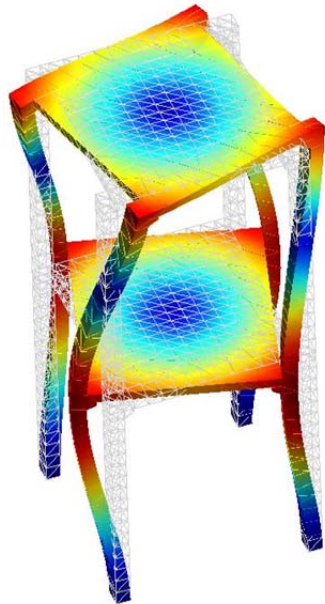




INSTITUTO SUPERIOR DE ENGENHARIA DE LISBOA

Área Departamental de Engenharia Civil



**Análise dinâmica de uma estrutura.
Estudo numérico e experimental.**

PEDRO TIAGO DE FREITAS MENDES
Licenciado em Engenharia Civil

Dissertação para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil com
Especialização em Estruturas

Orientadores:

Mestre, José Alberto Rodrigues, Prof. Adjunto (ISEL)
Doutor, Paulo Jorge Henriques Mendes, Prof. Adjunto (ISEL)

Júri:

Presidente:

Mestre, Cristina Ferreira Xavier Brito Machado, Prof. Coordenadora (ISEL)

Vogais:

Doutor, Paulo Xavier Candeias, Eq. Prof. Adjunto (ISEL)
Mestre, José Alberto Rodrigues, Prof. Adjunto (ISEL)
Doutor, Paulo Jorge Henriques Mendes, Prof. Adjunto (ISEL)

Novembro de 2012

Dedicatoria

Às meus pais Avelino e Isabel

Agradecimentos

A elaboração deste trabalho resulta da contribuição de inúmeras pessoas, a quem aproveito para deixar aqui os meus sinceros agradecimentos.

Gostaria de expressar o meu mais sincero agradecimento aos professores mestres José Alberto Rodrigues e Eng. Paulo Jorge Henriques Mendes, por toda a disponibilidade, dedicação, entusiasmo e conhecimentos transmitidos.

Pretendo ainda, manifestar a minha gratidão aos colegas, amigos e familiares em especial ao meus pais e tios pelo apoio e pela compreensão para a elaboração deste trabalho.

Resumo

Com o presente trabalho pretende-se estudar e compreender o comportamento dinâmico de estruturas de engenharia civil, de forma a permitir a elaboração de algumas metodologias para o estudo e análise de problemas de dinâmica de estruturas.

Apresenta-se uma revisão dos principais fundamentos da modelação matemática do comportamento dinâmico, com o estudo de sistemas de 1 grau de liberdade e posterior generalização para sistemas de múltiplos graus de liberdade. Apresentam-se também as formulações para análises de identificação modal no domínio do tempo e no domínio da frequência.

Atendendo que a resolução do problema dinâmico deve cumprir duas etapas: integração no espaço, e integração no tempo. Para a 1^a etapa abordam-se os fundamentos dos métodos numéricos de integração no espaço (em particular, o método dos elementos finitos) com vista à implementação da sua formulação na ferramenta computacional *freeFEM++*. Para a 2^a etapa abordam-se os métodos numéricos de integração no domínio do tempo (em particular, o método de Newmark), de forma a determinar a resposta de uma estrutura quando submetida a acções dinâmicas.

Adicionalmente são introduzidos alguns conceitos essenciais ao estudo de resultados experimentais obtidos através da realização de ensaios de vibrações.

Por último, estuda-se um modelo físico de um edifício de dois pisos, com base na análise de resultados de um ensaio de vibração ambiental e no desenvolvimento de dois modelos numéricos (em *freeFEM++* e em *SAP2000*) para comparação e análise dos resultados obtidos e validação da ferramenta computacional desenvolvida. Após a calibração dos modelos numéricos aos resultados obtidos experimentalmente, procede-se a uma análise dinâmica dos modelos numéricos sujeitos a uma acção sísmica, com a posterior comparação e análise de resultados obtidos.

Abstract

The present work aims to study and understand the dynamic behaviour of civil engineering structures, to allow the development of some methodologies for the study and analysis of problems in structural dynamics.

It presents a review of the main foundations of mathematical modelling of the dynamic behaviour, with the study of single degree of freedom systems (SDOF) and subsequent generalization to multiple degrees of freedom systems (MDOF). It also presents formulations for the identification of modal analysis in time domain and frequency domain.

Considering that the resolution of dynamic problem must satisfy two stages: integration in space and time integration. For the 1st stage is approached the basis of numerical methods integration in space (in particular the finite element method (FEM)) to obtain a formulation to implement in software *freeFEM++*. For the 2nd stage, numerical integration methods in the time domain are approached (in particular, the method of Newmark), to obtain the response of the structure when submitted to dynamic loads.

Additionally some essential concepts are introduced to the study of experimental results obtained by performing vibration tests.

Finally, is studied a physical model of a two floor building, based on the analysis of results of an ambient vibration test and on the development of two numerical models (in *freeFEM++* and *SAP2000*) for comparison and analysis of results and validation of the computational tool developed. After calibration of numerical models to experimental results, proceeds to a dynamic analysis of numerical models subjected to seismic action, with subsequent comparison and analysis of results.

Palavras chave / Keywords

Análise dinâmica / Dynamics analysis

Análise modal / Modal analysis

Comportamento dinâmico / Dynamic behaviour

Dinâmica de estruturas / Structural dynamics

Ensaio de vibração / Vibration tests

Elasticidade linear / Linear Elasticity

Frequências naturais / Natural frequencies

Identificação modal / Modal identification

Método de Newmark / Newmark's method

Método dos elementos finitos / Finite element method

Modelos numéricos / Numerical models

Modelos físicos / Physical models (Scale models)

Modos de vibração / Mode shapes

Conteúdo

1	Introdução	1
1.1	Enquadramento do tema	1
1.2	Objectivos	3
1.3	Organização do texto	5
2	Análise dinâmica de estruturas	9
2.1	Sistemas de 1 grau de liberdade	9
2.1.1	Equação de movimento do sistema de 1 GL	10
2.1.2	Vibração livre do sistema de 1 GL	11
2.1.3	Análise no domínio do tempo	12
2.1.4	Análise no domínio da frequência	15
2.2	Sistemas de múltiplos graus de liberdade	18
2.2.1	Equação de movimento do sistema de múltiplos graus de li- berdade	19
2.2.2	Vibração livre do sistema de múltiplos graus de liberdade . . .	23
2.2.3	Condições de ortogonalidade	26
2.2.4	Normalização dos modos de vibração	28
3	Métodos numéricos de integração no espaço	31
3.1	Formulação fraca do problema	34
3.2	Integração no espaço. Método dos Elementos Finitos	36
3.3	Condições de fronteira	39
4	Métodos numéricos de integração no tempo	41
4.1	Integração no tempo. Método de Newmark	42
4.1.1	Algoritmo	45

4.1.2	Exemplo de aplicação	46
5	Ensaaios experimentais na análise dinâmica de estruturas	49
5.1	Considerações iniciais	49
5.2	Planeamento e realização de ensaios	50
5.3	Seleccção do tipo de equipamento	52
5.4	Tratamento da informação experimental	56
5.4.1	Pré-processamento da informação experimental	56
5.4.2	Processamento da informação experimental	58
5.4.3	Interpretação de resultados experimentais e comparação com resultados numéricos	59
6	Caso de estudo	61
6.1	Considerações iniciais	61
6.2	Caracterização do modelo físico	61
6.2.1	Características do material	62
6.3	Modelos numéricos	63
6.3.1	Modelo <i>freeFEM++</i>	63
6.3.2	Modelo <i>SAP2000</i>	66
6.4	Ensaio dinâmico	68
6.5	Análise e comparação de resultados	73
6.6	Análise sísmica dos modelos numéricos calibrados	75
6.6.1	Acção exterior	75
6.6.2	Passo de integração	77
6.6.3	Comparação dos modelos numéricos	78
6.6.4	Modelo <i>freeFEM++</i> calibrado	78
6.6.5	Modelo <i>SAP2000</i> calibrado	79
6.6.6	Análise e comparação de resultados	81
7	Conclusões	83
7.1	Conclusões do trabalho	83
7.2	Propostas de desenvolvimentos futuros	85
8	Bibliografia	87

9	Anexos	90
A	Programa <i>GMSH</i>	91
A.1	Construção da malha	91
B	Programa <i>freeFEM++</i>	93
B.1	Frequências naturais e modos de vibração	93
B.2	Análise dinâmica	97

Lista de Figuras

1.1	Lista de edifícios já construídos com mais altura no mundo.	2
1.2	<i>Burj Khalifa Bin Zayid</i> : (a) edifício concluído em 2009, no Dubai, Emirados Árabes Unidos e (b) respectivo modelo numérico em elementos finitos.	2
1.3	Principais conceitos da dinâmica de estruturas: (a) sistema de 1 GL e (b) de N GL.	3
1.4	Análise dinâmica de estruturas por via experimental.	4
1.5	Estudo de caso: (a) Modelo reduzido da estrutura de um edifício de 2 pisos e (b) respectivo modelo numérico em elementos finitos desenvolvido no programa <i>freeFEM++</i>	5
2.1	Sistema de 1 GL: (a) modelo usualmente idealizado e (b) diagrama de corpo livre.	9
2.2	Conceito de impulso unitário: (a) força impulsiva unitária aplicada num instante genérico τ e (b) respectiva resposta de um sistema de 1 GL.	13
2.3	Decomposição de uma força contínua e arbitrária ao longo do tempo numa sequência de impulsos infinitamente próximos.	14
2.4	Resolução numérica do integral de Duhamel por aplicação do método dos trapézios.	14
2.5	Transformação da equação de equilíbrio dinâmico para o domínio da frequência, recorrendo à transformada de Fourier.	18
2.6	Exemplo de aplicação: (a) análise plana do modelo físico do edifício de dois pisos com a respectiva (b) representação dos GL e distâncias considerados.	19

2.7	Componentes da rigidez a considerar para (a) deslocamento unitário em u_1 e (b) deslocamento unitário em u_2	21
2.8	(a) Secção transversal dos pilares e (b) rigidez associada a um deslocamento unitário.	22
2.9	Modos de vibração normalizados à matriz de massa obtidos no modelo plano em <i>MATLAB</i>	26
3.1	Determinação do campo de deslocamentos ao longo do tempo de um ponto da estrutura.	32
3.2	Princípios fundamentais da mecânica estrutural: abordagem do problema em formulação forte e em fraca.	36
3.3	Exemplos de elementos finitos: (a) elemento cúbico com 8 pontos nodais e (b) elemento tetraédrico com 10 pontos nodais.	37
4.1	Exemplos de hipóteses de variação da aceleração dentro de cada intervalo de tempo Δt no método de Newmark: (a) aceleração média constante e (b) aceleração com variação linear.	44
4.2	Processo de integração do método de Newmark.	46
4.3	Edifício de 2 pisos com aceleração na base e respectivas respostas ao nível dos pisos.	47
4.4	Acção sísmica considerada no exemplo de aplicação do método de Newmark.	48
4.5	Deslocamentos ao nível dos pisos para a acção sísmica considerada pelo método de Newmark desenvolvido em <i>MATLAB</i>	48
5.1	Exemplo de ensaio realizado numa única fase de ensaio.	51
5.2	Exemplo de técnica de ensaio baseada em várias fases de ensaio.	51
5.3	Exemplos e características de alguns acelerómetros piezoeléctricos.	53
5.4	Exemplos e características de alguns sistemas de aquisição de dados compatíveis com acelerómetros piezoeléctricos.	54
5.5	Exemplos e características de alguns acelerómetros de tipo “force balance”.	55
5.6	Exemplos e características de alguns sistemas de aquisição de dados compatíveis com acelerómetros de tipo “force balance”.	55

5.7	Aplicação de filtros: (a) “passa baixo”, (b) “passa alto” e (c) “passa banda”.	57
6.1	Caso de estudo: (a) modelo físico de um edifício de 2 pisos e respectivas (b) dimensões totais [MOREIRA, 2009].	62
6.2	(a) Interface do programa <i>freeFEM++</i> com parte da linguagem da programação utilizada e (b) interface do programa <i>GMSH</i> com a representação da malha da estrutura.	64
6.3	Configurações modais e respectivas frequências de vibração obtidas pelo modelo numérico do programa <i>freeFEM++</i> .	65
6.4	Modelo numérico desenvolvido no programa <i>SAP2000</i> .	66
6.5	Configurações modais e respectivas frequências de vibração obtidas pelo modelo numérico do programa <i>SAP2000</i> .	67
6.6	(a) Disposição espacial de acelerómetros no modelo físico a ensaiar e respectiva (b) representação no programa <i>ARTEMIS Testor</i> .	69
6.7	Equipamento utilizado na realização dos ensaios experimentais ao modelo físico.	69
6.8	Dados de medições sem a aplicação de filtros.	70
6.9	Dados de medições com a aplicação do filtro “passa alto” a 1 Hz.	70
6.10	Interface do programa <i>ARTEMIS Testor</i> .	71
6.11	Interface do programa <i>ARTEMIS Extractor</i> .	72
6.12	Espectro dos valores singulares da matriz das densidades espectrais de potência da resposta em aceleração.	72
6.13	Configurações modais e respectivas frequências naturais de vibração obtidas pelo modelo experimental no programa <i>ARTEMIS Extractor</i> .	74
6.14	Representação gráfica de um registo de aceleração sísmica obtido no sismo em <i>El Centro</i> , 1940, Califórnia, EUA.	76
6.15	Indicação do ponto a considerar para a determinação do deslocamento ao longo do tempo. Coordenadas (0.03, 0.215, 1.05).	78
6.16	Representação gráfica do deslocamento ao longo do tempo do ponto da laje superior em <i>freeFEM++</i> .	79
6.17	Representação gráfica da aceleração na base utilizada em <i>SAP2000</i> .	80

6.18	Representação gráfica do deslocamento ao longo do tempo do ponto da laje superior em <i>SAP2000</i>	80
6.19	Representação gráfica dos resultados obtidos em <i>SAP2000</i>	81
6.20	Representação gráfica do erro absoluto entre os resultados em <i>freeFEM++</i> e em <i>SAP2000</i>	82

Lista de Tabelas

6.1	Comparação dos resultados das frequências naturais de vibração dos modelos numéricos <i>freeFEM++</i> e <i>SAP2000</i>	68
6.2	Comparação dos resultados das frequências naturais de vibração calculadas nos modelos numéricos com as identificadas no modelo físico.	75
6.3	Parte de um registo de acelerações do sismo em <i>El Centro</i> , 1940, Califórnia, EUA.	76
6.4	Erro relativo dos valores máximos dos modelos numéricos desenvolvidos.	82

Simbologia

Latinas maiúsculas

\underline{A}_1 Matriz auxiliar do método de Newmark

\underline{A}_2 Matriz auxiliar do método de Newmark

\underline{B} Matriz das derivadas das funções de forma ($\underline{B} = \underline{L} \underline{N}$)

\underline{D} Matriz de elasticidade

E Módulo de elasticidade

G Módulo de distorção

K_V Módulo de compressibilidade volumétrica

\underline{L} Operador diferencial de compatibilidade ou matriz dos factores de participação modal

N Número de graus de liberdade do modelo

\underline{N} Matriz das funções de forma

T_N Período natural de vibração

T_m Período do modo de vibração m

W Trabalho de uma força

W_{ext} Trabalho de uma força externa

W_{int} Trabalho de uma força interna

Latinas minúsculas

- a_b Vector de aceleração sísmica
- c Amortecimento específico $[(N/ms^{-1})/m^3]$
- c Amortecimento de um corpo
- c_1 Constante do amortecimento de Rayleigh
- c_2 Constante do amortecimento de Rayleigh
- \underline{c} Matriz de amortecimento
- \underline{c}^e Matriz de amortecimento elementar (de um elemento finito)
- \underline{c}^* Matriz de amortecimento modal
- f Força exterior aplicada a um corpo
- f_A Força de amortecimento de um corpo
- f_C Frequência de corte num filtro no pré-processamento de dados experimentais [Hz]
- f_E Força elástica de um corpo
- f_I Força de inércia de um corpo
- f_{Max} Frequência máxima a identificar num ensaio de vibração ambiental [Hz]
- f_N Frequência natural de vibração [Hz]
- f_{Nyq} Frequência de Nyquist [Hz]
- f_S Frequência de amostragem num ensaio de vibração ambiental [Hz]
- \underline{f} Vector de forças mássicas exteriores $\underline{f} = \underline{f}(x, y, z, t)$
- \underline{f} Vector de forças exteriores
- \underline{f}^e Vector de forças elementares (de um elemento finito)
- \underline{f}^* Vector de forças modais

- \underline{g} Vector de aceleração gravítica
- k Rigidez de um corpo
- \underline{k} Matriz de rigidez
- \underline{k}^e Matriz de rigidez elementar (de um elemento finito)
- m Massa específica [kg/m³]
- m Massa de um corpo
- \underline{m} Matriz de massa
- \underline{m}^e Matriz de massa elementar (de um elemento finito)
- \underline{m}^* Matriz de massa modal
- s Número da iteração nos métodos numéricos de integração no tempo correspondente ao instante de tempo t
- t Tempo [s]
- u Deslocamento de um corpo
- $u_1(x, y, z, t)$ Deslocamento de um ponto na direcção Ox
- \underline{u} Campo de deslocamentos $\underline{u} = \underline{u}(x, y, z, t)$
- $\dot{\underline{u}}$ Campo de velocidades $\dot{\underline{u}} = \dot{\underline{u}}(x, y, z, t)$
- $\ddot{\underline{u}}$ Campo de acelerações $\ddot{\underline{u}} = \ddot{\underline{u}}(x, y, z, t)$
- \underline{u} Vector de deslocamentos
- \underline{u}^e Vector de deslocamentos dos pontos nodais de um elemento finito
- \underline{u}^* Vector de deslocamentos modal
- \underline{u}_0 Vector de deslocamentos iniciais
- \dot{u} Velocidade de um corpo
- $\dot{\underline{u}}$ Vector de velocidades

$\dot{\underline{u}}^e$ Vector de velocidades dos pontos nodais de um elemento finito

$\dot{\underline{u}}^*$ Vector de velocidades modal

$\dot{\underline{u}}_0$ Vector de velocidades iniciais

\ddot{u} Aceleração de um corpo

$\ddot{\underline{u}}$ Vector de acelerações

$\ddot{\underline{u}}^e$ Vector de acelerações dos pontos nodais de um elemento finito

$\ddot{\underline{u}}^*$ Vector de acelerações modal

$\ddot{\underline{u}}_0$ Vector de acelerações iniciais

\underline{v} Campo de deslocamentos virtuais $v = v(x, y, z, t)$

Gregas maiúsculas

$d\Gamma$ Elemento de linha

$d\Omega$ Elemento de volume

Δt Passo de iteração nos métodos numéricos de integração no tempo

$\Delta \underline{u}_t$ Variação do vector de deslocamento no número da iteração correspondente ao instante de tempo t no método de Newmark

$\Delta \dot{\underline{u}}_t$ Variação do vector da velocidade no número da iteração correspondente ao instante de tempo t no método de Newmark

$\Delta \ddot{\underline{u}}_t$ Variação do vector da aceleração no número da iteração correspondente ao instante de tempo t no método de Newmark

Γ Domínio em \mathbb{R}

Ω Fronteira do domínio em \mathbb{R}

$\underline{\Omega}^2$ Matriz espectral

Gregas minúsculas

α Constante do método de Newmark

β Constante do método de Newmark

γ_b Peso volúmico do betão [kg/m³]

ν Coeficiente de Poisson

ω Frequência angular amortecida [rad/s]

ω_A Frequência angular amortecida [rad/s]

ω_N Frequência natural angular [rad/s]

ϕ_n Vector modal (vector com o modo de vibração n)

$\hat{\phi}_n$ Vector modal normalizado (vector com o modo de vibração n normalizado)

$\underline{\phi}$ Matriz modal (com os modos de vibração)

$\hat{\underline{\phi}}$ Matriz modal normalizada

$\underline{\varepsilon}$ Vector de deformações

$\underline{\sigma}$ Vector de tensões

ξ Coeficiente de amortecimento relativo

Abreviaturas (siglas)

FDD Método de decomposição no domínio da frequência

FRF Função de resposta em frequência

GL Graus de liberdade

MDF Método das Diferenças Finitas

MEF Método dos Elementos Finitos

PTV Princípio dos Trabalhos Virtuais

Capítulo 1

Introdução

1.1 Enquadramento do tema

No passado, as estruturas de engenharia civil eram dimensionadas recorrendo apenas a análises estáticas, considerando acções constantes ao longo do tempo (ex. acções gravíticas, como o peso próprio e cargas permanentes). Este dimensionamento era limitado às acções estáticas devido à fraca capacidade informática existente na época, incapaz de resolver elevadas quantidades de cálculo numérico envolvido nos algoritmos de análise dinâmica. Com o decorrer do tempo, o avanço computacional tornou possível a consideração de análises dinâmicas, passando-se a dar importância a inúmeros fenómenos que variam de grandeza, direcção ou sentido no tempo. Desta forma, para além das acções permanentes, acções como a movimentação de pessoas e dos motores de máquinas sobre lajes, a incidência do vento em edifícios altos, o tráfego rodoviário sobre pontes e a ocorrência de sismos passam a ser fundamentais no dimensionamento de estruturas.

Um melhor conhecimento das acções dinâmicas possibilitou um estudo e análise mais detalhados do comportamento dinâmico estrutural. De facto, o conhecimento dos conceitos da dinâmica de estruturas tem permitido a construção de pontes com vãos máximos maiores, a construção de barragens com elevado porte e alturas máximas elevadas, bem como a construção de edifícios que vêm batendo sucessivos recordes em termos de altitudes máximas (ver Figura 1.1).

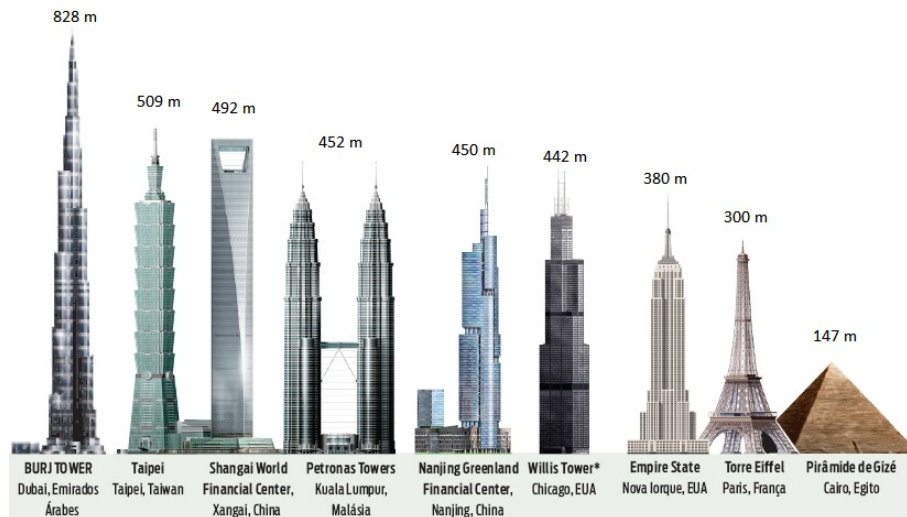


Figura 1.1: Lista de edifícios já construídos com mais altura no mundo.

Por outro lado, este conhecimento dos conceitos da dinâmica de estruturas impulsionou a necessidade de caracterizar convenientemente alguns dos fenômenos que originam as ações dinâmicas, de forma a evitar danos ou até o colapso¹ de estruturas. O melhor conhecimento das ações dinâmicas e do comportamento dinâmico estrutural tem permitido a criação de soluções mais esbeltas e flexíveis (melhorando o aspecto estético das estruturas) e o desenvolvimento de modelos numéricos mais fiáveis (ver Figura 1.2(b)).



(a)



(b)

Figura 1.2: *Burj Khalifa Bin Zayed*: (a) edifício concluído em 2009, no Dubai, Emirados Árabes Unidos e (b) respectivo modelo numérico em elementos finitos.

¹Exemplo: ponte de Tacoma Narrows que, após 4 meses da sua construção (1940), colapsou devido à ocorrência de fenômenos de ressonância (provocados pela incidência do vento na estrutura).

Tendo em conta os aspectos referidos, pretende-se com a elaboração deste trabalho abordar algumas formulações que permitem estudar o comportamento dinâmico das estruturas de engenharia civil.

1.2 Objectivos

Como foi evidenciado anteriormente, a compreensão do comportamento dinâmico de estruturas é uma área importante no dimensionamento, na concepção estrutural e no controlo e manutenção de estruturas de engenharia civil. Neste sentido, pretende-se com a realização deste trabalho abordar e desenvolver algumas metodologias que permitam estudar problemas de dinâmica de estruturas através da ferramenta computacional *freeFEM++*, versão 3.20 [HECHT, 2012].

Assim, um dos primeiros objectivos delineados para este trabalho corresponde ao estudo/revisão de alguns dos principais conceitos associados à dinâmica de estruturas e a sua posterior discussão. Começa-se por abordar os sistemas mais simples, conhecidos por sistemas de um grau de liberdade (1 GL): estabelecendo a equação de equilíbrio dinâmico, podendo esta ser resolvida no domínio do tempo ou no domínio da frequência; seguindo-se a generalização para casos mais complexos, de sistemas com múltiplos graus de liberdade: transpondo a equação de equilíbrio dinâmico para o espaço modal, permitindo a simplificação em vários sistemas de 1 GL (ver Figura 1.3).

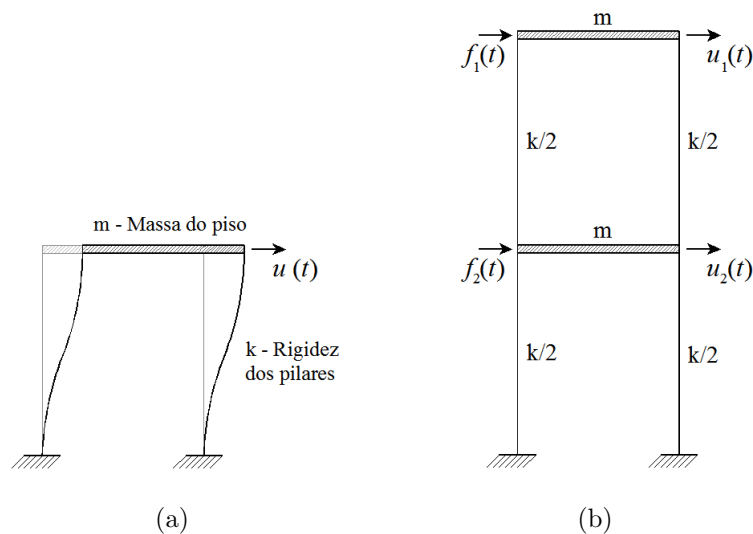


Figura 1.3: Principais conceitos da dinâmica de estruturas: (a) sistema de 1 GL e (b) de N GL.

Neste trabalho faz-se uma introdução ao método dos elementos finitos (MEF) com vista à sua utilização na ferramenta computacional *freeFEM++* no âmbito de problemas de análise dinâmica de estruturas. Ainda nesta perspectiva, estabelece-se como objectivo o estudo de métodos numéricos para a resolução de problemas de dinâmica de estruturas no domínio do tempo, recorrendo ao método de Newmark, e a sua implementação em *freeFEM++*. Com o objectivo de validar e discutir resultados numéricos da análise dinâmica de estruturas são também introduzidos alguns conceitos essenciais para o estudo de resultados experimentais obtidos através da realização de ensaios de vibrações (ver Figura 1.4).

