



Abstract

This work presents a study that involves the observation and analysis of a pedestrian bridge's dynamic behavior, through analysis and comparison of results from numerical models and experimental results obtained from the execution of vibration tests, in order to characterize their dynamic parameters, namely natural frequencies and modes of vibration.

In a first phase is presented a review on the main concepts of the classic approach of structural dynamics, in the time and frequency domain, and is shown a study of the state space formulation for oscillators of a single degree of freedom which is later generalized to multi degrees of freedom systems, using a physical model of a steel beam, idealized with three degrees of freedom.

The main aspects related to the pedestrian load in pedestrian bridges are introduced and discussed, as well as some procedures and codes requirements used in this type of projects.

In this work, it's also discussed the essential concepts to carry out dynamic tests, presenting the main types of these tests, methodologies and related equipment, focusing mainly on the ambient vibration tests. Additionally, some of the main cautions to be taken in the processing of experimental data, acquired in this type of tests are also discussed.

An important part of this work is the description of modal identification methods. These methods allow the identification of the dynamic characteristics of the structures, from the time series of acceleration obtained in ambient vibration tests. The introduction of these concepts was based on the application to results generated numerically and obtained experimentally, for the physical model of a steel beam, idealized with three degrees of freedom.

This work ends with the introduction of the case study of a pedestrian bridge, which involves the characterization of its dynamic behavior starting with the presentation of the main hypotheses assumed for the development of the numerical model. After will be presented a description of two ambient vibration tests carried out with the purpose of evaluating the modal parameters of these structure: first, using a classic observation system (data acquisition system and sensors); and second using only a *Smartphone*, which may be interesting as a preliminary analysis. Finally, a comparison is made between experimental and numerical results in order to calibrate the numerical model of the structure.



Palavras-Chave / Keywords

Ponte pedonal / Footbridge

Dinâmica de estruturas / Structural dynamics

Ensaio de vibração ambiental / Ambient vibration tests

Identificação modal / Modal identification

Comportamento dinâmico / Dynamic behaviour

Modelo numérico / Numerical models



Índice

1	Introdução.....	1
1.1	Enquadramento.....	1
1.2	Objetivos.....	2
1.3	Organização do trabalho.....	4
2	Fundamentos da Dinâmica de Estruturas.....	7
2.1	Considerações iniciais.....	7
2.2	Excitação Determinística.....	8
2.2.1	Oscilador de 1 grau de liberdade.....	8
2.2.2	Oscilador de N graus de liberdade.....	13
2.3	Excitação Estocástica.....	20
2.3.1	Conceitos de estatística e de processos estocásticos.....	21
2.3.2	Funções densidade espectral de resposta.....	24
2.4	Formulação de estado.....	26
2.4.1	Oscilador de 1 grau de liberdade.....	26
2.4.2	Osciladores de N graus de liberdade.....	28
2.5	Geração de séries temporais de aceleração.....	31
2.6	Considerações Finais.....	31
3	Vibrações induzidas por peões.....	33
3.1	Considerações iniciais.....	33
3.1.1	Caracterização das ações.....	34
3.1.2	Componentes da ação pedonal.....	35
3.2	Procedimento de dimensionamento.....	37
3.2.1	Design of lightweight footbridges for human induced vibrations (EUR 23984).....	38
3.3	Estado Limite de vibração.....	42
3.3.1	Eurocódigos.....	43
3.3.2	British Standard.....	43
3.3.3	Ontario Highway Bridge Design Code.....	44

3.3.4	Comparação.....	44
3.4	Controlo de vibrações.....	45
3.4.1	Alteração da massa da estrutura.....	46
3.4.2	Alteração da rigidez da estrutura.....	46
3.4.3	Alteração do amortecimento estrutural.....	46
3.5	Considerações Finais	48
4	Metodologias de Ensaios de vibração.....	49
4.1	Considerações iniciais	49
4.2	Tipos de ensaios dinâmicos.....	49
4.2.1	Ensaios de vibração forçada	50
4.2.2	Ensaios de vibração livre	51
4.2.3	Ensaios de vibração ambiental	52
4.3	Monitorização dinâmica permanente	52
4.4	Preparação e realização de ensaios de vibração ambiental	53
4.4.1	Equipamentos de ensaio.....	54
4.4.2	Planeamento de ensaios de vibração ambiental.....	57
4.4.3	Pré-análise das séries temporais de aceleração	60
4.4.4	Processamento das séries temporais de aceleração.....	62
4.5	Considerações Finais	65
5	Métodos de Identificação Modal	67
5.1	Considerações iniciais	67
5.2	Métodos no domínio da frequência	68
5.2.1	Funções de densidade espectral de potência de resposta	68
5.2.2	Método básico no domínio da frequência.....	73
5.2.3	Método de decomposição no domínio da frequência	81
5.3	Métodos no domínio do tempo	93
5.4	Análise do modelo físico de uma viga metálica.....	95
5.4.1	Descrição do modelo	96
5.4.2	Modelo numérico	96
5.4.3	Ensaios de vibração ambiental.....	98

5.4.4	Identificação modal.....	99
5.4.5	Comparação de Resultados	103
5.5	Considerações Finais	106
6	Estudo de Caso: Ponte Pedonal.....	109
6.1	Considerações iniciais	109
6.2	Descrição da ponte	110
6.3	Modelação da estrutura.....	113
6.3.1	Especificidades do modelo.....	114
6.3.2	Resultados do Modelo.....	118
6.4	Ensaio de vibração ambiental.....	119
6.4.1	Equipamentos de medição.....	120
6.4.2	Pontos instrumentados	120
6.4.3	Pré-processamento das histórias de aceleração	121
6.5	Identificação modal	122
6.5.1	Processamento inicial das histórias de aceleração.....	123
6.5.2	Método de decomposição no domínio da frequência	123
6.6	Ensaio Experimental com Smartphone	126
6.6.1	Preparação do ensaio e histórias de aceleração.....	127
6.6.2	Identificação das frequências.....	128
6.7	Comparação de resultados.....	130
6.7.1	Comparação de frequências naturais.....	131
6.7.2	Comparação das configurações modais.....	131
6.8	Considerações finais.....	132
7	Conclusões e Perspetivas Futuras.....	135
7.1	Principais conclusões	135
7.2	Perspetivas futuras.....	137
8	Referências Bibliográficas	139



Simbologia

Latinas maiúsculas

A	Amplitude
\underline{A}	Matriz dos coeficientes de estado (solução da eq. de estado – fórmula recursiva)
$\underline{A}_{(mck)}$	Matriz de estado que contém as matrizes de massa, amortecimento e rigidez
$\underline{A}_{(mc)}$	Sub-matriz de estado que contém as matrizes de massa e amortecimento
$\underline{A}_{(mk)}$	Sub-matriz de estado que contém as matrizes de massa e rigidez
\underline{B}	Matriz dos coeficientes de entrada (solução da eq. de estado – fórmula recursiva)
C_{xx}	Auto-covariância
E	Módulo de Elasticidade
$F(\omega)$	Transformada de Fourier de $f(t)$
\mathcal{F}	Transformada de Fourier
$H(\omega)$	Função de resposta em frequência de um oscilador de 1 grau de liberdade
I	Parte imaginária de uma função complexa
L	Comprimento
R	Parte real de uma função complexa
\underline{R}	Matriz das funções de correlação da resposta
R_{xx}	Auto-correlação
\underline{S}	Matriz das funções das funções de densidade espectral de potência
$\underline{S}_u \omega$	Matriz das funções de densidade espectral da resposta da estrutura
$\underline{S}_p \omega$	Matriz das funções de densidade espectral de excitação
$U(\omega)$	Transformada de Fourier de $u(t)$
\underline{V}	Vetor de velocidade na formulação de estado
\underline{X}	Vetor de estado

Latinas minúsculas

c	Amortecimento
\underline{f}	Vetor das forças
\underline{f}^*	Vetor das forças nodais
f_N	Frequência natural

f_s	Frequência de amostragem
k	Rigidez
$\underline{\mathbf{k}}$	Matriz de rigidez
$\underline{\mathbf{k}}^*$	Matriz da rigidez modal
$\underline{\mathbf{k}}^e$	Matriz de rigidez de um elemento finito
m	Massa específica (kg/m ³)
$\underline{\mathbf{m}}$	Matriz de massa
$\underline{\mathbf{m}}^*$	Matriz de massa modal
$\underline{\mathbf{m}}^e$	Matriz de massa de um elemento finito
s_t	Desvio padrão
s_t^2	Variância
$\underline{\mathbf{u}}$	Vetor de deslocamentos
$\underline{\dot{\mathbf{u}}}$	Vetor de velocidades
$\underline{\ddot{\mathbf{u}}}$	Vetor de acelerações
$\underline{\dot{\mathbf{v}}}$	Vetor de acelerações na formulação de estado
$\underline{\mathbf{x}}^*$	Vetor das coordenadas modais de estado
\bar{x}_t	Média
\bar{x}_t^2	Valor quadrático médio

Gregas maiúsculas

$\underline{\Phi}$	Matriz modal
$\underline{\Phi}_E$	Matriz modal no espaço de estados
$\underline{\Psi}$	Matriz dos vetores próprios

Gregas minúsculas

α	Constante de amortecimento de <i>Rayleigh</i>
β	Constante de amortecimento de <i>Rayleigh</i>
δ	Decremento logarítmico
$\underline{\xi}$	Vetor das deformações
ϕ	Vetor modal
ϕ_E	Vetor modal no espaço de estados
φ	Vetor dos deslocamentos virtuais
γ^2	Função de coerência
λ	Valores próprios de um sistema
λ_E	Valores próprios de um sistema no espaço de estados
ω_N	Frequência angular natural (rad/s)
ω_A	Frequência angular amortecida (rad/s)

τ	Instante genérico
$\vec{\sigma}$	Vetor das tensões
ξ	Coefficiente de amortecimento relativo

Abreviaturas (siglas)

ANPSD	<i>Average Normalized Power Spectral Density</i>
BFD	Método básico no domínio da frequência
CMIF	<i>Complex Mode Identification Function</i>
DEP	Densidade espectral de potência
EFDD	Método melhorado de decomposição no domínio da frequência
FDD	Método de decomposição no domínio da frequência
FFT	Transformada rápida de Fourier
FRF	Função de resposta em frequência
GL	Grau de liberdade
IFFT	Inversa da Transformada de Fourier
MAC	<i>Modal Assurance Criterion</i>
MEF	Método dos Elementos Finitos
NPSD	<i>Normalized Power Spectral Density</i>
SVD	Decomposição em Valores Singulares



1 Introdução

1.1 Enquadramento

A partir do momento em que o Homem deixou de ser nómada, tornou-se indispensável explorar as zonas vizinhas para aproveitar os seus recursos. Dessa forma, com o intuito de facilitar a sua exploração, surgiu a necessidade de ultrapassar os obstáculos naturais, como cursos de água ou vales com recurso às primeiras pontes. Estas obras de arte, que inicialmente eram construídas recorrendo a materiais de fácil acesso na natureza, foram-se desenvolvendo à medida que evoluía a sociedade, as tecnologias e os materiais utilizados na construção.

O grande desenvolvimento das cidades, em especial devido às linhas rodoviárias e ferroviárias, originou obstáculos à mobilidade pedonal que, por sua vez, criou a necessidade da construção de acessos pedonais para evitar esses obstáculos.

As pontes pedonais têm como principal função ligar dois ou mais pontos, ultrapassando superiormente obstáculos, o que permite encurtar distâncias e, conseqüentemente, melhorar os acessos pedonais, tal como é possível verificar na Figura 1.1. Em alguns casos, a este tipo de pontes é também acrescentada uma função de ciclovia, permitindo a passagem de bicicletas.



Figura 1.1 – Exemplos de pontes pedonais: a) Ponte pedonal sobre a segunda circular; b) Ponte pedonal na Avenida Marechal Gomes da Costa.

As pontes pedonais diferenciam-se dos restantes tipos de pontes, particularmente pela forma como interagem com os seus utilizadores. Neste tipo de pontes, os utilizadores encontram-se diretamente sobre o tabuleiro durante períodos de tempo relativamente maiores, o que os leva a sentirem diretamente os movimentos da estrutura, estando mais conscientes do seu comportamento estrutural.

A sua conceção, geralmente, não levanta grandes preocupações em termos das cargas que lhe estarão aplicadas, quando comparados com outros tipos de pontes, o que

resulta em estruturas mais esbeltas e flexíveis e, conseqüentemente, maiores problemas de vibrações quando sujeitas a ações dinâmicas, convertendo-se, assim, no principal desafio na idealização destas obras de arte.

A caracterização e análise do comportamento de estruturas, quando sujeitas a ações dinâmicas, tem evidenciado grandes e constantes evoluções, motivadas, não só, pela necessidade de compreender esse funcionamento estrutural quando estão sob ações sísmicas, mas também pelo desenvolvimento dos materiais usados na construção civil, que levam a soluções inovadoras, obrigando ao seu total conhecimento. Assim, a dinâmica de estruturas torna-se uma ferramenta indispensável para caracterizar adequadamente o comportamento estrutural.

Segundo Mendes & Oliveira (2008), estas evoluções constantes são resultado dos desenvolvimentos ao nível das tecnologias que permitem a observação do comportamento dinâmico de estruturas reais, ao nível das metodologias de identificação modal e ao nível dos modelos computacionais para simulação e interpretação do comportamento dinâmico.

1.2 Objetivos

Atendendo às conseqüências que podem resultar de ações dinâmicas em pontes pedonais, torna-se bastante importante estudar e compreender o comportamento das estruturas quando sujeitas a este tipo de ações. Nesse âmbito, a dissertação contempla a análise da resposta dinâmica de uma ponte pedonal, passando por um conjunto de objetivos intermédios, descritos de seguida:

- Rever os principais fundamentos da dinâmica de estruturas, aplicados ao estudo de sistemas com um grau de liberdade, no domínio do tempo e da frequência, por forma a generalizá-los para sistemas com mais do que um grau de liberdade;
- Introduzir a formulação de estado para a análise dinâmica de estruturas, como uma alternativa à formulação clássica, com evidentes mais valias no que respeita à consideração do amortecimento na análise do comportamento dinâmico;
- Concretizar a abordagem aos conceitos referidos anteriormente, recorrendo a um exemplo de um modelo físico simples (ver Figura 1.2), por forma a facilitar a explicação desses fundamentos da dinâmica de estruturas;
- Discutir as questões de projeto/regulamento que devem ser consideradas, quer no projeto de novas obras, quer na verificação das condições de segurança estrutural, utilização e conforto para os utentes, evidenciando-se sempre os aspetos relevantes para o comportamento dinâmico;
- Abordar os conceitos fundamentais, relacionados com a realização de ensaios de vibrações, onde se descrevem os tipos de ensaios, o seu planeamento, as suas metodologias e os diversos equipamentos que se podem utilizar (sistemas de

-
- adquirição de dados e sensores), e se discutem as principais tarefas associadas às fases de pré-processamento e processamento dos dados obtidos a partir dos ensaios (histórias de acelerações);
- Realizar ensaios de vibração ambiental para caracterizar o comportamento dinâmico da ponte pedonal em estudo, com um sistema de observação clássico (sistema de aquisição de dados e sensores) e com *Smartphones*;
 - Implementar um modelo numérico em SAP2000 (CSI, 2017) com o intuito de analisar o comportamento dinâmico da ponte pedonal;
 - Estudar os principais métodos de identificação modal no domínio da frequência: método básico no domínio da frequência (BFD), método da decomposição no domínio da frequência (FDD) e a sua versão melhorada (EFDD);
 - Efetuar um estudo introdutório do método SSI-COV, um método de identificação modal no domínio do tempo;
 - Desenvolver rotinas em MATLAB (MathWorks, 2015) para:
 - o estudar o comportamento dinâmico de modelos estruturais simples no domínio do tempo e da frequência;
 - o implementar metodologias de identificação modal (no domínio do tempo e da frequência) nomeadamente para análise dos resultados experimentais;
 - Comparar resultados numéricos (de modelos obtidos com o SAP2000) com resultados experimentais (utilizando as rotinas de MATLAB), em termos de frequências naturais e das respetivas configurações modais, com vista à calibração dos modelos numéricos;

Com o intuito de validar e calibrar as rotinas desenvolvidas em MATLAB para o caso das metodologias de identificação modal, concebeu-se um modelo físico de uma viga encastrada-apoiada, apresentado na Figura 1.2, de forma a permitir comparar os resultados experimentais com os resultados obtidos no modelo numérico elaborado.

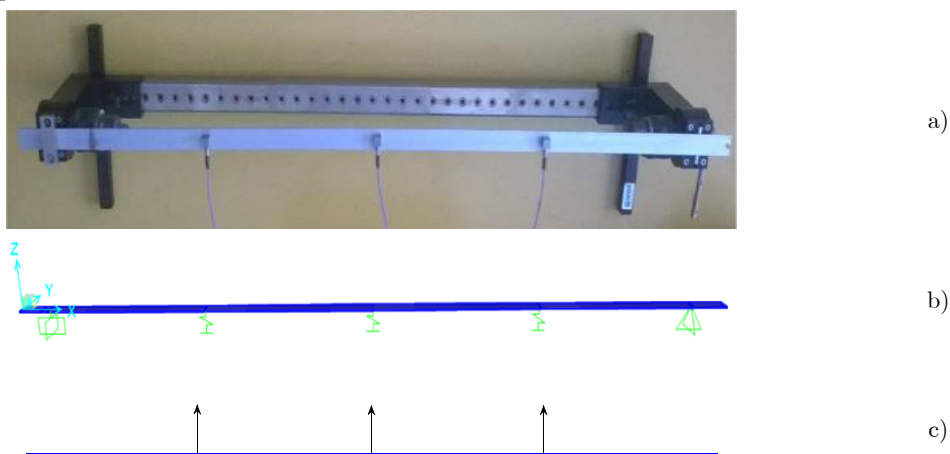


Figura 1.2 – Estudo de caso: a) Modelo físico de uma viga encastrada-apoiada; b) Modelo numérico desenvolvido no programa SAP2000; c) Modelo de suporte à análise experimental, desenvolvido em MATLAB.

Desta forma, o presente trabalho tem como principal objetivo caracterizar o comportamento dinâmico de uma ponte pedonal (ver Figura 1.3), utilizando os parâmetros modais (frequências naturais e modos de vibração) identificados experimentalmente, através da realização de ensaios de vibrações, e comparando-os com resultados de um modelo numérico, com vista à sua calibração tendo por base esses parâmetros.

Neste contexto, procura-se ainda mostrar as potencialidades que o uso de *smartphones* pode oferecer numa caracterização experimental preliminar deste tipo de estruturas extremamente flexíveis.

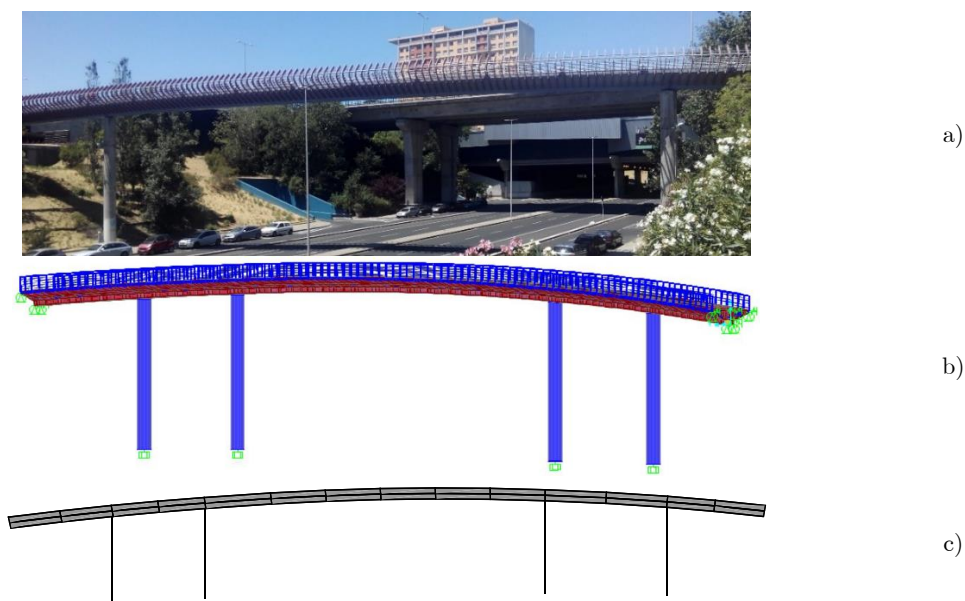


Figura 1.3 – Estudo de caso: a) Ponte pedonal em estudo; b) Modelo numérico desenvolvido no programa SAP2000; c) Modelo de suporte à análise experimental, desenvolvido em MATLAB.

1.3 Organização do trabalho

O presente trabalho final de mestrado está organizado em 7 capítulos, apresentando-se, de seguida, um breve resumo de cada um deles.

- **Capítulo 1 - Introdução**

Consiste no capítulo onde o tema é enquadrado, onde se estabelecem os objetivos e onde se apresenta a organização do documento. São abordados os critérios gerais necessários para elaborar o projeto a que o aluno se propõe.

- **Capítulo 2 – Fundamentos da dinâmica de estruturas**

São apresentados os principais fundamentos para a modelação matemática do comportamento dinâmico de estruturas, abordando inicialmente o desenvolvimento da equação do movimento para estruturas com um grau de liberdade em vibração livre, com

o intuito de determinar as frequências naturais de vibrações desses sistemas e, de seguida, faz-se uma generalização desses fundamentos para sistemas com mais que um grau de liberdade. Para complementar estes fundamentos, recorreu-se a modelos físicos simplificados para confirmar os resultados.

- **Capítulo 3 – Vibrações induzidas por peões**

Neste capítulo procura-se identificar quais os limites regulamentares em termos de vibrações excessivas para este tipo de estruturas, de forma a que no final da dissertação se possa verificar a funcionalidade, ou não, da estrutura.

- **Capítulo 4 – Metodologias de ensaios de vibrações**

Descrição dos ensaios de vibrações e dos principais conceitos associados à sua execução, explicitando os equipamentos e o planeamento destas atividades. Segue-se ainda o tratamento desses dados, bem como a sua discussão e validação.

- **Capítulo 5 – Métodos de identificação modal**

No seguimento do capítulo 2, este capítulo descreve métodos que procuram identificar os parâmetros modais das estruturas a partir de dados experimentais obtidos de ensaios de vibração, baseados nas formulações apresentadas.

- **Capítulo 6 – Estudo de caso: Ponte Pedonal**

Neste capítulo, procede-se ao estudo dinâmico da estrutura em análise, ou seja, a ponte pedonal, obtendo os seus parâmetros modais, que são posteriormente comparados com um modelo numérico simples de elementos finitos 3D, onde se admite a hipótese de comportamento elástico linear.

- **Capítulo 7 – Conclusões e perspetivas futuras**

São apresentadas as principais conclusões obtidas com a realização deste trabalho, identificando também algumas propostas para desenvolvimentos futuros.



2 Fundamentos da Dinâmica de Estruturas

2.1 Considerações iniciais

Na generalidade das estruturas de engenharia civil, a análise estática torna-se suficiente para caracterizar e analisar o seu comportamento estrutural. No entanto, a utilização de novos materiais e a adoção de soluções inovadoras e cada vez mais esbeltas, impulsionou a necessidade de conhecer melhor o comportamento dinâmico das estruturas, sendo considerada por variados autores como uma extensão da análise estática. Esta análise engloba todas as solicitações que variam ao longo do tempo, baseando-se num conjunto de fundamentos usualmente descritos em aplicações a modelos estruturais com um ou vários graus de liberdade (Chopra, 2001; Clough & Penzien, 2003).

A análise dinâmica depende do conhecimento, ou não, da lei de variação da ação dinâmica no tempo, podendo esta ser caracterizada segundo duas vias distintas:

- i) via Determinística, caso a variação temporal da excitação seja perfeitamente conhecida, sendo possível estabelecer relações entre a ação e a resposta;
- ii) via Estocástica, caso a variação temporal da ação seja de natureza aleatória, esta pode ser caracterizada através de conceitos probabilísticos.

Na caracterização do comportamento dinâmico de uma estrutura exige-se uma adequada idealização das ações atuantes, um conhecimento profundo das propriedades geométricas e mecânicas dos elementos estruturais e a definição de um modelo matemático que permita obter, de forma o mais rigorosa possível, as principais características da resposta da estrutura, em função da excitação. Devido à elevada complexidade da realidade, são realizadas algumas simplificações, o que resulta num modelo matemático que não traduz de forma perfeita a realidade, mas sim de forma bastante aproximada (Magalhães, 2004; Mendes & Oliveira, 2008).

Neste capítulo são abordados vários modelos matemáticos que podem ser utilizados para caracterizar o comportamento dinâmico de estruturas, começando pelo estudo e compreensão de sistemas de 1 grau de liberdade, no domínio do tempo e da frequência, generalizando, de seguida, para sistemas de vários graus de liberdade. Recorrendo a modelos simples, neste caso vigas por serem similares aos modelos estruturais idealizados para as estruturas de pontes (em estudo neste trabalho), são exemplificados os procedimentos descritos anteriormente, através do desenvolvimento de rotinas em MATLAB (MathWorks, 2015), otimizando, assim, a aprendizagem dos conceitos abordados.

São também abordados métodos alternativos à formulação clássica e menos usados em engenharia civil, como a formulação de estado para sistemas com um ou mais graus

de liberdade, que considera amortecimento não proporcional à massa e rigidez. Este método é também importante para a abordagem e compreensão dos métodos de identificação modal no domínio do tempo, apresentados no capítulo 5.

2.2 Excitação Determinística

A formulação clássica consiste na caracterização do comportamento dinâmico de estruturas com base numa excitação do tipo determinística. Trata-se de um processo utilizado quando se pretende determinar a resposta dinâmica em função de excitações já conhecidas, adotando modelos matemáticos adequados, que têm em consideração as propriedades mecânicas, geométricas e físicas da estrutura.

Recorre-se a este processo, também, quando se pretende caracterizar a resposta dinâmica através de dados experimentais que se baseiam em relações excitação-resposta, a partir das quais é possível avaliar as características dinâmicas das estruturas.

2.2.1 Oscilador de 1 grau de liberdade

Os sistemas estruturais são idealizados recorrendo a matrizes de massa e rigidez definidas pelas suas características físicas e geométricas, assumindo-se a hipótese de comportamento elástico linear do material, mantendo essas características ao longo do tempo.

Um oscilador de um grau de liberdade designa um sistema que é possível reduzir a uma massa concentrada, uma mola e um amortecedor. Estes osciladores consistem em sistemas compostos por forças de inércia $F_i(t)$, forças de amortecimento $F_a(t)$, forças elásticas $F_e(t)$ e forças externas $f(t)$. Para estruturas, estas forças são, geralmente, idealizadas como a massa do sistema, o seu amortecimento e a sua rigidez, tal como está representado na Figura 2.1.

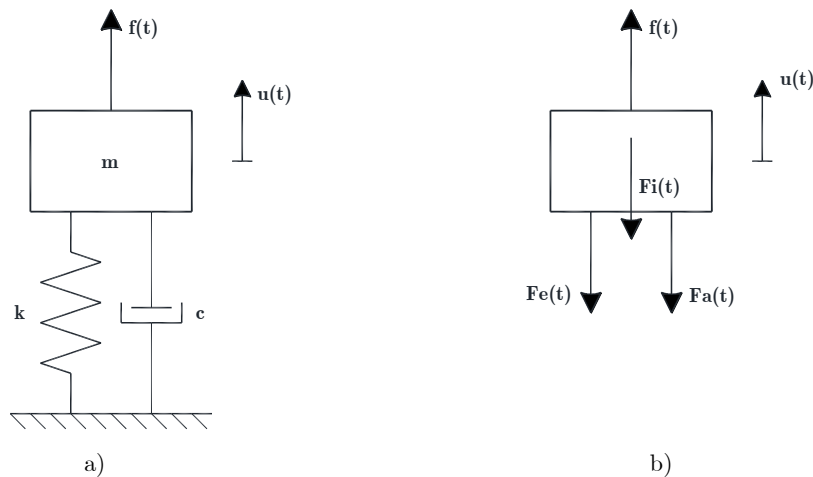


Figura 2.1 -Sistema de 1GL: a) modelo usualmente idealizado; b) diagrama de corpo livre.

O movimento deste oscilador pode, então, ser definido pela equação (2.1), que é denominada por Equação Diferencial do Movimento e depende de fatores intrínsecos da estrutura como a sua rigidez (k), massa (m) e amortecimento (c):

$$m \cdot \ddot{u}(t) + c \cdot \dot{u}(t) + k \cdot u(t) = f(t) \quad (2.1)$$

Assim, a equação (2.1) relaciona os valores do deslocamento (u), velocidade (\dot{u}) e aceleração (\ddot{u}) (em que os dois últimos representam a primeira e segunda derivada do deslocamento, respectivamente) com as características da estrutura, referidas anteriormente, e com as forças externas que estão aplicadas ao sistema.

No caso de uma força contínua com variação aleatória, a solução desta equação diferencial pode ser obtida seguindo dois procedimentos distintos:

- Análise no domínio do tempo;
- Análise no domínio da frequência.

2.2.1.1 Análise no domínio do tempo

No domínio do tempo, a resposta de uma estrutura, quando sujeita a uma ação dinâmica, é obtida recorrendo à decomposição da excitação em impulsos, para os quais se determina as respostas dinâmicas que, posteriormente, são sobrepostas para obter a resposta final.

Segundo Mendes (2012), ao analisar a resposta de uma estrutura, com deslocamento e velocidade inicial nulos, a um impulso unitário instantâneo, num instante genérico τ , é possível chegar à expressão:

$$h(t - \tau) = \frac{1}{m \cdot \omega_A} \cdot \text{sen}(\omega_A \cdot (t - \tau)) \cdot e^{-\xi \cdot \omega_N \cdot (t - \tau)} \quad (2.2)$$

Em termos genéricos a resposta a uma força impulsiva de intensidade f_0 , é dada pela expressão (2.3):

$$u_p(t) = f_0 \cdot h(t - \tau) \quad (2.3)$$

Assim, a Figura 2.2 consiste na representação desta expressão, isto é, traduz a resposta a uma força impulsiva unitária aplicada num instante genérico:

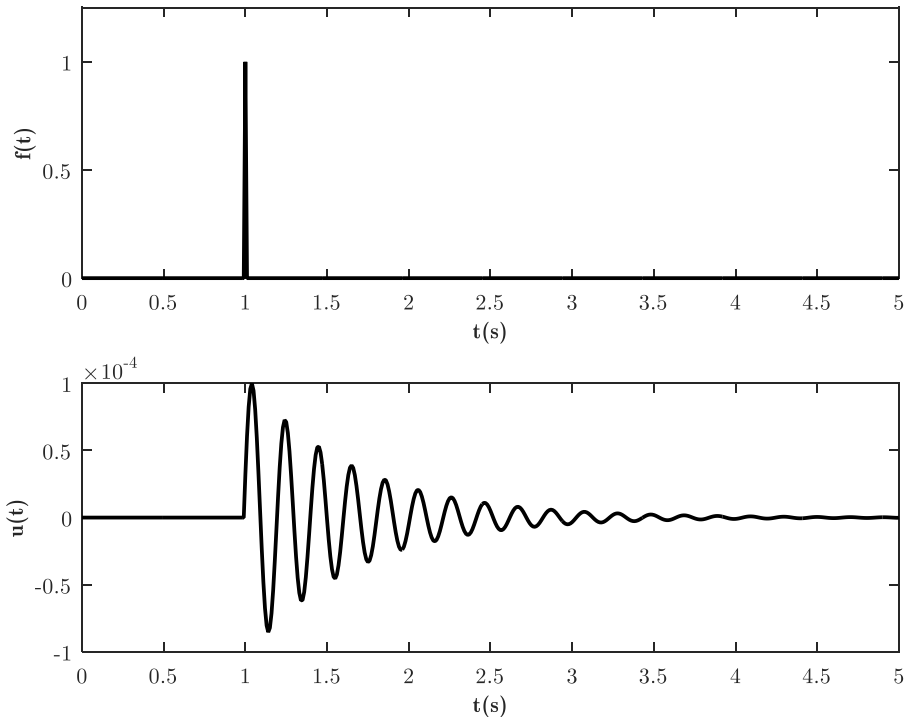


Figura 2.2 – Representação de um impulso unitário: a) Força impulsiva unitária aplicada num instante genérico; b) Respetiva resposta de um sistema de 1GL.

Concretizando o princípio da sobreposição de efeitos, a resposta a uma sequência de impulsos de intensidade diferentes, aplicados em instantes sucessivos, pode ser obtida somando a resposta a cada um desses impulsos (Mendes, 2012). Considerando uma força aleatória, com impulsos infinitamente próximos ao longo do tempo, e o princípio da sobreposição de efeitos, obtém-se a resposta de uma estrutura aplicando um integral, neste caso, o integral de Duhamel, ou de convolução, que é dado pela equação (2.4).

$$u_p(t) = \int_0^t f(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau \quad (2.4)$$

Concretiza-se assim a análise da resposta aos impulsos no domínio do tempo. Para uma melhor compreensão dos conceitos apresentados, é utilizado como exemplo o modelo físico de uma viga simplesmente apoiada, constituída por uma lamina de aço com uma secção de $0,002 \times 0,02$ (m), e um comprimento de 0,6 metros, tal como mostra a Figura 2.3.

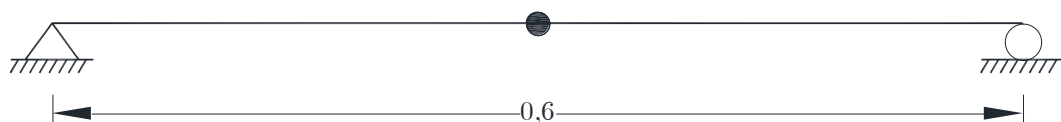


Figura 2.3 – Idealização do modelo físico da estrutura de um GL.

O primeiro passo na análise deste exemplo, consiste em determinar a massa, rigidez e amortecimento ao nível do grau de liberdade estudado. Para tal, considerou-se um modulo de elasticidade de $E=210$ GPa e um peso específico de aproximadamente 77kN/m^3 .

Assim, na determinação da massa assume-se um contributo de 50% do peso próprio da lamina uma vez que o restante é atribuído diretamente aos apoios, resultando numa massa de 0,2358 kg. Para o cálculo da rigidez determinou-se a inércia na direção mais flexível e utilizando um coeficiente de rigidez de $48EI/L^3$, obtendo-se assim um total de 777,78 N/m.

Uma vez determinados os valores da massa e da rigidez, torna-se possível calcular a frequência angular natural e, conseqüentemente, a frequência natural, obtendo-se os valores indicados na expressão (2.5).

$$\omega_N = 81,222 \text{ rad / s} ; f_N = 12,927 \text{ Hz} \quad (2.5)$$

2.2.1.2 Análise no domínio da frequência

Também denominada por análise espectral, a análise no domínio da frequência constitui uma alternativa à análise no domínio do tempo e consiste numa decomposição da excitação em ondas sinusoidais de amplitude e frequências variáveis (Mendes, 2012).

A transferência para o domínio da frequência ocorre, caso sejam consideradas condições iniciais nulas, aplicando da transformada de Fourier a cada um dos membros da equação. Caso contrário, ou seja, caso as condições iniciais não sejam nulas, deve aplicar-se a transformada de Laplace.

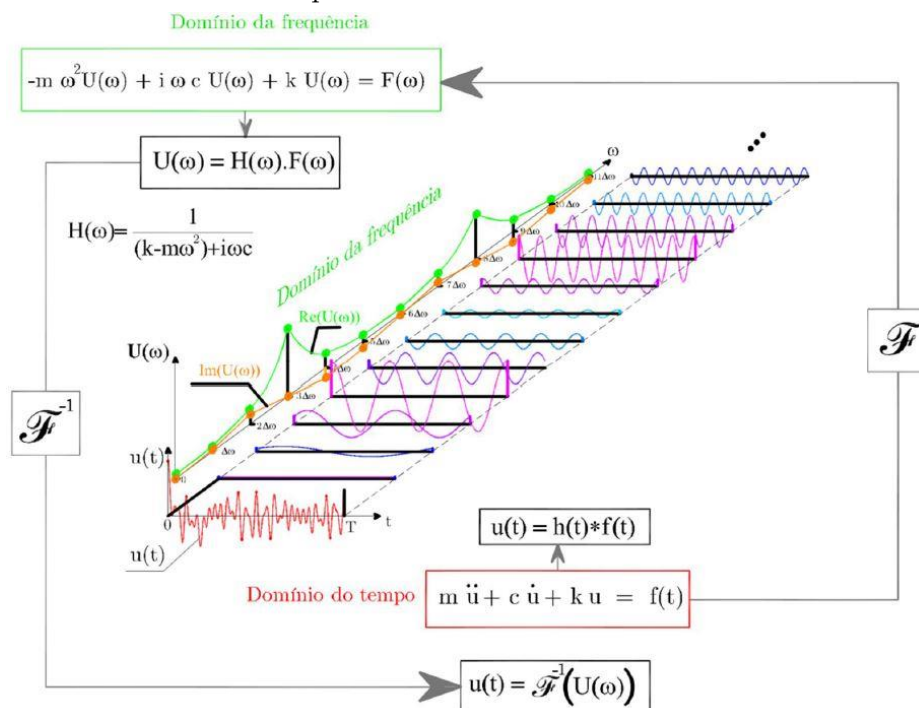


Figura 2.4 – Esquema representativo da transformada de Fourier para converter a equação diferencial da dinâmica, definida no domínio do tempo, numa equação algébrica (complexa), definida no domínio da frequência (adaptado de Oliveira (2007); Mendes (2010))

Assim, para obter a transformada de Fourier da derivada da função $f(t)$ basta multiplicar a Transformada de Fourier da função por $i\omega$, transformando a equação diferencial da dinâmica numa equação algébrica (complexa) de fácil resolução.

$$\mathcal{F}(m \cdot \ddot{u}(t) + c \cdot \dot{u}(t) + k \cdot u(t)) = \mathcal{F}(f(t)) \quad (2.6)$$

$$-m \cdot \omega^2 \cdot U(\omega) + i \cdot c \cdot \omega \cdot U(\omega) + k \cdot U(\omega) = F(\omega) \quad (2.7)$$

Desta forma, é possível escrever a expressão anterior, em função de $U(\omega)$, tal como apresentado na equação (2.8).

$$U(\omega) = H(\omega) \cdot F(\omega) \quad (2.8)$$

Em que:

$$H(\omega) = \frac{1}{(k - m\omega^2) + ic\omega} = \frac{1/m}{(\omega_N^2 - \omega^2) + i(2\xi\omega_N\omega)} \quad (2.9)$$

Tal como refere Mendes (2012), $H(\omega)$ representa a função de resposta em frequência (FRF), composta por uma componente real R e uma componente imaginária I , e caracteriza o comportamento do oscilador. Assim, para um oscilador com uma frequência natural ω_N e um coeficiente de amortecimento variável, tem-se que a amplitude é dada por $\sqrt{R^2 + I^2}$ e a fase por $\arctg(I/R)$.

Para os parâmetros do modelo de 1GL apresentados anteriormente, empregou-se este procedimento, através de rotinas desenvolvidas em MATLAB (MathWorks, 2015), com o objetivo de determinar a sua FRF, considerando valores de amortecimento de 1% e 5%.

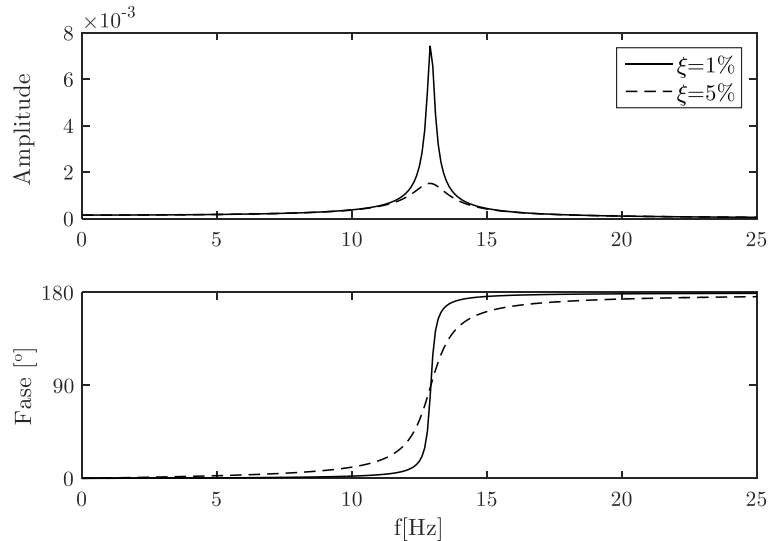


Figura 2.5 – Funções de Resposta em Frequência (FRF) para a estrutura exemplo de 1 GL.

Observando o gráfico facilmente se identifica de forma aproximada a frequência natural da estrutura que corresponde à frequência associada à máxima amplitude e à mudança de fase. É ainda possível concluir que quanto menor for o coeficiente de amortecimento, mais aguçado será o pico e mais suave será a transição de fase.

A Tabela 2.1 consiste num resumo das duas formulações apresentadas até agora para a resolução da equação dinâmica em modelos de apenas 1 grau de liberdade, isto é, resolução através do domínio do tempo e da frequência.

Tabela 2.1 - Paralelismo entre a formulação clássica no domínio do tempo e da frequência, para modelos de 1GL. (Adaptado de Mendes, 2010)

RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DA DINÂMICA. MODELOS COM 1 GL (Condições iniciais nulas*)	
Domínio do tempo	Domínio da frequência
<p>Equação Diferencial</p> $m \cdot \ddot{u}(t) + c \cdot \dot{u}(t) + k \cdot u(t) = f(t)$	<p>Equação algébrica (complexa)</p> $\mathcal{F} \{ m \cdot \ddot{u}(t) + c \cdot \dot{u}(t) + k \cdot u(t) \} = \mathcal{F} \{ f(t) \}$ $-m\omega^2 U(\omega) + ic\omega U(\omega) + kU(\omega) = F(\omega)$
<p>Solução</p> <p>(Produto de convolução de funções reais)</p> $u(t) = h(t) * f(t)$ $h(t) = \frac{1}{m \cdot \omega_A} \cdot \text{sen}(\omega_A \cdot t) \cdot e^{-\xi \cdot \omega_N \cdot t}$	<p>Solução</p> <p>(Produto de funções complexas)</p> $U(\omega) = H(\omega) F(\omega)$ $H(\omega) = \frac{1}{(k - m\omega^2) + ic\omega}$
$u(t) = \mathcal{F}^{-1} \{ U(\omega) \}$ $U(\omega) = \mathcal{F} \{ u(t) \}$	
<p>*Para condições iniciais não nulas utiliza-se a transformada de Laplace em vez da transformada de Fourier.</p>	

2.2.2 Oscilador de N graus de liberdade

De acordo com Chopra (2001), o estudo de comportamento dinâmico de estruturas discretizadas em N graus de liberdade é regido pela equação matricial (2.10), com dimensão N.

$$\underline{m} \cdot \ddot{\underline{u}}(t) + \underline{c} \cdot \dot{\underline{u}}(t) + \underline{k} \cdot \underline{u}(t) = \underline{f}(t) \quad (2.10)$$

Em que as matrizes \underline{m} , \underline{c} e \underline{k} representam as matrizes da massa, amortecimento e rigidez do oscilador, respetivamente, e os vetores $\ddot{\underline{u}}(t)$, $\dot{\underline{u}}(t)$ e $\underline{u}(t)$ contêm, respetivamente, os valores de aceleração, velocidade e deslocamento generalizados, relativos a cada grau de liberdade. Finalmente, o vetor $\underline{f}(t)$ contém as forças aplicadas em cada um dos graus de liberdade.

Tal como para os osciladores de 1GL, para os osciladores de NGL a solução para a equação mostrada anteriormente, pode ser encontrada no domínio do tempo e no domínio da frequência. No método de resolução no domínio do tempo deve ser escolhida uma discretização e método numérico adequados para resolver as equações diferenciais ordinárias, enquanto que no domínio da frequência efetua-se novamente uma transposição para o domínio da frequência, recorrendo à transformada de Laplace ou à transformada de Fourier, dependendo das condições iniciais.

Segundo Chopra (2001), frequentemente, opta-se por resolver o sistema anterior recorrendo a uma transformação de coordenadas estruturais ($\underline{u}(t)$) para coordenadas modais ($\underline{\dot{u}}(t)$), após se proceder à sua diagonalização. Essa transformação de coordenadas estruturais para modais, é efetuada utilizando a matriz modal clássica $\underline{\Phi}$, de dimensão $(N_{GL} : N_{GL})$, de acordo com a seguinte relação:

$$\underline{u}(t) = \underline{\Phi} \underline{\dot{u}}(t) \quad (2.11)$$

2.2.2.1 Análise no domínio do tempo

O estudo de sistemas com mais que um grau de liberdade é desenvolvido a partir do caso teórico de estruturas sem forças externas aplicadas e com amortecimento igual a zero, o que permite, através dos valores e vetores próprios, determinar as frequências próprias e os modos de vibração, respetivamente. Assim, a equação do movimento para a situação descrita corresponde a:

$$\underline{m} \cdot \underline{\ddot{u}}(t) + \underline{k} \cdot \underline{u}(t) = \underline{0} \quad (2.12)$$

A equação (2.12) pode também ser representada da seguinte forma:

$$-\underline{m} \cdot \omega^2 \cdot \underline{u}(t) + \underline{k} \cdot \underline{u}(t) = \underline{0} \quad (2.13)$$

Que corresponde a um sistema algébrico com uma solução genericamente dada por:

$$\underline{u}(t) = [\underline{k} - \underline{m} \cdot \omega^2]^{-1} \cdot \underline{0} \quad (2.14)$$

Atendendo que a inversa de uma matriz corresponde à matriz adjunta a dividir pelo determinante:

$$\underline{u}(t) = \frac{\text{Adj}(\underline{k} - \underline{m} \cdot \omega^2)}{|\underline{k} - \underline{m} \cdot \omega^2|} \cdot \underline{0} \quad (2.15)$$

Como pode ser facilmente verificado na equação (2.15), obter-se-á uma solução trivial sempre que o denominador for não nulo, pelo que para obter uma solução não nula, deverá ser verificada a condição:

$$|\underline{k} - \underline{m} \cdot \omega^2| = 0 \quad (2.16)$$

O sistema de equações diferenciais, descrito na expressão (2.12), é composto por equações dependentes entre si, o que complica a resolução do problema. Desta forma, é

possível simplificar a resolução do sistema fazendo a sua transformação para coordenadas modais, passando a existir equações independentes entre si. Assim, efetuando a transformação da equação (2.11) para coordenadas modais, obtém-se a equação do movimento em nessas coordenadas:

$$\underline{\underline{m}} \cdot \underline{\underline{\Phi}} \cdot \ddot{\underline{\underline{u}}}(t) + \underline{\underline{k}} \cdot \underline{\underline{\Phi}} \cdot \dot{\underline{\underline{u}}}(t) = \underline{\underline{0}} \quad (2.17)$$

Multiplicando os vários membros da equação pela transposta da matriz modal:

$$\underline{\underline{\Phi}}^T \cdot \underline{\underline{m}} \cdot \underline{\underline{\Phi}} \cdot \ddot{\underline{\underline{u}}}(t) + \underline{\underline{\Phi}}^T \cdot \underline{\underline{k}} \cdot \underline{\underline{\Phi}} \cdot \dot{\underline{\underline{u}}}(t) = \underline{\underline{0}} \quad (2.18)$$

Desta forma obtém-se um sistema de três equações diferenciais desacopladas pois as matrizes $\underline{\underline{\Phi}}^T \cdot \underline{\underline{m}} \cdot \underline{\underline{\Phi}}$ e $\underline{\underline{\Phi}}^T \cdot \underline{\underline{k}} \cdot \underline{\underline{\Phi}}$ são matrizes diagonais, usualmente designadas de matriz das massas modais e a matriz da rigidez modal.

$$\underline{\underline{m}}^* = \underline{\underline{\Phi}}^T \cdot \underline{\underline{m}} \cdot \underline{\underline{\Phi}} = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & m_i^* & \\ & & \ddots \end{bmatrix}; \underline{\underline{k}}^* = \underline{\underline{\Phi}}^T \cdot \underline{\underline{k}} \cdot \underline{\underline{\Phi}} = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & k_i^* & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Em que m_i e k_i são, respetivamente, a massa modal e a rigidez modal correspondentes ao modo de vibração i , verificando-se a seguinte relação:

$$\omega_i = \sqrt{\frac{k_i^*}{m_i^*}} \quad (2.20)$$

Assim, a equação diferencial (2.17) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\underline{\underline{m}}_i^* \cdot \ddot{\underline{\underline{u}}}_i(t) + \underline{\underline{k}}_i^* \cdot \dot{\underline{\underline{u}}}_i(t) = \underline{\underline{0}} \quad (2.21)$$

Em estruturas com amortecimento, para as quais é necessário assumir a ortogonalidade dos modos de vibração em relação à matriz de amortecimento, nestas circunstâncias considera-se:

$$\underline{\underline{c}}^* = \underline{\underline{\Phi}}^T \cdot \underline{\underline{c}} \cdot \underline{\underline{\Phi}} = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & c_i^* & \\ & & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & 2 \cdot \xi_i \cdot m_i \cdot \omega_i & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

O amortecimento de *Rayleigh* consiste num caso especial de amortecimento proporcional, que resulta numa combinação linear da matriz de massa e da matriz de rigidez, segundo as seguintes expressões, em coordenadas estruturais e coordenadas modais, respetivamente:

$$\underline{\underline{c}} = \alpha \cdot \underline{\underline{m}} + \beta \cdot \underline{\underline{k}} \quad (2.23)$$

Em que α e β são duas constantes que procuram aproximar a distribuição do amortecimento nas estruturas de forma proporcional à distribuição da massa e da rigidez, funcionando como uma hipótese simplificativa, que facilita o tratamento matemático do problema. Assim, o sistema de equações diferenciais transforma-se num conjunto de equações diferenciais independentes, tal como mostra a seguinte expressão:

$$\underline{\underline{m}}_i^* \cdot \ddot{\underline{\underline{u}}}_i(t) + \underline{\underline{c}}_i^* \cdot \dot{\underline{\underline{u}}}_i(t) + \underline{\underline{k}}_i^* \cdot \underline{\underline{u}}_i(t) = \underline{\underline{f}}_i^*(t) \quad (2.24)$$

Em que $\mathbf{f}_i^*(t)$ consiste na transformação para coordenadas modais da excitação imposta à estrutura.

