

INSTITUTO POLITÉCNICO DE LISBOA
INSTITUTO SUPERIOR DE CONTABILIDADE
E ADMINISTRAÇÃO DE LISBOA



ISCAL

METODOLOGIA DEA E OPTIMIZAÇÃO
MULTIOBJECTIVO

Joana Martins Nunes

Lisboa, Dezembro de 2014

INSTITUTO POLITÉCNICO DE LISBOA
INSTITUTO SUPERIOR DE CONTABILIDADE
E ADMINISTRAÇÃO DE LISBOA

METODOLOGIA DE A E OPTIMIZAÇÃO MULTIOBJECTIVO

Joana Martins Nunes (20120145)

Dissertação submetida ao Instituto Superior de Contabilidade e Administração de Lisboa para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Contabilidade e Gestão das Instituições Financeiras, realizada sob a orientação científica do Professor Doutor José Manuel de Oliveira Pires, Professor-Coordenador, da área científica de Matemática.

Constituição do Júri:
Presidente Doutor Joaquim Martins Ferrão
Vogal Doutora Ana Maria Paias
Vogal Doutor José de Oliveira Pires

Lisboa, Dezembro de 2014

Declaro ser a autora desta dissertação, que constitui um trabalho original e inédito, que nunca foi submetido (no seu todo ou qualquer das suas partes) a outra instituição de ensino superior para obtenção de um grau académico ou outra habilitação. Atesto ainda que todas as citações estão devidamente identificadas. Mais acrescento que tenho consciência de que o plágio – a utilização de elementos alheios sem referência ao seu autor – constitui uma grave falta de ética, que poderá resultar na anulação da presente dissertação.

“Adoramos a perfeição, porque não a podemos ter; repugná-la-íamos se a tivéssemos. O perfeito é o desumano porque o humano é imperfeito.”

Fernando Pessoa

Agradecimentos

Em primeiro lugar quero agradecer ao Professor Doutor José Oliveira Pires pela sugestão do tema, pela sua orientação, e por toda ajuda e disponibilidade que teve ao longo desta etapa.

Em seguida agradeço às minhas colegas de Mestrado e aos meus amigos por toda ajuda e motivação que me transmitiram para a realização deste trabalho. Quero deixar um agradecimento especial à minha amiga Liliana Pinto por todo apoio e ajuda que me deu nesta fase.

Quero agradecer à minha família, em especial aos meus pais pela oportunidade que me deram em realizar este mestrado, e por toda ajuda, paciência e carinho que me deram. Quero agradecer ao meu irmão João e a minha irmã Juliana por toda ajuda, disponibilidade e paciência que tiveram para comigo.

Em especial quero agradecer ao meu namorado Eric Maia por todo o carinho, apoio, motivação, coragem, força, disponibilidade e incentivo que me deu.

E a todos os que contribuíram direta e indiretamente para realização deste trabalho.

A todos eles dedico esta dissertação.

Resumo

A presente dissertação destina-se a apresentar um estudo sobre métodos de avaliação do desempenho organizacional, mais precisamente sobre a metodologia DEA (*Data Envelopment Analysis*) que permite considerar vários aspectos no processo de avaliação para além do aspecto financeiro. Nesse estudo começa-se por apresentar os modelos clássicos da DEA, o modelo CCR (Charnes, Cooper e Rhodes (1978)) e o modelo BCC (Banker, Charnes e Cooper (1984)). A aplicação prática destes modelos revela um fraco poder de discriminação de unidades eficientes e uma distribuição irrealista dos pesos que contribuem para o cálculo da eficiência. Para contornar estes problemas, vários métodos têm sido propostos. Um desses métodos consiste na utilização da programação multiobjectivo e é objeto de estudo neste trabalho.

Alguns dos modelos apresentados foram utilizados para determinar a eficiência de 27 instituições bancárias que operaram em Portugal durante o ano de 2012. Esta aplicação real permitiu avaliar quantitativamente as diferenças entre o modelos usados, nomeadamente entre o modelo CCR e o modelo de programação multiobjectivo proposto por Ghasemi, Ignatius and Emrouznejad (2014), que é uma versão multiobjectivo do modelo CCR. Os resultados obtidos evidenciam uma considerável capacidade deste último modelo para contornar os problemas de aplicação do modelo CCR.

Palavras-Chaves: Avaliação de Desempenho Organizacional, Eficiência, Metodologia DEA, Programação multiobjectivo.

Abstract

This thesis aims to present a study on evaluation methods of organizational performance, specifically on the DEA methodology (Data envelopment Analysis) which allows to consider several aspects in the evaluation process beyond the financial aspect. This study begins by presenting the classical models of DEA, CCR model (Charnes, Cooper and Rhodes (1978)) and the BCC model (Banker, Charnes and Cooper (1984)). The implementation of these models show a weak discrimination of power efficient units and unrealistic weight distribution which are used to calculate the efficiency. To circumvent these problems, several methods have been proposed. One of these methods is the use of multiobjective programming that is the object of study in this work.

Some of the presented models were used to determine the efficiency of 27 banks that operated in Portugal during 2012. This application allowed us to assess quantitatively the differences between the used models, in particular between the CCR model and the model proposed by Ghasemi multiobjective programming, Ignatius and Emrouznejad (2014), which is a multiobjective version of the CCR model. The results show a considerable capacity of this last model to circumvent the problems of applying the CCR model.

Key Words: Assessing Organizational Performance, Efficiency, DEA Methodology, multiobjective programming

Índice

Índice de tabelas	xi
Índice de Figuras	xii
Lista de Abreviaturas	xiii
1. Introdução	1
2. Avaliação de Desempenho Organizacional	4
2.1. Introdução	4
2.2. Evolução da avaliação de desempenho organizacional	4
2.3. Modelos de avaliação no desempenho organizacional	7
2.4. Metodologia DEA	8
2.5. Conceito da Eficácia, Produtividade e Eficiência	9
2.5.1. Eficácia	9
2.5.2. Produtividade	10
2.5.3. Eficiência	11
3. Modelos Clássicos da Metodologia DEA	14
3.1. Introdução	14
3.2. Modelo CCR	15
3.2.1. Modelo CCR orientado para os <i>inputs</i>	15
3.2.2. Modelo CCR orientado para os <i>outputs</i>	21
3.3. Modelo BCC	24
3.3.1. Modelo BCC orientado para <i>inputs</i>	24
3.3.2. Modelo BCC orientado para os <i>outputs</i>	28
3.4. Vantagens e Desvantagens da Metodologia DEA	32
4. Programação Multiobjectivo	33
4.1. Introdução	33
4.2. Definições e conceitos básicos	33

4.3. Tipos de métodos de programação linear multiobjectivo	35
4.4. Método das ponderações	37
4.5. Programação por metas	38
5. Programação multiobjectivo e metodologia DEA	44
5.1. Introdução	44
5.2. Modelo multiobjectivo	45
5.3. Modelo de programação por metas	49
5.4. Modelo bi-objectivo	50
6. Caso prático aplicado às instituições bancárias	53
6.1. Introdução	53
6.2. Dados e escolha dos modelos para aplicação prática	53
6.3. Resultados e respetiva análise	55
7. Conclusões	61
8. Referências Bibliográficas	63
Apêndices	67
Apêndice A - Cálculos dos pontos da cada DMU do gráfico 3.13	67
Apêndice B - Resultados obtidos pelo modelo CCR orientado para <i>inputs</i>	68
Apêndice C- Resultados obtidos pelo modelo BCC orientado para <i>inputs</i>	69
Apêndice D- Retornos variáveis do Modelo BCC	70
Apêndice E- Resultados obtidos pelo modelo BiO-MCDEA orientado para <i>inputs</i>	71

Índice de tabelas

Tabela 3.1 - Dados relativos aos <i>inputs</i> e <i>outputs</i> de seis instituições bancárias.	18
Tabela 3.2 - Resultados obtidos pelo modelo CCR orientado a <i>inputs</i> para os dados do exemplo 3.1	19
Tabela 3.3 - Resultados obtidos pelo modelo CCR orientado a <i>outputs</i> para os dados do exemplo 3.1	23
Tabela 3.4 - Resultados obtidos pelo modelo BCC orientado a <i>inputs</i> para os dados do exemplo 3.1	28
Tabela 3.5 – Resultados obtidos pelo modelo BCC orientado a <i>outputs</i> para os dados do exemplo 3.1	31
Tabela 4.1 – Aplicação da programação por metas na área da gestão financeira	43
Tabela 6.1 - Dados relativos aos <i>inputs</i> e <i>outputs</i>	54
Tabela 6.2 - Resultados relativos aos <i>benchmarks</i> obtidos pelo modelo CCR orientado para <i>inputs</i>	57
Tabela 6.3 – Resultados relativos aos <i>benchmarks</i> obtidos pelo modelo BCC orientado para <i>inputs</i>	58

Índice de Figuras

Figura 2.1 - Mudanças no Ambiente Organizacional.....	5
Figura 2.2 - Função de Produção.....	10
Figura 2.3 - Cruva de um processo de produção	12
Figura 3.1 - Classificação dos modelos pelos retornos de escala e orientação	14
Figura 3.2 – Alvos e <i>benchmarks</i> para o exemplo 3.1.	20
Figura 3.3 - Interpretação geométrica dos fatores de escala do modelo BCC com orientação para <i>inputs</i>	25
Figura 3.4 - Interpretação Geométrica dos retornos variáveis de escala do modelo BCC com orientação para <i>outputs</i>	30
Figura 6.1- Valores da eficiência das instituições bancárias obtidos pelos modelos CCR e BCC com orientação para <i>inputs</i>	56
Figura 6.2 – Valores da eficiência das instituições bancárias obtidos pelos modelos CCR com orientação para <i>inputs</i> e BiO-MCDEA.....	60

Lista de Abreviaturas

BCC- Banker, Charnes e Cooper

CCR – Charnes, Cooper e Rhodes

CRS – *Constant Returns to Scale*

DEA- *Data Envelopment Analysis*

DMU – *Decision Marking Unit*

GPDEA – *Goal Programming Data Envelopment Analysis*

MCDEA – *Multicriteria Data Envelopment Analysis*

OPL - *Optimization Programming Language*

PL – Programação Linear

PLMO – Programação linear multiobjectivo

PPL – Problema de programação linear

NISE – *Noninferior Set Estimation*

SIAD - Sistema Integrado de Apoio à Decisão

SMART - *Strategic Measurement and Reporting Technique*

VRS – *Variant Returns to Scale*

1. Introdução

Ao longo dos anos, a sociedade tem sofrido bastantes alterações principalmente no que se refere à competitividade dos mercados. Esta realidade faz com que, atualmente, a crescente competitividade dos mercados conduza à prática de modelos de gestão mais eficazes, como forma de obter vantagem competitiva e, conseqüentemente, promover o desenvolvimento organizacional.

Inicialmente, a avaliação de desempenho de uma organização era feita apenas com base em indicadores financeiros. Atualmente, as organizações utilizam outros indicadores não financeiros que permitem uma avaliação mais abrangente do seu desempenho. Isto permite que uma organização se adapte melhor às mudanças que ocorrem na sociedade e, assim, estar mais apta para competir com a sua concorrência e também ter maiores possibilidades de obter um melhor desempenho.

Existem variados modelos para mensuração da eficiência de uma organização, esses modelos podem ser paramétricos ou não paramétricos, enquanto os primeiros se baseiam em modelos estatísticos, os segundos focam-se em modelos de investigação operacional.

A metodologia DEA (*Data Envelopment Analysis*) é um método não paramétrico baseada na programação linear. Esta metodologia surgiu em 1978 com a tese de doutoramento de Rhodes e baseou-se no trabalho desenvolvido por Farrel em 1957.

Com as limitações que surgiram dos modelos clássicos da metodologia DEA, foi necessário contornar essas falhas criando novos modelos onde se inclui a utilização da programação multiobjectivo. E a criação desses modelos surge com base no conceito de eficiência de Pareto que ambas abordagens partilham.

Com este trabalho pretende-se alcançar os seguintes objetivos: perceber a evolução da avaliação de desempenho; quais os modelos de avaliação de desempenho organizacional; mostrar como a metodologia DEA pode auxiliar na avaliação do desempenho organizacional; quais as suas vantagens e desvantagens; perceber qual os benefícios que possam advir para este método quando complementado com a programação multiobjectivo; avaliar empiricamente as potencialidades da utilização

conjunta daquelas duas técnicas no processo de tomada de decisão de modo obter-se um aumento da eficiência nas organizações.

O objeto deste estudo consiste em mostrar a contribuição que os modelos e as técnicas matemáticas, baseadas na programação linear e na programação multiobjectivo, podem dar na avaliação de desempenho organizacional.

Para que os objetivos pretendidos fossem atingidos fez-se uma revisão da literatura relacionada com o tema em estudo. Inicialmente fez-se uma pesquisa sobre a avaliação de desempenho organizacional para demonstrar a importância de uma organização ter um método para medir o seu desempenho e para conhecer os tipos de modelos que se têm usado para fazer essa avaliação. Posteriormente, realizou-se uma pesquisa mais aprofundada sobre os modelos e as técnicas matemáticas, baseadas na programação linear e na programação multiobjectivo, usados na avaliação de desempenho organizacional, e como os mesmos contribuem para avaliação do desempenho das organizações.

A presente dissertação encontra-se dividida em sete capítulos. No capítulo 2, apresenta-se uma introdução à avaliação de desempenho organizacional, onde é feita uma descrição sobre a evolução e os principais modelos dessa avaliação.

No capítulo 3, apresentam-se os dois modelos clássicos da metodologia DEA, o modelo CCR (Charnes, Cooper e Rhodes (1978)), e o modelo BCC (Banker, Charnes e Cooper (1984)), onde são referidas as principais características de cada modelo e as principais diferenças entre esses modelos. Neste capítulo, são apresentadas as principais vantagens e desvantagens desses modelos.

No capítulo 4, é apresentada uma introdução à programação multiobjectivo, onde se referem os conceitos básicos e alguns métodos, com destaque para o método das ponderações e método da programação por metas. Estes métodos serão usados no capítulo 5 para contornar algumas desvantagens associadas aos modelos clássicos, apresentados no capítulo anterior.

No capítulo 5, são então apresentados os modelos de DEA baseados na programação linear multiobjectivo, mais precisamente no método das ponderações e na programação por metas.

No capítulo 6, é apresentado o estudo de um caso prático baseado em dados reais de 27 instituições bancárias que operavam em Portugal no ano de 2012, onde se aplicam alguns dos modelos apresentados nos capítulos 3 e 5.

Por fim, no capítulo 7, apresentam-se as principais conclusões retiradas com a realização deste trabalho.

2. Avaliação de Desempenho Organizacional

2.1. Introdução

Neste capítulo abordar-se-á a avaliação de desempenho organizacional. Assim, na secção 2.2, apresenta-se a evolução da avaliação de desempenho organizacional, principalmente as duas grandes fases que ocorreram e que mudaram a forma de avaliar o desempenho organizacional. Na secção 2.3, referem-se os modelos de avaliação de desempenho organizacional. Na secção 2.4, é apresentada a metodologia DEA. Na secção 2.5, são referidos os conceitos de eficácia, produtividade e eficiência para uma melhor compreensão deste último.

2.2. Evolução da avaliação de desempenho organizacional

Face às mudanças que têm vindo a ocorrer na sociedade, a avaliação de desempenho organizacional tem vindo a sofrer transformações, fazendo com que o processo de avaliação de desempenho organizacional tenha estado em constante mudança nos últimos anos, de forma a ajustar-se aos novos modelos de gestão que as organizações têm adotado.

A avaliação de desempenho organizacional pode, segundo Ghalayini e Noble (1996), dividir-se em duas fases: a primeira, ocorrida no período entre 1880 a 1980 e que foi marcada pela utilização apenas de indicadores financeiros; a segunda, relativa ao período pós 1980, caracterizada pela utilização de indicadores financeiros e não financeiros.

Na primeira fase, os objetivos das organizações centravam-se na maximização dos lucros em detrimento de qualquer outro critério. Nesta fase, as organizações encontravam-se num período caracterizado pela certeza, estabilidade, e previsibilidade. Assim, na maior parte das organizações, a avaliação de desempenho organizacional era feita a partir da análise de rácios financeiros e operacionais. Havia ainda as que consideravam o lucro como o principal indicador de desempenho organizacional e outras que apenas comparavam os objetivos delineados com aqueles que eram atingidos na realidade. Todas estas formas de avaliação acarretam limitações à avaliação de

desempenho organizacional, de acordo com Fernandes (2007), que se descrevem em seguida.

No caso da análise/avaliação por rácios financeiros e operacionais, torna-se difícil ter uma visão global e coerente da organização porque, para se conseguir ter uma análise abrangente da organização, terão de se utilizar vários rácios em simultâneo. Ao agregar-se vários rácios, a organização acaba por perder informação relevante.

No caso do lucro utilizado como único indicador de desempenho, isto acaba por trazer à organização alguns problemas uma vez que é um indicador enganador, pois existem vários fatores que influenciam atividade da empresa. Por exemplo, se o Banco A estiver localizado numa área com grande concorrência terá menos lucro que um Banco B localizado numa área sem concorrência.

Por último, no caso da comparação dos objetivos definidos com aquilo que se atingiu, observa-se muitas vezes que esta forma de avaliar o desempenho organizacional traz limitações à organização, porque normalmente aquilo que se definiu encontra-se longe da realidade.

A segunda fase, segundo Ghalayini e Noble (1996), é caracterizada por mudanças no mercado mundial, o que tem levado as organizações a repensarem as suas estratégias, uma vez que as organizações internacionais se encontravam mais evoluídas, ofereciam produtos de maior qualidade com menores custos e tinham um leque mais variado de produtos. Devido a estes acontecimentos, segundo Dutra (2005), a segunda fase tem provocado mudanças no ambiente organizacional devido a diversos fatores, como se pode observar através do esquema representado na figura 2.1.



Figura 2.1 - Mudanças no Ambiente Organizacional

Fonte: Baseado em Dutra (2005:27)

De acordo com a figura 2.1, os fatores que provocaram mudanças no mundo organizacional foram: o processo de globalização, caracterizado pela forma como os diferentes mercados interagem, acabou por trazer vantagens como a chegada mais rápida do produto ao mercado. A crescente competitividade entre os mercados está relacionada com a capacidade de cada organização cumprir os seus objetivos com mais sucesso do que as outras organizações. Atualmente, as organizações são bastante mais competitivas no mercado para conseguirem chegar ao sucesso mais rapidamente e angariarem mais clientes. A concorrência em escala global acaba por ser uma vantagem porque as empresas conseguem fazer com que os seus produtos cheguem a todo o mundo e assim a não ocorrer só dentro do mercado local. Os processos que envolvem os fornecedores e os clientes estão relacionados com a ligação que estes têm desde o momento inicial da construção do produto até à fase final em que o produto se encontra acabado, isto é, existe sempre uma relação ativa entre o cliente e o fornecedor. O conhecimento do fator produção consiste em conhecer os fatores básicos de produção que são a terra, o capital e o trabalho, que passou a ser um dos aspetos principais na tomada de decisões e contribuiu para um melhor desenvolvimento da economia. O desenvolvimento da tecnologia veio contribuir para a oferta de um leque de produtos através de outros meios, como por exemplo a internet e a televisão. A segmentação e enfoque dos clientes têm como objetivo perceber quais as diferenças entre eles e dividi-los em grupos com características iguais. Mais precisamente, subdividir o mercado heterogéneo em mercados (grupos) homogéneos, para que quando uma organização esteja a oferecer um produto saiba a quem se está dirigir.