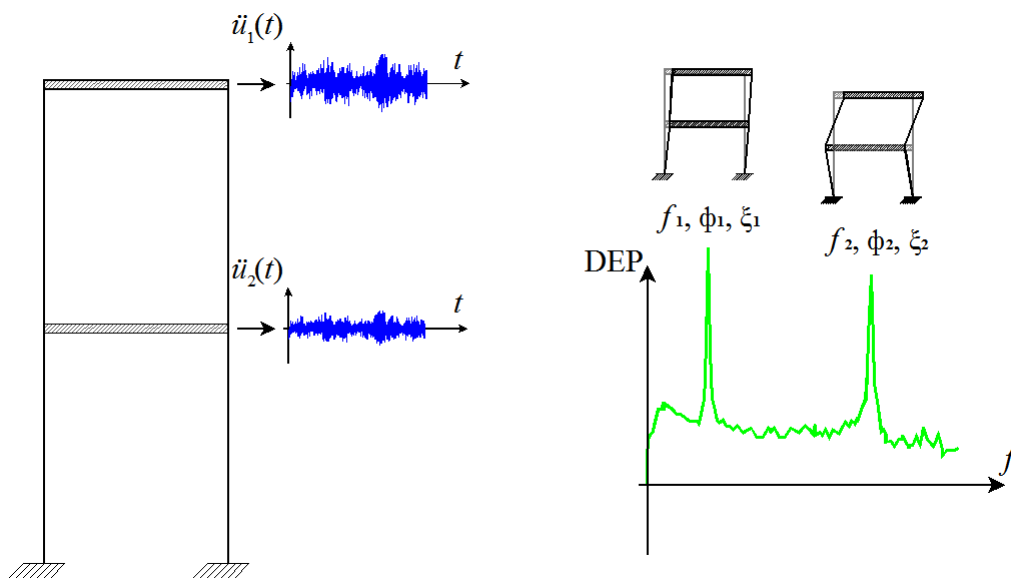


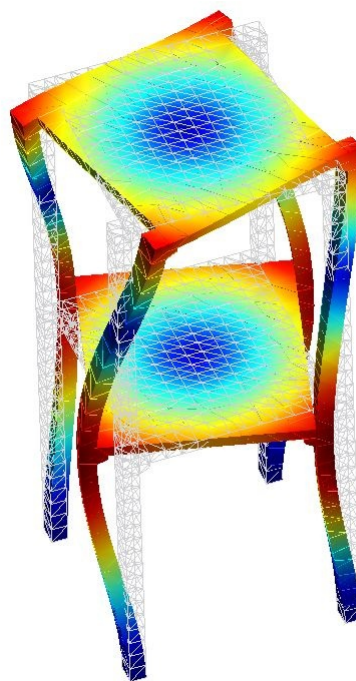
Figura 1.4: Análise dinâmica de estruturas por via experimental.

Com o objectivo de aplicar e validar os conceitos referidos anteriormente introduz-se o estudo de um modelo reduzido da estrutura de um edifício de 2 pisos (ver Figura 1.5(a)), o qual envolve:

- O desenvolvimento de modelos numéricos em *freeFEM++* (ver Figura 1.5(b)), *SAP2000*, versão 15 [COMPUTERS AND STRUCTURES, INC., 2011] e *MATLAB*, versão 7.10 [THE MATHWORKS, INC., 2010];
- A realização de ensaios de vibrações ao modelo físico;
- A calibração dos modelos numéricos; e
- A análise dinâmica nos modelos numéricos, considerando uma acção sísmica.



(a)



(b)

Figura 1.5: Estudo de caso: (a) Modelo reduzido da estrutura de um edifício de 2 pisos e (b) respectivo modelo numérico em elementos finitos desenvolvido no programa *freeFEM++*.

1.3 Organização do texto

O presente texto encontra-se estruturado em sete capítulos, incluindo a introdução e as conclusões. De seguida resumem-se os principais assuntos abordados em cada capítulo.

Capítulo 2 - Análise dinâmica de estruturas

Neste capítulo apresentam-se os principais fundamentos da modelação matemática do comportamento dinâmico de estruturas, abordando a formulação da equação do movimento de sistemas simples, sistemas de 1 grau de liberdade (1 GL) em vibração livre, de forma a obter a frequência natural de vibração e a história de deslocamentos desse sistema ao longo do tempo. Ainda para sistemas de 1 GL, abordam-se alguns conceitos de análises no domínio do tempo e no domínio da frequência. Segue-se uma generalização dos fundamentos para sistemas de múltiplos graus de liberdade (N GL), obtendo a equação de movimento (matricial) destes sistemas (constituída por um sistema de equações dependentes), com vista à obtenção das frequências naturais de vibração e dos respectivos modos de vibração do sistema.

Abordam-se ainda algumas condições que permitem simplificar as matrizes do sistema de equações em matrizes diagonais, ficando o sistema de equações constituído por equações independentes (as equações passam a ser desacopladas entre si).

Capítulo 3 - Métodos numéricos de integração no espaço

Neste capítulo analisa-se a formulação dos métodos numéricos de integração no espaço com vista à resolução do problema de elasticidade linear tridimensional. Como se pretende implementar um método numérico (neste caso, o MEF) no programa *freeFEM++*, é necessário deduzir a formulação fraca deste problema, que se obtém através da formulação variacional ou do princípio dos trabalhos virtuais (PTV). Com a aplicação da aproximação fundamental do MEF obtêm-se as equações de equilíbrio a verificar em cada elemento, que por sobreposição ou assemblagem, dão origem à equação de equilíbrio global da estrutura.

Capítulo 4 - Métodos numéricos de integração no tempo

Neste capítulo, após a integração em ordem às coordenadas espaciais, aborda-se os principais fundamentos dos métodos numéricos de integração no tempo, em particular do método de Newmark.

Após a obtenção das equações que permitem a aproximação dos deslocamentos e das velocidades para um determinado instante de tempo, desenvolve-se um algoritmo numérico do método de Newmark que permita resolver a equação de equilíbrio dinâmico para uma força externa genérica. De forma a facilitar a interpretação deste método, implementa-se este algoritmo numérico no programa *MATLAB*, por ter uma linguagem mais intuitiva, no entanto pretende-se implementar este algoritmo no programa *freeFEM++*.

Capítulo 5 - Ensaios experimentais na análise dinâmica de estruturas

Neste capítulo, introduzem-se os fundamentos necessários para o planeamento e execução de ensaios experimentais dinâmicos, em particular ensaios de vibração ambiental, a partir dos quais são identificados os parâmetros modais da estrutura em análise. Segue-se uma descrição de algum do equipamento disponível para a elaboração deste tipo de ensaios, e introduzem-se alguns dos principais cuidados a ter no tratamento da informação experimental. Abordam-se ainda os métodos

utilizados para a identificação modal de estruturas de engenharia civil, possibilitando a caracterização do comportamento das estruturas.

Capítulo 6 - Caso de estudo

Neste capítulo, após a abordagem dos principais fundamentos da modelação matemática do comportamento dinâmico de estruturas e da identificação modal desenvolve-se uma rotina de cálculo no programa *freeFEM++*, com a criação da malha de elementos finitos a partir do programa *GMSH*, e estuda-se um exemplo de um modelo físico reduzido de um edifício de dois pisos. Após a descrição das características desse caso de estudo, analisam-se e comparam-se os resultados obtidos no modelo físico pelos ensaios experimentais com os resultados numéricos obtidos pelos modelos desenvolvidos no programa *freeFEM++* e no programa *SAP2000*.

Após esta comparação de resultados e posterior calibração dos modelos numéricos ao modelo físico, pretende-se analisar os modelos numéricos a uma acção variável ao longo do tempo, em que se desenvolve uma análise sísmica através de um registo de aceleração obtido para o sismo de *El Centro*.

Capítulo 7 - Conclusões

No último capítulo, são apresentadas as conclusões e as considerações finais a retirar da realização deste trabalho, apresentando-se também algumas propostas para desenvolvimentos futuros.

Capítulo 2

Análise dinâmica de estruturas

2.1 Sistemas de 1 grau de liberdade

Um sistema de linearidade elástica estrutural ou mecânico é normalmente definido através das suas propriedades físicas essenciais: massa do corpo, propriedades elásticas (flexibilidade ou rigidez) e amortecimento.

Na Figura 2.1(a) apresenta-se um modelo genérico, usualmente idealizado na literatura [CHOPRA, 1995], [CLOUGH, *et al.*, 1995] para um sistema com 1 GL, conhecido também por oscilador de 1 GL. Este modelo fica definido pela massa do corpo representada por m , pela rigidez do corpo representada por k e pelo amortecimento do corpo representado por c , com um deslocamento $u(t)$ devido a uma força exterior $f(t)$. Associado a este tipo de esquema está o diagrama de corpo livre (ver Figura 2.1(b)), que estabelece o equilíbrio de forças associado ao modelo.

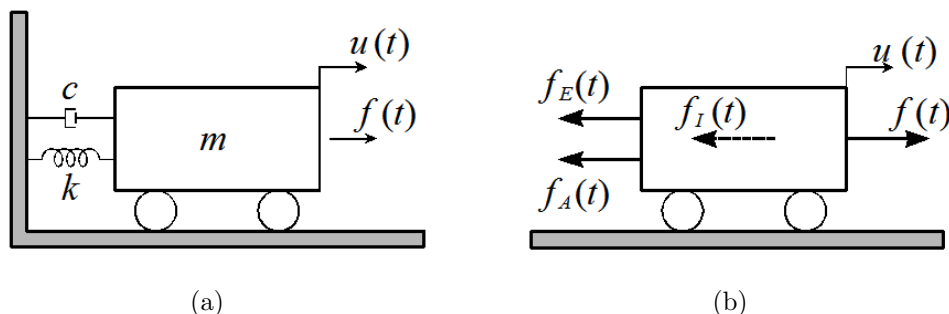


Figura 2.1: Sistema de 1 GL: (a) modelo usualmente idealizado e (b) diagrama de corpo livre.

A partir da ilustração anterior do diagrama de corpo livre (Figura 2.1(b)) pode-se

verificar que o equilíbrio de forças actuantes no corpo é dado por:

$$\underbrace{f_I(t) + f_A(t) + f_E(t)}_{\text{Forças internas}} = \underbrace{f(t)}_{\text{Forças externas}} \quad (2.1)$$

Sendo $f_I(t)$ a força de inércia do sistema, $f_A(t)$ a força de amortecimento do sistema e $f_E(t)$ a força elástica do sistema.

Neste capítulo pretende-se definir as variáveis que constituem a equação (2.1), que descrevem o movimento e a estrutura em análise, resultando daí a equação de equilíbrio dinâmico para osciladores de 1 GL. Após resolver a equação de equilíbrio dinâmico em regime livre, apresentam-se duas vias para a obtenção da resposta estrutural: no domínio do tempo e no domínio da frequência.

2.1.1 Equação de movimento do sistema de 1 GL

A formulação da equação do movimento para um sistema estrutural dinâmico com 1 GL pode ser obtida por várias vias, como se descreve na bibliografia da especialidade [CHOPRA, 1995], [CLOUGH, *et al.*, 1995]. Esta equação pode ser expressa através da segunda lei de Newton do movimento, que define uma força exterior $f(t)$ aplicada a um corpo com massa m igual à taxa de variação da quantidade de movimento:

$$f(t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(m \frac{\partial u}{\partial t} \right)$$

No princípio D'Alembert assume-se que a massa m de um corpo sujeita a uma aceleração desenvolve uma força interna, conhecida como força de inércia $f_I(t)$, que é proporcional e oposta à aceleração. Considerando que a massa m deste corpo se mantém constante ao longo do tempo pode-se escrever:

$$f_I(t) = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \equiv \underbrace{m \ddot{u}(t)}_{\text{Força de inércia}}$$

Sabendo que a força de amortecimento $f_A(t)$ é proporcional à velocidade $\dot{u}(t)$ e que a força elástica $f_E(t)$ é proporcional ao deslocamento $u(t)$, a equação de equilíbrio

dinâmico (2.1) pode ser definida por:

$$\underbrace{m \ddot{u}(t)}_{\text{Força de inércia}} + \underbrace{c \dot{u}(t)}_{\text{Força de amortecimento}} + \underbrace{k u(t)}_{\text{Força elástica}} = \underbrace{f(t)}_{\text{Força exterior}} \quad (2.2)$$

Em que m , c e k são constantes ao longo do tempo. $f(t)$ representa as forças externas aplicadas ao sistema estrutural (variáveis ao longo do tempo) e $\ddot{u}(t)$, $\dot{u}(t)$ e $u(t)$ representam as histórias de acelerações, de velocidades e de deslocamentos ao longo do tempo. A equação anterior (equação 2.2) corresponde então a um sistema de 1 equação diferencial linear de 2ª ordem a 1 incógnita (os deslocamentos $u(t)$).

2.1.2 Vibração livre do sistema de 1 GL

A obtenção da frequência natural de vibração de um sistema com 1 GL é usualmente introduzida desprezando-se o efeito do amortecimento do sistema estrutural ($(c = 0)$) e as forças externas aplicadas à estrutura ($f(t) = 0$) [MENDES, 2005]. Desta forma, a equação de equilíbrio dinâmico (2.2) pode ser escrita da seguinte forma:

$$m \ddot{u}(t) + k u(t) = 0 \quad (2.3)$$

Uma vez que não existem forças externas aplicadas, a oscilação do sistema é devida apenas às condições iniciais (deslocamento e velocidade iniciais), desta forma a resposta em deslocamento $u(t)$ tem de verificar as condições iniciais, dadas por:

$$u(0) = u_0 \quad \text{e} \quad \dot{u}(0) = \dot{u}_0 \quad , \quad \text{para} \quad t = 0$$

Como solução geral da equação anterior (2.3) pode-se considerar uma função do tipo sinusoidal, com frequência ω_N , definida por:

$$u(t) = a \cos(\omega_N t) + b \sen(\omega_N t) \quad , \quad \text{com} \quad \omega_N = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad [\text{rad/s}] \quad (2.4)$$

Em que a e b são valores constantes e ω_N é usualmente definida como a frequência angular natural, que corresponde à frequência que um oscilador com massa m e rigidez k tende a oscilar naturalmente.

Associados ao conceito de frequência angular natural estão outros dois, de frequência natural de vibração f_N , e de período natural de vibração T_N [MENDES, 2012], definidos por:

$$f_N = \frac{\omega_N}{2\pi} \text{ [Hz]} \quad ; \quad T_N = \frac{1}{f_N} \text{ [s]}$$

Para se obter uma solução particular da equação (2.3) é necessário definir as constantes a e b através das condições iniciais, como se mostra de seguida:

$$\begin{cases} u(t) = u_0 \Leftrightarrow a \underbrace{\cos(\omega_N 0)}_1 + b \underbrace{\text{sen}(\omega_N 0)}_0 = u_0 \Leftrightarrow a = u_0 \\ \dot{u}(t) = \dot{u}_0 \Leftrightarrow -a \omega_N \underbrace{\text{sen}(\omega_N 0)}_0 + b \omega_N \underbrace{\cos(\omega_N 0)}_1 = \dot{u}_0 \Leftrightarrow b = \frac{\dot{u}_0}{\omega_N} \end{cases}$$

Assim, a solução particular da equação (2.3) fica definida por:

$$u(t) = u_0 \cos(\omega_N t) + \frac{\dot{u}_0}{\omega_N} \text{sen}(\omega_N t) \quad (2.5)$$

Que representa o deslocamento (a oscilação) que o sistema estrutural sofre ao longo do tempo, devido a condições iniciais não nulas.

Para casos em que se pretende determinar a resposta estrutural para uma acção dinâmica qualquer, a equação de equilíbrio dinâmico (com a forma da equação (2.2)) pode ser resolvida no domínio do tempo, recorrendo ao integral de Duhamel, ou transpondo-a para o domínio da frequência, através da transformada de Fourier [COOLEY, *et al.*, 1965], como se descreve de seguida.

2.1.3 Análise no domínio do tempo

Em inúmeras situações práticas, o sistema estrutural a analisar está sujeito a uma acção dinâmica com variação arbitrária ao longo do tempo, como é o caso da excitação devido à acção do vento ou de um sismo. Nestes casos, para 1 GL a equação de equilíbrio dinâmico que se pretende satisfazer tem a forma da equação (2.2), cuja resposta dinâmica se obtém através do integral de Duhamel [CHOPRA, 1995], [CLOUGH, *et al.*, 1995].

Associado a este integral está o conceito de impulso unitário e a determinação da resposta dinâmica de um oscilador de 1 GL a esse impulso unitário. Na Figura 2.2(a) apresenta-se a aplicação de uma força impulsiva unitária (aplicada num instante genérico τ) e na Figura 2.2(b) a respectiva resposta dinâmica.

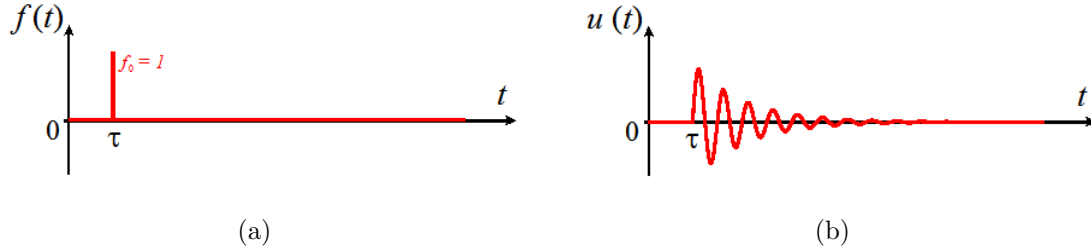


Figura 2.2: Conceito de impulso unitário: (a) força impulsiva unitária aplicada num instante genérico τ e (b) respectiva resposta de um sistema de 1 GL.

A resposta $u(t)$ a este impulso unitário é dada por uma função $h(t - \tau)$, designada por função de resposta impulsiva:

$$u(t) = h(t - \tau) \quad \text{sendo} \quad h(t - \tau) = \frac{1}{m\omega_A} \text{sen}(\omega_A(t - \tau)) e^{-\xi\omega_N(t - \tau)}$$

Recorrendo ao princípio da sobreposição de efeitos² e assumindo que uma força com variação contínua e arbitrária ao longo do tempo pode ser descrita por uma sequência de impulsos infinitamente próximos (distanciados por Δt), de diferentes intensidades (ver Figura 2.3), no limite, a resposta dinâmica de um oscilador de 1 GL pode ser obtida considerando as respostas a cada um desses impulsos. Esta resposta é definida pelo integral de Duhamel, dado por:

$$u(t) = \int_0^t f(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

A avaliação numérica deste integral pode ser feita pelo método dos trapézios, onde se aproxima o desenvolvimento da força pela soma da área dos trapézios (ver Figura 2.4), embora seja uma aplicação pouco eficiente em termos computacionais, pois para cada instante t é necessário calcular a área de todos os trapézios até ao respectivo instante t .

²Uma vez que se recorre ao princípio da sobreposição de efeitos, a aplicação do integral de Duhamel fica restrita a sistemas lineares.

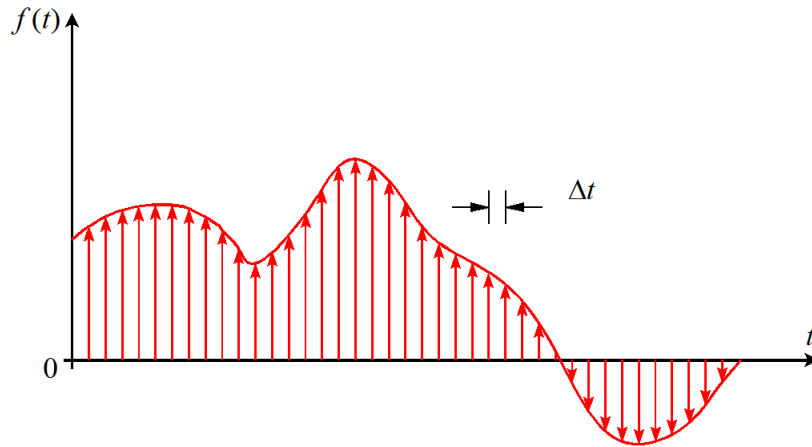


Figura 2.3: Decomposição de uma força contínua e arbitrária ao longo do tempo numa sequência de impulsos infinitamente próximos.

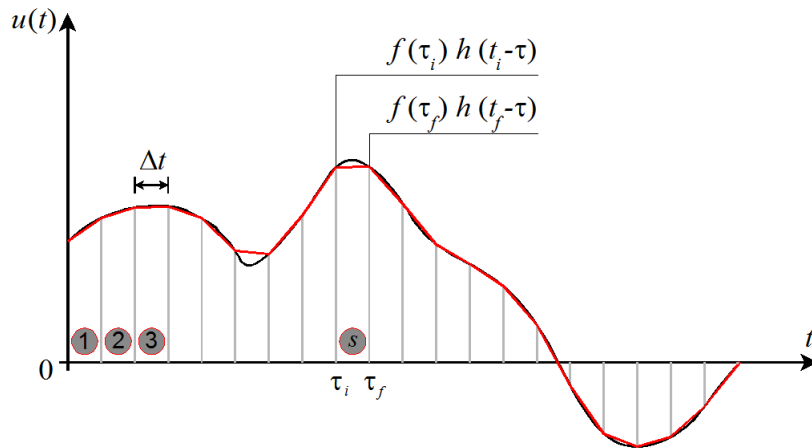


Figura 2.4: Resolução numérica do integral de Duhamel por aplicação do método dos trapézios.

Como uma alternativa viável surgem os métodos numéricos de integração no tempo, que permitem cálculos menos morosos. Nestes métodos, a história da excitação é dividida em intervalos de tempo discretos Δt (discretização temporal). Para cada intervalo de tempo, a resposta é determinada com base nos parâmetros desse intervalo, não sendo necessário calcular todos os intervalos de tempo anteriores. Tratam-se de métodos aproximados, em que o grau de aproximação à resposta exacta depende, entre outros factores, do intervalo de tempo Δt considerado.

Para além da rapidez de cálculo, uma vez que a determinação da resposta é um problema independente para cada intervalo de tempo, estes métodos apresentam outra valência: a possibilidade de variar as propriedades da estrutura de um intervalo de tempo para outro, permitindo assim considerar a não linearidade do material

(análises não lineares).

Existem vários métodos numéricos de integração, onde se podem indicar os seguintes:

- “Piecewise exact method”
- Método das diferenças finitas
- Método das diferenças centrais
- Método de Euler
- Método de Newmark

No capítulo 4 deste trabalho abordam-se com maior detalhe os métodos numéricos de integração no tempo, em particular o método de Newmark.

2.1.4 Análise no domínio da frequência

Como foi dito anteriormente, também é possível resolver a equação de equilíbrio dinâmico (2.2) no domínio da frequência. A transposição para este domínio é obtida recorrendo à transformada de Fourier, em que se consideram condições iniciais nulas, no entanto pode-se recorrer a uma generalização desta transformada que permite uma análise em frequência para condições iniciais não nulas, conhecida por transformada de Laplace.

Como fundamento à transformada de Fourier surgem as séries de Fourier, onde se assume que uma função real f de variável real t , definida no domínio do tempo num intervalo finito $[0, T]$, pode ser definida no domínio da frequência pela soma do seu valor médio com um número infinito de funções sinusoidais definidas no mesmo intervalo de tempo (ver Figura 2.5), podendo-se escrever (numa forma trigonométrica):

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)] \quad , \quad \omega_n = n\Delta\omega = n \left(\frac{2\pi}{T} \right) \quad (2.6)$$

Em que:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \langle f(t) \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \\
 a_n &= 2 \langle f(t) \cos(\omega_n t) \rangle_T = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(\omega_n t) dt \quad , \quad n = 1, 2, 3, \dots \\
 b_n &= 2 \langle f(t) \sin(\omega_n t) \rangle_T = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(\omega_n t) dt \quad , \quad n = 1, 2, 3, \dots
 \end{aligned}$$

A representação no domínio da frequência de uma função definida no domínio do tempo, é conseguida através de duas funções, que reúnem os coeficientes $a_n = a(\omega_n)$ e $b_n = b(\omega_n)$ das várias ondas sinusoidais, no entanto a representação das funções no domínio da frequência pode ser efectuada recorrendo aos conceitos de amplitude $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = A(\omega_n)$ e de fase $\phi_n = \arctan(b_n/a_n) = \Phi(\omega_n)$ das várias ondas (ver Figura 2.5).

Sabendo que $\omega_n = n(2\pi/T)$, à medida que se pretende aproximar a função $f(t)$ em intervalos de tempo com comprimento superiores ($T \uparrow$), menor será $\Delta\omega$ ($\Delta\omega \downarrow$), ou seja, menor será o espaçamento entre as várias ondas no domínio da frequência (ver Figura 2.5). Assim, quando T tende para ∞ , $\Delta\omega$ tende para $d\omega$ (parcelas infinitesimais), a variável discreta ω_n tende para uma variável contínua ω e o operador de somatório é substituído pelo operador de integral. Assim, no limite, recorrendo ainda à fórmula de Euler dos complexos ($e^{ix} = \cos x + i\sin x$), pode-se escrever a transformada de Fourier, dada por:

$$\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega_n t} dt \quad (2.7)$$

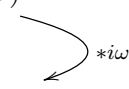
E a correspondente transformada inversa de Fourier:

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega_n t} d\omega$$

Onde $F(\omega)$ corresponde a uma função complexa com uma variável real contínua ω , definida no domínio da frequência.

Equação de equilíbrio dinâmico no domínio da frequência

Uma vez que a transformada de Fourier de uma qualquer função $f(t)$ é definida pela equação (2.7), a transformada de Fourier da derivada da função $f(t)$ pode ser definida pela multiplicação da transformada de Fourier da função por $i\omega$, como se mostra de seguida:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(t)] &= F(\omega) \\ \mathcal{F}[f'(t)] &= i\omega F(\omega) \end{aligned}$$


Assim, aplicando a transformada de Fourier à equação de equilíbrio dinâmico (2.2) (ver Figura 2.5), obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t)] &= \mathcal{F}[f(t)] \\ -m\omega^2 U(\omega) + ic\omega U(\omega) + kU(\omega) &= F(\omega) \end{aligned}$$

Que, de forma mais simplificada pode ser escrita na seguinte forma:

$$U(\omega) = H(\omega) F(\omega)$$

Em que $H(\omega)$ é designada por função de resposta em frequência (FRF) de um oscilador de 1 grau de liberdade³ (ver Figura 2.5), definida por:

$$H(\omega) = \frac{1}{(k - m\omega^2) + ic\omega} = \frac{1/m}{(\omega_N^2 - \omega^2) + i(2\xi\omega_N\omega)} \quad (2.8)$$

Note-se que, embora no domínio do tempo a função $f(t)$ seja representada apenas por um gráfico, a representação gráfica no domínio da frequência da FRF (equivalente a $f(t)$ mas no domínio da frequência) é feita recorrendo a dois gráficos, denominados espectros. Como já foi dito anteriormente, a representação da FRF pode ser efectuada através do espectro das amplitudes ($\sqrt{R^2 + I^2}$) e o espectro das fases ($\arctan(-I/R)$), em que R corresponde à parte real e I à parte imaginária da função complexa $H(\omega)$.

³Esta FRF corresponde à transformada de Fourier da função de resposta impulsiva $h(t - \tau)$.