Tal como anteriormente, é apresentado, de seguida, um exemplo de um oscilador com mais que um grau de liberdade, com o intuito de facilitar a generalização dos conceitos. Assim, é apresentado um modelo físico de uma viga bi-apoiada numa extremidade e apoiada na outra, com um comprimento de 1,0 metro e uma secção de transversal retangular de $0,002 \times 0,02$ (m), tal como se encontra representado na Figura 2.6.

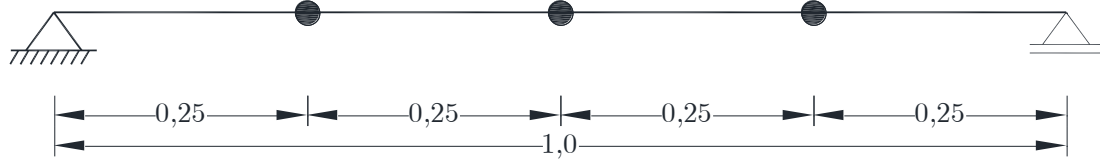


Figura 2.6 – Idealização estrutural plana do modelo físico da estrutura exemplo de 3GL.

Tal como para o exemplo de um grau de liberdade, o passo inicial consiste na determinação das matrizes de massa, rigidez e amortecimento.

A matriz de massa é composta pelo peso associado a cada grau de liberdade, assim, considerou-se que o peso da lâmina na sua zona de influência, o que resulta em 25 centímetros de lâmina, ou seja, 0,994 kg para cada um dos graus de liberdade. Desta forma, obtém-se a matriz diagonal apresentada na expressão (2.25).

$$\underline{\mathbf{m}} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,994 & 0 & 0 \\ 0 & 0,994 & 0 \\ 0 & 0 & 0,994 \end{bmatrix} [\text{kg}] \quad (2.25)$$

Por outro lado, a matriz de rigidez da estrutura exemplo está dependente das características de apoio, da secção e dos materiais que compõem a lâmina, tendo sido obtida calculando o inverso da matriz de flexibilidade através do método das forças. Assim sendo, obtiveram-se a matriz de flexibilidade $\underline{\mathbf{f}}$ e de rigidez $\underline{\mathbf{k}}$:

$$\underline{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0033 & 0,0041 & 0,0026 \\ 0,0041 & 0,0060 & 0,0041 \\ 0,0026 & 0,0041 & 0,0033 \end{bmatrix} [\text{m} / \text{N}] \quad (2.26)$$

$$\underline{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2208 & -2112 & 864 \\ -2112 & 3072 & -2112 \\ 864 & -2112 & 2208 \end{bmatrix} [\text{N} / \text{m}] \quad (2.27)$$

Finalmente, relativamente à matriz de amortecimento, utilizou-se a expressão (2.23), aplicando um valor de $\alpha = 0,05$ e $\beta = 0,0001$, obtendo-se a seguinte matriz apresentada na expressão (2.28).

$$\underline{\mathbf{c}} = \begin{bmatrix} 225,8 & -211,2 & 86,4 \\ -211,2 & 312,2 & -211,2 \\ 86,4 & -211,2 & 225,8 \end{bmatrix} [\text{N} / \text{ms}^{-1}] \quad (2.28)$$

Conhecendo as características destas matrizes, torna-se possível desenhar a curva de Rayleigh, apresentada na Figura 2.7.

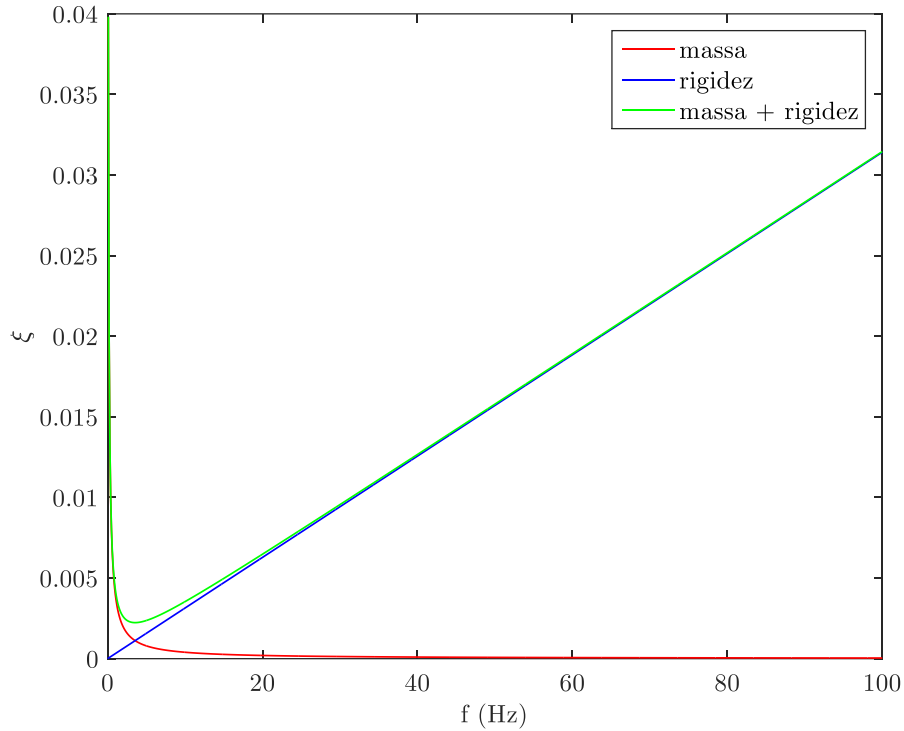


Figura 2.7 – Curva de Rayleigh para os valores de $\alpha=0,05$ e $\beta=0,0001$.

Uma vez identificadas as matrizes anteriores, a determinação das frequências naturais e dos modos de vibração consiste em resolver um sistema composto por duas equações diferenciais de segunda ordem, a duas incógnitas. A função *eig* do MATLAB permite resolver este sistema obtendo-se os vetores e valores próprios organizados na matriz modal $\underline{\phi}$ e matriz espectral $\underline{\Omega}$, respetivamente.

$$\underline{\Omega}^2 = \begin{bmatrix} 857 & 0 & 0 \\ 0 & 13518 & 0 \\ 0 & 0 & 60940 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} f_1 = 4,6585\text{Hz} \\ f_2 = 18,5045\text{Hz} \\ f_3 = 39,2891\text{Hz} \end{cases} \quad (2.29)$$

$$\underline{\phi} = \begin{bmatrix} 1,5857 & -2,2426 & 1,5857 \\ 2,2426 & 0 & -2,2426 \\ 1,5857 & 2,2426 & 1,5857 \end{bmatrix} = [\underline{\phi}_1 \quad \underline{\phi}_2 \quad \underline{\phi}_3] \quad (2.30)$$

A partir das matrizes espectrais e modais, apresentadas na expressão (2.29) e (2.30), é possível obter as frequências naturais da estrutura e as configurações modais da estrutura. De seguida, são então apresentados os modos de vibração da estrutura e as respetivas frequências, aplicando um valor de escala de 0,05 aos valores obtidos da matriz modal.

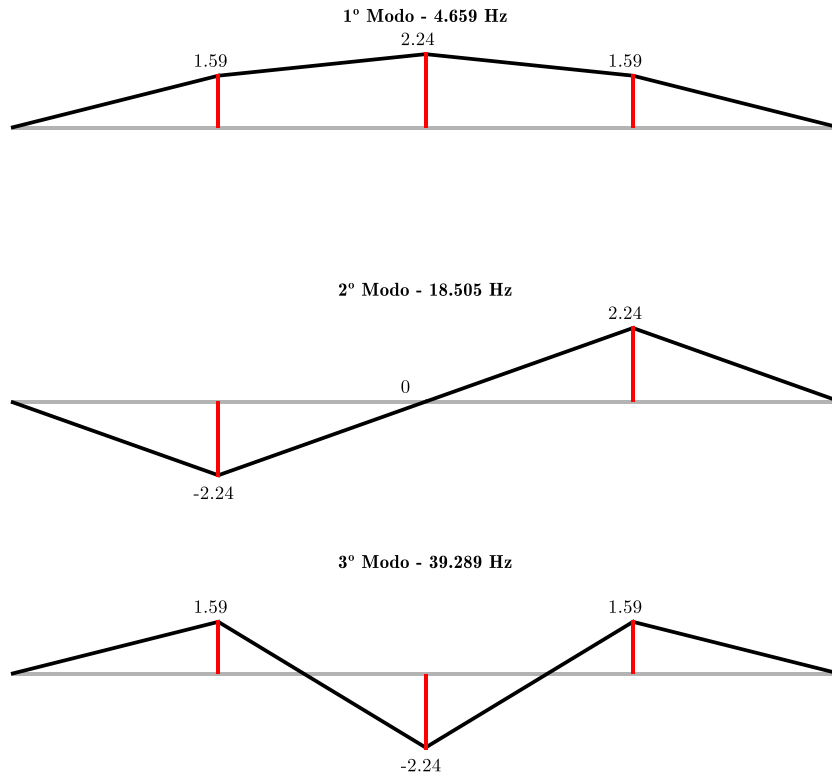


Figura 2.8 – Configurações modais para o exemplo da viga com 3GL.

Analisando a matriz modal ou mesmo as configurações modais da estrutura é possível constatar a existência de um nodo, no segundo modo de vibração da estrutura, derivado da simetria da estrutura e do seu carregamento.

2.2.2.2 Análise no domínio da frequência

Como acontece com os sistemas de um grau de liberdade, os sistemas com N graus de liberdade também podem ser estudados no domínio da frequência. O procedimento é análogo, aplicando a transformada de Fourier, transpõe-se do domínio do tempo para o domínio da frequência (Mendes & Oliveira, 2008).

$$-\underline{m}\omega^2\tilde{\underline{U}}(\omega) + i\underline{c}\omega\tilde{\underline{U}}(\omega) + \underline{k}\tilde{\underline{U}}(\omega) = \tilde{\underline{F}}(\omega) \quad (2.31)$$

Seguindo uma sequência de passos, semelhante à utilizada para os sistemas de 1GL, obtém-se, então, uma expressão matricial que relaciona, no domínio da frequência, a excitação com a resposta que provoca:

$$\tilde{\underline{U}}(\omega) = \underline{\underline{H}}(\omega) \cdot \tilde{\underline{F}}(\omega) \quad (2.32)$$

Sendo $\tilde{\underline{U}}(\omega)$ e $\tilde{\underline{F}}(\omega)$ o vetor correspondente à transformada de Fourier dos vetores dos deslocamentos, forças e $\underline{\underline{H}}(\omega)$ a matriz das Funções de Resposta em Frequência. Em que:

$$\underline{\underline{H}}(\omega) = \left[(\underline{k} - \underline{m} \cdot \omega^2) + i\omega\underline{c} \right]^{-1} \quad (2.33)$$

De acordo com Maia et al. (1998) e Mendes & Oliveira (2008), tal como no domínio do tempo, o cálculo da matriz FRF é mais eficiente segundo a formulação modal, não só porque simplifica as operações matemáticas, mas também porque possibilita ter em consideração um número limitado de modos de vibração, contando com a contribuição dos modos que se julgem representativos do sistema dinâmico. Assim, é possível obter a seguinte expressão, em coordenadas modais:

$$\underline{\underline{H}}^*(\omega) = \frac{1}{\omega_i^2 - \omega^2 + j \cdot 2 \cdot \xi_i \cdot \omega_i \cdot \omega} \quad (2.34)$$

A transformação de coordenadas modais para coordenadas estruturais é efetuada através da expressão (2.35).

$$\underline{\underline{H}}(\omega) = \underline{\underline{\Phi}} \cdot \underline{\underline{H}}^*(\omega) \cdot \underline{\underline{\Phi}}^T \quad (2.35)$$

Deste modo, aplicando a expressão (2.32), é possível obter a resposta, no domínio da frequência, de uma estrutura sujeita a ações dinâmicas. Dessa forma, com base num modelo de três graus de liberdade, e considerando um amortecimento proporcional, aplicou-se o procedimento apresentado anteriormente através do desenvolvimento de pequenas rotinas em MATLAB. Uma vez que essas funções têm uma natureza complexa apenas é possível representá-las totalmente recorrendo a duas funções separadas: amplitude e fase, representadas na Figura 2.9 a preto e cinzento, respetivamente.

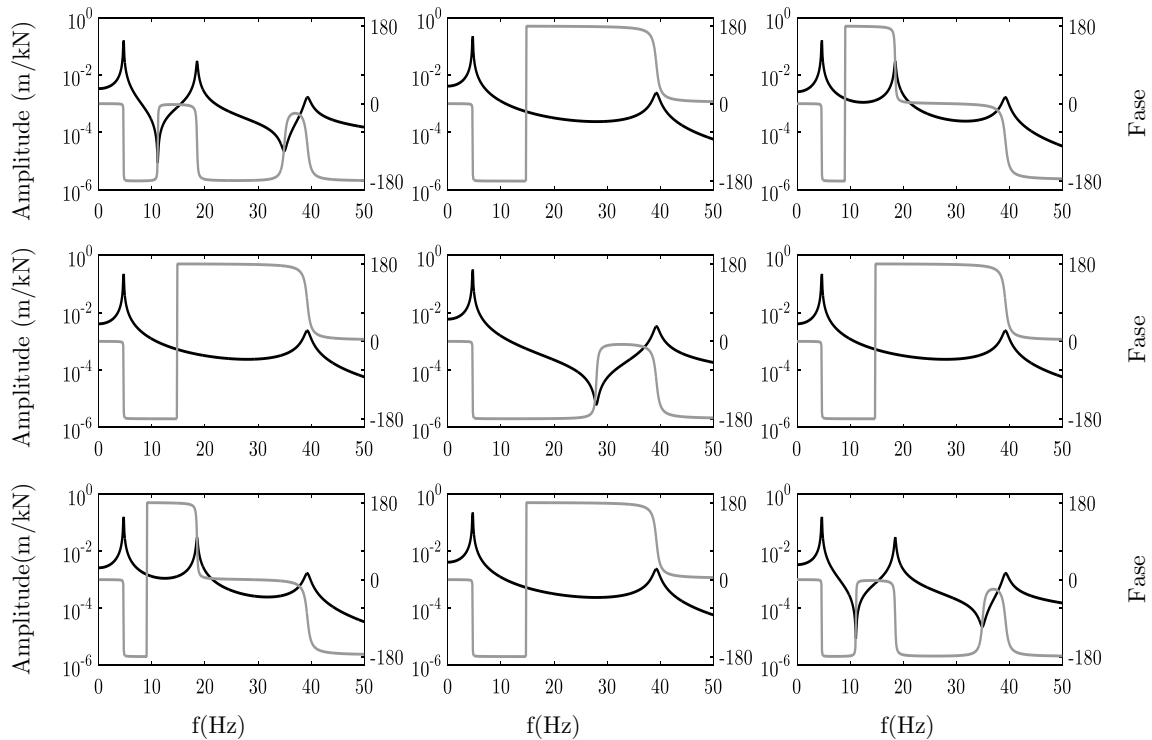


Figura 2.9 – Matriz completa das FRFs do modelo de 3GL.

Ao analisar a figura anterior, é possível identificar três picos associados às frequências: 4,7 Hz, 18,5 Hz e 39,3 Hz. No entanto, nem todos os espectros apresentam três picos correspondentes às frequências naturais do modelo estrutural devido à

existência de um nodo, no segundo modo de vibração da estrutura, exatamente a meio da viga e onde se encontra o segundo ponto de medição. Assim, não são detetadas alterações nesse ponto e os espectros que têm em consideração esse nodo, não apresentam o respetivo pico, como seria de prever. Relativamente associado às variações de fase, pode-se reparar que ocorre uma mudança de fase sempre que existe um pico ou um vale aguçado.

Tal como efetuado para a formulação associada a estruturas com apenas um grau de liberdade, apresenta-se na Tabela 2.2, uma comparação entre a formulação clássica no domínio do tempo e da frequência.

Tabela 2.2 - Paralelismo entre a formulação clássica no domínio do tempo e da frequência, para modelos de N GL. (Adaptado de Mendes, 2010)

RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DA DINÂMICA. MODELOS COM NGL	
Domínio do tempo	Domínio da frequência
<p>Equação Diferencial Vetorial</p> $\underline{m} \cdot \ddot{\underline{u}}(t) + \underline{c} \cdot \dot{\underline{u}}(t) + \underline{k} \cdot \underline{u}(t) = \underline{f}(t)$ <p>Recorrendo à matriz dos modos de vibração $\underline{\Phi}$, este sistema transforma-se num conjunto de N GL, equações diferenciais escalares, não acopladas (coordenadas modais)</p> $m_n^* \cdot \ddot{u}_n^*(t) + c_n^* \cdot \dot{u}_n^*(t) + k_n^* \cdot u_n^*(t) = f_n^*(t)$ <p style="text-align: center;">n = 1 a N_{GL}</p> $m_n^* = \underline{\Phi}_n^T \underline{m} \underline{\Phi}_n \quad c_n^* = \underline{\Phi}_n^T \underline{c} \underline{\Phi}_n \quad k_n^* = \underline{\Phi}_n^T \underline{k} \underline{\Phi}_n$ $u_n^* = \underline{\Phi}_n^T \underline{u} \quad f_n^* = \underline{\Phi}_n^T \underline{f}$	<p>Sistema de N equações algébricas complexas (não acopladas, quando se utilizam coordenadas modais \underline{u}_n^*)</p> $\mathcal{F}(m_n^* \cdot \ddot{u}_n^* + c_n^* \cdot \dot{u}_n^* + k_n^* \cdot u_n^*) = \mathcal{F}(f_n^*)$ <p style="text-align: center;">n = 1 a N_{GL}</p> $m_n^* = \underline{\Phi}_n^T \underline{m} \underline{\Phi}_n \quad c_n^* = \underline{\Phi}_n^T \underline{c} \underline{\Phi}_n \quad k_n^* = \underline{\Phi}_n^T \underline{k} \underline{\Phi}_n$ $u_n^* = \underline{\Phi}_n^T \underline{u} \quad f_n^* = \underline{\Phi}_n^T \underline{f}$
<p>Solução (condições iniciais nulas)</p> $u_n^*(\omega) = h_n^*(t) * f_n^*(t)$ $h_n^*(t) = \frac{1}{m_n^* \cdot \omega_{An}} \cdot \text{sen}(\omega_{An} \cdot t) \cdot e^{-\xi_n^* \cdot \omega_n \cdot t}$ $\underline{u}(t) = \underline{\Phi} \underline{u}^*(t)$	<p>Solução (condições iniciais nulas)</p> $\underline{U}(\omega) = \underline{H}(\omega) \underline{F}(\omega)$ $\underline{H}(\omega) = \underline{\Phi} \cdot \underline{H}^*(\omega) \cdot \underline{\Phi}^T$ $\underline{H}_n^*(\omega) = \frac{1}{(k_n^* - m_n^* \omega^2) + i c_n^* \omega}$
$\underline{u}(t) = \mathcal{F}^{-1}(\underline{U}(\omega))$	$\underline{U}(\omega) = \mathcal{F}(\underline{u}(t))$

2.3 Excitação Estocástica

Quando a excitação da estrutura é aleatória, isto é, não é possível prever o seu comportamento futuro, a sua caracterização tem de ser realizada com base em conceitos

probabilísticos, pelo que se torna conveniente idealizar a excitação através de um processo estocástico (Cunha, 1990).

Este tipo de processo baseia-se na análise e interpretação da resposta das estruturas, estando especialmente vocacionado para a vertente experimental. Derivado do facto de a excitação ser desconhecida são adotadas hipóteses simplificativas sobre as características estatísticas da excitação, procurando estabelecer as relações destas com as características estatísticas conhecidas da resposta e com as propriedades dinâmicas das estruturas.

Deste modo, torna-se importante ter presentes alguns conceitos estatísticos e relativos a processos estocásticos, que visam introduzir o estudo da representação analítica das funções de densidade espectral de potência da resposta das estruturas.

2.3.1 Conceitos de estatística e de processos estocásticos

Considere-se a evolução ao longo do tempo de um conjunto de variáveis aleatórias, que correspondem a um determinado conjunto de realizações de um processo estocástico. Pode-se definir a evolução de uma variável aleatória ao longo do tempo como $X_k(t)$, em que os índices k indicam a realização que se refere ($k \in [0, N]$) e t indica o instante temporal ($t \in [0, T]$).

Considerando que as realizações estão compreendidas num intervalo limitado ($t \in [0, T]$), no fundo está-se a considerar apenas uma amostra da população total de valores ($t \in]-\infty, +\infty[$, para a população total), representativa de cada uma das realizações k . Assim, para cada amostra da evolução de uma variável aleatória dá-se a designação de função aleatória, sendo que nenhuma delas é decomponível em nenhuma função conhecida (Mendes & Oliveira, 2008).

Na prática, uma função aleatória resulta da medição ou registo de uma grandeza física, cuja variação é devida a causas não controladas pelo observador. Todavia, o conceito de aleatoriedade é reforçado, caso se meçam várias amostras em simultâneo, obtendo-se assim um conjunto de diferentes registos (resultantes de experiências idênticas) aos quais se dá a designação de processo estocástico (Mendes, 2010).

Habitualmente, a caracterização dos processos estocásticos é realizada com base nas grandezas estatísticas apresentadas na Tabela 2.3, tendo em conta o processo estocástico $X_k(t)$:

Tabela 2.3 - Grandezas estatísticas de variáveis aleatórias, adaptado de Mendes (2010).

Designação	Amostra [0,N]
Média	$\bar{x}_t = E[x_k(t)] = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=1}^N x_k(t)$
Valor quadrático médio	$\bar{x}_t^2 = E[x_k(t)^2] = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=1}^N x_k(t)^2$
Variância	$s_t^2 = E[(x_k(t) - \bar{x})^2] = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=1}^N (x_k(t) - \bar{x})^2$
Desvio Padrão	$s_t = \sqrt{s_t^2}$
Função de auto-correlação	$R_{xx}(t, t + \tau) = E[x_k(t) \cdot x_k(t + \tau)] = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=1}^N [x_k(t) \cdot x_k(t + \tau)]$
Função de auto-covariância	$C_{xx}(t, t + \tau) = E[(x_k(t) - \bar{x}_t) \cdot (x_k(t + \tau) - \bar{x}_{t+\tau})] =$ $= \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=1}^N [(x_k(t) - \bar{x}_t) \cdot (x_k(t + \tau) - \bar{x}_{t+\tau})]$

No entanto, devido à complexidade do tratamento matemático necessário para caracterizar um processo estocástico, geralmente, são adotadas simplificações, assumindo que esses processos estocásticos são estacionários ergódicos. Um processo diz-se estacionário quando as suas características estatísticas são independentes do instante temporal e ergódicos quando o valor dos parâmetros estatísticos avaliados tendo em conta as diferentes realizações, para um determinado instante de tempo, é igual ao dos mesmos parâmetros estatísticos avaliados apenas numa realização ao longo do tempo.

Também é bastante frequente, admitir-se que os processos estocásticos apresentam uma média nula natureza Gaussiana. Esta é uma característica comum a muitos fenómenos naturais, até porque, segundo o Teorema do Limite Central, a soma de um grande número de variáveis aleatórias independentes, cada uma com diferentes distribuições individuais, tende para uma distribuição normal (Magalhães, 2004).

Ao admitir-se que o processo estocástico é estacionário e ergódicos, a função de auto-correlação apenas contempla uma única realização k e um desfasamento temporal τ , podendo ser determinada simplesmente através da expressão:

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_k(t) \cdot x_k(t + \tau) dt \quad (2.36)$$

As funções de auto-correlação associadas a processos estocásticos estacionários de média nula são funções simétricas com um máximo na origem, cuja ordenada é igual à variância de processo. A transposição a função de auto-correlação para o domínio da

frequência, através da transformada de Fourier, resulta no espectro de potência, ou auto-espectros, definidos no domínio da frequência.

A função de auto-correlação pode ser transposta para o domínio da frequência através da transformada de Fourier, obtendo-se uma função que se designa auto-espectro ou espectro de potência, definida no domínio da frequência.

$$S_{xx} = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\tau) \cdot e^{-i\omega\tau} dt \quad (2.37)$$

Os espectros são funções reais que quantificam a distribuição do conteúdo energético de um sinal (série temporal) em frequência. Para sinais de média nula, a área do gráfico que representa o conteúdo energético total do sinal é igual ao valor da sua variância.

Nesta fase importa definir o conceito de ruído branco. Trata-se de um tipo de sinal que é caracterizado por ser idealmente aleatório e no limite pode-se afirmar que, contém a contribuição, com conteúdo energético significativo, de todas as frequências. Nestas circunstâncias a área das funções de densidade espectral será infinita, enquanto a função de auto-correlação apresentará uma ordenada com valor infinito na origem, que deriva do facto de a variância ser infinita, apresentando ordenadas nulas em todas as restantes abcissas, pelo facto do sinal ser idealmente aleatório (Gomes, 2016).

Em termos práticos a obtenção de uma variância infinita não é realista, pelo que é usual considerar-se um ruído branco de banda limitada, isto é, um processo estocástico que é caracterizado por um auto-espectro com intensidade constante dentro de um determinado intervalo de frequências, tal como apresenta a figura seguinte.

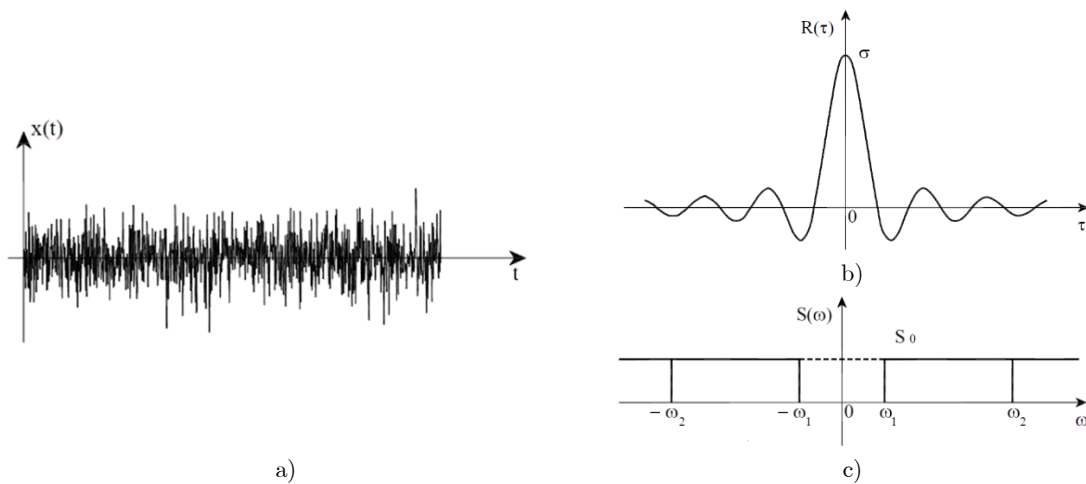


Figura 2.10 – a) Exemplo de um sinal representativo de um processo de banda larga; b) função de auto-correlação; c) função de densidade espectral de potência (Adaptado Gomes (2016)).

Na aplicação dos métodos de identificação, baseados na medição da resposta da estrutura a uma excitação ambiental, assume-se que a excitação tem as propriedades de um ruído branco: espectro de potência constante e função de auto-correlação com

ordenada na origem igual à variância do processo e o valor nulo em todas as restantes abcissas.

Os conceitos de função de auto-correlação e auto-espectro podem ser generalizados, de forma a considerar dois processos estocásticos ($x_i(t)$ e $x_j(t)$). Assim, aparece a função de correlação cruzada e o espectro cruzado, definidos pelas expressões (2.38) e (2.39), respetivamente:

$$R_{ij}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_i(t) \cdot x_j(t + \tau) dt \quad (2.38)$$

$$S_{ij}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{ij}(\tau) \cdot e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (2.39)$$

No âmbito da identificação modal estocástica, as funções de densidade espectral de potência são determinadas a partir de séries temporais, podendo-se nessas circunstâncias aplicar a seguinte expressão

$$S_{ij}(\omega) = \lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ N \rightarrow \infty}} \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N \frac{F_{T,r}[x_i(t)]^* \cdot F_{T,r}[x_j(t)]}{T} \quad (2.40)$$

Em que $F_{T,r}[x_i(t)]$ representa a transformada de Fourier da realização r , do processo estocástico $x_i(t)$ no intervalo $[0, T]$.

Destaca-se o facto de a expressão também ser apropriada para determinar auto-espectros, fazendo $x_i = x_j$, e também, se verifica que estes são funções reais, enquanto que os espectros cruzados são funções complexas.

Agrupando num único vetor vários processos estocásticos associados à caracterização de um dado fenómeno físico, constitui-se um processo estocástico vetorial. Neste caso, a função escalar de auto-correlação é substituída por uma matriz de correlação. Esta matriz contém nos elementos da diagonal principal as funções de auto-correlação, relativas a cada uma das componentes do processo, e nos elementos fora da diagonal principal a correlação cruzada entre a componente i e a componente j . De forma idêntica, é usual definir uma matriz de funções densidade espectral (ou matriz espectral) que contem, na sua diagonal principal, os auto-espectros e os espectros cruzados fora dessa diagonal (Gomes, 2016).

2.3.2 Funções densidade espectral de resposta

Segundo Cunha (1990), para estruturas com N graus de liberdade, pode-se então definir as funções de densidade espectral de resposta a partir da expressão apresentada de seguida:

$$S_u(\omega) = H(\omega) \cdot S_p(\omega) \cdot (H^T)^*(\omega) \quad (2.41)$$

Em que $S_u(\omega)$ corresponde à matriz das funções de densidade espectral da resposta da estrutura, $H(\omega)$ representa a matriz das funções de resposta em frequência e $S_p(\omega)$ descreve a matriz das funções de densidade espectral da excitação.

Se se assumir que a excitação, atuante nos diferentes graus de liberdade da estrutura, tem características semelhantes às de um ruído branco, a matriz dos espectros da excitação é constante e depende da matriz de correlações (R_p), a matriz dos espectros de resposta passa a ser definida segundo a expressão:

$$S_u(\omega) = H(\omega) \cdot R_p \cdot (H^T)^*(\omega) \quad (2.42)$$

Recorrendo novamente à estrutura exemplo de 3 graus de liberdade, utilizada anteriormente, determinou-se a matriz das funções de densidade espectral de potência da resposta em aceleração, considerando para a matriz das funções de densidade espectral da excitação a matriz identidade. Admite-se então que as excitações nos graus de liberdade consistem em ruídos brancos completamente independentes entre si.

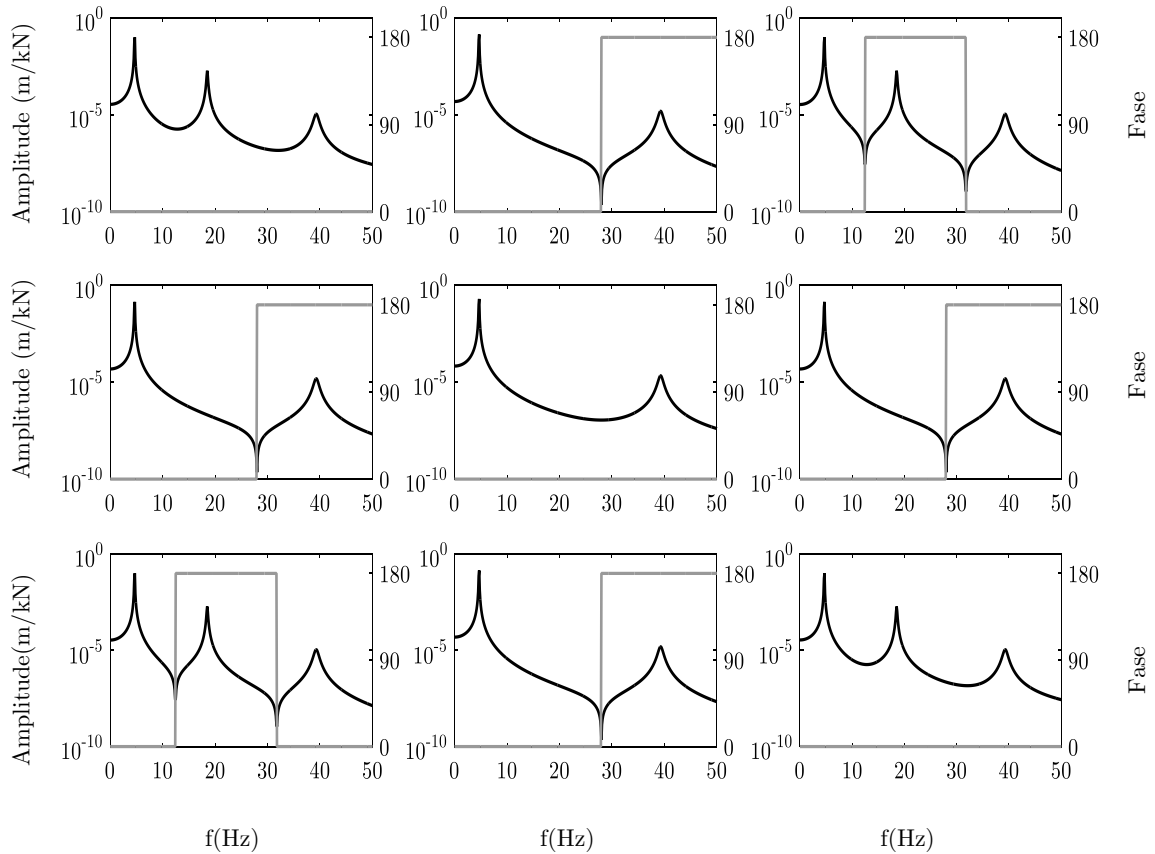


Figura 2.11 – Matriz completa das funções de densidade de potência da resposta em aceleração para a estrutura exemplo de 3GL.

Comparando a Figura 2.11 com a Figura 2.9, é possível encontrar diversas semelhanças entre ambas, nomeadamente a localização dos picos que surgem nas mesmas frequências que na matriz FRF, razão pela qual nos métodos de identificação modal

estocástica se utilizam as funções de densidade de potência da resposta para estimar os parâmetros modais da estrutura.

Tal como para a matriz FRF, é de notar que o segundo modo de vibração apresenta um nodo, razão pela qual os gráficos que relacionam esse modo de vibração, não apresentam o pico associado à sua frequência.

É ainda possível reparar na relação das mudanças de fase com os picos invertidos apresentado nos gráficos de amplitudes. Uma vez que os auto-espectros (membros da diagonal da matriz das funções de densidade de potência da resposta) não têm picos invertidos, então não apresentam mudanças de fase, o que faz sentido por se tratar de um relacionamento de um grau de liberdade com ele mesmo.

2.4 Formulação de estado

Tal como referido anteriormente, quando se realiza uma análise numérica do comportamento de sistemas estruturais sob ações dinâmicas, geralmente, é admitida a hipótese de Rayleigh, segundo a qual a matriz de amortecimento é proporcional à matriz da massa e de rigidez do sistema. Esta hipótese simplificativa que conduz a resultados aceitáveis para simular o comportamento de estruturas correntes, permite não só reduzir o tempo de cálculo, mas também ultrapassar as dificuldades experimentais de identificar os parâmetros mais adequados para simular o amortecimento.

No entanto, em alguns casos pode ser conveniente considerar a hipótese de amortecimento não proporcional à massa e à rigidez, como é o caso de estruturas com zonas deterioradas, de sistemas com apoios exteriores dissipativos, ou sistemas em que há interação dinâmica com líquidos, como barragens (Mendes, 2010).

Assim, à semelhança do que foi efetuado para as formulações no domínio do tempo e da frequência, é explicado o método e, posteriormente, exemplificado recorrendo a modelos simplificados.

2.4.1 Oscilador de 1 grau de liberdade

Numa fase inicial, a denominada representação do espaço de estados da equação diferencial de segunda ordem é obtida através de uma mudança de variável, com o intuito de obter um sistema de duas equações diferenciais de 1ª ordem equivalentes.

Assim, considerando a mudança de variável $\dot{u} = v(t)$ obtém-se então o seguinte sistema de duas equações diferenciais (matriciais) de primeira ordem, em que as incógnitas são o deslocamento $u = u(t)$ e a velocidade $v = v(t)$.

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = f \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{u} = v \\ m\dot{v} + cv + ku = f \end{cases} \quad (2.43)$$

A partir do sistema apresentado na formula (2.43), colocando em evidencia \dot{v} e \dot{u} facilmente se obtém a representação no espaço de estados da equação do movimento do modelo de 1GL.

$$\begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = -\frac{k}{m}u + \frac{c}{m}v + \frac{f}{m} \end{cases} \quad (2.44)$$

Assumindo então a forma matricial, tem-se que:

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} f \quad \text{ou} \quad \dot{\underline{x}} = \underline{\underset{(mck)}{A}} \underline{x} + \underline{\underset{m}{B}} f \quad (2.45)$$

em que o vetor $\underline{\dot{x}}$, denominado de vetor de estado, contém o deslocamento e a velocidade, a matriz $\underline{\underset{(mck)}{A}}$ representa a matriz de estado e a matriz $\underline{\underset{m}{B}}$ é designada de matriz de influência de entrada.

Uma vez mais foi utilizado o exemplo da viga de 1 grau de liberdade para tentar facilitar a explicação destes conceitos. Torna-se então importante referir que para o estudo de caso, utilizou-se o coeficiente de amortecimento usado no estudo do caso da viga com N graus de liberdade, ou seja, $c_1=0,05$ e $c_2=0,0001$. Com estes dados e as características da estrutura, calculou-se então a matriz $\underline{\underset{(mck)}{A}}$.

$$\underline{\underset{(mck)}{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 6519,1 & -0,702 \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

Com base nos valores e vetores próprios desta matriz é possível obter mais informações sobre o comportamento dinâmico da estrutura, assim utilizando a função *eigs* do MATLAB, determinam-se essas duas matrizes.

$$\text{Valores próprios} = \begin{bmatrix} -0,351 + 80,74i \\ -0,351 - 80,74i \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

Os valores próprios são constituídos por uma componente real e outra imaginaria, sendo que a componente imaginaria corresponde à frequência angular natural, a partir da qual é possível determinar a frequência natural. Com esta matriz é também possível determinar os coeficientes de amortecimento da estrutura, recorrendo à equação (2.48).

$$\lambda_k, \lambda_k^* = -\xi_k \cdot \omega_k \pm i \cdot \sqrt{1 - \xi_k^2} \cdot \omega_k \quad (2.48)$$

Assim, de seguida apresenta-se a frequência natural obtida e o coeficiente de amortecimento da estrutura:

$$\omega = [80,7404] \text{ rad / s} \Rightarrow f = [12,8502] \text{ Hz} \quad (2.49)$$

$$\xi = [0,0043] \quad (2.50)$$

De seguida apresenta-se a matriz do vetor próprio obtida através deste método e as respectivas configurações desses modos, na expressão (2.51) e na Figura 2.12, respetivamente.

$$\text{Vetores próprios} = \begin{bmatrix} -0,0001 - 0,124i & -0,0001 + 0,0124i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

1º Modo - 12.85 Hz

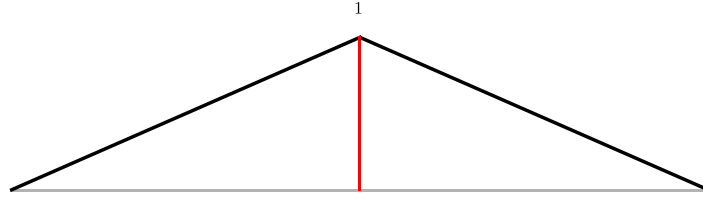


Figura 2.12 - Configuração modal para o exemplo da viga de 1 GL.

2.4.2 Osciladores de N graus de liberdade

Em casos em que não é aceitável adotar a hipótese de amortecimento proporcional, torna-se impossível proceder à diagonalização do sistema de equações diferenciais da dinâmica na forma em que ela se apresenta, isto é, um sistema de N_{GL} equações diferenciais de 2ª ordem, com N_{GL} funções incógnitas, tal como mostra a equação (2.52).

$$\underline{m} \cdot \ddot{\underline{u}}(t) + \underline{c} \cdot \dot{\underline{u}}(t) + \underline{k} \cdot \underline{u}(t) = \underline{f}(t) \quad (2.52)$$

Contudo, segundo Mendes (2010), tal como no caso do oscilador de apenas 1 GL, a diagonalização torna-se possível adotando a representação no espaço de estados que, tal como referido anteriormente, consiste em considerar as N_{GL} equações diferenciais de 2ª ordem como sistemas de $2 N_{GL}$ equações diferenciais de 1ª ordem, em função das histórias de velocidades $\underline{v} = \underline{v}(t)$ e de deslocamentos $\underline{u} = \underline{u}(t)$.

Então, da mesma forma que se procedeu para o caso de 1GL, para obter o sistema de equações pretendido, basta considerar a mudança de variável obtendo-se o sistema de duas equações diferenciais de 1ª ordem:

$$\begin{cases} \dot{\underline{u}} = \underline{v} \\ \underline{m} \dot{\underline{v}}(t) + \underline{c} \underline{v}(t) + \underline{k} \underline{u}(t) = \underline{s} \underline{f}(t) \end{cases} \quad (2.53)$$

A partir do sistema apresentado na expressão (2.53), colocando em evidência $\dot{\underline{v}}$ e $\dot{\underline{u}}$ facilmente se obtém a representação no espaço de estados da equação do movimento do modelo de NGL.

$$\begin{cases} \dot{\underline{u}} = \underline{v}(t) \\ \dot{\underline{v}}(t) = -\underline{m}^{-1} \underline{k} \underline{u}(t) - \underline{m}^{-1} \underline{c} \underline{v}(t) + \underline{m}^{-1} \underline{s} \underline{f}(t) \end{cases} \quad (2.54)$$

Na equação (2.55) é apresentada o sistema apresentado anteriormente na sua forma matricial, em que a dimensão das matrizes e vetores depende do número de graus de liberdade.

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{u}}(t) \\ \dot{\underline{v}}(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{I} \\ -\underline{m}^{-1}\underline{k} & -\underline{m}^{-1}\underline{c} \end{bmatrix}}_{\substack{\underline{A} \\ \text{(mck)} \\ (2N_{GL} \times 2N_{GL})}} \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{u}(t) \\ \underline{v}(t) \end{bmatrix}}_{\substack{\underline{x} \\ (2N_{GL} \times 1)}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{m}^{-1}\underline{s} \end{bmatrix}}_{\substack{\underline{B} \\ \text{(ms)} \\ (2N_{GL} \times n_1)}} \underline{f}(t) \quad (2.55)$$

É bastante comum escrever a equação anterior de forma mais compacta:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A} \underline{x} + \underline{B} \underline{f} \quad (2.56)$$

em que $\underline{A}_{\text{(mck)}}$ representa a matriz de estado que compreende as propriedades, como rigidez, amortecimento ou massa, do sistema estrutural discretizado, $\underline{B}_{\text{(ms)}}$ é a matriz que tem em consideração a inversa da matriz de massa e a distribuição espacial das histórias de forças aplicadas, e finalmente \underline{f} é o vetor de histórias de forças aplicadas ao nível dos graus de liberdade.

Assim, para o exemplo da viga com 3GL apresentada anteriormente, determina-se a matriz $\underline{A}_{\text{(mck)}}$, a partir das matrizes de massa e rigidez obtidas para esse mesmo exemplo:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline -22208 & 21243 & -8690 & -2,271 & 2,124 & -0,869 \\ 21243 & -30898 & 21243 & 2,1243 & -3,140 & 2,124 \\ -8690 & 21243 & -22208 & -0,869 & 2,124 & -2,271 \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

Os valores e vetores próprios desta matriz são então calculados utilizando a função *eigs* do MATLAB, originando resultados em duplicado, que são apresentados de seguida, nas expressões (2.58) e (2.61).

$$\text{Valores próprios} = \begin{bmatrix} -0,068 + 39,27i \\ -0,068 - 39,27i \\ -0,701 + 116,27i \\ -0,701 - 116,27i \\ -3,072 + 246,84i \\ -3,072 - 246,84i \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

Com base na matriz dos valores próprios é possível retirar várias informações, como os coeficientes de amortecimento ou as frequências naturais da estrutura. Os coeficientes de amortecimento são obtidos recorrendo à formula (2.48), enquanto que a componente imaginária dos valores próprios corresponde aos valores das frequências angulares naturais, a partir dos quais é possível obter as frequências naturais.

Assim, na expressão (2.59) apresenta-se as frequências naturais da estrutura e na expressão (2.60) os seus coeficientes de amortecimento.

$$\omega = \begin{bmatrix} 39,27 \\ 116,27 \\ 246,84 \end{bmatrix} \text{ rad / s} \Rightarrow f = \begin{bmatrix} 4,659 \\ 18,504 \\ 39,286 \end{bmatrix} \text{ Hz} \quad (2.59)$$

$$\xi = \begin{bmatrix} 0,0023 \\ 0,006 \\ 0,012 \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

Ao comparar os valores das frequências naturais obtidos através da formulação de estados com os valores retirados através dos restantes métodos desenvolvidos, é possível verificar que são bastante semelhantes, tal como seria de esperar.

A partir da metade inferior da matriz vetores próprios é possível identificar a configuração dos modos de vibração, estando cada modo apresentado em duplicado, tal como referido anteriormente.

$$\text{Vetores próprios} = \begin{bmatrix} -0,017i & 0,017i & -0,006i & +0,006i & 0,002i & -0,002i \\ -0,024i & +0,024i & 0 & 0 & -0,003i & 0,003i \\ -0,017i & 0,017i & 0,006i & -0,006i & 0,002i & -0,002i \\ 0,500 & 0,500 & 0,707 & 0,707 & -0,500 & -0,500 \\ 0,707 & 0,707 & 0 & 0 & 0,707 & 0,707 \\ 0,500 & 0,500 & -0,707 & -0,707 & -0,500 & -0,500 \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

Assim, segundo a matriz dos vetores próprios é possível desenhar os modos de vibração associados a cada frequência para a estrutura estudada, estando esses modos apresentados na Figura 2.13, com um fator de escala de 0.1.

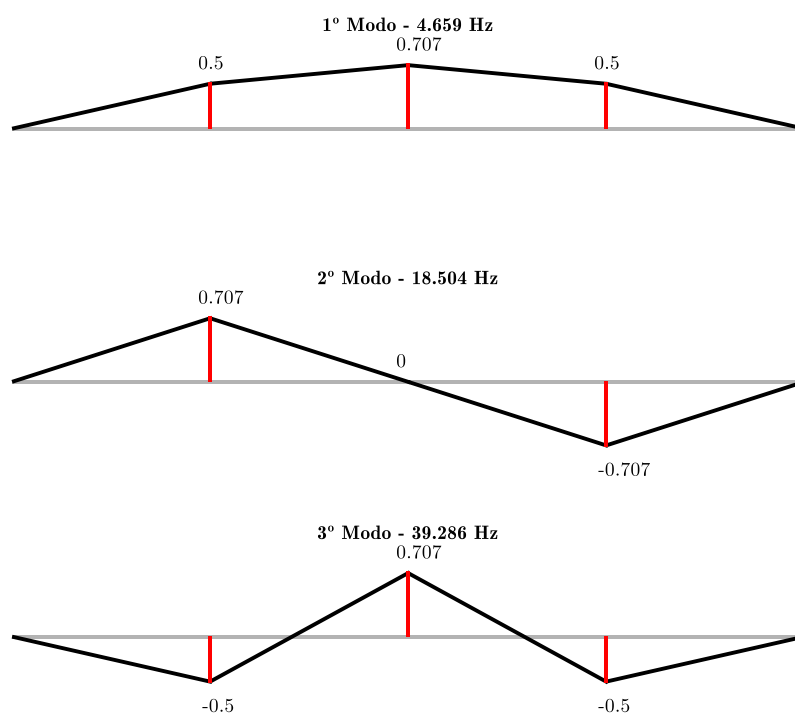


Figura 2.13 – Configuração modal para o exemplo da viga de 3GL.

Analisando os modos de vibração, facilmente se verifica que são bastante semelhantes aos obtidos através dos restantes métodos. Em relação aos valores propriamente ditos, não são iguais aos valores obtidos nos restantes métodos, no entanto esse fator não tem importância, uma vez que aquilo que é realmente importante é a relação entre os valores obtidos para cada grau de liberdade, e essa relação é idêntica.