Com estas mudanças as organizações necessitaram de se adaptar de forma a conseguir que o desempenho organizacional tenha uma melhoria contínua. As organizações tiveram assim de arranjar novas estratégias e novas formas de pensar para conseguirem competir com outras concorrentes. Estas novas formas de competir podem ser de várias ordens: qualidade dos produtos, custos, variedade e adaptação às novas tecnologias.

De salientar que tais mudanças não implicam que os indicadores financeiros não sejam considerados. O que acontece é que para além destes são também incluídos os indicadores não financeiros e, desta forma, consegue-se uma avaliação de desempenho organizacional mais eficaz e completa.

Assim sendo, as organizações que estiverem a agir de forma correta e se tenham adaptado às mudanças que ocorreram na sociedade terão mais possibilidade de apresentar um melhor desempenho, atingindo níveis de excelência e, conseqüentemente, acabando por adquirir vantagem competitiva em relação a outras organizações.

As razões que levam as organizações a querer adotar medidas de desempenho organizacional são as seguintes: poderem realizar comparações de desempenho entre organizações concorrentes, conseguirem demonstrar aos investidores qual o retorno potencial que conseguem obter com os seus investimentos e verificar se as estratégias delineadas tanto a curto, médio e longo prazo estão a ser cumpridas.

As organizações que aplicam um processo de avaliação de desempenho têm, em regra, objetivos estratégicos que pretendem alcançar com a sua utilização. Por isso, um dos primeiros aspetos que se deve ter em conta, para compreender da melhor forma a implementação de um processo de avaliação, é tentar perceber quais os objetivos que a organização pretende alcançar.

2.3. Modelos de avaliação no desempenho organizacional

Como já foi referido na secção 2.2, revela-se importante que as organizações possuam uma forma de medir o seu desempenho. A avaliação de desempenho organizacional faz-se através de vários modelos que existem para a mensuração da eficiência.

Inicialmente, a avaliação de desempenho organizacional era feita através de modelos baseados somente em indicadores financeiros, utilizando para tal rácios financeiros e operacionais, que apresentam determinadas limitações, como foi referido na secção 2.2.

Os modelos tradicionais, baseados em indicadores financeiros, são inadequados para se obter uma boa avaliação de desempenho. Por isso, surgiram novos modelos que permitem fazer a medição de desempenho que, segundo Attadia e Martins (2003), são: a Matriz de avaliação de desempenho, baseada em medidas internas, externas, financeiras e não financeiras; a *Strategic Measurement and Reporting Technique* (SMART), focada em indicadores internos e externos; e o *Balanced Scorecard*, proposto por Kaplan e Norton (1996), que utiliza quatro perspetivas: a financeira, a do cliente, a de processos internos e de aprendizagem e crescimento.

Contudo, existem ainda outros métodos baseados em técnicas matemáticas que também permitem fazer uma avaliação do desempenho organizacional. Esses modelos podem classificar-se em modelos paramétricos e não paramétricos. Os modelos paramétricos são baseados em modelos estatísticos enquanto os não paramétricos baseiam-se em modelos de investigação operacional.

Dentro dos modelos não paramétricos surgiu a metodologia DEA (*Data Envelopment Analysis*) como resposta à incapacidade dos modelos paramétricos (técnicas de regressão e correlação estatísticas) em produzir resultados satisfatórios quando existem múltiplos *inputs* e múltiplos *outputs* com se refere em Cooper (2005). Em seguida, na secção 2.4, vai ser abordada a metodologia DEA.

2.4. Metodologia DEA

A metodologia DEA surgiu inicialmente com a tese de doutoramento de Edward Rhodes, supervisionada por W.W.Cooper e apresentada à *Carnegie Mellon University* no ano de 1978, baseada num trabalho de Farrel publicado em 1957.

Segundo Cooper, Seiford, Zhu (2001), a tese de Edward Rhodes teve como objetivo avaliar programas de educação de estudantes carenciados em escolas públicas dos Estados Unidos com apoio do governo. A ideia principal da tese de Rhodes era fazer uma comparação do desempenho entre alunos de escolas que participavam no programa com alunos de outras escolas que não participavam. Atualmente, a metodologia DEA é aplicada em vários tipos de organizações, quer de carácter empresarial quer de carácter social.

A metodologia DEA consiste numa técnica não paramétrica baseada na programação linear, que permite determinar a eficiência relativa de entidades homogéneas. Estas entidades são normalmente designadas DMUs (*Decision Making Units*). Uma DMU pode ser qualquer tipo de organização como por exemplo, instituição bancária, seguradora, loja, supermercado, hospital, escola, biblioteca e ainda se pode referir a um departamento, divisão ou unidade administrativa ou operacional, cuja a eficiência se pretende determinar.

Como já foi referido anteriormente a metodologia DEA é uma ferramenta matemática que serve para medir a eficiência de um conjunto de entidades homogéneas que

consomem múltiplos *inputs* e produzem múltiplos *outputs*. Portanto, a partir da metodologia DEA consegue-se determinar a fronteira de eficiência e a forma como se consegue alcançá-la. É importante referir que, nesta metodologia, não é relevante o aspeto financeiro, e não é necessário converter os *inputs* e *outputs* em unidades monetárias.

Os principais objetivos da metodologia DEA são os seguintes:

- ✓ Comparar DMUs que realizem atividades iguais (por exemplo, se tivermos a estudar o sector bancário, estudamos diferentes bancos), mas que se diferenciam pelas quantidades *inputs* que consomem e pelos *outputs* que produzem.
- ✓ Determinar as DMUs que são eficientes e ineficientes.
- ✓ Auxiliar na tomada de decisões, para tornar as DMUs ineficientes em eficientes.

Estes são alguns dos aspetos relevantes na metodologia DEA para que a sua aplicação ocorra de forma correta. De referir que, para uma correta aplicação da metodologia DEA é obrigatório que as DMUs sejam homogéneas, isto é, que os seus *inputs* e *outputs* sejam iguais.

2.5. Conceito da Eficácia, Produtividade e Eficiência

O principal conceito inerente à metodologia DEA é o conceito de eficiência. Para uma melhor compreensão e clarificação revela-se importante a apresentação dos conceitos de eficácia e produtividade. Estes três conceitos vão ser abordados nas três subsecções seguintes.

2.5.1. Eficácia

A eficácia pode ser definida como a capacidade de atingir um objetivo ou uma meta. Está relacionada com a obtenção de um desempenho necessário para alcançar a meta estabelecida.

Pelo dicionário da Língua Portuguesa eficácia é definida como «a qualidade do que é eficaz; capacidade de cumprir os objetivos pretendidos, eficiência, força para produzir determinados efeitos».

No contexto da metodologia DEA, este conceito está relacionado apenas com aquilo que é produzido, não tem em conta os recursos que são utilizados na produção. Assim, a eficácia é capacidade de um DMU atingir o nível de produção ao qual se tinha proposto.

2.5.2. Produtividade

O conceito de produtividade relaciona a quantidade que foi produzida com a quantidade que se gastou para chegar a essa produção. Assim, chama-se produtividade ao quociente entre a quantidade produzida (*output*) e a quantidade gasta para obter essa produção, isto é,

$$\text{Produtividade} = \frac{\text{Output}}{\text{Input}}$$

Através das duas funções de produção representadas na figura 2.2 consegue-se descrever a relação existente entre o *output* e *input* num processo de produção.

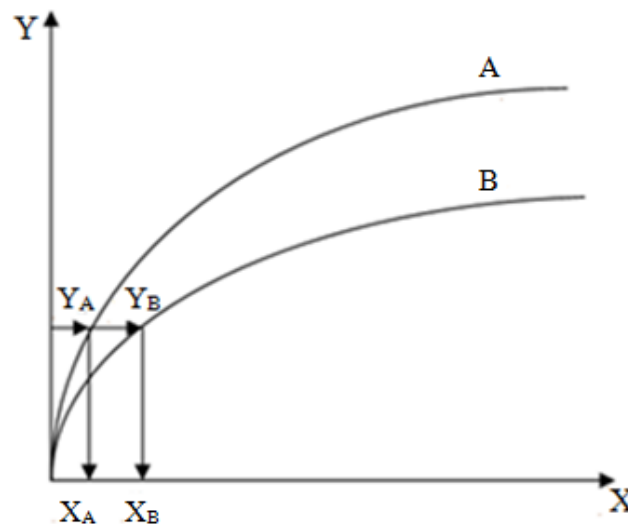


Figura 2.2 - Função de Produção

Fonte: Adaptado Noaves (1998) *apud* Prata e Arruda (2007:2)¹

No gráfico da figura 2.2, o eixo X representa os recursos, e o eixo Y representa a produção. A organização A com um número inferior de recursos (*input*) obteve a mesma quantidade de produção (*output*) que a organização B que utiliza um número superior de recursos.

¹ Novaes, A.G. (1998) Avaliação da produtividade de serviços de transportes através da análise envoltória de dados. Transporte em transformação. São Paulo: Makron Book

É possível comparar produtividades de organizações que desenvolvam atividades semelhantes e perceber qual é a razão de umas serem mais produtivas do que outras. Normalmente uma organização que seja mais produtiva é porque tomou melhores decisões, que permite assim sendo aproveitar melhor os recursos, logo uma organização é mais produtiva do que outra quando obtém a mesma produção com uma quantidade inferior de recursos. Pode-se portanto concluir que há uma maior e melhor produtividade quando são tomadas melhores decisões, e que a produtividade é a relação entre os *outputs* e *inputs*.

2.5.3. Eficiência

A eficiência é entendida como um conceito relativo, no sentido em que faz a comparação entre o que se produziu com os recursos disponíveis e o que se poderia ter produzido com o mesmo número de recursos.

Será, no entanto, importante referir que uma organização pode ser eficiente e não ser eficaz e vice-versa, como se pode observar pelas duas situações a seguir apresentadas:

- a) Uma organização que tenha o melhor desempenho possível é eficiente, mas não consegue alcançar a meta estabelecida como objetivo, logo não é eficaz.
- b) A organização consegue superar a meta pré-estabelecida logo é eficaz, mas o seu desempenho é inferior ao máximo que teria conseguido, logo a organização é considerada ineficiente.

Na figura 2.2, pode observar-se que organização A é mais eficiente do que a B, uma vez que a primeira organização utiliza menos *inputs* que a segunda e obtém os mesmos níveis de produção. Deste modo, pode concluir-se a que organização B, que utiliza mais *input*, devia ter níveis de produção mais elevados do que organização A, que utiliza menos *input*.

Em seguida, na figura 2.3, apresenta-se um gráfico que permite perceber a diferença entre a produtividade e a eficiência.

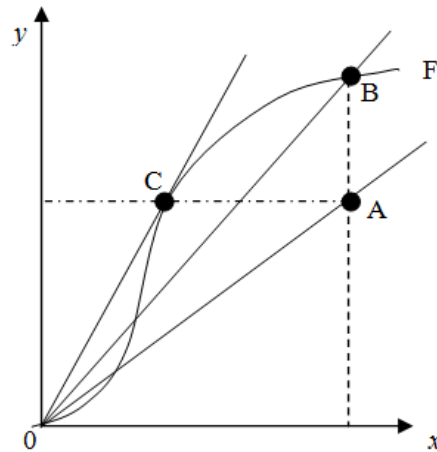


Figura 2.3 - Cruva de um processo de produção

Fonte: Adaptado de Coelli, Rao, O'Donnell e Battese (2005:5)

Na figura 2.3, o eixo X representa os *inputs* e o eixo Y representa os *outputs*. A curva F é a fronteira de eficiência que indica que foi produzido para cada nível de recurso. A região abaixo da fronteira de eficiência é chamado de conjunto admissível de produção. Nesse gráfico estão representadas duas organizações, B e C, que são eficientes. Contudo, a organização C é mais produtiva do que a organização B, uma vez que o declive da reta que contém os pontos O e C é maior do que o declive da reta que contém os pontos O e B. A organização representada por A é não eficiente.

Existem duas maneiras simples de uma organização não eficiente se tornar eficiente. A primeira consiste em reduzir os *inputs* mantendo constantes os *outputs* (orientação para *inputs*). A segunda consiste no inverso, isto é, em aumentar os *outputs* mantendo constantes os *inputs* (orientação para *outputs*). Na figura 2.3 estas duas maneiras correspondem a deslocar o ponto A para C e B, respetivamente.

Pode então concluir-se que eficiência relaciona o que se produziu com os recursos utilizados para essa produção com o que se poderia ter produzido com os mesmos recursos.

Como já se referiu, a eficiência é uma medida importante para a avaliação do desempenho organizacional e acaba por ser um indicador para o sucesso empresarial. No entanto, a eficiência pode ser distinguida em eficiência técnica e alocativa. A combinação destas duas eficiências permite-nos chegar à eficiência económica global.

- ✓ Eficiência técnica – Tem como objetivo evitar o desperdício. Logo pretende produzir mais com a mesma quantidade de *inputs*, ou então produzir o mesmo com uma quantidade inferior de *inputs*. Esta eficiência é também conhecida por eficiência produtiva (custo).
- ✓ Eficiência Alocativa – escolhe um conjunto ótimo de *inputs* tendo em conta o melhor preço e as condições de tecnologia que tem disponíveis.

Segundo Evanoff e Israilevich (1991), há ainda outra eficiência que é a eficiência de escala. Por eficiência de escala entende-se que uma organização (DMU) é eficiente em escala se conseguir produzir a quantidade de *outputs* que maximiza o lucro.

De acordo com Chen, Skully e Brown (2005), a eficiência é classificada em três tipos:

- ✓ Eficiência de escala
- ✓ Eficiência de Gama
- ✓ Eficiência X (Eficiência produtiva ou técnica)

Contrariamente ao que foi inicialmente referido, este autor não considera a eficiência alocativa, mas sim a eficiência de gama que está relacionada com o princípio da diversificação, promove portanto a competitividade e traz vantagens estratégicas para organização.

A metodologia DEA teve origem num trabalho de Farrel, no ano 1957, mas a sua concepção enquanto metodologia surgiu apenas em 1978, como já foi referido. Segundo Farrel (1957:254), quando se fala de eficiência de uma empresa normalmente significa que o sucesso da produção dessa empresa é tão grande quanto o número de saídas (*outputs*) possíveis para um determinado número de *inputs*. O estudo de Farrel considera a eficiência total como sendo o produto de dois tipos de eficiência: eficiência técnica e eficiência alocativa.

3. Modelos Clássicos da Metodologia DEA

3.1. Introdução

Neste capítulo apresentam-se os dois modelos clássicos da metodologia DEA, o modelo CCR (Charnes, Cooper e Rhodes (1978)), também conhecido por modelo CRS (*Constant Returns to Scale*) por considerar retornos constantes de escala, e modelo BCC (Banker, Charnes e Cooper (1984)), também conhecido por modelo VRS (*Variante Returns to Scale*) por considerar retornos de escala variáveis.

Cada um destes dois modelos pode ser orientado para os *inputs* ou para os *outputs*. O primeiro caso ocorre quando o objetivo é reduzir os *inputs* mantendo constantes os *outputs*. O segundo caso verifica-se quando se pretende aumentar os *outputs* mantendo constantes os *inputs*. Com base no tipo de retorno de escala e no tipo de orientação surgem quatro modelos como se pode observar através do esquema apresentado na figura 3.1.

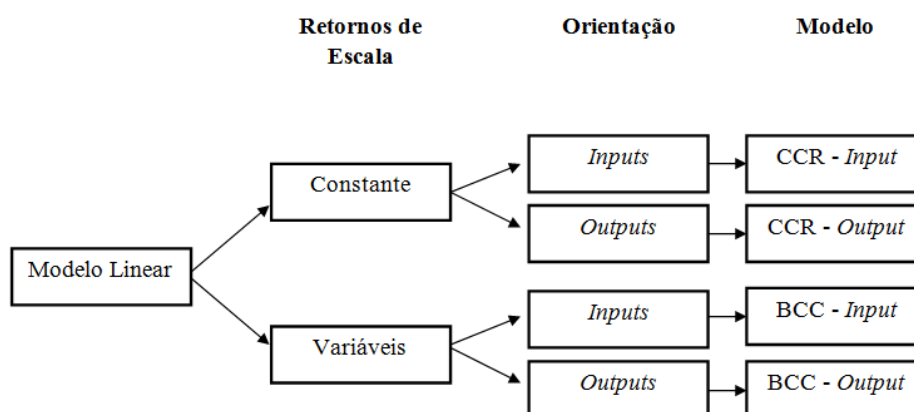


Figura 3.1 - Classificação dos modelos pelos retornos de escala e orientação

Fonte: Charnes, Cooper, Lewin, Seiford (1997) *apud* Casa Nova e Santos (2008:141)²

Na secção 3.2, apresenta-se o modelo CCR com orientação para *inputs* e para *outputs*. Na secção 3.3, apresenta-se o modelo BCC com essas duas orientações. Na secção 3.4, referem-se as principais diferenças entre os dois modelos, CCR e BCC. Por último, na secção 3.5, serão referidas algumas vantagens e desvantagens associadas a estes dois modelos.

² Charnes, A., Cooper, W.W., Lewin, A.Y., Seiford, L.W. (1997) *Data Envelopment Analysis: theory, methodology, and applications*. Massachusetts: Kluwer

3.2. Modelo CCR

Como foi referido anteriormente, o modelo CCR foi proposto por Charnes, Cooper e Rhodes (1978) e utiliza retornos de escala constantes, isto é, foi concebido sob a hipótese da proporcionalidade entre os *inputs* e os *outputs*. Isto significa que para uma variação dos *inputs* resulta uma variação proporcional nos *outputs*. O modelo CCR baseia-se na programação linear e, como também já foi referido, pode ser orientado para *inputs* ou para *outputs*. Nas duas subsecções que se seguem apresentam-se os modelos CCR orientado para *inputs* e para *outputs*, respetivamente.

3.2.1. Modelo CCR orientado para os *inputs*

O modelo CCR com orientação para *inputs* tem como objetivo reduzir os *inputs* mantendo constantes os *outputs*. Neste modelo, a eficiência de cada DMU é determinada através da otimização do quociente entre a soma ponderada dos *outputs* e a soma ponderada dos *inputs*.

Para definir este modelo, considere-se que existem n DMUs para avaliação e que a DMU_o é a DMU em análise. Considere-se ainda que para cada DMU_j, com $j = 1, \dots, n$, são conhecidas a quantidade x_{ij} de *input* i , com $i = 1, \dots, m$, e a quantidade y_{rj} de *output* r com $r = 1, \dots, s$. Assume-se que $x_{ij} \geq 0$ e $y_{rj} \geq 0$, para todo i, r, j , e que cada DMU tem pelo menos um *input* e um *output* com valores positivos. Designando por v_i , com $i = 1, \dots, m$, e u_r , com $r = 1, \dots, s$, as variáveis de decisão que representam os pesos associados aos *inputs* e aos *outputs*, respetivamente, o modelo CCR orientado para *inputs*, é dado por:

$$\max e_o = \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{ro}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{io}} \quad (3.1.)$$

$$s. a. \quad \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}} \leq 1 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.2)$$

$$u_r \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.3)$$

$$v_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.4)$$

Na função objetivo (3.1), e_o designa o valor da eficiência da DMU_o , isto é, da DMU em análise. Esta função maximiza o quociente entre a soma ponderada dos *outputs* e a soma ponderada dos *inputs* da DMU_o . As restrições (3.2) garantem que o quociente entre a soma ponderada dos *outputs* e a soma ponderada dos *inputs* não excede o valor 1 para qualquer DMU. As restrições (3.3) e (3.4) indicam que as variáveis de decisão, isto é, os pesos, assumem valores não negativos. Devido às restrições (3.2), o valor da solução ótima do modelo anterior é, quanto muito, igual a 1. Se $e_o^* = 1$, a DMU_o , diz-se eficiente, e diz-se ineficiente se $e_o^* < 1$. É óbvio que, neste último caso, quanto menor for o valor de e_o^* maior é a ineficiência da DMU_o .