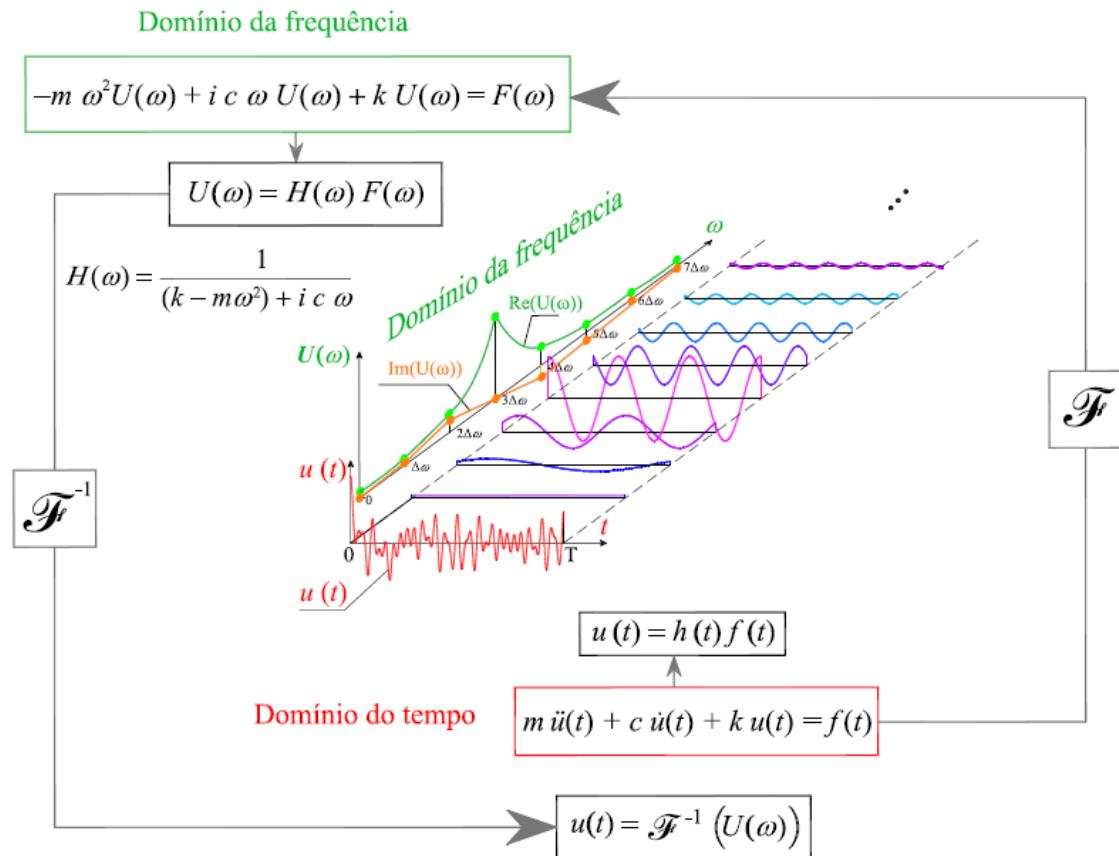


Figura 2.5: Transformação da equação de equilíbrio dinâmico para o domínio da frequência, recorrendo à transformada de Fourier.

Analisando a equação (2.8) conclui-se que a amplitude da FRF tem um máximo para a abcissa $\omega = \omega_N \sqrt{1 - \xi^2}$, que corresponde à frequência angular amortecida de um oscilador. Visto que, no âmbito das estruturas de engenharia civil, a gama de valores do coeficiente de amortecimento relativo ξ é baixa, conclui-se que a frequência amortecida constitui uma boa aproximação da frequência natural do oscilador ($\omega \approx \omega_N$).

2.2 Sistemas de múltiplos graus de liberdade

Em geral, a análise da resposta dinâmica de estruturas envolve a consideração de vários GL, não sendo possível a simplificação para apenas 1 GL [MENDES, 2005]. Nesta análise, a determinação da resposta dinâmica é usualmente efectuada adoptando um modelo matemático adequado, que contemple as propriedades físicas e geométricas da estrutura analisada, bem como a aplicação das leis da Mecânica Es-

trutural, utilizando um sistema de equações diferenciais que caracterize o movimento estrutural.

De modo a facilitar a apresentação dos diversos conceitos necessários para a generalização para sistemas de múltiplos graus de liberdade recorre-se a um exemplo de aplicação dado pela análise plana do modelo físico do edifício de dois pisos (ver Figura 2.6(a)), com a consideração de apenas dois GL, os deslocamentos ao nível de cada piso (ver Figura 2.6(b)).

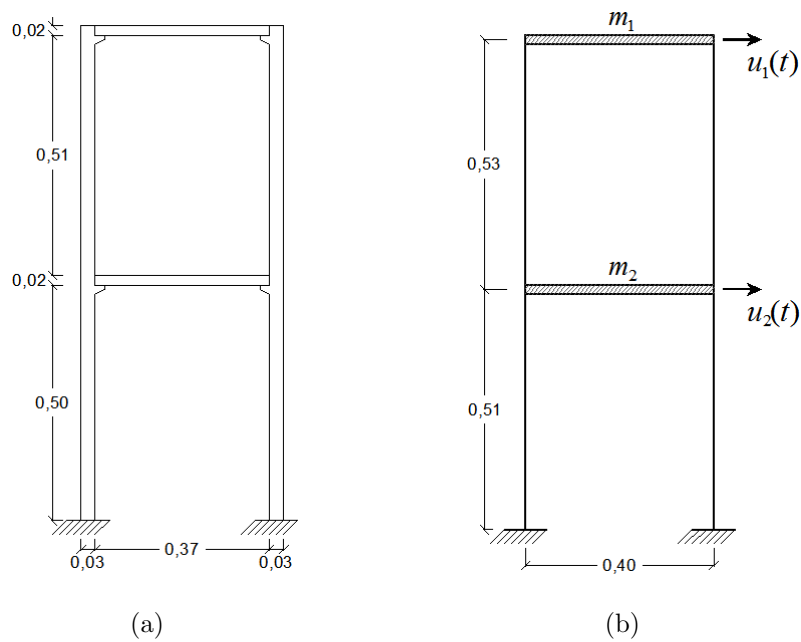


Figura 2.6: Exemplo de aplicação: (a) análise plana do modelo físico do edifício de dois pisos com a respectiva (b) representação dos GL e distâncias considerados.

2.2.1 Equação de movimento do sistema de múltiplos graus de liberdade

A equação que aproxima o comportamento dinâmico de uma estrutura, discretizada em N graus de liberdade, sujeita a uma força exterior pode ser definida através de um sistema de N equações diferenciais lineares de 2ª ordem a N incógnitas, dado por:

$$\underbrace{m \ddot{u}(t)}_{\text{Força de inércia}} + \underbrace{c \dot{u}(t)}_{\text{Força de amortecimento}} + \underbrace{k u(t)}_{\text{Força elástica}} = \underbrace{f(t)}_{\text{Força exterior}} \quad (2.9)$$

Em que \underline{m} , \underline{c} e \underline{k} correspondem respectivamente às matrizes de massa, de amortecimento e de rigidez do modelo estrutural, e $\ddot{\underline{u}}(t)$, $\dot{\underline{u}}(t)$ e $\underline{u}(t)$ correspondem respectivamente aos vectores com as histórias das acelerações, das velocidades e dos deslocamentos e $\underline{f}(t)$ representa o vector de forças exteriores aplicadas em cada grau de liberdade.

Matriz de massa

Para modelos em que a massa se encontra distribuída por toda a estrutura, é necessário considerar a transmissão de forças de inércia. Nestes casos, a matriz de massa que se obtém é uma matriz em “banda”, com a seguinte forma:

$$\underline{m} = \begin{bmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix}$$

Os coeficientes desta matriz podem ser obtidos através do PTV ou do MEF [MENDES, 2012]. Por exemplo, utilizando o MEF, os coeficientes da matriz de massa m_{ij} são definidos por:

$$m_{ij} = \int_V m N_i N_j dV$$

Em que m representa a massa específica do material (kg / m^3) e N_i e N_j as funções de forma.

No entanto, como se conhece a massa das lajes – a do piso superior tem 8,0 kg e a do piso inferior tem 8,1 kg – opta-se por seguir uma abordagem na óptica do exposto em [PAZ, *et al.*, 2004], onde se acrescenta o contributo da massa dos pilares, obtendo, por aproximação, a matriz de massa do tipo “cheia” dada por:

$$\underline{m} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11,5 & 3,5 \\ 3,5 & 15,0 \end{bmatrix} \text{ [kg]}$$

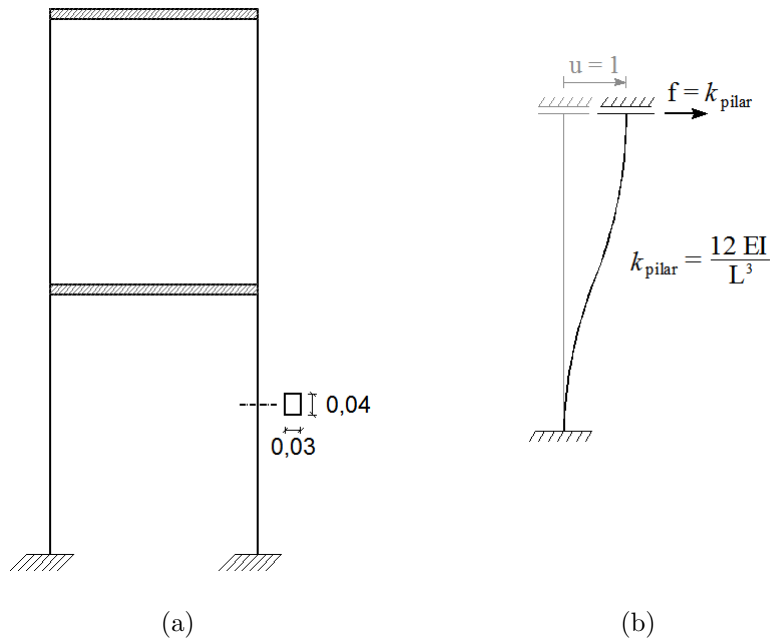


Figura 2.8: (a) Secção transversal dos pilares e (b) rigidez associada a um deslocamento unitário.

Matriz de amortecimento

A matriz de amortecimento \underline{c} pode ser obtida de forma explícita, recorrendo ao PTV ou ao MEF (de forma análoga à matriz de massa \underline{m}), embora seja usual a utilização do conceito de amortecimento de Rayleigh [MENDES, 2012]. Este conceito é definido por uma proporcionalidade às matrizes de massa \underline{m} e de rigidez \underline{k} , fazendo com que a matriz \underline{c} também seja uma matriz “cheia”, dada por:

$$\underline{c} = c_1 \underline{m} + c_2 \underline{k}$$

Em que c_1 e c_2 são constantes da matriz de amortecimento de Rayleigh que quantificam a proporção existente entre as matrizes de massa \underline{m} e de rigidez \underline{k} , respectivamente.

Para exemplo do edifício de dois pisos, assumem-se os valores $c_1 = 0,01$ e $c_2 = 0,0001$, obtendo-se a seguinte matriz de amortecimento:

$$\underline{c} = \begin{bmatrix} 95,87 & -95,72 \\ -95,72 & 203,38 \end{bmatrix} [N/ms^{-1}]$$

Equação de equilíbrio dinâmico

Após a definição das matrizes de massa \underline{m} , de rigidez \underline{k} e de amortecimento \underline{c} para o exemplo de aplicação, pode-se escrever a correspondente equação matricial de equilíbrio dinâmico:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1(t) \\ \ddot{u}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_1(t) \\ \dot{u}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}$$

Esta equação matricial corresponde a um sistema de duas equações diferenciais lineares de 2ª ordem a duas incógnitas⁴, que correspondem aos deslocamentos $u_1(t)$ e $u_2(t)$.

2.2.2 Vibração livre do sistema de múltiplos graus de liberdade

Tal como na análise do sistema estrutural de 1 GL, a obtenção das frequências e dos modos de vibração naturais de um sistema estrutural de múltiplos graus de liberdade é conseguida com base na análise do movimento estrutural em regime livre, isto é, assumindo que não existem forças exteriores aplicadas à estrutura, e não considerando o efeito do amortecimento do material da estrutura. Assim, o sistema de equações a resolver é o seguinte:

$$\begin{cases} \underline{m}\ddot{\underline{u}}(t) + \underline{k}\underline{u}(t) = \underline{0} \\ \text{Condições iniciais} \end{cases} \quad (2.10)$$

Particularizando para o modelo do edifício de dois pisos, obtém-se um sistema de duas equações diferenciais lineares de 2ª ordem a duas incógnitas (equações dependentes) com a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1(t) \\ \ddot{u}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

⁴as equações diferenciais encontram-se dependentes.

Para obter uma solução do sistema de equações anterior pode-se proceder à transformação das coordenadas estruturais (correspondentes aos deslocamentos nos diversos GL da estrutura) para coordenadas modais, através de uma combinação linear de soluções linearmente independentes dada por [MENDES, 2012]:

$$\underline{u}(t) = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \cos(\omega_1 t) + b_1 \sin(\omega_1 t) \\ a_2 \cos(\omega_2 t) + b_2 \sin(\omega_2 t) \end{bmatrix} = \underline{\phi}_n u_n^*(t) \quad (2.11)$$

Em que $\underline{\phi}_n$ corresponde à configuração modal da estrutura e não varia com o tempo e $u_n^*(t)$ corresponde ao deslocamento ao longo do tempo em cada GL dado pela função sinusoidal definida na equação (2.4), dado por:

$$u_n^*(t) = a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)$$

Onde as constantes a_n e b_n podem ser também determinadas a partir das condições iniciais, como foi referido anteriormente.

Substituindo a expressão (2.11) na equação de equilíbrio a resolver (2.10), obtém-se:

$$[\underline{k} - \omega_n^2 \underline{m}] \underline{\phi}_n u_n^*(t) = \underline{0}$$

Visto que se trata de um problema dinâmico, podem-se desprezar as soluções triviais da equação anterior: $u_n^*(t) = \underline{0}$ (que originam relações de deslocamentos nulas) e $\underline{\phi}_n = \underline{0}$ (que consideram que não existem relações de deslocamentos). Assim, desenvolvendo a igualdade anterior:

$$[\underline{k} - \omega_n^2 \underline{m}] \underline{\phi}_n = \underline{0} \Leftrightarrow \underline{\phi}_n = [\underline{k} - \omega_n^2 \underline{m}]^{-1} \underline{0} = \frac{Adj [\underline{k} - \omega_n^2 \underline{m}]}{|\underline{k} - \omega_n^2 \underline{m}|} \underline{0}$$

Conclui-se que, para que o sistema de equações (2.10) tenha uma solução não trivial, é necessário que o denominador da fracção anterior seja nulo, ou seja, é necessário verificar a seguinte condição:

$$|\underline{k} - \omega_n^2 \underline{m}| = 0 \quad (2.12)$$

Desta forma, a obtenção das frequências e dos modos de vibração naturais da estrutura é dada pela resolução de um problema de valores e vectores próprios definido por:

$$|\underline{k} - \lambda \underline{m}| \underline{\phi}_n = \underline{0} \quad (2.13)$$

Onde os valores próprios dados por λ correspondem aos quadrados das frequências angulares de vibração (ω_n^2) e os vectores próprios $\underline{\phi}_n$ correspondem aos vectores com os modos de vibração (configuração modal da estrutura para cada frequência). Optando por uma disposição matricial, o conjunto dos valores ω_n^2 podem ser arrumados numa matriz $\underline{\Omega}^2$, usualmente designada por matriz espectral e os vectores $\underline{\phi}_n$ numa matriz $\underline{\phi}$, usualmente designada por matriz modal, com as seguintes formas:

$$\underline{\Omega}^2 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \omega_N^2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{\phi} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \cdots & \phi_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{N1} & \cdots & \phi_{NN} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc} \underline{\phi}_1 & \cdots & \underline{\phi}_N \end{array} \right]$$

Note-se que, com esta disposição garante-se que a cada valor de ω_n^2 corresponde o respectivo vector do modo de vibração $\underline{\phi}_n$ e ambas as matrizes $\underline{\Omega}^2$ e $\underline{\phi}$ satisfazem o problema de valores e vectores próprios:

$$\underline{k} \underline{\phi} = \underline{m} \underline{\phi} \underline{\Omega}^2$$

Recorrendo ao exemplo de aplicação, a resolução da condição (2.12) resulta numa equação algébrica de 2º grau, em que as duas raízes correspondem às duas primeiras frequências naturais do modelo físico do edifício. A partir da função *eig* da ferramenta computacional *MATLAB* pode-se resolver o problema de valores e vectores próprios (2.13), em que os valores próprios estão organizados na matriz espectral $\underline{\Omega}^2$ e os vectores próprios na matriz modal $\underline{\phi}$:

$$\underline{\Omega}^2 = \begin{bmatrix} 25500 & 0 \\ 0 & 251800 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{\phi} = \begin{bmatrix} -0,2133 & -0,2193 \\ -0,1353 & 0,2312 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc} \underline{\phi}_1 & \underline{\phi}_2 \end{array} \right]$$

Tendo o conhecimento dos coeficientes da matriz espectral $\underline{\Omega}^2$, é possível obter as frequências naturais de vibração f_n :

$$\underline{\Omega}^2 = \begin{bmatrix} 25500 & 0 \\ 0 & 251800 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} f_1 = 25,42 \text{ Hz} \\ f_2 = 79,86 \text{ Hz} \end{cases}$$

Como se trata de um sistema de equações indeterminado, o sistema pode ser resolvido arbitrando um valor para uma das incógnitas e determinando as restantes, assim, os coeficientes da matriz modal $\underline{\phi}$ não representam deslocamentos, apenas relações entre os vários deslocamentos. Desta forma, a partir dos coeficientes da matriz modal $\underline{\phi}$ determinam-se as configurações modais associadas a cada frequência natural de vibração (ver Figura 2.9).

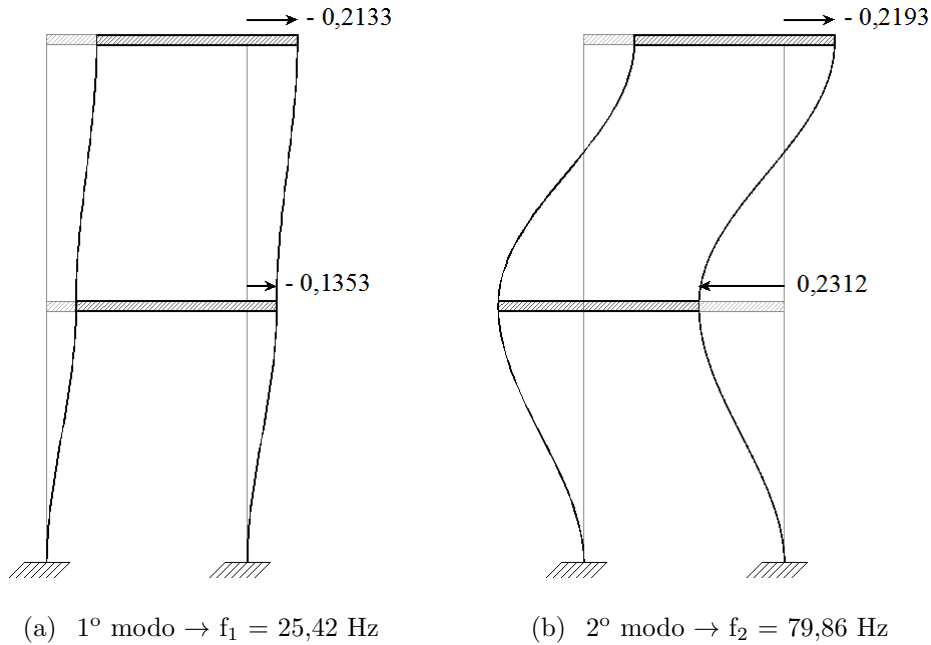


Figura 2.9: Modos de vibração normalizados à matriz de massa obtidos no modelo plano em *MATLAB*.

2.2.3 Condições de ortogonalidade

Os vectores que representam os modos de vibração de diferentes frequências naturais de vibração ($n \neq q$) têm de satisfazer as seguintes condições:

$$\underline{\phi}_n^T \underline{k} \underline{\phi}_r = 0 \quad \text{e} \quad \underline{\phi}_n^T \underline{m} \underline{\phi}_r = 0$$

Esta ortogonalidade dos modos de vibração permite que as matrizes de massa \underline{m} e rigidez \underline{k} sejam diagonalizadas através da matriz modal $\underline{\phi}$, dando origem a duas matrizes (diagonais) \underline{m}^* e \underline{k}^* , usualmente designadas por matriz de massa modal e matriz de rigidez modal, respectivamente, definidas por:

$$\underline{m}^* = \underline{\phi}^T \underline{m} \underline{\phi} = \begin{bmatrix} m_1^* & & \\ & \ddots & \\ & & m_N^* \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{k}^* = \underline{\phi}^T \underline{k} \underline{\phi} = \begin{bmatrix} k_1^* & & \\ & \ddots & \\ & & k_N^* \end{bmatrix}$$

Em relação à matriz de amortecimento \underline{c} , sendo esta definida através da combinação linear das matrizes \underline{m} e \underline{k} (amortecimento de Rayleigh), as condições anteriores também são válidas para a definição da matriz de amortecimento modal \underline{c}^* , dada por:

$$\underline{c}^* = \underline{\phi}^T \underline{c} \underline{\phi} = \begin{bmatrix} c_1^* & & \\ & \ddots & \\ & & c_N^* \end{bmatrix}$$

Aplicando a relação $\underline{u}(t) = \underline{\phi} \underline{u}^*(t)$ na equação (2.9) e pré-multiplicando ambos os membros por $\underline{\phi}^T$, obtém-se:

$$\underline{m}^* \ddot{\underline{u}}^*(t) + \underline{c}^* \dot{\underline{u}}^*(t) + \underline{k}^* \underline{u}^*(t) = \underline{f}^*(t) \quad (2.14)$$

A equação matricial de equilíbrio dinâmico anterior, definida em coordenadas modais, é constituída por matrizes diagonais, logo o sistema de N equações diferenciais de 2ª ordem a N incógnitas (equações dependentes) é simplificado para um sistema de N equações diferenciais de 2ª ordem a uma incógnita cada (equações independentes), podendo-se escrever:

$$\begin{cases} m_1^* \ddot{u}_1^*(t) + c_1^* \dot{u}_1^*(t) + k_1^* u_1^*(t) = f_1^*(t) \\ \vdots \\ m_N^* \ddot{u}_N^*(t) + c_N^* \dot{u}_N^*(t) + k_N^* u_N^*(t) = f_N^*(t) \end{cases}$$

Assim, a resolução da equação de equilíbrio dinâmico (2.9) pode ser obtida pela resolução das N equações diferenciais independentes.

2.2.4 Normalização dos modos de vibração

Como foi definido no ponto anterior, os modos de vibração representam uma relação de deslocamentos modais da estrutura para uma determinada frequência de vibração, isto é, os valores das componentes não têm qualquer significado. Assim conclui-se que existem infinitas formas de representar o mesmo modo de vibração. De modo a facilitar a interpretação e a comparação dos vários modos de vibração é habitual representar os modos de vibração recorrendo a uma norma. De seguida descrevem-se algumas das normalizações mais comuns:

- Normalização a um dado elemento – considerando a mesma componente dos vários vectores dos modos de vibração igual à unidade (p. ex. a componente correspondente à relação de deslocamento do piso superior de um modelo de um edifício). Esta normalização é definida por:

$$\hat{\phi}_{\sim n} = \frac{\phi_{in}}{\phi_{in}}$$

- *Normalização ao valor máximo* – dividindo cada vector pelo seu maior valor absoluto, fazendo com que as relações estejam sempre dentro do intervalo $[-1, 1]$. Esta normalização é definida por:

$$\hat{\phi}_{\sim n} = \frac{\phi_{\sim n}}{\max(\phi_{\sim n})}$$

- *Normalização à norma* – normalizando os modos em relação à norma de cada modo, sendo definida por:

$$\hat{\phi}_{\sim n} = \frac{\phi_{\sim n}}{\|\phi_{\sim n}\|}$$

- *Normalização em relação à matriz de massa*⁵ – normalizando cada modo de vibração através da seguinte expressão:

$$\hat{\phi}_{\sim n} = \frac{\phi_{\sim n}}{\sqrt{\phi_{\sim n}^T \underline{m}^* \phi_{\sim n}}} = \frac{\phi_{\sim n}}{\sqrt{m_{nn}^*}}$$

⁵O programa *MATLAB* fornece a matriz modal $\hat{\phi}$ normalizada em relação à matriz de massa.

Normalização em relação à matriz de massa

Em particular, a normalização em relação à matriz de massa possui propriedades que simplificam a equação de equilíbrio a resolver (2.14), obtendo-se:

$$\underline{\hat{\phi}}^T \underline{m} \underline{\hat{\phi}} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} = \underline{I} \quad \text{e} \quad \underline{\hat{\phi}}^T \underline{k} \underline{\hat{\phi}} = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \omega_N^2 \end{bmatrix} = \underline{\Omega}^2$$

E, em relação à matriz de amortecimento, obtém-se:

$$\underline{\hat{\phi}}^T \underline{c} \underline{\hat{\phi}} = \begin{bmatrix} 2 \xi_1 \omega_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 2 \xi_N \omega_N \end{bmatrix} = \underline{2 \xi \omega}$$

Em que ξ_n é o *amortecimento modal relativo* correspondente ao modo de vibração n . Desta forma, a equação matricial de equilíbrio dinâmico a resolver (2.14) é simplificada para:

$$\ddot{u}^*(t) + \underline{2 \xi \omega} \dot{u}^*(t) + \underline{\Omega}^2 u^*(t) = \underline{f}^*(t)$$

Ficando o sistema de equações definido apenas em função dos amortecimentos modais relativos ξ_n e das frequências angulares de vibração modais ω_n de cada modo de vibração.

Recorrendo ao exemplo do modelo físico, uma vez que a matriz modal $\underline{\phi}$ está normalizada em relação à matriz de massa ($\underline{\phi} = \underline{\hat{\phi}}$), podem-se comprovar as propriedades que simplificam a equação de equilíbrio:

$$\underline{\hat{\phi}}^T \underline{m} \underline{\hat{\phi}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \underline{I} \quad \text{e} \quad \underline{\hat{\phi}}^T \underline{k} \underline{\hat{\phi}} = \begin{bmatrix} 25500 & 0 \\ 0 & 251800 \end{bmatrix} = \underline{\Omega}^2$$

Capítulo 3

Métodos numéricos de integração no espaço

A maioria dos problemas de engenharia de estruturas estão ligados à determinação dos deslocamentos (e respectivos campos de deformações e de tensões) de uma estrutura ao longo do tempo, quando submetida a forças estáticas ou dinâmica [MENDES, 2010]. Recorrendo à Mecânica Estrutural consegue-se relacionar os deslocamentos, as deformações, as tensões e as forças que ocorrem em cada instante de tempo, através de equações de equilíbrio, de equações constitutivas e de equações de compatibilidade.

Para abordar estes conceitos recorre-se, mais uma vez, ao exemplo do modelo físico do edifício de 2 pisos. Com vista à determinação do campo de deslocamentos ao longo do tempo de um determinado ponto da estrutura, pode-se definir um vector \mathbf{u} com uma dimensão (3×1) (ver Figura 3.1), representando o deslocamento em cada uma das direcções (x , y e z) em cada instante de tempo t . Desta forma, pode-se escrever:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1(x, y, z, t) \\ u_2(x, y, z, t) \\ u_3(x, y, z, t) \end{bmatrix}$$

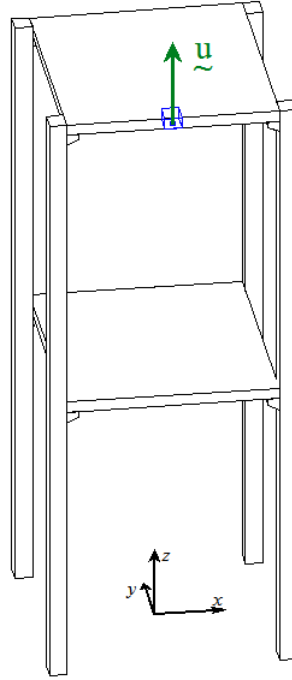


Figura 3.1: Determinação do campo de deslocamentos ao longo do tempo de um ponto da estrutura.