2.5 Geração de séries temporais de aceleração

Com o intuito de servir de exemplo para a explicação dos métodos de identificação modal, que serão introduzidos no capítulo 5, foi desenvolvida uma rotina na plataforma MATLAB (MathWorks, 2015), em que, a partir da formulação clássica no domínio do tempo, se geram numericamente séries temporais de aceleração para o exemplo da viga com 3 graus de liberdade, considerando uma excitação do tipo ruído branco. Essas histórias de aceleração geradas para cada grau de liberdade são apresentadas na Figura 2.14.

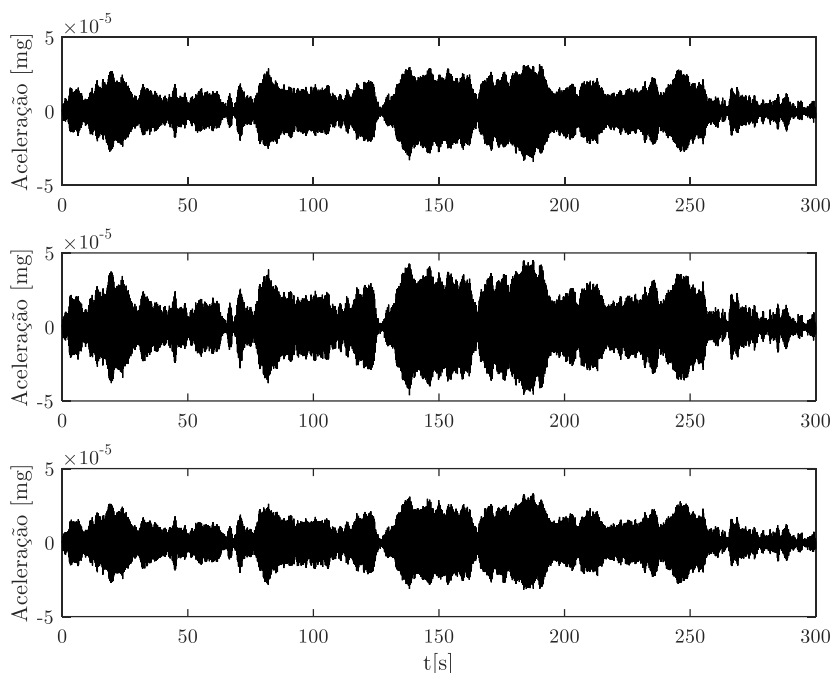


Figura 2.14 – Histórias de acelerações geradas com uma duração de 300 segundos (5 minutos) em cada um dos vários graus de liberdade.

2.6 Considerações Finais

Ao longo deste capítulo foram apresentados os fundamentos que servem de base à análise do comportamento dinâmico das estruturas, tendo sido utilizados modelos simplificados para exemplificar a aplicação desses fundamentos, designadamente duas vigas bi-apoiadas, com características diferentes, em função do número de graus de

liberdade em estudo, tendo sido analisados recorrendo a rotinas desenvolvidas em MATLAB, com o objetivo de maximizar a aprendizagem dos conceitos descritos ao longo do capítulo.

Inicialmente, abordou-se a análise para sistemas com 1 GL no domínio do tempo e da frequência quando sujeitos a excitações conhecidas, ou seja, que podem ser definidas deterministicamente, com o intuito de, posteriormente, generalizar essa análise para sistemas com mais graus de liberdade.

Para sistemas com N GL, foram também estudados os conceitos associados ao domínio do tempo e da frequência, dando especial destaque à passagem do domínio do tempo para o domínio da frequência, obtendo-se as funções de resposta em frequência (FRF) que permitem relacionar a ação imposta com a resposta das estruturas. A análise destas funções permite caracterizar os principais parâmetros modais e conhecer a resposta dinâmica de uma estrutura num determinado ponto, em função da gama de frequências em análise, para uma ação harmónica aplicada num qualquer ponto da estrutura.

Abordou-se também o processo de caracterização do comportamento dinâmico de sistemas sujeitos a excitações aleatórias, isto é, definidas estocasticamente. Nesse sentido foram descritos os conceitos relacionados com as funções de densidade espectral de potência de resposta que permitem, no domínio da frequência, avaliar os principais parâmetros modais da estrutura através dos quais se pode caracterizar a resposta das estruturas.

Foram ainda introduzidos conceitos que permitem a caracterização do comportamento dinâmico em sistemas em que não é aceitável considerar o amortecimento proporcional. Estes conceitos são considerados uma alternativa à formulação clássica, estando na base dos métodos de identificação modal no domínio do tempo.

Através de uma comparação dos resultados provenientes dos exemplos analisados através de uma rotina MATLAB, é possível verificar que, para condições iniciais iguais, todas as formulações estudadas permitem obter os resultados semelhantes, em termos de frequências e de modos de vibração, validando assim os diferentes métodos.

3 Vibrações induzidas por peões

3.1 Considerações iniciais

Nas últimas décadas tem-se vindo a construir pontes pedonais cada vez mais longas e flexíveis, devido ao desenvolvimento dos métodos de dimensionamento, das técnicas de construção e à evolução dos materiais utilizados na sua construção. Porém, devido a esses fatores, as pontes pedonais tendem a ser mais sensíveis a forças dinâmicas, nomeadamente as forças induzidas pelos peões enquanto caminham ou correm.

Esta problemática resulta em vibrações ao nível do tabuleiro que, dependendo das ações, podem atingir grandes proporções, especialmente se a frequência se aproximar das frequências naturais da ponte. Esta situação leva a que os seus utilizadores, em certos casos, se sintam desconfortáveis ou até inseguros, o que leva a que este tema tenha ganho importância nomeadamente em termos da sua análise em relação ao Estado Limite de Serviço (ELS) de pontes pedonais.

A nível de projeto, é dada muita importância ao cálculo e à verificação a nível estático, sendo, por vezes, ignorada a vertente do comportamento dinâmico, o que leva a que nem sempre sejam tomadas as devidas precauções, tal como no exemplo da ponte Millennium Bridge, em Londres (ver Figura 3.1). Esta ponte britânica foi fechada dois dias após a sua inauguração devido a problemas de vibrações laterais excessivas, causadas pelo movimento dos peões. Apesar de ter sido realizada a correção dessa questão, esta ponte ganhou o apelido de “*Wobbly Bridge*” (Ponte Oscilante/trémula), pelo qual é conhecida ainda hoje.



Figura 3.1 – Millennium Bridge em Londres (Reino Unido).

Assim, pretende-se com este capítulo, apresentar as características inerentes às ações dos peões sobre a estrutura das pontes pedonais, bem como os respetivos componentes. Procura-se, também, fazer uma breve análise relativa ao dimensionamento

das pontes pedonais considerando as ações pedonais exercidas nas mesmas, e à legislação em vigor. Por fim, apresenta-se uma perspetiva sobre o controlo de vibrações, de modo a compreender quais os procedimentos a desenvolver quando não se verifica o cumprimento da legislação.

3.1.1 Caracterização das ações

As ações provocadas pelos seres humanos ao percorrer uma ponte pedonal consistem em ações dinâmicas periódicas que dependem de diversos parâmetros, como por exemplo a frequência, o comprimento, ou a velocidade da passada. No entanto, o carácter dinâmico destas ações não se deve apenas à sua variação de posição, mas também ao facto de a intensidade da força variar ao longo do contacto pé-pavimento.

Torna-se importante ter em atenção que numa análise detalhada no tempo o movimento de duas pessoas, mesmo que muito semelhantes, resulta em respostas estruturais distintas, quer seja pela diferença de pesos, de posturas ou ritmos, o que significa que esta formulação varia de indivíduo para indivíduo. Desta forma, faz sentido fazer esta análise com valores médios que tentem refletir os comportamentos de um alargado grupo.

Além disso, distinguem-se vários tipos de comportamentos do ser humano que podem levar a andamentos mais lentos ou rápidos, pelo que se consideram as seguintes possibilidades: andamento lento, andamento normal, andamento rápido, corrida lenta e corrida rápida. Isto permite abranger o máximo de situações possíveis, devido às elevadas variáveis que afastam um pouco a possibilidade de existir um “peão-tipo”.

Desta forma, é efetuada, de seguida, uma breve descrição de alguns fatores que têm influência na forma como é considerada a ação devida ao movimento de peões em pontes pedonais: Frequência da passada (fp), Velocidade da passada (vp) e comprimento da passada (lp). Na Tabela 3.1 apresentam-se valores médios associados a cada uma destas grandezas para cada um dos tipos de movimentos descritos.

Tabela 3.1 – Valores médios das características da passada, associados a cada tipo de movimento.

(Adaptado de Moutinho, 1998)

Tipo de movimento	Frequência da passada, fp (Hz)	Velocidade da passada vp, (m/s)	Comprimento da passada, lp (m)
Andamento Lento	1,7	1,1	0,65
Andamento Normal	2,0	1,5	0,75
Andamento Rápido	2,3	2,2	0,96
Corrida Lenta	2,5	3,3	1,32
Corrida Rápida	3,2	5,5	1,72

Também o tempo de contacto pé-pavimento tem influência na resposta da ponte pedonal, uma vez que traduz o tempo em que um dos pés está em contacto com o

pavimento, ou seja, o tempo de atuação da força para cada passo. Segundo Wheeler (1980), este fator está intimamente ligado com a frequência da passada, sendo que o tempo de contacto diminui à medida que aumenta a frequência da passada.

3.1.2 Componentes da ação pedonal

Tal como referido anteriormente, a força exercida por um peão ao atravessar o tabuleiro de uma ponte pedonal é constituída por 3 componentes: vertical, horizontal lateral e horizontal longitudinal. Uma vez que a rigidez axial de uma ponte é bastante considerável, não faz sentido ter em conta a vibração horizontal longitudinal uma vez que seria praticamente desprezável, na maioria dos casos.



Figura 3.2 – Forças exercidas por um peão de média estatura ao caminhar sobre a estrutura. Adaptado de da Silva (2010).

Assim, de seguida, são analisadas as duas componentes que podem ter vibrações consideráveis ao nível de uma ponte pedonal.

3.1.2.1 Componente vertical

A componente vertical da ação induzida pela travessia de um peão, numa passagem pedonal, é considerada por muitos como aquela que tem maior importância devido à sua maior magnitude quando comparada com as restantes componentes.

De acordo com RFS2-CT (2008), estudos demonstram que para vibrações verticais não é usual existir sincronização entre peões e as oscilações. Quanto um peão está sujeito a vibrações verticais as pernas e as articulações funcionam como um amortecedor, permitindo o equilíbrio de centro de gravidade.

A evolução ao longo do tempo da força vertical exercida pelo pé no pavimento, para uma passada em andamento normal, também designado por função de carga, encontra-se representada no gráfico da Figura 3.3.

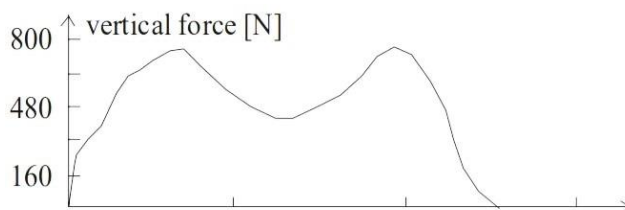


Figura 3.3 – Função de carga vertical para uma passada em andamento normal (Zivanovic, Pavic, & Reynolds, 2005).

Esta função de carga gerada, depende de vários fatores como o peso da pessoa (influencia principalmente a intensidade), a velocidade e tipo de movimento.

3.1.2.2 Componente horizontal-lateral

Em termos de intensidade, a componente horizontal é bastante inferior à vertical, no entanto, este tipo de carga introduz outras problemáticas que não existem nas restantes componentes. Tal como para a carga vertical, na Figura 3.4, apresenta-se a função de carga vertical associada a uma passada em andamento normal, para a carga horizontal:

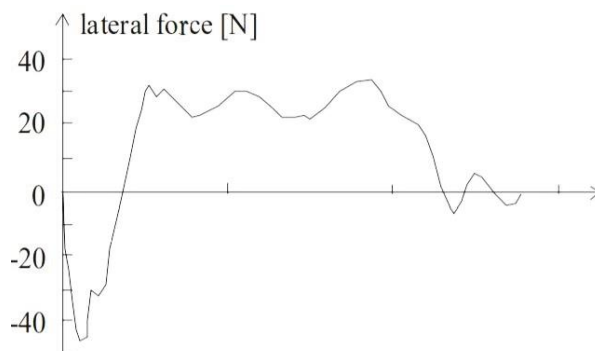


Figura 3.4 – Função de carga horizontal para uma passada em andamento normal (Zivanovic et al., 2005).

Ao contrário da carga na direção vertical que atua sempre no sentido da gravidade, a cada passada a ação horizontal introduz uma força, alternadamente para a esquerda e direita, conforme o pé que é utilizado. Adicionalmente, segundo RFS2-CT (2008), quando sujeito a forças laterais, os peões tentam compensar o movimento do seu centro de gravidade movendo-se no sentido do deslocamento da estrutura, o que resulta numa sincronização entre a frequência da passada e a frequência da vibração, que implica uma amplificação das amplitudes de vibração. Este fenómeno, causador, por exemplo, no caso da *Millennium Bridge*, é designado de *Lock-in Effect* ou *Synchronisation Phenomenom*, e está geralmente associado a longos vãos, entre os 80 e os 200 metros,

podendo resultar em instabilidade estrutural, insegurança dos peões, ou em casos extremos, no colapso da estrutura.

A Figura 3.5 consiste numa representação esquemática destas duas problemáticas associadas à componente horizontal das ações provocadas pela utilização da ponte pedonal, por parte dos peões.

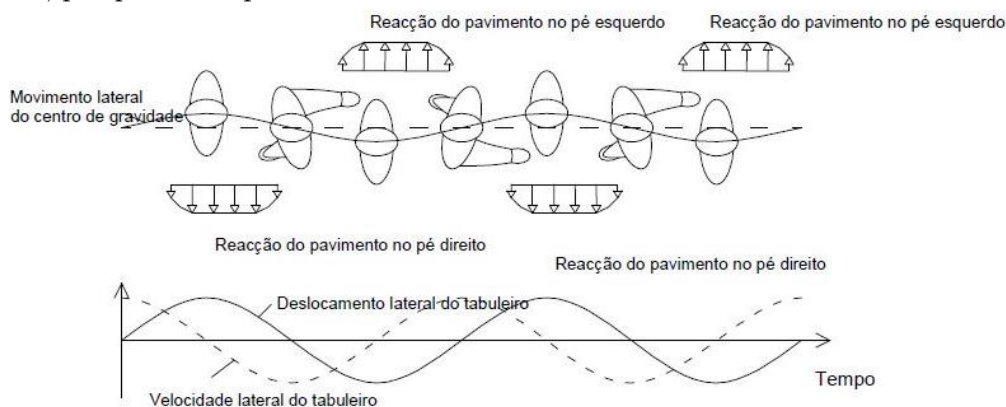


Figura 3.5 – Representação das forças exercidas pelo peão no pavimento. Adaptado de RFS2-CT (2008).

3.2 Procedimento de dimensionamento

A avaliação do (des)conforto está geralmente associada ao estado limite de serviço e na avaliação da resposta de uma ponte pedonal sobre a ação dinâmica provocada pelos peões, o nível de conforto dos utilizadores, quando sujeitos a vibrações, tem de ser considerado. As vibrações podem ser medidas e expressas de várias formas, no entanto, no caso da engenharia civil, o mais comum é utilizar acelerações para medir as vibrações associadas a uma dada estrutura. Isto deve-se ao facto de ser um parâmetro de fácil medição, recorrendo a acelerómetros a que facilmente se pode ter acesso, sendo por isso amplamente aceite como unidade de medida.

De acordo com a (RFS2-CT, 2008), no dimensionamento das pontes pedonais modernas têm de ser consideradas as ações induzidas pela ação humana, mais especificamente, o projetista deve garantir:

- As vibrações devidas ao tráfego de peões são aceitáveis para os seus utilizadores;
- O fenómeno de *lock-in* não tem lugar;
- A estabilidade da ponte pedonal é garantida quando sujeita a uma excitação intencional.

Neste sentido, o documento denominado de *Design of lightweight footbridges for human induced vibrations*, desenvolvido por especialistas nesta área do conhecimento e com o patrocínio da comissão europeia, é considerado por muitos como o guia de dimensionamento de pontes pedonais mais moderno da Europa, para as ações causadas por peões. De seguida, é então descrito o procedimento aconselhado nesse documento para a resolução desta problemática.

3.2.1 Design of lightweight footbridges for human induced vibrations (EUR 23984)

Design of Lightweight Footbridges for Human Induced Vibrations (Heinemeyer et al., 2009) também conhecido por EUR 23984, é um documento criado com o intuito de servir de referência no dimensionamento de pontes pedonais suscetíveis a ações induzidas pelos peões. Este documento teve origem em 2009 e baseou-se em dois outros documentos com o mesmo intuito: *Advanced load models for synchronous pedestrian excitation and optimised design of footbridges* (SYNPEX) e *Human induced vibrations of steel structures* (HIVOSS).

Este documento recomenda um conjunto procedimentos para dimensionar corretamente este tipo de estruturas quando sujeitas a ações pedonais. De seguida estes procedimentos são analisados de forma breve, segundo o organograma da Figura 3.6.

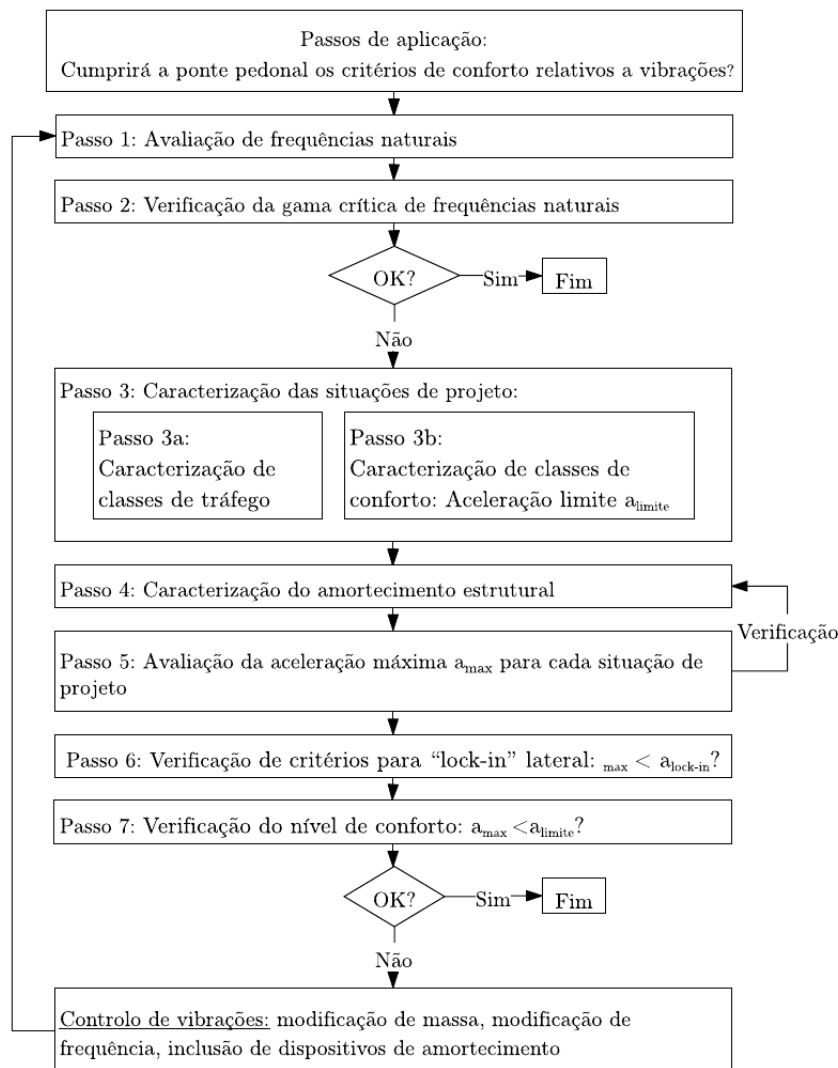


Figura 3.6 - Organograma para aplicação das recomendações EUR 23984, adaptado de RFS2-CT (2008)

3.2.1.1 Avaliação das frequências naturais

Numa fase inicial, é recomendado que o projetista responsável pelo dimensionamento da estrutura determine, com boa precisão, as frequências naturais da estrutura. Estas frequências podem ser determinadas de variadas formas, no entanto, é dada preferência à realização de um modelo numérico da estrutura recorrendo a um programa baseado no método dos elementos finitos dado que é uma ferramenta amplamente utilizada em fases de projeto.

É ainda recomendado que no caso de a massa modal dos peões corresponder a mais de 5% da massa modal da estrutura, considerar a massa dos peões no cálculo das frequências naturais.

3.2.1.2 Verificação da gama crítica de frequências naturais

Uma vez determinadas as frequências naturais de vibração, deve-se verificar se estas estão no intervalo crítico indicado. Essa gama crítica corresponde ao intervalo de frequências em que a estrutura pode ser excitada para ressonância. Assim, caso a estrutura tenha frequências naturais na gama crítica, esta deve ser alvo de uma análise dinâmica face à excitação dos peões, caso contrário, nenhuma verificação tem de ser realizada. De seguida apresentam-se a gama crítica de frequências naturais f_i :

— Para vibrações verticais e longitudinais (primeiro e segundo harmónico):

$$1,25\text{Hz} \leq f_i \leq 4,6\text{Hz} \quad (3.1)$$

— Para vibrações laterais:

$$0,5\text{Hz} \leq f_i \leq 1,2\text{Hz} \quad (3.2)$$

3.2.1.3 Caracterização das situações de projeto

Recomenda-se vivamente discutir e definir os requisitos de conforto e as condições de tráfego pedonal esperado pelo dono de obra para fixar limites realistas para o projeto da estrutura.

Para a definição do tráfego pedonal esperado devem ser tidas em conta hipóteses realistas, ou seja, em estruturas localizadas em zonas mais remotas o tráfego será mais esporádico, enquanto que em centros urbanos pode resultar num tráfego denso. Assim, procissões ou soldados em marcha não são considerados na classificação geral de tráfego, mas a inauguração da ponte pedonal, poderá condicionar o projeto. A Tabela 3.2, visa apresentar as diferentes classes de tráfego que podem ser consideradas.

Tabela 3.2 - Cassetes de tráfego em pontes pedonais. Adaptado de Heinemeyer et al. (2009).

Classe de tráfego	Densidade (Peões/m ²)	Descrição do tráfego
TC1	0,1	Muito pouco denso
TC2	0,2	Pouco denso
TC3	0,5	Denso
TC4	1,0	Muito denso
TC5	1,5	Exceccionalmente denso

Como já referido, os requisitos de conforto são bastante subjetivos pelo que neste caso deve escolher-se uma aceleração máxima sentida na ponte, segundo alguns critérios também eles subjetivos, como por exemplo, a altura e comprimento total da ponte, o número de utilizadores, a transparência do pavimento, etc. Apesar disso, são definidos valores de aceleração para as diferentes classes de conforto, valores esses que são apresentados de seguida, na Tabela 3.3.

Tabela 3.3 - Definição das classes de conforto. Adaptado de Heinemeyer et al. (2009).

Classe de conforto	Grau de conforto	Aceleração Vertical (m/s ²)	Aceleração Horizontal (m/s ²)
CL 1	Máximo	< 0,5	< 0,1
CL 2	Médio	0,5 – 1,0	0,1 – 0,3
CL 3	Mínimo	1,0 – 2,5	0,3 – 0,8
CL 4	Inaceitável	> 2,5	> 0,8

3.2.1.4 Caracterização do amortecimento modal estrutural

Com o intuito de modelar numericamente a estrutura é necessário definir os parâmetros necessários, entre eles, o amortecimento. Geralmente, é considerada a hipótese de amortecimento viscoso linear que pode ser obtido facilmente através de uma relação proporcional com a massa e a rigidez da estrutura. No entanto, a assunção desta hipótese apenas aproxima o amortecimento real para estruturas com baixos níveis de oscilação.

Para um adequado dimensionamento de pontes pedonais, são recomendados valores mínimos e médios do amortecimento (Tabela 3.4), para cada tipo de estrutura, de forma a garantir o conforto dos utilizadores.

Tabela 3.4 – Amortecimento de acordo com o material de construção. Adaptado Heinemeyer et al. (2009).

Tipo de construção	Amortecimento mínimo	Amortecimento médio
Betão armado	0,8%	1,3%
Betão pré-esforçado	0,5%	1,0%
Estruturas mistas	0,3%	0,6%
Aço	0,2%	0,4%
Madeira	1,0%	1,5%
Stress-ribbon	0,7%	1,0%

Em estruturas mais esbeltas, com grandes níveis de oscilação ou para estruturas com cargas intencionais, o amortecimento deve ser ainda mais elevado, tal como mostra a Tabela 3.5.

Tabela 3.5 - Amortecimento indicado para o material de construção em estruturas com elevadas vibrações.

Adaptado de Heinemeyer et al. (2009).

Tipo de construção	Amortecimento
Betão Armado	5,0%
Betão pré-esforçado	2,0%
Aço (Soldado)	2,0%
Aço (Parafusos)	4,0%

3.2.1.5 Avaliação da aceleração

As pontes pedonais são na realidade mais frequentemente sujeitas à ação simultânea de vários peões, não sendo esta ação simplesmente uma soma das ações individuais de cada peão. Como os peões em pontes são considerados como ações de natureza estocástica, dependendo da densidade de peões e se eles andam de forma mais ou menos sincronizada, é possível que interajam com a ponte em vibração.

Assim, a resposta do sistema depende da ação e das propriedades estruturais e uma vez que estas não podem ser calculadas sem incertezas associadas, a resposta calculada do sistema também terá alguma variação.

Assim, no documento são descritos pormenorizadamente métodos para obter a aceleração máxima a_{\max} apresentada pela ponte pedonal, entre os quais:

- Modelo de ações harmónicas;
- Método dos espectros de resposta para fluxos de peões.

3.2.1.6 Verificação de critérios para *lock-in* lateral

Como já foi referido anteriormente, o efeito de *lock-in* é uma possível consequência de vibrações laterais de uma ponte pedonal. Quando uma ponte apresenta vibrações laterais, causa movimentações do centro de gravidade do utilizador, que ao tentar

compensar esse movimento move, intuitivamente, o seu centro de gravidade na direção do deslocamento da ponte, sincronizando com a oscilação da ponte e criando amplitudes ainda maiores. Este efeito não é observado para vibrações verticais uma vez que estas são absorvidas pelas pernas e articulações, funcionando como amortecedor e impedindo que o utilizador sinta este fenómeno.

Segundo Heinemeyer et al. (2009), é possível determinar o número limite de peões (N_L) a partir do qual se desencadeia o fenómeno *lock-in*, recorrendo à expressão:

$$N_L = \frac{8\pi\xi m^* f}{k} \quad (3.3)$$

Em que ξ representa o amortecimento estrutural, m^* a massa modal, f a frequência natural da estrutura e k é uma constante com valor de 300 Ns/m para frequências entre 0,5 e 1,0 Hz.

Outra forma igualmente correta de prever o momento em que se desencadeia este fenómeno de *lock-in* consiste em determinar experimentalmente a aceleração limite a partir da qual o fenómeno começa a ocorrer.

3.2.1.7 Verificação do nível de conforto

A resposta calculada, em termos de aceleração, para o modelo específico da estrutura deve então ser comparado com o valor limite determinado anteriormente na fase de caracterização das fases de projeto. Caso esse valor não esteja dentro do limite especificado, o documento sugere ainda formas para minimizar os valores de aceleração máximos obtidos através dos seguintes métodos:

- Modificação da massa;
- Modificação da rigidez;
- Modificação do amortecimento estrutural;
- Adição de amortecimento.

3.3 Estado Limite de vibração

Os estados limites de serviço estão associados principalmente a danos ao nível do conforto das pessoas, do aspeto da estrutura ou do seu funcionamento. Nesse sentido, a vibração consiste num estado limite de serviço, no entanto, estabelecer critérios de conforto, não é uma tarefa fácil, desde logo devido à subjetividade deste assunto, mas também devido aos inúmeros fatores em jogo.

Para cada indivíduo podem ser definidos limites de perceção ou graus de desconforto. A perceção das vibrações varia de pessoa-para-pessoa, existindo vários fatores psicológicos que podem ter um papel importante nesta questão, mas não só, a

posição (deitado, sentado ou em pé) ou com a atividade (parado, em marcha ou corrida) também tem influência na percepção dos utilizadores, exemplo disso é que, segundo Roos (2009), um peão mais facilmente sente as vibrações caso se encontre parado, do que se estiver a andar. Outra questão importante é que o ser humano deteta com a mesma facilidade vibrações verticais e horizontais. Conforme o mesmo autor, mais facilmente são detetadas vibrações laterais, sendo que nesse caso, os peões rapidamente alteram a sua marcha, aproximando-se do corrimão ou mesmo parando.

Esta subjetividade leva a que existam inúmeros estudos sobre esta matéria o que resulta em diferentes requisitos para cada norma ou regulamento para esta questão associada às pontes pedonais. Assim, de seguida, são analisadas algumas diferenças dos limites aconselhados por diferentes normas para tratar, na fase de dimensionamento, de possíveis vibrações excessivas.

3.3.1 Eurocódigos

Segundo a Norma NP EN 1990:2009 (CEN, 2009), também conhecida por Eurocódigo 0 torna-se importante efetuar uma análise detalhada em casos em que a ponte pedonal apresenta uma frequência fundamental inferior a 5 Hz para vibrações verticais e de 2.5 Hz para vibrações horizontais. Caso contrário não é necessário efetuar nenhuma análise.

Assim, para estruturas em que seja necessário elaborar uma análise mais detalhada, são definidas na Tabela 3.6, que se encontra no eurocódigo, as acelerações máximas que podem ser registadas na estrutura para que sejam garantidos os requisitos de confortabilidade dos utilizadores.

Tabela 3.6 – Valores máximos de aceleração segundo o Eurocódigo 0.

Condições	a_{\max} (m/s ²)
Vibrações verticais	0,7
Vibrações horizontais, com utilização normal	0,2
Vibrações horizontais, com multidão	0,4

Nos eurocódigos 1, 3 e 5 são também definidas diferentes formulações que têm como propósito auxiliar o projetista no cálculo das acelerações a que os diferentes tipos de estruturas, compostas por aço ou madeira por exemplo, estão sujeitas.

3.3.2 British Standard

A norma britânica (BS5400, 1978) foi um dos primeiros regulamentos a contemplar o estado limite de vibração em pontes pedonais, baseando-se no modelo de Blanchard, Davies, & Smith (1977). Esta norma exige a verificação do estado limite de

vibrações tanto na direção vertical como na horizontal, no entanto, apenas propõe um critério de ação modelo e de dimensionamento para vibrações verticais, deixando o critério associado a vibrações horizontais de acordo com a experiência do projetista da estrutura.

Em condições de serviço para estruturas cuja frequência fundamental f_1 seja inferior a 5 Hz, esta norma impõe que sejam verificadas as acelerações apresentadas pela estrutura $a_{\max,vert}$ e que se verifique a expressão (3.4).

$$a_{\max,vert} \leq 0,5f_1^{0,5} \quad (m / s^2) \quad (3.4)$$

3.3.3 Ontario Highway Bridge Design Code

Baseando-se também na metodologia criada por Blanchard, Davies, & Smith (1977), a norma canadiana OHBDC (ONT83, 1983), apresenta um critério mais conservador em comparação com a norma britânica. Após a realização de vários estudos à sensibilidade humana a vibrações verticais, esta norma decreta que a aceleração máxima apreciada numa ponte pedonal que tenha frequências inferiores a 4 Hz, deve respeitar a seguinte condição:

$$a_{\max,vert} \leq 0,25f_1^{0,78} \quad (m / s^2) \quad (3.5)$$

Para evitar o acoplamento entre modos de vibração horizontal e vertical, esta norma exige que as frequências na direção lateral e longitudinal das estruturas nunca sejam inferiores ao menor dos valores entre 4Hz ou $1,5f$, onde f corresponde à frequência fundamental na direção vertical.

3.3.4 Comparação

Antes de iniciar a comparação, é importante ter em consideração que a subjetividade associada ao conforto dos peões, que utilizam as pontes pedonais, é uma questão de grande relevo na normalização das vibrações. Assim, é normal que existam diferenças entre as várias normas que são aplicadas em diferentes locais, especialmente no que aos limites máximos de vibração diz respeito.

Tanto a norma britânica como os eurocódigos definem as estruturas com frequências fundamentais acima de 5 Hz, como estruturas que dispensam a verificação às ações causadas pelos peões, enquanto que para a norma canadiana, apenas frequências abaixo dos 4 Hz exigem esta análise.

Apesar do facto de as vibrações laterais serem mais facilmente sentidas pelo ser humano, quando comparadas com as vibrações verticais, tanto as normas britânicas como as canadianas referem que estas devem ser estudadas, sem indicar o procedimento ou os

critérios de dimensionamento, deixando essa questão ao critério do projetista. Apenas os eurocódigos definem especificamente os procedimentos e critérios de dimensionamento para este tipo de vibrações.

Para as vibrações verticais são estabelecidas diferentes formulações para indicar os limites das acelerações, sendo que apenas no caso dos eurocódigos essas formulações não dependem da frequência fundamental da estrutura, uma vez que são constantes. Assim, a Tabela 3.7 permite comparar os vários valores máximos de aceleração para as diferentes frequências naturais.

Tabela 3.7 – Valores máximos de aceleração para as diferentes frequências fundamentais da estrutura.

f_N (Hz)	Eurocódigo a_{\max} (m/s ²)	BS5400 a_{\max} (m/s ²)	ONT83 a_{\max} (m/s ²)
1,00	0,7	0,50	0,25
2,00		0,71	0,43
3,00		0,87	0,59
4,00		1,00	0,74
5,00		1,12	0,88

Analisando as tabelas, é possível concluir que as normas canadianas apresentam um critério mais conservativo, permitindo menores acelerações para estas ações, quando comparado com as normas britânicas. Por outro lado, o eurocódigo apresenta um valor constante para as vibrações máximas, independente das características da estrutura.

3.4 Controle de vibrações

Como se viu anteriormente, as pontes pedonais apresentam, por vezes, problemas de excesso de vibrações provocados pela passagem de peões durante uma travessia. Nesse caso o normal funcionamento da estrutura pode ser posto em causa, caso as vibrações não sejam controladas.

Estruturas que não respeitem os limites estabelecidos pelas normas, exigem então alterações na sua composição para que as oscilações diminuam para valores aceitáveis. Dessa forma, existem três métodos que, alterando as características da estrutura, podem diminuir os valores obtidos de resposta da estrutura à ação pedonal:

- Aumento da massa da estrutura;
- Aumento da rigidez da estrutura;
- Aumento do amortecimento estrutural.

3.4.1 Alteração da massa da estrutura

O aumento da massa da estrutura consiste geralmente em ampliar o peso da ponte, aumentando a massa do pavimento por exemplo, com o intuito de reduzir as vibrações provocadas pelas pessoas. A utilização desta técnica pode exigir grandes quantidades de massa o que leva a um aumento da carga estática da ponte. Adicionalmente, o acréscimo resulta numa diminuição das frequências naturais, aumentando a sensibilidade da estrutura quando excitada pela ação do vento, por exemplo.

3.4.2 Alteração da rigidez da estrutura

Outra solução possível passa por evitar frequências naturais mais baixas, evitando as frequências associadas à ação pedonal, através de um aumento da rigidez. Segundo Abreu (2008) este aumento de rigidez pode ser obtido reforçando a estrutura com tirantes, ou instalando guarda corpos mais rijos.

Em teoria, para duplicar a frequência natural de uma estrutura, a rigidez teria de ser multiplicada por quatro, considerando ainda que a massa se matéria constante. Assim, um aumento de rigidez torna-se uma solução apelativa caso o aumento necessários não seja elevado, isto é, quando se está perto das frequências limites (5 Hz), caso contrário, o aumento de rigidez exigido é tal que torna esta técnica inviável.

3.4.3 Alteração do amortecimento estrutural

Outra técnica possível de aplicar para diminuir as vibrações em pontes pedonais consiste em aumentar o amortecimento global da estrutura. O acréscimo de amortecimento estrutural pode ser garantido aumentando o atrito existente nas ligações e nos aparelhos de apoio, podendo também elementos não estruturais, como os guarda-corpos, contribuir para este aumento (Abreu, 2008).

Segundo o mesmo autor, o método mais eficiente para aumentar o amortecimento de um sistema consiste em instalar um sistema amortecedor de vibrações, que permitem uma rápida e eficiente dissipação da energia vibratória. Os dispositivos de amortecimento podem ser de controlo ativo, semi-ativo ou passivo, contudo, em estruturas de engenharia civil, o mais habitual é utilizar sistemas passivos devido à fiabilidade que apresentam e aos seus baixos custos, manutenção e por não utilizarem qualquer fonte de energia exterior.

Dentro dos sistemas de amortecimento passivo, existem dois tipos que se destacam, na aplicação no ramo da engenharia civil: os TMDs e os amortecedores de

fluido viscoso. São dois sistemas com modos de funcionamento diferentes, que são analisados de seguida.

Os TMD (*Tuned Mass Dampers*) são dispositivos constituídos por uma massa adicional que são anexados à estrutura através de uma mola e de um amortecedor dispostos em paralelo. Este sistema atua como um oscilador de um grau de liberdade cuja frequência se situa ligeiramente abaixo da frequência natural da estrutura, atuando no sentido contrário ao movimento do sistema principal e, conseqüentemente, reduzindo os níveis de vibração da estrutura.

Estes dispositivos têm sido aplicados com sucesso em estruturas de engenharia civil, em casos em que a solicitação é de natureza periódica e com a resposta dinâmica dominada pela contribuição de um modo de vibração específico. Todavia, para controlar simultaneamente a contribuição de modos de ordem superior, como é o caso de pontes pedonais excitadas pela ação de peões, torna-se necessária a introdução de mais do que um TMD.



Figura 3.7 – Exemplo da colocação de um TMD sob o tabuleiro de uma ponte pedonal.

Relativamente aos amortecedores de fluido viscoso, garantem a dissipação de energia através da passagem forçada de um fluido viscoso por vários orifícios. O dispositivo é constituído por um cilindro e um pistão de cabeça perfurada, que quando entra em funcionamento empurra o fluido, provocando o seu movimento. A circulação do fluido dentro do amortecedor absorve a energia cinética, transformando-a em calor.

Um exemplo de sucesso da aplicação destes dispositivos foi a ponte Millennium Bridge, já referidos anteriormente, que apresentava grandes vibrações laterais excessivas devido à ação pedonal. De acordo com Smith & Fitzpatrick (2001), a aplicação de 37 amortecedores de fluido viscoso no tabuleiro, afastados de 16 metros entre si, permitiu aumentar o rácio de amortecimento de 0,5% para 20% e, conseqüentemente reduzir as acelerações em cerca de 40 vezes.



Figura 3.8 – Exemplo da colocação de um amortecedor de fluido viscoso.

3.5 Considerações Finais

Neste capítulo foi apresentada uma das principais problemáticas associadas às pontes pedonais modernas: as vibrações excessivas provocadas pela ação dos peões. Estas vibrações podem levar a um grave desconforto na utilização destas estruturas ou até mesmo à impossibilidade da sua utilização em casos extremos.

Numa fase inicial, o capítulo visa caracterizar as diferentes ações dinâmicas periódicas provocadas pela ação do homem ao atravessar uma ponte pedonal, analisando as várias componentes envolvidas que resultam em diferentes tipos de vibrações.

Posteriormente, é efetuada uma descrição dos procedimentos sugeridos pelo documento EUR 23984, que sugere a aplicação de 7 passos para verificar a conformidade ou não da ponte pedonal metálica em análise, seja em fase de projeto ou já durante a sua utilização.

Apesar das normas sugerirem limites de segurança que garantam a confortabilidade dos utilizadores destas estruturas, cada norma sugere também os seus próprios limites, de acordo com estudos efetuados nesse âmbito. Assim, são ainda descritos e comparados os valores limites impostos pelas normas europeias, britânicas e canadenses.

Finalmente, são apresentados vários métodos de mitigação das vibrações para pontes pedonais. Esses métodos podem consistir em aumentar a massa, rigidez ou amortecimento da estrutura, no entanto, aquele que é mais viável acaba por ser o último, que, geralmente, consiste na aplicação de sistemas passivos na estrutura, isto é, amortecedores com o intuito de dissipar eficientemente a energia que causa as vibrações.

4 Metodologias de ensaios de vibração

4.1 Considerações iniciais

A identificação modal com base na realização de ensaios de vibração tornou-se numa ferramenta bastante utilizada para caracterizar o comportamento dinâmico das estruturas de engenharia civil, devido ao seu carácter não destrutivo e ao elevado grau de conhecimento que permitem obter. Estes ensaios visam apoiar, não só a implementação de correções ou reparações a estruturas existentes que apresentem danos ou vibrações excessivas, mas também a fase de projeto, tendo como intuito efetuar a caracterização e análise do comportamento dinâmico de estruturas mais complexas.

Para avaliar o comportamento dinâmico de estruturas ao longo da sua vida útil são também utilizados modelos numéricos, a partir dos quais se pode efetuar uma avaliação de segurança em vários cenários possíveis ao longo da sua exploração. Embora a utilidade destes modelos numéricos seja evidente, podem existir dúvidas relativamente à sua fiabilidade e adequabilidade para simular determinadas realidades físicas, pelo que a utilização de ensaios pode permitir calibrar e validar estes modelos (Mendes, 2010).

Importa ainda salientar que as atividades relacionadas com a instrumentação e observação e tratamento de dados exigem a contribuição de conhecimentos de várias áreas para além da engenharia civil, nomeadamente as engenharias eletrónica, mecânica e informática (Mendes, 2010).

Neste capítulo, são apresentados os diversos tipos de ensaios de vibrações que podem ser utilizados para avaliação das propriedades dinâmicas de estruturas de engenharia civil, especificando as suas vantagens, desvantagens e características que os distinguem, abordando as metodologias de ensaio, nomeadamente para os ensaios de vibração ambiental, uma vez que a sua utilização se generalizou na caracterização do comportamento dinâmico de estruturas de engenharia civil. Para os ensaios de vibração ambiental são também abordados os principais aspetos a ter em conta na preparação e realização, discutindo-se o processo de seleção do tipo de equipamento a utilizar, referindo-se os principais cuidados a ter no pré-processamento e processamento da informação experimental adquirida nos ensaios.

4.2 Tipos de ensaios dinâmicos

Existem dois objetivos para a execução de ensaios dinâmicos: em estruturas novas utilizam-se para caracterizar os parâmetros modais (frequências naturais, modos de vibração e amortecimentos modais) para avaliar a conformidade dos modelos de projeto,

designando-se neste enquadramento por ensaios de receção; em estruturas antigas utilizam-se para avaliar a condição estrutural das obras na perspectiva de aferir o estado de deterioração ou simplesmente para estimar as condições de serviço da estrutura.

Podem-se distinguir fundamentalmente três tipos de técnicas de ensaio *in situ* para caracterizar dinamicamente estruturas: Ensaios de vibração forçada, Ensaios de vibração livre e Ensaios de vibração ambiental. Estes devem ser selecionados com base no objetivo pretendido, tendo sempre em consideração os equipamentos a utilizar, os custos a eles associados e a caracterização experimental que se pretende efetuar.

4.2.1 Ensaios de vibração forçada

Entre os três tipos de ensaios de vibração, que podem ser efetuados *in situ*, para determinar as propriedades dinâmicas de uma estrutura, os ensaios de vibração forçada são utilizados quando é necessário recorrer a um método mais direto e potencialmente preciso.

Tal como indica o nome, este tipo de ensaio consiste em impor uma excitação controlada (forças periódicas, impulsivas ou aleatórias), em um ou vários pontos escolhidos duma estrutura e na respetiva medição da resposta (a essa excitação), normalmente em acelerações, em diversos pontos da estrutura. Para a imposição da excitação, geralmente, são utilizados excitadores servo-hidráulicos ou excitadores de massa excêntrica, apresentados na Figura 4.1.



Figura 4.1 – Excitador: a) rotativo de massa excêntrica com motor elétrico (LNEC); b) de translação com motor servo hidráulico (EMPA)

Uma vez que este tipo de ensaios está associado a elevados custos, a sua realização é, usualmente, afastada por longos períodos de tempo, não permitindo assim obter grandes quantidades de informação experimental sobre as propriedades dinâmicas das obras em estudo.

Em muitas circunstâncias, este tipo de ensaio exige a interrupção da utilização durante a realização de ensaios, que pode ser especialmente desvantajoso em caso de pontes de grande tráfego. Além disso, na utilização destes equipamentos, na gama de

frequências abaixo de 1 Hz, torna-se complicado obter níveis de força capazes de excitar adequadamente estruturas de grandes dimensões, resultando num número considerável de modos de vibração, com frequências inferiores a 1 Hz, que dificilmente serão identificados com um ensaio de vibração forçada (Rodrigues, 2004).

Correlacionando a excitação aplicada na estrutura com a resposta medida através das funções de resposta em frequência (FRF), por exemplo, torna-se possível obter estimativas das frequências naturais, dos modos de vibração e dos coeficientes de amortecimento modais.

Apesar de se ter registado um elevado desenvolvimento das técnicas de identificação associadas aos ensaios de vibração ambiental e de monitorização contínua, os ensaios de vibração forçada desempenham ainda um papel relevante quando se torna necessário verificar a eficácia de dispositivos de controlo de vibrações (Á. Cunha, Caetano, Magalhães, & Moutinho, 2012) e em estruturas com baixos níveis de vibração.

4.2.2 Ensaio de vibração livre

O ensaio de vibração livre consiste em impor uma deformação inicial à estrutura e libertar, repentinamente, deixando-a vibrar em regime livre. Essas condições podem ser impostas recorrendo à libertação súbita de massas suspensas ou do corte de uma barra tracionada, ao contrário do que acontece na vibração forçada, onde a excitação é aplicada pela imposição de forças.

As propriedades dinâmicas da estrutura, mais especificamente, as frequências naturais, configurações modais e coeficientes de amortecimento modal, podem ser obtidas através da medição e análise da sua resposta a essa excitação.

Quando comparado com o ensaio de vibração ambiental, este ensaio impõe amplitudes superiores, permitindo uma melhor determinação dos coeficientes de amortecimento associados a cada modo de vibração.



Figura 4.2 – Ensaio de vibração livre de ponte pedonal sobre o rio Ave: a) Equipamento de ensaio; b) Corte do bloco suspenso para ensaio. (Moreira, 2013)

O ponto onde deve ser aplicada a força a impor deve ser escolhida com critério, uma vez que os modos de vibração que tenham esse ponto como nodo não são excitados e, conseqüentemente, não é possível identificar as suas características. Adicionalmente, a realização deste ensaio numa estrutura em serviço implica, obviamente, a interrupção da sua utilização normal, apresentando essa desvantagem, tal como os ensaios de vibração forçada (Rodrigues, 2004).

4.2.3 Ensaios de vibração ambiental

Os ensaios de vibração ambiental, ou ensaios com excitação natural, consistem em medir a resposta das estruturas, habitualmente com acelerómetros, às ações a que elas estão normalmente sujeitas, como por exemplo o vento e/ou o tráfego dos peões, para determinar os parâmetros modais das estruturas, ou seja, frequências naturais, modos de vibração e amortecimento modal.

Ao contrário dos ensaios referidos anteriormente, este tipo de ensaio pode ser executado sem obrigar a uma interrupção do funcionamento das estruturas, pois são as próprias ações decorrentes desse funcionamento que constituem as fontes de excitação dinâmica que induzem as respostas que são medidas. Permitem ainda identificar as características de modos de vibração com frequências abaixo de 1 Hz, o que, como já se referiu, é difícil de conseguir na prática com ensaios de vibração forçada (Rodrigues, 2004).

Apesar de não exigir equipamentos para provocar as excitações artificiais à estrutura em análise, ao contrário dos restantes tipos de ensaio, obriga a utilização de equipamentos de medição de resposta com elevada sensibilidade e de aplicação de técnicas de identificação adequadas para esse fim. Também o facto de se trabalhar com frequências muito baixas, se transforma numa desvantagem, pois não permite a obtenção de forma exata dos coeficientes de amortecimento.

4.3 Monitorização dinâmica permanente

A observação temporal de algumas grandezas físicas que permitam caracterizar o comportamento estrutural de estruturas de engenharia civil representa uma atividade de elevada importância para controlar os níveis de conforto e de segurança destas obras. Para caracterizar o comportamento dinâmico ao longo do tempo é possível instalar sistemas equivalentes aos utilizados nos ensaios de vibração ambiental, para a medição dessas grandezas, todavia é recomendável ter em conta as diversas especificidades da

estrutura como a sua dimensão, complexidade e os seus problemas específicos, de maneira que o sistema se adegue ao que se pretenda observar ao longo do tempo (Mendes, 2010).

A utilização em contínuo destes sistemas permite identificar fenómenos de deterioração evolutiva, analisando as alterações do comportamento dinâmico de uma obra ao longo tempo, por exemplo analisando as diferenças no comportamento dinâmico de uma estrutura antes e depois de um evento sísmico. Podem permitir ainda a caracterização das ações sísmicas, bem como a resposta de uma determinada estrutura a essa ação, representando ferramentas de elevada importância no controlo da sua segurança e, no caso de pontes pedonais, no controlo da confortabilidade dos seus utilizadores.

Nesse sentido, para que estes sistemas funcionem com sucesso é importante implementar uma boa organização ao nível do processo de recolha, gestão e análise dos dados observados, o que impõe a existência de equipas com elevados conhecimentos sobre a estrutura, os sensores utilizados, e das atividades de processamento e avaliação dos dados e procedimentos para a respetiva aceitação e adequada apresentação, uma vez que aparelhos não criteriosamente selecionados, localizados e instalados podem levar a dados desnecessários, originando perdas de tempo e dinheiro sem apresentar melhorias nas condições de segurança.