O modelo (3.1) – (3.4) é um modelo de programação fracionária que pode ser transformado num modelo de programação linear. Basta, para o efeito, obrigar a que o denominador seja igual a um valor constante, por exemplo, 1. Então o modelo CCR orientado para *inputs* pode ser escrito na seguinte forma:

$$\max e_o = \sum_{r=1}^s u_r y_{ro} \quad (3.5)$$

$$s. a. \quad \sum_{i=1}^m v_i x_{io} = 1 \quad (3.6)$$

$$\sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.7)$$

$$u_r \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.8)$$

$$v_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.9)$$

O modelo (3.5) – (3.9) é conhecido como modelo dos multiplicadores com orientação para *inputs*. Como já foi referido, a designação de orientação para *inputs* é devida ao facto de a eficiência ser atingida com a redução dos *inputs*, mantendo constantes os *outputs*. Isto pode ser melhor observado a partir do dual deste modelo, que é conhecido por modelo do envelope com orientação para *inputs*. Associando uma variável real h_o à restrição (3.6) e as variáveis não negativas λ_j , com $j = 1, \dots, n$, às restrições (3.7), o dual do modelo (3.5) – (3.9) é dado por:

$$\min h_o \quad (3.10)$$

$$s. a. \quad h_o x_{io} - \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.11)$$

$$-y_{ro} + \sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.12)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.13)$$

Da teoria da dualidade, sabe-se que os valores das soluções ótimas dos dois modelos anteriores são iguais. Então o valor h_o^* é a eficiência da DMU_o e indica o valor pelo qual terão de ser multiplicados os *inputs* de uma DMU ineficiente para que a mesma se torne eficiente, provocando assim uma redução no valor dos *inputs*. As restrições (3.11) indicam que a redução em cada um dos *inputs* não ultrapassa a fronteira definida pelas $DMUs$ eficientes. As restrições (3.12) garantem, por sua vez, que essa redução não altera o atual nível dos *outputs* da DMU em análise.

De referir que o modelo anterior tem uma solução admissível, $\lambda_o = 1$ e $\lambda_j = 0$, para $j \neq o$, de valor $h_o = 1$. Então o valor da solução ótima do modelo, h_o^* , é menor ou igual a 1. Por outro lado, se os dados dos *inputs* e *outputs* são positivos, resulta de (3.12) que $\lambda_j > 0$ e por (3.11) tem-se que $h_o > 0$. Consequentemente tem-se $0 < h_o^* \leq 1$.

Os valores das variáveis λ_j ($j=1, \dots, n$) permitem identificar as $DMUs$ que são referência (*benchmarks*) para uma determinada DMU_o que seja ineficiente. Quanto maior for o valor de λ_j maior é a importância da correspondente DMU_j para tornar DMU_o eficiente. Um valor de λ_j igual a zero significa que a correspondente DMU_j não é referência para a DMU_o em análise. É evidente que no caso de uma DMU_o ser eficiente, $\lambda_o = 1$, os restantes valores de λ_j são iguais a zero.

Para uma melhor compreensão do exposto anteriormente apresenta-se de seguida um exemplo de aplicação do modelo CCR orientado para os *inputs*.

Exemplo 3.1: Considere-se um conjunto de seis instituições bancárias ($DMUs$) com dois *inputs* que são, o número de empregados e o ativo, e um *output* que é resultado líquido. A informação relativa aos *inputs* e ao *output* de cada DMU consta na tabela 3.1.

Tabela 3.1 - Dados relativos aos *inputs* e *outputs* de seis instituições bancárias.

DMUs Instituições Bancárias	<i>Input 1</i>	<i>Input 2</i>	<i>Output</i>
	Nº Empregados	Ativo (×1000€)	Resultado Líquido (×1000€)
A	80	60	60
B	20	100	160
C	40	80	180
D	20	40	50
E	60	80	200
F	60	140	180

Fonte: Elaboração Própria

Com base na informação apresentada na tabela 3.1, o modelo CCR na forma dos multiplicadores, com orientação para *inputs*, que permite determinar a eficiência da DMU_A é dado por:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & e_A = 60u \\
 \text{s. a.} \quad & 80v_1 + 60v_2 = 1 \\
 & 60u - 80v_1 - 60v_2 \leq 0 \\
 & 160u - 20v_1 - 100v_2 \leq 0 \\
 & 180u - 40v_1 - 80v_2 \leq 0 \\
 & 50u - 20v_1 - 40v_2 \leq 0 \\
 & 200u - 60v_1 - 80v_2 \leq 0 \\
 & 180u - 60v_1 - 140v_2 \leq 0 \\
 & u, v_1, v_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

Resolvendo este problema obtém-se a solução ótima, dada por $v_1^* = 0$, $v_2^* = 0,016667$ e $u^* = 0,006667$, de valor $e_A^* = 0,4$. Portanto, o valor da eficiência da DMU_A é 0,4 ou, em termos percentuais, 40%.

A eficiência da DMU_A pode também ser obtida através da resolução do dual do problema anterior, dado por:

$$\begin{aligned}
& \min h_A \\
& \text{s. a.} \quad 80h_A - 80\lambda_A - 20\lambda_B - 40\lambda_C - 20\lambda_D - 60\lambda_E - 60\lambda_F \geq 0 \\
& \quad 60h_A - 60\lambda_A - 100\lambda_B - 80\lambda_C - 40\lambda_D - 80\lambda_E - 140\lambda_F \geq 0 \\
& \quad -60 + 60\lambda_A + 160\lambda_B + 180\lambda_C + 50\lambda_D + 200\lambda_E + 180\lambda_F \geq 0 \\
& \quad \lambda_A, \lambda_B, \lambda_C, \lambda_D, \lambda_E, \lambda_F \geq 0
\end{aligned}$$

A solução ótima deste problema, de valor $h_A^* = 0,4$, é dada por $\lambda_E^* = 0,3$ e $\lambda_A^* = \lambda_B^* = \lambda_C^* = \lambda_D^* = \lambda_F^* = 0$. Então, tem-se que a DMU_A é ineficiente e tem como referência a DMU_E.

A aplicação do modelo dos multiplicadores e do modelo do envelope para cada uma das restantes DMUs permite assim obter o nível de eficiência, os pesos e os *benchmarks* para cada DMU. Contudo, em vez de resolver esses problemas, optou-se por utilizar um *software* específico para a DEA, mais especificamente o SIAD (Sistema Integrado de Apoio à Decisão), que permite obter essa informação de um modo mais simples. Tal informação consta da tabela 3.2.

Tabela 3.2 - Resultados obtidos pelo modelo CCR orientado a *inputs* para os dados do exemplo 3.1

DMUs	Pesos			Eficiência (%)	Benchmarks
	Input 1 (v_1)	Input 2 (v_2)	Output (u)		λ_k
A	0,000000	0,016667	0,006667	40%	$\lambda_E = 0,3$
B	0,013542	0,007292	0,006250	100%	$\lambda_B = 1$
C	0,005556	0,009722	0,005556	100%	$\lambda_C = 1$
D	0,024074	0,012963	0,011111	55,55%	$\lambda_C = 0,2778$
E	0,000000	0,012500	0,005000	100%	$\lambda_E = 1$
F	0,007386	0,003977	0,003409	61,36%	$\lambda_B = 0,2045$ $\lambda_C = 0,8182$

Fonte: Elaboração Própria

Nesta tabela, na primeira coluna, indicam-se as DMUs; nas três seguintes referem-se os valores obtidos para os pesos associados aos *inputs* e ao *output* de cada DMU; na quinta coluna, indica-se o valor da eficiência obtido para cada DMU e, na última, indica-se o

valor das variáveis duais λ_j ($j = A, \dots, F$) que, como já se referiu, identificam as DMUs que são referência (*Benchmarks*) para as DMUs ineficientes. Relativamente a esta coluna, as variáveis com valores iguais a zero são obviamente omitidas.

Os resultados obtidos mostram que as DMUs B, C e E são eficientes enquanto as DMUs A, D e F são ineficientes. Os valores da última coluna indicam que a DMU_E é a referência para a DMU_A e que a DMU_C é a referência para a DMU_D. No caso da DMU_F existem duas DMUs que são referência, a B e a C. No entanto, uma vez que $\lambda_C > \lambda_B$, a DMU_C revela-se uma referência mais importante do que a DMU_B para que a DMU_F se torne eficiente.

A análise realizada anteriormente aos valores de λ , para o exemplo 3.1, pode também ser feita em termos geométricos. Para tal considere-se a figura 3.2, onde o eixo horizontal representa o quociente entre o *input* 1 e o *output* e o eixo vertical representa o quociente entre o *input* 2 e o *output*. No apêndice A são apresentados os cálculos realizados para a determinação dos pontos correspondentes às seis DMUs sob avaliação.

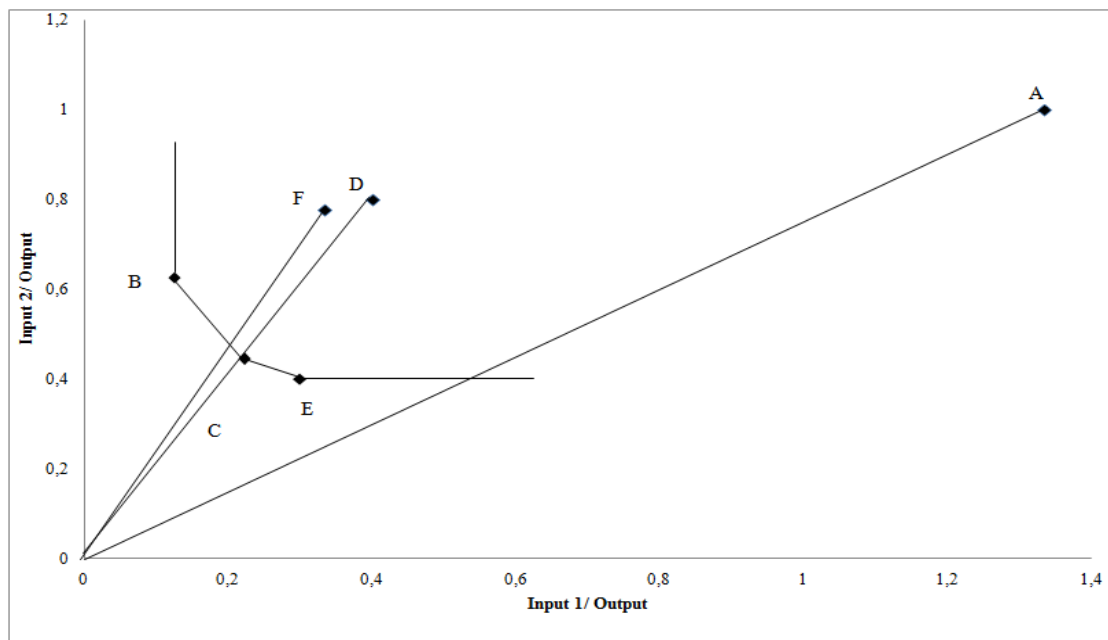


Figura 3.2 – Alvos e *benchmarks* para o exemplo 3.1.

Fonte: Elaboração Própria

Os segmentos de reta que unem a origem do gráfico aos pontos correspondentes à DMUs ineficientes permitem identificar os alvos, dados pelos pontos de intersecção

destes segmentos de reta com a fronteira de eficiência, que neste caso é definida pelas DMUs B, C e E.

Da observação do gráfico, verifica-se que, para a DMU F, o alvo encontra-se no segmento de reta definido pelas DMUs B e C, pelo que estas DMUs são os seus *benchmarks*. No entanto, a DMU_C constitui um *benchmark* mais importante do que a DMU_B pelo facto de se encontrar mais próxima do alvo, confirmando assim a análise algébrica realizada anteriormente. De modo idêntico, se pode confirmar graficamente que para os casos das DMUs A e D os seus *benchmarks* são as DMUs E e C, respetivamente.

3.2.2. Modelo CCR orientado para os *outputs*

O modelo CCR orientado para *outputs* tem como objetivo maximizar os *outputs*, mantendo inalterável os *inputs*. A forma fracionária deste modelo é obtida trocando o numerador pelo denominador na função objetivo e nas restrições do modelo CCR fracionário orientado para *inputs*. Usando a notação utilizada para este último modelo, a forma fracionária do modelo CCR orientado para *outputs* é dada por:

$$\min e_o = \frac{\sum_{i=1}^m v_i x_{io}}{\sum_{r=1}^s u_r y_{ro}} \quad (3.14)$$

$$s. a. \quad \frac{\sum_{i=1}^m v_i x_{io}}{\sum_{r=1}^s u_r y_{ro}} \geq 1 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.15)$$

$$u_r \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.16)$$

$$v_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.17)$$

Neste modelo, a função objetivo (3.14) indica que se pretende minimizar o quociente entre a soma ponderada dos *inputs* e a soma ponderada dos *outputs* da DMU em análise, considerando as restrições de (3.15) que indicam que esse quociente é não inferior a 1 para cada DMU, e as restrições (3.16) e (3.17) que indicam a natureza das variáveis de decisão.

Recorrendo ao tipo de linearização usado no caso do modelo CCR orientado para os *inputs*, o modelo (3.14) – (3.17) pode também ser linearizado dando origem ao seguinte modelo de programação linear:

$$\min e_o = \sum_{i=1}^m v_i x_{io} \quad (3.18)$$

$$s. a. \quad \sum_{r=1}^s u_r y_{ro} = 1 \quad (3.19)$$

$$\sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.20)$$

$$u_r \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.21)$$

$$v_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.22)$$

Associando uma variável real h_o à restrição (3.19) e as variáveis não negativas λ_j , com $j = 1, \dots, n$, às restrições (3.20), o dual do modelo (3.18) – (3.22) é dado por:

$$\max h_o \quad (3.23)$$

$$s. a. \quad x_{io} - \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.24)$$

$$h_o y_{ro} - \sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.25)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.26)$$

Neste modelo, o valor da função objetivo h_o representa o valor pelo qual devem ser multiplicados os *outputs* mantendo constantes os *inputs*, por forma a que a DMU_o se torne eficiente. Então h_o^* é maior ou igual do que 1 pelo que o valor da eficiência obtido pelo modelo CCR orientado para *outputs* é dado por $1/h_o^*$.

Exemplo 3.2: Considerando os dados do exemplo 3.1 e utilizando o modelo CCR orientado para *outputs*, obtêm-se os resultados apresentados na tabela 3.3, cuja estrutura é a mesma da tabela 3.2.

Tabela 3.3 - Resultados obtidos pelo modelo CCR orientado a *outputs* para os dados do exemplo 3.1

DMUs	Pesos			Eficiência (%)	Benchmarks
	Input 1 (v_1)	Input 2 (v_2)	Output (u)		λ_k
A	0,000000	0,041667	0,016667	40%	$\lambda_E = 0,75$
B	0,013542	0,007292	0,006250	100%	$\lambda_B = 1$
C	0,012037	0,006481	0,005556	100%	$\lambda_C = 1$
D	0,020000	0,030500	0,020000	55,55%	$\lambda_C = 0,5$
E	0,000000	0,012500	0,005000	100%	$\lambda_E = 1$
F	0,012037	0,006481	0,005556	61,36%	$\lambda_B = 0,3333$ $\lambda_C = 1,3333$

Fonte: Elaboração Própria

Comparando os resultados apresentados nas tabelas 3.2 e 3.3 verifica-se que os valores de eficiência obtidos pelo modelo CCR orientado para os *outputs* são iguais aos obtidos pelo modelo CCR orientado para os *inputs*. Relativamente aos valores da última coluna verifica-se também que as DMUs de referência para as DMUs ineficientes são as mesmas que as obtidas pelo modelo CCR orientado para os *inputs*. Contudo, os valores de λ_j para a DMU_j são diferentes nos dois modelos.

De facto, é possível mostrar que as duas orientações (*input* e *output*) do modelo CCR permitem obter o mesmo valor de eficiência, embora com diferentes valores para os pesos e para os *benchmarks* (Cooper, Seiford e Tone (2007)). Estes autores mostram ainda como relacionar as soluções ótimas, e correspondentes valores ótimos, do modelo CCR orientado para *outputs* com as do modelo CRR orientado para *inputs*, quer na forma dos multiplicadores quer na forma do envelope. Assim, a solução ótima para o modelo CCR orientado para os *outputs* na forma de multiplicadores (respetivamente, na forma do envelope) pode ser obtida diretamente a partir da solução ótima para o modelo CCR orientado para os *inputs* na forma de multiplicadores (respetivamente, na forma do envelope). Obviamente que o recíproco também se verifica.

3.3. Modelo BCC

O modelo do BCC, proposto por Banker, Charners e Cooper (1984), como se referiu anteriormente, considera retornos variáveis de escala, isto é, substitui o axioma da proporcionalidade entre os *inputs* e *outputs* pelo axioma da convexidade. Deste modo, o modelo permite que as DMUs que trabalham com níveis de *inputs* baixos tenham retornos crescentes de escala e as que possuam níveis elevados tenham retornos decrescente de escala.

Na forma do envelope, o modelo BCC obtém-se do modelo CCR introduzindo neste a condição $\sum_{j=1}^n \lambda_j$, que conjuntamente com $\lambda_j \geq 0$, para $j = 1, \dots, n$, definem matematicamente a condição de convexidade. Nas subsecções seguintes apresenta-se o modelo BCC com orientação para *inputs* e para *outputs*.

3.3.1. Modelo BCC orientado para *inputs*

Considerando de novo a notação usada no modelo CCR quanto aos parâmetros e às variáveis de decisão, e designando-se por h_{oB} o valor da função objetivo, o modelo BCC na forma de envelope, com orientação para *inputs*, é dado pelo seguinte modelo de programação linear:

$$\min \quad h_o \quad (3.26)$$

$$s. a. \quad h_o x_{io} - \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.28)$$

$$-y_{ro} + \sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.29)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \quad (3.30)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.31)$$

O dual deste modelo, que permite obter o modelo BCC com orientação para *inputs*, na forma dos multiplicadores, é dado por:

$$\max \quad e_o = \sum_{r=1}^s u_r y_{ro} + u_0 \quad (3.32)$$

$$s. a. \quad \sum_{i=1}^m v_i x_{io} = 1 \quad (3.33)$$

$$-\sum_{i=1}^m v_i x_{ij} + \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} + u_0 \leq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.34)$$

$$v_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.35)$$

$$u_r \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.36)$$

$$u_0 \in \mathbb{R} \quad (3.37)$$

O modelo anterior difere do modelo CCR orientado para *inputs*, na forma de envelope, pelo facto de incluir uma variável livre u_0 na função objetivo (3.32), nas restrições (3.34), e nas restrições (3.37) que definem essa variável, que é a variável dual associada à restrição (3.30) do modelo na forma de envelope. O valor desta variável (u_0) indica a variação ou fator de escala.