Recorrendo às equações de compatibilidade da Mecânica Estrutural podem-se relacionar os deslocamentos \underline{u} com as deformações $\underline{\varepsilon}$ (ver Figura 3.2). Assim, assumindo a hipótese de pequenos deslocamentos, pode-se determinar as deformações obtidas em cada instante de tempo t no ponto considerado [SILVA, 2011]:

$$\underbrace{\underline{\varepsilon}}_{1 \times 6} = \underbrace{\underline{L}}_{6 \times 3} \underbrace{\underline{u}}_{3 \times 1} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

Em que \underline{L} é definido por operador diferencial de compatibilidade.

Através das equações constitutivas⁶ e assumindo a hipótese de isotropia, pode-se relacionar o vector das deformações $\underline{\varepsilon}$ com o vector das tensões $\underline{\sigma}$ (ver Figura 3.2):

⁶Pela lei de Hooke, num material que apresente um comportamento elástico linear é verificada uma proporcionalidade directa entre a tensão normal instalada e a deformação normal resultante.

$$\underbrace{\underline{\sigma}}_{1 \times 6} = \underbrace{\underline{D}}_{6 \times 6} \underbrace{\underline{\varepsilon}}_{6 \times 1} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\mu + \lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & 2\mu + \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & 2\mu + \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & & \mu & 0 & 0 \\ \text{simétrica} & & & & \mu & 0 \\ & & & & & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix}$$

Em que \underline{D} é uma matriz rectangular e simétrica e os parâmetros μ e λ correspondem aos coeficientes de Lamé definidos por:

$$\mu = G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$$

Sendo G o módulo de distorção, E o módulo de elasticidade e ν o coeficiente de Poisson.

Na formulação clássica em deslocamentos, o problema de elasticidade linear tridimensional pode ser definido através da equação de Navier (ver Figura 3.2) – equação diferencial (matricial) com derivadas parciais, em ordem às coordenadas espaciais x, y, z e em ordem ao tempo t – e de condições iniciais e de fronteira, ou seja:

$$\begin{cases} \underline{L}^T \underline{\sigma} + \underline{F} = \underline{\varrho} & , \text{ em } V \\ \text{Condições iniciais e de fronteira} \end{cases} \quad (3.1)$$

Em que o termo $\underline{L}^T \underline{\sigma}$ corresponde às forças elásticas internas, e o termo $\underline{F} = \underline{F}(x, y, z, t)$ corresponde às restantes forças mássicas: forças exteriores (como o peso próprio $-mg$, por exemplo) e às forças internas de inércia $m\ddot{u}$ e de amortecimento $c\dot{u}$. O coeficiente m representa a massa específica (kg/m^3) e o coeficiente c o amortecimento específico $[(N/\text{ms}^{-1})/\text{m}^3]$ dos materiais da estrutura em análise.

Visto que a resolução analítica deste problema só é viável para casos elementares, recorre-se a métodos numéricos para obter a pretendida solução. Esta resolução numérica efectua-se em duas etapas: i) integração no espaço (recorrendo ao MEF, por exemplo); ii) integração no tempo.

Com vista à implementação do MEF na ferramenta computacional *freeFEM++*, é necessário deduzir a formulação fraca do problema de valores iniciais e de fronteira (3.1), que pode ser obtida da formulação variacional ou do PTV.

3.1 Formulação fraca do problema

Optando pela obtenção da forma fraca do problema através do PTV, que pode ser enunciado por:

“Seja um corpo em equilíbrio, submetido a um sistema de forças externas. Se a este corpo é imposto um campo de deslocamentos virtuais, compatível com os vínculos da estrutura, o trabalho das forças externas é igual ao trabalho das forças internas.”

Denotando o campo dos deslocamentos virtuais por $\delta \underline{u}$ e as deformações virtuais por $\delta \underline{\varepsilon}$, o trabalho das forças internas é dado por:

$$W_{int} = \int_V (\delta \underline{u})^T \underline{m} \ddot{\underline{u}} dV + \int_V (\delta \underline{u})^T \underline{c} \dot{\underline{u}} dV + \int_V (\delta \underline{\varepsilon})^T \underline{\sigma} dV \quad (3.2)$$

Onde $\underline{\sigma}$ corresponde às tensões resultantes das forças externas impostas à estrutura. O trabalho destas forças externas é igual a:

$$W_{ext} = \int_V (\delta \underline{u})^T \underline{f} dV \quad (3.3)$$

Igualando as expressões (3.2) e (3.3), obtém-se:

$$\int_V (\delta \underline{u})^T \underline{m} \ddot{\underline{u}} dV + \int_V (\delta \underline{u})^T \underline{c} \dot{\underline{u}} dV + \int_V (\delta \underline{\varepsilon})^T \underline{\sigma} dV = \int_V (\delta \underline{u})^T \underline{f} dV$$

Fazendo $\delta \underline{u} = \underline{v}$ um campo de deslocamentos virtuais admissíveis e $\delta \underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}(\underline{v})$ as correspondentes deformações virtuais, pode-se escrever:

$$\int_V \underline{v}^T \underline{m} \ddot{\underline{u}} dV + \int_V \underline{v}^T \underline{c} \dot{\underline{u}} dV + \int_V \underline{\varepsilon}(\underline{v})^T \underline{\sigma} dV = \int_V \underline{v}^T \underline{f} dV$$

Admitindo a hipótese de isotropia e de um comportamento elástico linear, pode-se introduzir as relações constitutivas – que permitem relacionar as tensões com as deformações através de $\underline{\sigma} = \underline{D}\underline{\varepsilon}$ - obtendo-se:

$$\int_V \underline{v}^T \underline{m} \ddot{\underline{u}} dV + \int_V \underline{v}^T \underline{c} \dot{\underline{u}} dV + \int_V \underline{\varepsilon}(\underline{v})^T \underline{D} \underline{\varepsilon}(\underline{u}) dV = \int_V \underline{v}^T \underline{f} dV \quad (3.4)$$

Ou seja, usando a notação de Einstein:

$$\int_V \underline{v}^T \underline{m} \ddot{\underline{u}} dV + \int_V \underline{v}^T \underline{c} \dot{\underline{u}} dV + \int_V (\lambda \varepsilon_{ii}(\underline{v}) \varepsilon_{jj}(\underline{u}) + 2 \mu \varepsilon_{ij}(\underline{v}) \varepsilon_{ij}(\underline{u})) dV = \int_V \underline{v}^T \underline{f} dV$$

$i, j \in \{1, 2, 3\}$

Que abreviadamente se pode escrever:

$$\int_V \underline{v}^T \underline{m} \ddot{\underline{u}} dV + \int_V \underline{v}^T \underline{c} \dot{\underline{u}} dV + \int_V (\lambda \text{Div}(\underline{v}) \text{Div}(\underline{u}) + 2 \mu \underline{\varepsilon}(\underline{v})^T \underline{\varepsilon}(\underline{u})) dV = \int_V \underline{v}^T \underline{f} dV \quad (3.5)$$

Atendendo à simplicidade de implementação dos operadores diferenciais no programa *freeFEM++*, recorre-se à formulação em (3.5) para a resolução do problema inicial com o MEF, no entanto a implementação clássica faz-se retomando a equação (3.4) e aplicando a definição de deformação através das equações de compatibilidade $\underline{\varepsilon} = \underline{L}\underline{u}$, obtendo-se a formulação fraca do problema de valores iniciais e de fronteira:

$$\int_V \underline{v}^T \underline{m} \ddot{\underline{u}} dV + \int_V \underline{v}^T \underline{c} \dot{\underline{u}} dV + \int_V (\underline{L}\underline{v})^T \underline{D} (\underline{L}\underline{u}) dV = \int_V \underline{v}^T \underline{f} dV \quad (3.6)$$

Salienta-se que as expressões (3.5) e (3.6), obtidas através do PTV, são as mesmas que se obteria pelo método variacional (com recurso ao Teorema de Green), quando as equações de equilíbrio fossem multiplicadas pela variação \underline{v} e integradas em V ambos os membros (ver Figura 3.2).

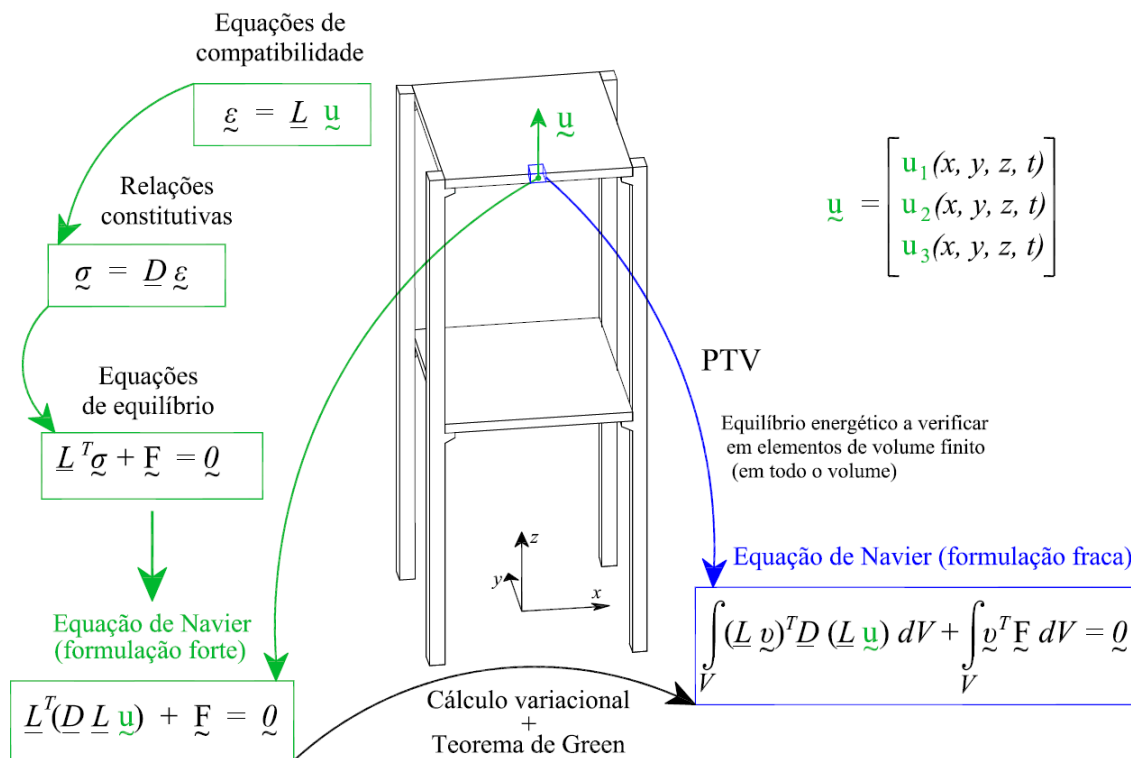


Figura 3.2: Princípios fundamentais da mecânica estrutural: abordagem do problema em formulação forte e em fraca.

3.2 Integração no espaço. Método dos Elementos Finitos

O MEF surge no desenvolvimento de métodos matriciais para a análise estrutural no âmbito do desenvolvimento da indústria aeroespacial americana, no final da década de 1940. Contudo, só com o desenvolvimento de computadores mais potentes na década de 60, o MEF foi amplamente divulgado em [ZIENKIEWICZ, 1967]. Já em Portugal este tema só foi introduzido na década de 70, pelo Prof. Eduardo Arantes e Oliveira [OLIVEIRA, 1975] e pelo Eng. José Oliveira Pedro [PEDRO, 1977].

O objectivo deste método é a aproximação a um domínio contínuo em análise através de um número finito de sub-domínios, chamados elementos finitos. Esta aproximação pode ser feita através do seguinte procedimento [ZIENKIEWICZ, 1967], [HUGHES, 1987]:

- Discretização da estrutura: O domínio em análise é separado por linhas ou

superfícies imaginárias, resultando um número de elementos finitos. Assume-se que estes elementos encontram-se ligados através de um número discreto de pontos nodais situados na fronteira de cada elemento, podendo existir também outros pontos nodais no interior de cada elemento (ver Figura 3.3). As incógnitas do problema passam a ser os deslocamentos destes pontos nodais⁷.

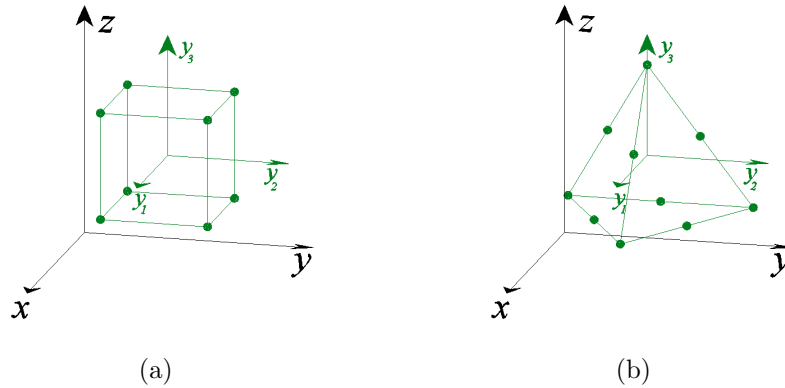


Figura 3.3: Exemplos de elementos finitos: (a) elemento cúbico com 8 pontos nodais e (b) elemento tetraédrico com 10 pontos nodais.

- Adota-se um conjunto de funções de interpolação – funções de forma – que definem (aproximadamente) o campo de deslocamentos em cada elemento finito, em função dos deslocamentos dos pontos nodais. Esta aproximação é dada por uma equação – a aproximação fundamental do MEF – definida por:

$$\underbrace{\underline{u}}_{3 \times 1} = \underbrace{\underline{N}}_{3 \times 6} \underbrace{\underline{u}^e}_{6 \times 1} \quad (3.7)$$

Em que \underline{N} é a matriz das funções de forma e \underline{u}^e é o vector de deslocamentos dos pontos nodais do elemento finito que contém o ponto da estrutura considerado.

Visto que esta aproximação é válida para os deslocamentos, de forma análoga, ficam válidas as aproximações das velocidades e das acelerações, dadas por:

$$\dot{\underline{u}} = \underline{N} \dot{\underline{u}}^e \quad \text{e} \quad \ddot{\underline{u}} = \underline{N} \ddot{\underline{u}}^e \quad (3.8)$$

⁷Matematicamente, estas funções correspondem à base no espaço vectorial dos deslocamentos admissíveis.

Em que \dot{u}^e e \ddot{u}^e são os vectores de velocidades e de acelerações para o instante de tempo t nos pontos nodais do elemento considerado, respectivamente.

- Definindo a matriz \underline{B} como a matriz que contém as derivadas das funções de forma (resultante do produto das matrizes \underline{L} e \underline{N}), substituindo \underline{v} por cada uma das funções de forma (ou seja, pela matriz \underline{N}) e introduzindo as equações (3.7) e (3.8) na equação em formulação fraca do problema de valores iniciais e de fronteira (dada pela equação (3.6)), obtém-se:

$$\int_{V_e} m \underline{N}^T \underline{N} \ddot{u}^e dV + \int_{V_e} c \underline{N}^T \underline{N} \dot{u}^e dV + \int_{V_e} \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} u^e dV = \int_{V_e} \underline{N}^T \underline{f} dV$$

- Definindo as matrizes de massa, de rigidez e de amortecimento elementares por \underline{m}^e , \underline{k}^e e \underline{c}^e , respectivamente, e o vector de forças externas elementar por \underline{f}^e , dados por:

$$\begin{aligned} \underline{m}^e &= \int_{V_e} m \underline{N}^T \underline{N} dV & \underline{c}^e &= \int_{V_e} c \underline{N}^T \underline{N} dV \\ \underline{k}^e &= \int_{V_e} \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} dV & \underline{f}^e &= \int_{V_e} \underline{N}^T \underline{f} dV \end{aligned}$$

Obtém-se a equação de equilíbrio dinâmico elementar, dada por:

$$\underline{m}^e \ddot{u}^e(t) + \underline{c}^e \dot{u}^e(t) + \underline{k}^e u^e(t) = \underline{f}^e(t) \quad (3.9)$$

Relativamente à matriz de amortecimento elementar \underline{c}^e , de forma análoga ao referido no ponto 2.2.1 do presente trabalho, pode ser aproximada através do conceito de amortecimento de Rayleigh, assim:

$$\underline{c}^e = \int_{V_e} c \underline{N}^T \underline{N} dV \quad \Rightarrow \quad \underline{c}^e = c_1 \underline{k}^e + c_2 \underline{m}^e \quad (3.10)$$

- As matrizes de massa, de rigidez e de amortecimento globais (\underline{m} , \underline{k} e \underline{c}) e o vector de forças exteriores global (\underline{f}) são obtidos por sobreposição das anteriores matrizes e do vector elementares. Esta assemblagem permite obter a equação

de equilíbrio dinâmico global para todo o domínio analisado, que corresponde a um sistema de equações diferenciais de 2ª ordem dependentes, a resolver para as condições iniciais estabelecidas. Assim, na resolução numérica do problema de valores iniciais e de fronteira (3.1), após a primeira etapa correspondente à integração no espaço, a análise dinâmica fica reduzida à resolução do seguinte problema de valores iniciais:

$$\begin{cases} \underline{m} \ddot{\underline{u}}(t) + \underline{c} \dot{\underline{u}}(t) + \underline{k} \underline{u}(t) = \underline{f}(t) \\ \text{Condições iniciais} \end{cases} \quad (3.11)$$

As matrizes \underline{m} , \underline{k} e \underline{c} têm uma dimensão de $N \times N$. O vector \underline{u} é constituído pelos deslocamentos nos três graus de liberdade em todos os nós da estrutura e tem uma dimensão $N \times 1$, e o vector \underline{f} , também de dimensão $N \times 1$, corresponde ao vector de forças nodais equivalentes às forças volúmicas, superficiais ou concentradas aplicadas aos elementos.

3.3 Condições de fronteira

A ligação entre a estrutura em estudo e o meio exterior é feita através das condições de fronteira [MENDES, 2010], que podem ser do seguinte tipo:

- Forças volúmicas, superficiais ou concentradas simulando carregamentos aplicados à estrutura;
- Apoios elásticos pontuais (“molas” de apoio) cuja calibração do valor da rigidez permite simular fronteiras com qualquer tipo de deformabilidade – condições de fronteira em deslocamento;
- Apoios de amortecimento (“amortecedores” de apoio) permitindo simular fronteiras com maior ou menor capacidade de amortecimento de oscilações – condições de fronteira em velocidade;

As condições de fronteira de forças distribuídas ou concentradas são introduzidas através da soma do seu contributo em cada GL da estrutura no vector de forças (na

posição correspondente a cada GL). As condições de fronteira em deslocamento são introduzidas através da soma das constantes de rigidez pontual k_{ap} das “molas” de apoio à diagonal da matriz de rigidez global (na posição correspondente ao GL apoiado). De forma análoga, as condições de fronteira em velocidade são introduzidas através da soma das constantes de amortecimento pontual c_{ap} dos “amortecedores” de apoio à diagonal da matriz de amortecimento global.

No âmbito deste trabalho utilizam-se as condições de fronteira em deslocamento do tipo Dirichlet $\underline{u} = \underline{p}$, que permitem a restrição de movimentos em determinados pontos e direcções (apoios elásticos pontuais).

Capítulo 4

Métodos numéricos de integração no tempo

A resolução numérica da segunda etapa do problema dinâmico, correspondente à integração no tempo da equação diferencial de equilíbrio dinâmico do problema de valores iniciais (3.11), pode ser efectuada em coordenadas modais através de uma análise modal ou em coordenadas estruturais através de uma análise histórico-temporal [MENDES, 2010].

No âmbito deste trabalho, optou-se por abordar uma análise histórico-temporal, para a qual se recorre aos métodos numéricos de integração no tempo. Com a utilização destes métodos pretende-se, em vez de satisfazer a equação em todo o tempo t , dividir o tempo t em intervalos de tempo constantes (Δt), ou não constantes (Δt_k), e satisfazer a equação apenas em instantes de tempo discretos t_k , distanciados pelos intervalo de tempo Δt ou Δt_k .

$$\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$$

Os métodos numéricos de integração no tempo encontram-se divididos em métodos explícitos e implícitos.

Nos métodos explícitos, o vector de deslocamentos y para o instante de tempo t é calculado apenas através das características dos instantes de tempo anteriores a t :

$$\underline{u}_t = f \left(\underline{u}_{t-\Delta t}, \underline{\dot{u}}_{t-\Delta t}, \underline{\ddot{u}}_{t-\Delta t}, \underline{u}_{t-2\Delta t}, \underline{\dot{u}}_{t-2\Delta t}, \dots \right)$$

Já nos métodos implícitos, o vector de deslocamentos \underline{u} para o instante de tempo t depende das características dos instantes de tempo anteriores a t e das velocidades e acelerações calculadas nesse instante de tempo t :

$$\underline{u}_t = f \left(\underline{\dot{u}}_t, \underline{\ddot{u}}_t, \underline{u}_{t-\Delta t}, \underline{\dot{u}}_{t-\Delta t}, \underline{\ddot{u}}_{t-\Delta t}, \underline{u}_{t-2\Delta t}, \underline{\dot{u}}_{t-2\Delta t}, \dots \right)$$

Nestes métodos implícitos, uma vez que não se conhecem os vectores de velocidades e de acelerações do instante de tempo t , é necessário recorrer à inversão de matrizes para se obter a solução da equação de equilíbrio dinâmico (3.11).

Como já foi referido anteriormente, no âmbito deste trabalho optou-se por abordar o método de Newmark, com vista à sua implementação em *freeFEM++*.

4.1 Integração no tempo. Método de Newmark

Em 1959, N. M. Newmark desenvolveu um método numérico de integração de equações diferenciais de segunda ordem de sistemas lineares (equações idênticas à equação (3.11)), o qual se baseou no desenvolvimento em serie de Taylor de \underline{u} e $\underline{\dot{u}}$ (a derivada de \underline{u} em ordem ao tempo) no tempo t_0 :

$$\underline{u}(t_0 + \varepsilon) = \underline{u}(t_0) + \underline{\dot{u}}(t_0)\varepsilon + \underline{\ddot{u}}(t_0)\frac{\varepsilon^2}{2} + \underline{\ddot{\ddot{u}}}(t_0)\frac{\varepsilon^3}{6} + \dots$$

$$\underline{\dot{u}}(t_0 + \varepsilon) = \underline{\dot{u}}(t_0) + \underline{\ddot{u}}(t_0)\varepsilon + \underline{\ddot{\ddot{u}}}(t_0)\frac{\varepsilon^2}{2} + \dots$$

Truncando ambos os desenvolvimentos no termo da 3^a ordem, obtêm-se (para ε pequeno):

$$\underline{u}(t_0 + \varepsilon) \approx \underline{u}(t_0) + \underline{\dot{u}}(t_0)\varepsilon + \underline{\ddot{u}}(t_0)\frac{\varepsilon^2}{2} + \underline{\ddot{\ddot{u}}}(t_0)\frac{\varepsilon^3}{6} \quad (4.1)$$

$$\underline{\dot{u}}(t_0 + \varepsilon) \approx \underline{\dot{u}}(t_0) + \underline{\ddot{u}}(t_0)\varepsilon + \underline{\ddot{\ddot{u}}}(t_0)\frac{\varepsilon^2}{2} \quad (4.2)$$

Considerando \underline{u}_t o valor de \underline{u} no instante t e $\varepsilon = \Delta t$, as equações (4.1) e (4.2) induzem à seguinte seqüência temporal:

$$\underline{u}_{t+\Delta t} = \underline{u}_t + \dot{\underline{u}}_t \Delta t + \ddot{\underline{u}}_t \frac{\Delta t^2}{2} + \ddot{\underline{u}}_t \frac{\Delta t^3}{6} \quad (4.3)$$

$$\dot{\underline{u}}_{t+\Delta t} = \dot{\underline{u}}_t + \ddot{\underline{u}}_t \Delta t + \ddot{\underline{u}}_t \frac{\Delta t^2}{2} \quad (4.4)$$

Com vista à convergência do método definido por (4.3) e (4.4) escreve-se a equação (4.3) na forma:

$$\underline{u}_{t+\Delta t} = \underline{u}_t + \dot{\underline{u}}_t \Delta t + \ddot{\underline{u}}_t \frac{\Delta t^2}{2} + \beta \ddot{\underline{u}}_t \Delta t^3 \quad (4.5)$$

E a equação (4.4):

$$\dot{\underline{u}}_{t+\Delta t} = \dot{\underline{u}}_t + \ddot{\underline{u}}_t \Delta t + \alpha \ddot{\underline{u}}_t \Delta t^2 \quad (4.6)$$

O método das diferenças divididas fornece uma aproximação para $\ddot{\underline{u}}_t$:

$\ddot{\underline{u}}_t = \frac{\ddot{\underline{u}}_{t+\Delta t} - \ddot{\underline{u}}_t}{\Delta t}$ que se considera exacta, pois assume-se a aceleração com variação linear. Assim, as expressões (4.5) e (4.6) dão origem às expressões de Newmark, que permitem o cálculo dos deslocamentos \underline{u} e das velocidades $\dot{\underline{u}}$ para o instante de tempo $(t + \Delta t)$:

$$\underline{u}_{t+\Delta t} = \underline{u}_t + \dot{\underline{u}}_t \Delta t + \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \Delta t^2 \ddot{\underline{u}}_t + \beta \Delta t^2 \ddot{\underline{u}}_{t+\Delta t} \quad (4.7)$$

$$\dot{\underline{u}}_{t+\Delta t} = \dot{\underline{u}}_t + (1 - \alpha) \Delta t \ddot{\underline{u}}_t + \alpha \Delta t \ddot{\underline{u}}_{t+\Delta t} \quad (4.8)$$

As constantes α e β definem a variação da aceleração dentro de cada intervalo de tempo Δt e determinam a estabilidade e exactidão do método.

A estas equações (4.7) e (4.8) acrescenta-se a equação de equilíbrio dinâmico (3.11) para o instante $t + \Delta t$, dada por:

$$\underline{m} \ddot{\underline{u}}_{t+\Delta t} + \underline{c} \dot{\underline{u}}_{t+\Delta t} + \underline{k} \underline{u}_{t+\Delta t} = \underline{f}_{t+\Delta t} \quad (4.9)$$

O conjunto das equações (4.7), (4.8) e (4.9) permite estabelecer um método para a obtenção da solução numérica do problema dinâmico (3.11). Assim, substituindo as equações (4.7) e (4.8) na equação (4.9) obtém-se a aceleração $\ddot{u}_{t+\Delta t}$, uma vez conhecidos o deslocamento, a velocidade, a aceleração e a força exterior aplicada no instante t . Conhecido $\ddot{u}_{t+\Delta t}$, recorre-se às equações (4.7) e (4.8) para calcular o deslocamento $u_{t+\Delta t}$ e a velocidade $\dot{u}_{t+\Delta t}$.

Tal como é referido em [WILSON, 2002], o método de Newmark é estável desde que:

$$\beta \leq \frac{1}{2} \leq \alpha, \text{ quando } \Delta t \leq \frac{\sqrt{2}}{\omega_{max} \sqrt{\alpha - 2\beta}} \quad (4.10)$$

Onde ω_{max} é a frequência máxima da vibração natural, não amortecida, da estrutura. Neste caso pode-se garantir que existe uma constante $C > 0$ tal que, para qualquer instante t , se tem:

$$\|u_t\| \leq C \quad t \in [0, T]$$

Adicionalmente, pode-se garantir a convergência do método se a matriz de rigidez \underline{k} for simétrica e definida positiva, isto é, todos os valores próprios são positivos.