4.4 Preparação e realização de ensaios de vibração ambiental

A realização destes ensaios tem como objetivo observar a evolução temporal de certas grandezas físicas para, deste modo, caracterizar o comportamento dinâmico da estrutura de forma o mais fiável possível. Neste contexto, é bastante importante preparar antecipadamente os ensaios para obter eficientemente resultados precisos.

Devido às reduzidas perturbações, geralmente, apresentadas nas estruturas durante ensaios de vibração ambiental, deve ter-se um especial cuidado na preparação, por exemplo escolhendo acelerómetros com elevada sensibilidade para garantir uma adequada caracterização experimental da estrutura em estudo.

Uma vez que não existem regras simples para avaliar a forma mais adequada de instalar o sistema de ensaio, é necessário ter em atenção vários aspetos como a dimensão e a complexidade da obra, bem como os problemas específicos de cada obra. Segundo Mendes (2010), os aparelhos devem ser criteriosamente selecionados, localizados e instalados, envolvendo muitas vezes a contribuição de especialistas de diversas áreas para além da Engenharia civil.

Assim, o planeamento e preparação dos ensaios a realizar são uma fase de elevada importância, pelo que são abordados, nesta seção, alguns aspetos a ter em conta na

preparação e realização, referindo-se a metodologia que é empregue, os equipamentos e o processo de pré-processamento e processamento da informação experimental adquirida.

4.4.1 Equipamentos de ensaio

A observação da resposta de estruturas ao longo do ensaio de vibração ambiental é garantida pelo sistema de aquisição de dados, que transforma uma grandeza física (usualmente aceleração) representativa da resposta da estrutura, num sinal elétrico. Esses sinais elétricos necessitam, geralmente, de ser condicionados de forma a serem adequados para converter num sinal digital e mais tarde processados, analisados e interpretados num computador.

Os sistemas de aquisição de dados são compostos por: Transdutores e Equipamento de aquisição de dados. Os transdutores são responsáveis por exprimir a resposta do sistema estrutural em termos de sinais elétricos, para que estes sejam, posteriormente, processados e armazenados no equipamento de aquisição de dados. No caso de converterem as oscilações provocadas por vibrações em acelerações chamam-se acelerómetros.

Para efetuar a medição da resposta das estruturas a ações ambiente, os equipamentos de medição devem ter uma elevada sensibilidade, medindo movimentos de baixa amplitude de vibração, e devem ter uma resposta em frequência adequada para a gama de frequências em que se encontram os principais modos de vibração da estrutura.

Existem dois tipos de acelerómetros no mercado para realizar essa tarefa: acelerómetros do tipo *force balance* e piezoelétricos. O primeiro tipo consiste num sistema constituído por uma massa e um mecanismo que controla a posição dessa massa quando sujeita a acelerações, gerando uma corrente proporcional à aceleração. Os acelerómetros piezoelétricos baseiam-se na capacidade de alguns cristais, quando sujeitos a uma deformação, gerarem cargas elétricas proporcionais a essa deformação (Rodrigues, 2004).

Nas tabelas seguintes apresentam-se alguns modelos de acelerómetros e equipamentos de aquisição de dados compatíveis com esses acelerómetros. Assim, na Tabela 4.1 e na Tabela 4.2, identificam-se alguns modelos do tipo *force balance*, enquanto que na Tabela 4.3 e na Tabela 4.4 encontram-se equipamentos do tipo piezoelétricos.

Tabela 4.1 – Características de alguns acelerômetros do tipo *force balance*.



Marca: Kinemetrics (www.kinemetrics.com)
Modelo: EpiSensor ES-U2 (uniaxial)
Gama de amplitudes: configurável em $\pm 0,25g$, $\pm 0,5g$, $\pm 1g$, $\pm 2g$ ou $\pm 4g$
Gama dinâmica: <155 dB
Resposta dinâmica: de DC até 200 Hz



Marca: Kinemetrics (www.kinemetrics.com)
Modelo: EpiSensor ES-T (triaxial)
Gama de amplitudes: configurável em $\pm 0,25g$, $\pm 0,5g$, $\pm 1g$, $\pm 2g$ ou $\pm 4g$
Gama dinâmica: <155 dB
Resposta dinâmica: de DC até 200 Hz



Marca: Kinemetrics (www.kinemetrics.com)
Modelo: EpiSensor 2 ES-T2 (triaxial)
Gama de amplitudes: configurável em $\pm 0,25g$, $\pm 0,5g$, $\pm 1g$, $\pm 2g$ ou $\pm 4g$
Gama dinâmica: <166 dB
Resposta dinâmica: de DC até 320 Hz



Marca: Guralp (www.guralp.com)
Modelo: CMG 5U (uniaxial)
Gama de amplitudes: configurável em $\pm 0,1g$, $\pm 0,5g$, $\pm 1g$, $\pm 2g$
Gama dinâmica: <127 dB
Resposta dinâmica: de DC até 100 Hz



Marca: Guralp (www.guralp.com)
Modelo: CMG 5TC (triaxial)
Gama de amplitudes: configurável em $\pm 0,1g$, $\pm 0,5g$, $\pm 1g$, $\pm 2g$, $\pm 4g$
Gama dinâmica: <140 dB
Resposta dinâmica: de DC até 100 Hz

Tabela 4.2 – Características de alguns equipamentos para aquisição de sinal de aceleração compatíveis com acelerômetros *force balance*.



<p>Marca: Kinemetrics (www.kinemetrics.com)</p> <p>Modelo: Quanterra Q330</p> <p>Resolução da placa de ADC: 32 bits</p> <p>Memória: 32MB</p> <p>Transdutores: Família Kinemetrics</p>



<p>Marca: Kinemetrics (www.kinemetrics.com)</p> <p>Modelo: Etna 2</p> <p>Resolução da placa de ADC: 24 bits</p> <p>Memória: Cartão de memória de 16GB</p> <p>Transdutores: Família Kinemetrics</p>
--



<p>Marca: Kinemetrics (www.kinemetrics.com)</p> <p>Modelo: Altus K2</p> <p>Resolução da placa de ADC: 24 bits</p> <p>Memória: 20 MB</p> <p>Transdutores: Família Kinemetrics</p>
--



<p>Marca: Guralp (www.guralp.com)</p> <p>Modelo: DM24SxEAM-U</p> <p>Resolução da placa de ADC: 24 bits</p> <p>Memória: até 128 GB</p> <p>Transdutores: Família Guralp</p>
--

Tabela 4.3 – Características de alguns acelerômetros piezoelétricos.



<p>Marca: Endevco (www.endevco.com)</p> <p>Modelo: 86 Seismic IEPE (uniaxial)</p> <p>Sensibilidade: 10000 mV/g</p> <p>Resposta dinâmica: 0,01 até 100 Hz</p>



<p>Marca: Endevco (www.endevco.com)</p> <p>Modelo: 45A Triaxial IEPE (triaxial)</p> <p>Sensibilidade: 1000 mV/g</p> <p>Resposta dinâmica: 0,5 até 6000 Hz</p>
--




<p>Marca: PCB Piezotronics (www.pcb.com)</p> <p>Modelo: 333B50 (uniaxial)</p> <p>Sensibilidade: 1000 mV/g</p> <p>Resposta dinâmica: 0,5 até 3000 Hz</p>
--



<p>Marca: PCB Piezotronics (www.pcb.com)</p> <p>Modelo: 356B18 (Triaxial)</p> <p>Sensibilidade: 1000 mV/g</p> <p>Resposta dinâmica: 0,5 até 3000 Hz</p>
--


Tabela 4.4 – Características de alguns equipamentos para aquisição de sinal de aceleração compatíveis com acelerômetros piezoelétricos.

	Marca: Oros (www.oros.com) Modelos: Mobi-Pack, OR34, OR35, OR36, OR38 Número de canais de medição: 2 a 1000 canais
	Marca: Bruel & Kjaer (www.bksv.com) Modelo: Lan-XI Número de canais de medição: 2 a 1000 canais

Os transdutores devem ser colocados de forma a mover-se com a estrutura, podendo ser fixados a esta através de uma chapa.

Atualmente, a constante evolução da tecnologia permite que existam outros tipos de aparelhos que façam medição de vibrações. Exemplo disso são os *Smartphones* ou *Tablets*, que geralmente já têm incorporados acelerômetros que permitem realizar a medição destas grandezas. Apesar de não terem o mesmo nível de sensibilidade dos aparelhos especializados para essa função, em estruturas com menor rigidez, como algumas pontes metálicas (como se mostra neste trabalho), permitem já obter um nível de rigor bastante aceitável. Na Tabela 4.5 são apresentadas as características dos sensores incorporados num *Tablet* e num *Smartphone*.

Tabela 4.5 – Características dos sensores de alguns *Smartphones* e *tablets*.

	Modelo: Nexus 7
	Sensor: MPL Accelerometer
	Power: 0,50 mA
	Resolução: 0,0012 m/s ²
	Alcance máximo: 39,2266 m/s ²
	Modelo: BQ Aquaris E5
Sensor: LSM330 3axis Accelerometer	
Power: 0,13 mA	
Resolução: 0,0039 m/s ²	
Alcance máximo: 32,0000 m/s ²	

4.4.2 Planeamento de ensaios de vibração ambiental

A realização de ensaios de vibração ambiental deve ser sempre antecedida de um rigoroso planeamento, que deve ter como objetivo assegurar que são obtidos resultados de qualidade, de modo a alcançar resultados fiáveis na identificação modal.

Desta forma, em primeiro lugar, é aconselhável realizar um estudo pormenorizado da estrutura a ensaiar, através da análise das peças desenhadas da estrutura, dos restantes elementos do projeto e até de uma visita preliminar à estrutura, com o intuito de efetuar uma inspeção visual e registo fotográfico. Aplicando este conhecimento, e ainda antes de passar ao ensaio propriamente dito, deve ser desenvolvido um modelo numérico da estrutura, de forma a ter uma estimativa das frequências e das configurações dos seus modos naturais de vibração, para definir questões como o número e localização dos pontos a medir e as frequências de amostragem a utilizar nos ensaios (Mendes, 2010).

Tal como referido anteriormente, estes ensaios têm como objetivo identificar as frequências e configurações modais de forma o mais clara possível, razão pela qual se torna essencial medir a resposta da estrutura, num número de pontos suficientes. O número de pontos deve ser ajustado às características da estrutura (por exemplo o número de tramos de uma ponte), mas também ao grau de refinamento pelo qual se pretende identificar as configurações modais.

Os ensaios podem ser realizados em uma ou em várias fases, em função do número de pontos a instrumentar, do número total de equipamentos de medição (sensores) disponíveis e do tempo disponível para realizar a operação. No caso de o número de pontos a instrumentar ser igual ou inferior ao número de equipamentos disponíveis, o ensaio pode ser realizado numa única fase, minimizando assim o tempo de ensaio, tal como é possível observar na Figura 4.3.

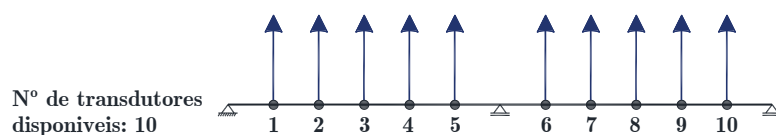


Figura 4.3 – Metodologia de ensaio realizada numa única fase.

No entanto, em muitos casos o número de pontos é superior ao número de sensores disponíveis, criando a necessidade de efetuar o ensaio faseadamente. Nesse caso, o procedimento consiste em selecionar um conjunto de pontos fixos para os ensaios, também denominados de pontos de referência, enquanto que os restantes pontos vão variando ao longo da estrutura e, posteriormente, correlacionar os resultados dos diferentes ensaios. Torna-se importante salientar que os pontos de referência devem evitar as posições dos nodos dos modos de vibração.

Para a realização de um ensaio de forma faseada, existem duas metodologias que podem ser empregues, em função dos números de equipamentos disponíveis e do número de pontos a instrumentar, que são explicadas e exemplificadas utilizando o mesmo esquema anterior considerando ainda que existem apenas quatro transdutores.

A primeira metodologia consiste em fixar os pontos de referência para todos os ensaios, enquanto os restantes sensores vão avançando de forma sucessiva pelos restantes

pontos, tal como mostra a Figura 4.4. Esta é a metodologia adotada mais frequentemente, uma vez que permite uma mais direta análise de identificação modal com a informação obtida.

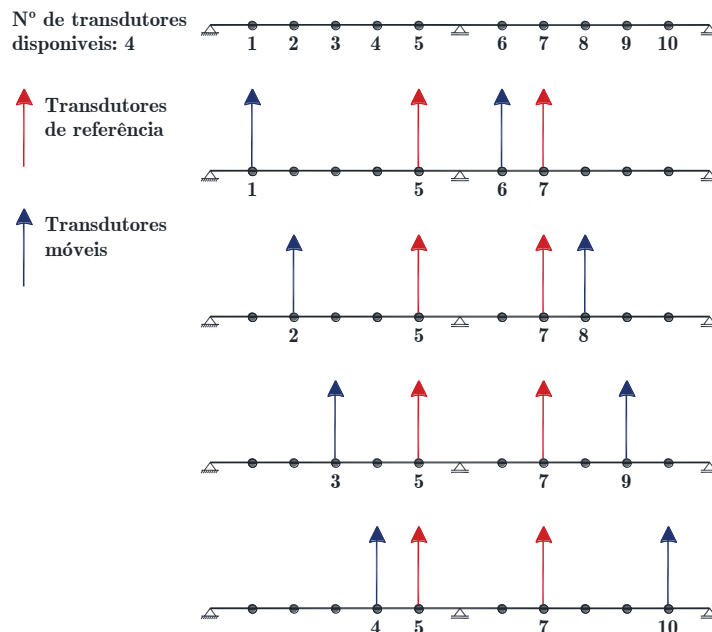


Figura 4.4 – Metodologia de ensaio com 2 transdutores de referência fixos, adaptado de Rodrigues (2004)

A metodologia alternativa, apresentada na Figura 4.5 consiste em utilizar pontos de referência que vão avançando sucessivamente, mantendo esses pontos comuns em cada dois ensaios consecutivos. Esta técnica pode permitir completar a análise recorrendo a um menor número de ensaios, no entanto, há o risco de para dois ensaios sucessivos, os respetivos pontos comuns serem nodos de alguns dos modos de vibração, o que inviabiliza a identificação adequada dessas configurações modais.

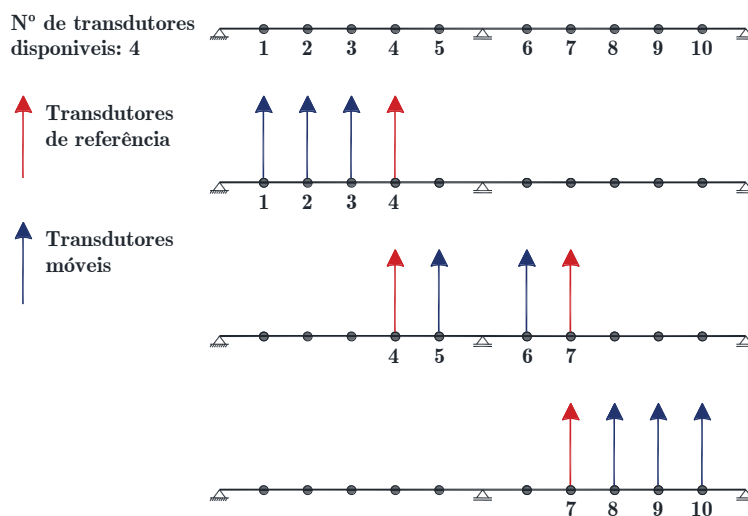


Figura 4.5 – Metodologia de ensaio com 1 transdutor de referência fixo, adaptado de Rodrigues (2004)

Para qualquer uma destas metodologias, a obtenção dos modos de vibração baseia-se no estabelecimento de correlações normalizadas entre os pontos onde são colocados os sensores de referência com os pontos onde são colocados os sensores móveis.

Durante a fase de planeamento dos ensaios é também conveniente efetuar uma visita preliminar à estrutura que vai ser ensaiada, com o objetivo de analisar as condições existentes, por exemplo as zonas de acesso à rede elétrica para alimentação dos equipamentos (caso necessário), marcação e numeração dos pontos de medição para cada fase do ensaio.

4.4.3 Pré-análise das séries temporais de aceleração

A observação experimental de uma determinada grandeza física pode ser desvirtuada pela ocorrência de erros na fase de aquisição e processamento do sinal ou até causados por perturbações exteriores, razão pela qual é fundamental prevenir a aparição desses erros. A prevenção destes erros deve ser realizada antecipadamente, em duas fases distintas: inicialmente através de uma inspeção visual das séries temporais de aceleração, e, conseqüentemente, um pré-processamento das séries temporais de aceleração.

Segundo Brincker, Ventura, & Andersen (2001) e Ventura & Horyna (2000), com recurso a uma inspeção visual é possível detetar um elevado número de fatores que podem dissimular os resultados obtidos, pelo que se torna bastante interessante realizar esta tarefa. Assim, segundo estes autores, com uma simples análise das séries temporais de aceleração é possível identificar fenómenos como:

- Eventos físicos nas histórias de acelerações;
- Existência de ruído experimental excessivo ou ruído intermitente;
- Existência de “contaminação” eletromagnética;
- Existência de tendências espúrias;
- Existência de quebras de sinal;
- Existência de medições erráticas;
- Existência de ruído digital excessivo.

No caso de serem detetadas anomalias ao longo da inspeção, devem ser tomadas medidas para que estas componentes extrínsecas à grandeza física em observação, não desvirtuem os resultados experimentais ocorridos ao longo da fase de aquisição de dados.

Normalmente, de forma a eliminar ou atenuar o aparecimento destes fenómenos, são aplicados filtros analógicos (baseados na implementação de circuitos eletrónicos) ou digitais (baseados em implementações numéricas), que consistem em condicionadores de sinal, seletivos em frequência, que consoante as suas características transmite ou atenua esse sinal (Mendes & Oliveira, 2008).

A não estabilização do sensor ao longo do ensaio pode também levar a desvios do sinal relativamente ao zero das amplitudes, também designado de tendência ou *off-set*, sendo importante eliminar essas tendências antes da fase de processamento. Em muitos casos, verifica-se que esta tendência é, aproximadamente, constante pelo que a sua remoção pode ser efetuada através de um ajuste por mínimos quadrados de uma função polinomial.

Assim, definem-se três tipos de filtros ideais:

- Filtro ideal *passa-baixo*, trata-se de um filtro que elimina toda a banda de frequências acima de uma determinada frequência de corte, deixando passar aquelas abaixo desse valor (ver Figura 4.6);

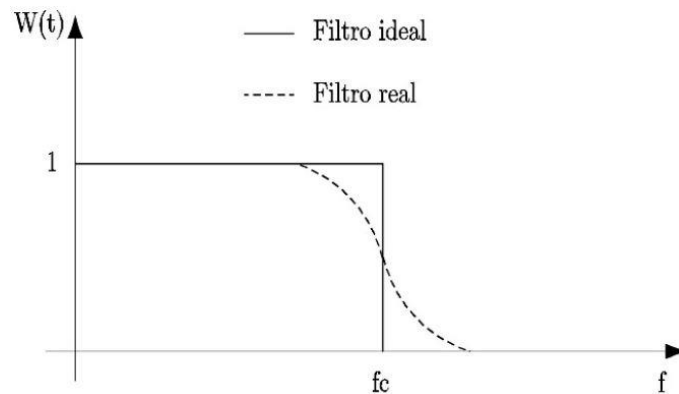


Figura 4.6 – Função de transferência do filtro ideal passa-baixo, com a respetiva frequência de corte (f_c)

- Filtro ideal *passa-alto*, consiste num filtro que elimina toda a gama de frequências abaixo da frequência de corte, considerando todas aquelas acima desse valor (ver Figura 4.7);

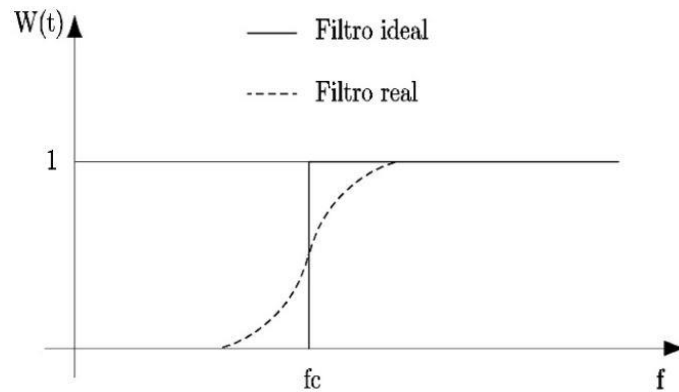


Figura 4.7 Função de transferência do filtro ideal passa-alto, com a respetiva frequência de corte (f_c)

- Filtro ideal *passa-banda*, resulta da associação em série dos dois filtros anteriores, ou seja, a sua utilização elimina a banda de frequências fora do intervalo definido pelas duas frequências de corte (ver Figura 4.8).

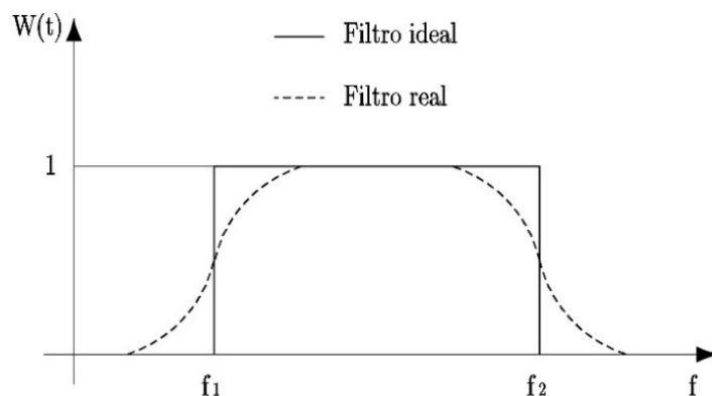


Figura 4.8 – Função de transferência de um filtro ideal passa-banda, para frequências entre os valores de corte (f_1 e f_2).

Importa referir que não existem os filtros ideais referidos, no máximo, é possível desenvolver filtros reais que funcionam de forma aproximada, tal como se pode ver nas figuras anteriores. A aplicação destes filtros deve ser ajustada à natureza do sinal e ao tipo de fenómenos encontrados ao longo da inspeção visual, uma vez que a sua utilização de forma inadequada pode levar a uma desvirtuação dos resultados.

No caso de se pretender reduzir o tamanho das séries temporais, a decimação pode se tornar numa opção bastante interessante. Esta operação consiste em escolher um conjunto de dados e eliminar os restantes, considerando uma menor frequência de amostragem. No entanto, a aplicação desta técnica pode provocar efeitos de *aliasing* pelo que deve ser utilizado um filtro digital passa-baixo previamente.

4.4.4 Processamento das séries temporais de aceleração

Após a obtenção dos resultados experimentais do ensaio e o seu conseqüente pré-processamento, procura-se caracterizar a resposta dinâmica recorrendo a métodos de identificação modal.

No entanto, associados a esses métodos de identificação modal existem também erros de processamento subjacentes. Torna-se então importante conhecer as características desses erros, identificar as causas do seu aparecimento e estudar as formas de os reduzir ou eliminar de forma a que os resultados sejam fiáveis.

Assim, nesta secção são descritos os mais comuns tipos de erro, bem como a forma de lidar com a sua existência e no capítulo seguinte são caracterizados os métodos de identificação modal aplicados aos resultados experimentais obtidos.

4.4.4.1 Erros

Tal como referido anteriormente, os processos de identificação modal estão associados a alguns tipos de erros, no entanto, esses já se encontram tipificados e bastante

estudados na literatura da especialidade, razão pela qual o seu tratamento é relativamente simples. Assim, de seguida são descritos os tipos de erros mais comuns associados a estes processos:

— **Erros de carácter estatístico**

Geralmente considerados como um ruído sobreposto às estimativas calculadas, os erros de carácter estatístico devem-se à instabilidade estatística da estimativa do conteúdo espectral. A solução mais usual é efetuar um alisamento, que consiste em, utilizando operações de média de conjunto, aproximar aos valores expectáveis tornando as estimativas consistentes.

— **Erros por sobreposição (*Aliasing errors*)**

Este tipo de erro ocorre derivado da impossibilidade de caracterizar um sinal sob forma contínua, levando a uma sobreposição da energia contida em frequências situadas acima da frequência de Nyquist, em frequência inferior a essa, impossibilitando a reconstrução do sinal original. Uma forma de resolver este problema consiste em introduzir um filtro analógico, designado de filtro *anti-aliasing*, que elimine o contributo de todas as frequências acima da frequência de Nyquist (Mendes & Oliveira, 2008).

— **Erros por efeito de escorregamento (*Leakage effect*)**

Ocorre derivado do carácter finito da informação e da impossibilidade de observar o sinal indefinidamente, que se concretiza numa distribuição da energia contida numa determinada frequência por uma banda de frequências em torno desta. Assim, a adoção de segmentos resulta num agravamento dos erros por escorregamento, ou seja, quanto mais curtos são esses segmentos, maior é o efeito deste tipo de erros. Usualmente, este tipo de erros é atenuado com recurso a janelas de dados, que são descritas no ponto seguinte.

4.4.4.2 Janelas de dados

Tal como visto anteriormente, as janelas de dados são utilizadas para atenuar alguns tipos de erros que ocorrem na fase de processamento, mais precisamente os erros de escorregamento. A utilização de janelas de dados tem como objetivo reduzir as descontinuidades do sinal nas fronteiras do período de amostragem, introduzindo também valores de zero, no início e no fim do registo, para que o registo tenha um número inteiro de ciclos.

A aplicação de janelas de dados permite também obter espectros de amplitudes nos quais os picos ficam ligeiramente mais aguçados e os vales entre picos mais profundos, melhorando o conteúdo em frequência dos resultados obtidos.

De seguida, apresenta-se uma descrição de alguns dos diversos tipos de janelas de dados, retratando com um esquema representativo das mesmas:

— **Janela de dados de Bartlett**

A janela de Bartlett, ou triangular, representada na Figura 4.9, é um dos tipos de janela mais simples em termos de computacionais, mas garante uma transição suave, evitando o fenómeno de Gibbs. Esta janela pode ser definida pela seguinte expressão:

$$\omega(n) = \begin{cases} \frac{2n}{M}, & 0 \leq n \leq \frac{M}{2}; \\ 2 - \frac{2n}{M}, & \frac{M}{2} \leq n \leq M; \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.1)$$

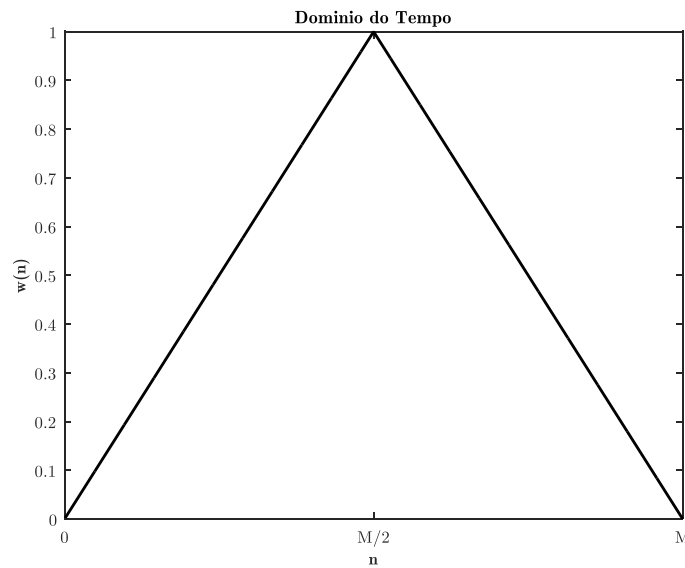


Figura 4.9 – Janela de dados de Bartlett.

— **Janela de dados de Hanning**

Esta janela faz parte de um conjunto de janelas que são compostas por ondas de forma cossenoidal, sendo a mais indicada para transientes maiores que o tempo de duração da janela e para aplicações com objetivos gerais. A expressão (4.2) descreve a onda da janela de Hanning, que está representada na Figura 4.10.

$$\omega(n) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi n}{M} \right) \right); \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.2)$$

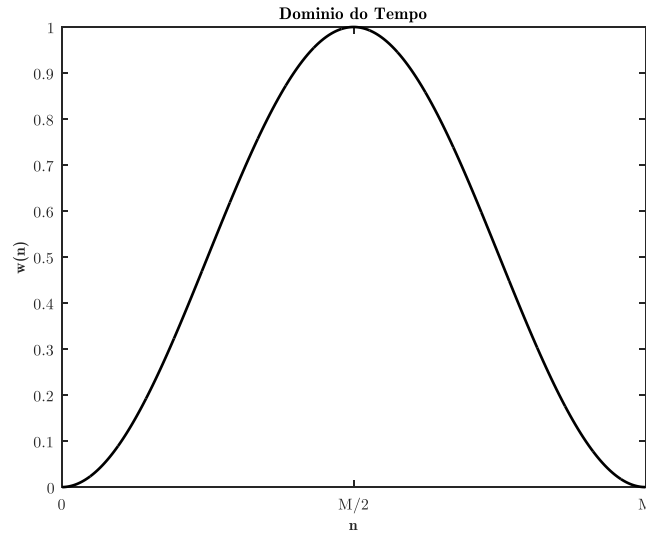


Figura 4.10 – Janela de dados de Hanning.

— **Janela de dados de Hamming**

A janela de Hamming é uma das janelas mais utilizadas e consiste numa evolução da janela de Hanning, sendo descrita pela expressão (4.3).

$$w(n) = \begin{cases} 0,54 - 0,46 \cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right), & 0 \leq n \leq M; \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.3)$$

Como é possível constatar pela figura Figura 4.11, ao contrário das janelas anteriores, esta não tende para zero à medida que se aproxima das extremidades.

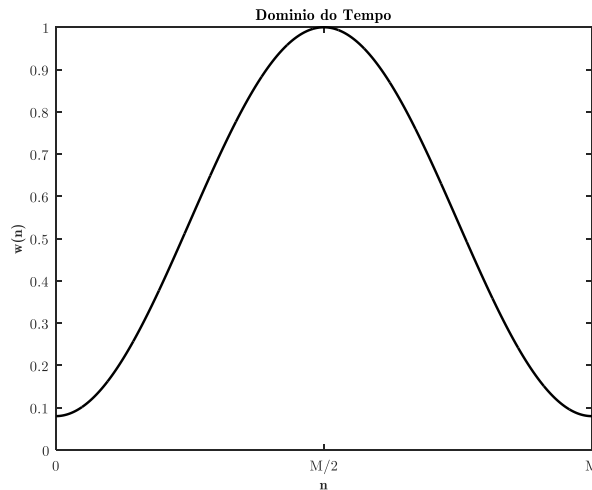


Figura 4.11 – Janela de dados de Hamming.

4.5 Considerações Finais

Ao longo deste capítulo foi abordada toda a temática relativa aos ensaios experimentais propriamente dita, explicitando a sua importância para a caracterização do comportamento dinâmico dos sistemas estruturais.

São descritos os três tipos de ensaios dinâmicos: ensaios de vibração forçada, de vibração livre e de vibração ambiental. Este último é o mais explorado ao longo do capítulo pois foi utilizado no âmbito deste trabalho. Consiste na medição da resposta das estruturas, geralmente em termos de histórias de aceleração, com o intuito de, processando esses dados, obter os parâmetros modais da estrutura. Não havendo a necessidade de serem aplicadas forças ou deslocamentos à estrutura, aumenta o interesse prático e económico deste tipo de ensaio.

Para a elaboração de um ensaio de vibração com excitação natural é essencial existir uma boa escolha do equipamento e um rigoroso planeamento do mesmo. Neste sentido, são apresentados sistemas de aquisição de dados e acelerómetros, salientando-se os aspetos como a sensibilidade ou a gama dinâmica. São ainda abordadas as diversas técnicas de ensaio e procedimentos a adotar, o número e localização dos pontos a instrumentar ou a gama de frequências de amostragem. Mostrando-se a importância do desenvolvimento de modelos numéricos para ajudar a definir alguns parâmetros descritos anteriormente, permitindo assim obter uma visão mais abrangente dos resultados que se espera obter.

Finalmente abordaram-se os procedimentos de pré-processamento e processamento que, normalmente, são necessárias aplicar aos registos de resposta obtidos experimentalmente de forma a minimizar os efeitos de diversos tipos de interferências. Neste sentido, são abordadas algumas anomalias que podem ser detetadas e as respetivas ferramentas de minimização dos seus efeitos, como por exemplo filtros ou janelas de dados.

5 Métodos de Identificação Modal

5.1 Considerações iniciais

A análise dinâmica de uma estrutura na perspectiva da identificação modal, tem como intuito identificar os principais parâmetros modais, ou seja, as frequências naturais, os respetivos modos de vibração e os amortecimentos modais, a partir da medição da resposta da estrutura, sob a ação de ações dinâmicas.

A identificação modal de uma estrutura pode ser efetuada através de duas metodologias diferentes dependendo da forma como é executada a medição da resposta da estrutura, ou seja, caso sejam efetuados ensaios de vibração forçada em que a excitação seja conhecida (via determinística) o procedimento consiste em relacionar essa excitação com a respetiva resposta, caso seja medida apenas a resposta da estrutura a uma excitação ambiental (via estocástica), ou seja, recorrendo a ensaios de vibração ambiental, estabelecem-se certas hipóteses acerca da natureza da excitação para realizar a análise (Magalhães, 2004).

No âmbito deste trabalho, a identificação modal estocástica, que se tem desenvolvido muito nos últimos anos, apresenta-se como a mais interessante devido à facilidade de realizar o ensaio e também por a estrutura em estudo ser extremamente flexível o que em regra facilita o processo de identificação modal.

Segundo Mendes & Oliveira (2008), o interesse da aplicação destes métodos não se cinge apenas a obter conhecimento de como respondem as estruturas a ações dinâmicas, como sismos, vento, tráfego rodoviário, ferroviário ou pedonal, mas também permite validar modelos numéricos e caracterizar de forma global o estado da estrutura uma vez que as propriedades dinâmicas estão diretamente relacionadas com a evolução desse estado, permitindo estudar fenómenos de deterioração de forma evolutiva.

Assim, depois de nos capítulos anteriores se ter abordado os fundamentos referentes às formulações matemáticas utilizadas para descrever o comportamento dinâmico das estruturas, neste capítulo são descritos métodos que, baseados nessas formulações, procuram realizar a identificação modal a partir da informação experimental resultante das medições efetuadas na estrutura, assumindo que as forças de excitação são consideradas como uma realização de um processo estocástico gaussiano do tipo ruído branco com média nula.

Tal como nos capítulos anteriores, a apresentação dos conceitos é auxiliada através de exemplos gráficos, assentes em rotinas desenvolvidas em MATLAB, utilizando como base a informação gerada para o modelo matemático da viga de 3 graus de liberdade, apresentada no capítulo 2. Também os métodos no domínio do tempo são

abordados, no entanto de uma forma mais breve, mostrando-se apenas a aplicação do método SSI-COV a essa mesma viga metálica.

O capítulo termina com a apresentação de um pequeno estudo de caso, envolvendo a análise modal de um modelo físico de uma viga metálica encastrada-apoiada, tendo por base a informação experimental obtida através de um ensaio de vibração ambiental e o desenvolvimento de um modelo numérico de elementos finitos 3D, em SAP2000. Esta análise pretende consolidar a apreensão dos conceitos abordados ao longo do capítulo, bem como introduzir a importância que os resultados obtidos em ensaios de vibração podem ter no desenvolvimento e calibração de modelos numéricos, que é relevante para o desenvolvimento deste trabalho.

5.2 Métodos no domínio da frequência

Os métodos de identificação modal no domínio da frequência, também designados por métodos não paramétricos, consistem em analisar e relacionar entre si as séries de resposta medidas, em diferentes pontos da estrutura, com base na transformação para o domínio da frequência, recorrendo geralmente ao algoritmo FFT. Assim, decompondo as ondas dos registos de acelerações e utilizando os conceitos associados às séries de Fourier é possível obter os valores de frequência para os quais uma da estrutura tem preferência em vibrar.

Este tipo de análise envolve a comparação da resposta dinâmica em vários pontos através da denominada matriz das funções de densidade espectral de potência da resposta, que permite sintetizar a comparação da resposta nos vários pontos e correlacionar a resposta em dois pontos através de conceitos da transformada discreta de Fourier e o conjugado da transformada discreta de Fourier, tal como se mostra na secção seguinte (Rodrigues, 2004).

Comparativamente com os métodos de identificação modal no domínio do tempo, para além de permitirem uma mais fácil interpretação do ponto de vista físico, conduzem a melhores resultados quando o número de modos de vibração a identificar é limitado, bem como a gama de frequências a que correspondem (Caetano, 1992).

5.2.1 Funções de densidade espectral de potência de resposta

Tal como referido anteriormente, na análise experimental do comportamento dinâmico de estruturas é frequente recorrer à matriz das funções de densidade espectral de potência da resposta para organizar a informação experimental. Esta matriz traduz a

relação, no domínio da frequência, entre a resposta medida no grau de liberdade i com a resposta medida no grau de liberdade j , sendo dada pela seguinte equação:

$$S_{ij}(\omega_n) = \frac{X_i^*(\omega_n) \cdot X_j(\omega_n)}{T}, \quad i, j = 1, 2, \dots, NGL \text{ e } n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (5.1)$$

Uma vez que as séries temporais observadas têm uma duração finita e que a medição não é feita de forma contínua, mas sim em intervalos temporais de Δt , apenas é possível obter estimativas dos espectros, que são obtidas com base no produto do conjugado da transformada discreta de Fourier $X_i^*(\omega_n)$, no grau de liberdade i , pela transformada discreta de Fourier $X_j(\omega_n)$, no grau de liberdade j . Ainda relativamente à expressão anterior $T = N \cdot \Delta t$, em que N é o número total de pontos adquiridos por amostra.

Os elementos da diagonal principal desta matriz são geralmente denominados de auto-espectros, enquanto que os restantes são os espectros cruzados. No caso de ser realizada a medição da resposta em todos os pontos que se pretendem instrumentar, simultaneamente, esta matriz é quadrada tendo dimensão igual ao número total de pontos instrumentados. No entanto, nem sempre é possível ter um número de transdutores suficiente para realizar a medição em todos os pontos simultaneamente, especialmente em estruturas de maior dimensão. Nesse caso, é usual realizar o ensaio por fases, ou seja, realizar as medições sequencialmente em todos os pontos alvos de medição, mantendo sempre pontos de referência de forma a que seja possível relacionar os resultados obtidos nas várias fases de ensaio.

Segundo Caetano (1992), devido às propriedades de simetria e anti-simetria das funções de densidade espectral e à maior comodidade de trabalhar com frequências positivas, é usual representar apenas a parte positiva das estimativas das funções de densidade espectral.

Assim, com base nas histórias de acelerações geradas para o modelo matemático da viga com 3 graus de liberdade e aplicando a expressão (5.1) procedeu-se à determinação das funções de densidade espectral. A Figura 5.1 mostra as amplitudes da matriz de funções de densidade espectral da resposta em aceleração, considerando uma amostra com 300 segundos de duração (30721 pontos), utilizando uma frequência de amostragem de 102,4 Hz.

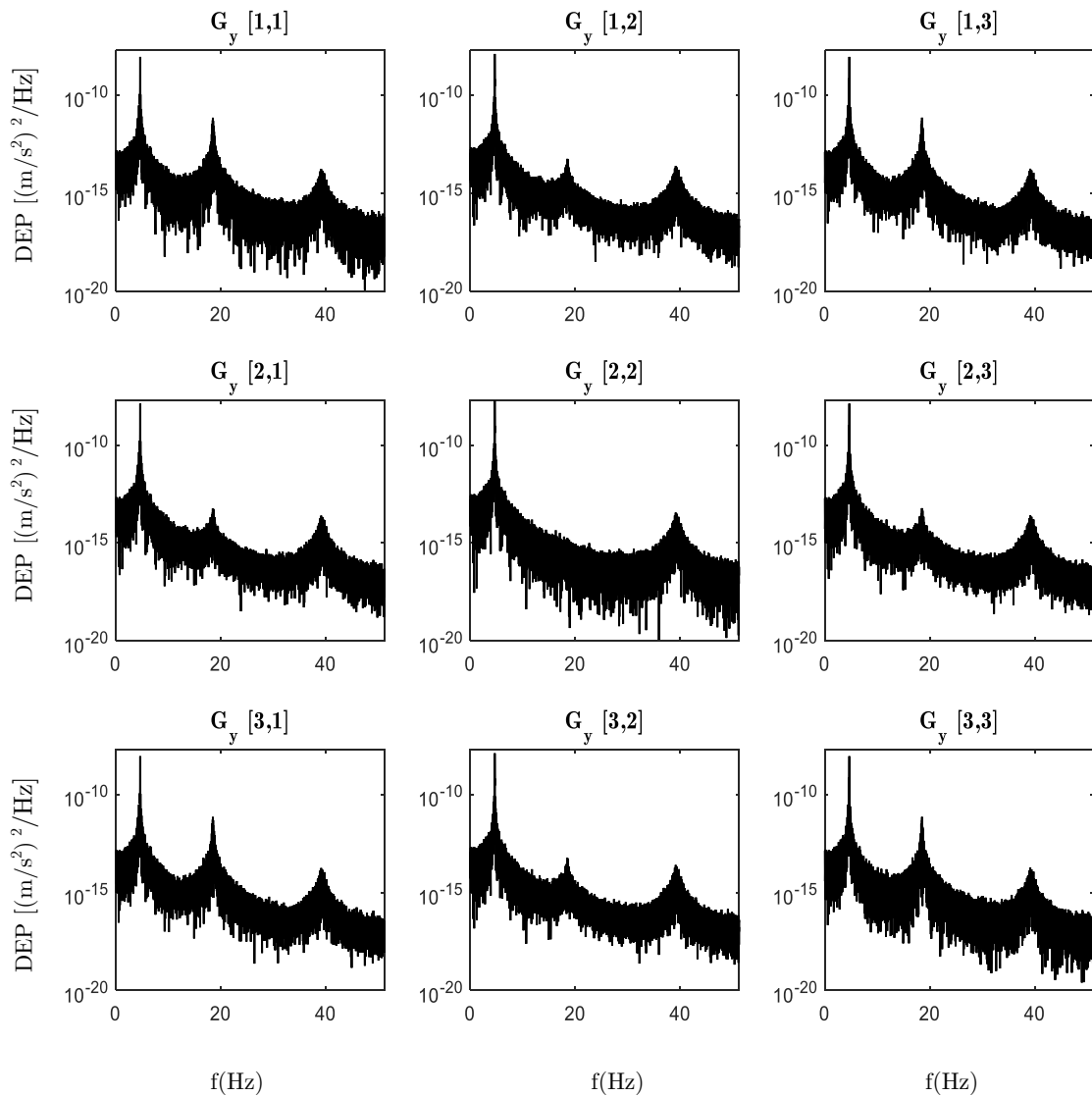


Figura 5.1 – Amplitude das funções de densidade espectral da resposta em aceleração para as histórias geradas para a viga de 3GL.

Analisando esta figura é bastante perceptível que no segundo auto-espectro não contém um segundo pico relativo à frequência do segundo modo de vibração. Isto deve-se ao facto, já referido anteriormente, de no segundo modo existir um nodo precisamente no segundo ponto instrumentado, resultando no desaparecimento desse pico e, conseqüentemente, num pico menos evidente nos espectros cruzados que relacionam esse auto-espectro.

Como é visível na figura anterior, a estimativa obtida revela uma elevada variância essencialmente devido ao facto de o seu cálculo se basear numa só série temporal discretizada com duração finita. Assim, para diminuir essa variância é frequente dividir a série temporal em segmentos mais curtos e adotar alguma sobreposição entre eles, também denominada de *overlapping*, efetuando posteriormente a média das estimativas

espectrais simples dos segmentos e obtendo-se uma estimativa alisada, ou *smoothed*, da função de densidade espectral, recorrendo à expressão:

$$\tilde{S}_{ij} \omega_n = \frac{1}{n_d} \sum_{m=1}^{n_d} \left[\frac{X_i^* \omega_n \cdot X_j \omega_n}{T} \right]_m, \quad i, j = 1, 2, \dots, NGL \text{ e } n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (5.2)$$

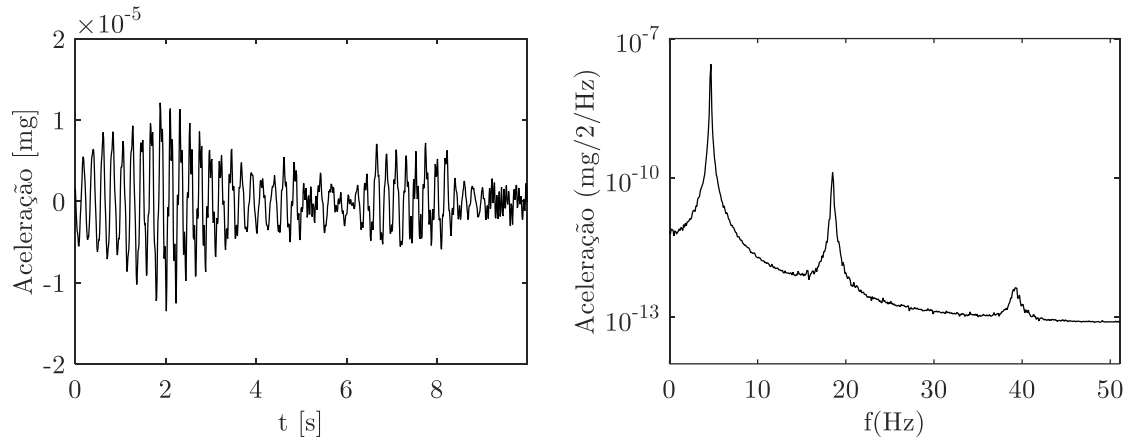
Onde T_d corresponde ao comprimento de cada segmento e n_d ao número total de segmentos utilizados. Assim, obtém-se um número total de 87 segmentos independentes, com uma duração de 10 segundos ($T_d = 1024$).

No entanto, a aplicação deste procedimento traduz-se num agravamento dos erros por escorregamento, uma vez que quanto mais curtos são os segmentos maior é o efeito desse tipo de erros. Este efeito pode ser atenuado utilizando uma sobreposição dos segmentos em 2/3, como aliás foi feito para obter os 87 segmentos.

Adicionalmente, a aplicação de janelas de dados a cada segmento permite, não só minimizar os efeitos deste tipo de erros, mas também atenuar a existência de descontinuidades do sinal. Como referido no capítulo 4, existem vários tipos de janelas que podem ser aplicados, mas em séries temporais provenientes de ensaios de vibração ambiental, geralmente, são aplicadas janelas de Hanning, pelo que a estimativa espectral pode ser escrita da seguinte forma:

$$\tilde{S}_{ij} \omega_n = \frac{1}{n_d} \sum_{m=1}^{n_d} \left[\frac{X_i^* \omega_n \cdot X_j \omega_n}{T \cdot \sum_{k=0}^{N-1} |w_k|^2} \right]_m, \quad i, j = 1, 2, \dots, NGL \text{ e } n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (5.3)$$

Para efeitos de comparação, na Figura 5.2 é apresentado um dos segmentos, e a respetiva representação no domínio da frequência, correspondente a uma estimativa espectral. Posteriormente, é representado esse mesmo segmento com a aplicação da sobreposição e da janela de Hanning.



a)

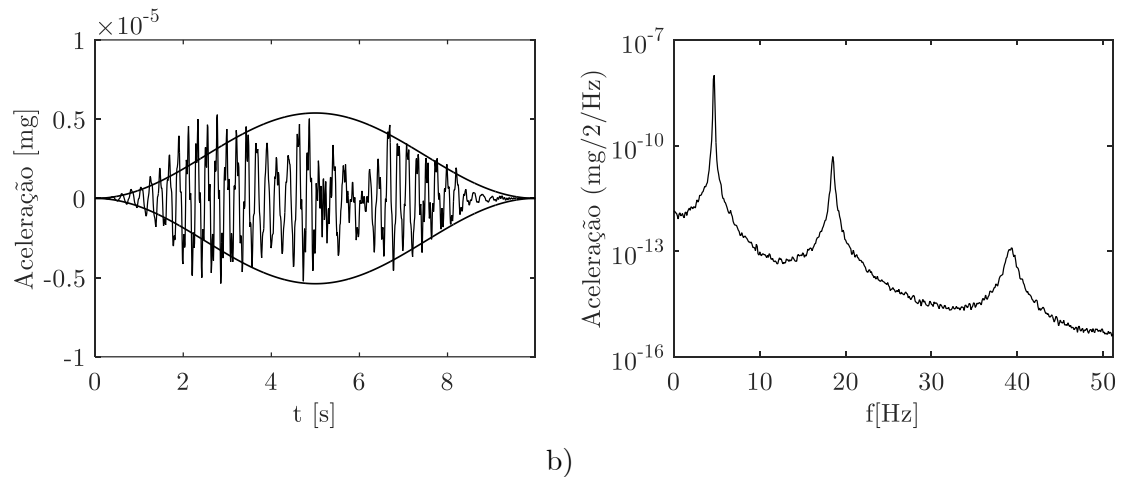


Figura 5.2 – Representação de um segmento referente à viga de 3GL: a) Representação no domínio do tempo e respetiva estimativa espectral; b) Representação no domínio do tempo após a aplicação da janela de Hanning e sobreposição e a respetiva função de densidade espectral de potência.