A interpretação geométrica dos fatores de escala permite uma melhor compreensão da relação entre os valores de u_0 e a variação de escala, como se pode observar através da figura 3.3.

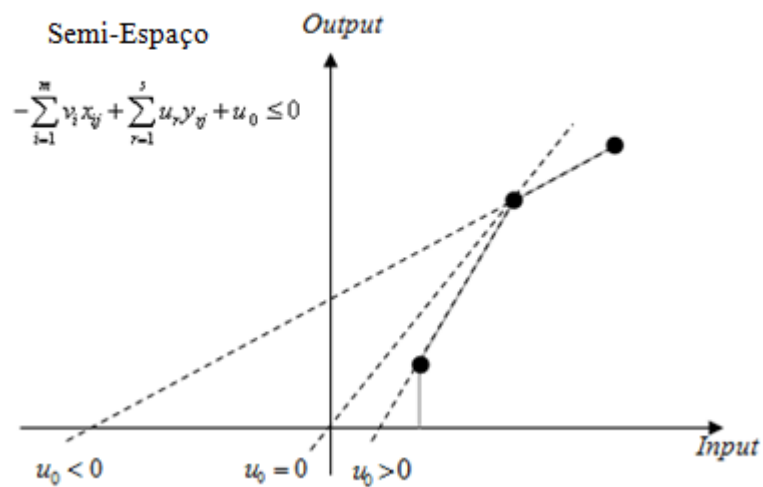


Figura 3.3 - Interpretação geométrica dos fatores de escala do modelo BCC com orientação para *inputs*

Fonte: Adaptado Soares e Mello, Meza, Gomes e Neto (2005:2533)

De acordo com a figura, os fatores de escala são determinados pela intersecção dos hiperplanos suporte das faces da fronteira de eficiência com o eixo *input*. Deste modo u_0 pode assumir valores positivos ou negativos ou ser igual a zero. Um valor positivo indica um retorno crescente de escala, isto é, mediante um aumento nos *inputs* os *outputs* operam a níveis superiores. Um valor negativo indica um retorno decrescente de escala, isto é, mediante um aumento nos *inputs* os *outputs* operam a níveis inferiores. Um valor nulo indica um retorno constante de escala, isto é, os *inputs* e os *outputs* operam de forma proporcional.

O modelo definido por (3.32) – (3.37) corresponde à linearização do modelo BCC orientado para *inputs*, expresso na forma fracionária por:

$$\max e_o = \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{ro} + u_0}{\sum_{i=1}^m v_i x_{io}} \quad (3.38)$$

$$s. a. \quad \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj} + u_0}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}} \leq 1 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.39)$$

$$u_r \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.40)$$

$$v_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.41)$$

$$u_0 \in \mathbb{R} \quad (3.42)$$

Exemplo 3.3: Considerem-se novamente os dados do exemplo 3.1 e utilize-se o modelo BCC orientado para *inputs*, para determinar a eficiência das seis DMUs referidas nesse exemplo.

O modelo BCC, na forma dos multiplicadores, com orientação para *inputs*, para cálculo da eficiência da DMU_A é dado por:

$$\max e_A = 60u + u_0$$

$$s. a. \quad 80v_1 + 60v_2 = 1$$

$$60u + u_0 - 80v_1 - 60v_2 \leq 0$$

$$160u + u_0 - 20v_1 - 100v_2 \leq 0$$

$$\begin{aligned}
180u + u_0 - 40v_1 - 80v_2 &\leq 0 \\
50u + u_0 - 20v_1 - 40v_2 &\leq 0 \\
200u + u_0 - 60v_1 - 80v_2 &\leq 0 \\
180u + u_0 - 60v_1 - 140v_2 &\leq 0 \\
u, v_1, v_2 &\geq 0, u_0 \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

A solução ótima deste problema é dada por $v_1^* = 0,000000$, $v_2^* = 0,016667$, $u^* = 0,004444$ e $u_0^* = 0,444444$, sendo $e_A^* = 0,7111$ o respectivo valor ótimo. Portanto, a DMU_A é ineficiente e apresenta retorno crescente de escala.

O dual do problema anterior é dado por:

$$\begin{aligned}
\min \quad & h_A \\
\text{s. a.} \quad & 80h_A - 80\lambda_A - 20\lambda_B - 40\lambda_C - 20\lambda_D - 60\lambda_E - 60\lambda_F \geq 0 \\
& 60h_A - 60\lambda_A - 100\lambda_B - 80\lambda_C - 40\lambda_D - 80\lambda_E - 140\lambda_F \geq 0 \\
& -60 + 60\lambda_A + 160\lambda_B + 180\lambda_C + 50\lambda_D + 200\lambda_E + 180\lambda_F \geq 0 \\
& \lambda_A + \lambda_B + \lambda_C + \lambda_D + \lambda_E + \lambda_F = 1 \\
& \lambda_A, \lambda_B, \lambda_C, \lambda_D, \lambda_E, \lambda_F \geq 0
\end{aligned}$$

A solução ótima deste problema, de valor $h_A^* = 0,7111$, é dada por $\lambda_D^* = 0,9333$, $\lambda_E^* = 0,0667$ e $\lambda_A^* = \lambda_B^* = \lambda_C^* = \lambda_F^* = 0$. Então a DMU_A, que como já se referiu anteriormente, é ineficiente, tem como referência as DMUs D e E.

A informação obtida para a DMU_A pode, de modo idêntico, ser obtida para as restantes DMUs. Na tabela 3.4, cuja estrutura é a mesma das tabelas 3.2 e 3.3 com exceção da coluna 5 relativa aos retornos de escala, apresenta-se essa informação para todas as DMUs.

Analisando os resultados apresentados na tabela 3.4 verifica-se que, por aplicação do modelo BCC orientado para *inputs* aos dados do exemplo 3.1, as DMUs B, C, D e E são eficientes enquanto as DMUs A e F são ineficientes. Relativamente aos valores apresentados na coluna 5, verifica-se que as DMUs A e D têm retornos crescentes de escala enquanto a DMU F tem retorno decrescente de escala e as DMUs B, C e E têm

retornos constantes de escala. Quanto aos valores apresentados na última coluna, verifica-se que as DMUs D e E são, por ordem decrescente de importância, as DMUs de referência para a DMU_A. Do mesmo modo, as DMUs B e E são, com igual importância, as DMUs de referências para a DMU_F.

Tabela 3.4 - Resultados obtidos pelo modelo BCC orientado a *inputs* para os dados do exemplo 3.1

DMUs	Pesos			Retornos de escala	Eficiência (%)	Benchmarks
	<i>Input 1</i> (v_1)	<i>Input 2</i> (v_2)	<i>Output</i> (u)	u_0		λ_k
A	0,000000	0,016667	0,004444	0,444444	71,11%	$\lambda_D = 0,9333$ $\lambda_E = 0,0667$
B	0,013542	0,007292	0,006250	0,000000	100%	$\lambda_B = 1$
C	0,005556	0,009722	0,005556	0,000000	100%	$\lambda_C = 1$
D	0,007692	0,021154	0,007692	0,615385	100%	$\lambda_D = 1$
E	0,000000	0,012500	0,005000	0,000000	100%	$\lambda_E = 1$
F	0,016667	0,000000	0,016667	-2,333333	66,67%	$\lambda_B = 0,5$ $\lambda_E = 0,5$

Fonte: Elaboração Própria

Comparando os valores de eficiência apresentados na tabela anterior com os apresentados na tabela 3.2, verifica-se o valor da eficiência obtido pelo modelo CCR orientado para *inputs* é inferior ou igual ao valor da eficiência obtido pelo modelo BCC orientado para *inputs*. De facto, tal verifica-se sempre, uma vez que, na forma do envelope, o conjunto das soluções admissíveis do modelo BCC orientado para *inputs*, é um subconjunto do conjunto das soluções admissíveis do modelo CCR orientado para *inputs*, pelo que $h_o^* \leq h_{oB}^*$. Portanto, a medida de eficiência obtida pelas DMUs que têm retornos variáveis de escala é superior ou igual à obtida pelas que têm retornos constantes de escala.

3.3.2. Modelo BCC orientado para os *outputs*

À semelhança do que foi feito para o caso do modelo BCC orientados para *inputs*, também a forma de envelope do modelo BCC orientado para *outputs* pode ser obtida a

partir da forma envelope do modelo CCR orientado para *outputs* por inclusão das condições de convexidade nesse modelo. Obtém-se então o seguinte modelo:

$$\max h_o \quad (3.43)$$

$$s. a. \quad x_{io} - \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.44)$$

$$-h_o y_{ro} + \sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.45)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \quad (3.46)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.47)$$

O dual deste modelo, que permite obter o modelo BCC com orientação para *outputs* na forma dos multiplicadores, é dado por:

$$\min e_o = \sum_{i=1}^m v_i x_{io} + v_0 \quad (3.48)$$

$$s. a. \quad \sum_{r=1}^s u_r y_{ro} = 1 \quad (3.49)$$

$$-\sum_{i=1}^m v_i x_{ij} + \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - v_0 \leq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.50)$$

$$v_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.51)$$

$$u_r \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.52)$$

$$v_0 \in \mathbb{R} \quad (3.53)$$

Neste modelo, a variável livre v_0 é a variável dual associada à restrição (3.46) que indica o fator de escala, à semelhança, do que acontece com a variável u_0 no modelo BCC orientado para *inputs*. No entanto, a relação entre o sinal de v_0 e a variação de escala é, de certo modo, contrária à do modelo BCC orientado para *inputs* como se pode observar através da figura 3.4, onde se apresenta a interpretação geométrica dos fatores de escala para o modelo BCC com orientação para *outputs*.

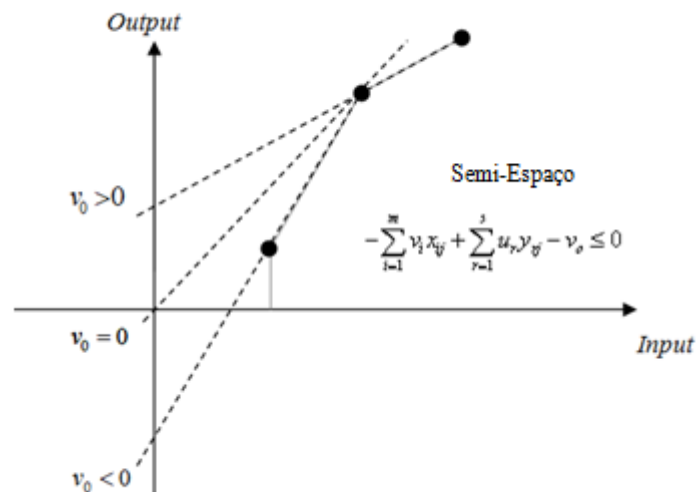


Figura 3.4 - Interpretação Geométrica dos retornos variáveis de escala do modelo BCC com orientação para *outputs*.

Fonte: Adaptado Soares e Mello [et al.] (2005:2533)

De acordo com a figura, os fatores de escala são determinados pela intersecção dos hiperplanos suporte das faces da fronteira de eficiência com o eixo *output*. Deste modo, v_0 pode assumir valores positivos ou negativos ou ser igual a zero. Um valor positivo indica um retorno decrescente de escala, isto é, um aumento nos *outputs* implica que os *inputs* operem a níveis superiores. Um valor negativo indica um retorno crescente de escala, isto é, um aumento nos *outputs* implica que os *inputs* operem a níveis inferiores. Um valor nulo indica um retorno constante de escala, isto é, os *inputs* e os *outputs* operam de forma proporcional.

O modelo definido por (3.48) – (3.53) corresponde à linearização do modelo BCC orientado para *outputs*, expresso na forma fracionária por:

$$\min e_o = \frac{\sum_{i=1}^m v_i x_{io} + v_0}{\sum_{r=1}^s u_r y_{ro}} \quad (3.54)$$

$$s. a. \quad \frac{\sum_{i=1}^m v_i x_{io} + v_0}{\sum_{r=1}^s u_r y_{ro}} \geq 1 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.55)$$

$$u_r \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (3.56)$$

$$v_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.57)$$

$$v_0 \in \mathbb{R} \quad (3.58)$$

Exemplo 3.4: Considerando de novo os dados do exemplo 3.1 e utilizando o modelo BCC orientado para *outputs*, obtém-se os resultados apresentados na tabela 3.5, cuja estrutura é a mesma da tabela 3.4.

Tabela 3.5 – Resultados obtidos pelo modelo BCC orientado a *outputs* para os dados do exemplo 3.1

DMUs	Pesos			Retornos de escala	Eficiência (%)	Benchmarks
	Input 1 (v_1)	Input 2 (v_2)	Output (u)	u_0		λ_k
A	0,000000	0,062500	0,016667	-1,666667	48%	$\lambda_D = 0,5$ $\lambda_E = 0,5$
B	0,013542	0,007292	0,006250	0,000000	100%	$\lambda_B = 1$
C	0,012037	0,006481	0,005556	0,000000	100%	$\lambda_C = 1$
D	0,056667	0,036667	0,020000	-1,600000	100%	$\lambda_D = 1$
E	0,000000	0,018750	0,005000	-0,500000	100%	$\lambda_E = 1$
F	0,005556	0,000000	0,005556	-0,777778	90%	$\lambda_E = 1$

Fonte: Elaboração Própria

A observação dos resultados indica que as DMUS B, C, D e E são eficientes enquanto as DMUs A e F são ineficientes. Relativamente aos retornos de escala, verifica-se que as DMUs A, D, E e F têm retorno crescente de escala e as DMUs B e C têm retorno constante de escala, não existindo DMUs com retorno decrescente de escala. Quanto aos valores apresentados na última coluna, verifica-se que as DMUs D e E são, com igual importância, as DMUs de referência para a DMU_A, enquanto a DMU_E é a referência da DMU_F.

Como se referiu anteriormente, o valor de eficiência obtido pelo modelo CCR é o mesmo quer seja orientado para *inputs* quer seja orientado para os *outputs*. Os resultados das tabelas 3.4 e 3.5, para este item, mostram que o mesmo não se verifica com o modelo BCC, no caso em que as DMUs são ineficientes, como seria de esperar.

3.4. Vantagens e Desvantagens da Metodologia DEA

Todos os modelos apresentam as suas vantagens e desvantagens e na metodologia DEA isso não é exceção. De seguida apresentam-se algumas das vantagens e desvantagens associadas aos modelos clássicos da metodologia DEA.

Como vantagens podem referir-se as seguintes: fácil interpretação dos modelos; aspeto financeiro não é relevante; o conhecimento dos *inputs* e dos *outputs* é suficiente para calcular o valor da eficiência das DMUs e os *benchmarks* para unidades ineficientes; flexibilidade na determinação dos pesos.

Em relação às desvantagens há a destacar duas: a falta de poder de discriminação entre as unidades eficientes e a distribuição não realista dos pesos. O primeiro problema ocorre quando o número de DMUs sob avaliação não é muito superior ao número total de *inputs* e *outputs*. Neste caso, os modelos clássicos de DEA permitem identificar muitas DMUs como eficientes. O segundo problema ocorre quando a eficiência de algumas DMUs é atingida à custa de valores extremamente elevados para pesos associados a um *output* e/ou de valores extremamente baixos para pesos associados a um *input*. Estes dois problemas estão intimamente relacionados na medida em que, muitas vezes, ocorrem simultaneamente.

Para contornar estes problemas várias técnicas têm sido propostas como se refere em Ghasemi, Ignatus and Emouznejad (2014), onde se apresenta uma interessante revisão bibliográfica sobre essas técnicas. Uma dessas técnicas consiste na utilização da programação linear multiobjectivo e será abordada no capítulo 5. Antes, no capítulo 4, apresentam-se os principais conceitos sobre a programação linear multiobjectivo para uma melhor compreensão do exposto no capítulo seguinte.

4. Programação Multiobjectivo

4.1. Introdução

Muitos problemas do mundo real envolvem a tomada de decisão sobre múltiplos objetivos ou critérios, em muitos casos conflituosos. A tomada de decisão multicritério diz respeito a métodos e procedimentos pelos quais múltiplos critérios podem ser incorporados num processo analítico. A decisão multicritério envolve dois ramos distintos:

- ✓ Análise de decisão multiatributo
- ✓ Otimização ou programação multiobjectivo.

O primeiro caso refere-se a métodos de seleção, ordenação ou categorização de um número finito (pequeno) de alternativas, explicitamente conhecidas. O segundo refere-se a problemas nos quais as alternativas são definidas implicitamente por um conjunto de restrições (Clímaco (2003)). No que se segue, abordar-se-ão apenas problemas do segundo tipo, mais especificamente, o caso particular de problemas de programação linear multiobjectivo. Assim, na secção 4.2, apresentam-se as definições e os conceitos básicos relativos à programação linear multiobjectivo. Na secção 4.3, são referidos alguns métodos para resolver problemas de programação linear multiobjectivo. Finalmente, nas secções 4.4 e 4.5, serão descritos, de forma breve, dois desses métodos que serão utilizados no capítulo 5, o método das ponderações e o método de programação por metas, respetivamente.

4.2. Definições e conceitos básicos

Um problema de programação linear multiobjectivo (PLMO) consiste na otimização de várias funções objetivo lineares sujeito a um conjunto de restrições lineares. A diferença entre um problema de programação linear multiobjectivo e um problema programação linear reside no número de funções objetivo incluídas em cada um dos problemas, que é de duas ou mais no primeiro e apenas de uma no segundo. A forma geral de um problema de PLMO com p objetivos, n variáveis de decisão e m restrições pode ser escrita do seguinte modo:

$$\max Z(x_1, \dots, x_n) = [z_1(x_1, \dots, x_n), z_2(x_1, \dots, x_n), \dots, z_p(x_1, \dots, x_n)] \quad (4.1)$$

$$s.a. (x_1, \dots, x_n) \in S \quad (4.2)$$

onde

$$S = \left\{ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m ; x \geq 0 \right\} \quad (4.3)$$

Note-se que as p funções objetivo apenas são listadas em (4.1), não existindo qualquer relação entre as mesmas.

Nos problemas de programação linear (PL) procura-se a solução ótima, isto é, uma solução admissível que conduz ao melhor valor da função objetivo, designado por valor ótimo. Esse valor é único, mesmo que existam soluções ótimas alternativas. Esse conceito não é aplicável em problemas de PLMO, uma vez que uma solução admissível que otimiza um objetivo não otimiza, em geral, os restantes.

Em vez de solução ótima, existe um conjunto de soluções alternativas, designadas por soluções eficientes, que são analisadas pelo decisor no processo de tomada de decisão, ao qual compete escolher a solução de melhor compromisso. Então, no contexto da PLMO, o conceito de solução ótima dá lugar ao conceito de solução eficiente, que desempenha um papel similar, mas menos limitativo, que o conceito de solução ótima em PL.

As soluções eficientes são também designadas na literatura por soluções não inferiores, soluções não dominadas ou soluções ótimas de Pareto. Contudo, a designação de soluções não dominadas é usualmente reservada ao espaço dos objetivos, enquanto as restantes são normalmente reportadas ao espaço das variáveis de decisão.