Como exemplos de hipóteses de variação da aceleração podem-se referir dois casos: uma variação média constante da aceleração dentro de cada intervalo de tempo Δt (ver Figura 4.1(a)), considerando $\alpha = 1/2$ e $\beta = 1/4$ e uma variação linear da aceleração (ver Figura 4.1(b)), considerando $\alpha = 1/2$ e $\beta = 1/6$.

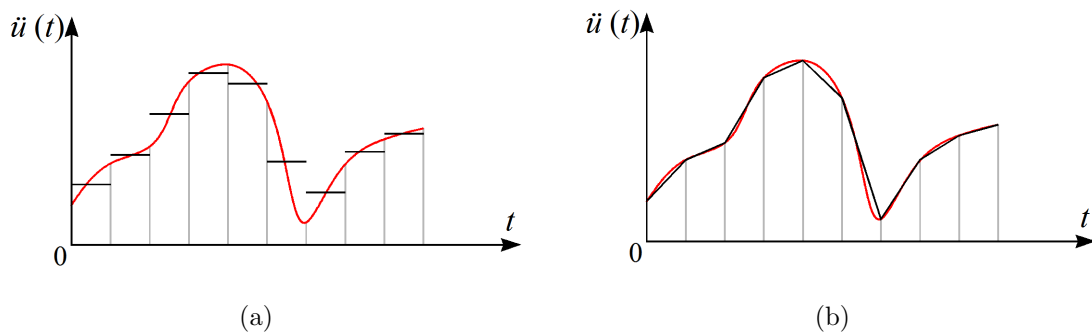


Figura 4.1: Exemplos de hipóteses de variação da aceleração dentro de cada intervalo de tempo Δt no método de Newmark: (a) aceleração média constante e (b) aceleração com variação linear.

4.1.1 Algoritmo

Embora existam vários algoritmos de cálculo deste método numérico na literatura, optou-se por desenvolver um processo de integração de acordo com [CHOPRA, 1995].

Para dar início ao processo iterativo de resolução da equação de equilíbrio dinâmico é necessário o conhecimento das condições iniciais do problema (que correspondem aos vectores de deslocamentos iniciais \underline{u}_0 e de velocidades iniciais $\dot{\underline{u}}_0$) e do vector de forças exteriores inicial \underline{f}_0 , por forma a determinar o valor da aceleração inicial $\ddot{\underline{u}}_0$ através da equação de equilíbrio dinâmico (3.11), ou seja:

$$\ddot{\underline{u}}_0 = \underline{m}^{-1} \left(\underline{f}_0 - \underline{c} \dot{\underline{u}}_0 - \underline{k} \underline{u}_0 \right)$$

Calculada a aceleração inicial deve-se agora adoptar um intervalo de tempo Δt constante em todo o processo iterativo.

Tendo o passo de integração Δt definido, determina-se uma matriz de rigidez efectiva \underline{k}_e constituída por parcelas das matrizes de rigidez, de amortecimento e de massa, através da seguinte expressão:

$$\underline{k}_e = \underline{k} + \frac{\alpha}{\beta \Delta t} \underline{c} + \frac{1}{\beta \Delta t^2} \underline{m}$$

Admitindo a hipótese de comportamento elástico linear, esta matriz \underline{k}_e é constante ao longo do tempo, por isso pode ser determinada antes do processo de iteração. Ainda antes do processo iterativo, determinam-se duas matrizes \underline{A}_1 e \underline{A}_2 auxiliares ao cálculo e constituídas por parcelas das matrizes de massa e de amortecimento:

$$\underline{A}_1 = \frac{1}{\beta \Delta t} \underline{m} + \frac{\alpha}{\beta} \underline{c} \quad ; \quad \underline{A}_2 = \frac{1}{2\beta} \underline{m} + \Delta t \left(\frac{\alpha}{2\beta} - 1 \right) \underline{c}$$

Dentro do processo iterativo, determinam-se as variações que ocorrem nos deslocamentos, nas velocidades e nas acelerações em cada intervalo de tempo Δt por consequência da variação das forças exteriores \underline{f} . Assim, para a iteração s correspondente ao instante de tempo t e admitindo conhecida a aceleração da iteração anterior (ver Figura 4.2):

1. Resolução da equação de equilíbrio dinâmico para o cálculo de $\Delta \tilde{f}_t$:

$$\Delta \tilde{f}_t = \left(f_t - f_{t-\Delta t} \right) + \underline{A}_1 \dot{u}_{t-\Delta t} + \underline{A}_2 \ddot{u}_{t-\Delta t}$$

2. Variações do deslocamento, da velocidade e da acelerações:

$$\begin{aligned} \Delta \underline{u}_t &= \underline{k}_e^{-1} \Delta \tilde{f}_t \\ \Delta \dot{u}_t &= \frac{\alpha}{\beta \Delta t} \Delta \underline{u}_t - \frac{\alpha}{\beta} \dot{u}_{t-\Delta t} + \Delta t \left(1 - \frac{\alpha}{2\beta} \right) \ddot{u}_{t-\Delta t} \\ \Delta \ddot{u}_t &= \frac{1}{\beta \Delta t^2} \Delta \underline{u}_t - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{u}_{t-\Delta t} - \frac{1}{2\beta} \ddot{u}_{t-\Delta t} \end{aligned}$$

3. Actualização das variáveis \underline{u}_t , \dot{u}_t e \ddot{u}_t :

$$\underline{u}_t = \underline{u}_{t-\Delta t} + \Delta \underline{u}_t \quad ; \quad \dot{u}_t = \dot{u}_{t-\Delta t} + \Delta \dot{u}_t \quad ; \quad \ddot{u}_t = \ddot{u}_{t-\Delta t} + \Delta \ddot{u}_t$$

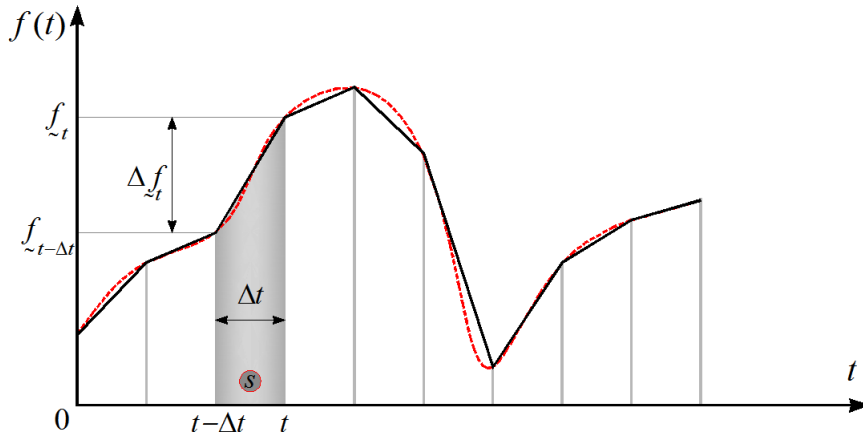


Figura 4.2: Processo de integração do método de Newmark.

Como critério de paragem deste processo de integração tem-se: atingir o final do registo sísmico.

4.1.2 Exemplo de aplicação

Embora se pretenda implementar o método de Newmark na óptica do programa *freeFEM++*, foi previamente elaborada uma aplicação deste método no programa *MATLAB*, por ter uma linguagem mais intuitiva, com o objectivo de facilitar a interpretação do método.

Para esta análise recorreu-se ao modelo plano do modelo físico do edifício de 2 pisos, abordado anteriormente, o qual é sujeito a uma acção dinâmica ao nível da base do edifício (ver Figura 4.3).

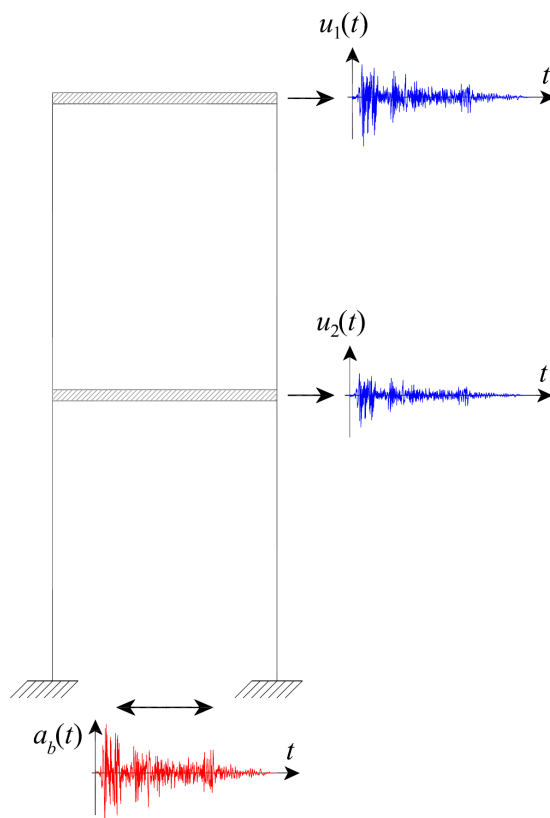


Figura 4.3: Edifício de 2 pisos com aceleração na base e respectivas respostas ao nível dos pisos.

Para este exemplo, como foi referido anteriormente, de modo meramente exemplificativo, considerou-se também o amortecimento da estrutura pelo conceito de amortecimento de Rayleigh (com $c_1 = 0,01$ e $c_2 = 0,0001$) e as constantes de Newmark $\alpha = 1/2$ e $\beta = 1/4$.

Como acção dinâmica considerou-se a aceleração devido a um sismo (ver Figura 4.4), sendo esta definida pelo registo de aceleração obtido durante a ocorrência do sismo de *El Centro*⁸.

Após a aplicação do método de Newmark, isto é, da integração no tempo em coordenadas espaciais, obteve-se a resposta da estrutura ao longo do tempo em cada grau de liberdade considerado, um ao nível de cada piso da estrutura (ver Figura 4.5).

⁸Esta acção exterior será definida com melhor detalhe no ponto 6.6.1 do presente trabalho.

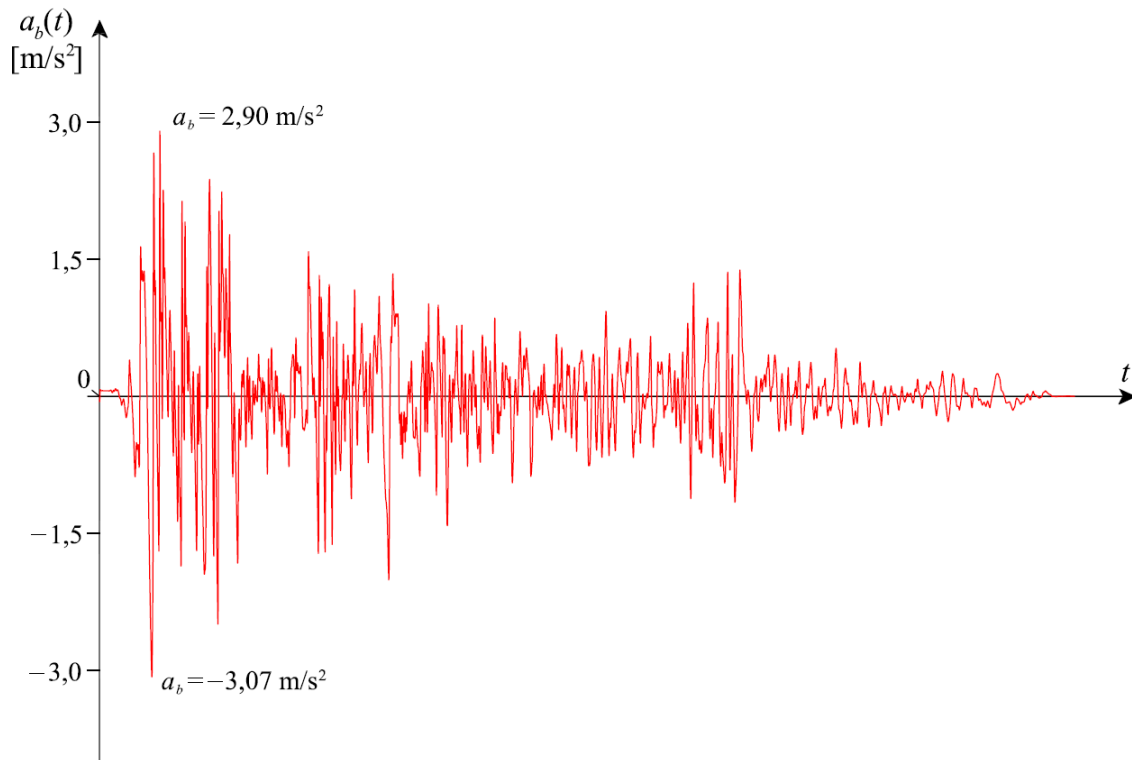


Figura 4.4: Acção sísmica considerada no exemplo de aplicação do método de Newmark.

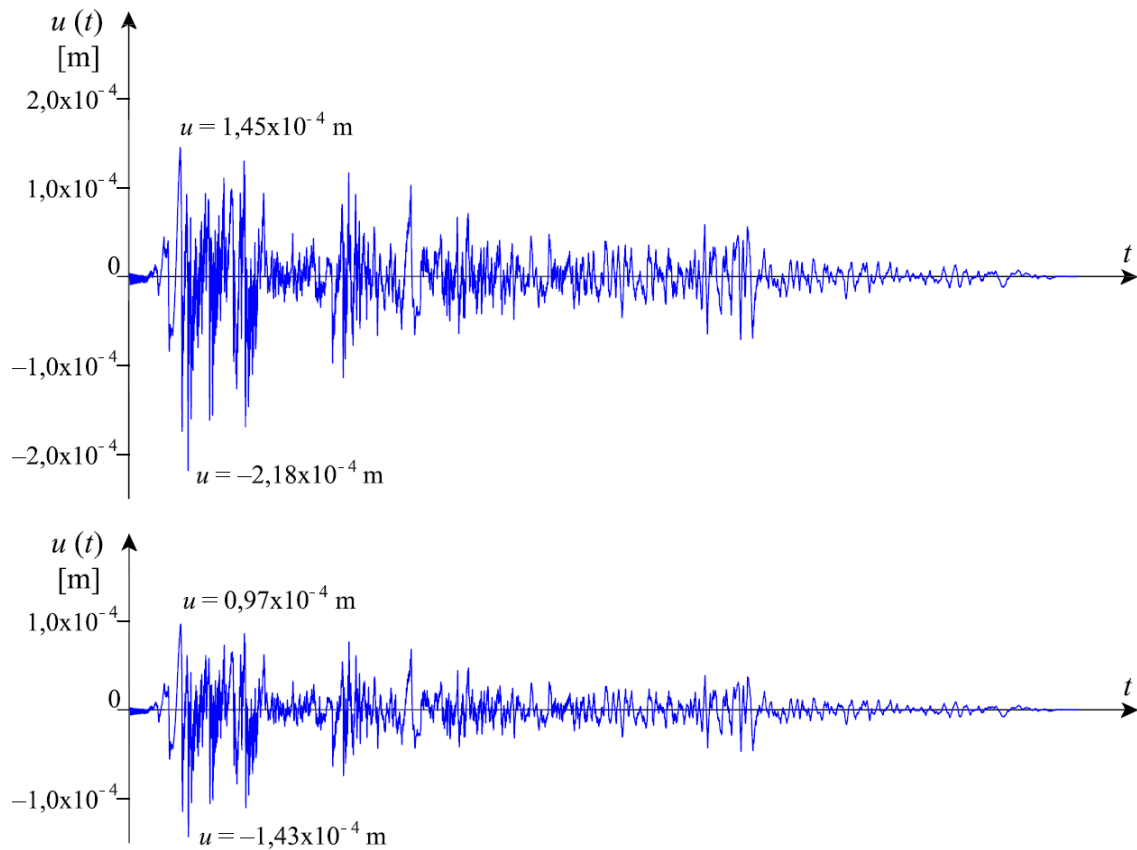


Figura 4.5: Deslocamentos ao nível dos pisos para a acção sísmica considerada pelo método de Newmark desenvolvido em *MATLAB*.

Capítulo 5

Ensaaios experimentais na análise dinâmica de estruturas

5.1 Considerações iniciais

Actualmente, os ensaios experimentais dinâmicos são considerados fundamentais para caracterizar o comportamento dinâmico das estruturas de engenharia civil [CUNHA, 1990], [COSTA, *et al.*, 2001], [RODRIGUES, 2004], [MAGALHÃES, 2004], [MENDES, 2010]. Embora neste domínio existam diferentes metodologias de ensaio, das quais se destacam os ensaios de vibração forçada, vibração livre e vibração ambiental, no âmbito deste trabalho apenas se abordam os ensaios de vibração ambiental. Os ensaios de vibração ambiental baseiam-se na medição de séries temporais de acelerações, em pontos criteriosamente escolhidos nas estruturas, a partir das quais são identificados os parâmetros modais (frequências naturais, modos de vibração e amortecimentos modais). Neste tipo de ensaios a excitação presente na estrutura é resultante das acções ambientais (vento, por exemplo) e acções operacionais (ligadas à exploração/utilização da estrutura), não havendo qualquer controlo sobre a excitação, inviabilizando a sua medição (quantificação) de forma determinística [RODRIGUES, 2004].

Assim, neste capítulo, abordam-se os principais aspectos a ter na preparação e realização destes ensaios, discute-se o processo de selecção do tipo de equipamento a utilizar, referem-se os principais cuidados a ter no pré-processamento e processamento da informação experimental adquirida nos ensaios e introduzem-se os principais

métodos utilizados para identificar os parâmetros modais a partir dessa informação experimental.

Finalmente apresenta-se uma perspectiva sobre a utilização dos parâmetros modais, identificados a partir da informação experimental adquirida nos ensaios de vibração ambiental, para validar e calibrar os modelos numéricos das estruturas, que serão posteriormente utilizados para elaborar estudos de previsão de comportamento (p. ex. em relação às acções sísmicas), no âmbito das actividades de controlo da sua segurança estrutural.

5.2 Planeamento e realização de ensaios

A preparação de ensaios de vibração ambiental segue usualmente um meticuloso planeamento, que na generalidade das situações começa com o desenvolvimento de um modelo numérico, cujo principal objectivo é a avaliação preliminar das configurações modais dos primeiros (principais) modos de vibração, da estrutura a ensaiar, para seleccionar os melhores locais a instrumentar e definir a frequência de amostragem a utilizar na realização do ensaio [CAETANO, 2000], [MENDES, 2010].

O valor a adoptar como frequência de amostragem deverá ser, no mínimo, o dobro do valor da frequência máxima (f_{Max}) que se pretende identificar (frequência de Nyquist⁹ - f_{Nyq}), somando uma margem que garanta uma folga adequada para uma correcta identificação dessa frequência [RODRIGUES, 2004].

Quando o número de pontos a instrumentar é compatível com o número de sensores disponíveis e com o número de canais disponíveis no sistema de aquisição que se está a utilizar, o ensaio é realizado de uma só vez (ver Figura 5.1), contudo, na generalidade das estruturas, nem sempre é possível, pelo que é usual nestas situações recorrer-se a técnicas de ensaio baseadas em várias fases de ensaio. Nestas circunstâncias, alguns sensores permanecem sempre na mesma posição, durante as várias fases de ensaio, designando-se como sensores de referência e os restantes sensores mudam de posição nas diferentes fases de ensaio, tomando por este motivo a designação de sensores volantes (ver Figura 5.2) [RODRIGUES, 2004].

⁹A frequência de Nyquist corresponde a metade do valor da frequência de amostragem.

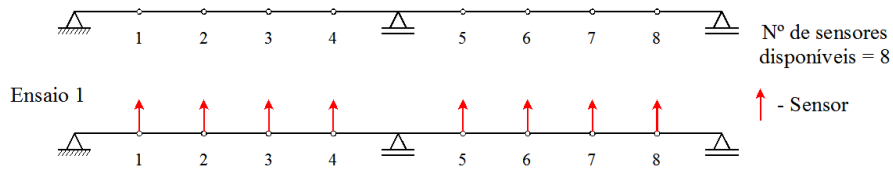


Figura 5.1: Exemplo de ensaio realizado numa única fase de ensaio.

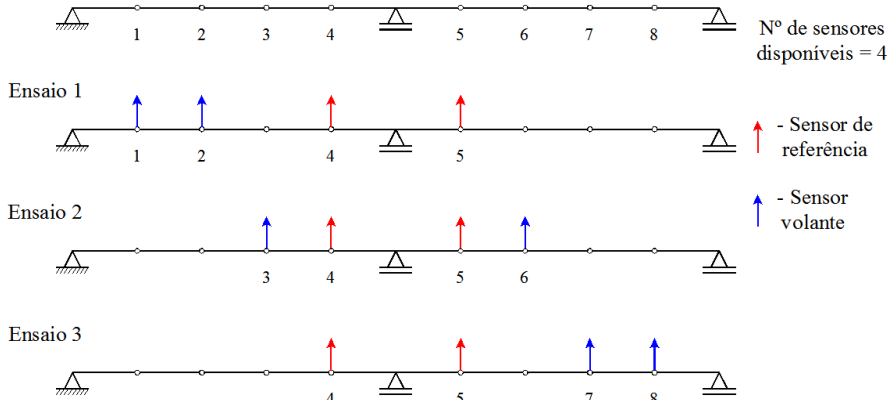


Figura 5.2: Exemplo de técnica de ensaio baseada em várias fases de ensaio.

Relativamente aos sensores de referência é aconselhável, sempre que possível, considerar dois ou mais com estas funções e deve-se evitar colocá-los em posições que correspondam a nodos dos modos de vibração das estruturas, isto é, em posições em que os deslocamentos modais possam ser nulos.

Ainda na preparação de um ensaio deverá desenvolver-se uma análise preliminar em que se avaliam as condições de ensaio, nomeadamente deverá ser efectuada a caracterização da relação sinal-ruído e da existência de possíveis frequências de ressonância devidas a efeitos não estruturais [CUNHA, *et al.*, 2006].

A partir deste tipo de análise pode-se proceder a alguns reajustes ao planeamento inicial do ensaio, isto é, poderá ser necessário rever o valor da frequência de amostragem; em alguns casos pode existir a necessidade de aumentar o nível de excitação para melhorar a qualidade da relação sinal-ruído, podendo mesmo ser necessário induzir excitações aleatórias [PEETERS, 2000].

Na preparação de um ensaio de vibração ambiental também é necessário definir o comprimento dos registos a medir. Atendendo que o comprimento dos registos afecta a resolução em frequência e os erros de variância associados aos sinais medidos, então

para se obter uma boa resolução em frequência é necessário utilizar janelas de dados com elevado comprimento e para minimizar os erros de variância dos sinais medidos é necessário efectuar muitas médias [BENDAT, *et al.*, 2000]. É possível efectuar muitas médias utilizando janelas de dados compridas, adquirindo séries temporais com um grande comprimento, sendo prática usual sobrepor as janelas de dados entre 1/2 a 2/3, para efectuar mais médias. O comprimento dos registos pode seguir uma regra empírica que define uma duração de 2000 ciclos do modo com período mais longo (obtido na primeira frequência natural), no entanto esta regra dá apenas uma primeira indicação [RODRIGUES, 2004].

5.3 Selecção do tipo de equipamento

A realização de ensaios de vibrações, para caracterizar o comportamento dinâmico de estruturas, é uma prática que se tem generalizado, não só na engenharia civil como também em outras engenharias, nomeadamente em engenharia mecânica, aeronáutica e aeroespacial. Esta generalização tem-se traduzido numa grande procura de equipamentos, para realizar este tipo de ensaios, à qual o mercado tem correspondido com diversas soluções para medir séries temporais de aceleração, no entanto, tanta diversidade implica um cuidado especial na selecção do equipamento que mais se adequa a cada situação.

Assim, nesta secção apresentam-se e discutem-se alguns aspectos a considerar na escolha do equipamento para realizar ensaios de vibração ambiental em estruturas de engenharia civil.

No âmbito deste trabalho, efectuou-se um ensaio de vibração ambiental para caracterizar o comportamento dinâmico de uma pequena estrutura de um edifício de dois pisos em betão armado, no qual se utilizou uma solução de equipamento que tem uma maior adequação a aplicações de engenharia mecânica e aeronáutica, todavia a utilização desta solução neste enquadramento justifica-se plenamente uma vez que as frequências naturais de vibração desta estrutura são relativamente elevadas (superiores a 10 Hz) como se verá no capítulo 6 e pelo facto de existir a necessidade de utilizar acelerómetros com uma massa relativamente baixa.

Na Figura 5.3 apresentam-se alguns exemplos de acelerómetros, denominados acelerómetros piezoeléctricos, utilizados neste tipo de solução.

	<p>Marca: PCB Piezotronics (http://www.pcb.com) Modelo: 333B52 (uniaxial) Sensibilidade: 1000 mV/g Resposta dinâmica: de 0,5 Hz até 3000 Hz</p>
	<p>Marca: PCB Piezotronics (http://www.pcb.com) Modelo: 356B18 (triaxial) Sensibilidade: 1000 mV/g Resposta dinâmica: de 1,0 Hz até 10000 Hz</p>
	<p>Marca: Brüel & Kjær (http://www.bksv.com) Modelo: 4507-002 (uniaxial) Sensibilidade: 1000 mV/g Resposta dinâmica: de 0,4 Hz até 6000 Hz</p>
	<p>Marca: Brüel & Kjær (http://www.bksv.com) Modelo: 4524B-001 (triaxial) Sensibilidade: 1000 mV/g Resposta dinâmica: de 0,25 Hz até 3000 Hz</p>

Figura 5.3: Exemplos e características de alguns acelerómetros piezoeléctricos.

Para efectuar o registo da grandeza medida, geralmente em forma de sinal eléctrico, recorre-se a sistemas de aquisição de dados, onde se armazenam as respostas medidas. A operação mais importante nestes sistemas é a conversão analógica digital, onde os sinais contínuos analógicos são transformados em séries temporais discretas [MENDES, 2010].

Na Figura 5.4 apresentam-se alguns exemplos de equipamentos para a aquisição de sinais de aceleração, compatíveis com os acelerómetros piezoeléctricos da Figura 5.3.

Por outro lado, a monitorização de estruturas de engenharia civil tem surgido como um grande contributo no desenvolvimento do conhecimento do comportamento estrutural às acções dinâmicas. O aumento do conhecimento do comportamento dinâmico tem permitido a construção de estruturas inovadoras, com secções transversais mais reduzidas e/ou com maiores vãos, melhorando o aspecto estético das estruturas. De facto, nos últimos anos a construção de edifícios vai batendo sucessivos recordes em termos de altitudes máximas, as pontes possuem vãos máximos cada vez maiores e as barragens têm alturas cada vez maiores.

Como consequência, as frequências naturais de vibração deste tipo de estruturas são relativamente baixas, o que leva à adopção de soluções de equipamento com melhor



Figura 5.4: Exemplos e características de alguns sistemas de aquisição de dados compatíveis com acelerómetros piezoelétricos.

comportamento às baixas frequências¹⁰ para a monitorização destas estruturas.

Na Figura 5.5 apresentam-se alguns exemplos de acelerómetros de tipo “force balance”.

As características deste tipo de acelerómetros, nomeadamente a resposta dinâmica desde 0 Hz (DC) e a grande sensibilidade, fazem com que sejam os mais apropriados para a identificação modal de estruturas de engenharia civil, nomeadamente para estruturas flexíveis (com frequências naturais de vibração com valores baixos) ou para estruturas em que os níveis de resposta, induzidos pelas acções ambiente, são baixos (estruturas pouco solicitadas).

¹⁰Os acelerómetros piezoelétricos possuem algumas perturbações na leitura de acelerações relativamente baixas.