O procedimento aplicado para estimar as funções de densidade espectral com base em séries temporais divididas em segmentos, consiste na aplicação de uma janela de dados a cada segmento, cálculo da FFT de cada segmento e posterior realização das médias é conhecido como procedimento de Welch (1967). Este e outros métodos para estimar os espectros, bem como os erros que lhes estão associados são descritos no trabalho de Bendat & Piersol (2000).

Desta forma, a aplicação deste procedimento ao exemplo da viga de 3GL resulta na matriz completa das funções de densidade espectral de potência da resposta em aceleração, apresentada na Figura 5.3, a qual é utilizada como elemento de base para aplicação dos vários métodos de identificação modal estocástica no domínio da frequência que se descrevem nas secções seguintes.

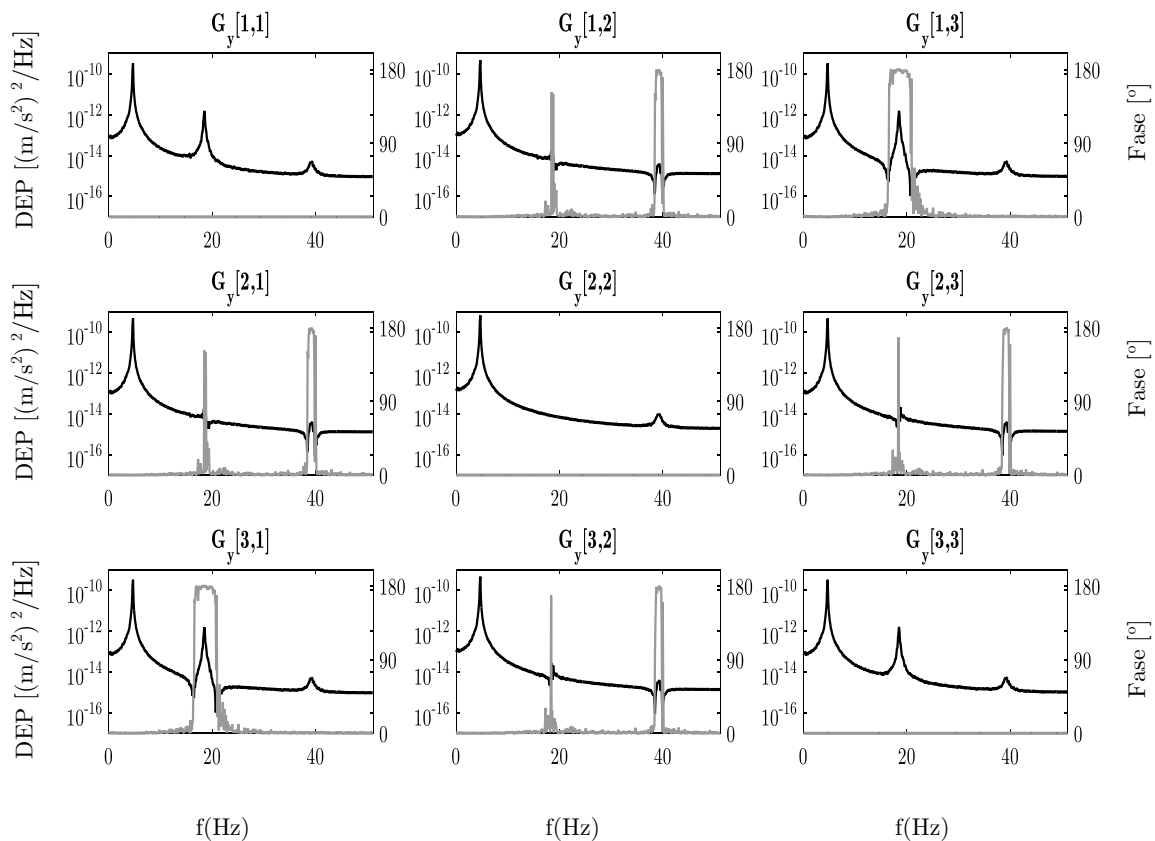


Figura 5.3 – Funções de densidade espectral da resposta referentes à estrutura exemplo com 3 GL.

5.2.2 Método básico no domínio da frequência

O método básico no domínio da frequência (BFD – *Basic Frequency Domain*), também conhecido por método de seleção de picos ou (PP – *Peak Picking*) foi o primeiro método a ser utilizado para realizar a identificação dinâmica de estruturas, com base na medição da resposta a ações ambientais. Atualmente, continua a ser muito utilizado em aplicações de engenharia civil devido à facilidade de ser implementado e aplicado mas também por permitir obter bons resultados e proporcionar uma interpretação física evidente (Mendes & Oliveira, 2008).

De acordo com Rodrigues (2004), as primeiras aplicações do método BFD remontam à segunda metade do Séc. XX, tendo sido Crawford e Ward os pioneiros, em 1964. O processo tinha como propósito, a análise dos auto-espectros de registos de velocidades obtidos em ensaios de medição de vibrações ambiente, para avaliar as frequências naturais de vibração de um edifício de 19 pisos e estimar a configuração do 1.º modo de translação numa das direções.

Para além desses autores, há outros trabalhos de igual relevância devido ao facto da utilização do método de identificação modal se basear na análise dos espectros dos registos da resposta das estruturas às ações ambiente. É neste sentido que o trabalho de

Felber (1993) se tornou fundamental, na medida em que desenvolveu um método mais sistematizado, o que possibilitou a sua automatização por meio de programas de análise e de visualização gráfica das configurações modais identificadas (Rodrigues, 2004).

Os fundamentos desta metodologia baseiam-se nas hipóteses de que é nula a contribuição dos modos não-ressonantes na vizinhança de cada frequência natural da estrutura, e que as ações ambiente são assumidas como um processo estocástico gaussiano de ruído branco com média nula. Assim, as funções de densidade espectral da resposta apresentam uma concentração energética sob a forma de picos de amplitude, bastante próximo das frequências naturais de vibração para valores usuais de coeficientes de amortecimento, sendo também possível identificar os coeficientes de amortecimento pela largura dos picos de ressonância.

Segundo Rodrigues (2004), assumindo a veracidade destes pressupostos é possível simular o comportamento dinâmico de uma estrutura na vizinhança das suas frequências de ressonância através de osciladores de 1 GL, com base na frequência e no coeficiente de amortecimento modal ξ_k do modo ressonante.

Em suma, pode afirmar-se que este método produz bons resultados quando aplicado a sistemas cujo amortecimento é do tipo proporcional e onde as frequências se encontram bem separadas. De seguida, são então descritos e justificados os principais procedimentos utilizados pelo BFD, utilizando simultaneamente rotinas MATLAB no exemplo da viga de 3GL.

5.2.2.1 Identificação de frequências naturais. Espectro normalizado médio.

Tal como referido anteriormente, dependendo da complexidade da estrutura a ser analisada, esta pode ter vários graus de liberdade para efetuar devidamente a caracterização experimental do seu comportamento dinâmico. Dessa forma, a identificação das frequências pode tornar-se extraordinariamente trabalhosa caso o número de graus de liberdade seja elevado, pelo que, geralmente, para se compactar toda a informação recorre-se à utilização de espectros normalizados médios – ANPSD (Felber, 1993). O cálculo destes espectros é efetuado com base nos auto-espectros registados, seguindo o seguinte procedimento:

1. Normalização dos auto-espectros (NPSD – *Normalized Power Spectral Density*), dividindo as estimativas dos auto-espectros pelo número total de ordenadas em frequência:

$$\text{NPSD}_i \omega_n = \frac{\tilde{S}_{ii} \omega_n}{\sum_{m=ii}^{N_F} \tilde{S}_{ii} \omega_n} \quad (5.4)$$

2. Cálculo da média dos auto-espectros normalizados (ANPSD – *Average Normalized Power Spectral Density*) correspondentes a todos os pontos instrumentados:

$$\text{ANPSD } \omega_n = \frac{1}{n_{\text{GL}}} \cdot \sum_{i=1}^{n_{\text{GL}}} \text{NPSD}_i \omega_n \quad (5.5)$$

Por resultarem da média dos diferentes espectros, os ANPSD apresentam os picos de ressonância que se verificam em todos os auto-espectros, enquanto que os restantes, por só se verificarem em um deles, são suavizados, permitindo assim uma mais fácil identificação das frequências associadas a modos globais de vibração da estrutura. Assim, o facto de este tipo de espectros sintetizarem toda a informação contida nos espectros determinados com os registos obtidos nos vários pontos instrumentados (Rodrigues, 2004).

Aplicando este procedimento aos auto-espectros obtidos anteriormente para a viga de 3 GL, resulta nos auto espectros normalizados e no espectro normalizado médio, apresentados respetivamente na Figura 5.4 e Figura 5.5.

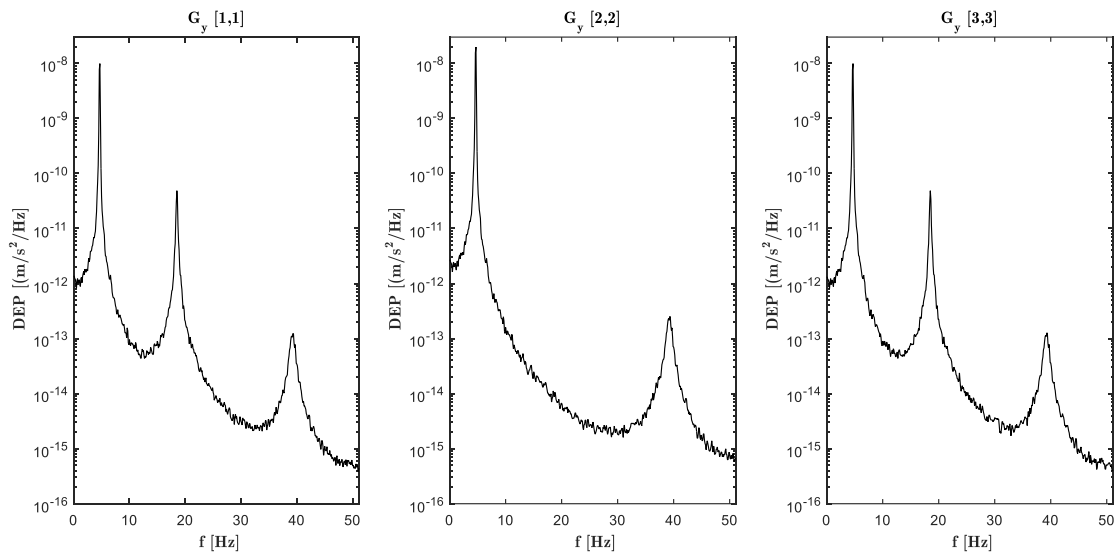


Figura 5.4 – Auto-espectros normalizados para o exemplo da viga de 3GL.

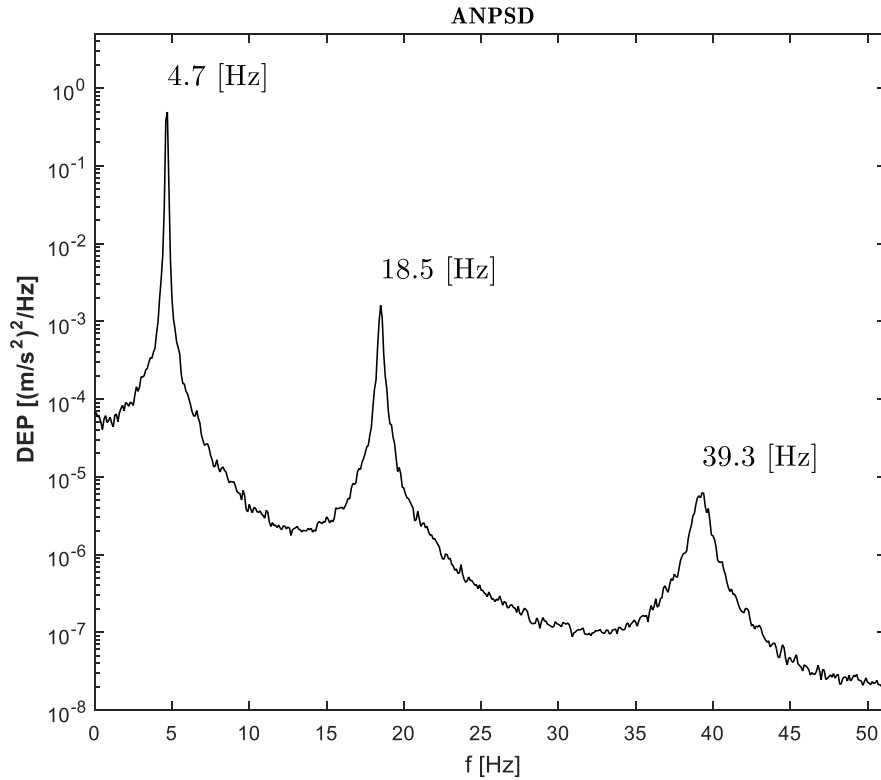


Figura 5.5 – Espectro normalizado médio para o exemplo da viga de 3GL.

Uma vez obtido o ANPSD, é necessário efetuar uma análise de seleção dos picos mais relevantes, no entanto, é importante confirmar que os picos correspondem a modos naturais de vibração dos sistemas estruturais. Para tal, são utilizadas as funções de coerência descritas na secção seguinte.

5.2.2.2 Funções de Coerência

Tal como referido anteriormente, as funções de coerência são utilizadas com o intuito de garantir que os picos identificados correspondem efetivamente a modos de vibração da estrutura, sendo por isso uma fase extremamente relevantes no processo de identificação modal.

De acordo com Mendes & Oliveira (2008), estas funções de coerência permitem, não só obter indicadores do grau de linearidade entre os sinais de resposta, mas também podem ser utilizados para avaliar o nível de ruído das medições efetuadas. A estimativa das funções de coerência entre dois sinais de resposta varia entre 1 e 0, ao longo de todo o domínio da frequência, sendo dada pela seguinte expressão:

$$\gamma_{ij}^2 \omega_m = \frac{|\tilde{S}_{ij} \omega_m|^2}{\tilde{S}_{ii} \omega_m \cdot \tilde{S}_{jj} \omega_m} \quad (5.6)$$

Valores próximos de 1 demonstram que existe uma forte relação de linearidade entre os dois sinais, por outro lado, valores perto de 0 indiciam níveis de ruído elevados.

Assim, nas frequências associadas a modos globais de vibração da estrutura as funções de coerência devem apresentar valores próximos de 1, no entanto, caso os picos sejam causados por modos locais de elementos nas estruturas ou os modos de vibração sejam pouco excitados pelas ações ambiente serão obtidos valores baixos.

Assim, recorrendo uma vez mais ao exemplo da viga de 3 graus de liberdade e às respectivas funções de densidade espectral calculadas, são agora determinadas as suas funções de coerência, devidamente representadas na figura seguinte:

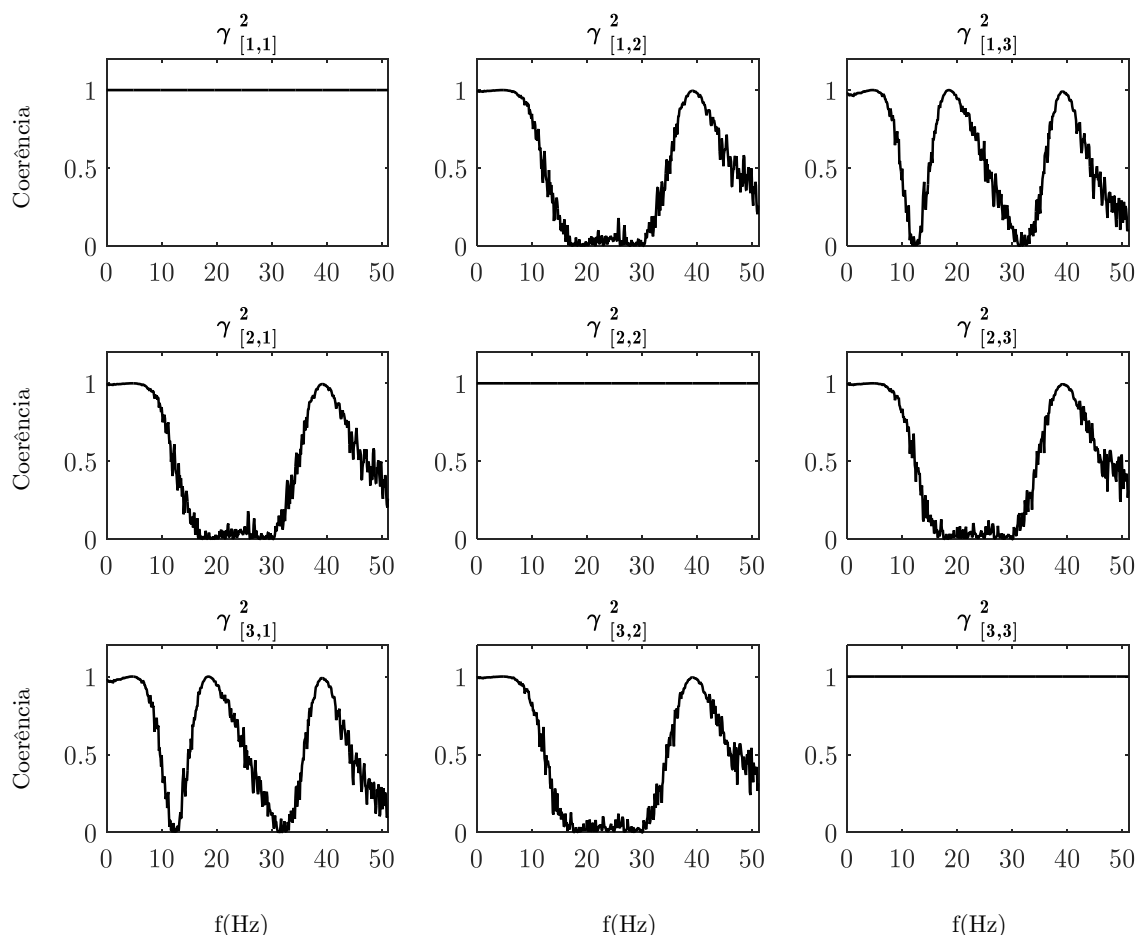


Figura 5.6 – Estimativa das funções de coerência para o exemplo da viga de 3GL.

Como seria de esperar, as funções de coerência correspondente à diagonal principal apresentam unicamente o valor unitário, uma vez que correspondem à relação de uma série consigo própria. Nos membros da matriz que relacionam com o modo de vibração $([1,2], [2,1], [3,2], [2,3])$, é possível verificar que apresentam apenas duas zonas perto do valor unitário devido à existência de um nodo nesse modo de vibração o que impossibilita a deteção nesse ponto. Assim, apenas nos membros $[3,1]$ e $[1,3]$ da matriz das funções de coerência se podem identificar os três modos corretamente, apresentando valores muito próximos de 1 nas frequências correspondentes às frequências naturais de vibração da estrutura.

5.2.2.3 Identificação das configurações modais

Antes de iniciar o processo de identificação das configurações modais, a partir dos resultados experimentais, deve-se ter em consideração que a sua boa aplicação está associada a alguns aspetos relevantes, entre os quais (Mendes & Oliveira, 2008):

- os modos de vibração obtidos desta forma podem não coincidir exatamente com os modos de vibração teóricos, pois estes últimos representam a configuração deformada que a estrutura assume quando excitada por um harmónico puro;
- se existirem modos de vibração com frequências naturais próximas, os modos obtidos são uma combinação dos modos de vibração respetivos;
- para sistemas estruturais sujeitos a forças de excitação com características de ruído branco, que apresentem frequências bem separadas e com valores de coeficientes de amortecimentos modais pequenos, a resposta na frequência de um dos seus modos de vibração é claramente dominada por esse modo de vibração.

Desta forma, o método BFD não identifica propriamente os modos de vibração, mas sim os modos operacionais de deformação. Estes modos operacionais de deformação correspondem à deformada de uma estrutura quando sujeita a uma excitação puramente harmónica, ou seja, correspondem a uma combinação dos modos de vibração, contribuindo mais significativamente aqueles que têm uma frequência próxima da frequência de excitação. Assim, compreende-se que caso os modos tenham frequências muito próximas acabem por refletir a sobreposição de vários modos, impossibilitando assim a obtenção de resultados validos.

Relativamente ao processo propriamente dito, consiste em considerar um ponto instrumentado como referência, e dividir todos os espectros cruzados pelo auto-espectro tomado como referência, uma vez que permite obter a relação de fase entre todos os pontos, para cada frequência. Este procedimento é efetuado através da seguinte expressão:

$$T_{j,\text{ref}} = \frac{\tilde{S}_{j,\text{ref}} \omega}{\tilde{S}_{\text{ref,ref}} \omega} \quad (5.7)$$

Este quociente geralmente denominado por função de transferência ou FRF de transmissibilidade é composto pelas componentes dos modos de vibração, associados a cada uma das frequências de ressonância, a menos de um fator de escala. Uma vez que os espectros cruzados são complexos, este quociente também o será, sendo composto por uma componente real, que corresponde à amplitude, e uma componente imaginária que designa a fase. Assim, para cada frequência, a amplitude corresponde à amplitude do modo de vibração, por outro lado, caso sejam expectáveis apenas modos reais, a fase será

0° ou 180°, o que significa que a amplitude terá o mesmo sentido ou o sentido oposto da referência, respetivamente (Magalhães, 2004).

Torna-se ainda importante referir que a escolha da referência deve ser efetuada com imenso cuidado, evitando escolher pontos sobre nodos dos modos de vibração.

Na Figura 5.7 apresentam-se as estimativas das funções de transferência com base nas quais se avaliaram as configurações modais associadas as frequências naturais identificadas no espectro normalizado médio apresentado na Figura 5.5.

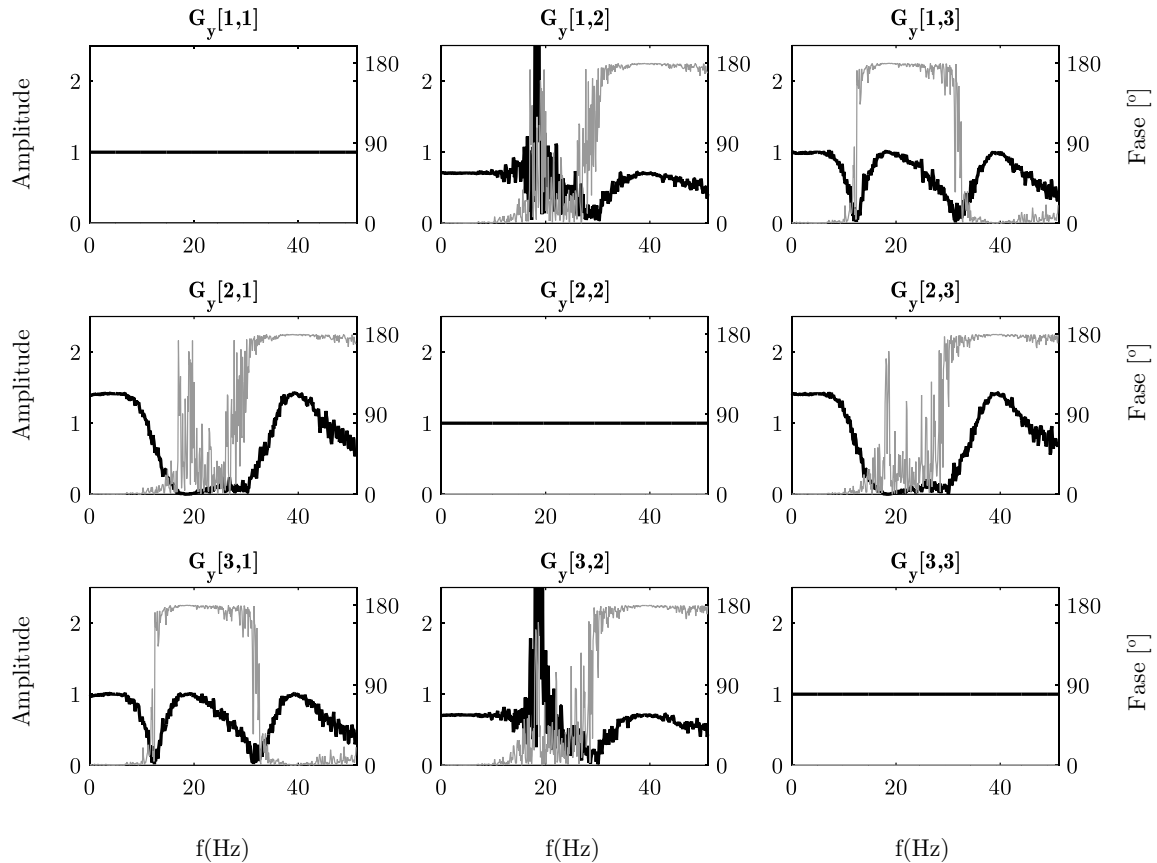


Figura 5.7 – Estimativa das funções de transferência para o exemplo da viga de 3GL.

Uma vez que os valores das amplitudes obtidos estão associados a valores relativos entre os graus de liberdade, faz sentido normalizá-los quando se pretende representar a configuração modal. Geralmente, o processo de normalização consiste em dividir todos os valores pelo maior obtido, aplicando seguidamente um fator de escala adequado. Assim, com base nos valores das funções de transferência apresentadas na Figura 5.7, a Figura 5.8 consiste num esquema dos modos de vibração, com um fator de escala de 0,075.

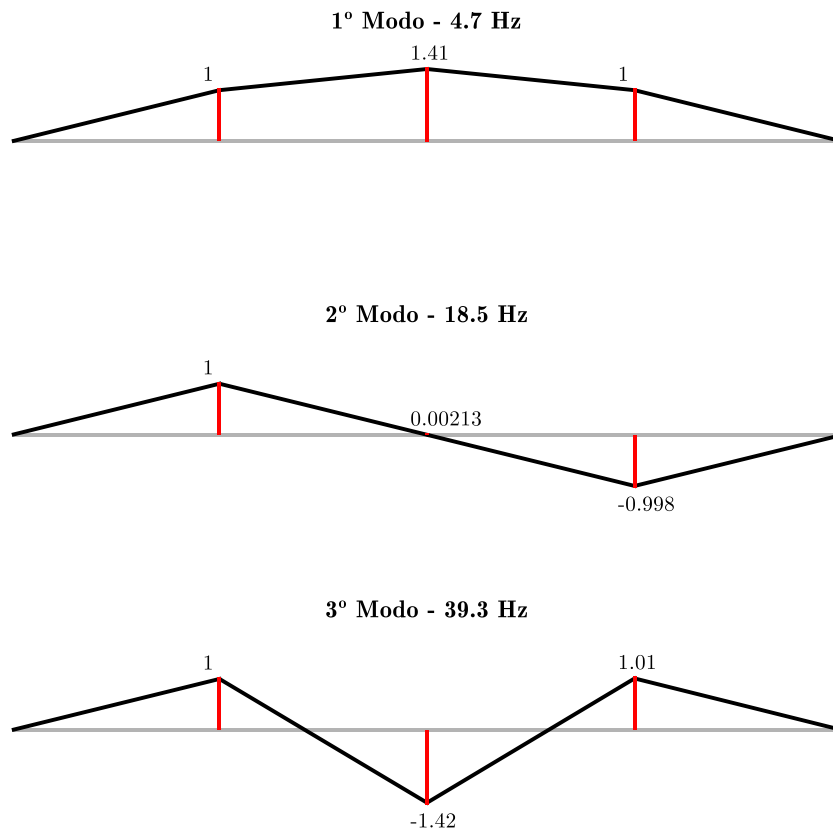


Figura 5.8 – Configurações modais com base nas funções de transferência.

Analisando a Figura 5.8 tornam-se evidentes as semelhanças destes modos de vibração com os modos obtidos anteriormente, recorrendo a outros métodos. Os modos de vibração representam apenas a configuração da estrutura, quando vibra a uma certa frequência, pelo que os valores não têm qualquer significado, mas sim a relação entre eles. Nesse sentido, comparando a relação dos valores obtidos é possível concluir que estes resultados estão de acordo com aquilo que foi obtido anteriormente.

Na Tabela 5.1, apresenta-se em síntese a formulação do método básico no domínio da frequência descrito anteriormente nesta secção.

Tabela 5.1 – Formulação do método básico no domínio da frequência (BFD).

MÉTODO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA
Método Básico (BFD)
<p>Determinação das funções de densidade espectral de potência de resposta</p> $\tilde{S}_{ij}(\omega_n) = \frac{1}{n_d} \sum_{m=1}^{n_d} \left[\frac{X_i^*(\omega_n) \cdot X_j(\omega_n)}{T \cdot \sum_{k=0}^{N-1} w_k ^2} \right]_{j_m}$
<p>Normalização dos auto-espectros</p> $NPSD_i(\omega_n) = \frac{\tilde{S}_{ii}(\omega_n)}{\sum_{m=ii}^{N_f} \tilde{S}_{ii}(\omega_n)}$ <p>Cálculo do espectro normalizado médio</p> $ANPSD(\omega_n) = \frac{1}{n_{GL}} \cdot \sum_{i=1}^{n_{GL}} NPSD_i(\omega_n)$
<p>Identificação das Frequências Naturais</p> <p>Funções de Coerência</p> $\gamma_{ij}^2(\omega_m) = \frac{ \tilde{S}_{ij}(\omega_m) ^2}{\tilde{S}_{ii}(\omega_m) \cdot \tilde{S}_{jj}(\omega_m)}$
<p>Identificação das Configurações dos Modos de Deformação Operacionais</p> <p>Função de Transferência</p> $T_{j,ref} = \frac{\tilde{S}_{j,ref}(\omega)}{\tilde{S}_{ref,ref}(\omega)}$

5.2.3 Método de decomposição no domínio da frequência

O método de decomposição no domínio da frequência (FDD – *Frequency Domain Decomposition*) corresponde a uma alternativa ao método básico, sendo que tal como o BFD, recorre às funções de densidade espectral de resposta em aceleração, no entanto, a versão melhorada deste método permite resolver as suas principais limitações, isto é, possibilita a identificação de modos com frequências próximas e a obtenção de boas estimativas para coeficientes de amortecimento modal, sendo por isso considerado uma extensão do BFD.

Apesar de alguns dos princípios fundamentais deste método terem sido utilizados no contexto da identificação modal estocástica pela primeira vez por Prevosto (1982), apenas com o trabalho de (Brincker, Zhang, & Andersen, 2000) recebe a designação de FDD, sendo então apresentado esse método e os seus fundamentos de uma forma sistematizada. Com base nesse trabalho foi implementado este método no software ARTeMIS (SVS, 2016), permitindo a sua aplicação de forma automática.

O desenvolvimento deste método baseia-se na diagonalização da matriz de funções de densidade espectral, decompondo-as em contribuições modais que, para cada frequência, influenciam a resposta dum sistema. Essa operação de diagonalização consiste na aplicação de algoritmos de decomposição em valores singulares. Apesar de não ser um método usual em engenharia civil, a sua fácil compreensão e aplicação, aliada à sua velocidade de execução tornou-o num dos mais utilizados na identificação modal estocástica de estruturas de diferentes tipos (Rodrigues, 2004).

Tendo como base os fundamentos teóricos do algoritmo matemático da decomposição em valores singulares, apresentados no livro Juang (1995) e, de um modo mais detalhado no livro de (Klema & Laub, 1980), é, em seguida, reproduzida de forma sucinta.

Assim, de seguida aborda-se a decomposição em valores singulares e posteriormente as várias versões existentes para este método, ou seja, a versão base (FDD) e a versão melhorada (EFDD). Tal como nos casos anteriores, também neste caso se vai recorrer à estrutura exemplo, isto é, a viga com 3 graus de liberdade para aplicar as rotinas desenvolvidas em MATLAB.

5.2.3.1 Decomposição em valores singulares

A decomposição em valores singulares (SVD – *Singular Value Decomposition*) refere-se a um algoritmo que decompõe uma matriz \underline{A} no produto de outras 3, da seguinte forma:

$$\underline{A} = \underline{U}\underline{\Sigma}\underline{V}^T, \quad \underline{\Sigma} = \begin{bmatrix} \underline{S} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \underline{A} = \underline{U}\underline{\Sigma}\underline{V}^T \quad (5.8)$$

Em que \underline{S} corresponde a uma matriz diagonal quadrada que contem os vetores singulares da matriz A por ordem crescente e as matrizes unitárias \underline{U} e \underline{V} contêm os vetores singulares à esquerda e direita, respetivamente. O número de valores singulares, não nulos, indicam a ordem da matriz \underline{A} , isto é, o número de colunas ou linhas linearmente independentes.

A decomposição em valores próprios está relacionada com a determinação de valores e vetores próprios das matrizes $\underline{A}^T\underline{A}$ e $\underline{A}\underline{A}^T$. Os valores singulares de A são iguais às raízes quadradas positivas dos valores próprios de $\underline{A}^T\underline{A}$ e $\underline{A}\underline{A}^T$. As colunas de \underline{U} contêm os vetores próprios de $\underline{A}^T\underline{A}$ enquanto que as colunas de \underline{V} contêm os vetores próprios de $\underline{A}\underline{A}^T$.

No caso de $\underline{\mathbf{A}}$ ser uma matriz complexa as igualdades mantêm-se válidas substituindo a operação de transposição por uma operação de transposição seguida de conjugação complexa, tal como mostra a expressão (5.9).

$$\underline{\mathbf{A}} = \underline{\mathbf{U}}\underline{\mathbf{\Sigma}}\underline{\mathbf{V}}^T \rightarrow \underline{\mathbf{A}} = \underline{\mathbf{U}}\underline{\mathbf{\Sigma}}\underline{\mathbf{V}}^H \quad (5.9)$$

Os valores próprios coincidem com os valores singulares nos casos em que a matriz $\underline{\mathbf{A}}$ é real e simétrica ou complexa e hermitiana, o que resulta em matrizes $\underline{\mathbf{U}}$ e $\underline{\mathbf{V}}$ coincidentes e iguais aos vetores próprios, razão pela qual se pode considerar os valores e vetores próprios um caso particular desta técnica mais genérica.

Em seguida, são descritas e aplicadas as metodologias propostas por Brincker, mais precisamente a Versão Base e a Versão melhorada.

5.2.3.2 Versão Base (FDD)

Tal como referido anteriormente, os métodos no domínio da frequência assentam na análise das matrizes das funções de densidade espectral de potência da resposta e como tal o método FDD não foge à regra. Dessa forma, o método assenta inicialmente em estimar a matriz das funções de densidade espectral de potência da resposta em aceleração da estrutura.

Esta estimativa, avaliada em qualquer frequência discreta ω_i , é então decomposta, através da aplicação da decomposição em valores singulares (SVD), resultando então num conjunto de funções de densidade espectral de 1 grau de liberdade, correspondendo cada uma a um sistema de um grau de liberdade com as mesmas frequências e os mesmos coeficientes de amortecimento dos modos de vibração da estrutura (Magalhães, 2004). Apesar disso, a aplicação deste método depende da assunção de três hipóteses base:

1. que a excitação é um ruído branco;
2. que o amortecimento da estrutura é baixo;
3. que os modos de vibração com frequências próximas são ortogonais.

Caso estas hipóteses não sejam satisfeitas, continua a ser possível adotar este método, obtendo-se resultados menos satisfatórios, ainda assim melhores que os obtidos com o método BFD.

$$\mathbf{G}_{\omega_i} = \underline{\mathbf{U}}_i \underline{\mathbf{S}}_i \underline{\mathbf{U}}_i^H \quad (5.10)$$

Desta forma, a partir desta decomposição obtêm-se 3 matrizes, sendo que $\underline{\mathbf{S}}_i$ é uma matriz diagonal composta pelos valores singulares das funções de densidade espectral e $\underline{\mathbf{U}}_i$ contem os vetores singulares dessas mesmas funções.

Os valores singulares encontram-se armazenados na matriz $\underline{\mathbf{S}}_i$, por ordem decrescente, em que o primeiro valor singular da matriz contém, para cada frequência, as ordenadas do auto-espectro do oscilador de 1 grau de liberdade relativo ao modo de

vibração dominante na vizinhança desse pico. Assim, dependendo da proximidade dos picos de ressonância, existem duas possibilidades:

- **se os picos de ressonância estão suficientemente afastados:** o primeiro valor singular contém, na vizinhança desses picos, os segmentos mais relevantes dos auto-espectros de todos os osciladores de um grau de liberdade, importantes para explicar a resposta da estrutura, enquanto que os restantes valores singulares apresentam valores baixos;
- **se os picos de ressonância estão próximos:** a matriz \underline{S}_i apresentará tantos valores singulares como picos, quantos os modos nessa situação, permitindo assim a sua identificação.

As frequências naturais da estrutura correspondem então à abcissa associada ao máximo dos picos dos valores singulares identificados por este método.

A informação relativa à identificação das configurações de cada um dos modos de vibração da estrutura reside na análise da matriz dos vetores singulares \underline{U}_i , sendo que, tal como para as frequências, dependendo da relação entre os picos de ressonância, existe mais que um procedimento a efetuar:

- **se os modos forem mutuamente ortogonais:** para cada frequência, a primeira coluna contém a configuração do modo dominante e as configurações dos restantes modos aparecem nas restantes colunas desta matriz;
- **se os picos de ressonância estão suficientemente afastados:** as configurações modais, associadas a cada frequência de ressonância, podem ser estimadas através da primeira coluna da matriz;
- **se os picos de ressonância estão próximos:** a configuração do modo dominante é avaliada segundo a primeira coluna da matriz, em correspondência com a respetiva frequência de ressonância, enquanto que as restantes configurações são estimadas com base nas colunas correspondentes aos valores singulares que apresentam os picos e avaliadas na abcissa em que o valor singular respetivo é máximo.

Torna-se ainda importante referir que quando os ensaios são realizados em várias fases, obtêm-se para cada fase, tantos valores singulares quantos graus de liberdade instrumentados. Uma das possibilidades para resolver esta questão passa por normalizar os valores singulares estimados para cada fase de ensaio e, posteriormente, determinar a média de todos esses valores singulares avaliados, resumindo toda a informação num único espectro.

De seguida, aplica-se o procedimento descrito ao exemplo da viga de 3 graus de liberdade, utilizado anteriormente, com base na matriz das funções de densidade espectral de potência de resposta em aceleração. Assim, aplicando o algoritmo da decomposição em valores singulares (SVD) às funções de densidade espectral de potência da resposta

em aceleração apresentadas na Figura 5.3 permite estimar os valores singulares obtendo-se a Figura 5.9.

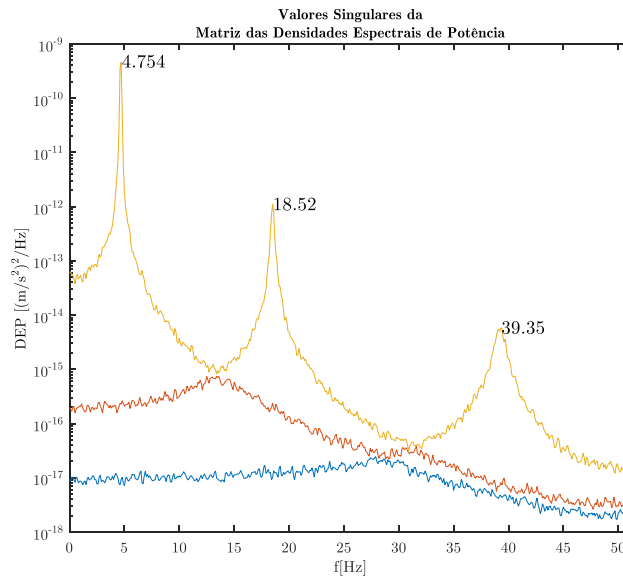


Figura 5.9 – Espectro dos valores singulares da matriz de densidade espectral de potência da resposta em aceleração.

Na figura anterior, identificam-se os valores das frequências naturais da estrutura correspondentes aos 3 picos. Os valores das frequências correspondem às obtidas pelo método básico, sendo que o espectro do 1.º valor singular apresenta um desenvolvimento bastante semelhante ao ANPSD da Figura 5.5. Como neste caso as condições são controladas e as frequências se encontram suficientemente afastadas, não existem mais picos neste espectro.

As configurações modais podem ser obtidas a partir da 1ª. coluna da matriz dos vetores singulares, que sendo complexos permitem identificar a amplitude (componente real) e a com fase (componente imaginária). Assim, na Figura 5.10 apresentam-se as configurações dos modos de vibração desta estrutura.

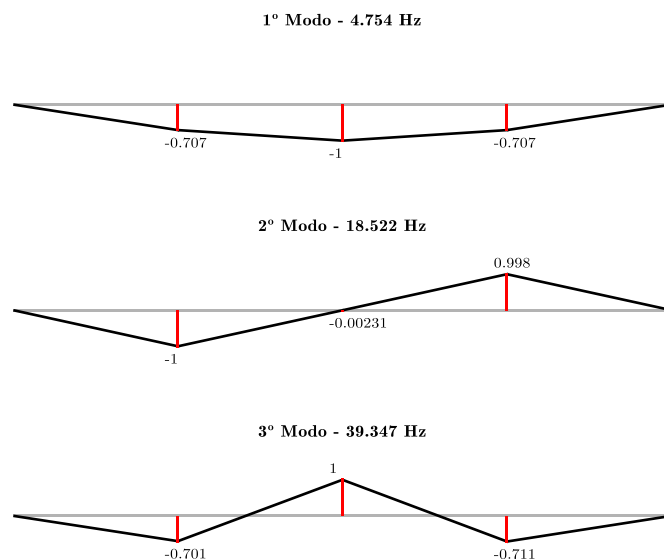


Figura 5.10 – Configurações modais avaliadas recorrendo ao FDD.

5.2.3.3 Versão Melhorada (EFDD)

A versão melhorada do método de decomposição no domínio da frequência (EFDD – *Enhanced Frequency Domain Decomposition*) representa, tal como o nome indica, um aperfeiçoamento do método FFD, descrito anteriormente. Este aperfeiçoamento consiste não só um aumento no rigor das frequências naturais e das configurações modais, mas também na possibilidade de estimar os coeficientes de amortecimentos modais.

Este método, que está descrito pormenorizadamente em (Brincker et al., 2001), assenta na assunção que a função de auto-correlação da resposta de um oscilador de 1 grau de liberdade, sujeito a uma excitação do tipo ruído branco, pode ser proporcional à sua resposta em vibração livre.

De acordo com Rodrigues (2004), este método pode ser dividido em duas fases totalmente distintas. A primeira fase consiste na aplicação da versão base do método FDD, ou seja, de uma forma resumida:

1. Avaliação das funções de densidade espectral da resposta;
2. Decomposição em valores singulares da matriz de funções de densidade espectral;
3. Análise dos espectros de valores singulares para seleção de picos de ressonância correspondentes a modos de vibração;
4. Avaliação das componentes modais segundo os graus de liberdade observados, a partir dos vetores singulares.

Posteriormente a esta primeira fase, o procedimento consiste em identificar as funções de densidade espectral dos sistemas de um grau de liberdade, correspondentes aos modos de vibração identificados e utilizar essas funções para ajustar as estimativas das frequências e das configurações modais e para estimar os coeficientes de amortecimento modais.

Depois de na versão base serem estimadas um conjunto de funções de densidade espectral de osciladores de 1 grau de liberdade, na versão melhorada, recorrendo aos espectros de valores singulares na vizinhança dos picos de ressonância, começa por se estimar os limites das funções de densidade espectral associadas a cada modo de vibração. A identificação destes limites pode ser efetuada manualmente, no entanto esta ficaria dependente da experiência e sensibilidade de quem faz a análise, pelo que é preferível utilizar um procedimento mais fundamentado, para comparar os vetores singulares das frequências vizinhas, com o vetor singular correspondente à frequência de ressonância (Mendes & Oliveira, 2008).

Para efetuar essa comparação entre vetores singulares, recorre-se ao coeficiente MAC (*Modal Assurance Criterion*) que mede a correlação entre as duas configurações

modais analíticas e/ou experimentais (Allemang & Brown, 1982) através da seguinte expressão:

$$\text{MAC}_{i,j} = \frac{|\varphi_i^T \cdot \varphi_j|^2}{\varphi_i^T \cdot \varphi_i \cdot \varphi_j^T \cdot \varphi_j} \quad (5.11)$$

Onde φ_i e φ_j representam dois vetores coluna que contêm as configurações modais a comparar. Este coeficiente MAC, varia entre os valores de 0 e 1, sendo que valores próximos de 0 revelam uma correlação muito baixa entre os dois vetores, enquanto que valores perto da unidade indicam que existe uma boa correlação.

Assim, para definir as funções de densidade espectral dos osciladores de 1 grau de liberdade, é necessário considerar um limite mínimo para o coeficiente MAC (por exemplo $\text{MAC} > 0,9$). Após a escolha do limite, os valores singulares associados às frequências de ressonância, entre os limites estimados à esquerda e à direita, integram as referidas funções de densidade espectral dos osciladores de 1GL, considerando-se que fora desse intervalo têm um valor de zero.

Assim, o coeficiente MAC pode ter elevada relevância e deve ser escolhido caso a caso, com o intuito de garantir que a função de densidade espectral é claramente dominada pelo vetor modal que caracteriza a frequência de ressonância, isto porque um valor de coeficiente de MAC baixo, leva a que a função de densidade espectral seja definida por um maior número de valores singulares, no entanto, revela um maior desvio em relação ao vetor singular de referência.

Caso os picos de ressonância estejam próximos, as funções de densidade espectral dos sistemas de 1 grau de liberdade envolvem contribuições de diversos espectros de valores singulares. Caso contrário, a seleção dessas funções de densidade espectral envolve apenas o espectro do primeiro valor singular.

Uma vez definidas as funções de densidade espectral dos osciladores de 1 grau de liberdade, é possível efetuar um ajuste na avaliação das configurações modais recorrendo a uma média dos vetores singulares que se encontram na vizinhança do pico de ressonância e fazem parte das funções de densidade espectral dos osciladores de 1 grau de liberdade, ponderada pelo valor dos correspondentes valores singulares.

Contudo, o grande contributo deste método consiste nas funções de auto-correlação, que permitem obter estimativas dos coeficientes de amortecimento modais e valores ajustados das estimativas das frequências naturais. Essas funções de auto-correlação podem ser obtidas transformando as funções de densidade espectral dos osciladores de 1 grau de liberdade para o domínio do tempo, pela inversa da transformada de Fourier (algoritmo da IFFT). Como estas funções são proporcionais à resposta em vibração livre, permitem estimar os coeficientes de amortecimento e as frequências dos osciladores de um grau de liberdade, usando conceitos simples da dinâmica clássica.

Segundo Mendes & Oliveira (2008), este procedimento consiste inicialmente na determinação dos máximos positivos e negativos das funções de auto-correlação, com o intuito calcular o decremento logarítmico δ , pela seguinte expressão:

$$\delta = \frac{2}{k} \ln \left(\frac{r_0}{|r_k|} \right) \quad (5.12)$$

Onde r_0 corresponde ao valor inicial da função de auto-correlação e r_k é o k -ésimo máximo da função de auto-correlação. Uma vez determinado o decremento logarítmico, é possível determinar os coeficientes de amortecimento, recorrendo à expressão (5.13).

$$\xi = \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + 4 \cdot \pi^2}} \quad (5.13)$$

A partir da função de auto-correlação é possível estimar a frequência através de regressão linear nos instantes de passagem por zero e nos instantes correspondentes aos valores máximos (positivos ou negativos), e tendo em conta a relação entre a frequência natural amortecida f_a e a frequência natural não amortecida f_N :

$$f_N = \frac{f_a}{\sqrt{1 - \xi^2}} \quad (5.14)$$

Uma vez que as funções de auto-correlação são discretas, importa referir que, para se avaliar de uma forma precisa os valores máximos (positivos e negativos), por consequência os correspondentes instantes de ocorrência e os instantes de passagem por zero, é conveniente recorrer à utilização de funções de interpolação entre os vários valores discretos. Com este fim, (Brincker et al., 2001) recomenda a utilização uma interpolação quadrática.

Recorrendo uma vez mais ao exemplo da viga de 3 GL, estudada até ao momento, aplica-se, de seguida, o procedimento descrito com base nas funções de densidade espectral dos osciladores de 1 GL. Desta forma, na Figura 5.11 apresenta-se a variação dos coeficientes MAC ($MAC > 0,9$) para cada uma das frequências naturais de vibração da estrutura que têm como intuito determinar os limites de frequência associados a cada modo de vibração.

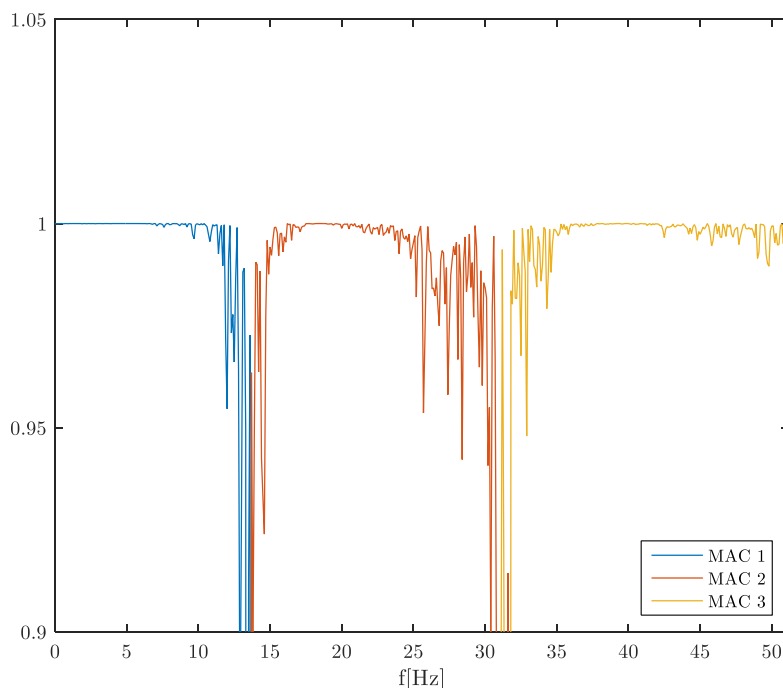


Figura 5.11 – Valores do coeficiente de MAC para o exemplo do modelo da viga de 3GL.