Uma solução admissível de um problema de PLMO diz-se uma solução eficiente se não existir outra solução admissível que forneça melhor valor relativamente a pelo menos um objetivo sem piorar algum dos restantes. Recorrendo à linguagem matemática, tem-se a seguinte definição de solução eficiente:

Definição 4.1 Uma solução $\bar{x} \in S$ diz-se uma solução eficiente do problema PLMO se não existe uma solução $y \in S$ tal que

$$z_k(y) \geq z_k(\bar{x}), \quad k = 1, \dots, p$$

$$e \quad z_k(y) > z_k(\bar{x}), \quad k \in \{1, \dots, p\}$$

No espaço dos objetivos, uma solução diz-se dominada se não existir uma outra que a domine, isto é, que tenha melhor valor em pelo menos um objetivo mantendo os restantes inalteráveis. Recorrendo novamente à linguagem matemática, tem-se a seguinte definição de solução não dominada:

Definição 4.2 Uma solução $\bar{z} \in Z$ em que $\bar{z} = (z_1(\bar{x}), \dots, z_p(\bar{x}))$ diz-se uma solução não dominada do problema PLMO se, e só se, \bar{x} é uma solução eficiente.

Das definições anteriores, resulta que uma solução não dominada é a imagem, no espaço dos objetivos, de uma solução eficiente e que uma solução eficiente é a imagem inversa, no espaço das variáveis de decisão, de uma solução não dominada.

4.3. Tipos de métodos de programação linear multiobjectivo

Existem vários métodos destinados à resolução de problema de otimização multiobjectivo, que têm sido objeto de uma classificação por parte de vários autores, como se refere em Clímaco et al. (2003). Uma dessas classificações, provavelmente a mais referida na literatura, foi primeiramente considerada por Cohon (1978), e é baseada no fluxo de informação e nos decisores que intervêm no processo de tomada de decisão.

Existem dois tipos de atores que intervêm na programação multiobjectivo: o analista e o decisor. O analista é aquele que gera as soluções eficientes do problema com base na informação que lhe é fornecida, e o decisor é o que recebe as soluções geradas pelo analista e escolhe aquela que entende ser a melhor solução. Relativamente ao decisor, este pode ser de dois tipos:

- ✓ Decisor único (pode ser um grupo de pessoas que representam os mesmos objetivos, por exemplo, um conselho de administração), onde existe uma escala de preferência.
- ✓ Decisor múltiplo, que representam múltiplos objetivos, por exemplo, conselho de concertação social, onde existem várias escalas de preferências.

Outro fator no qual se baseia a referida classificação é a forma como o fluxo de informação é direcionado. Existem assim dois sentidos:

- ✓ *Bottom-up* – que ocorre de baixo para cima, logo do analista para decisor; ou
- ✓ *Top-down* – que ocorre de cima para baixo, portanto partirá do decisor para o analista.

No primeiro caso, sentido *bottom-up*, o analista apenas gera as soluções eficientes e reporta ao decisor a escolha da melhor solução de compromisso. Em relação ao sentido *top-down*, o decisor informa as suas preferências ao analista que as inclui no método permitindo-lhe identificar a melhor solução de compromisso.

Com base no exposto anteriormente, diversos autores têm proposto uma classificação dos métodos para problemas de otimização com múltiplos objetivos. Cohon (1978) apresentou uma classificação onde os métodos são primeiramente divididos em duas categorias em função do tipo de decisores envolvidos: métodos de decisor múltiplo e métodos de decisor único ou de solução multiobjectivo. Estes últimos são ainda divididos em métodos de geração de soluções onde as preferências do decisor são consideradas *a posteriori* e métodos onde as preferências do decisor são incorporadas *a priori*.

Os métodos de geração de soluções eficientes têm como vantagem uma menor dependência do decisor e como inconvenientes a necessidade de um esforço computacional elevado (tempo e memória) e dificuldade de apresentação dos resultados. Por sua vez, os métodos que incorporam preferências *a priori* têm a vantagem de exigirem um menor esforço computacional e o inconveniente de dependerem, em grande parte, das preferências do decisor.

Deste modo, o mais desejável é recorrer aos métodos iterativos caracterizados pela existência de diálogo entre o decisor e o analista após cada fase de cálculo de uma ou várias soluções eficientes. O método termina quando se obtém uma solução satisfatória para o decisor ou quando se esgota o número de iterações que podem ser tratadas pelo método.

Relativamente aos métodos de geração de soluções eficientes, vários métodos têm sido propostos onde se inclui, o método das ponderações, o método das restrições, o método NISE (*Noninferior Set Estimation*) e o método do simplex para problemas de PLMO, descritos em Cohon (2003). Em relação aos métodos que incorporam as preferências do

decisor *a priori* há a destacar a programação por metas que constitui o método mais conhecido e usado na abordagem a problemas de otimização multiobjectivo.

No capítulo 5, serão utilizados o método das ponderações e a programação por metas pelo que estes dois métodos serão abordados, de forma breve, nas duas próximas secções.

4.4. Método das ponderações

O método das ponderações é o mais antigo método de geração de soluções eficientes e utiliza, para o efeito, a programação linear. A ideia do método é a de associar um ponderador a cada função objetivo e em seguida otimizar a soma ponderada das funções objetivo.

Assim, associando a cada função objetivo z_k o ponderador w_k , com $k=1, \dots, p$, o problema definido por (4.1) – (4.3) pode ser transformado no seguinte problema:

$$\max Z(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^p w_k z_k(x_1, \dots, x_n) \quad (4.4)$$

$$s.a. \quad (x_1, \dots, x_n) \in S \quad (4.5)$$

$$w_k \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad k = 1, \dots, p \quad (4.6)$$

O problema definido por (4.4) – (4.6) é um problema de programação linear para o qual existem algoritmos eficientes que permitem a obtenção da solução ótima. Esta solução ótima é uma solução eficiente para o problema multiobjectivo definido por (4.1) – (4.2), desde que os ponderadores sejam positivos. Se um ou mais dos ponderadores for igual a zero e a solução ótima do problema anterior for múltipla então tal solução pode não ser uma solução eficiente do problema (4.1) – (4.2), como se refere em Cohon (1978), onde se apresenta uma descrição detalhada do método.

Ainda, de acordo com Cohon (1978), o método das ponderações não permite obter uma representação exata do conjunto das soluções eficientes, isto é, não é um método exato. Trata-se de um método aproximado, pois utilizando diferentes conjuntos de ponderadores permite calcular soluções eficientes até um número que permita obter uma representação adequada (aproximada) do conjunto das soluções eficientes.

No método das ponderações, apesar de qualquer conjunto de ponderadores não negativos poder ser usado, faz sentido que uma determinada ordem ou regra seja usada. Parece razoável que, numa primeira fase, se comece por otimizar individualmente cada um dos p objetivos o que é conseguido igualando a 1 o ponderador associado ao objetivo que pretende otimizar e igualando a 0 os restantes $p-1$ ponderadores. Estas p soluções fornecem pontos extremos do conjunto das soluções eficientes. De seguida procede-se a uma variação dos pesos que pode ir de zero até um determinado valor (limite superior). Começa-se com uma variação maior para identificar uma aproximação grosseira ao conjunto das soluções não eficientes que pode ser melhorada usando estes resultados e uma menor variação dos ponderadores.

Relativamente ao valor dos ponderadores, o que importa é o seu valor relativo e não absoluto. Por exemplo, para o caso de se ter dois objetivos e sendo w_1 e w_2 os ponderadores associados a esses objetivos, ter $w_1=1$ e $w_2=3$ é o mesmo que ter $w_1=3$ e $w_2=9$.

4.5. Programação por metas

A programação por metas foi inicialmente proposta por Charnes e Cooper (1961) e desenvolvida mais tarde por Ijiri (1965), Lee (1972) e Ignizio (1976), entre outros. A programação por metas, inicialmente concebida como uma aplicação da programação linear, é, atualmente, um importante ramo da otimização multiobjectivo. A ideia da programação por metas é a de estabelecer uma meta para cada um dos objetivos. Claramente, esta abordagem pressupõe que o decisor tenha capacidade de estabelecer um valor numérico para cada objetivo. Usualmente um ponto que satisfaz todas as metas não é admissível. Então, procura-se a solução admissível que satisfaça o melhor possível todas as metas, designada por melhor solução de compromisso. Para determinar tal solução usam-se prioridades e/ou ponderadores.

Existem, basicamente, três tipos de metas que normalmente se desejam contemplar, baseadas nas três possíveis relações entre o valor de um objetivo e a correspondente meta:

- a) atingir pelo menos um determinado valor;
- b) não ultrapassar um determinado valor;

c) atingir exatamente um determinado valor.

Designando por $z_k(x)$ o valor do objetivo k para a solução x e por G_k a meta estabelecida para esse objetivo, os três tipos de metas podem ser expressos da seguinte forma:

a) $z_k(x) \geq G_k$;

b) $z_k(x) \leq G_k$;

c) $z_k(x) = G_k$.

Introduzindo variáveis de desvio adicionais d_k^- e d_k^+ , que representam o desvio por defeito e por excesso, respetivamente, da solução x em relação à meta G_k , qualquer das restrições anteriores pode ser escrita do seguinte modo:

$$z_k(x) + d_k^- - d_k^+ = G_k \quad k = 1, \dots, p \quad (4.7)$$

$$d_k^-, d_k^+ \geq 0 \quad (4.8)$$

Então, na abordagem de um problema de programação multiobjectivo através da programação por metas, cada objetivo é transformado numa restrição designada por restrição associada à meta. De referir que este tipo de restrições é diferente do tipo de restrições que definem o conjunto das soluções admissíveis, pois especificam requisitos que se desejam atingir, podendo por isso ser violadas por uma solução admissível.

É evidente que, de acordo com a definição, se uma das variáveis de desvio for positiva a outra será nula, podendo, no entanto, ser ambas nulas. De facto, se $z_k(x) > G_k$, então existe desvio por excesso e, por isso, $d_k^+ > 0$ e $d_k^- = 0$; se $z_k(x) < G_k$, então existe desvio por defeito e, por isso, $d_k^- > 0$ e $d_k^+ = 0$; se $z_k(x) = G_k$, então não existe desvio por excesso nem por defeito e, por isso, $d_k^- = d_k^+ = 0$.

O objetivo de um modelo de programação por metas é o de satisfazer, tanto quanto possível, as metas estabelecidas, o que é conseguido através da minimização dos desvios indesejáveis. Então, a função objetivo é sempre expressa em termos das variáveis de desvio associadas às metas. Assim, cada uma das três metas consideradas anteriormente corresponde, em termos de função objetivo, respetivamente, a:

a) $\min d_k^-$

$$b) \min d_k^+$$

$$c) \min (d_k^- + d_k^+)$$

Existem basicamente dois modelos de metas: modelo de metas não hierarquizadas, referido na literatura como *Archimedean model*, e o modelo de metas hierarquizadas, referido na literatura como *Preemptive model*. No primeiro caso, as metas estão todas no mesmo nível. Neste caso é habitual associar um ponderador a cada desvio indesejável, que atua como uma penalidade no caso de a meta não ser atingida. Estes ponderadores facilitam a tomada de decisão, evitando escolhas arbitrárias. No segundo caso, o decisor estabelece uma ordem de importância conduzindo à existência de vários níveis de prioridade.

Para ilustrar o modelo de metas não hierarquizadas, considere um problema de programação por metas onde estão envolvidas as três metas definidas anteriormente, isto é,

$$z_1(x) \geq G_1,$$

$$z_2(x) \leq G_2,$$

$$z_3(x) = G_3.$$

Associando os ponderadores w_1 , w_2 e w_3 aos desvios indesejáveis, o modelo de metas não hierarquizadas para este problema é dado por:

$$\min \{w_1 d_1^- + w_2 d_2^+ + w_3 d_3^- + w_3 d_3^+\} \quad (4.9)$$

$$s.a. \quad x \in S \quad (4.10)$$

$$z_1(x) + d_1^- - d_1^+ = G_1 \quad (4.11)$$

$$z_2(x) + d_2^- - d_2^+ = G_2 \quad (4.12)$$

$$z_3(x) + d_3^- - d_3^+ = G_3 \quad (4.13)$$

$$d_k^-, d_k^+ \geq 0 \quad k = 1, 2, 3 \quad (4.14)$$

O modelo (4.9) – (4.14) é um modelo de programação linear que pode ser facilmente resolvido. Os valores de w_1 , w_2 e w_3 permitem penalizar os desvios indesejáveis.

No modelo de metas hierarquizadas, as metas são escalonadas em prioridades ou níveis, tentando garantir-se que metas de prioridade superior não sejam colocadas de lado por

metas de prioridade inferior. Para ilustrar este modelo considere-se novamente as três metas definidas anteriormente, mas agora escalonadas em prioridades:

$$P_1 : z_1(x) \geq G_1$$

$$P_2 : z_2(x) \leq G_2$$

$$P_3 : z_3(x) = G_3$$

onde P_j indica uma prioridade de nível j , com $j=1,2,3$, e onde P_1 indica a prioridade de mais alto nível. Assumindo que $P_j \gg P_{j+1}$, com $j=1,2$, e onde “ \gg ” significa “muito maior do que”, o modelo de metas hierarquizadas que contempla aquelas três metas pode ser dado por:

$$\min \{P_1 d_1^- + P_2 d_2^+ + P_3 (d_3^- + d_3^+)\} \quad (4.15)$$

$$s.a. \quad x \in S \quad (4.16)$$

$$z_1(x) + d_1^- - d_1^+ = G_1 \quad (4.17)$$

$$z_2(x) + d_2^- - d_2^+ = G_2 \quad (4.18)$$

$$z_3(x) + d_3^- - d_3^+ = G_3 \quad (4.19)$$

$$d_k^-, d_k^+ \geq 0 \quad k = 1, 2, 3 \quad (4.20)$$

Em Steuer (1986), apresenta-se uma forma mais sugestiva de escrever a função objetivo (4.15), que elimina P_j , dada por:

$$\min \{d_1^-, d_2^+, (d_3^- + d_3^+)\} \quad (4.21)$$

onde a posição da meta indica o nível de prioridade da mesma.

A resolução deste modelo é feita de forma sequencial, considerando em cada fase a meta (ou as metas) de prioridade mais alta e esquecendo as restantes. Assim, numa primeira fase resolve-se o problema:

$$\min d_1^- \quad (4.22)$$

$$s.a. \quad x \in S \quad (4.16)$$

$$z_1(x) + d_1^- - d_1^+ = G_1 \quad (4.17)$$

$$d_1^-, d_1^+ \geq 0 \quad (4.23)$$

Se este problema tem soluções ótimas alternativas, passa-se à segunda fase resolvendo o problema:

$$\min d_2^+ \quad (4.24)$$

$$s.a. \quad x \in S \quad (4.16)$$

$$z_1(x) \geq G_1 - (+d_1^-)^* \quad (4.25)$$

$$z_2(x) + d_2^- - d_2^+ = G_2 \quad (4.18)$$

$$d_2^-, d_2^+ \geq 0 \quad (4.26)$$

onde $(d_1^-)^*$ é o valor da solução ótima do problema resolvido na fase 1. Se este problema tem soluções ótimas alternativas, passa-se à terceira fase resolvendo o problema:

$$\min (d_3^- + d_3^+) \quad (4.27)$$

$$s.a. \quad x \in S \quad (4.16)$$

$$z_1(x) \geq G_1 - (+d_1^-)^* \quad (4.25)$$

$$z_2(x) \leq G_2 + (+d_2^+)^* \quad (4.27)$$

$$z_3(x) + d_3^- - d_3^+ = G_3 \quad (4.19)$$

$$d_3^-, d_3^+ \geq 0 \quad (4.28)$$

onde $(d_2^+)^*$ é o valor da solução ótima do problema resolvido na fase 2. A solução ótima obtida nesta terceira fase é a melhor solução de compromisso para o problema.

Neste modelo, uma meta de prioridade mais baixa só pode ser atingida entre as soluções que minimizam os desvios das metas de prioridade mais alta. Se num determinado nível de prioridade existe mais do que uma meta pode recorrer-se ao uso de ponderadores (penalidades) de modo a facilitar a tomada de decisão.

A programação por metas tem sido objeto de aplicação num impressionante número de áreas e de disciplinas, como é referido em diversa literatura da especialidade. Para dar uma ideia dessa aplicabilidade, apresenta-se na tabela 4.1, uma lista de aplicações da programação por metas na área da gestão financeira, apresentada em Lin and O' Leary (1993). Como se pode verificar, essa lista, reportada ao período de 1973 a 1993, contempla 80 aplicações em 12 áreas diferentes dentro da área da contabilidade e das finanças.

Tabela 4.1 – Aplicação da programação por metas na área da gestão financeira

Áreas de aplicação	Autores
Orçamento empresarial e planeamento financeiro	Charnes et al (1983), Guerard and Lawrence (1987), Hindelang and Krishnamurthy (1985), Jagetia and Nelson (1976), Kvanli (1980), Kvanli and Buckley (1986), Lawrence et al. (1981), Lin (1978), Mulvey (1987), Nunamaker and Truitt (1987), Sheshai et al. (1977), Turk and Selman (1981)
Gestão de Capital	Cox (1981), Hollis (1979), Keown and Martin (1977), O' Leary and O' Leary (1981), Philippatos and Cristofi (1984), Rakes and Franz (1985), Sartoris and Spruill (1974)
Orçamento de Capital	Bernhard (1980), Bhaskar (1979,1980), Bhaskar and McNamee (1983), Chateu (1975), Gonzales et al. (1987), Hawkins and Adams (1974), Ignizio (1976), Keown and Taylor (1978), Lin (1976), Merville and Tavis (1974), Spahr et al. (1987), Thanassoulis (1985)
Decisões de Financiamento	Arthur and Lawrence (1985), Ashton (1985,1986), Jones (1979), Maimon and Porter (1987)
Fusões, aquisições e alienações	Charnes et al. (1988), Fowler and Schniederjans (1987), Lawrence et al. (1976)
Planeamento de Investimento / Portfolio	Callahan (1973), Harrington and Fisher (1980), Kumar and Philippatos (1979), Kumar et al. (1978), Lee and Chesser (1980), Lee and Lerro (1973, 1978), Muhlemann and Lockett (1980), Shar and Musser (1986), Stone and Reback (1975)
Gestão de Banca Comercial	Booth and Dash (1977), Fortson and Dince (1977), Keown (1978), Lam and Karwan (1985), Lee et al. (1971), Sealey (1977, 1978), Trennepohi (1975), Turshen and Nolley (1987)
Gestão de Seguros e fundo de pensões	Drandell (1977), Gleason and Lilly (1977), Klock and Lee (1974), O' Leary and O'Leary (1987)
Agendamento de pessoal na área financeira	Balanchandran and Steuer (1982)
Taxa de juro e risco	Booth and Ressler (1989), Boquist and Moore (1983), Gressis et al. (1985), Hong (1981)
Governo e empresa pública	Charnes et al. (1988), Guerard and Buell (1984), Jackman (1973), Joiner and Drake (1983), Keown and Martin (1976, 1978), O'Leary and O'Leary (1982), O'Leary (1990), Olve (1981), Taguchi et al. (1983), Trivedi (1981), Wacht and Whitford (1976), Wallenius et al. (1978)
Controlo de Contabilidade	Kornbluth (1985, 1986) Lin (1979, 1980b)

Fonte: Adaptado Lin e O'Leary (1993: 215)

5. Programação multiobjectivo e metodologia DEA

5.1. Introdução

Como se referiu no final do capítulo 3, a falta de poder de discriminação e a distribuição irrealista dos pesos entre as DMUs eficientes constituem duas desvantagens associadas aos modelos clássicos da metodologia DEA, apresentados nesse capítulo. Estes dois problemas continuam atualmente a constituir um tema de investigação na área da DEA. Uma das formas de contornar tais problemas consiste na utilização da programação linear multiobjectivo (PLMO) para obter novos modelos de DEA.