	<p>Marca: Kinemetrics (http://www.kinemetrics.com) Modelo: Episensor ES-T (triaxial) Gama de amplitudes: configurável em $\pm 0,25$ g, $\pm 0,5$ g, ± 1 g, ± 2 g ou ± 4 g Gama dinâmica: 155 dB+ Resposta dinâmica: de DC até 200 Hz</p>
	<p>Marca: Kinemetrics (http://www.kinemetrics.com) Modelo: Episensor ES-U2 (uniaxial) Gama de amplitudes: configurável em $\pm 0,25$ g, $\pm 0,5$ g, ± 1 g, ± 2 g ou ± 4 g Gama dinâmica: 140 dB+ Resposta dinâmica: de DC até 200 Hz</p>
	<p>Marca: Geosig (http://www.geosig.com) Modelo: AC-23 (triaxial) Gama de amplitudes: configurável em $\pm 0,1$ g, $\pm 0,2$ g, $\pm 0,5$ g, ± 1 g, ± 2 g ou ± 4 g Gama dinâmica: 125 dB+ Resposta dinâmica: de 0,1 Hz até 100 Hz (opcional 200 Hz)</p>

Figura 5.5: Exemplos e características de alguns acelerómetros de tipo “force balance”.

Para efectuar o registo da grandeza medida, recorre-se a outro tipo de sistemas de aquisição de dados (ver Figura 5.6), compatíveis com os acelerómetros de tipo “force balance” como os que se mostram na Figura 5.5.

	<p>Marca: Kinemetrics (http://www.kinemetrics.com) Modelo: Granite Resolução da placa de ADC: 24 Bits Memória: Interna até 64 Gb Transdutores: família Kinemetrics</p>
	<p>Marca: Kinemetrics (http://www.kinemetrics.com) Modelo: Etna Resolução da placa de ADC: 24 Bits Memória: Cartão de memória de 32 Mb (suporta cartões superiores) Transdutores: família Kinemetrics</p>
	<p>Marca: Guralp (http://www.guralp.com) Modelo: DM24S6EAM Resolução da placa de ADC: 24 Bits Memória: Até 256 Gb Transdutores: família Guralp</p>
	<p>Marca: GeoSIG (http://www.geosig.com) Modelo: GMS NetQuakes Recorder (Wi-Fi) Resolução da placa de ADC: 24Bits Memória: De 2 até 32 Gb Transdutores: família GeoSIG</p>

Figura 5.6: Exemplos e características de alguns sistemas de aquisição de dados compatíveis com acelerómetros de tipo “force balance”.

5.4 Tratamento da informação experimental

A primeira fase do tratamento dos registos de resposta obtidos nos ensaios de vibração ambiental deve incidir numa verificação da qualidade dos dados. Algumas anomalias encontradas nos sinais de resposta são, por exemplo [VENTURA, *et al.*, 2000], [BRINCKER, *et al.*, 2000]:

- Baixa relação sinal/ruído;
- Ruído intermitente;
- Influência da frequência da rede de distribuição de energia eléctrica;
- Perdas de sinal.

Após a detecção de problemas na informação recolhida pela via experimental (como os indicados anteriormente), é necessário uma remoção dessa parte da informação através de um pré-processamento dos resultados experimentais que atenuem ou elimine essas anomalias, salientando os aspectos importantes que se encontravam dissimulados. Após este pré-tratamento dos dados, podem-se recorrer a métodos de identificação modal estocástica para a análise da informação obtida nos ensaios.

5.4.1 Pré-processamento da informação experimental

Para a atenuação ou eliminação das anomalias detectadas nos sinais registados recorre-se a diversas operações, enunciando-se algumas delas de seguida [RODRIGUES, 2004]:

- Junção de amostras com colocação de janelas de transição;
- Introdução de factores de escala nos registos;
- Correção dos registos tendo em conta a resposta em frequência dos equipamentos utilizados;
- Remoção de média e de tendências lineares;
- Filtragem do sinal.

Por exemplo, a filtragem do sinal possibilita a eliminação de certas bandas de frequências indesejadas. Assim, exclui-se o conteúdo energético de certas partes do sinal onde tal energia é indesejável quando este é observado no domínio da frequência [MENDES, 2005]. Em termos genéricos, existem três tipos de filtros ideais:

- Filtro ideal “passa baixo”, é um filtro que deixa passar todas as frequências, desde zero até um determinado valor (frequência de corte - f_c) e atenua todas as frequências acima da frequência de corte¹¹ (ver Figura 5.7(a));
- Filtro ideal “passa alto”, é um filtro que tem características inversas ao caso anterior, ou seja, atenua as frequências desde a frequência zero até uma determinada frequência e deixa passar as frequências daí para cima¹² (ver Figura 5.7(b));
- Filtro ideal “passa banda”, resulta da combinação dos dois filtros referidos anteriormente, apresentando características que atenuam as frequências fora de uma determinada banda e deixa passar as frequências dentro dessa banda¹³ (ver Figura 5.7(c)).

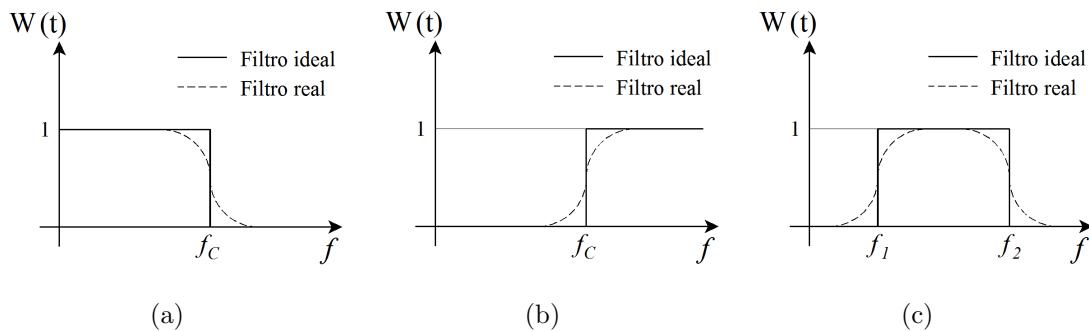


Figura 5.7: Aplicação de filtros: (a) “passa baixo”, (b) “passa alto” e (c) “passa banda”.

É de salientar que com a aplicação destas metodologias se modifica a informação experimental, assim, é conveniente ter uma noção prévia da natureza do sinal que se pretende extrair ou do tipo de ruído que se pretende eliminar. Uma utilização deste tipo de ferramentas pode gerar resultados incorrectos.

¹¹Filtro usualmente utilizado como elemento condicionador de sinal.

¹²Útil para eliminar ruído nas baixas frequências, como é o caso de certos acelerómetros.

¹³Útil para eliminar fontes de ruído previamente conhecidas.

Caso não tenha sido possível detectar e/ou corrigir algumas anomalias nos sinais medidos, deve-se ponderar a sua utilização na fase da análise de identificação modal, podendo-se simplesmente não considerar essa parte da informação danificada. Nestes casos perde-se a informação relativa aos respectivos GL instrumentados nos ensaios, no entanto, podem-se obter melhores resultados sem esta informação [RODRIGUES, 2004].

5.4.2 Processamento da informação experimental

Após uma abordagem dos aspectos relacionados com a medição, armazenamento e pré-processamento da informação obtida experimentalmente, procura-se agora caracterizar a resposta dinâmica recorrendo aos métodos de identificação modal, existindo dois grandes grupos [MENDES, 2010]:

- os métodos de identificação modal determinísticos, baseados na medição da resposta sob a actuação de forças com variação harmónica ao longo do tempo, (bem conhecida) utilizando geralmente vibradores rotativos com massa excêntrica [GOMES, *et al.*, 1994], [CANTIENI, 2001]; e
- os métodos de identificação modal estocásticos, baseados apenas na medição da resposta da obra (“output-only”) sob a excitação que ocorre usualmente na estrutura (desconhecida), ou seja, excitação resultante das acções ambientais (vento, por exemplo), e operacionais (ligadas à exploração/utilização da estrutura).

No entanto, os métodos de identificação modal determinísticos não são aplicáveis a resultados de ensaios de vibração ambiental. Como já foi referido, nos ensaios de vibração ambiental não há medição da excitação que ocorre na estrutura, assim, aborda-se com maior detalhe os métodos de identificação modal estocásticos.

Dentro destes métodos ainda se podem considerar dois grupos de métodos:

- os métodos de análise de sinal (também denominados métodos não paramétricos ou no domínio da frequência) - analisam-se as séries temporais de resposta, medidas em diferentes pontos da estrutura, as quais são relacionadas entre

si, mediante a sua transposição para o domínio da frequência, normalmente através da transformada discreta de Fourier (TDF); e

- os métodos de ajuste de modelos (também designados por métodos paramétricos ou no domínio do tempo) - ajustam-se modelos com base em diferentes técnicas, as quais são aplicadas às funções de correlação da resposta das estruturas, ou directamente às próprias séries temporais.

No âmbito do presente trabalho, irá recorrer-se ao programa *ARTEMIS Extractor*, versão 3.2 [SVS, STRUCTURAL VIBRATION SOLUTIONS APS., 2002], por ter disponível um algoritmo de um método de análise de sinal (método no domínio da frequência) para a identificação modal do comportamento dinâmico da estrutura ensaiada.

5.4.3 Interpretação de resultados experimentais e comparação com resultados numéricos

Como nos ensaios do tipo “output-only” não se tem conhecimento das excitações aplicadas, apenas da resposta da estrutura, podem ser identificadas frequências não-estruturais provenientes de perturbações e/ou fontes de ruído na estrutura ou na sua imediação (por exemplo, máquinas industriais ou sistemas mecânicos, que funcionam com uma determinada frequência) [CUNHA, *et al.*, 2006], [MENDES, 2005].

Assim, a comparação de resultados experimentais, obtidos a partir de métodos de identificação modal, com resultados de modelos numéricos previamente elaborados (o modelo previamente elaborado na fase do planeamento do respectivo ensaio, e/ou outro modelo desenvolvido) podem facilitar a interpretação e validação dos resultados obtidos experimentalmente [MENDES, 2010].

Esta comparação de resultados permite também a calibração e validação dos modelos numéricos, pela comparação das frequências estruturais (frequências naturais de vibração) e respectivas configurações dos modos de vibração dos resultados experimentais [MENDES, 2005].

Após este processo de calibração e validação dos modelos numéricos, é possível

elaborar análises de previsão do comportamento da estrutura ensaiada, no âmbito do controlo e manutenção de estruturas de engenharia civil, podendo-se estudar, entre outros, o comportamento dinâmico da estrutura sujeita a uma acção sísmica. Esta calibração e validação dos modelos numéricos permitem ter maior confiança nos resultados obtidos por esta via [MENDES, 2010].

Capítulo 6

Caso de estudo

6.1 Considerações iniciais

Com vista à aplicação dos conceitos abordados nos capítulos anteriores, estuda-se neste capítulo um caso prático de um modelo físico de um edifício de dois pisos em betão armado. Após uma abordagem à formulação do problema estrutural dinâmico, pretende-se desenvolver uma metodologia de cálculo no programa *freeFEM++* que permita o cálculo das frequências naturais de vibração e as respectivas configurações modais e um modelo numérico em *SAP2000*. Segue-se a execução de um ensaio experimental ao modelo físico de forma a comparar os resultados experimentais com os resultados obtidos nos modelos numéricos. Esta comparação tem em vista a validação dos modelos numéricos desenvolvidos, e a posterior calibração. Após esta resolução modal, pretende-se analisar os modelos numéricos sujeitos a uma acção sísmica, sendo necessário implementar uma metodologia em *freeFEM++* que permita uma análise dinâmica ao longo do tempo. Por fim, procede-se à respectiva comparação entre os resultados dinâmicos dos modelos numéricos.

6.2 Caracterização do modelo físico

A estrutura a analisar corresponde a um modelo físico de um edifício de 2 pisos constituído por quatro pilares e duas lajes (ver Figura 6.1(a)), com uma altura total de 1,05 metros e dimensões em planta de $0,43 \times 0,43$ metros (ver Figura 6.1(b)).

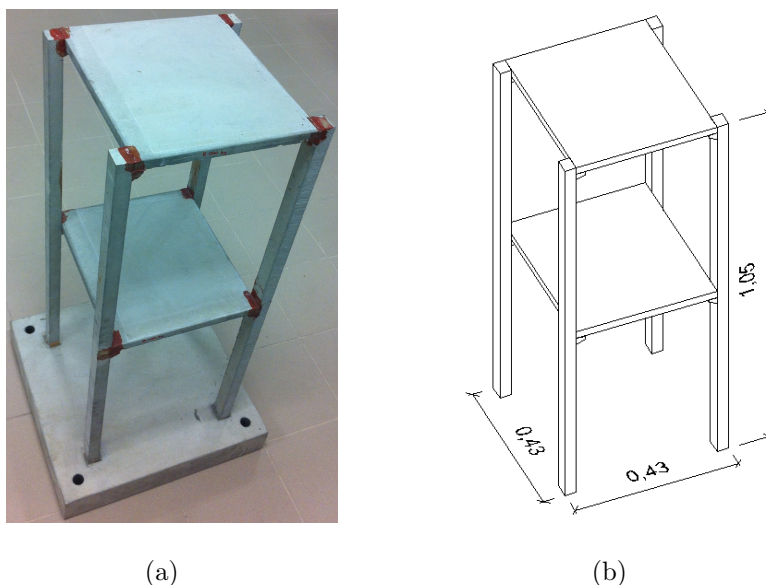


Figura 6.1: Caso de estudo: (a) modelo físico de um edifício de 2 pisos e respectivas (b) dimensões totais [MOREIRA, 2009].

As ligações entre pilares e lajes foram executadas através de umas saliências dos pilares, em forma de cachorros, que permitem o apoio das lajes nos pilares. Estas ligações entre os pilares e lajes encontram-se seladas com uma bucha química que garante a continuidade entre os elementos. Os pilares estão ligados na sua base a uma laje de fundação, que se considera indeformável e estática, podendo-se assumir um perfeito encastramento na base dos pilares [MOREIRA, 2009].

6.2.1 Características do material

O material utilizado na construção deste modelo foi um betão especial com características similares a um betão auto-compactável, visto que as reduzidas dimensões não permitiam a vibração de um betão normal [MOREIRA, 2009]. Para o valor do módulo de elasticidade, optou-se por considerar $E = 33 \text{ GPa}$ ¹⁴, já em relação às restantes características do material considerou-se o peso específico do betão $\gamma_b = 25 \text{ kN/m}^3$, o coeficiente de Poisson $\nu = 0,2$ e o módulo de distorção G obtido pela seguinte expressão:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} = 13,75 \text{ GPa}$$

¹⁴No entanto, a calibração dos modelos numéricos será feita pela variação desta propriedade.

6.3 Modelos numéricos

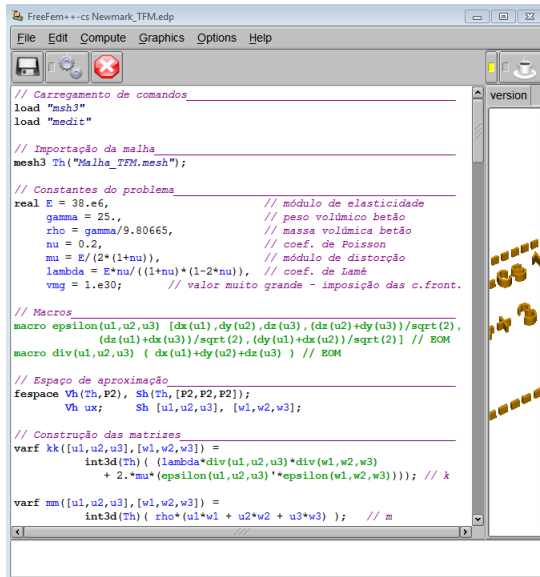
6.3.1 Modelo *freeFEM++*

Como já foi referido no capítulo 3, o programa *freeFEM++* [HECHT, 2012] é um programa que permite a resolução numérica de equações diferenciais de problemas da Física, da Engenharia e da Matemática, baseando-se no MEF. É um pacote programado inteiramente em linguagem C++, mas que oferece ao utilizador uma linguagem de *input* que se aproxima à escrita matemática (ver Figura 6.2(a)). O problema é descrito em formulação fraca e a geometria da estrutura pode ser definida usando comandos próprios. Em termos de elementos finitos, este programa permite considerar elementos finitos triangulares, ou tetraédricos (lineares, quadráticos, entre outros). Este programa apresenta ainda a possibilidade de importar e exportar ficheiros *.txt*, *.edp*, *.pos*, *.gnu* e *.mesh*, facilitando assim a manipulação de dados de *input* e *output*.

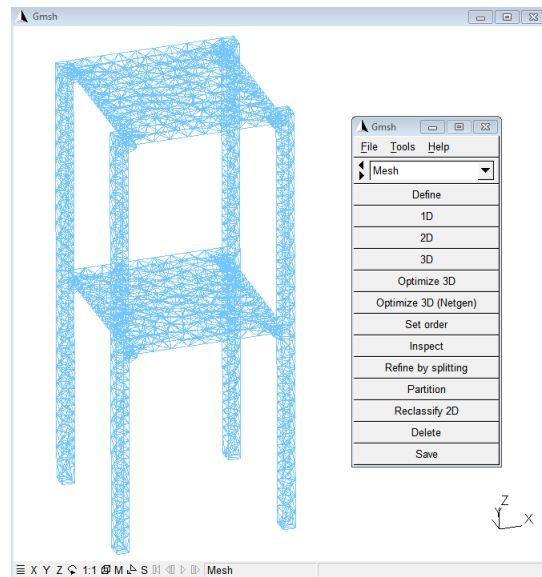
O domínio do problema, designado por $V \subset \mathbb{R}^3$, corresponde ao volume da estrutura a analisar, e a fronteira deste domínio é denotada por $\Gamma = \partial V$.

Construção da malha

Embora o programa *freeFEM++* suporte a criação da malha da estrutura desejada, optou-se por recorrer ao programa *GMSH*, pela maior eficiência e facilidade no processo de criação da malha. Este programa permite ainda a definição de regiões, para a imposição das condições de fronteira do tipo Dirichlet. A malha criada é constituída por elementos finitos tetraédricos, de acordo com o indicado no Anexo A e guardada com a extensão *.mesh* (ver Figura 6.2(b)).



(a)



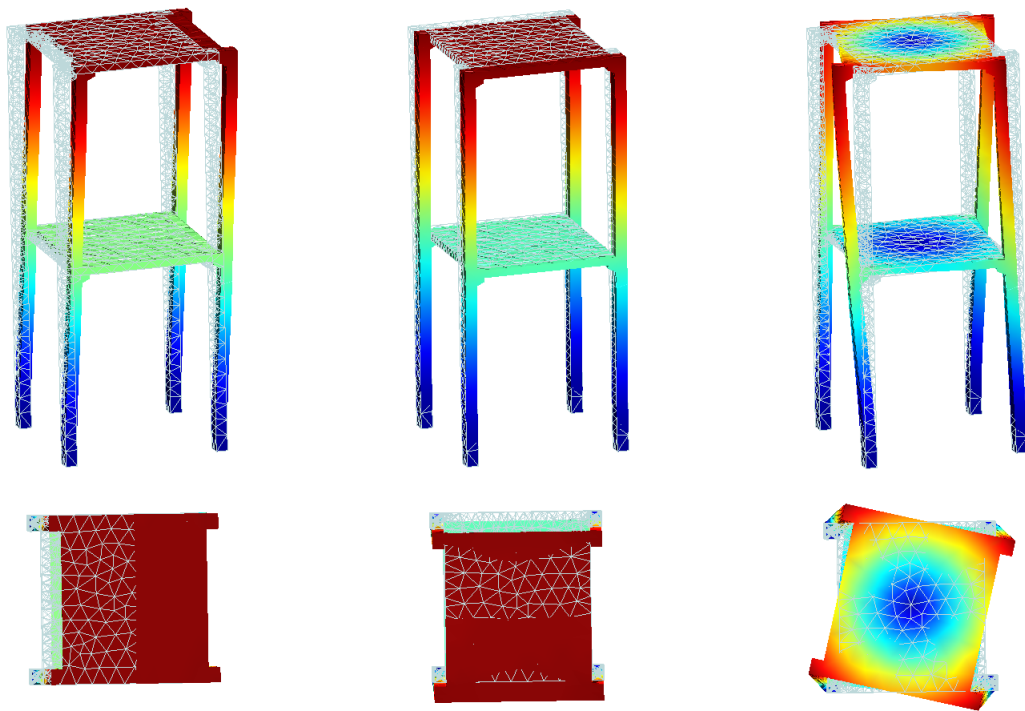
(b)

Figura 6.2: (a) Interface do programa *freeFEM++* com parte da linguagem da programação utilizada e (b) interface do programa *GMSH* com a representação da malha da estrutura.

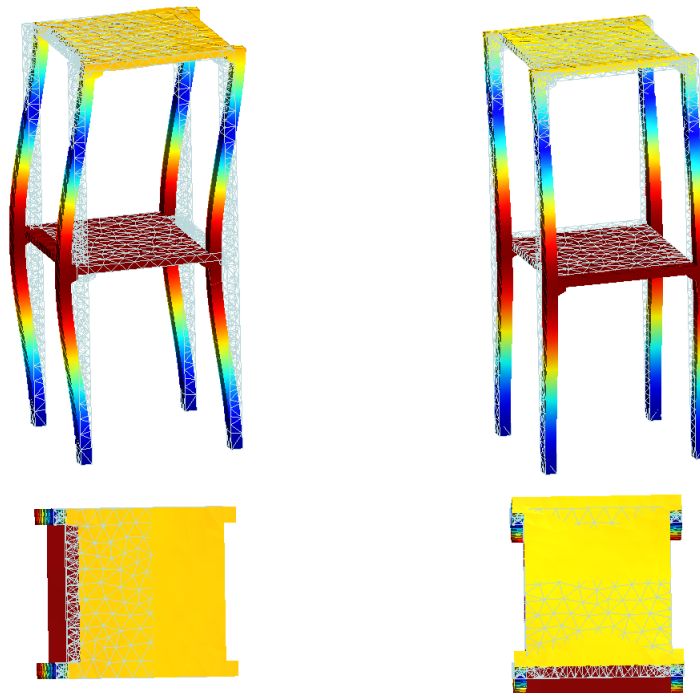
Cálculo das frequências naturais e modos de vibração

Após o procedimento para o cálculo das frequências naturais e dos modos de vibração, como se encontra indicado no Anexo B.1, através do programa *GMSH* é possível obter uma representação das configurações modais e as frequências naturais de vibração da estrutura (ver Figura 6.3).

A primeira configuração modal corresponde à translação na direcção Ox , com os deslocamentos modais dos dois pisos em fase. A segunda configuração é idêntica à anterior, sendo que a translação ocorre na direcção Oy , perpendicular a Ox . A terceira configuração modal corresponde à torção da estrutura em torno do eixo Oz . A quarta e quinta configurações modais são translações nas direcções Ox e Oy , respectivamente, com os deslocamentos modais dos pisos desfasados.



(a) 1º modo: $f_1 = 22,16$ Hz. 2º modo: $f_2 = 24,20$ Hz. 3º modo: $f_3 = 37,41$ Hz.



(b) 4º modo: $f_4 = 69,79$ Hz. 5º modo: $f_5 = 84,53$ Hz.

Figura 6.3: Configurações modais e respectivas frequências de vibração obtidas pelo modelo numérico do programa *freeFEM++*.

6.3.2 Modelo *SAP2000*

No programa *SAP2000* foi elaborado um modelo tridimensional em elementos finitos cúbicos de 8 nós (ver Figura 6.4). O material utilizado neste modelo numérico também tem um módulo de elasticidade $E = 33$ GPa. Em relação às condições de fronteira, assumiu-se encastramentos perfeitos nas bases dos pilares e assumiu-se uma continuidade perfeita nas ligações lajes-pilares.

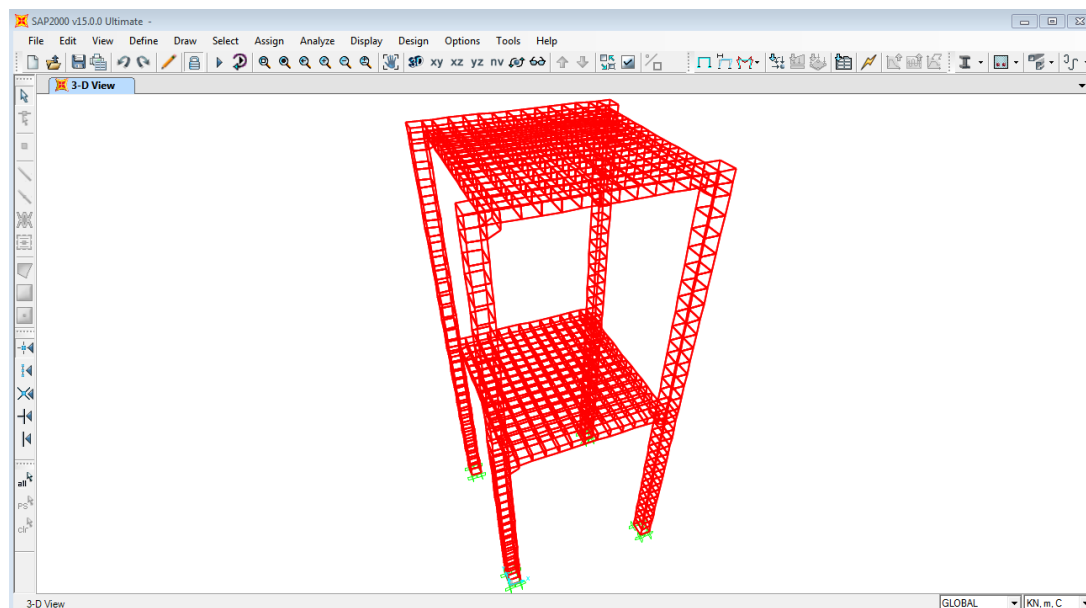


Figura 6.4: Modelo numérico desenvolvido no programa *SAP2000*.

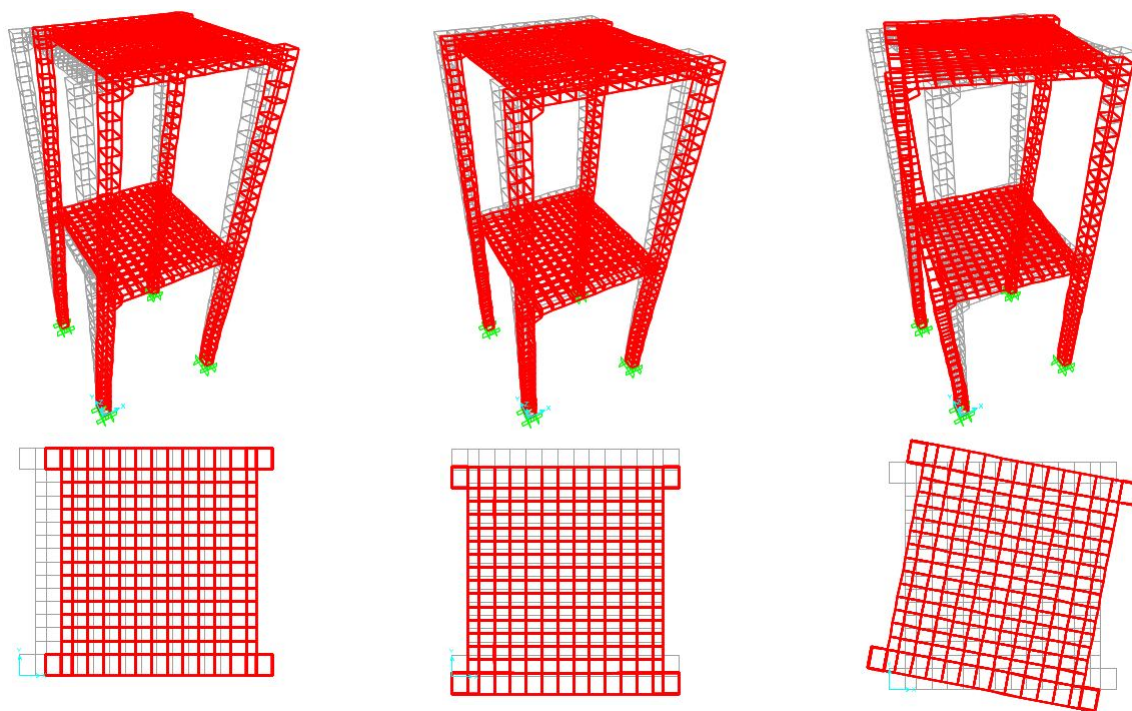
A resolução modal disponível neste programa, permite obter as configurações modais e respectivas frequências naturais de vibração (ver Figura 6.5).