Segundo Mendes & Oliveira (2008), Quanto mais alisada for a estimativa dos espectros de valores singulares, menor será a rugosidade dos coeficientes MAC na zona de transição entre modos de vibração. De seguida, apresenta-se novamente as funções de densidade espectral obtidas no método FDD, com as zonas correspondentes aos osciladores de 1 grau de liberdade, segundo os resultados obtidos do coeficiente MAC.

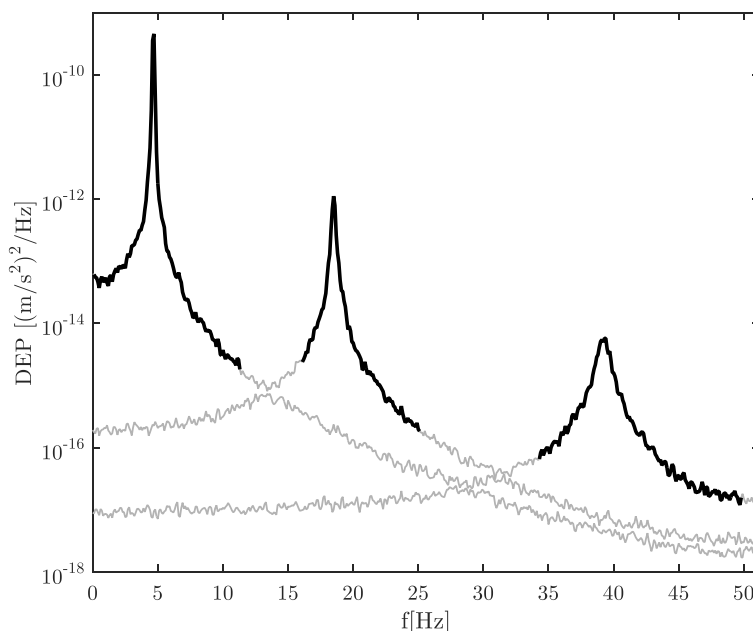


Figura 5.12 – Espectros dos valores singulares da matriz das densidades espectrais de potência da resposta, de acordo com o coeficiente MAC, para o modelo da viga de 3GL.

Realizando a transformação das funções de densidade espectral referentes a cada oscilador de 1GL para o domínio do tempo determinam-se as funções de auto-correlação,

com base nas quais se estimam os valores do coeficiente de amortecimento modal, com base no logaritmo dos máximos locais obtidos para aquelas funções (ver Figura 5.13, Figura 5.14 e Figura 5.15).

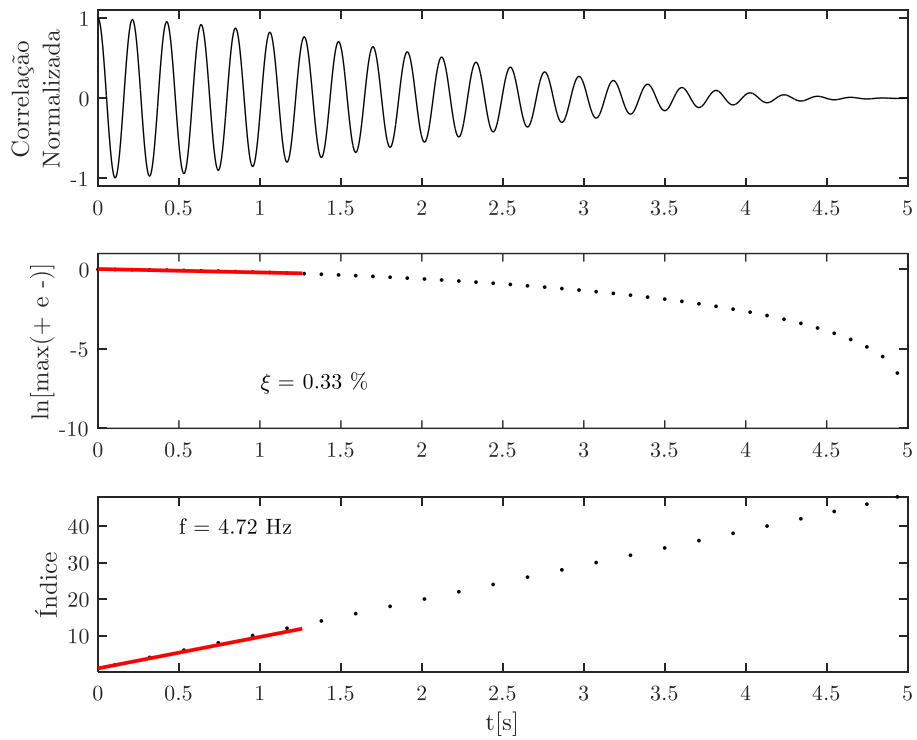


Figura 5.13 – Avaliação do coeficiente de amortecimento e da frequência do 1º. modo de vibração.

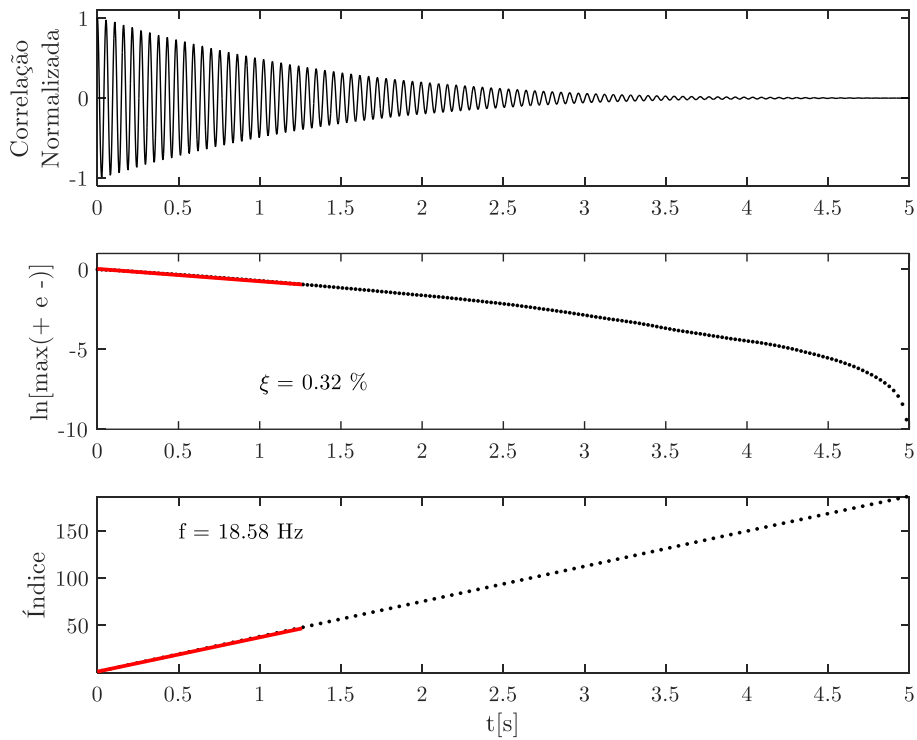


Figura 5.14 – Avaliação do coeficiente de amortecimento e da frequência do 2º. modo de vibração.

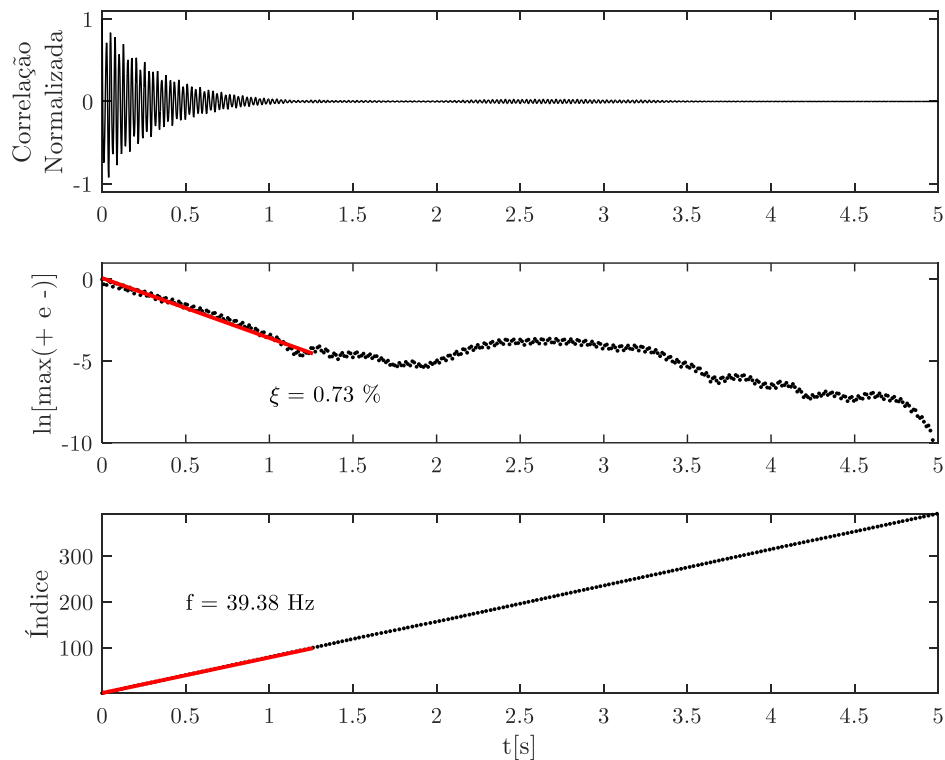


Figura 5.15 – Avaliação do coeficiente de amortecimento e da frequência do 3º. modo de vibração.

Nas figuras anteriores, representam-se a vermelho as retas ajustadas aos pontos mais representativos das funções de auto-correlação, sendo que a partir do declive dessas retas se estimam os verdadeiros coeficientes de amortecimento e os valores ajustados das frequências dos modos de vibração da viga exemplo com 3 GL, que se encontram resumidos na Tabela 5.2:

Tabela 5.2 – Síntese de resultados obtidos pela aplicação do método EFDD, para a viga exemplo com 3GL.

Modos	Frequência [Hz]	Coefficiente de Amortecimento [%]	Valor ajustado da frequência [Hz]
1º.	4,66	0,33	4,72
2º.	18,52	0,32	18,58
3º.	39,35	0,73	39,38

Tendo em conta a contribuição de todos os vetores singulares associados aos espectros dos osciladores de 1GL, apresenta-se, na Figura 5.16, as configurações modais com um fator de escada de 0,075.

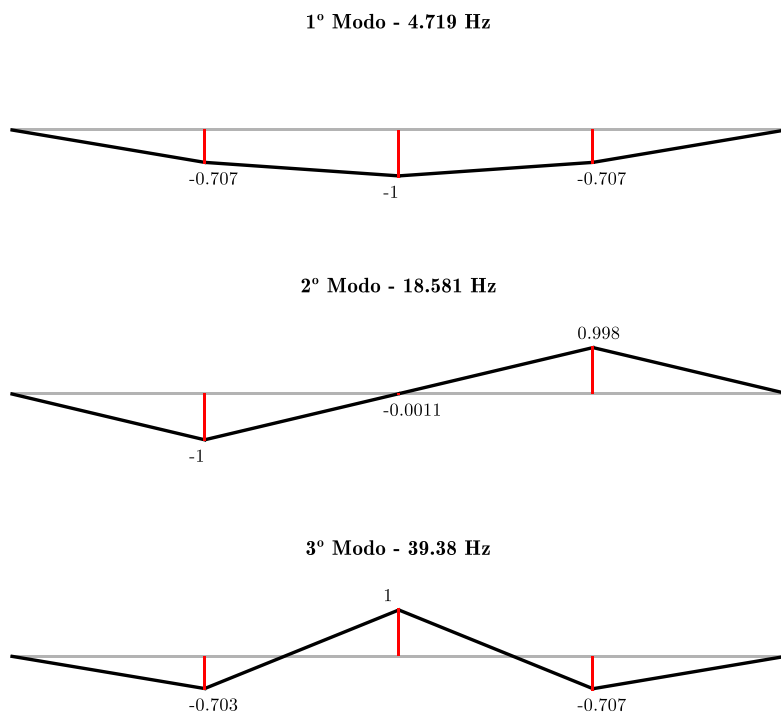


Figura 5.16 – Configurações modais obtidas da aplicação do método EFDD para o exemplo do modelo da viga de 3 GL.

Comparando com os valores obtidos anteriormente por diferentes métodos, é possível verificar que os valores obtidos pela versão melhorada são muito semelhantes, diferindo apenas por algumas casas decimais.

Na Tabela 5.3 apresenta-se uma síntese destes resultados, estabelecendo-se um paralelismo entre as formulações da versão base (FDD) e a versão melhorada (EFDD).

Tabela 5.3 – Método da decomposição no domínio da frequência. Paralelismo entre a versão base (FDD) e a versão melhorada (EFDD).

MÉTODOS NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA	
Método da decomposição	
Versão Base (FDD)	Versão Melhorada (EFDD)
Determinação das funções de densidade espectral de potência de resposta	
$\tilde{S}_{ij}(\omega_n) = \frac{1}{n_d} \sum_{m=1}^{n_d} \left[\frac{X_i^*(\omega_n) \cdot X_j(\omega_n)}{T \cdot \sum_{k=0}^{N-1} w_k ^2} \right]_{jm}$	
Decomposição em valores singulares	
$\underline{G}(\omega_i) = \underline{U}_i \underline{S}_i \underline{U}_i^H$	
Matriz \underline{S}_i contém os valores singulares \Downarrow Frequências Naturais da estrutura	Cálculo do coeficiente MAC $MAC_{i,j} = \frac{ \varphi_i^T \cdot \varphi_j ^2}{\varphi_i^T \cdot \varphi_i \cdot \varphi_j^T \cdot \varphi_j}$
Matriz \underline{U}_i contém os vetores singulares \Downarrow Configuração dos Modos de Vibração	Cálculo do decremento logarítmico $\delta = \frac{2}{k} \ln \left(\frac{r_0}{ r_k } \right)$ Cálculo do amortecimento modal $\xi = \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + 4 \cdot \pi^2}}$ Cálculo das frequências naturais ajustadas $f_N = \frac{f_a}{\sqrt{1 - \xi^2}}$

5.3 Métodos no domínio do tempo

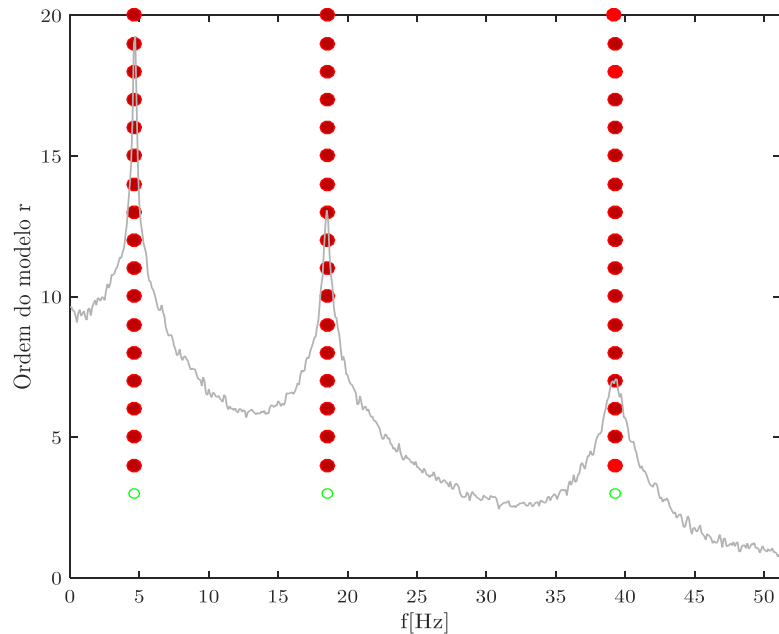
Denominados também de paramétricos, os métodos de identificação modal no domínio do tempo consistem na utilização de diferentes técnicas para ajustar modelos, com base nas funções de correlação da resposta dos sistemas estruturais ou das próprias séries temporais de resposta. Uma vez que a maioria destes métodos de análise não se baseiam nos dados das funções de densidade espectral, podem ser uma boa alternativa para identificar modos com frequências próximas e em sistemas estruturais de elevada complexidade, principalmente em sistemas de elevada complexidade, quando a hipótese de amortecimento proporcional não se ajusta.

Segundo Caetano (1992), este tipo de métodos foram desenvolvidos fundamentalmente nos campos da engenharia eletrónica e de sistemas de controlo, apresentam vantagens quando as frequências naturais do sistema se encontram distribuídas em grandes intervalos de amplitude e quando o número de modos de vibração

a identificar é elevado. O principal inconveniente deste tipo de métodos está em que só se podem identificar modos de vibração na gama de frequências selecionadas para análise, não considerando os efeitos residuais dos modos localizados fora dessa mesma gama.

Este tipo de métodos pode ainda ser dividido em dois grupos: métodos de uma fase e métodos de duas fases. Os primeiros consistem em utilizar diretamente as séries temporais de resposta, enquanto que os últimos baseiam-se na análise das funções de correlação, envolvendo uma primeira fase de avaliação das funções de correlação e uma segunda fase de ajuste de modelos, segundo essas funções (Rodrigues, 2004).

Os modelos de estado, abordados no capítulo 2, constituem os principais fundamentos associados a este tipo de métodos, existindo mesmo várias implementações como LMS (2016) ou SVS (2016). A título meramente exemplificativo, mostra-se na Figura 5.17 um exemplo de um diagrama de estabilização obtido recorrendo a uma rotina desenvolvida em MATLAB no âmbito do trabalho de Mendes (2010), aplicado ao exemplo do modelo de viga de 3GL.



	Pólos com pares de valores complexos conjugados	$0 < \xi < 20\%$	Pólo estável em $f \Delta f$ relativo $< 1\%$	Pólo estável em $f \Delta f$ relativo $< 5\%$	Pólo estável em configuração MAC $> 0,99$
○ (azul)	Sim	-	-	-	-
○ (verde)	Sim	Sim	-	-	-
○ (vermelho)	Sim	Sim	Sim	-	-
● (vermelho escuro)	Sim	Sim	Sim	Sim	-
● (vermelho claro)	Sim	Sim	Sim	-	Sim
● (vermelho muito escuro)	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim

Figura 5.17 - Diagrama de estabilização, utilizando o método SSI-COV, para o exemplo do modelo de viga de 3GL.

Para uma melhor identificação e análise de resultados, a figura anterior apresenta um espectro médio obtido pelo método BFD. As colunas de estabilização de polos permitem identificar as frequências correspondentes aos modos de vibração da estrutura do modelo da viga. Este método no domínio do tempo permite também definir os coeficientes de amortecimento associados a cada modo de vibração, tendo-se obtido valores de 0,199%, 0,533% e 1,224% para o primeiro, segundo e terceiro modo, respetivamente.

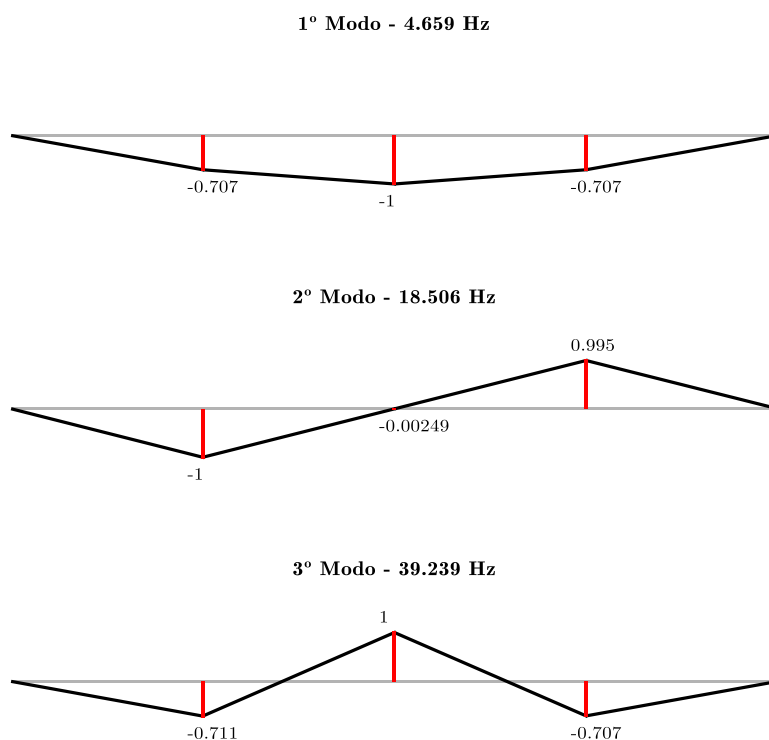


Figura 5.18 – Configurações modais obtidas a partir da aplicação do método SSI-COV, para o exemplo do modelo da viga de 3GL.

Como se pode observar, os resultados obtidos utilizando este método estão de acordo com os resultados anteriores provenientes dos métodos de identificação modal no domínio da frequência.

5.4 Análise do modelo físico de uma viga metálica

À medida que foram abordadas as várias temáticas associadas aos métodos de identificação modal foram apresentados exemplos de modelos simples, tendo como objetivo facilitar a compreensão dos conceitos relacionados com cada método. No entanto, tal como referido anteriormente, as histórias de acelerações utilizadas foram geradas recorrendo a rotinas desenvolvidas em MATLAB.

Nesta secção apresenta-se o estudo de um pequeno exemplo para mostrar a utilidade das ferramentas de identificação modal desenvolvidas e descritas ao longo deste

capítulo. A análise deste exemplo tem como objetivo, não só conhecer melhor os ensaios de vibração ambiental e o comportamento dinâmico de uma modelo estrutural a uma escala reduzida, mas também de demonstrar a importância de utilizar modelos numéricos de elementos finitos e técnicas de identificação modal no apoio aos estudos do comportamento dinâmico observado, para verificar a sua fiabilidade e calibrar os modelos numéricos de elementos finitos.

Assim, de seguida, são descritas as principais características do modelo físico que será analisado e apresentados os resultados da análise efetuada.

5.4.1 Descrição do modelo

A estrutura a ser estudada consiste num modelo físico de uma lâmina encastrada-apoiada com um comprimento total de 1,05 metros e com uma secção transversal retangular de $0,002 \times 0,02$ metros (ver Figura 5.19).

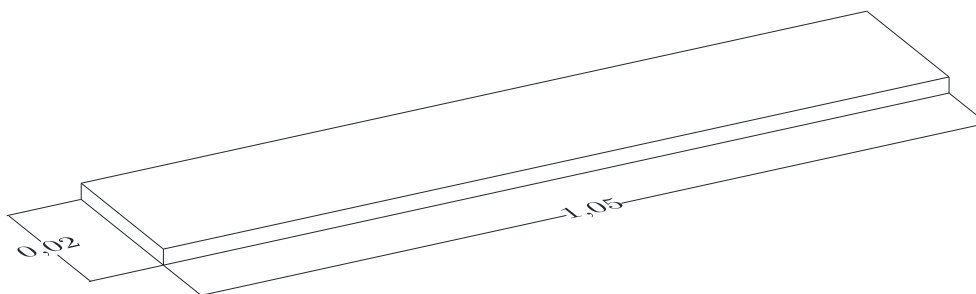


Figura 5.19 - Modelo físico da viga com as respetivas medidas.

A viga é de por aço e tem um peso total de 334 gramas, apresentando as seguintes características:

Tabela 5.4 - Características mecânicas do material.

Peso específico [kN/m ³]	Modulo de Elasticidade [GPa]	Coefficiente de Poisson
78	210	0,3

5.4.2 Modelo numérico

Para a modelação desta estrutura, foi utilizado o programa de cálculo automático SAP2000 (CSI, 2017) sempre com o intuito de simular de forma o mais aproximada possível o comportamento estrutural do modelo físico. A viga foi discretizada em elementos de barra (frame) considerando que existe um encastramento perfeito numa das extremidades e um apoio móvel na outra.

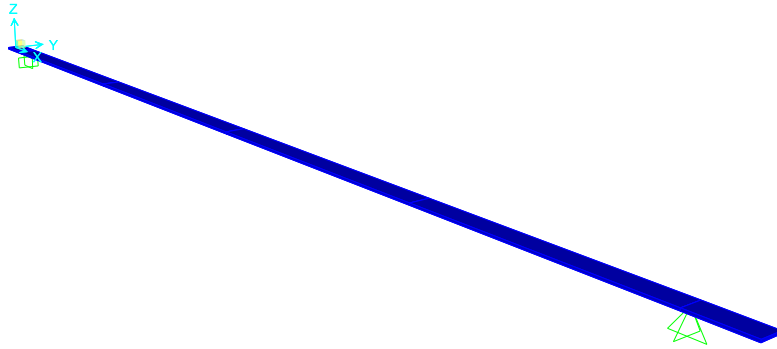


Figura 5.20 – Modelo numérico da viga em estudo, desenvolvido no programa SAP2000.

O modelo é composto por 7 elementos barra, considerando que os materiais têm as características indicadas na Tabela 5.4. Analisando os resultados obtidos em Suleyman (2016), é possível concluir que a elevada flexibilidade da viga torna necessário considerar, em termos de modelação, o peso total dos sensores dispostos ao longo da estrutura e também o condicionamento dos cabos de comunicação ao movimento da viga. Assim, considera-se que cada dispositivo de medição tem um peso de aproximadamente 7,4 gramas, sendo representado como forças de $7,22 \times 10^{-5}$ kN no local onde esses dispositivos estão colocados. Relativamente ao condicionamento do movimento causado pelos cabos, são modelados como molas, localizadas no ponto instrumentado, com uma rigidez que aproxime ao máximo as frequências naturais obtidas no ensaio de vibração ambiental.

Efetuando-se uma análise modal no programa de cálculo automático para o modelo numérico com as características descritas, obteve-se os principais parâmetros da resposta dinâmica da estrutura (frequências naturais e modos de vibração), indicados na Figura 5.21.

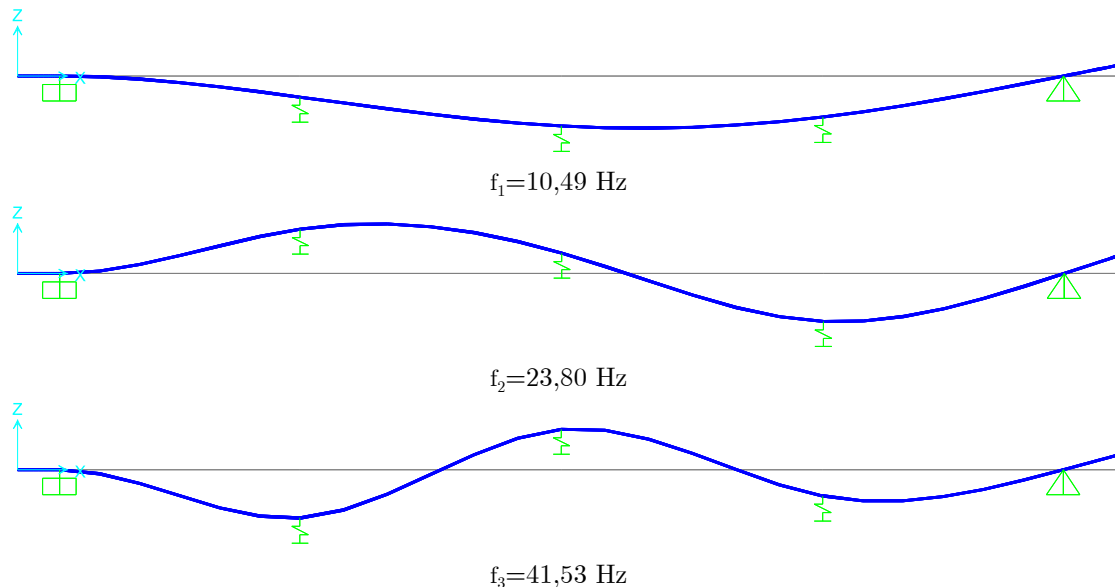


Figura 5.21 – Configurações modais e as respectivas frequências naturais de vibração (3 primeiras), obtidas no modelo numérico desenvolvido no programa SAP2000.

5.4.3 Ensaios de vibração ambiental

O ensaio foi realizado no Laboratório de Estruturas do ISEL, utilizando 3 acelerómetros unidireccionais do tipo piezoelétricos, da marca *PCB Piezotronics*, modelo 333B52, ligados por cabos coaxiais a um sistema de aquisição de dados da marca *OROS*, modelo *OR35*, com ligação a um computador que permite controlar e configurar o sistema ao longo do desenvolvimento dos ensaios.



Figura 5.22 – Equipamentos utilizados: a) Acelerómetro piezoelétrico da marca *PCB Piezotronics*; b) Sistema de aquisição de dados da marca *OROS*.

A realização do ensaio foi antecedida do seu planeamento, onde se decidiu os pontos a instrumentar ou a gama de amostragem, de acordo com os resultados do modelo numérico, mais precisamente das frequências naturais e das respetivas configurações modais obtidas. De forma a permitir identificar os 3 primeiros modos de vibração, optou-se por considerar um valor para a frequência de amostragem de 102,4 Hz. Os sensores foram dispostos ao longo da estrutura de acordo com a Figura 5.23.



Figura 5.23 – Posicionamento dos sensores durante o ensaio.

De forma a excitar todos os modos de vibração e obter registos com uma relação sinal-ruído mais otimizada, recorreu-se à utilização de uma ventoinha, simulando o efeito do vento. A medição foi efetuada ao longo de 10 minutos, ou seja, 600 segundos, com um

total de 61440 pontos, obtendo-se as séries temporais de aceleração apresentadas na Figura 5.24.

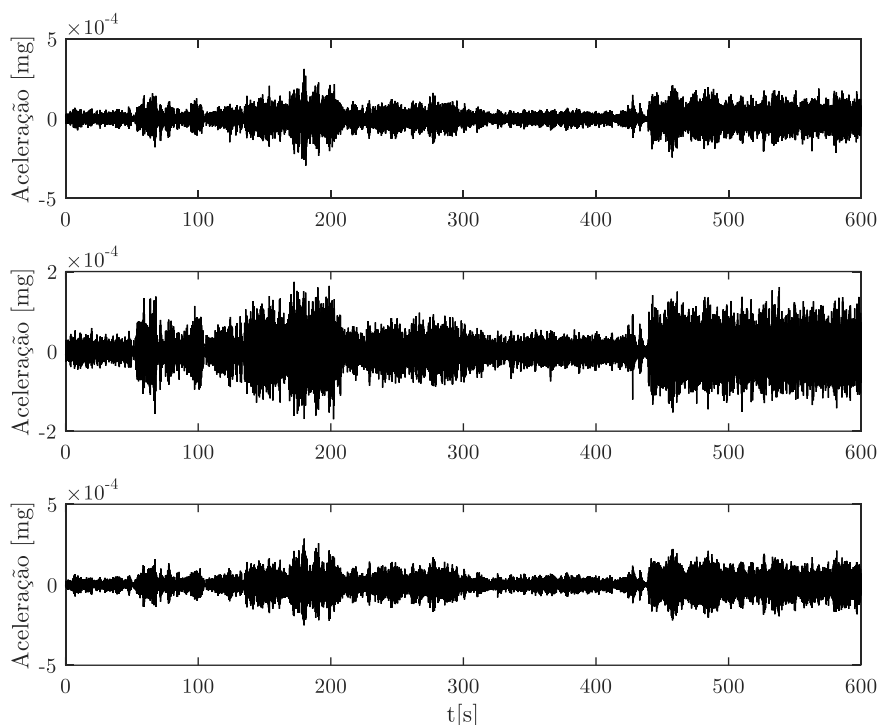


Figura 5.24 – Histórias de acelerações obtidas ao longo dos 600 segundos de ensaio, em cada grau de liberdade medidas no ensaio laboratorial.

5.4.4 Identificação modal

A identificação modal foi efetuada recorrendo às rotinas desenvolvidas em MATLAB, no âmbito deste trabalho. Como referido anteriormente, é recomendável utilizar mais do que um método de identificação modal para avaliar o comportamento dinâmico de uma estrutura, uma vez que permite efetuar uma validação mútua. Nesse sentido, optou-se por recorrer a dois métodos de identificação modal para caracterizar o comportamento da viga: método de decomposição no domínio da frequência, versão melhorada (EFDD) e método de identificação estocástica em subespaços de duas fases (SSI-COV).

5.4.4.1 EFDD

Aplicando o método EFDD ao modelo físico da viga encastrada-apoiada, num primeiro passo obtém-se os espectros dos valores singulares da matriz das densidades espectrais de potência da resposta em aceleração que se mostra na Figura 5.25 e no qual

se assinalam os picos associados às frequências naturais da viga, indicando os respectivos valores identificados.

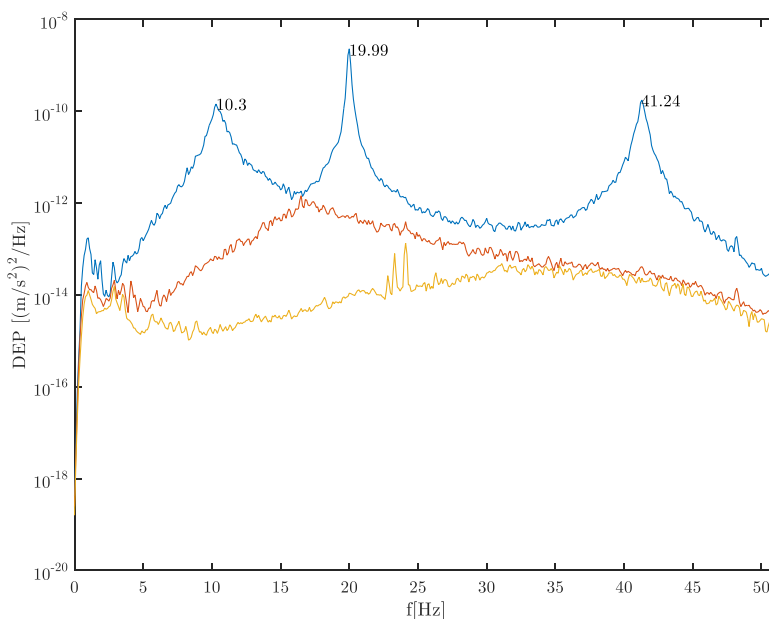


Figura 5.25 - Espectros dos valores singulares da matriz das densidades espectrais de potência da resposta, para o modelo da viga de 3GL.

Importa referir que as histórias de aceleração obtidas no ensaio de vibração ambiental realizado sobre o modelo físico foram subdivididas em 177 segmentos com comprimento de 10 segundos (com 1024 pontos), sobrepostos a 2/3, aplicando a cada um desses segmentos uma janela de dados de Hanning antes da sua transformação para o domínio da frequência recorrendo à FFT. Atendendo às opções tomadas neste processamento inicial, a precisão dos valores identificados depende da resolução em frequência, que neste caso é $\Delta f = 1/10 = 0,10$ Hz, uma vez que se utilizou uma frequência de amostragem de 102,4 Hz ($\Delta t = 0,0098$ s).

A partir da Figura 5.25, aplicando o resto do procedimento do método obtém-se os coeficientes de amortecimento modal e os valores ajustados das frequências naturais, que se apresentam na Tabela 5.5.

Tabela 5.5 – Valores de amortecimento modal e valor ajustado da frequência com base no método EFDD, obtidos para o exemplo da viga encastrada-apoiada.

Modos	Frequência [Hz]	Coefficiente de amortecimento [%]	Valor ajustado da frequência [Hz]
1º.	10,3	2	10,46
2º.	19,99	0,23	20,05
3º.	41,24	0,34	41,42

As configurações dos modos de vibração associados a cada um destes valores de frequências naturais ajustadas, são apresentados na Figura 5.26.

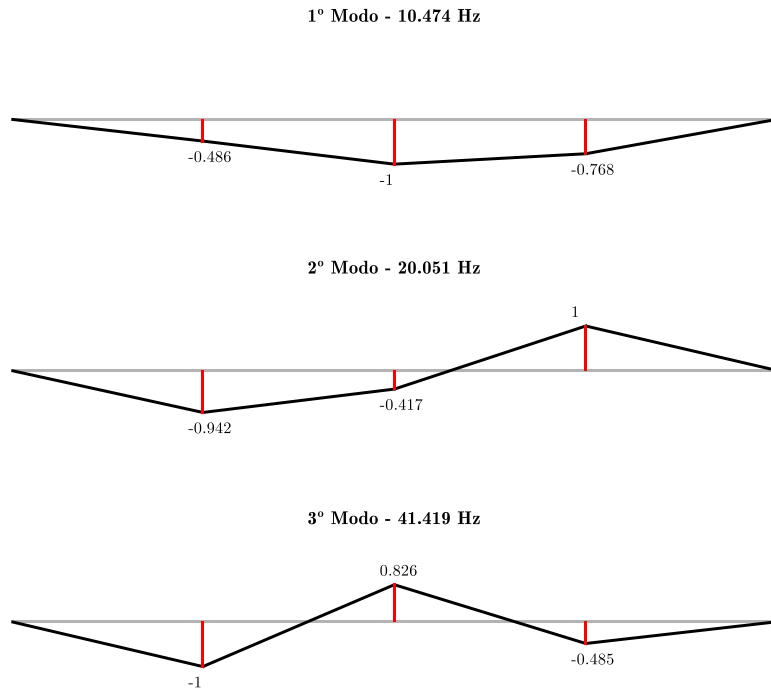
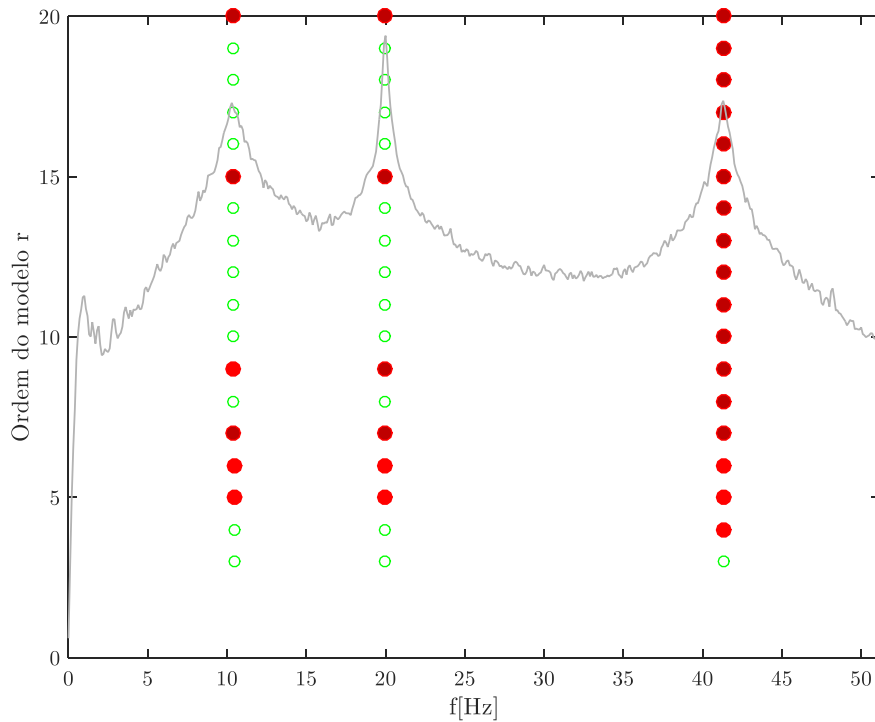


Figura 5.26 – Configurações dos primeiros 3 modos de vibração, de acordo com o método EFDD.

5.4.4.2 SSI-COV

A aplicação do método de identificação modal estocástica no domínio do tempo, que é uma vez mais apresentado a título meramente exemplificativo, no exemplo da viga estudada, apresentando-se na Figura 5.27 o diagrama de estabilização a partir do qual é possível identificar as frequências de vibração dos vários modos.



	Pólos com pares de valores complexos conjugados	$0 < \xi < 20\%$	Pólo estável em $f \Delta t$ relativo $< 1\%$	Pólo estável em $f \Delta t$ relativo $< 5\%$	Pólo estável em configuração MAC $> 0,99$
○	Sim	-	-	-	-
○	Sim	Sim	-	-	-
○	Sim	Sim	Sim	-	-
●	Sim	Sim	Sim	Sim	-
●	Sim	Sim	Sim	-	Sim
●	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim

Figura 5.27 - Diagrama de estabilização utilizando o método SSI-COV, para o exemplo do modelo físico da viga.

As linhas verticais presentes representam as frequências dos modos de vibração da estrutura em estudo. Este método permite ainda identificar os coeficientes de amortecimento associados a cada um destes modos de vibração, sendo estes apresentados na Figura 5.6.

Tabela 5.6 – Valores das frequências naturais e do amortecimento modal, com base no método SSI-COV.

Modos	Frequência [Hz]	Coefficiente de amortecimento modal [%]
1°.	10,39	4,65
2°.	19,99	0,36
3°.	41,31	0,65

Uma vez identificados os valores das frequências naturais e dos valores do amortecimento modal, obtém-se a configuração dos 3 modos de vibração da estrutura que se apresentam na Figura 5.28.

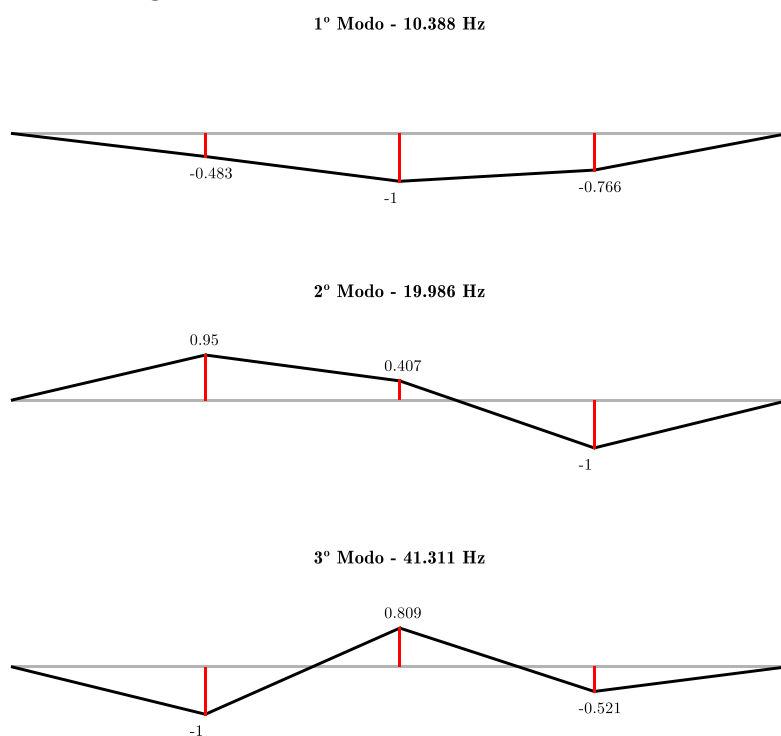


Figura 5.28 – Configurações dos primeiros 3 modos de vibração, de acordo com o método SSI-COV.

Uma vez identificadas as características dinâmicas mais relevantes recorrendo aos diferentes métodos, de seguida efetua-se uma comparação de resultados.

5.4.5 Comparação de Resultados

Neste ponto apresenta-se uma comparação dos resultados para as frequências naturais, modos de vibração e coeficientes de amortecimento, obtidos recorrendo aos diferentes métodos experimentais referidos no ponto anterior (EFDD e SSI-COV) e para o modelo numérico referido anteriormente.

5.4.5.1 Comparação das frequências naturais

A comparação entre as frequências naturais estimadas experimentalmente através da identificação modal e as numéricas obtidas a partir do modelo 3D desenvolvido no programa de cálculo automático SAP2000, é apresentada na Tabela 5.7. Nesta tabela é possível comparar, em termos absolutos, os diferentes valores obtidos, apresentando-se ainda a taxa de erro tomando como referência os resultados do modelo numérico calibrado.

Tabela 5.7 - Comparação dos valores frequências naturais da viga obtidas no modelo numérico e pelos métodos de identificação modal.

Modos	Frequências naturais dos modos de vibração				
	Modelo de elementos finitos [Hz]	EFDD [Hz]	Erro [%]	SSI-COV [Hz]	Erro [%]
1°.	10,49	10,46	0,29	10,39	0,95
2°.	23,80	20,05	15,76	19,99	16,01
3°.	41,53	41,42	0,26	41,31	0,53

Analisando a tabela anterior é possível verificar a existência de uma elevada concordância entre os resultados do modelo numérico e os resultados experimentais para o primeiro e terceiro modo, apresentando erro inferior a 1%, já a segunda frequência natural apresenta uma discrepância bastante mais elevada.

Esta comparação permite ainda verificar que o método no domínio do tempo (SSI-COV) apresenta maior erro, relativamente ao modelo numérico, quando comparado com o método no domínio da frequência (EFDD).

5.4.5.2 Comparação das configurações modais

Apesar de a comparação entre os valores das frequências naturais ser um bom indicador para avaliar a correlação entre resultados numéricos e experimentais, a comparação entre as configurações modais permite uma análise mais detalhada. Assim, de seguida são comparadas as configurações modais, obtidas segundo os diferentes

métodos, recorrendo ao coeficiente MAC, introduzido na equação (5.11). Para concretizar esta comparação utilizou-se uma rotina em MATLAB, desenvolvida para esse efeito, obtendo-se os seguintes resultados:

— Entre o modelo numérico e o método EFDD

Inicialmente, procedeu-se à comparação entre as configurações modais obtidas experimentalmente pelo método EFDD com as calculadas através do modelo numérico, obtendo-se os valores de MAC indicados na expressão (5.15).

$$\text{MAC} = \begin{bmatrix} 0,9959 & 0,0001 & 0 \\ 0,0034 & 0,9999 & 0,0023 \\ 0,0008 & 0,0004 & 0,9985 \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

Geralmente, utiliza-se uma representação esquemática para interpretar os resultados deste coeficiente, que se apresenta na Figura 5.29.

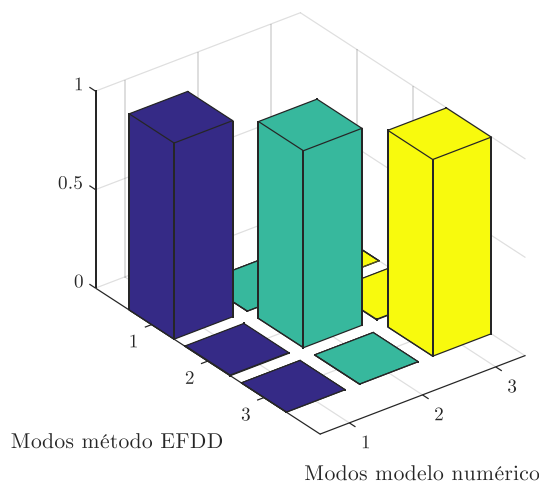


Figura 5.29 – Coeficientes MAC obtidos para o modelo da viga encastrada-apoiada, resultante da comparação entre as configurações modais obtidas pelo modelo numérico e pelo método EFDD.

— Entre o modelo numérico e o método SSI-COV

Seguidamente, procedeu-se à comparação entre os valores das configurações modais obtidas experimentalmente pelo método SSI-COV com as calculadas através do modelo numérico, obtendo-se os seguintes coeficientes MAC:

$$\text{MAC} = \begin{bmatrix} 0,9956 & 0,0002 & 0,0006 \\ 0,0037 & 0,9996 & 0,0011 \\ 0,0007 & 0,0008 & 0,9994 \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

Representando uma vez mais esta matriz em termos gráficos, de forma a interpretar mais facilmente estes resultados, obteve-se a seguinte figura:

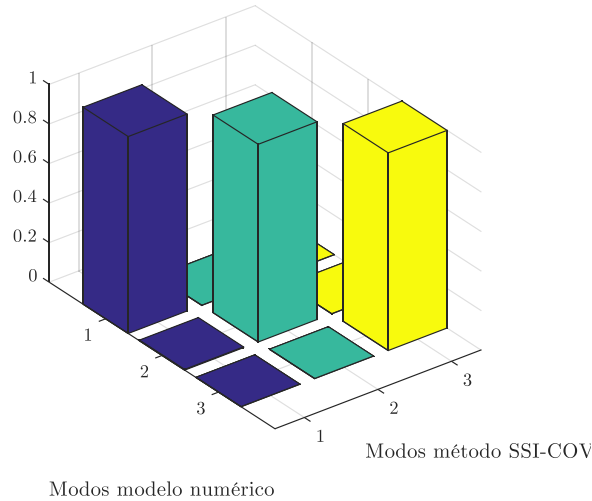


Figura 5.30 – Coeficientes MAC obtidos para o modelo da viga encastrada-apoiada, resultante da comparação entre as configurações modais obtidas pelo modelo numérico e pelo método SSI-COV.