A ideia da utilização da PLMO na metodologia DEA surge com base no conceito de eficiência de Pareto que ambas abordagens partilham. Tanto uma metodologia como a outra procuram um conjunto de unidades que não sejam comparáveis entre si, que são eficientes ou melhores que outras em pelo menos um aspeto ou dimensão (Meza, Mello e Clímaco (2006)).

A existência de vários pontos comuns entre a PLMO e a DEA, observada por alguns investigadores, tem contribuído para uma interação entre estas duas abordagens que não se resume apenas à utilização da programação linear multiobjectivo na DEA. O inverso, isto é, a aplicação da DEA no processo de solução de problemas de PLMO também tem sido objeto de investigação. Outro tipo de trabalho que tem surgido ao comparar DEA e PLMO, utiliza conceitos da PLMO para criar novas medidas de eficiência, como se refere em Meza et al. (2006) onde se apresenta uma revisão bibliográfica sobre a integração destas duas metodologias.

Neste capítulo vai abordar-se a utilização da programação linear multiobjectivo na metodologia DEA. Assim, na secção 5.2, apresenta-se um modelo de programação multiobjectivo proposto por Li e Reeves (1999), com base no modelo CCR orientado para *inputs*. Na secção 5.3, apresentam-se os modelos de programação por metas baseados no modelo apresentado na secção anterior, propostos por Bal, Örkücü e Çelebioglu (2010). Finalmente, na secção 5.4, apresenta-se o modelo bi-objectivo proposto muito recentemente em Ghasemi, Ignatius e Emrouznejad (2014).

5.2. Modelo multiobjectivo

Li e Reeves (1999) apresentaram um modelo de programação linear multiobjectivo para a metodologia DEA. Este modelo baseia-se no modelo dos multiplicadores CCR orientado para *inputs* e, para além do objetivo considerado neste modelo, engloba a otimização de mais dois objetivos, que permitem a introdução de duas novas medidas de eficiência. A ideia subjacente ao modelo é a de, relativamente ao modelo CCR orientado para *inputs*, incrementar e melhorar a discriminação das DMUs e de promover uma melhor distribuição dos pesos associados aos *inputs* e *outputs*.

Antes da apresentação desse modelo e para uma melhor compreensão do que se segue, considere-se de novo o modelo CCR orientado para *inputs* apresentado no capítulo 3.

$$\max e_o = \sum_{r=1}^s u_r y_{ro} \quad (5.1)$$

$$s. a. \quad \sum_{i=1}^m v_i x_{io} = 1 \quad (5.2)$$

$$\sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (5.3)$$

$$u_r \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (5.4)$$

$$v_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (5.5)$$

Como foi referido no capítulo 3, uma DMU_o é eficiente quando $e_o = 1$ o que significa que a restrição (5.3) é ativa ou saturada para a DMU_o e, conseqüentemente, o valor da correspondente variável de desvio é igual a zero. Considerando o valor desta variável de desvio, para obter a medida de eficiência, o modelo (5.1) – (5.5) pode ser reescrito, de modo equivalente, na seguinte forma dada por Li e Reeves (1999).

$$\min d_o \left(\text{ou } \max e_o = \sum_{r=1}^s u_r y_{ro} \right) \quad (5.6)$$

$$s. a. \quad \sum_{i=1}^m v_i x_{io} = 1 \quad (5.7)$$

$$\sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} + d_j = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (5.8)$$

$$u_r \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (5.9)$$

$$v_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (5.10)$$

$$d_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (5.11)$$

Neste modelo, d_o é a variável de desvio para a DMU_o e d_j é a variável de desvio para a DMU_j , com $j = 1, \dots, n$. As restantes variáveis são as mesmas do modelo (5.1) – (5.5), o mesmo acontecendo com os parâmetros. De acordo com o modelo, DMU_o é eficiente se, e só se, $d_o = 0$ ou, equivalentemente, $\sum_{r=1}^s u_r y_{ro} = 1$. Se DMU_o não é eficiente, o seu índice de eficiência é dado por $h_o = 1 - d_o$, onde h_o é o índice de eficiência fornecido pelo modelo CCR orientado para *inputs*. A quantidade d_o tal que $d_o \in]0,1]$ pode ser vista como uma medida de ineficiência. É claro que o índice de eficiência de uma DMU_o é tanto maior quanto menor for o valor de d_o . De referir que de acordo com o modelo de Li e Reeves (1999), só para DMU em análise é que o desvio varia entre 0 e 1, para as restantes DMUs os desvios podem assumir valores superiores a 1. Esta reformulação permite afirmar que o modelo clássico de DEA (CCR orientado para *inputs*) minimiza a ineficiência da DMU, medida por d_o , com as restrições de que, para cada DMU, a soma ponderada dos *outputs* é menor ou igual do que a soma ponderada dos *inputs*.

Por forma a restringir a liberdade de escolha dos multiplicadores, Li and Reeves (1999) propuseram ainda um modelo multiobjectivo de DEA conhecido também por *Multiple Criteria Data Envelopment Analysis* (MCDEA). Para além da função objetivo do modelo anterior, este modelo considera mais duas funções objetivo e é definido do seguinte modo:

$$\min d_o \quad \left(\text{ou} \quad \max \sum_{r=1}^s u_r y_{ro} \right) \quad (5.12)$$

$$\min M \quad (5.13)$$

$$\min \sum_{j=1}^n d_j \quad (5.14)$$

$$s.a. \quad \sum_{i=1}^m v_i x_{io} = 1 \quad (5.15)$$

$$\sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} + d_j = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (5.16)$$

$$M - d_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (5.17)$$

$$u_r \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (5.18)$$

$$v_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (5.19)$$

$$v_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (5.20)$$

Neste modelo, d_o e d_j são definidos do mesmo modo que no modelo anterior e M representa o valor máximo de todas as variáveis de desvio d_j , com $j = 1, \dots, n$. A introdução neste modelo das restrições (5.17), que definem o máximo desvio, não alteram a região admissível das variáveis de decisão, apenas servem para definir a variável M . A primeira função objetivo é exatamente a função objetivo do modelo (5.6) – (5.11) que é equivalente à função objetivo do modelo CCR orientado para *inputs*. A segunda, é uma função minimax que minimiza a variável de máximo desvio. Por último, a terceira função objetivo é uma função minisoma que minimiza a soma de todas as variáveis de desvio.

É óbvio que a solução que otimiza o primeiro objetivo no modelo anterior é equivalente à solução ótima dos modelos (5.1) – (5.5) ou (5.6) – (5.11), isto é, a DMU_o é eficiente através do modelo CCR orientado para *inputs* se, e só se, o valor de d_o , correspondente à solução que otimiza o primeiro objetivo é igual a zero. Portanto, a eficiência correspondente ao primeiro objetivo é a eficiência (clássica) que se obtém através do modelo clássico CCR orientado para *inputs*. Pode também definir-se eficiência relativa de uma DMU correspondente ao segundo e terceiro objetivos; uma DMU_o é eficiente em relação ao segundo objetivo (minimax eficiente) se o valor de d_o correspondente à solução que minimiza o segundo objetivo é igual a zero; de modo idêntico, uma DMU_o é eficiente em relação ao terceiro objetivo (minisoma eficiente) se o valor de d_o correspondente à solução que minimiza o terceiro objetivo é igual a zero.

Como referido em Li and Reeves (1999), em geral os objetivos minimax e minisoma não favorecem a eficiência da DMU em análise, como acontece com o critério clássico da DEA. Pelo contrário, esses dois objetivos tendem a restringir a eficiência obtida pelo modelo clássico, isto é, é mais difícil uma DMU ser eficiente através dos segundo e terceiro objetivo do que através do primeiro que como já se referiu corresponde ao clássico modelo da DEA. De facto, se DMU_o é minimax ou minisoma eficiente também o será no sentido clássico, uma vez que a definição de eficiência minimax ou minisoma requer $d_o = 0$. Contudo, se DMU_o é eficiente no sentido clássico, ela pode ou não ser minimax eficiente ou minisoma eficiente uma vez que $d_o = 0$ não implica necessariamente que M e $\sum_{j=1}^n d_j$ sejam mínimos. Então, cada um destes critérios permite, em geral, obter um menor número de DMUs eficientes em relação ao critério clássico.

No modelo MCDEA, os três objetivos são analisados separadamente, um de cada vez, não existindo qualquer ordem de preferência. As soluções obtidas para cada objetivo são soluções não dominadas no contexto da PLMO. Note-se que o conjunto de soluções não dominadas para um problema de PLMO inclui, para além de outras, a solução ótima obtida pela otimização individual de cada objetivo do problema PLMO. De acordo com Li e Reeves (1999), geralmente o segundo objetivo (minimax) é mais restritivo do que o terceiro (minisoma), enquanto o primeiro objetivo é o menos restritivo de todos.

Os autores não sugerem qualquer procedimento que otimize os três objetivos simultaneamente. Em vez disso, procuram gerar uma série de soluções não dominadas deixando para o analista a seleção da mais preferida, se necessário. No entanto, a complexidade dos problemas de programação linear multiobjectivo e a escassez de *software* para resolver este tipo de problemas limitam a aplicabilidade do modelo proposto por Li and Reeves (1999). Deste modo, surgiram recentemente trabalhos onde esses objectivos são optimizados em simultâneo com se verá nas secções que se seguem.

5.3. Modelo de programação por metas

Como se referiu no capítulo anterior a forma mais usual e mais conhecida de resolver problemas de PLMO consiste na utilização da programação por metas. Deste modo, Bal, Örcü and Çelebioglu (2010) propuseram uma abordagem de programação por metas que considera os três objetivos do modelo MCDEA, proposto por Li and Reeves (1999), em simultâneo. Assim, com base nesse modelo e, conseqüente no modelo CCR orientado para *inputs*, Bal et al. (2010) propuseram o seguinte modelo de programação por metas denotado por GPDEA-CCR (*Goal Programming Data Envelopment Analysis*).

$$\min a = \left\{ d_1^- + d_1^+ + d_2^- + \sum_j d_{3j}^- + \sum_j d_j \right\} \quad (5.21)$$

$$s. a. \quad \sum_{i=1}^m v_i x_{io} + d_1^- - d_1^+ = 1 \quad (5.22)$$

$$\sum_{i=1}^m u_r y_{ro} + d_2^- - d_2^+ = 1 \quad (5.23)$$

$$\sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} + d_j = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (5.24)$$

$$M - d_j + d_{3j}^- - d_{3j}^+ = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (5.25)$$

$$u_r \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad (5.26)$$

$$v_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (5.27)$$

$$v_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (5.28)$$

Neste anterior, d_1^- e d_1^+ são as variáveis de desvio para a primeira meta onde se deseja que a soma ponderada dos *inputs* seja igual a 1, d_2^- e d_2^+ são as variáveis de desvio para a segunda meta onde se deseja que a soma ponderada dos *outputs* seja menor ou igual a 1, d_{3j}^- e d_{3j}^+ são as variáveis de desvio para a terceira meta onde se deseja que o valor de d_j é, para cada j , menor ou igual M , e d_j são as variáveis de desvio para a quarta meta onde se deseja que a soma ponderada dos *outputs* não exceda a soma ponderada dos *inputs*. A função objetivo minimiza a soma das variáveis de desvio indesejáveis, considerando assim essas variáveis com a mesma ponderação.

Bal et al. (2010) propuseram também um modelo de programação por metas, semelhante ao anterior, mas baseado no modelo BCC orientado para *inputs*, denotado por GPDEA-BCC.

Ghasemi, Ignatius and Emrouznejad (2014) mostram que os modelos GPDEA, propostos por Bal, Örkücü and Çelebioglu (2010), não tratam corretamente a estrutura do modelo MCDEA e apontam falhas naqueles modelos que vão desde a interpretação do método de programação por metas até aos resultados apresentados. Uma dessas falhas reporta-se aos verdadeiros resultados obtidos por Ghasemi et al. (2014) quando aplicam os modelos de Bal et al. (2010). Esses resultados, que contrariam os apresentados por estes últimos autores, permitem a existência de DMUs com valor zero para todos os *inputs* e *outputs* e também para a eficiência. A situação é problemática quando o valor da eficiência é igual a 1 com todos os pesos iguais a zero, mostrando a incapacidade dos pesos para traduzir os *inputs* e *outputs* em eficiência técnica. De referir que esta situação também ocorreu durante o desenvolvimento deste trabalho, quando se tentou aplicar o modelo GPDEA_CCR quer aos dados do exemplo 3.1 quer ao caso prático apresentado no próximo capítulo. A razão para tal acontecer deve-se ao facto de num modelo orientado para *inputs*, como é o caso, ser necessário fixar a soma ponderada dos *inputs* para a DMU em avaliação, isto é, a restrição $\sum_{i=1}^m v_i x_{io} = 1$ deve estar incluída no modelo.

Tal não acontece no modelo (5.21) – (5.28) uma vez que, devido à minimização de $d_1^- + d_1^+$, se pode ter $0 \leq \sum_{i=1}^m v_i x_{io} \leq 1$, como se refere em Ghasemi et al. (2014).

De acordo com as experiências computacionais realizadas, Ghasemi et al. (2014), afirmam que os resultados obtidos pelo modelo GPDEA_CCR são idênticos aos obtidos do modelo MCDEA usando apenas a função objetivo minisoma, isto é, $\sum_j d_j$ e, conseqüente o modelo GPDEA_CCR apenas capta um dos objetivos do modelo MCDEA.

5.4. Modelo bi-objectivo

Na sequência do exposto na secção anterior, Ghasemi, Ignatius and Emrouznejad (2014) propõem um modelo bi-objectivo baseado no modelo de PLMO proposto por Li e Reeves (1999). Ghasemi et al. (2014) propuseram a utilização do método das

ponderações para otimizar, em simultâneo, os três objetivos presentes no modelo MCDEA. Para tal consideram a função objetivo:

$$f = w_1 d_o + w_2 M + w_3 \sum_j d_j \quad (5.29)$$

onde w_1 , w_2 e w_3 são ponderadores associados aos três objetivos que podem variar permitindo obter diferentes soluções não dominadas. Os autores consideraram $w_1 = 0$ pelo facto de o primeiro objetivo permitir um fraco poder de discriminação quando comparado com os outros dois e também pelo facto de que quando $\sum_j d_j$ é minimizado, d_o também o é. Ghasemi et al. (2014) propuseram então o seguinte modelo:

$$\min h = \left(w_2 M + w_3 \sum_j d_j \right) \quad (5.30)$$

$$s. a. \quad \sum_{i=1}^m v_i x_{io} = 1 \quad (5.31)$$

$$\sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} + d_j = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (5.32)$$

$$M - d_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (5.33)$$

$$u_r \geq \varepsilon \quad r = 1, \dots, s \quad (5.34)$$

$$v_i \geq \varepsilon \quad i = 1, \dots, m \quad (5.35)$$

$$d_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (5.36)$$

A quantidade ε assume um valor infinitesimal para evitar que os multiplicadores sejam iguais a zero, mas pode também assumir o valor zero.

Não obstante Ghasemi et al. (2014) terem demonstrado que os modelos GPDEA, propostos por Bal, et al. (2010), não são alternativas ao modelo MCDEA, os autores usam aqueles modelos para mostrar que os mesmos são superados pelo modelo proposto por eles. Para o efeito, recorreram aos exemplos, e ao caso prático (uma aplicação de dependência energética entre 25 países membros da União Europeia) presentes em Bal, et al. (2010).

Exemplo 5.1:

Utilizando os dados do exemplo 3.1 calculou-se a eficiência através do modelo Bio-MCDEA, considerando $w_2 = w_3 = 0,5$ e $\varepsilon = 0$. Os resultados obtidos são apresentados na tabela 5.1 onde, para uma mais fácil comparação, se apresentam, de novo, os resultados obtidos pelo modelo CCR orientado para *inputs*.

Tabela 5.1 – Valores de eficiência obtidos pelos modelos CCR e do MCDEA

DMUs	Pesos CCR			Pesos Bio-MCDEA			Eficiência CCR	Eficiência Bio-MCDEA
	v_1	v_2	u	v_1	v_2	u		
A	0,000000	0,016667	0,006667	0,008904	0,004795	0,004110	0,4	0,24658
B	0,013542	0,007292	0,006250	0,005128	0,008974	0,005128	1	0,82051
C	0,005556	0,009722	0,005556	0,005556	0,009722	0,005556	1	1
D	0,024074	0,012963	0,011111	0,011111	0,019444	0,011111	0,5555	0,55555
E	0,000000	0,012500	0,005000	0,005000	0,008750	0,005000	1	1
F	0,007386	0,003977	0,003409	0,003279	0,005738	0,003279	0,6136	0,59016

Fonte: Elaboração Própria

Observando a tabela 5.1 verifica-se que o modelo Bio-MCDEA é mais restritivo do que o modelo CCR orientado para *inputs*. De facto verifica-se que utilizando o modelo Bio-MCDEA temos menos uma instituição bancária eficiente, e outras três com valores mais baixo de eficiência, relativamente ao modelo CCR. Por outro lado, não existem pesos iguais a zero na solução obtida pelo modelo Bio-MCDEA, contrariamente ao que acontece com o modelo CCR.

6. Caso prático aplicado às instituições bancárias

6.1. Introdução

Este capítulo destina-se a apresentar os resultados da aplicação de alguns dos modelos apresentados nos capítulos 3 e 5 a uma situação real, mais precisamente, à avaliação de 27 instituições bancárias que operavam em Portugal no ano 2012, e analisar os referidos resultados. Assim, na secção 6.2, descreve-se a forma como foram feitas a recolha dos dados e a escolha dos modelos. Na secção 6.3, apresentam-se os resultados obtidos pelo modelo CCR, BCC e MCDEA, com orientação para *inputs*, onde será também apresentada uma análise a esses resultados.

6.2. Dados e escolha dos modelos para aplicação prática

Os dados utilizados nesta aplicação prática às instituições bancárias, que operavam em Portugal no ano 2012, foram retirados do boletim estatístico desse ano (anual), nº48³ da Associação Portuguesa de Bancos. Neste estudo, não é feita qualquer diferenciação entre os bancos comerciais e bancos de investimentos, pelo que os dois tipos de bancos são considerados desde que possuam balcão em Portugal.

Relativamente aos dados, tem-se que os *inputs* escolhidos foram o número de balcões, o número de trabalhadores, e o capital (em milhares de euros). Em relação aos *outputs*, foram escolhidos os recursos de clientes, os recursos a outras instituições de crédito e a responsabilidade representada por títulos (em milhares de euros). A informação relativa aos *inputs* e *outputs* de cada instituição bancária consta da tabela 6.1.

Foi escolhida a orientação para *inputs* uma vez que o país está a ultrapassar uma situação de crise e para colmatar esta fase será mais vantajoso reduzir os recursos, mantendo os *outputs* inalteráveis, quer dizer, produzir o mesmo com menos recursos. E numa segunda parte o modelo utilizado será o BiO-MCDEA que foi abordado no capítulo 5 e que vai permitir fazer uma comparação com o modelo CCR com orientação para *inputs*.