Comparação de resultados numéricos

Analisando as Figuras 6.3 e 6.5 pode-se considerar que o aspecto das configurações modais obtidas por ambos os modelos numéricos é semelhante.

Para uma análise aos valores das frequências naturais de vibração, foi calculado o erro relativo (ver Tabela 6.1), obtido pela seguinte expressão:

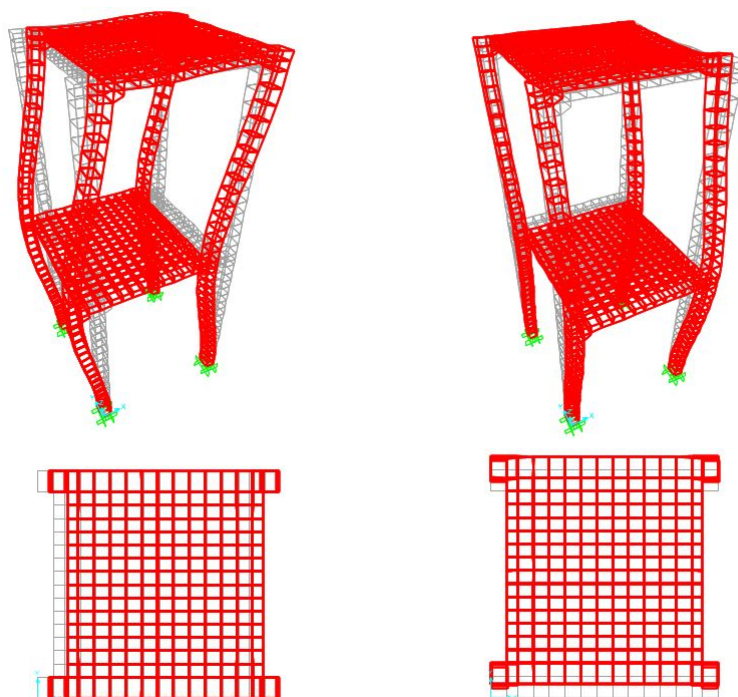
$$e_{relativo} = \frac{ABS(u_{SAP2000} - u_{freeFEM++})}{ABS(u_{SAP2000})}$$



(a) 1º modo: $f_1 = 22,37$ Hz.

2º modo: $f_2 = 24,48$ Hz.

3º modo: $f_3 = 37,63$ Hz.



(b) 4º modo: $f_4 = 70,36$ Hz.

5º modo: $f_5 = 85,27$ Hz.

Figura 6.5: Configurações modais e respectivas frequências de vibração obtidas pelo modelo numérico do programa *SAP2000*.

Nº	freeFEM ++ [Hz]	SAP 2000 [Hz]	Erro dif. [%]
1	22,16	22,37	0,9
2	24,20	24,48	1,1
3	37,41	37,63	0,6
4	69,79	70,36	0,8
5	84,53	85,27	0,9
E [GPa]	33	33	

Tabela 6.1: Comparação dos resultados das frequências naturais de vibração dos modelos numéricos *freeFEM++* e *SAP2000*.

Como se pode ver na Tabela 6.1, os valores das frequências naturais de vibração obtidos por ambos os modelos são próximos, com erros relativos na ordem de 1%. Ainda se pode referir que o modelo desenvolvido em *freeFEM++* é menos rígido, pois possui valores de frequência inferiores ao modelo desenvolvido em *SAP2000*.

6.4 Ensaio dinâmico

Com o desenvolvimento dos modelos numéricos, obteve-se um conhecimento aproximado das configurações modais dos primeiros modos de vibração. Assim, assumindo que a resposta da estrutura fica bem definida considerando apenas os 5 primeiros modos de vibração, a frequência de amostragem (f_S) a utilizar em ensaios dinâmicos deve cumprir a seguinte condição [RODRIGUES, 2004]:

$$f_S = 2 \times f_{Nyq} \geq 2 \times f_{Max} \quad f_S \geq 2 \times 90,0 = 180,0 \text{ Hz}$$

De forma a considerar uma margem ao valor anterior, adoptou-se o valor de $f_S = 204,8 \text{ Hz}$, de forma a identificar frequências até $102,4 \text{ Hz}$.

O conhecimento dos 5 primeiros modos de vibração permitiram seleccionar os melhores locais a instrumentar, adoptando-se a disposição indicada na Figura 6.6, por forma a identificar os modos referentes a translações nas direcções Ox e Oy e a torções em torno do eixo Oz .

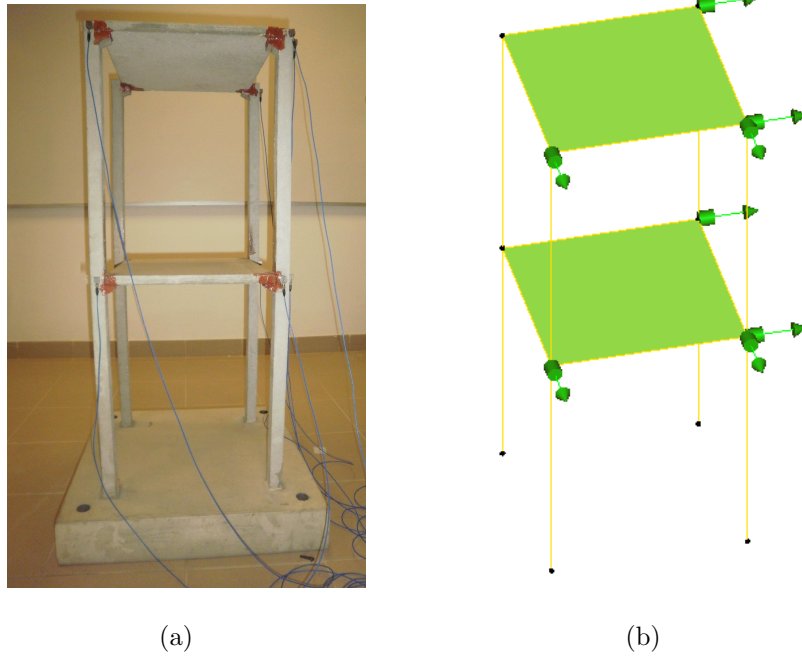


Figura 6.6: (a) Disposição espacial de acelerómetros no modelo físico a ensaiar e respectiva (b) representação no programa *ARTEMIS Testor*.

No âmbito deste trabalho, foi realizado um ensaio dinâmico de vibração ambiental, no qual se utilizaram 8 acelerómetros piezoeléctricos da marca “PCB Piezotronics” e modelo “333B52”, ligados por cabos coaxiais a um sistema de aquisição de dados da marca “OROS”, modelo “OR35”, com a ligação a um computador que configura e controla o sistema ao longo da realização dos ensaios (ver Figura 6.7).



Figura 6.7: Equipamento utilizado na realização dos ensaios experimentais ao modelo físico.

O ensaio de vibração ambiental foi realizado no Laboratório de Estruturas do ISEL, que por se tratar de um local em que se verificam baixos níveis de vibração ambiental entendeu-se aplicar alguns impactos aleatórios na base do modelo para melhorar as condições de excitação e assim obter uma melhor relação sinal ruído, que permite

obter melhores resultados experimentais. O ensaio teve 60 segundos como duração total e 204,8 Hz de frequência de amostragem, como referido anteriormente.

Após a realização do ensaio, sabendo que este tipo de acelerómetros possui alguns problemas associados às baixas frequências, procedeu-se à aplicação de um filtro do tipo “passa alto”, atenuando as frequências abaixo de 1 Hz. Na Figura 6.8 mostra-se os resultados obtidos no domínio da frequência por um canal de medição, no caso de não proceder a este pré-processamento. Já na Figura 6.9 evidencia-se a alteração proveniente da aplicação deste filtro nos resultados obtidos pelo mesmo canal de medição: na parte inicial do gráfico há uma atenuação das frequências abaixo de 1 Hz.

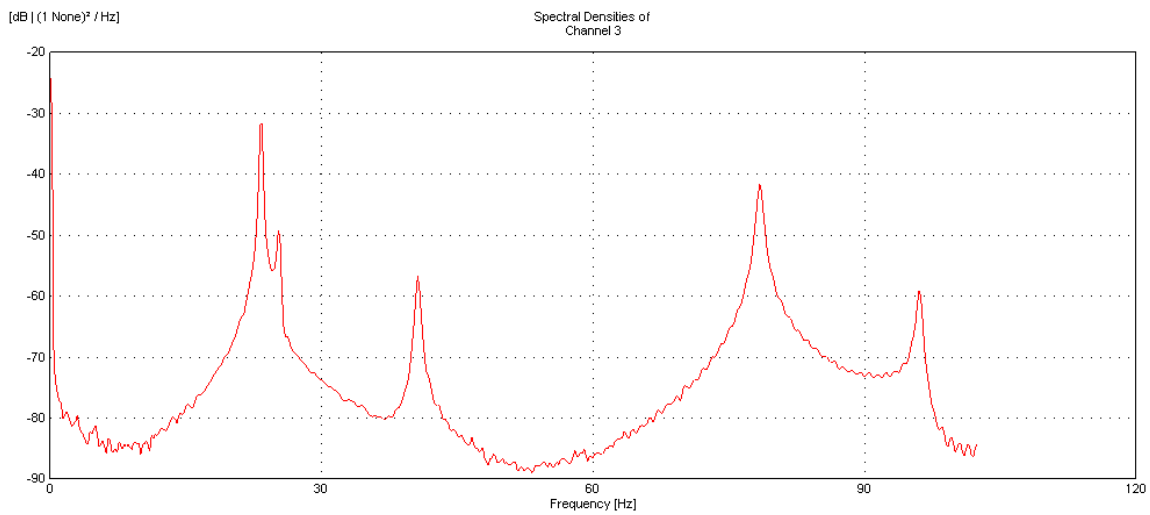


Figura 6.8: Dados de medições sem a aplicação de filtros.

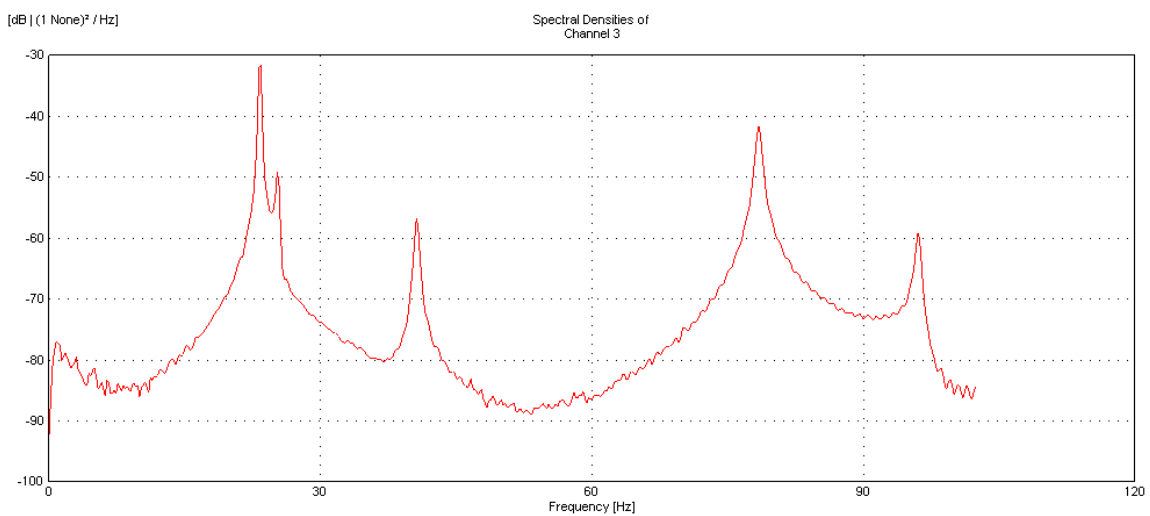


Figura 6.9: Dados de medições com a aplicação do filtro “passa alto” a 1 Hz.

Para a aplicação deste tipo de filtros a casos de estruturas de engenharia civil, a escolha da frequência de corte igual a 1 Hz pode ser elevada, conduzindo a resultados incorrectos. Note-se que no caso de pontes de vãos elevados, a primeira frequência pode estar abaixo dos 0,1 Hz e no caso de edifícios com 12 andares, a primeira frequência natural de vibração pode rondar 1 Hz [MENDES, 2005]. No entanto, para a estrutura analisada neste trabalho, como o valor da primeira frequência natural é da ordem dos 20 Hz, não existem problemas a este nível.

Recorrendo ao programa *ARTEMIS Testor*, versão 3.0 [SVS, STRUCTURAL VIBRATION SOLUTIONS APS., 2006], definiu-se a geometria da estrutura analisada e identificou-se a posição e orientação dos acelerómetros utilizados nos ensaios (ver Figura 6.10).

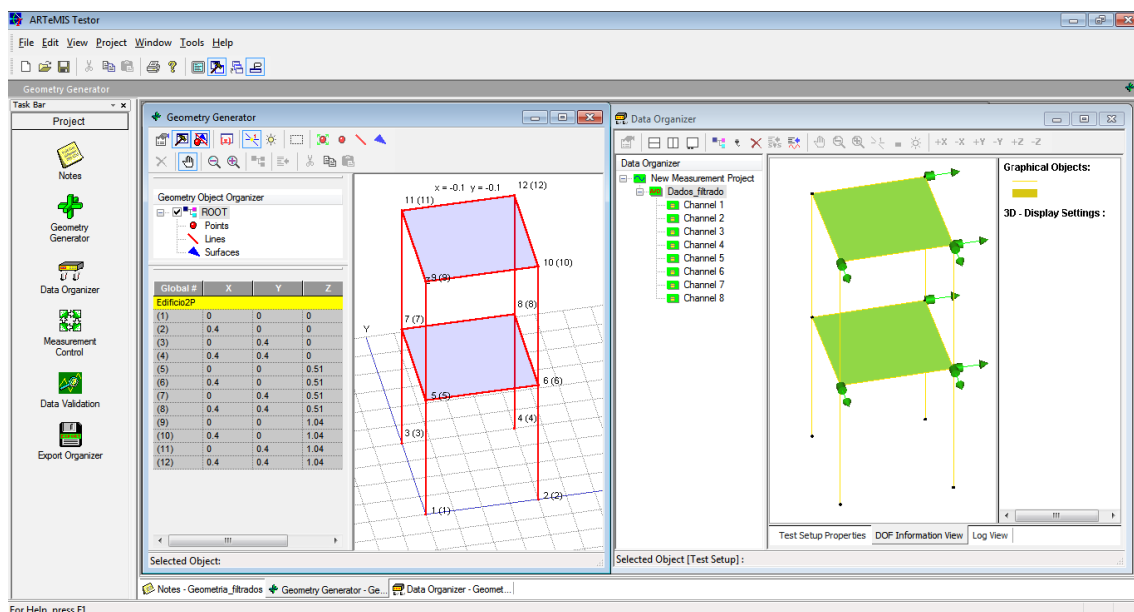


Figura 6.10: Interface do programa *ARTEMIS Testor*.

Utilizando o programa *ARTEMIS Extractor*, procedeu-se à identificação modal a partir das séries temporais adquiridas nos ensaios dinâmicos realizados no modelo físico, com o recurso ao método de decomposição no domínio da frequência (FDD - *Frequency Domain Decomposition*), disponível no programa (ver Figura 6.11).

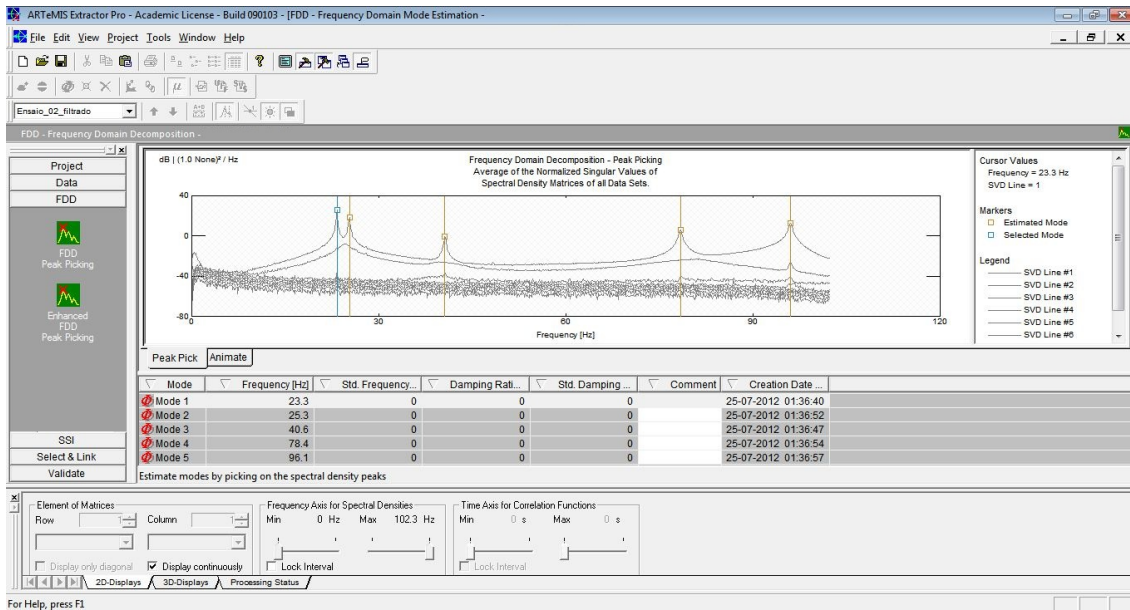


Figura 6.11: Interface do programa *ARTEMIS Extractor*.

A aplicação desta técnica FDD permite a obtenção de um espectro dos valores singulares da matriz das densidades espectrais de potência da resposta em aceleração [MAGALHÃES, 2004], onde os picos indicam, de uma forma clara, as frequências naturais de vibração da estrutura analisada (ver Figura 6.12).

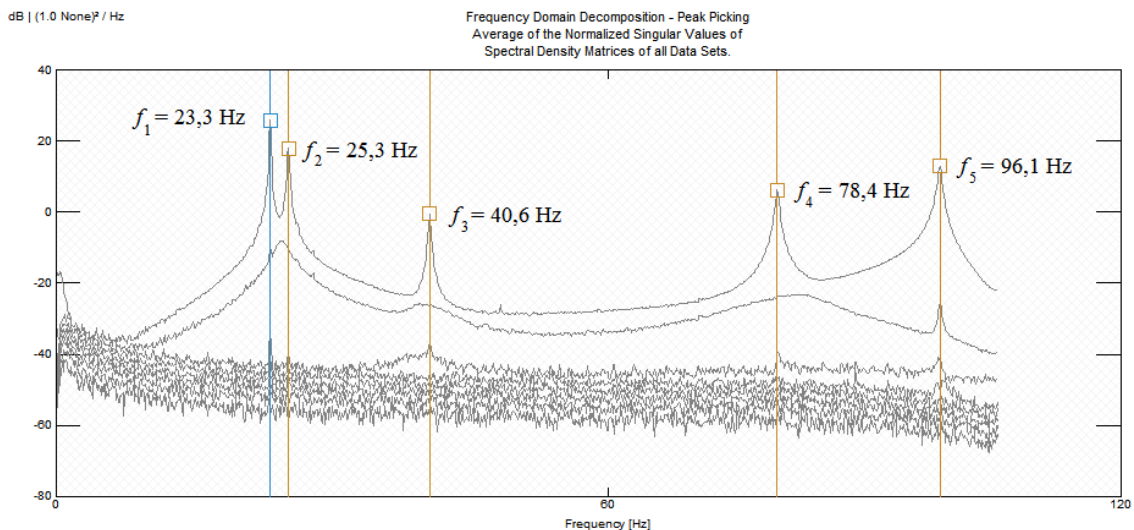


Figura 6.12: Espectro dos valores singulares da matriz das densidades espectrais de potência da resposta em aceleração.

Como já foi referido, a cada frequência natural de vibração está associado um modo de vibração, desta forma, recorrendo à geometria criada no programa *ARTEMIS*

Testor, também é possível obter as configurações dos modos de vibração associados a cada pico identificado no espectro da Figura 6.12 (ver Figura 6.13).

Os modos de vibração obtidos pelo ensaio de vibração ambiental realizado no modelo físico têm uma configuração semelhante às configurações modais dos modelos numéricos, no entanto observam-se pequenas contribuições nas direcções perpendiculares (principalmente nos dois primeiros modos de vibração).

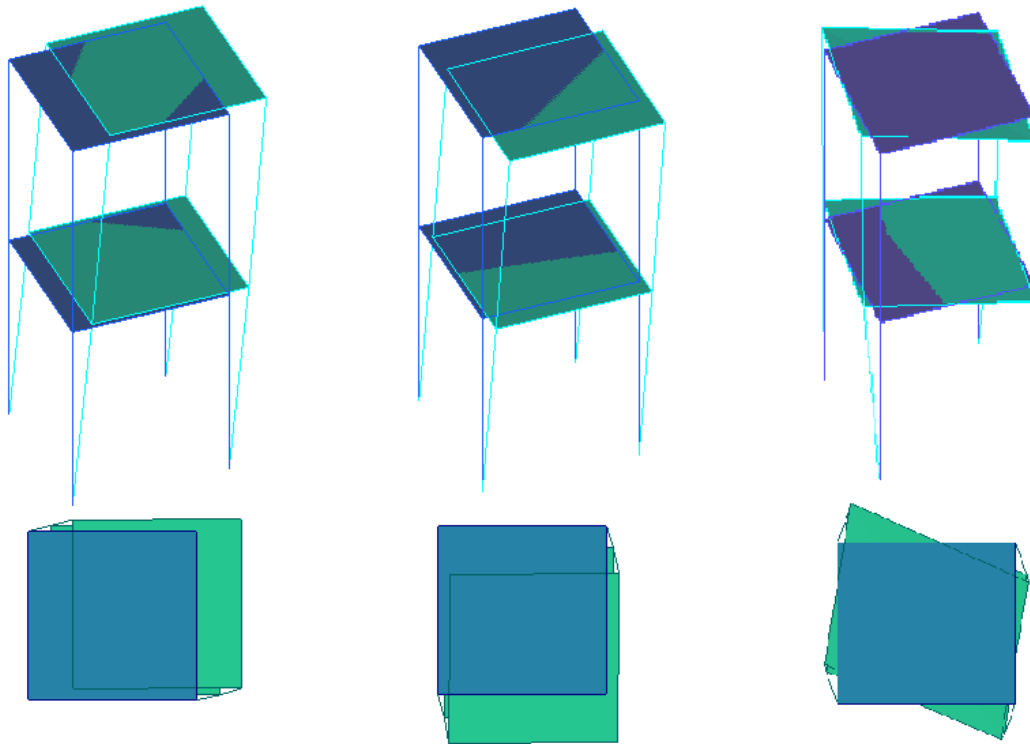
As frequências naturais de vibração identificadas a partir do ensaio de vibração ambiental realizado no modelo físico também são próximas das frequências naturais de vibração dos modelos numéricos, contudo, na secção 6.5 do presente trabalho, aborda-se o grau de aproximação dos modelos numéricos calibrados ao modelo físico.

6.5 Análise e comparação de resultados

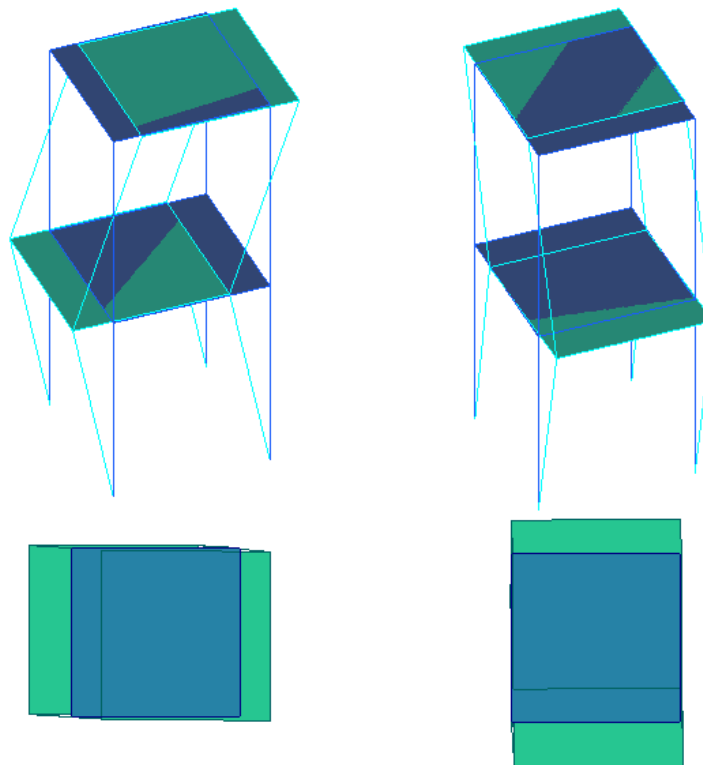
Após o conhecimento dos valores das frequências naturais de vibração identificadas a partir do ensaio de vibração ambiental realizado no modelo físico do edifício de dois pisos, os modelos numéricos foram calibrados de forma a aproximar o valor da primeira frequência natural de vibração ao valor obtido no modelo físico¹⁵ ($f_1 = 23,3$ Hz). Esta calibração consistiu no ajuste do módulo de elasticidade em cada modelo numérico. Na Tabela 6.2 apresentam-se os valores das frequências naturais de vibração ajustadas ao modelo físico, e o respectivo valor do módulo de elasticidade considerado.

Como se pode verificar pela Tabela 6.2, obtém-se uma boa aproximação das frequências naturais, quer pelo programa *SAP2000*, quer pelo *freeFEM++* que, no geral, apresenta uma melhor aproximação. É de referir ainda que, à medida que os valores das frequências naturais de vibração aumentam, maior é a diferença entre os valores experimentais e os valores dos dois modelos numéricos (*freeFEM++* e *SAP2000*).

¹⁵Optou-se por esta calibração pois o primeiro modo de vibração é o que melhor caracteriza a resposta de uma estrutura.



(a) 1º modo: $f_1 = 23,3$ Hz. 2º modo: $f_2 = 25,3$ Hz. 3º modo: $f_3 = 40,6$ Hz.



(b) 4º modo: $f_4 = 78,4$ Hz. 5º modo: $f_5 = 96,1$ Hz.

Figura 6.13: Configurações modais e respectivas frequências naturais de vibração obtidas pelo modelo experimental no programa *ARTEMIS Extractor*.

Nº	Modelo físico [Hz]	freeFEM ++ [Hz]	Erro dif. [%]	SAP 2000 [Hz]	Erro dif. [%]
1	23,3	23,30	0,0	23,30	0,0
2	25,3	25,45	0,6	25,50	0,8
3	40,6	39,34	3,1	39,19	3,5
4	78,4	73,39	6,4	73,29	6,5
5	96,1	88,90	7,5	88,81	7,6
E [GPa]		36,5		35,8	

Tabela 6.2: Comparação dos resultados das frequências naturais de vibração calculadas nos modelos numéricos com as identificadas no modelo físico.