— Entre o método EFDD e SSI-COV

Finalmente, procede-se à comparação entre as configurações modais obtidas experimentalmente pelos dois métodos utilizados. Esta comparação resulta nos coeficientes MAC apresentados na expressão (5.17).

$$\text{MAC} = \begin{bmatrix} 1,0000 & 0,0032 & 0,0003 \\ 0,0024 & 0,9999 & 0,0043 \\ 0,0018 & 0,0018 & 0,9992 \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

Na Figura 5.31, apresenta-se a representação esquemática utilizada também para as comparações anteriores, que permite interpretar de forma mais simples os coeficientes MAC obtidos para esta comparação.

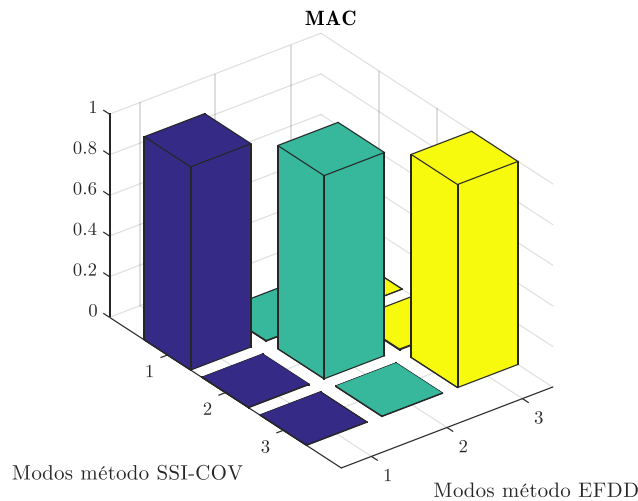


Figura 5.31 – Coeficientes MAC obtidos para o modelo da viga encastrada-apoiada, resultante da comparação entre as configurações modais obtidas pelo método EFDD e SSI-COV.

Analisando os valores obtidos nas matrizes das equações (5.15), (5.16) e (5.17), pode-se concluir que os valores da diagonal principal se aproximam da unidade apresentando assim uma boa correlação entre modos experimentais e numéricos. Apesar

de ambos os métodos apresentarem valores muito próximos, parece apresentar valores mais aproximados à unidade, o que significa que apresenta melhor correlação com os resultados do modelo.

5.4.5.3 Comparação dos coeficientes de amortecimento modal

Os métodos de identificação modal utilizados permitem ainda identificar os valores dos coeficientes de amortecimento modal, que podem ser comparados com recurso à Tabela 5.8, onde se apresentam estes valores para cada um dos métodos.

Tabela 5.8 – Comparação entre os coeficientes de amortecimento modais avaliados com os métodos de identificação modal.

Modos	Coeficientes de amortecimento modal [%]	
	Método EFDD	Método SSI-COV
1°.	2,00	4,652
2°.	0,23	0,355
3°.	0,34	0,646

Como podemos observar, existem diferenças significativas entre os resultados obtidos pelos dois métodos. Trata-se de um domínio que ainda precisa de ser explorado, futuramente.

5.5 Considerações Finais

Ao longo deste capítulo são descritos alguns dos principais métodos de identificação modal utilizados para caracterizar o comportamento dinâmico de estruturas de engenharia civil. Estes métodos podem estar associados ao domínio da frequência, baseando-se nas funções de densidade espectral, ou ao domínio do tempo.

Relativamente aos métodos no domínio da frequência, são abordados os métodos BFD, FDD e EFDD, sendo realizada uma descrição sucinta as bases teóricas dessas metodologias, os procedimentos e cuidados a ter na sua aplicação. Os métodos no domínio do tempo são também abordados, no entanto de uma forma mais breve, mostrando-se apenas a aplicação do método SSI-COV. Utilizando as séries temporais de aceleração geradas no capítulo 2, desenvolveram-se rotinas em MATLAB para o modelo da viga bi-apoiada de 3 GL em que são aplicadas as diferentes formulações.

O método básico no domínio da frequência (BFD) é provavelmente aquele que é mais usualmente utilizado por ter sido pioneiro nesta área, mas também por ser o de mais simples aplicação, permitindo obter resultados fiáveis. Esta metodologia permite identificar os modos operacionais de deformação, não propriamente os modos de vibração, dificultando a obtenção de bons resultados caso as frequências estejam muito próximas.

As frequências naturais correspondem aos valores de frequência dos picos nas funções de densidade espectral, enquanto que os coeficientes de amortecimento são estimados de acordo com a largura desses picos.

O método de decomposição no domínio da frequência (FDD) também se desenvolve a partir das estimativas das funções de densidade espectral de potência da resposta, no entanto é aplicado o algoritmo de decomposição em valores singulares (SVD), sendo as frequências e modos de vibração determinadas a partir dos valores e vetores singulares, respetivamente. Ao contrario do método BFD, são identificados realmente os modos de vibração, permitindo a obtenção de resultados fiáveis mesmo com frequências próximas.

Pela versão melhorada do método FDD (EFDD), são tidos em conta as zonas dos espectros de valores singulares que apresentam elevada correlação com o valor do pico, correspondendo à resposta do sistema num modo de vibração. Assim, as componentes modais são obtidas tendo em conta a informação em toda a zona selecionada para cada modo, permitindo ajustar os valores das frequências naturais, enquanto que os coeficientes de amortecimento se estimam recorrendo às funções de auto-correlação.

O capítulo termina com o estudo de um exemplo de aplicação em que se analisam resultados numéricos e experimentais um modelo físico de uma viga encastrada-apoiada. Com esse intuito desenvolveu-se um modelo numérico no programa de cálculo automático SAP2000, e realizou-se um ensaio de vibrações para caracterizar experimentalmente os parâmetros modais da resposta do sistema estrutural. A partir das séries de aceleração obtidas nesse ensaio, foi efetuada a identificação dos parâmetros modais segundo os métodos EFDD e SSI-COV, comparando posteriormente os resultados obtidos por cada um dos métodos com os obtidos no modelo numérico.

Analisando os resultados obtidos, verificou-se que, em termos de frequências naturais, os resultados apresentam uma concordância elevada entre os resultados numéricos e experimentais, exceto para o segundo modo. Apesar disso, as configurações dos modos, que foram comparadas recorrendo ao coeficiente MAC, apresentam valores sempre superiores a 99%. Já para os valores obtidos para o amortecimento modal, pelos dois métodos de análise experimental, são bastante distintos, sendo esse um domínio que ainda necessita de ser explorado.



6 Estudo de Caso: Ponte Pedonal

6.1 Considerações iniciais

Ao longo do presente capítulo procede-se à análise do comportamento dinâmico da ponte pedonal sobre a Avenida Santo Condestável, em Chelas, utilizando metodologias apresentadas nos capítulos anteriores. Assim, com base na análise dos resultados experimentais obtidos a partir de um ensaio de vibração ambiental, é efetuada uma comparação com os resultados obtidos do modelo numérico de elementos finitos, com o intuito de calibrar esse modelo.

Atendendo que alguns parâmetros modais são difíceis de estimar, como por exemplo o amortecimento, a utilização destes tipos de ensaio e de metodologias de identificação modal têm grande relevância na calibração de modelos numéricos, nomeadamente para os outros parâmetros modais, isto é, frequências naturais e modos de vibração.



Figura 6.1 – Vista da ponte pedonal.

O capítulo começa com uma descrição geral da estrutura em estudo e são indicados as principais características e pormenores associados à construção do modelo numérico de elementos finitos 3D, no programa de cálculo SAP2000.

Posteriormente, recorrendo aos resultados obtidos com o modelo numérico e dos dados experimentais obtidos no ensaio de vibração ambiental, procede-se a uma análise preliminar do comportamento dinâmico da obra e uma consequente comparação de resultados.

Finalmente, é também efetuado um ensaio de vibração ambiental à ponte pedonal, sendo utilizados dispositivos como um *Smartphone* para registar as histórias de aceleração. O objetivo passa por, utilizando os mesmos métodos de identificação modal, verificar se esta hipótese é válida para estruturas de elevada flexibilidade, como é o caso

da estrutura em estudo, comparando os resultados obtidos em termos de frequências naturais de vibração da estrutura.

6.2 Descrição da ponte

A ponte pedonal em estudo localiza-se em Lisboa, na Avenida Santo Condestável na freguesia de Chelas e garante a ligação entre dois blocos de edifícios, ultrapassando superiormente uma linha rodoviária, numa urbanização existente, pelo que a sua utilização é, maioritariamente, efetuada por moradores locais, para aceder aos espaços comerciais, tal como é possível observar na Figura 6.2.



Figura 6.2 – Vista da ponte pedonal a estudar obtidas a partir do Google Earth; a) Vista Panorâmica; b) Vista lateral.

A estrutura foi inaugurada em 2009, encontrando-se em funcionamento desde então e sendo constituída por cinco vãos, separados por 4 pilares circulares em betão armado (C35/45), com um diâmetro de 1 metro cada. Tem um comprimento de aproximadamente 102 metros, divididos em troços de 13, 16,7, 46,5, 12,7 e 13,7 metros, apresentando dupla curvatura, ou seja, em planta e em alçado, tal como é possível observar na Figura 6.3 e Figura 6.4. A estrutura apresenta um *gabarit* médio de aproximadamente 11,66 metros e as fundações são indiretas, sendo que cada sapata tem quatro micro estacas.

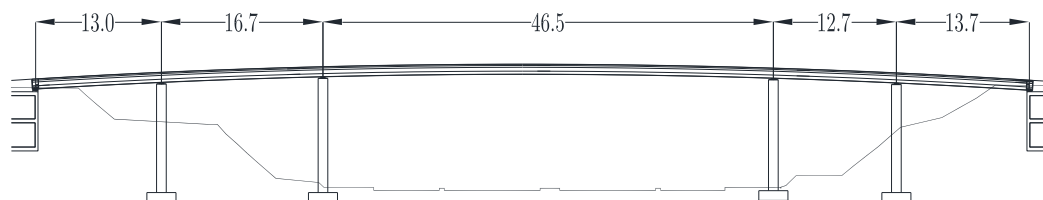


Figura 6.3 - Esquema da ponte pedonal em alçado (Socometal, 2005).



Figura 6.4 - Esquema da ponte pedonal em planta (Socometal, 2005).

O tabuleiro é do tipo viga-caixão constituído por chapas metálicas em aço S355JR, com espessura de 16 milímetros, soldadas formando uma secção trapezoidal e perfis metálicos, que têm como objetivo fornecer a rigidez necessária à estrutura, resultando numa secção com 1 metro de altura e uma largura superior e inferior de, respetivamente, 3 e 0,6 metros.

Os perfis estão posicionados tanto transversalmente, como longitudinalmente. Em termos longitudinais, a secção é composta por perfis IPE120, UNP80, 1/2 IPE180 e estão ainda, colocados dois perfis HEB120 nos cantos superiores da secção. Relativamente a perfis transversais, a secção é composta por peris IPE120 e 1/2 IPE180, repetindo-se a cada 1,5 metros, aproximadamente, exceto nas secções de apoio. Todos estes elementos estão ligados através de soldaduras.

Assim, em termos de elementos estruturais, a secção apresenta a seguinte composição apresentada na Figura 6.5.

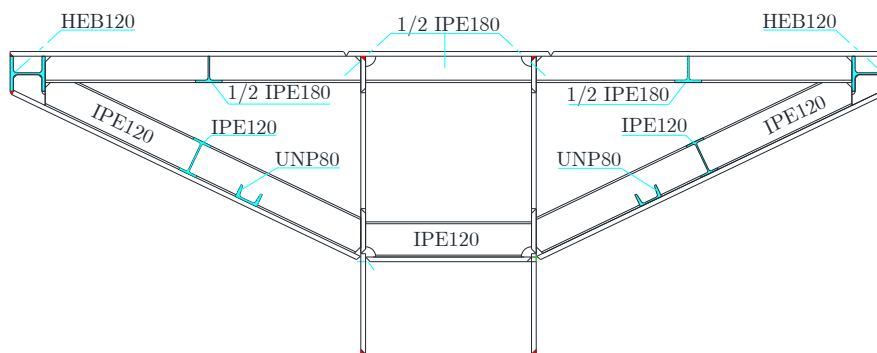


Figura 6.5 – Corte transversal da estrutura numa secção com perfis transversais. Adaptado de Socometal (2005).

A secção é ainda complementada pelas guardas de segurança e por *sticks* (que têm propósito puramente estético), ambos com secções vazadas para minimizar o seu peso próprio e compostos por aço S275JR, representados na Figura 6.6.

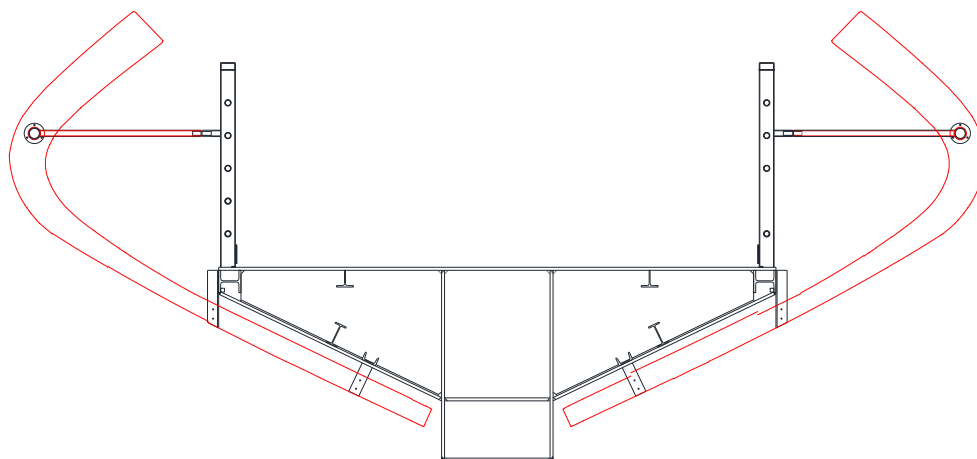


Figura 6.6 - Corte Transversal do tabuleiro da ponte. Adaptado de Socometal (2005).

O tabuleiro consiste num conjunto de troços montados na sua totalidade na oficina, que foram mais tarde soldados no local, tal como mostra a Figura 6.7. Assim, a construção no local consistiu apenas na execução dos pilares e consequente montagem das peças.



Figura 6.7 – Preparação e montagem de um dos troços do tabuleiro da ponte (Planeamento e Projetos de Engenharia, 2017).

Tal como referido anteriormente, a construção da ponte foi executada por troços que foram mais tarde montados no estaleiro com o auxílio de uma grua. Este esquema de montagem foi desenvolvido também com o objetivo de não interromper o trânsito na estrada, ao longo da construção, exigindo a construção de apoio temporário na zona central. Assim, a Figura 6.8 mostra o esquema da construção que foi utilizado na construção da ponte pedonal, enquanto a Figura 6.9 consiste numa fotografia tirada na montagem do segundo e terceiro troço.

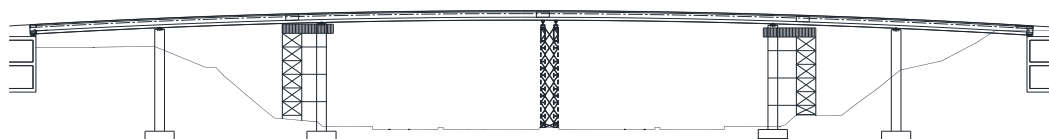


Figura 6.8 – Esquema de montagem e construção da ponte pedonal. Adaptado de Socometal (2005).



Figura 6.9 – Registo fotográfico no momento da montagem da ponte sobre um apoio temporário (Planeamento e Projetos de Engenharia, 2017).

6.3 Modelação da estrutura

A modelação do comportamento da ponte pedonal em estudo foi realizada com recurso a um programa de elementos finitos, o SAP2000 (Computers & Structures Inc., 2017). O Modelo foi concebido com o principal objetivo de determinar as características dinâmicas da estrutura, ou seja, frequências e modos de vibração, para uma consequente comparação com as características identificadas experimentalmente.

A execução do modelo exige um alargado e pormenorizado estudo da estrutura idealizada pelo que se torna necessário consultar elementos de projeto execução como plantas, memórias descritivas e justificativas da obra, recolhendo informação como por exemplo: os tipos de ligação, a geometria e materiais constituintes dos elementos, etc.

Devido à complexidade do modelo, numa fase inicial foi necessário recorrer ao programa AutoCAD (Autodesk, 2016), desenhando a estrutura e, numa segunda fase, importar para o programa de cálculo automático SAP2000, onde se atribuem todas as características dos vários tipos de elementos. Desta forma, foi possível obter o modelo apresentado nas Figura 6.10 e Figura 6.11.

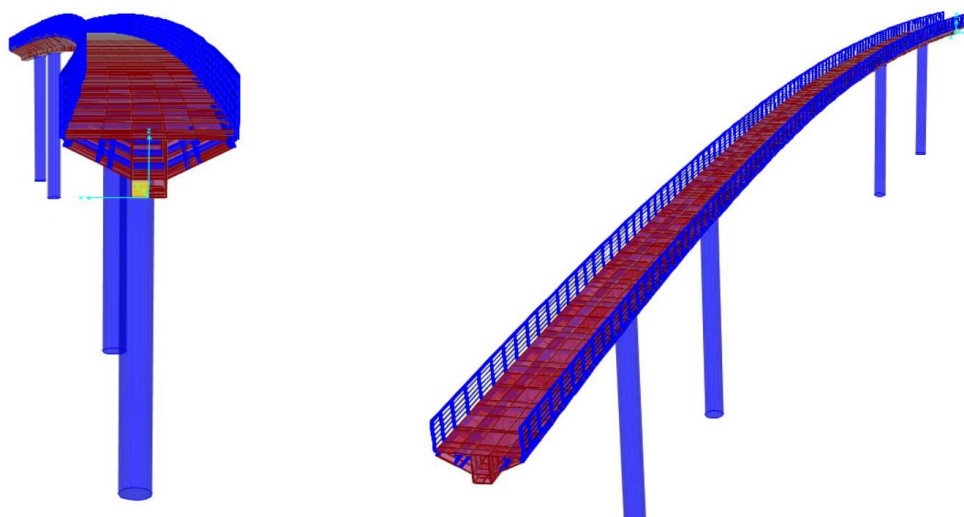


Figura 6.10 – Modelo numérico de elementos finitos tridimensional da ponte pedonal em estudo.

O modelo tridimensional é composto por um total de 2916 elementos de casca delgada e 6182 elementos de barra. Como referido anteriormente, para além dos pilares que são constituídos por betão armado, a estrutura é principalmente composta por elementos de aço S355, sendo os elementos das guardas constituídos por aço S275.

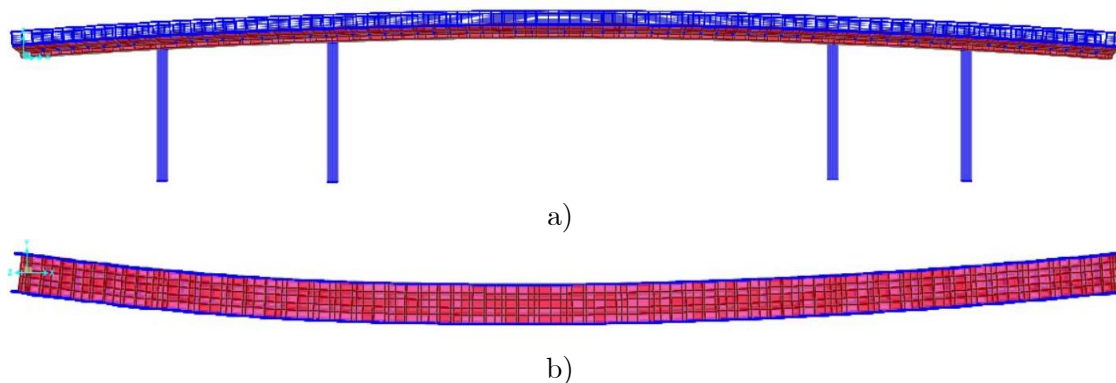


Figura 6.11 – Modelo numérico de elementos finitos tridimensional da ponte pedonal: a) vista lateral; b) vista de planta.

6.3.1 Especificidades do modelo

O modelo da estrutura em estudo procura ser o mais fiel possível àquilo que é na realidade, no entanto, há questões que aumentam a complexidade de caracterizar pormenorizadamente a estrutura, optando-se nesses casos por recorrer a simplificações que tentam aproximar ao máximo a realidade da estrutura. Assim, torna-se importante referir as seguintes especificidades do modelo:

— **Características dos materiais constituintes**

São considerados três tipos de material na estrutura: o betão armado dos pilares, o aço das chapas e perfis e o aço que compõe as guardas, de acordo com as características explícitas no projeto. Considerou-se o betão como um material homogéneo e isotrópico

de comportamento elástico linear, módulo de elasticidade $E = 32 \text{ GPa}$, peso específico de 25 kN/m^3 e coeficiente de Poisson $\nu = 0,2$, já os aços apresentam um valor de coeficiente de Poisson de $0,3$, um peso específico de 77 kN/m^3 e um módulo de elasticidade de 205 GPa para as chapas e perfis e de 210 GPa para as guardas.

— **Eixo dos perfis**

Em termos geométricos procurou-se sempre respeitar os centros geométricos dos elementos, tal como estabelecido nos desenhos. No entanto, para simplificar a conceção da estrutura, optou-se por desviar ligeiramente a posição do perfil HEB120 (longitudinal) para que o seu centro geométrico intercetasse o mesmo dos perfis IPE120 e $\frac{1}{2}$ IPE180 (transversais) na zona onde convergem esses perfis. A Figura 6.12 procura representar exatamente essa simplificação.

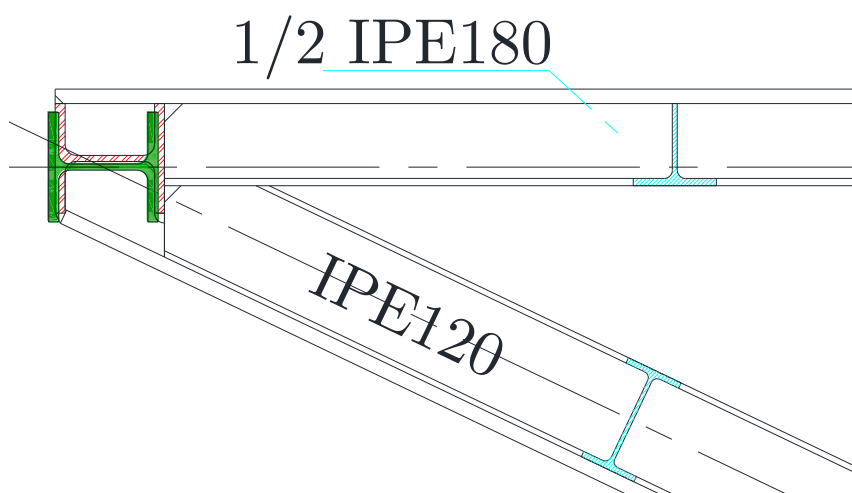


Figura 6.12 – Detalhe da mudança de posição do perfil HEB120. Adaptado de Socometal (2005).

— **Utilização de troços rígidos (*rigileves*)**

Tal como referido anteriormente, procurou-se respeitar ao máximo as geometrias de todos os elementos, no entanto, em obra esses elementos foram ligados através de soldaduras enquanto que no programa de cálculo automático a ligação entre os elementos é realizada nos encontros dos centros geométricos. Assim, com o intuito de assegurar a ligação entre as chapas e os vários perfis (em que os centros geométricos não coincidem), foram utilizados troços com elevada rigidez e sem massa, também designados de *rigileves*, permitindo a transmissão de esforços para que a estrutura se comporte como uma só. A Figura 6.13 mostra um exemplo desses elementos, ligando as chapas ao perfil, no canto superior da secção transversal.

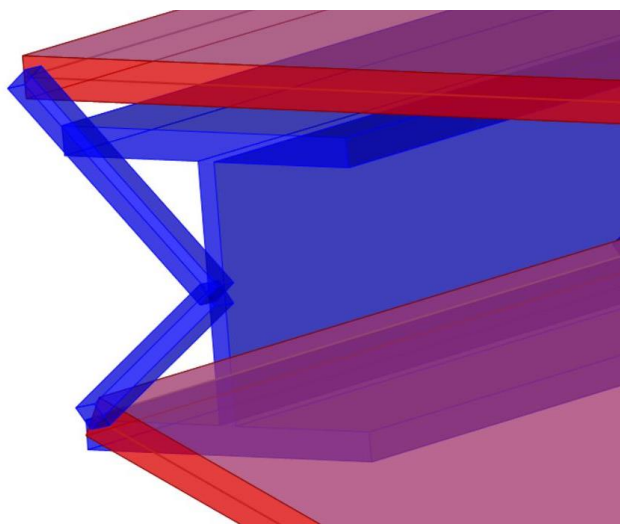


Figura 6.13 – Pormenor da ligação das chapas ao perfil com troços rígidos.

— *Sticks* e pavimento da ponte

Como é possível reparar nas imagens do modelo apresentadas até agora, os *sticks* não estão representados no modelo. Essa questão deve-se ao facto de a sua representação aumentar a complexidade da análise dinâmica, aumentando o tempo de processamento e criando inúmeros modos de vibração locais. Também por terem um intuito puramente estético, ou seja, não contribuirão significativamente para um reforço estrutural, o que levou a optar por considerar apenas a sua massa, através da ferramenta *Mass Source* do programa SAP2000, nos pontos que os ligam à estrutura.

A massa do pavimento final, colocado sobre as chapas metálicas superiores, foi considerado como uma carga distribuída pela área das chapas, também pela ferramenta *Mass Source*.



Figura 6.14 – Registo fotográfico dos *Sticks*.

— Condições de apoio

As condições de apoio da estrutura são também uma questão de elevada importância que pode ter influência nos resultados finais da análise. Existem então 3 zonas a ter em atenção dentro desta questão: a ligação pilares-terreno, a ligação tabuleiro-terreno e os encontros pilar-tabuleiro.

Segundo os desenhos do projeto de execução, a ligação pilares-terreno é garantida por fundações do tipo indireta, estando estes apoiados numa sapata e em 4 micro estacas, pelo que foi considerado que os pilares se encontravam perfeitamente encastrados na zona inferior.

De forma a simular ao máximo as condições existentes na estrutura, foram utilizados dois tipos de apoio, em ambos os limites do tabuleiro: apoios fixos, com restrições na direção X e Z, e molas com restrições na direção Y. A Figura 6.15 procura expor a forma como foram colocados esses apoios no começo e final do tabuleiro, do modelo numérico da ponte pedonal.

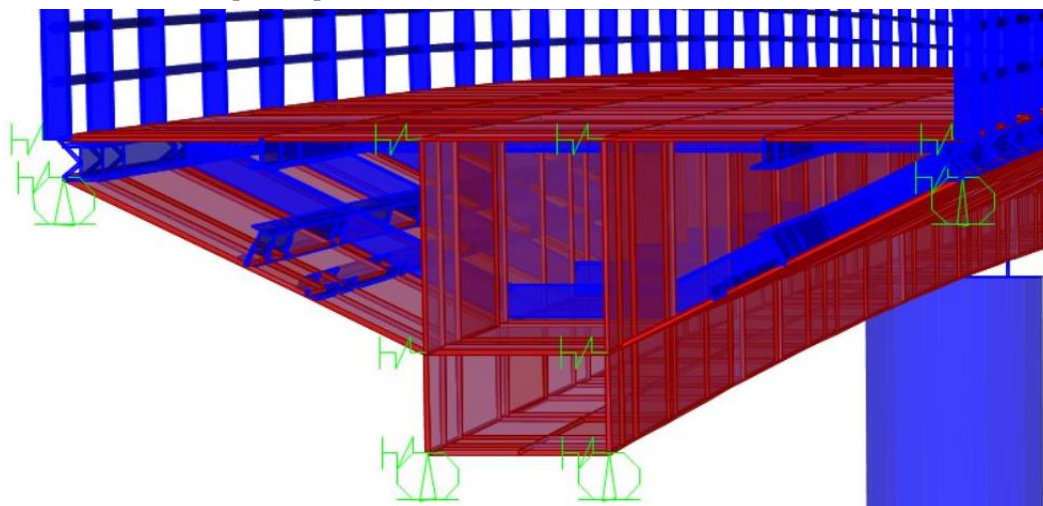


Figura 6.15 – Representação das condições de apoio do tabuleiro.

Para assegurar a ligação pilar-tabuleiro, foram utilizados no projeto de execução aparelhos de apoio no topo dos pilares. Em termos de modelação, não é possível concretizar esses aparelhos de forma idêntica àquilo que existe na realidade, pelo que se procurou uma solução que simulasse o comportamento real da estrutura. Assim, utilizando troços rígidos, efetuou-se a ligação pilar-tabuleiro considerando, não 1, mas 5 pontos de contacto simulando de forma mais realística a ligação.

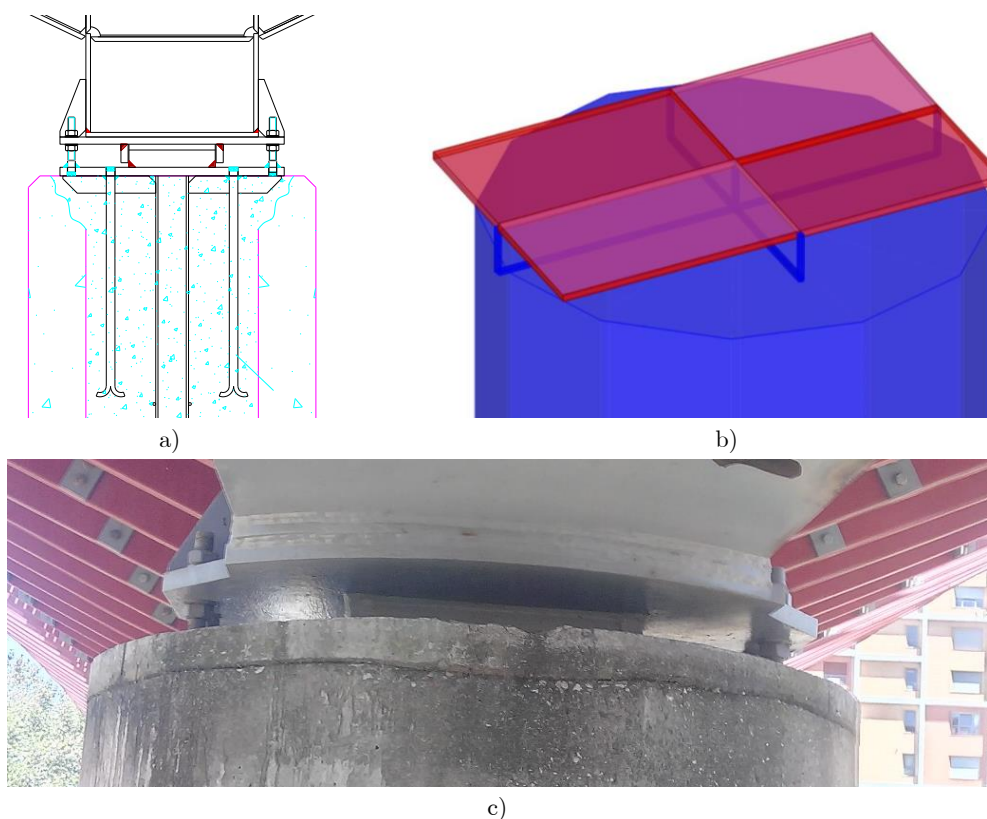
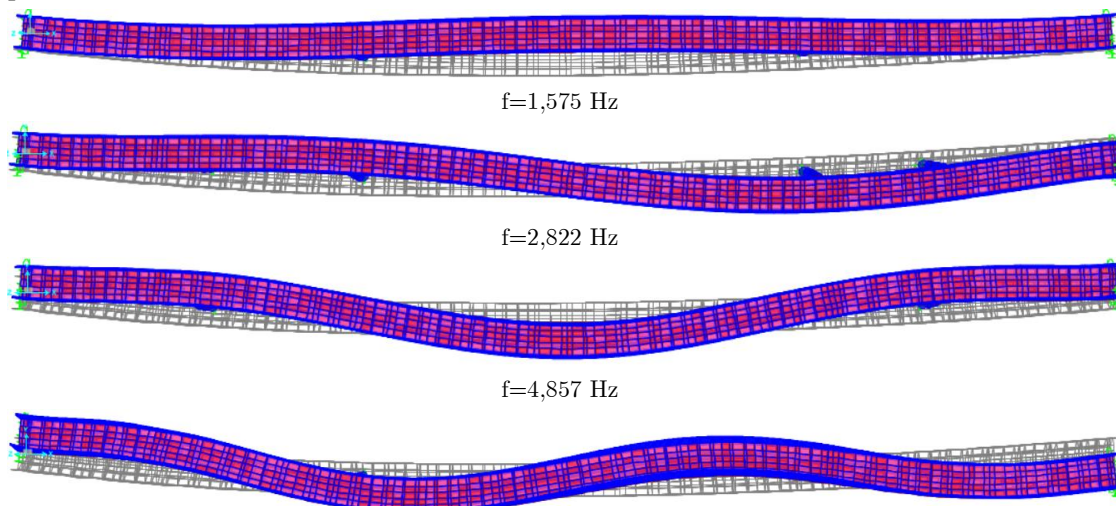


Figura 6.16 – Aparelho de apoio num pilar: a) Representação no projeto de execução (Socometal, 2005); b) Representação no programa SAP2000; c) Registo fotográfico.

6.3.2 Resultados do Modelo

Após a elaboração do modelo, segue-se uma análise dos resultados obtidos no programa de cálculo automático SAP2000, da qual é possível efetuar uma análise modal obtendo-se 12 modos de vibração da ponte pedonal em estudo. Nas figuras seguintes apresentam-se os primeiros 8 modos de vibração da estrutura, obtidos com o modelo numérico desenvolvido, já calibrado de acordo com os resultados experimentais que se apresentam adiante.



$f=7,368$ Hz

Figura 6.17 - Frequências naturais e respectivas configurações modais dos modos de vibração de flexão transversal obtidas pelo programa de cálculo automático SAP2000, para a ponte em estudo.

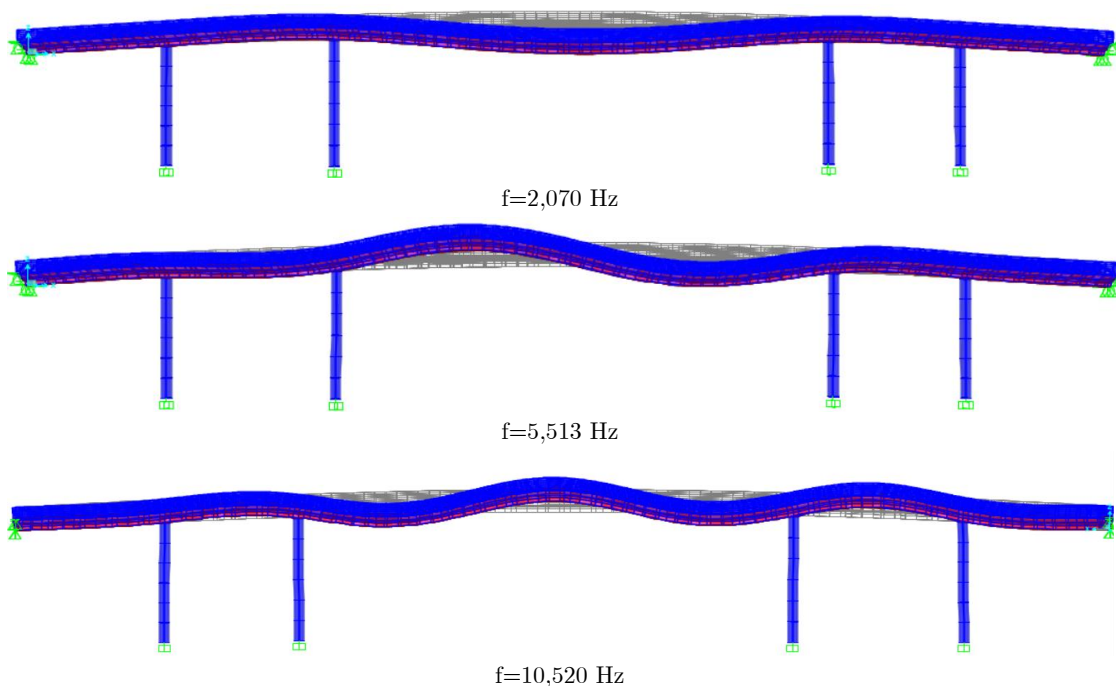


Figura 6.18 – Frequências naturais e respectivas configurações modais dos modos de vibração de flexão vertical obtidas pelo programa de cálculo automático SAP2000, para a ponte em estudo.

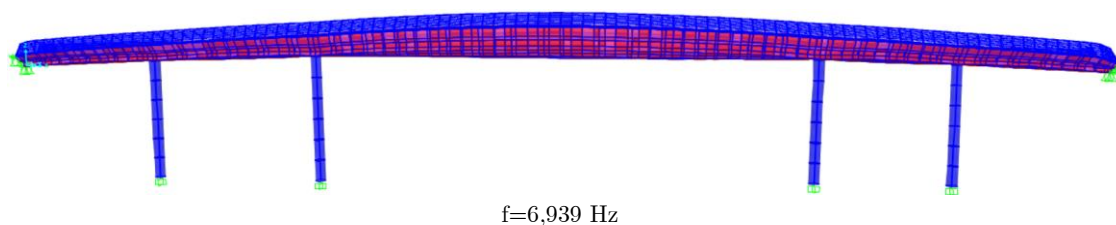


Figura 6.19 – Frequências naturais e respectivas configurações modais dos modos de vibração de torção obtidas pelo programa de cálculo automático SAP2000, para a ponte em estudo.

6.4 Ensaio de vibração ambiental

Tal como referido anteriormente, o planeamento dos ensaios são uma componente muito importante para garantir a obtenção de resultados fidedignos. Assim, a preparação do ensaio apoiou-se em resultados preliminares obtidos com o modelo numérico, descrito na secção anterior, nomeadamente em termos das frequências naturais e das respectivas configurações modais para definir o posicionamento dos sensores e frequências de amostragem.

6.4.1 Equipamentos de medição

Para a realização do ensaio de vibração ambiental, na ponte pedonal, utilizou-se um sistema constituído por 10 acelerómetros do tipo “*force balance*” (9 Episensor, Modelo FBA ES-U e 1 Episensor, Modelo FBA ES-T) da Kinemetrics (ver Tabela 4.1), cabos do tipo Belden de 6 pares (P/N 9874), 1 sistema de aquisição de dados Altus K2 da Kinemetrics (ver Tabela 4.2), com 12 canais de medida e um computador portátil com o programa de aquisição *Quick Talk* da Kinemetrics para aquisição e registo das histórias de aceleração.

Os cabos têm como função garantir a alimentação dos acelerómetros e transmissão do sinal para o sistema de aquisição. Na Figura 6.20 são apresentadas algumas fotografias do equipamento descrito durante a realização do ensaio.



Figura 6.20 – Equipamento utilizado no ensaio de vibração ambiental: a) Computador e sistema de aquisição de dados; b) conjunto de acelerómetros uniaxiais.

6.4.2 Pontos instrumentados

Na escolha da localização dos sensores teve-se como base o modelo numérico antes descrito, com o intuito de garantir que o posicionamento escolhido permitisse identificar os modos vibração pretendidos. Assim, selecionaram-se 18 pontos a observar ao longo da ponte pedonal, indicados na Figura 6.21.

Uma vez que o número de pontos a medir é superior à capacidade disponível (sensores e sistema de aquisição de dados), tornou-se necessário efetuar o ensaio de vibração de forma faseada. Desta maneira, cada fase consistiu na medição das acelerações, nas três direções, em 6 pontos (dois de referência e quatro que vão variando ao longo das fases). A Figura 6.21 mostra esquematicamente a localização dos pontos de medição e o faseamento do ensaio, estando representado a azul os sensores de referência e a vermelho os sensores móveis (com a fase de ensaio assinalada).

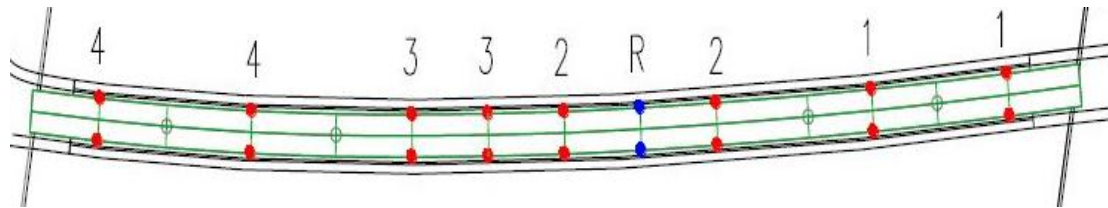


Figura 6.21 – Representação esquemática da disposição dos acelerómetros por fases, em planta.

O ensaio é então composto por 4 fases, sendo a medição das acelerações, em cada fase do ensaio, efetuada ao longo de 15 minutos com uma frequência de amostragem de 100 Hz. Na Figura 6.22 apresenta-se o modelo suporte à análise experimental desenvolvido em MATLAB, com a indicação da posição dos sensores utilizados em todas as fases, sendo que a cor vermelha corresponde uma vez mais aos sensores moveis e a cor azul aos sensores moveis.

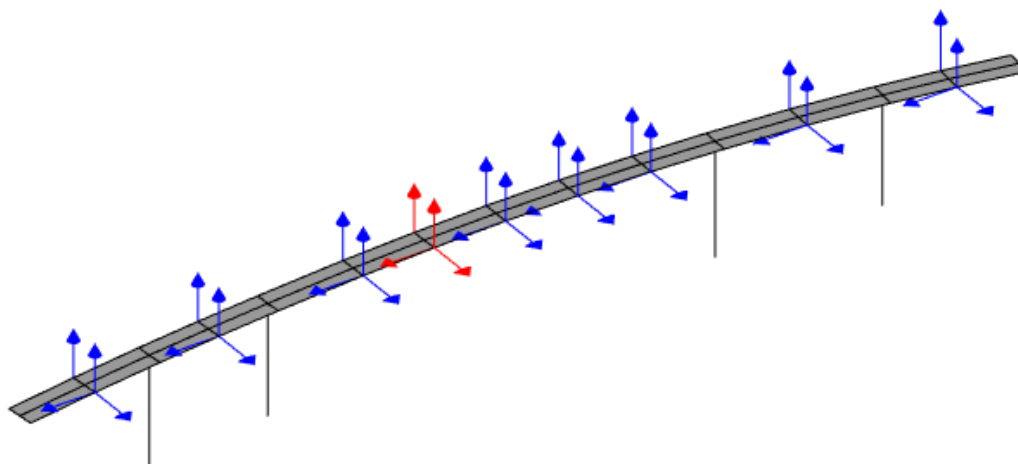


Figura 6.22 – Modelo de suporte à análise experimental desenvolvido em MATLAB para a ponte pedonal, com a indicação da posição dos sensores.

6.4.3 Pré-processamento das histórias de aceleração

Após a obtenção das histórias de aceleração, o passo seguinte consiste em analisar as mesmas procurando anomalias (ver capítulo 4). Desta forma, antes de se proceder à identificação modal, as séries temporais de aceleração foram submetidas a um pré-processamento de maneira a eliminar ou minimizar os efeitos das anomalias detetadas.

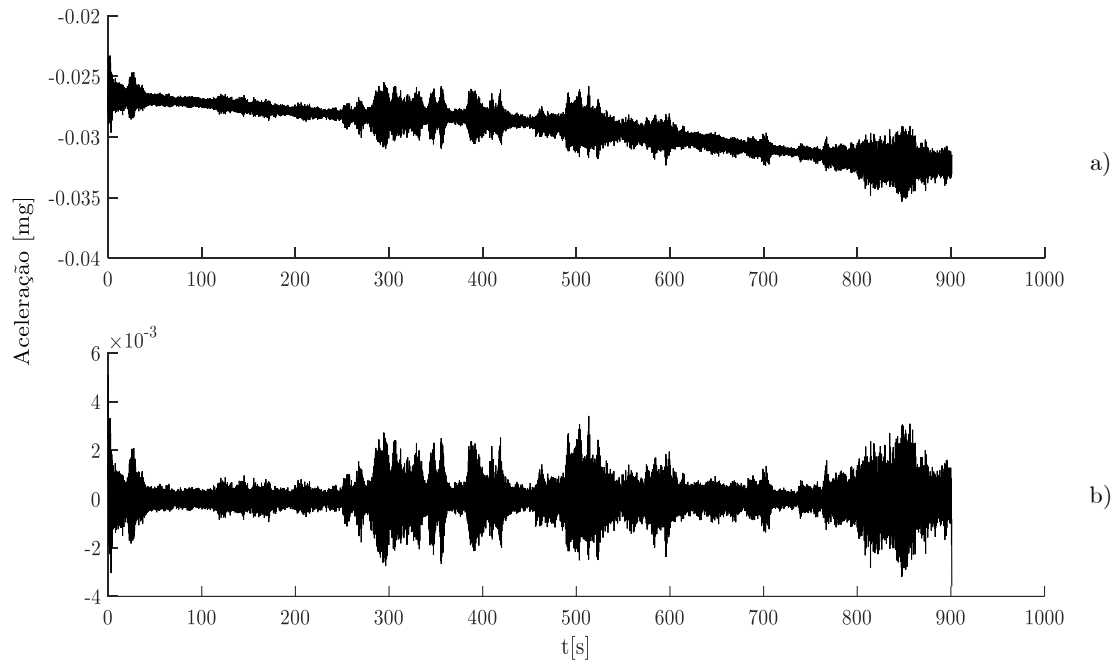


Figura 6.23 – História de aceleração, obtida pelo acelerômetro de referência: a) antes do pré-processamento; b) após o pré-processamento.

Analisando as histórias de aceleração verificou-se a necessidade de recorrer a um filtro passa-alto para eliminar as frequências abaixo de 0,1 Hz. Esta análise permite também identificar desvios dos valores medidos em relação ao “zero”, do eixo das acelerações. No caso da história de aceleração da Figura 6.23, observa-se ainda a existência de uma tendência linear que se resulta numa tendência de diminuição linear dos valores medidos em termos globais. A utilização do filtro passa-alto permite eliminar desde logo o efeito dessa tendência linear, que está associada às frequências baixas.

O pré-processamento inclui ainda a aplicação de um fator de decimação para passagem da frequência de amostragem de 100 Hz para 33,33 Hz, permitindo assim a identificação de frequências naturais até ao limite de 16,67 Hz.

6.5 Identificação modal

Uma vez recolhida a resposta dinâmica da estrutura através do ensaio de vibração ambiental e feito o pré-processamento dos dados, procede-se então à identificação modal com o intuito de determinar os principais parâmetros dinâmicos da estrutura em análise.

Durante o ensaio o sistema estrutural esteve sujeito a vibrações geradas por ações como a ação dos peões, o vento, entre outras que são desconhecidas e bastante complexas de quantificar antecipadamente. Por isso mesmo é assumido que o seu efeito combinado tem características semelhantes às de um ruído branco, ou seja, assume-se que todos os pontos da estrutura são excitados de igual forma.

Assim, a determinação dos principais parâmetros dinâmicos da estrutura (frequências naturais e configuração dos modos de vibração) será efetuada aplicando o método de decomposição no domínio da frequência (FDD). Esta análise é assegurada recorrendo às rotinas desenvolvidas em MATLAB, no âmbito deste trabalho e descritas no capítulo 4.

6.5.1 Processamento inicial das histórias de aceleração

O primeiro passo do método de decomposição no domínio da frequência (FDD) consiste no processamento das histórias de aceleração com o intuito de obter as funções de densidade espectral de potência da resposta em aceleração.

Nesse processamento inicial, as histórias são subdivididas em segmentos com um comprimento de 81,92 segundos, correspondente a 8192 pontos, sobrepostos a 2/3 tendo-se aplicado a cada um dos segmentos uma janela de dados de Hanning antes da sua transformação para o domínio da frequência através da aplicação da FFT.

Atendendo às opções tomadas neste processamento inicial, a precisão dos valores identificados depende da resolução em frequência, que neste caso é $\Delta f = 1/81,92 = 0,0122$ Hz, uma vez que se utilizou uma frequência de amostragem de 100 Hz ($\Delta t = 0,01$ s).

6.5.2 Método de decomposição no domínio da frequência

Após o processamento inicial, aplica-se o método de decomposição no domínio da frequência às funções de densidades espectral de potência de resposta, descrito no capítulo anterior. Assim, aplica-se o algoritmo dos valores singulares à matriz das funções de densidade espectral de potência da resposta obtendo-se o espectro dos valores singulares, apresentado na Figura 6.24, a partir do qual se podem identificar as frequências naturais do sistema estrutural.