³ http://www.apb.pt/content/files/Boletim_Estatistico_No_48_Anuual_2.pdf

Tabela 6.1 - Dados relativos aos *inputs* e *outputs*

DMUs (Instituições Bancárias)		<i>Input 1</i>	<i>Input 2</i>	<i>Input 3</i>	<i>Output 1</i>	<i>Output 2</i>	<i>Output 3</i>
		Nº Empregados	Nº Balcões	Capital (x1000€)	Recursos Clientes (x1000€)	Recursos Instituições (x1000€)	Responsabilidade Representada por títulos (x1000€)
1	Banco BIC	1335	210	300228	2393707	436180	150656
2	Banco BPI	6261	681	1190000	17723848	5861452	3773994
3	Banco Português Investimento	156	2	20000	2199486	40088	12
4	Millenium BCP	8724	824	3500000	32697873	5997462	18859705
5	Activo Bank	143	14	41000	346380	1	0
6	BIG	166	13	104000	544125	6480	0
7	BES	6014	636	5040124	30271265	7138799	9933899
8	BES Investimento	242	1	326269	196518	1242642	293495
9	BES Açores	99	18	17500	361177	10034	95178
10	Best Bank	148	8	63000	306306	18190	0
11	Banco Finantia	147	2	150000	427671	467002	0
12	Banco Invest	120	17	59500	184964	7255	3189
13	Banif Funchal	2318	312	570000	7219679	933743	529146
14	Banif	121	2	85000	243724	268961	165
15	Banif Mais	215	19	101000	6422	106908	0
16	Caixa Agricola	3832	685	904416	10177703	240228	0
17	Montepio	3928	458	1295000	12675903	1125074	2188099
18	Caixa geral depósitos	9401	847	5900000	58247843	6045877	11548675
19	Caixa BI	164	2	81250	139246	752338	0
20	BBVA	758	86	480000	2297839	3002254	0
21	Itau BBA	101	1	535624	282456	625901	1541845
22	Banco Popular	1309	183	476000	3906941	1423759	1011248
23	Santander Consumer Finance	176	4	66593	4253	534311	0
24	Santander Totta	5566	640	656723	21395469	2212784	2943089
25	Banco Brasil	85	5	14355	69758	532693	0
26	Barclays	2046	260	39904	3016909	21022437	9681
27	BPN Paribas	74	2	39251	163516	733788	0

Fonte: Elaboração Própria

6.3. Resultados e respetiva análise

Nesta secção, apresentam-se os resultados obtidos pelos modelos clássicos CCR e BCC, com orientação para *inputs*, e pelo modelo multiobjectivo BiO-MCDEA, também com orientação para *inputs*. Para a obtenção dos resultados relativos aos modelos clássicos foi utilizado o *software* SIAD (Sistema Integrado de Apoio à Decisão), enquanto que para obtenção dos resultados obtidos pelo modelo BiO-MCDEA foi utilizado o módulo de programação linear do pacote *CPLEX Optimization Studio Academic Research 12.5* bem como o módulo OPL (*Optimization Programming Language*) para escrita do modelo.

Para facilitar a comparação entre os valores da eficiência fornecidos pelos referidos modelos, optou-se pela apresentação gráfica desses valores. Assim, na figura 6.1 apresenta-se o gráfico relativo aos valores da eficiência obtidos pelos modelos CCR e BCC, com orientação para *inputs*, para as 27 instituições bancárias em análise. Uma informação mais completa, onde se inclui os valores dos pesos relativos ao modelo CCR orientado para *inputs*, é apresentada na tabela do apêndice B, enquanto que no apêndice C é apresentada a mesma informação para o modelo BCC orientado para *inputs*.

Da análise ao gráfico da figura 6.1 verifica-se que a utilização do modelo CCR, com orientação para *inputs*, considera eficientes as seguintes instituições bancárias: BPN Paribas, Barclays, Itau BBA, BBVA, Caixa BI, Banco Finantia, Banco Espírito Santo Açores, Banco Espírito Santo de Investimento, Millenium BCP e Banco Português Investimento. Por sua vez, a utilização do modelo BCC, para além destas, considera também como eficientes as seguintes instituições bancárias: Banco Brasil, Santander Totta, Santander Consumer Finance, Caixa Geral Depósitos, Caixa Agrícola e Banco Espírito Santo.

Na sequência do que foi referido no capítulo 3, verifica-se assim que a utilização de retornos variáveis de escala (modelo BCC) permite identificar mais seis instituições bancárias como eficientes relativamente à utilização de retornos constantes de escala (modelo CCR). Os tipos de retorno de escala obtidos pelo modelo BCC orientado para os *inputs* são apresentados no apêndice D.

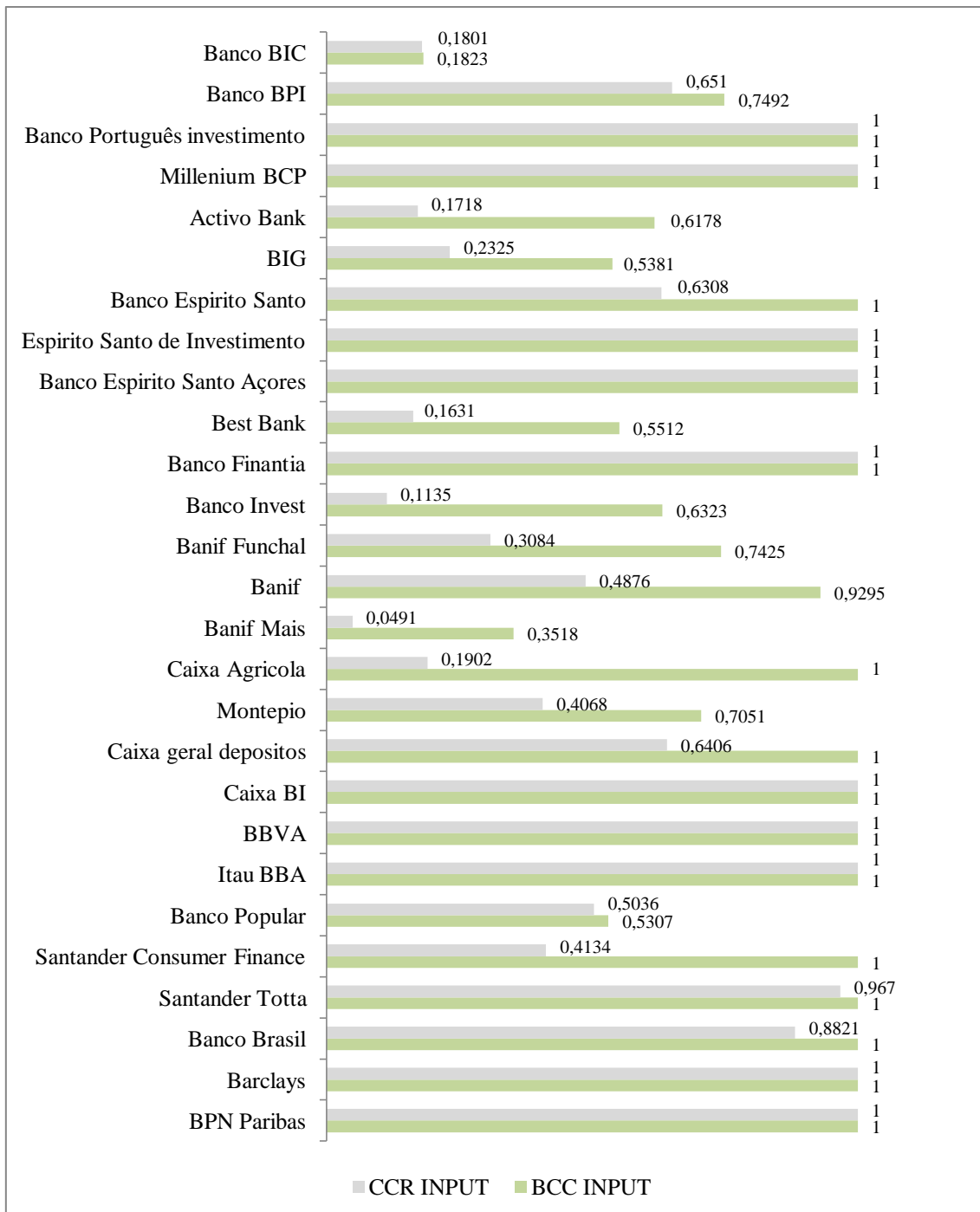


Figura 6.1- Valores da eficiência das instituições bancárias obtidos pelos modelos CCR e BCC com orientação para *inputs*

Fonte: Elaboração Própria

A seguir, nas tabelas 6.2 e 6.3, apresentam-se os resultados relativos aos *benchmarks*, Assim, na tabela 6.2 apresentam-se os resultados fornecidos pelo modelo CCR, enquanto que na tabela 6.3 se apresentam os resultados obtidos pelo modelo BCC, orientados para os *inputs* em ambos.

Tabela 6.2 - Resultados relativos aos *benchmarks* obtidos pelo modelo CCR orientado para *inputs*

DMUs (Instituições Bancárias)		<i>Benchmarks CCR-INPUT</i>
1	Banco BIC	3(0,973283); 4(0,006010); 21(0,024084); 26(0,016461)
2	Banco BPI	3(3,403987); 4(0,122713); 9(15,312296); 26(0,230011)
3	Banco Português investimento	1
4	Millenium BCP	1
5	Activo Bank	3(0,157482)
6	BIG	3(0,247387)
7	BES	3(10,612096); 4(0,160299); 21(4,481143); 26(0,140195)
8	BES Investimento	1
9	BES Açores	1
10	Best Bank	3(0,135317); 11(0,013450); 21(0,010360)
11	Banco Finantia	1
12	Banco Invest	3(0,083291); 21(0,006257)
13	Banif Funchal	3(2,903815); 4(0,022028); 21(0,073528); 26(0,030406)
14	Banif	3(0,056157); 8(0,000560); 11(0,192018); 19(0,046445)
15	Banif Mais	26(0,003161)
16	Caixa Agricola	3(4,615988); 21(0,088165)
17	Montepio	3(4,182592); 4(0,103986); 21(0,147092); 26(0,011497)
18	Caixa geral depositos	3(22,489168); 4(0,223948); 21(4,750429); 26(0,039382)
19	Caixa BI	1
20	BBVA	1
21	Itau BBA	1
22	Banco Popular	3(1,039429); 4(0,043964); 21(0,117781); 26(0,049694)
23	Santander Consumer Finance	26(0,000972)
24	Santander Totta	3(4,538996); 9(30,913049); 26(0,081848)
25	Banco Brasil	26(0,014596)
26	Barclays	1
27	BPN Paribas	0

Fonte: Elaboração Própria

Tabela 6.3 – Resultados relativos aos *benchmarks* obtidos pelo modelo BCC orientado para *inputs*

DMUs (Instituições Bancárias)		Benchmarks BCC-INPUT
1	Banco BIC	3(0,957742); 4(0,006053); 18(0,000587); 21(0,019163); 26(0,016456)
2	Banco BPI	3(0,131145); 4(0,093136); 18(0,031830); 24(0,559988); 26(0,183901)
3	Banco Português Investimento	1
4	Millennium BCP	1
5	Activo Bank	3(0,111590); 25(0,47217); 27(0,415592)
6	BIG	3(0,186942); 27(0,813058)
7	BES	1
8	BES Investimento	1
9	BESAçores	1
10	Best Bank	3(0,075809); 25(0,123247); 27(0,800944)
11	Banco Finantia	1
12	Banco Invest	3(0,008643); 9(0,033505); 25(0,029569); 27(0,928283)
13	Banif Funchal	3(0,649692); 16(0,204431); 18(0,027402); 24(0,095574); 26(0,022901)
14	Banif	3(0,037110); 8(0,141004); 27(0,821886)
15	Banif Mais	25(0,149291); 27(0,850709)
16	Caixa Agricola	1
17	Montepio	3(0,547693); 4(0,037009); 16(0,164953); 18(0,087540); 24(0,162805)
18	Caixa geral depositos	1
19	Caixa BI	1
20	BBVA	1
21	Itau BBA	1
22	Banco Popular	3(0,836668); 4(0,043494); 18(0,008200); 21(0,062124); 26(0,049514)
23	Santander Consumer Finance	1
24	Santander Totta	1
25	Banco Brasil	1
26	Barclays	1
27	BPN Paribas	1

Fonte: Elaboração Própria

Os valores apresentados na terceira coluna das tabelas 6.2 e 6.3, relativos às instituições bancárias ineficientes estão escritos no formato $X(Y)$ onde X indica a instituição bancária de referência e Y é o valor de λ que permite identificar essa referência. Recorde-se que quando para uma instituição bancária existe mais do que uma referência, a mais importante será a que tiver maior valor para λ . Por exemplo, na tabela 6.3 para DMU 1 (Banco BIC) a melhor referência das quatro referidas é a DMU 3 (Banco Português de Investimento) pois a mesma apresenta um valor para λ superior aos das outras três.

Os resultados apresentados anteriormente mostram a existência de um número considerável de instituições bancárias consideradas eficientes pelos modelos CCR e BCC orientados para *inputs*. No caso do modelo CCR temos dez instituições bancárias que são eficientes enquanto no caso do modelo BCC esse número aumenta para dezasseis. Como se referiu no capítulo 5, e também no final do capítulo 3, tal facto constitui uma desvantagem associada a estes modelos e uma das formas de contornar esse problema é utilizar a programação multiobjectivo na metodologia DEA. Na figura 6.2 apresenta-se o gráfico relativo aos valores da eficiência obtidos pelo modelo BiO-MCDEA (com $\varepsilon = 0$), apresentado no capítulo 5, para as 27 instituições bancárias em análise. Para uma melhor comparação, são apresentados de novo os valores da eficiência obtidos pelo modelo CCR orientado para *inputs*.

Comparando os resultados obtidos por esses dois modelos, verifica-se que o número de instituições bancárias consideradas eficientes pelo modelo BiO-MCDEA é de três (Barclays, o Millennium BCP e o Banco Português de Investimento). Recorde que esse número foi de dez quando se utilizou o modelo CCR. Existe assim uma redução considerável no número de instituições bancárias eficientes quando se utiliza o modelo BiO-MCDEA em vez do modelo CCR. Pode então concluir-se que o modelo BiO-MCDEA resolve de certo modo o problema da falta de discriminação existente no modelo CCR orientado para *inputs*.

De referir ainda que para as instituições bancárias consideradas ineficientes pelo modelo CCR orientado para *inputs* os valores da eficiência fornecidos pelo modelo BiO-MCDEA são na maioria dos casos, cerca de 70%, inferiores aos fornecidos pelo modelo CCR.

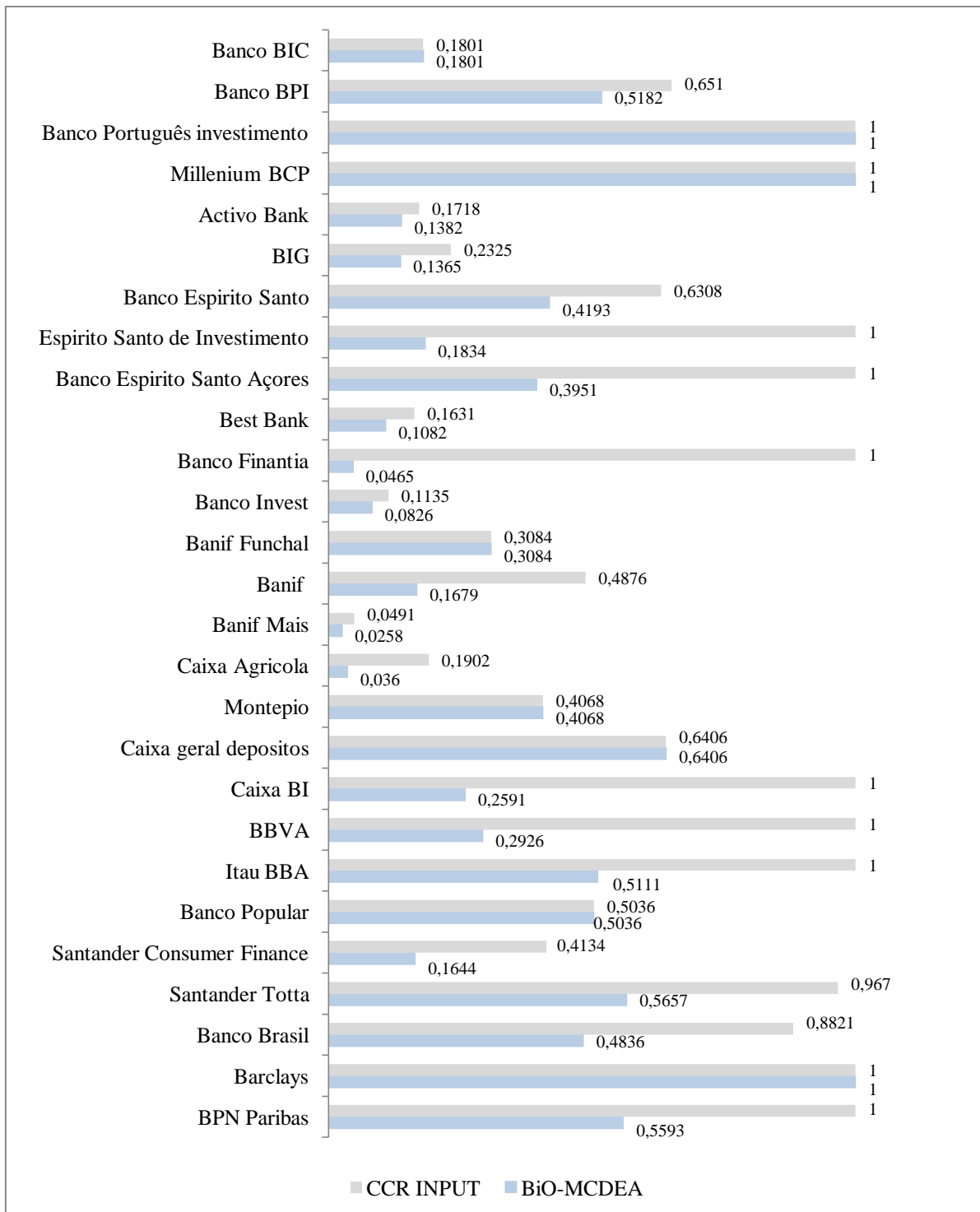


Figura 6.2 – Valores da eficiência das instituições bancárias obtidos pelos modelos CCR com orientação para *inputs* e BiO-MCDEA

Fonte: Elaboração própria

7. Conclusões

A avaliação de desempenho organizacional tem sofrido grandes alterações ao longo dos últimos anos devido a mudanças na sociedade, como sejam a globalização e consequente competitividade dos mercados. A avaliação de desempenho organizacional deixou de ser feita apenas por indicadores financeiros, passando a incluir-se na mesma indicadores não financeiros. Estas mudanças na avaliação de desempenho organizacional tiveram efeitos no ambiente organizacional. Desde logo, a necessidade de as organizações se adaptarem, da melhor forma possível, para terem uma melhoria contínua na sua avaliação, contribuindo assim para o seu crescimento e ajudando-as a combater a concorrência de forma mais eficaz, utilizando novas estratégias e formas de pensar.

Pode concluir-se que é importante que as organizações tenham uma forma de avaliar o seu desempenho organizacional, porque, desse modo, terão em consideração aspetos que não teriam antes da avaliação. Como se referiu neste trabalho existem vários métodos para avaliação do desempenho organizacional, entre os quais: os métodos tradicionais, baseados apenas em dados financeiros; os métodos paramétricos, baseados em técnicas estatísticas de regressão e correlação; e os métodos não paramétricos, baseados em técnicas de investigação operacional. Este trabalho teve por objetivo um estudo deste último tipo de métodos, designado por metodologia DEA.

A metodologia DEA surgiu devido à incapacidade de os métodos paramétricos em produzir resultados satisfatórios em processos de avaliação. Como foi referido, é uma metodologia que permite medir a eficiência de um conjunto de unidades produtivas homogéneas que consomem múltiplos recursos (*inputs*) e fornecem múltiplos produtos (*outputs*). Permite determinar uma fronteira de eficiência, onde se incluem as unidades eficientes, e projectar sobre essa fronteira as unidades ineficientes e, deste modo, indicar como as unidades ineficientes se podem tornar eficientes. A eficiência pode ser atingida de duas formas simples: reduzindo os *inputs* e mantendo constantes os *outputs* ou, reduzindo os *outputs* e mantendo constantes os *inputs*. Este aspeto é contemplado nos modelos de DEA, que podem assim ser orientados para *inputs* ou para *outputs*.

Neste trabalho começou-se por apresentar um estudo sobre os modelos clássicos da metodologia DEA, mais precisamente os modelos CCR (Charnes, Cooper e Rhodes (1978)), que considera retornos constantes de escala e o modelo BCC (Banker, Charnes

e Cooper (1984)), que considera retornos variáveis de escala. Os resultados obtidos por aplicação destes modelos à avaliação de desempenho de 27 instituições bancárias que operaram em Portugal durante o ano de 2012 mostram a existência de um elevado número de instituições consideradas eficientes. Como é referido na literatura da especialidade, a falta de poder de discriminação das unidades eficientes, intimamente relacionada com uma distribuição irrealista dos pesos, constituem os principais problemas de aplicação destes modelos.

Para solucionar esses problemas, vários métodos têm sido propostos. Um desses métodos consiste na utilização da programação multiobjectivo e foi abordado no capítulo 5, onde se apresentaram alguns modelos multiobjectivo de DEA, o modelo multicritério de Li e Reeves (1999), o modelo de programação por metas de Bal, Örkücü and Çelebioglu (2010) e o modelo de programação bi-objectivo de Ghasemi, Ignatius and Emrouznejad (2014), obtido do modelo multicritério considerando apenas 2 dos três objectivos. Como foi referido, no capítulo 5, a aplicação do modelo programação por metas, quer ao exemplo apresentado nesse capítulo, quer à avaliação das 27 instituições bancárias, permitiu constatar as falhas desse modelo referidas em Ghasemi, Ignatius and Emrouznejad (2014).

O modelo BiO-MCDEA, que é uma versão multiobjectivo do modelo CCR orientado para *inputs*, foi então utilizado para avaliação das 27 instituições bancárias. Os resultados obtidos pelo modelo BiO-MCDEA permitem avaliar quantitativamente o poder de discriminação deste modelo relativamente ao número de instituições eficientes determinadas pelo modelo CCR. De facto, com este modelo, o número de instituições eficientes determinadas pelo modelo CCR foi reduzido em 70%.

O exposto permite concluir que a aplicação da otimização multiobjectivo na metodologia DEA aumenta de forma considerável o poder de discriminação do modelo clássico de DEA, o modelo CCR orientado para *inputs*.

8. Referências Bibliográficas

- ANGULO MEZA, L.; BIONDI NETO, L; SOARES DE MELLO, J.C.C.B.; GOMES, E.G. – **Integrated System for Decision Support (SIAD – Sistema Integrado de Apoio à Decisão): a software package for data envelopment analysis model.** Pesquisa Operacional, 25:3 (2005) 493-503
- ANGULO MEZA, L; BIONDI NETO, L; SOARES DE MELLO, J.C.C.B.; GOMES, E.G.; COELHO, P.H.G. – **Free software for decision analysis: a software package for a data envelopment models.** In: 7th Internacional Conference on Enterprise Information Systems – ICEIS. 2 (2005) 207-212
- ASSOCIAÇÃO PORTUGUESA DE BANCOS – **Boletim Estatístico da Associação Portuguesa de Bancos Nº48, 2012 Anual.** [Em linha]. [Consult. Em 29 Nov. 2013]. Disponível em http://www.apb.pt/content/files/Boletim_Estatistico_No_48_Anual_2.pdf
- ATTADIA, L. C. L., MARTINS, R. A. – **Medição de desempenho com base para evolução da melhoria continua.** Revista de produção. 13:2 (2003)
- BAL, Hasan; ÖRKÇÜ, H. Hasan; ÇELEBIOĞLU, Salih – Improving the discrimination power and weights dispersion in the data envelopment analysis. Computer and Operations Research 37 (2010) 99:107.
- CASA NOVA, Sílvia P. C.; SANTOS, Ariovaldo – **Aplicação da Análise Envoltória de Dados utilizando variáveis contábeis.** Revista de Contabilidade e Organizações. 3:2 (2008) 132-154
- CHARNES, Abraham; COOPER, William W.; RHODES, E - **Measuring the efficiency of decision making units.** European Journal of Operation Research. 2 (1978) 429-444.
- CHEN, Xiaogang; SKULLY, Michael; BROWN, Kym – **Banking Efficiency in China: application of DEA to pre and pos-deregulation eras: 1993-2000.** China Economic Review 16 (2005) 229-245.

- CLÍMACO, João N.; ANTUNES, Carlos H.; ALVES, Maria J.G. – **Programação linear multiobjetivo: do modelo de programação linear clássico à consideração explícita de várias funções objetivo.** Coimbra: Imprensa da universidade de Coimbra, 2003. ISBN 978-989-26-0479-4
- COELLI, Timothy J.; Rao, D.S. Prasada; O'DONNELL, Christopher J.; BATTESE, George E. – **An Introduction to Efficiency and Productivity Analysis.** New York: Springer Science, 2005. ISBN 978-03587-24265-1
- COHON, Jared L. – **Multiobjective programming and planning.** New York: Academic Press, 1978. ISBN: 0121783502
- COOPER, William W. – **Origins, Uses of, and Relations Between Goal Programming and Data Envelopment Analysis.** Journal of Multi-Criteria Decision Analysis. 13 (2005) 3-11
- COOPER, William W.; SEIFORD, Lawrence M.; TONE, Kaoru – **Data Envelopment Analysis. A comprehensive Text With Models Applications Reference and DEA-Solver Software.** New York: Springer Science, 2007. ISBN 978-0387-45281-4
- COOPER, William W.; SEIFORD, Lawrence M.; ZHU, Joe - **Data Envelopment Analysis: History, Models and Interpretations.** In Handbook on Data Envelopment Analysis. Boston: Kluwer Academic Publishers (2004) 2-39.
- COSTA, J. A.; SAMPAIO E MELO, A. – **Dicionário da Língua Portuguesa.** 7ª Edição. Porto: Porto Editora. ISBN: 972-0-05001-2
- DUTRA, Ademar – **Metodologias para avaliar o desempenho organizacional: Revisão e Proposta de uma abordagem Multicritério.** Revista Contemporânea de Contabilidade. 2:3 (2005) 25 -56.
- EVANOFF, Douglas D.; ISRAILEVECH, Philip R. – **Productive efficiency in Banking.** Federal Reserve Bank of Chicago (1991) 11-32.

- FARREL, M. J. – **The Measurement of productive efficiency.** Journal of the Royal Statistical. Seria A (General). 120:3 (1957) 253-290.
- FERNANDES, Maria C. - **Desenvolvimento de um sistema de avaliação e melhoria de desempenho no sector do retalho.** Porto: Faculdade de engenharia da universidade do Porto. 2007. Tese doutoramento.
- GHALAYINI, Alaa M.; NOBLE, James S. - **The changing basis of performance measurement.** Internacional Journal of operations and production management. 16:8 (1996) 63-80.
- GHASEMI, M.R.; IGNATIUS, Joshua; EMROUZNEJAD, Ali - **A bi-objective weighted model for improving the discrimination power in MCDEA.** European Journal of Operational Research 233 (2014) 640:650.
- KAPLAN, R. S. e NORTON, D. P. – **Using the Balanced Scorecard as a Strategic Management System.** Harvard Business. Review. January – February, (1996) 1:12.
- LI, Xião-Bai; REEVES, Gary R. - **A Multiple Criteria approach to data envelopment analysis.** European Journal of Operation Research 115 (1999) 507-517.
- LIN, Thomas W.; O’LEAEY, Daniel E. – **Goal Programming applications in financial management.** Advances in Mathematical programming and financial planning. 3 (1993) 211-229. ISBN: 1-55938-255-1
- MEZA, Lidia Angulo, SOARES DE MELLO, J.C..C.B; CLÍMACO, J.C.N. – **Estudos conjuntos da análise envoltória de dados (DEA) e Programação linear multiobjectivo (PLMO): Uma Revisão Bibliográfica.** 2006 1:15
- PRATA, Bruno A.; ARRUDA, João B. F. – **Aplicação da Análise Envoltória de Dados na avaliação de eficiência de municípios: o caso do Estado do Ceará.** Fortaleza – CE – Brasil.

SOARES DE MELLO, João C. C. B.; MEZA, Lúcia A.; GOMES, Eliane G.; NETO, Luiz B. – **Curso de análise envoltória de dados**. SBPO – XXXVIII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional (2005).

SOARES DE MELLO, João C. C. B.; CLÍMACO, João C. N.; MEZA Lúcia A. – **Índice de eficiência MCDEA- TRIMAP**. XXXVIII Brasileiro de Pesquisa Organizacional (2006).

STEUER, Ralph E. – **Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation and Applications**. New York: John Wiley, 1986. ISBN: 047188846X

Apêndices

Apêndice A - Cálculos dos pontos da cada DMU do gráfico 3.13

DMUs (Instituições Bancárias)	Eixo X (Input 1/Output)	Eixo Y (Input 2/Output)	Ponto (Coordenadas)
A	$80/60 = 1,33(3)$	$60/60 = 1$	$(1,33(3);1)$
B	$20/160 = 0,125$	$100/160 = 0,625$	$(0,125;0,625)$
C	$40/180 = 0,22(2)$	$80/180 = 0,44(4)$	$(0,22(2);0,44(4))$
D	$20/50 = 0,4$	$40/50 = 0,8$	$(0,4;0,8)$
E	$60/200 = 0,3$	$80/200 = 0,4$	$(0,3;0,4)$
F	$60/180 = 0,33(3)$	$140/180 = 0,77(7)$	$(0,33(3);0,77(7))$

Apêndice B - Resultados obtidos pelo modelo CCR orientado para *inputs*.

DMUs (Instituições Bancárias)		Pesos						Eficiência
		Nº Empregados	Nº Balcões	Capital	Recursos Clientes	Recursos Instituição	Resp. por títulos	
1	Banco BIC	0,000543	0,000000	0,000001	0,000000	0,000000	0,000000	0,1801
2	Banco BPI	0,000000	0,000108	0,000001	0,000000	0,000000	0,000000	0,6510
3	Banco Português investimento	0,000000	0,000000	0,000050	0,000000	0,000000	0,000000	1
4	Millennium BCP	0,000095	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	1
5	Activo Bank	0,006993	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,1718
6	BIG	0,006024	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,2325
7	BES	0,000069	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,6308
8	BES Investimento	0,003441	0,167240	0,000000	0,000000	0,000001	0,000000	1
9	BES Açores	0,000000	0,000000	0,000057	0,000001	0,000000	0,000009	1
10	Best Bank	0,006157	0,000000	0,000001	0,000000	0,000002	0,000000	0,1631
11	Banco Finantia	0,019207	0,000000	-0,000012	0,000001	0,000001	-0,000004	1
12	Banco Invest	0,008333	0,000000	0,000000	0,000001	0,000001	0,000000	0,1135
13	Banif Funchal	0,000305	0,000000	0,000001	0,000000	0,000000	0,000000	0,3084
14	Banif	0,001475	0,533400	-0,000003	0,000001	0,000001	-0,000006	0,4876
15	Banif Mais	0,004506	0,001646	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,0491
16	Caixa Agricola	0,000261	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,1902
17	Montepio	0,000163	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,4068
18	Caixa geral depósitos	0,000052	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,6406
19	Caixa BI	0,000000	0,476150	0,000001	0,000000	0,000001	-0,000003	1
20	BBVA	0,001462	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	-0,048351	1
21	Itau BBA	-0,041660	0,000000	0,000010	-0,000012	0,000000	0,000003	1
22	Banco Popular	0,000473	0,000000	0,000001	0,000000	0,000000	0,000000	0,5036
23	Santander Consumer Finance	0,000000	0,060807	0,000011	0,000000	0,000001	0,000000	0,4134
24	Santander Totta	0,000000	0,000000	0,000002	0,000000	0,000000	0,000000	0,9670
25	Banco Brasil	0,000000	0,130161	0,000024	0,000000	0,000002	0,000000	0,8821
26	Barclays	0,000000	0,000000	0,000025	0,000000	0,000000	0,000000	1
27	BPN Paribas	0,000000	0,105469	0,000020	0,000000	0,000001	0,000000	1

Apêndice C- Resultados obtidos pelo modelo BCC orientado para *inputs*.

DMUs (Instituições Bancárias)		Pesos						Eficiência
		Nº Empregados	Nº Balcões	Capital	Recursos Clientes	Recursos Instituição	Resp. por títulos	
1	Banco BIC	0,000678	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,1823
2	Banco BPI	0,000000	0,000990	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,7492
3	Banco Português investimento	0,000000	0,000000	0,000050	0,000000	0,000000	0,000000	1
4	Millennium BCP	0,000111	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	1
5	Activo Bank	0,006006	0,000000	0,000003	0,000000	0,000000	0,000000	0,6178
6	BIG	0,006024	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,5381
7	BES	0,000156	0,000000	0,000000	0,000000	0,000001	0,000001	1
8	BES Investimento	0,000000	0,074826	0,000003	0,000000	0,000001	0,000001	1
9	BES Açores	0,000000	0,000000	0,000057	0,000001	0,000000	0,000009	1
10	Best Bank	0,005432	0,000000	0,000003	0,000000	0,000000	0,000000	0,5512
11	Banco Finantia	0,000000	0,499997	0,000000	0,000000	0,000000	-0,000002	1
12	Banco Invest	0,006489	0,000000	0,000004	0,000000	0,000000	0,000000	0,6323
13	Banif Funchal	0,000773	-0,003306	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,7425
14	Banif	0,000000	0,435573	0,000002	0,000000	0,000000	0,000000	0,9295
15	Banif Mais	0,003852	0,000000	0,000002	0,000000	0,000000	0,000001	0,3518
16	Caixa Agricola	0,000261	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	1
17	Montepio	0,000401	-0,001887	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,7051
18	Caixa geral depósitos	0,000082	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	1
19	Caixa BI	0,000000	0,432420	0,000002	-0,000003	0,000000	0,000000	1
20	BBVA	0,001319	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	-0,000323	1
21	Itau BBA	0,000643	0,000000	0,000002	0,000000	0,000000	0,000001	1
22	Banco Popular	0,000653	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,5307
23	Santander Consumer Finance	-0,018637	0,401545	0,000040	0,000000	0,000000	-0,191765	1
24	Santander Totta	0,000000	0,001566	0,000000	0,000000	0,000000	-0,000001	1
25	Banco Brasil	0,000000	0,121875	0,000027	0,000000	0,000002	0,000000	1
26	Barclays	0,000000	0,000000	0,000025	0,000000	0,000000	0,000000	1
27	BPN Paribas	0,000000	0,091092	0,000021	0,000000	0,000001	0,000000	1

Apêndice D- Retornos variáveis do Modelo BCC

DMUs (Instituições Bancárias)		Orientação para <i>Inputs</i>	
		u_0	Tipo de Retorno
1	Banco BIC	-0,111787	Decrescente
2	Banco BPI	-0,071725	Decrescente
3	Banco Português investimento	0,000000	Constante
4	Millennium BCP	-0,040925	Decrescente
5	Activo Bank	0,545326	Crescente
6	BIG	0,406110	Crescente
7	BES	-0,057407	Decrescente
8	BES Investimento	-0,454122	Decrescente
9	BES Açores	0,000000	Constante
10	Best Bank	0,493170	Crescente
11	Banco Finantia	0,999995	Crescente
12	Banco Invest	0,589199	Crescente
13	Banif Funchal	-0,140611	Decrescente
14	Banif	0,932991	Crescente
15	Banif Mais	0,351824	Crescente
16	Caixa Agricola	-0,223461	Decrescente
17	Montepio	-0,042334	Decrescente
18	Caixa geral depósitos	-0,013560	Decrescente
19	Caixa BI	1,400847	Crescente
20	BBVA	-0,118234	Decrescente
21	Itau BBA	0,035614	Crescente
22	Banco Popular	-0,107676	Decrescente
23	Santander Consumer Finance	1,000002	Crescente
24	Santander Totta	-0,290764	Decrescente
25	Banco Brasil	0,173954	Crescente
26	Barclays	0,000000	Constante
27	BPN Paribas	0,138115	Crescente

Apêndice E- Resultados obtidos pelo modelo BiO-MCDEA orientado para *inputs*.

DMUs (Instituições Bancárias)		Pesos						Eficiência
		Nº Empregados	Nº Balcões	Capital	Recursos Clientes	Recursos Instituição	Resp. por títulos	
1	Banco BIC	0,000543	0,000000	0,000001	0,000000	0,000000	0,000000	0,1801
2	Banco BPI	0,000121	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,5182
3	Banco Português investimêto	0,005269	0,000000	0,000009	0,000000	0,000000	0,000003	1
4	Millennium BCP	0,000068	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	1
5	Activo Bank	0,004710	0,000000	0,000008	0,000000	0,000000	0,000003	0,1382
6	BIG	0,002926	0,000000	0,000005	0,000000	0,000000	0,000002	0,1365
7	BES	0,000008	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,4193
8	BES Investimento	0,000133	0,000000	0,000003	0,000000	0,000000	0,000001	0,1834
9	BES Açores	0,000000	0,044873	0,000011	0,000000	0,000001	0,000004	0,3951
10	Best Bank	0,003930	0,000000	0,000007	0,000000	0,000000	0,000002	0,1082
11	Banco Finantia	0,000286	0,000000	0,000006	0,000000	0,000000	0,000001	0,0465
12	Banco Invest	0,004534	0,000000	0,000008	0,000000	0,000000	0,000003	0,0826
13	Banif Funchal	0,000305	0,000000	0,000001	0,000000	0,000000	0,000000	0,3084
14	Banif	0,003778	0,000000	0,000006	0,000000	0,000000	0,000002	0,1679
15	Banif Mais	0,002593	0,000000	0,000004	0,000000	0,000000	0,000002	0,0258
16	Caixa Agricola	0,000000	0,001103	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,0360
17	Montepio	0,000163	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,4068
18	Caixa geral depósitos	0,000052	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,6406
19	Caixa BI	0,003319	0,000000	0,000006	0,000000	0,000000	0,000002	0,2591
20	BBVA	0,000637	0,000000	0,000001	0,000000	0,000000	0,000000	0,2926
21	Itau BBA	0,000000	0,000259	0,000002	0,000000	0,000000	0,000000	0,5111
22	Banco Popular	0,000473	0,000000	0,000001	0,000000	0,000000	0,000000	0,5036
23	Santander Consumer Finance	0,003466	0,000000	0,000006	0,000000	0,000000	0,000002	0,1644
24	Santander Totta	0,000150	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,5657
25	Banco Brasil	0,009152	0,000000	0,000015	0,000001	0,000001	0,000006	0,4836
26	Barclays	0,000487	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	1
27	BPN Paribas	0,007125	0,000000	0,000012	0,000001	0,000001	0,000004	0,5593