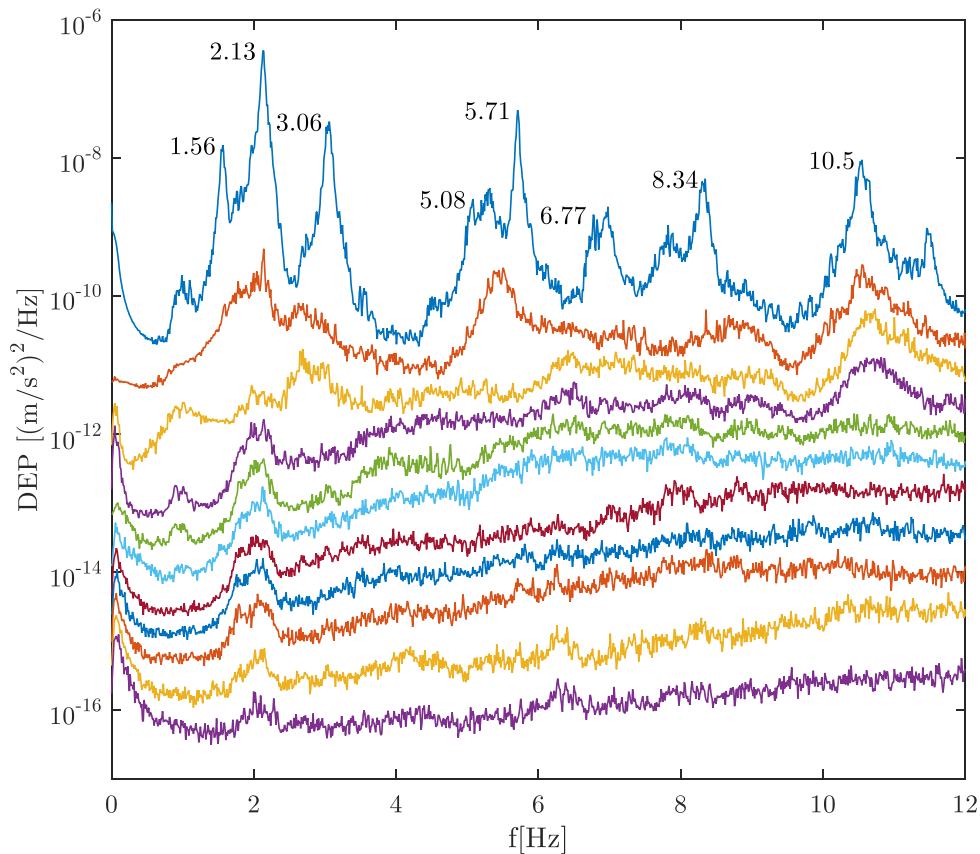


Figura 6.24 - Espectro dos valores singulares da matriz de densidades espectrais de potência da resposta em aceleração.

Uma vez que o ensaio de vibração ambiental apenas se baseia na resposta da estrutura é muito importante distinguir as frequências associadas a modos estruturais e aquelas associadas a modos de vibração locais. A seleção dos picos no espectro de valores singulares é, por vezes, um processo bastante simples, no entanto pode ser necessário analisar a forma do modo associada a essa frequência para verificar se corresponde à obtida com o modelo numérico.

De forma a apresentar as configurações associadas aos picos escolhidos foi efetuada uma representação espacial utilizando uma rotina desenvolvida em MATLAB que teve por base a ponte pedonal estudada. A Figura 6.25 consiste nesse modelo da estrutura nos quais, posteriormente, serão representados os modos experimentais da estrutura.

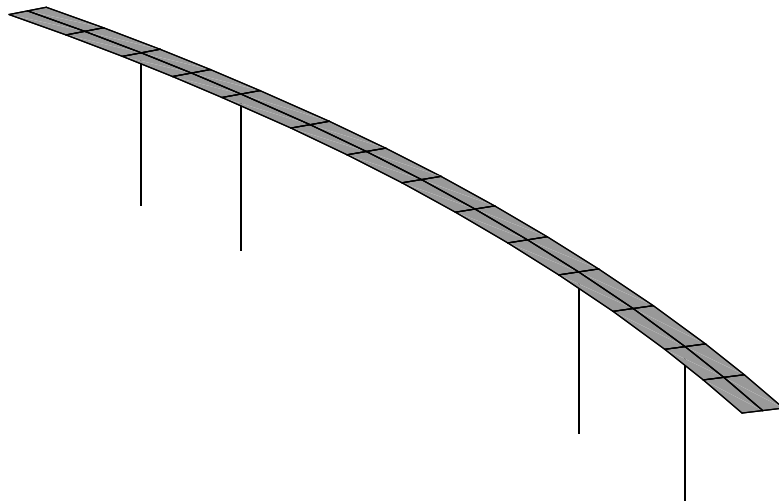


Figura 6.25 - Modelo espacial para representação dos modos experimentais da ponte pedonal em estudo.

Com base no modelo espacial anterior, as figuras seguintes representam as configurações modais correspondentes às primeiras 8 frequências naturais da estrutura, subdivididas segundo o tipo de flexão (lateral, vertical e torção do tabuleiro).

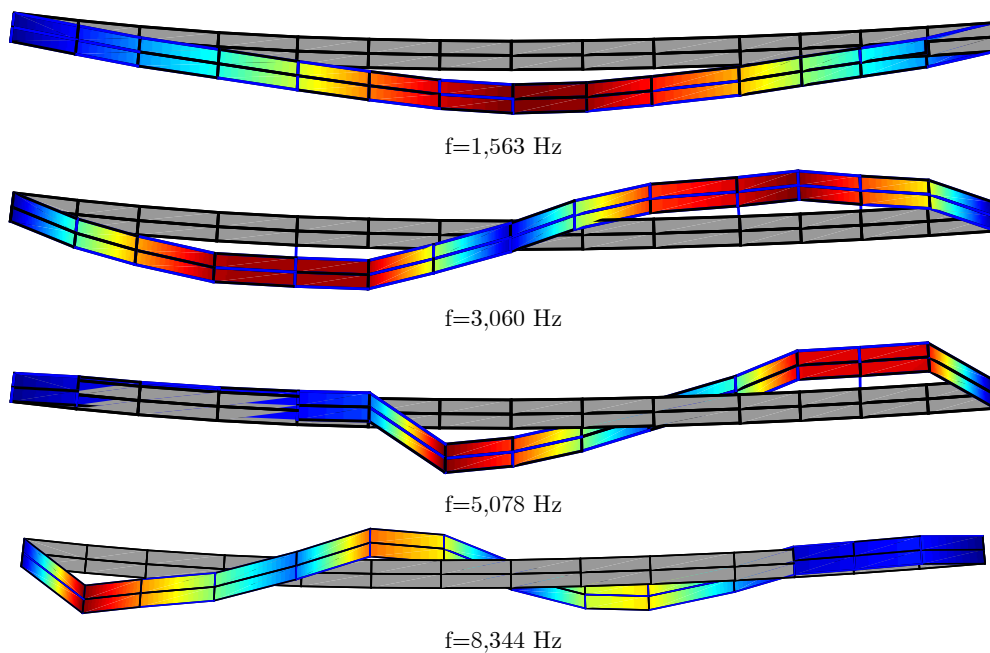


Figura 6.26 - Frequências naturais e respectivas configurações modais dos modos de vibração de flexão lateral, segundo a rotina desenvolvida em MATLAB.

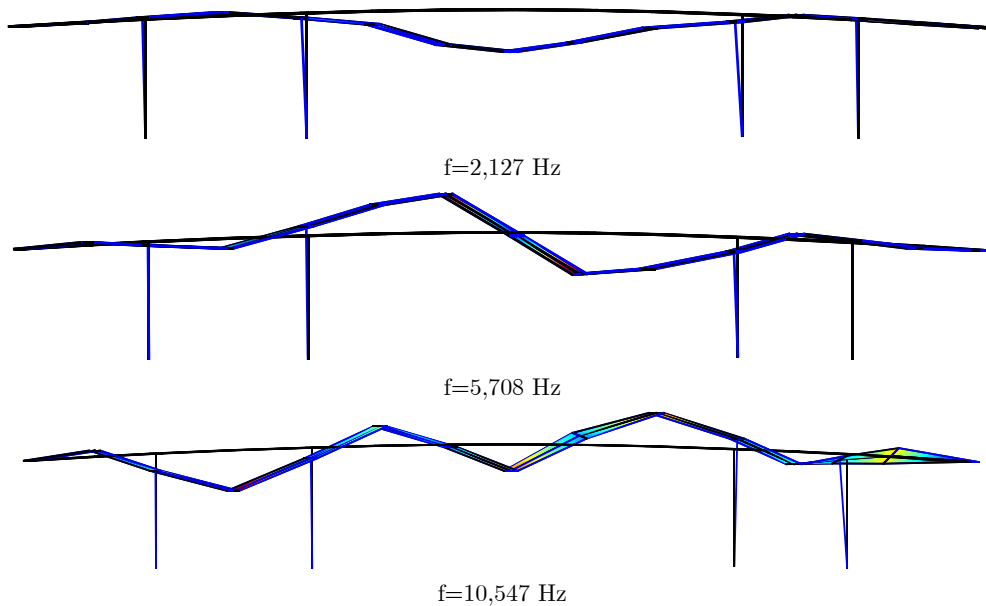


Figura 6.27 - Frequências naturais e respectivas configurações modais dos modos de vibração de flexão vertical, segundo a rotina desenvolvida em MATLAB.

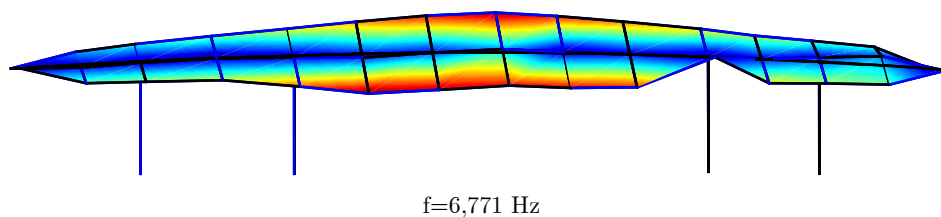


Figura 6.28 - Frequências naturais e respectivas configurações modais dos modos de vibração de torção, segundo a rotina desenvolvida em MATLAB.

6.6 Ensaio Experimental com *Smartphone*

Nos últimos anos a ascensão dos *Smartphones* e das aplicações permitiu o aparecimento de equipamentos multifacetados, com elevada memória RAM e capacidades de processamento, com dimensões cada vez menores. Estes melhoramentos constantes permitem um número cada vez maior de instrumentos incluídos nesses aparelhos, como por exemplo: localizadores de GPS, sensor geomagnético, sensores de temperatura e humidade, giroscópio ou acelerómetros.

No âmbito do presente trabalho, procurou-se explorar a presença acelerómetros nos *Smartphones* para a medição de vibrações na ponte pedonal em estudo e assim aferir a potencialidade que estes equipamentos podem oferecer na caracterização do comportamento dinâmico de estruturas flexíveis.

Nesse sentido, foi realizado um ensaio de vibração simples em que foi utilizado um *Smartphone*, com as características indicadas na Tabela 4.5, para obtenção das séries temporais de aceleração, analisando-as posteriormente através de um método no domínio da frequência.

6.6.1 Preparação do ensaio e histórias de aceleração

Tal como para o caso do ensaio descrito no ponto 6.5, este ensaio consiste na medição das séries temporais de aceleração, a partir das quais se pretende identificar as frequências naturais da ponte pedonal.

Para a execução deste ensaio foi utilizado o modelo de *Smartphone* indicado na Tabela 4.5, optou-se pela utilização da aplicação *Accelerometer Meter* (Keuwlsoft, n.d.) da *PlayStore* para registo e temporização do ensaio. Na escolha da aplicação a utilizar procurou-se encontrar uma que permitisse utilizar mais que um aparelho de forma sincronizada, permitindo a instrumentação de mais do que um ponto, no entanto, à data da ação, não existia aplicações com essas características. Assim, foi instrumentado apenas um ponto da ponte pedonal, recorrendo-se uma vez mais ao modelo numérico para procurar identificar o local mais indicado para a colocação do aparelho. Desta forma, a Figura 6.29 mostra a colocação do aparelho de medição durante o ensaio.

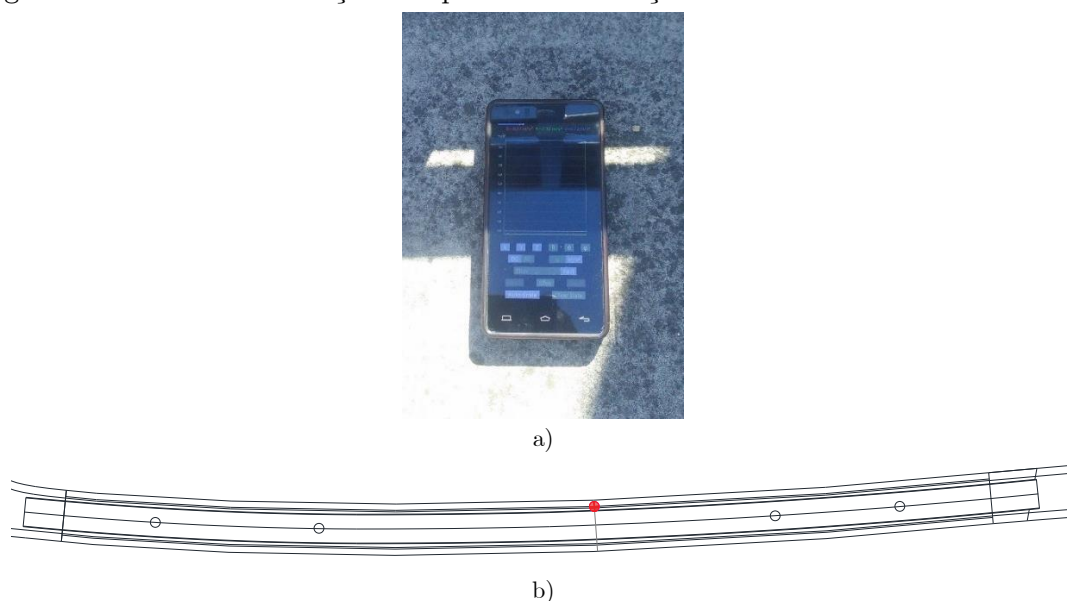


Figura 6.29 – Colocação do *Smartphone* durante o ensaio: a) Registo fotográfico; b) Representação esquemática em planta.

Torna-se ainda importante referir que a aplicação utilizada, permite também a utilizar de um filtro de pré-processamento DC (*Direct Current*), que é geralmente utilizado na remoção de médias e tendências em histórias de aceleração registadas, em que facilmente se identificam esses erros.

Do ensaio experimental descrito resultaram as histórias de aceleração segundo a direção X (longitudinal), Y (lateral) e Z (vertical), apresentadas na Figura 6.30, às quais será aplicado o método de identificação modal BFD, com o intuito de verificar se estes equipamentos permitem a obtenção de resultados fiáveis.

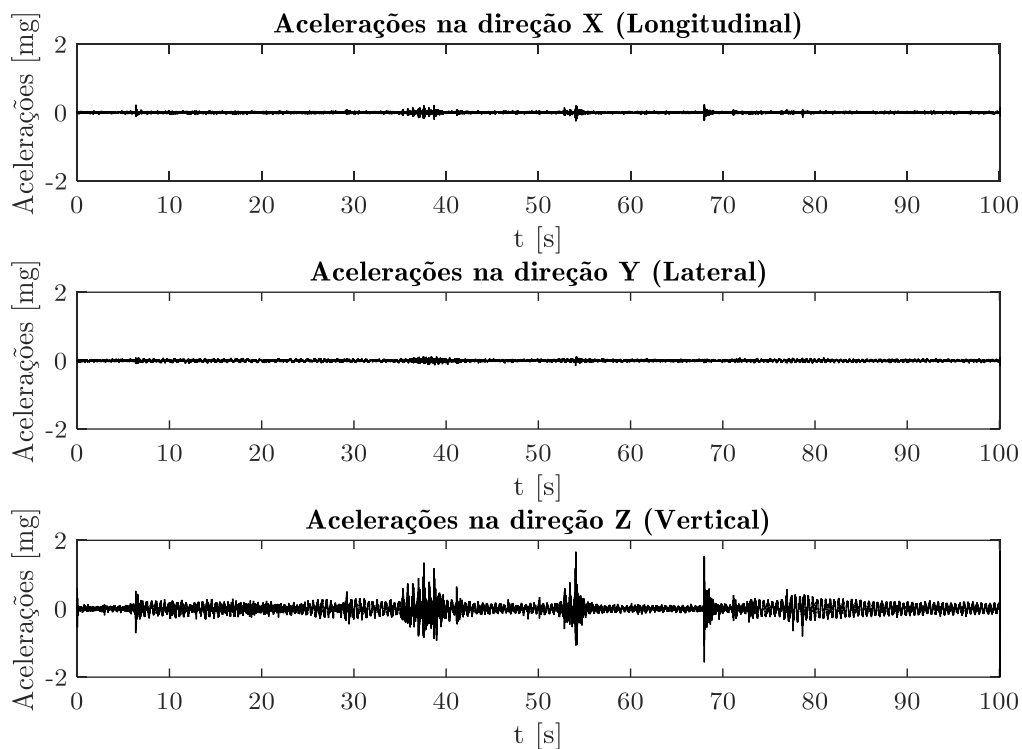
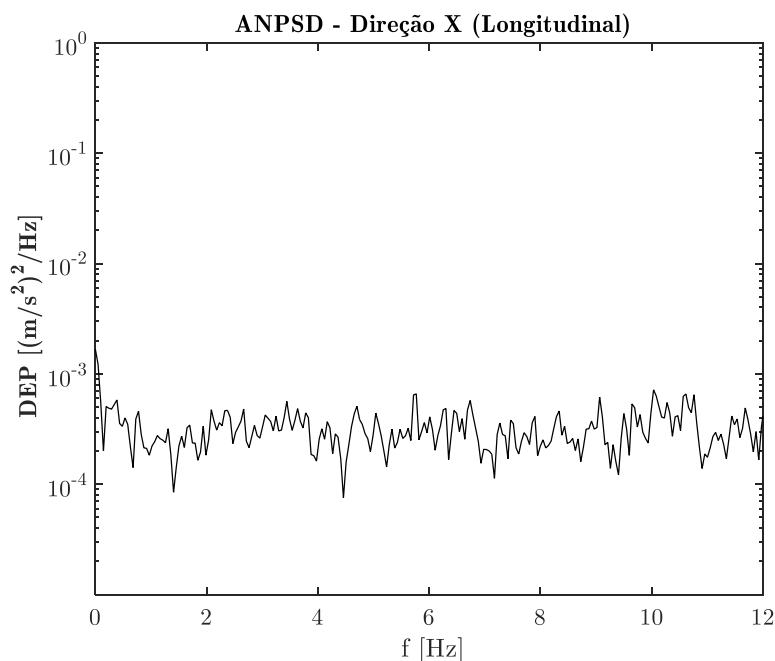


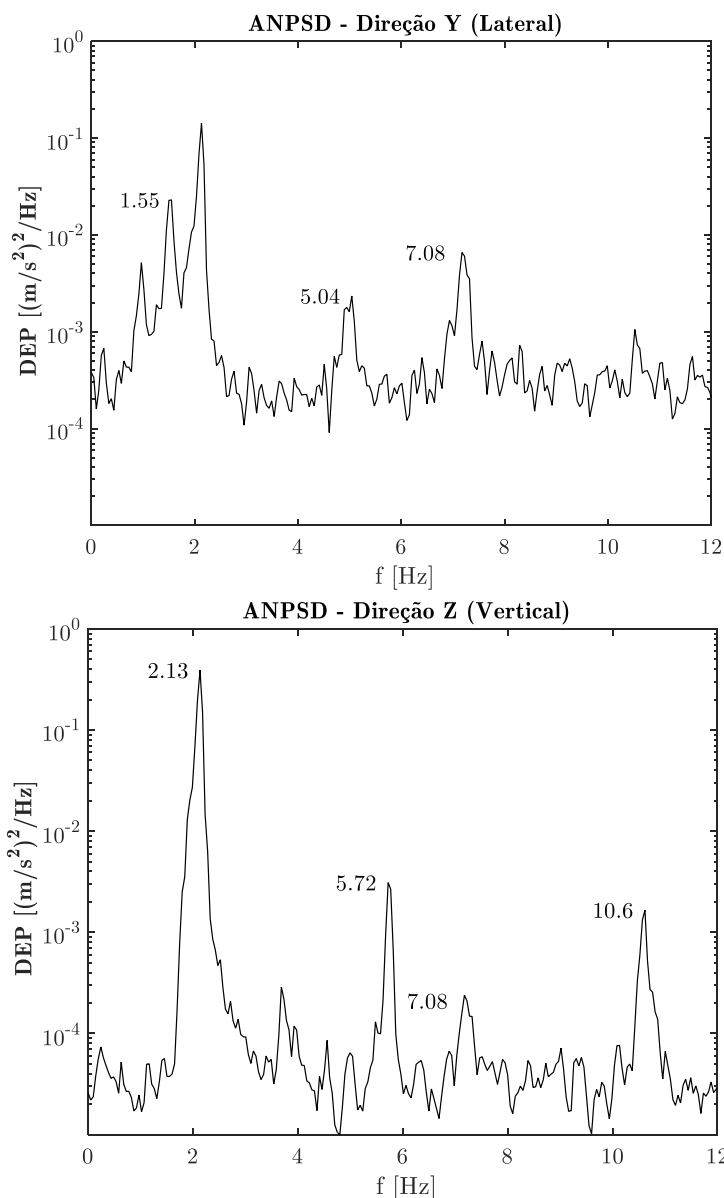
Figura 6.30 – Histórias de acelerações obtidas ao longo dos 95,1 segundos para o ensaio realizado com o *Smartphone*.

6.6.2 Identificação das frequências

Após a obtenção das histórias de aceleração, é então aplicado o método de básico no domínio da frequência às funções de densidade espectral de potência de resposta obtidas em cada direção. Essas funções, apresentadas na Figura 6.31, permitem a identificação das frequências naturais da estrutura.



a)



b)

c)

Figura 6.31 - Espectro normalizado médio para o ensaio com *Smartphone*: a) componente longitudinal; b) componente lateral; c) componente vertical.

Nos espectros da figura anterior estão assinalados os valores dos picos correspondentes a modos de vibração associados à componente em análise, por exemplo na Figura 6.31b) também se evidencia o pico da frequência natural 2,11 Hz, no entanto, não está assinalado por ser um modo de vibração de flexão vertical. Por outro lado, o pico associado à frequência natural 7,05 Hz corresponde a um modo de torção, tendo componente vertical e lateral, estando, por isso, assinalado nos dois espectros.

Tal como esperado, a análise das figuras anteriores permite a identificação de algumas frequências naturais da estrutura de uma forma bastante evidente. Atendendo que o ponto não era o mais favorável para a identificação do modo de vibração, devido à existência de um nodo próximo da zona de ensaio, realizou-se novamente o ensaio, desta

vez no ponto assinalado na Figura 6.32, resultando na história de aceleração e no espectro presente na Figura 6.33.



Figura 6.32 – Representação esquemática em planta da colocação do *Smartphone* durante o ensaio.

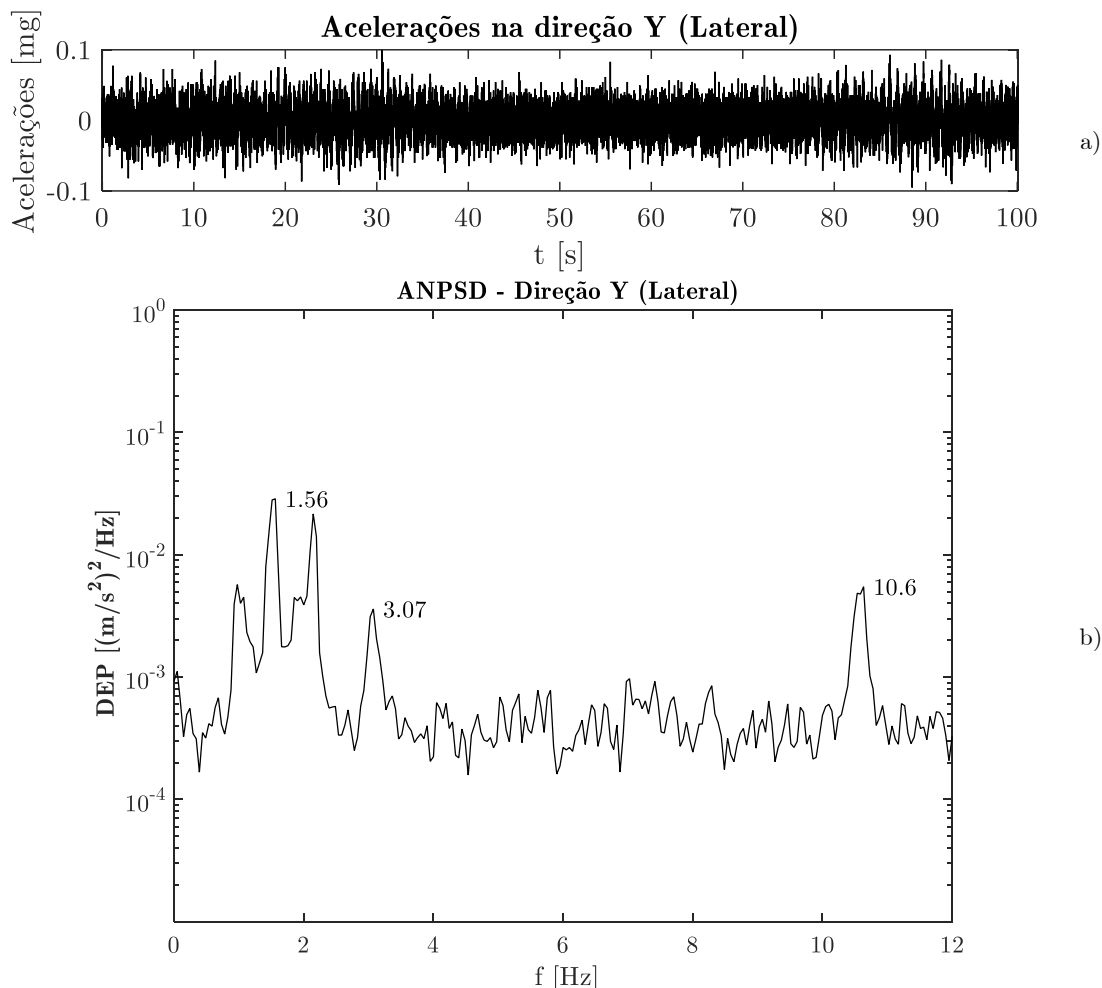


Figura 6.33 – Ensaio de vibração ambiental com *Smartphone*: a) Histórias de acelerações obtidas ao longo dos 100,1 segundos; b) Espectro normalizado médio.

6.7 Comparação de resultados

De seguida, é efetuada uma comparação entre os parâmetros modais (frequências naturais e configurações modais) obtidos recorrendo ao modelo numérico da ponte pedonal e os obtidos experimentalmente. Torna-se importante referir que, tal como no capítulo anterior, a comparação das frequências é efetuada em termos de percentagem e a das configurações modais é efetuada com base no coeficiente MAC.

6.7.1 Comparação de frequências naturais

De forma a facilitar uma comparação entre os resultados obtidos pelos métodos de identificação modal e o modelo numérico da estrutura foi desenvolvida a Tabela 6.1, permitindo fazer essa comparação em termos absolutos e em termos de percentagem de erro, tomando como referência os que são obtidos experimentalmente. Os modos de vibração estão ordenados de acordo com o tipo de vibração de forma a permitir identificar e relacionar o erro encontrado nos modos.

Tabela 6.1 – Comparação das frequências naturais dos modos de vibração obtidos a partir da identificação modal e as obtidas no modelo numérico.

Tipo de flexão	Modo	FDD [Hz]	MEF [Hz]	Erro [%]	<i>Smartphones</i>	Erro [%]
Lateral	1	1,56	1,57	0,78	1,55	-0,67
	2	3,06	2,82	-7,78	3,07	0,43
	3	5,08	4,86	-4,35	5,04	-0,71
	4	8,34	7,37	-11,70	-	-
Vertical	1	2,13	2,07	-2,68	2,13	0,30
	2	5,71	5,51	-3,42	5,72	0,24
	3	10,55	10,52	-0,26	10,62	0,67
Torção	1	6,77	6,94	2,49	7,08	4,55

Comparando os resultados obtidos no ensaio de vibração ambiental, com os resultados do modelo é possível observar que, em termos de erro entre valores obtidos, existe uma concordância aceitável, excetuando para o modo com frequência natural mais elevada, que já apresenta um erro maior.

Para o ensaio realizado com o *Smartphone*, existe uma elevada concordância em termos de frequências naturais da estrutura, todavia, o 4.º modo de vibração lateral não foi detetado com a realização destes ensaios.

6.7.2 Comparação das configurações modais

De seguida, apresenta-se uma comparação entre as configurações modais obtidas com a realização do ensaio de vibração ambiental com as calculadas pelo modelo numérico. Esta comparação será realizada com base no coeficiente MAC introduzido na expressão (5.11), sendo que este coeficiente varia entre 0 e 1 em que um representa uma elevada semelhança entre modos. Assim, o coeficiente MAC é dado pela seguinte matriz:

$$\text{MAC} = \begin{bmatrix} 0,643 & 0,029 & 0,030 & 0,093 & 0,000 & 0,021 & 0,003 & 0,000 \\ 0,000 & 0,834 & 0,005 & 0,043 & 0,027 & 0,170 & 0,079 & 0,000 \\ 0,008 & 0,000 & 0,724 & 0,034 & 0,000 & 0,000 & 0,001 & 0,000 \\ 0,114 & 0,002 & 0,018 & 0,509 & 0,046 & 0,002 & 0,102 & 0,006 \\ 0,014 & 0,075 & 0,000 & 0,009 & 0,636 & 0,002 & 0,059 & 0,059 \\ 0,012 & 0,053 & 0,000 & 0,014 & 0,031 & 0,813 & 0,000 & 0,000 \\ 0,000 & 0,000 & 0,048 & 0,120 & 0,000 & 0,009 & 0,315 & 0,002 \\ 0,023 & 0,030 & 0,000 & 0,004 & 0,010 & 0,006 & 0,004 & 0,203 \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

Usualmente é utilizado o gráfico da Figura 6.34 para representar esquematicamente os valores MAC, permitindo uma mais fácil interpretação dos resultados obtidos.

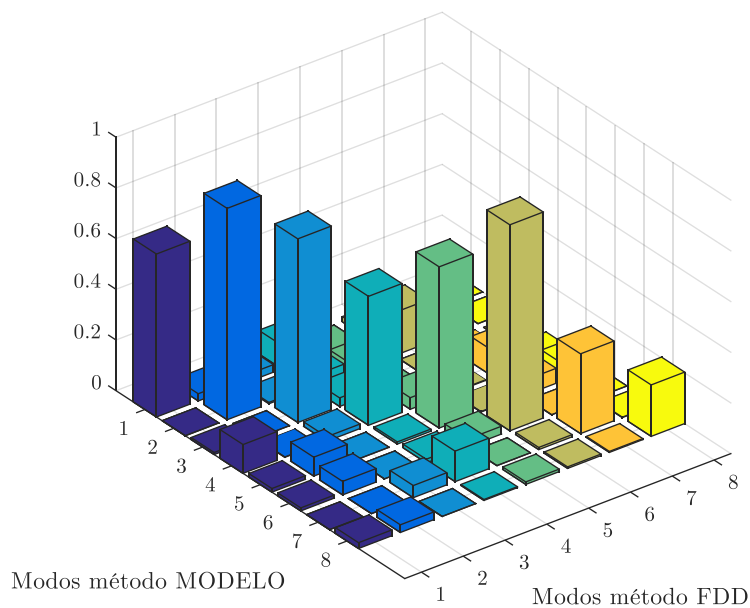


Figura 6.34 – Coeficientes MAC obtidos para a estrutura em estudo, resultantes da comparação entre as configurações modais obtidas pelo método FDD com as calculadas através do modelo numérico.

A análise dos valores apresentados na equação (5.18) e representados na Figura 6.34, permite concluir que nem todos os valores da diagonal principal se aproximam da unidade, em especial os últimos dois modos de vibração que apresentam uma fraca correlação. Apesar disso, as configurações modais dos modos 2, 3 e 6 apresentam uma elevada correlação enquanto que os restantes têm resultados aceitáveis.

6.8 Considerações finais

Ao longo deste capítulo, procedeu-se ao estudo do comportamento dinâmico da ponte pedonal sobre a Avenida Santo Condestável, efetuando-se inicialmente uma descrição pormenorizada da estrutura referida, dos seus principais aspetos estruturais e geométricos.

O principal objetivo do capítulo consiste no estudo da ponte pedonal sobre a Avenida Santo Condestável, em termos do seu comportamento dinâmico, tendo como base a análise de resultados numéricos obtidos pela modelação da estrutura em elementos finitos 3D, que será posteriormente comparado e calibrado de acordo com os resultados experimentais adquiridos durante um ensaio de vibração ambiental à estrutura.

Nesse sentido, inicialmente foi efetuada uma descrição pormenorizada da estrutura referida, especialmente dos seus principais aspetos geométricos e estruturais. De seguida foi apresentado o modelo numérico elaborado, as suas especificidades e os resultados em termos dinâmicos.

Em termos experimentais, foram analisados dois conjuntos de dados obtidos de dois diferentes ensaios de vibração ambiental. O primeiro conjunto de dados foi obtido recorrendo a 10 acelerómetros de elevada sensibilidade e o respetivo equipamento de aquisição de dados utilizados geralmente no ramo de engenharia, colocados em vários pontos da estrutura para cada fase de ensaio, aproveitando os resultados obtidos por Costa (2012). O segundo conjunto é obtido recorrendo a apenas um dispositivo incluído num *Smartphone* ordinário, recorrendo à aplicação *Accelerometer Meter*, com o intuito de verificar a sua utilidade para analisar estruturas com maior flexibilidade ou para funcionar como iteração inicial, antes da realização do ensaio propriamente dito.

A informação experimental, ou seja, as histórias de aceleração obtidas nos ensaios de vibração, são analisadas recorrendo ao método FDD, permitindo a identificação das frequências naturais e das respetivas configurações modais dos 8 primeiros modos de vibração, sendo estes subdivididos em modos de flexão vertical, modos de flexão lateral e modos de torção. São então comparados as frequências e os modos de vibração calculados experimentalmente e numericamente, aferindo as hipóteses adotadas na elaboração do modelo, demonstrando a importância de utilizar resultados experimentais para calibrar e certificar os modelos numéricos.

A comparação de resultados permite verificar que em termos de frequências naturais da estrutura existe uma boa concordância entre os resultados numéricos e experimentais, exceto para o 4.º modo de vibração lateral. Para o caso das configurações modais, utilizou-se o coeficiente MAC para efetuar a comparação, obtendo-se alguns modos com elevada correlação (modos 2, 3 e 6), com correlação aceitável (modos 1, 4 e 5) e com fraca correlação (modos 7 e 8).

A informação experimental obtida nos ensaios realizados com *Smartphones*, permitiu a identificação de todas frequências de vibração da estrutura, exceto o 4.º modo de vibração lateral. As frequências naturais obtidas apresentam ainda uma elevada proximidade com aquelas obtidas pelo ensaio com recurso a sensores de elevada sensibilidade e respetivos sistema de aquisição de dados, apresentando uma percentagem de erro inferior a 1%, exceto para o modo de torção que tem uma diferença de 4,18%.



7 Conclusões e Perspetivas Futuras

7.1 Principais conclusões

A realização deste trabalho mostrou a importância que o conhecimento dos fundamentos matemáticos da dinâmica de estruturas tem na caracterização e análise do comportamento dinâmico estrutura de engenharia civil, nomeadamente quando se pretende estimar os parâmetros modais (frequências naturais, modos de vibração e amortecimentos modais).

Neste trabalho, esses fundamentos foram implementados em rotinas desenvolvidas em MATLAB para estudar modelos simples (de 1 GL e vários GL), segundo a formulação clássica (no domínio do tempo e frequência) e para a formulação de estado, obtendo-se resultados idênticos, tal como foi demonstrado no capítulo 2.

Em estruturas de elevada flexibilidade, como é o caso das pontes pedonais, o movimento de peões pode induzir ações dinâmicas suscetíveis de produzir vibrações indesejadas para o conforto humano. Esta questão tem sido estudada, existindo já normas e procedimentos de verificação na sua fase de dimensionamento, de forma a garantir: que as vibrações devidas ao tráfego de peões são aceitáveis; que não ocorre o fenómeno de *lock-in*; e que, quando sujeita a uma excitação intencional, a ponte pedonal não perde a sua estabilidade. Essas mesmas normas sugerem ainda métodos de dissipação de energia para minimização dessas vibrações. Geralmente, a opção mais económica e eficaz consiste em modificar o amortecimento estrutural, utilizando amortecedores externos de controlo passivo.

Para caracterizar o comportamento dinâmico de estruturas flexíveis, como é o caso das pontes pedonais, os ensaios de vibração ambiental são uma ferramenta que se adequa perfeitamente. Permitem identificar frequências baixas, típicas em pontes pedonais, apresentam bons resultados, considerando apenas as excitações de carácter ambiental.

Todavia, o sucesso para a realização destes ensaios envolve a capacidade de compreender, analisar e interpretar um conjunto de aspetos que podem influenciar a qualidade dos dados/resultados que se esperam obter, nomeadamente: a escolha de equipamento adequado (sistemas de aquisição de dados e sensores) para o tipo de ensaio que se pretende realizar; um bom planeamento e uma metodologia de ensaio apropriada; a consciência da possibilidade de poderem ocorrer diversos tipos de eventos/interferências e a necessária capacidade para os analisar e corrigir; e o devido conhecimento dos possíveis erros que podem resultar das fases de pré-processamento e processamento. Os quais foram abordados e discutidos no capítulo 4 deste trabalho.

Dos ensaios de vibração ambiental resultam histórias de aceleração que são posteriormente tratadas (pré-processamento e processamento) e, recorrendo às metodologias de identificação modal, determinam-se os principais parâmetros dinâmicos da estrutura. Dessa forma, ao longo do capítulo 5 foram descritas metodologias no domínio da frequência, designadamente o método BFD, FDD e EFDD, e no domínio do tempo, o método SSI-COV. Para compreender melhor estas metodologias, as mesmas são aplicadas a um modelo de uma viga bi-apoiada com 3 graus de liberdade, através de rotinas desenvolvidas em MATLAB, apresentando uma elevada semelhança dos seus parâmetros modais.

Para validar e calibrar essas rotinas foi também analisado o comportamento dinâmico de um modelo físico de uma viga encastrada-apoiada, recorrendo ao método EFDD e SSI-COV, comparando depois os resultados experimentais com os obtidos através de um modelo numérico. Dessa comparação, verifica-se uma excelente concordância, especialmente ao nível das configurações modais que apresentam semelhanças sempre superiores 99%.

O presente trabalho teve como objetivo principal caracterizar e analisar o comportamento dinâmico de uma ponte pedonal que tem um vão de 102 metros e apresenta dupla curvatura (em alçado e planta), sendo composta por pilares de betão e um tabuleiro metálico. Essa estrutura foi alvo de um ensaio de vibração ambiental para calibrar o modelo numérico desenvolvido em SAP 2000, com o intuito de validar as hipóteses adotadas na construção do referido modelo numérico. Apresentaram-se também resultados experimentais provenientes da análise de séries temporais de aceleração obtidas recorrendo a um *Smartphone*.

O processamento e análise dos resultados experimentais, obtidos para a ponte pedonal, foram feitos recorrendo uma vez mais às rotinas desenvolvidas neste trabalho em MATLAB. Seguidamente, foram comparados os parâmetros modais obtidos através das análises experimentais e o modelo numérico desenvolvido. Relativamente à comparação entre frequências modais as comparações resultaram em erros abaixo dos 8% para todos os modos exceto o 4.º modo de vibração de flexão lateral. Em relação às configurações modais, verificou-se uma boa correlação entre os modos 2, 3 e 6, todos acima de 72% e uma correlação aceitável nos modos 1, 4 e 5, todavia, os modos 7 e 8 apresentam uma correlação fraca, abaixo dos 35%.

Com este trabalho, mostra-se que um comum Smartphone pode ser uma interessante ferramenta de trabalho quando se pretende efetuar uma análise preliminar para caracterizar o comportamento dinâmico de estruturas mais flexíveis. Analisando a comparação de resultados entre os obtidos a partir dos ensaios de vibração ambiental e os obtidos dos ensaios realizados com um *Smartphone*, verificou-se uma boa concordância para o caso das frequências naturais. Assim, a utilização destes dispositivos em estruturas

mais flexíveis mostra-se como uma opção interessante em situações que não seja possível efetuar um ensaio de vibração ambiental.

7.2 Perspetivas futuras

O trabalho apresentado pode ser complementado nas diversas áreas abordadas, assim:

- Do ponto de vista da identificação modal, podem-se comparar os resultados da identificação modal no domínio da frequência apresentados com os resultados de outros métodos nesse domínio (EFDD e Polimax) ou provenientes de métodos no domínio do tempo (por exemplo SSI-COV);
- Relativamente aos coeficientes de amortecimento modal, é uma área que ainda pode ser explorada, uma vez que os resultados obtidos segundo os diferentes métodos são ainda bastante dispares;
- O modelo numérico da ponte pedonal com uma melhor calibração poderá permitir uma análise dinâmica mais aprofundada, relativamente ao real comportamento da estrutura sob diversas ações dinâmicas;
- O desenvolvimento de uma aplicação para *Smartphone* que ofereça, para além da simples medição de histórias de aceleração, outras potencialidades como por exemplo a escolha da frequência de amostragem e que permita a obtenção de mais do que um ponto de medição (mais do que 1 *Smartphone*), de forma sincronizada, recorrendo a GPS, o que poderia possibilitar uma análise mais interessante;
- O presente trabalho demonstrou que a ponte pedonal em estudo apresenta frequências naturais dentro da gama crítica definida pelos regulamentos, pelo que seria importante avaliar a suscetibilidade da estrutura a fenómenos de vibrações excessivas.



8 Referências Bibliográficas

- Abreu, E. (2008). *Dimensionamento de Sistemas de Controlo de Vibrações para Pontes Pedonais*. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto.
- Allemang, R. J., & Brown, D. L. (1982). A Correlation Coefficient for Modal Vector Analysis. In *Proceedings of the 1st International Modal Analysis Conference* (pp. 110–116). Orlando, USA.
- Autodesk. (2016). AutoCAD.
- Bendat, J. S., & Piersol, A. G. (2000). *Random Data: Analysis and Measurement Procedures* (3rd ed.). Wiley-Interscience.
- Blanchard, J., Davies, B. L., & Smith, J. W. (1977). Design Criteria and analysis for Dynamic Loading of Footbridges. In *Proceedings of Symposium on Dynamic Behaviour of Bridges* (pp. 90–106). Berkshire, England.
- Brincker, R., Ventura, C. E., & Andersen, P. (2001). Damping Estimation by Frequency Domain Decomposition. In *Proceedings of 19th International Modal Analysis Conference* (pp. 746–752). Kissimmee, Florida.
- Brincker, R., Zhang, L., & Andersen, P. (2000). Modal Identification from Ambient Responses using Frequency Domain Decomposition. In *18^o International Modal Analysis Conference* (pp. 625–630). Texas, USA. Retrieved from <https://goo.gl/VFEHrB>
- BS5400. (1978). Steel, Concrete and Composite Bridges Part 2: Specification for loads; Appendix C: Vibration Serviceability Requirements for foot and cycle track bridges. (UK: British Standards Association, Ed.) London.
- Caetano, E. (1992). *Identificação Experimental de Parâmetros Dinâmicos em Sistemas Estruturais*. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, Portugal.
- CEN. (2009). Eurocódigo 0 - Bases para o projeto de estruturas. (Intituto Português da Qualidade, Trad.) Bruxelas.
- Chopra, A. (2001). *Dynamics of Structures: Theory and applications to earthquake engineering*. Prentice-Hall, inc.
- Clough, R. W., & Penzien, J. (2003). *Dynamic of Structures* (Second edi). McGraw-Hill, Inc.
- Costa, D. C. (2012). *Análise do comportamento dinâmico de uma ponte pedonal*. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil, Instituto Superior de Engenharia de Lisboa, Lisboa.
- CSI. (2017). SAP2000 Integrated Finite Element Analysis and Design of Structures.

-
- Berkeley, California, USA.
- Cunha, A. (1990). *Dinâmica Estrutural Estocástica: Aplicações à Engenharia Sísmica*. Tese de doutoramento em Engenharia Civil, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto.
- Cunha, Á., Caetano, E., Magalhães, F. M., & Moutinho, C. (2012). Monitorização Dinâmica e Identificação Estrutural de Pontes e Estruturas de Grande Vão. In *Proceedings of XXXV Jornadas Sul Americanas de Engenharia Estrutural - Infraestrutura e Desenvolvimento*. Rio de Janeiro, Brasil.
- Felber, A. J. (1993). *Development of a Hybrid Bridge Evaluation System*. Tese de Doutoramento em Engenharia Civil, University of British Columbia, Vancouver, Canada.
- Gomes, A. (2016). *Observação e análise do comportamento dinâmico de edifícios de betão armado*. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil, Instituto Superior de Engenharia de Lisboa, Lisboa.
- Heinemeyer, C., Butz, C., Cunha, Á., Caetano, E., Keil, A., Schlaich, M., ... Trometer, S. (2009). *Design of Lightweight Footbridges for Human Induced Vibrations* (Vol. 3).
- Juang, J.-N. (1995). *Applied System Identification*. (P. Hall, Ed.). USA.
- Keuwlsoft. (n.d.). Accelerometer Meter.
- Klema, V. C., & Laub, A. J. (1980). The Singular Value Decomposition : Its Computation and Some Applications. *IEEE Transactions on Automatic Control*, (3), 164–176.
- LMS. (2016). Test Lab Modal Analysis Software.
- Magalhães, F. M. (2004). *Identificação Modal Estocástica Para Validação Experimental De Modelos Numéricos*. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto.
- Maia, N., Silva, J., He, J., Lieven, N., Lin, R., Skingle, G., ... Urgueira, A. (1998). *Theoretical and Experimental Modal Analysis*. (N. Maia & J. Silva, Eds.). Research Studies Press.
- MathWorks. (2015). Matlab.
- Mendes, P. (2010). *Observação e análise do comportamento dinâmico de barragens de betão*. Tese de Doutoramento em Engenharia Civil, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto.
- Mendes, P. (2012). *Dinâmica de Estruturas: Sebenta da Unidade Curricular de Dinâmica de Estruturas*. Instituto Superior de Engenharia de Lisboa.
- Mendes, P., & Oliveira, S. (2008). *Análise Dinâmica de Estruturas: Utilização integrada de modelos de identificação modal e modelos de elementos finitos*. (LNEC, Ed.) (1st ed.). Lisboa: LNEC.
- Moreira, R. (2013). *Controlo de vibrações na ponte pedonal sobre o rio Ave em Santo*

-
- Tirso*. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil, Instituto Superior de Engenharia do Porto, Porto.
- Moutinho, C. (1998). *Controlo passivo e activo de vibrações em pontes de peões*. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto.
- Oliveira, S. (2007). *Folhas da disciplina de Matemática Aplicada à Engenharia Civil*. Instituto Superior de Engenharia de Lisboa.
- ONT83. (1983). Ontario Highway Bridge Design Code. (Highway Engineering Division, Ed.) Ontario, Canada: Ministry of Transportation and Communication.
- Planeamento e Projetos de Engenharia, L. (2017). Planeamento e Projetos de Engenharia, LDA. Retrieved September 16, 2017, from <http://www.ppe.pt/projects/proj50.html>
- Prevosto, M. (1982). *Algoritmes d'Identification des Caractéristiques Vibratoires de Structures Mécaniques Complexes*. Dissertação de Doutoramento em Engenharia Civil, Université de Rennes I, Rennes, France.
- RFS2-CT. (2008). *Human induced Vibrations of Steel Structures - vibrações em pontes pedonais: Recomendações técnicas de projeto*.
- Rodrigues, J. (2004). *Identificação Modal Estocástica Métodos de análise e aplicações em estruturas de engenharia civil*. Tese de doutoramento em Engenharia Civil, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto. Retrieved from [http://repositorio-aberto.up.pt/bitstream/10216/11964/2/Texto integral.pdf](http://repositorio-aberto.up.pt/bitstream/10216/11964/2/Texto%20integral.pdf)
- Roos, I. (2009). *Human Induced Vibrations on Footbridges - Application & comparison of pedestrian load models*. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil, Delft University of Technology, Brisbane.
- Silva, J. M. da. (2010). *Análise de vibrações sob a ação humana na ponte pedonal sobre a linha vermelha - Ilha do Fundão (Rio de Janeiro)*. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto.
- Smith, R. R., & Fitzpatrick, T. (2001). Stabilising the London Millennium Bridge. *Ingenia*, (9), 18–22. Retrieved from <http://www.ingenia.org.uk/Content/ingenia/issues/issue9/Fitzpatrick.pdf>
- Socometal. (2005). *Ponte Pedonal no Hipermercado da Bela Vista*. Lisboa.
- Suleyman, N. E. (2016). *Monitorização Dinâmica da Ponte Ferroviária de São João*. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil, Instituto Superior de Engenharia de Lisboa, Lisboa.
- SVS. (2016). ARTeMIS Modal Software.
- Ventura, C. E., & Horyna, T. (2000). Measured and Calculated Modal Characteristics of the Heritage Court Tower in Vancouver, B.C. In *Proceedings of 18th International Modal Analysis Conference*. San Antonio, Texas.
- Welch, P. D. (1967). The Use of Fast Fourier Transform for the Estimation of Power

Spectra: A Method Based on Time Averaging Over Short, Modified Periodograms.
IEEE Transactions on Audio and Electro-Acoustics.

Wheeler, J. E. (1980). Pedestrian Induced vibrations in footbridges. In *Proceedings of the 10th Australian Road Research Board (ARRB) Conference* (pp. 21–35). Sidney, Australia.

Zivanovic, S., Pavic, A., & Reynolds, P. (2005). Vibration serviceability of footbridges under human-induced excitation: A literature review. *Journal of Sound and Vibration*, 279(1–2), 1–74. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2004.01.019>