6.6 Análise sísmica dos modelos numéricos calibrados

Após o ajuste dos valores das frequências naturais de vibração dos modelos numéricos às identificadas experimentalmente no modelo físico pretendeu-se analisar o modelo quando este é submetido a uma acção variável ao longo do tempo. Visto se tratar de uma análise no tempo, recorreu-se ao método numérico de integração no tempo abordado na secção 4.1 do presente trabalho, o método de Newmark, implementado em *freeFEM++* e disponível em *SAP2000*.

Para esta análise considerou-se o contributo do amortecimento da estrutura, através do conceito de amortecimento de Rayleigh. Analogamente ao modelo desenvolvido em *MATLAB* para a análise plana do método de Newmark apresentado no ponto 4.1.2 deste trabalho, as constantes c_1 e c_2 foram admitidas iguais a 0,01 e 0,0001, respectivamente, e as constantes de Newmark $\alpha = 1/2$ e $\beta = 1/4$.

6.6.1 Acção exterior

Como acção exterior optou-se por considerar a acção de um sismo na direcção Ox . Assim, considerou-se um registo de acelerações na base $\underline{a}_b(t)$ (ver Tabela 6.3 e Figura 6.14) do sismo que ocorreu em *El Centro*, Califórnia, Estados Unidos da América,

no ano 1940. Este registo sísmico possui o valor da aceleração sísmica medida na base a cada 0,01 segundos, com uma duração total de 40 segundos.

Tempo	Aceleração
[s]	[m/s ²]
0,00	-0,06282
0,01	-0,05914
0,02	0,00520
⋮	⋮
39,97	0,00107
39,98	0,00101
39,99	0,00093

Tabela 6.3: Parte de um registo de acelerações do sismo em *El Centro*, 1940, Califórnia, EUA.

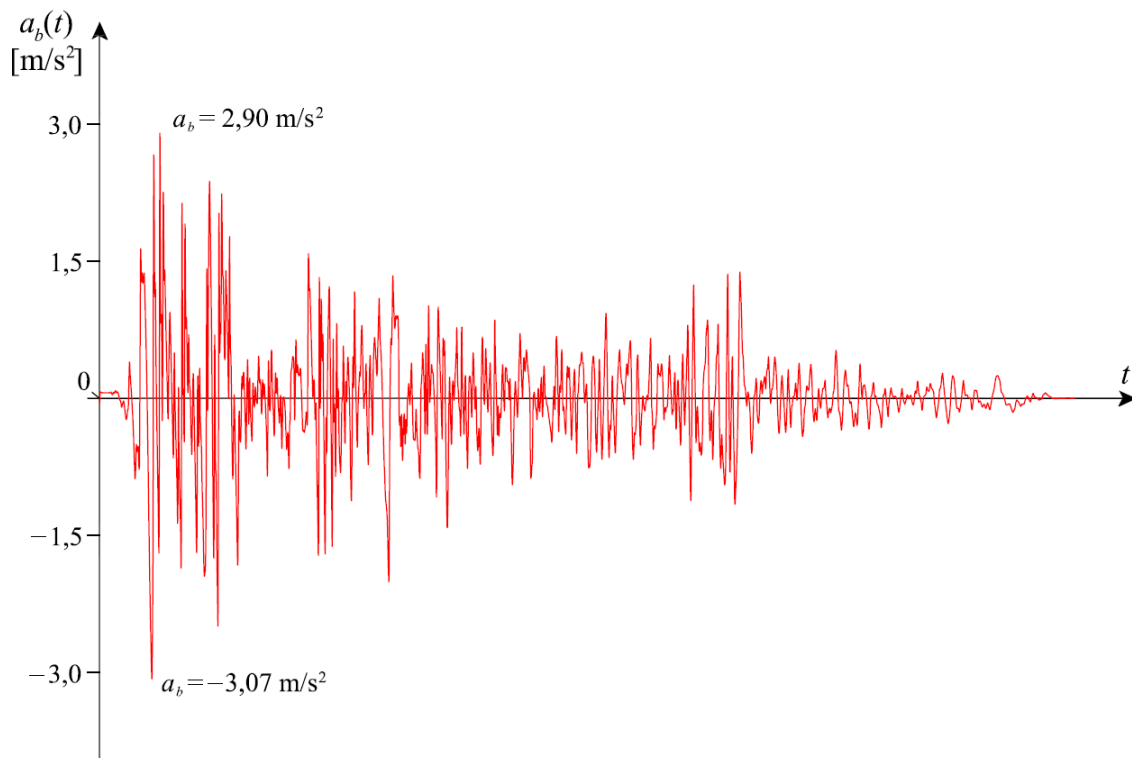


Figura 6.14: Representação gráfica de um registo de aceleração sísmica obtido no sismo em *El Centro*, 1940, Califórnia, EUA.

Uma vez que este registo sísmico contém o valor das acelerações, o vector de forças exteriores \tilde{f} foi definido a partir de acelerações, assim:

$$\tilde{f} = -m \underline{1} \underline{a}_b(t)$$

Em que $\underline{1}$ é um vector com valor unitário para os graus de liberdade que têm a direcção da acção sísmica (direcção Ox) e nulo para os restantes graus de liberdade (direcções Oy e Oz) e \underline{a}_b corresponde ao vector com o registo de acelerações do solo.

6.6.2 Passo de integração

De modo a utilizar o método de Newmark para a integração no tempo, é necessário adoptar um intervalo de tempo Δt constante em todo o processo de integração. Assim, voltando a assumir que a resposta da estrutura fica bem definida com a consideração dos 5 primeiros modos de vibração, a escolha do intervalo de tempo Δt deve ser 10 vezes inferior ao menor período dos 5 primeiros modos de vibração [COELHO, 1997]. Desta forma, assumindo ainda as restrições que conferem a estabilidade ao método (expressão 4.10), considera-se que o passo de integração Δt é dado por:

$$\Delta t = \frac{T_5}{10} = \frac{1}{10 f_5} \approx 0,001 \text{ segundos}$$

Optou-se por esta hipótese pois permite a obtenção das componentes de vibração até ao modo de vibração m sem ter um volume de cálculos elevado por considerar passos de integração Δt demasiado pequenos.

No entanto, como o registo sísmico tem um passo de 0,01 segundos e tem uma duração total de 40,00 segundos, o processo de integração teria $40,00/0,001 = 40000$ passos de cálculo, o que cria algumas restrições computacionais. Desta forma, optou-se por considerar um passo de cálculo de 0,01 segundos, obtendo 4000 passos de cálculo. Contudo, a metodologia em *freeFEM++* foi desenvolvida para casos em que os passos de cálculo não coincidam, onde o valor da aceleração na base devido à acção do sismo a considerar em cada instante de integração é obtido por interpolação dos dados do registo sísmico.

6.6.3 Comparação dos modelos numéricos

A comparação dos modelos numéricos consistiu na determinação dos deslocamentos na direcção Ox de um ponto situado na laje do piso superior dos modelos desenvolvidos em *freeFEM++* e *SAP2000* (ver Figura 6.15). Este ponto apenas pertence à malha do programa *SAP2000*, no caso do modelo em *freeFEM++*, os deslocamentos são obtidos por interpolação dos pontos nodais mais próximos.

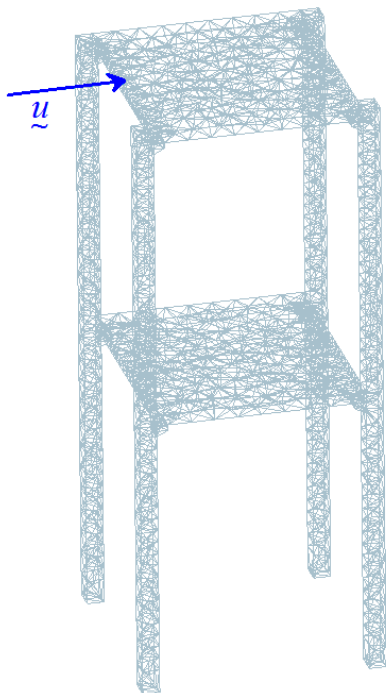


Figura 6.15: Indicação do ponto a considerar para a determinação do deslocamento ao longo do tempo. Coordenadas (0.03, 0.215, 1.05).

6.6.4 Modelo *freeFEM++* calibrado

Após a calibração do modelo desenvolvido em *freeFEM++* para aproximar a primeira frequência natural de vibração¹⁶, a implementação do método numérico para integração no tempo seguiu a metodologia indicada no Anexo B.2.

De forma a possibilitar a comparação deste modelo numérico com o modelo em *SAP2000*, dentro do processo de integração é criado um ficheiro “dponto.data”,

¹⁶Pela alteração do módulo de elasticidade $E = 36,5$ GPa.

onde se guardaram os deslocamentos do ponto coincidente com a malha criada em *SAP2000* (ver Figura 6.16).

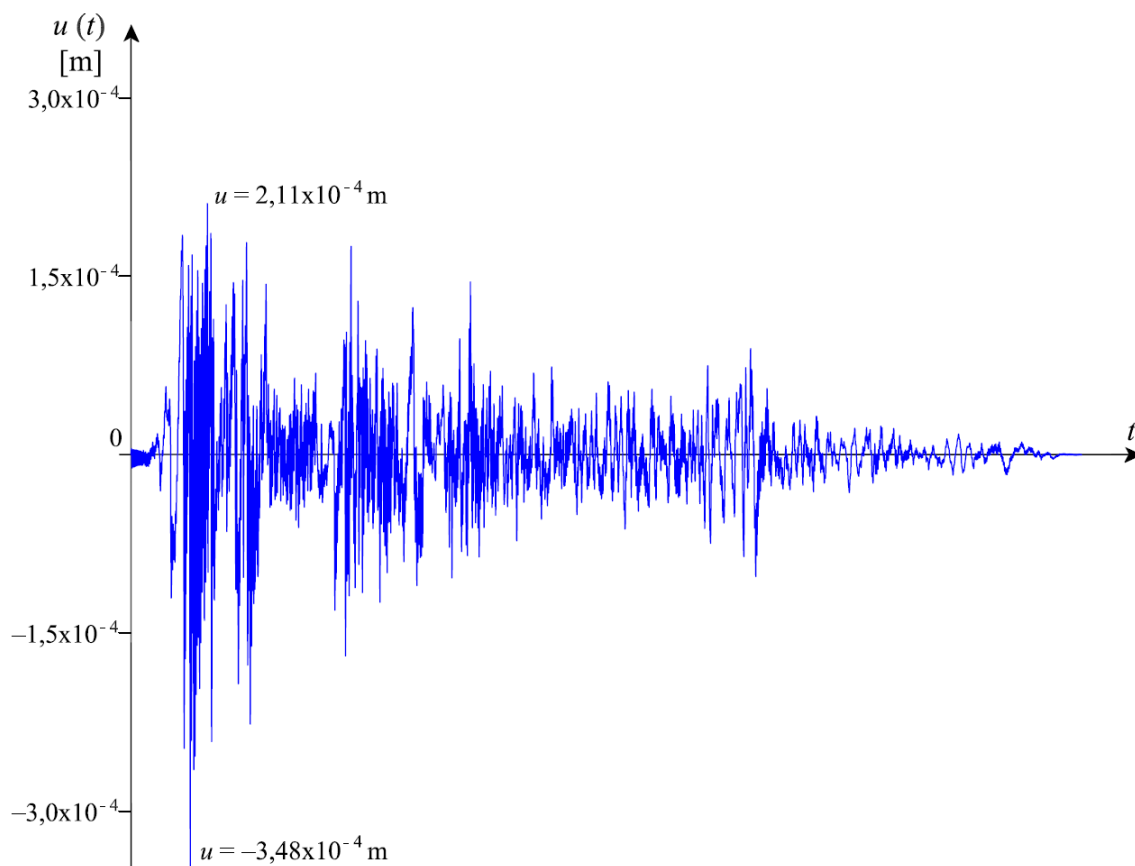


Figura 6.16: Representação gráfica do deslocamento ao longo do tempo do ponto da laje superior em *freeFEM++*.

6.6.5 Modelo *SAP2000* calibrado

No modelo desenvolvido em *SAP2000*, após a respectiva calibração para aproximar a primeira frequência natural de vibração¹⁷, pretendeu-se analisar o modelo à mesma acção sísmica na base (ver Figura 6.17).

Para analisar os deslocamentos devidos a esta acção, obteve-se a representação gráfica do deslocamento na direcção Ox do mesmo ponto da laje do piso superior do modelo em *freeFEM++* (ver Figura 6.18).

¹⁷Pela alteração do módulo de elasticidade $E = 36$ GPa.

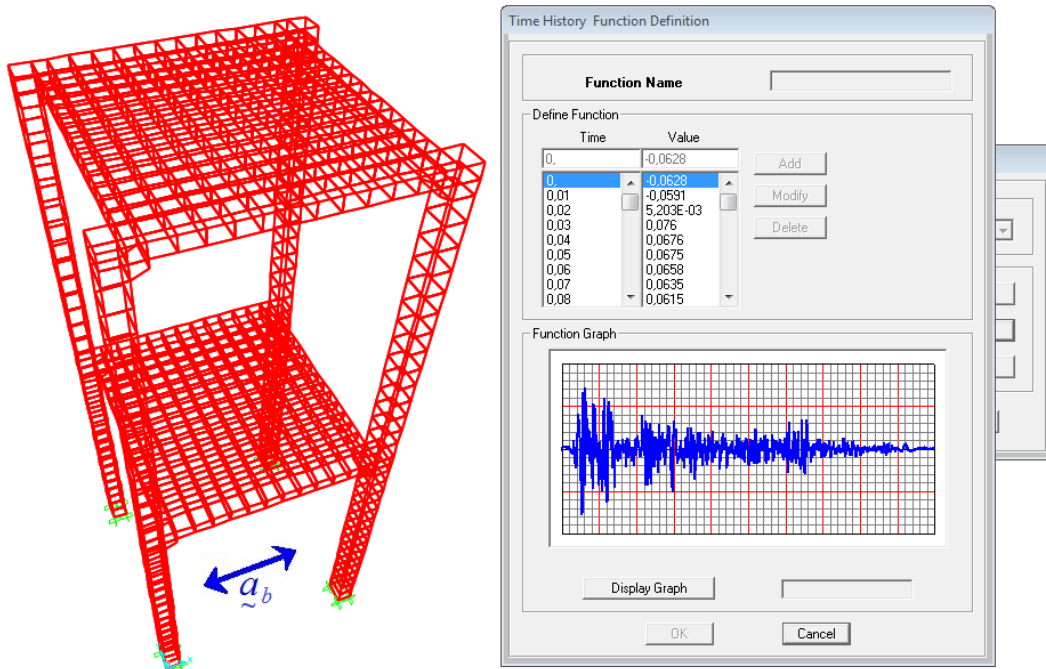


Figura 6.17: Representação gráfica da aceleração na base utilizada em *SAP2000*.

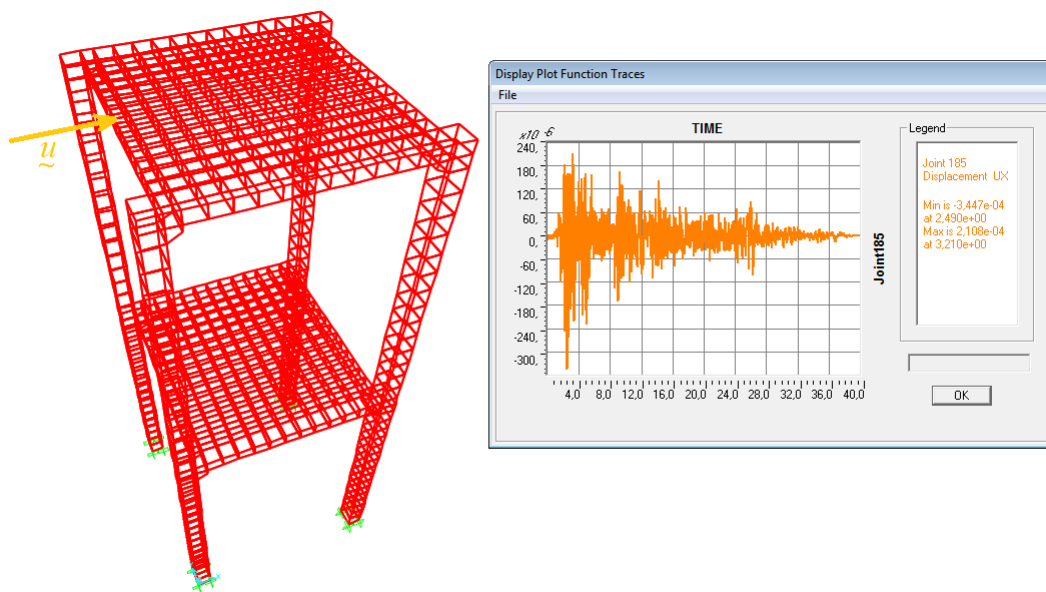


Figura 6.18: Representação gráfica do deslocamento ao longo do tempo do ponto da laje superior em *SAP2000*.

Para facilitar a comparação com os resultados obtidos em *freeFEM++*, optou-se por representar os resultados obtidos em *SAP2000* de forma análoga à apresentada para o caso do modelo em *freeFEM++* (ver Figura 6.19).

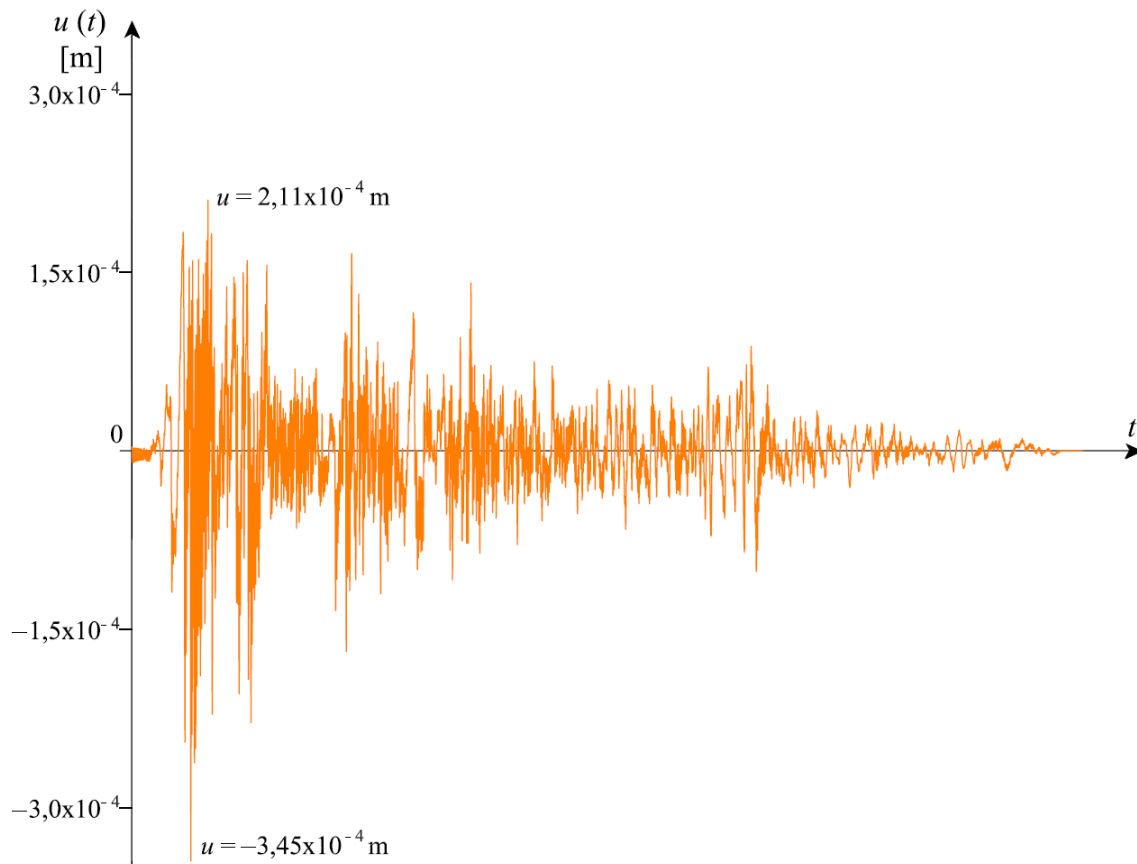


Figura 6.19: Representação gráfica dos resultados obtidos em *SAP2000*.

6.6.6 Análise e comparação de resultados

Para comparar os resultados obtidos na análise sísmica desenvolvida nos dois modelos numéricos, calculou-se o erro absoluto dado pela expressão:

$$e_{absoluto} = ABS(u_{SAP2000} - u_{freeFEM++})$$

Através da representação deste erro calculado (ver Figura 6.20) concluiu-se que existe uma maior discrepância no período até aos 5 segundos iniciais, sendo este o período em que a acção sísmica e as respostas calculadas em ambos os modelos apresentam valores máximos.

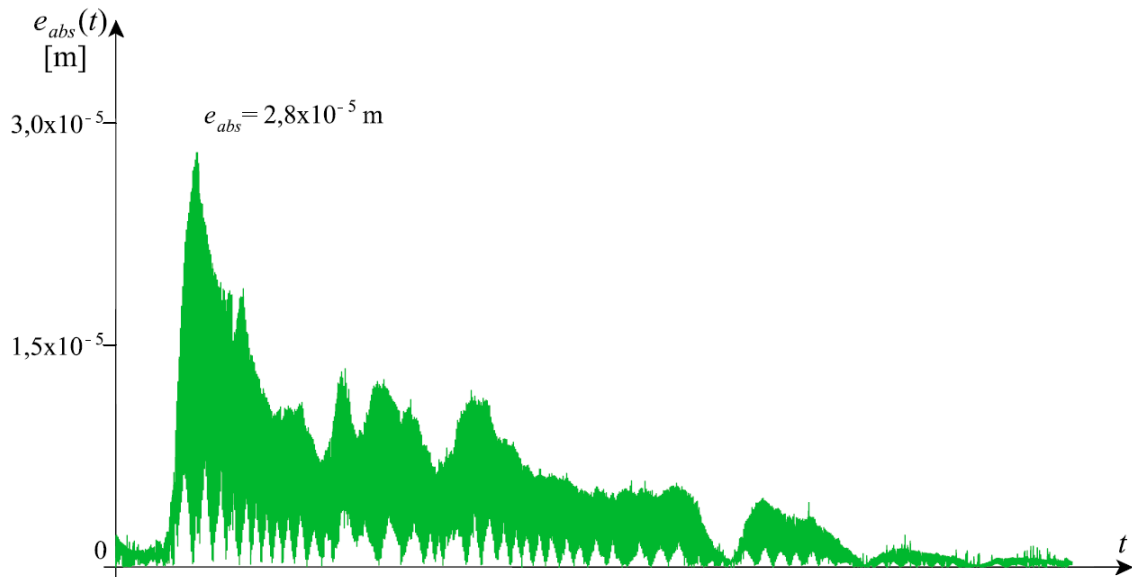


Figura 6.20: Representação gráfica do erro absoluto entre os resultados em *freeFEM++* e em *SAP2000*.

No entanto, analisando a Figura 6.16 e a Figura 6.19 pode concluir-se que ambos os modelos têm uma resposta em deslocamentos idêntica, podendo-se comparar os máximos obtidos em ambos os modelos através do cálculo do erro relativo (ver Tabela 6.4).

Valores	<i>freeFEM++</i> [m]	<i>SAP2000</i> [m]	Erro relativo [%]
Máximo	$2,11 \times 10^{-4}$	$2,11 \times 10^{-4}$	0,1
Mínimo	$-3,48 \times 10^{-4}$	$-3,45 \times 10^{-4}$	0,8

Tabela 6.4: Erro relativo dos valores máximos dos modelos numéricos desenvolvidos.

Capítulo 7

Conclusões

7.1 Conclusões do trabalho

Com o presente trabalho apresentou-se uma ferramenta alternativa (o programa *freeFEM++*) para resolver problemas de dinâmica de estruturas, utilizando o método dos elementos finitos (MEF). Para mostrar a aplicabilidade desta ferramenta evidenciou-se a importância de dominar os principais fundamentos matemáticos que permitem estudar o comportamento dinâmico de estruturas de engenharia civil. Neste sentido, foram apresentados no trabalho, para além dos fundamentos da dinâmica de estruturas, os princípios em que assenta o MEF, nomeadamente as metodologias de integração no espaço e os métodos de integração no tempo, em particular o método de Newmark.

Apresentou-se o algoritmo de cálculo do método de Newmark que se implementou computacionalmente no âmbito deste trabalho, tendo-se utilizado numa primeira fase o programa *MATLAB* para estudar e compreender o método (utilizando um pequeno exemplo de teste), antes de o implementar no programa *freeFEM++*.

Mostrou-se um enquadramento sobre a utilização de ensaios de vibração ambiental para caracterizar o comportamento dinâmico de estruturas de engenharia civil. Nesta perspectiva abordaram-se sumariamente assuntos que vão desde o planeamento dos ensaios, a aquisição de séries temporais de aceleração, o pré-processamento da informação experimental e a aplicação de métodos de identificação modal para obter estimativas dos parâmetros modais.

De forma a aplicar os conceitos abordados ao longo do trabalho, estudou-se um modelo físico de um edifício de dois pisos. Neste estudo desenvolveram-se modelos numéricos em *freeFEM++* e em *SAP2000* e realizou-se um ensaio de vibrações para identificar os parâmetros modais do modelo físico (nomeadamente, as frequências naturais de vibração e as respectivas configurações modais). Pela comparação dos resultados dos dois modelos concluiu-se que a metodologia desenvolvida em *freeFEM++* possui uma boa aproximação aos resultados numéricos obtidos com o programa *SAP2000*. Comparando os resultados numéricos, obtidos com os programas antes referidos, com os resultados experimentais obtidos no ensaio de vibrações, verificou-se a necessidade de calibrar um parâmetro (o módulo de elasticidade) nos modelos numéricos com vista ao ajustamento dos valores das frequências naturais de vibração.

Após o ajuste dos valores numéricos aos identificados experimentalmente no modelo físico, concluiu-se que a metodologia desenvolvida em *freeFEM++* obtém, no geral, menores diferenças quando comparados com as diferenças obtidas no *SAP2000*.

Depois de calibrados os modelos numéricos procedeu-se a uma análise dinâmica do edifício de dois pisos (utilizando uma acção sísmica na forma de uma história de acelerações obtida durante a ocorrência de um sismo intenso bem conhecido - Sismo em *El Centro*, 1940, EUA), pelo recurso ao método de Newmark implementado em *freeFEM++* e disponível em *SAP2000*, para a integração no tempo. Analisando e comparando as histórias de deslocamentos obtidas num ponto comum às malhas de discretização de ambos os modelos numéricos verificaram-se algumas variações nos resultados, as quais podem estar associadas a diversos aspectos, dos quais se destacam:

- as diferenças na consideração das condições de fronteira, que apresenta diferenças entre os dois modelos numéricos;
- a adopção de diferentes tipos de elementos finitos nos dois modelos numéricos, o que obrigou a gerar malhas diferentes; e
- a necessidade de proceder a uma interpolação para o cálculo dos deslocamentos no ponto de comparação no modelo desenvolvido em *freeFEM++*.

7.2 Propostas de desenvolvimentos futuros

Na sequência do presente trabalho sugerem-se agora algumas propostas para desenvolvimentos futuros, designadamente o aprofundamento do conhecimento do estudo dos métodos numéricos utilizados na análise do comportamento dinâmico de estruturas e dos métodos de identificação modal. Assim, sugerem-se alguns aspectos a desenvolver:

- Para a integração no tempo, podem ser desenvolvidas metodologias através de outros métodos, para além do método de Newmark abordado neste trabalho (recorrendo, por exemplo, ao método das diferenças finitas, ao método das diferenças centrais ou ao método de Euler);
- Em relação à metodologia desenvolvida em *freeFEM++*, é conveniente a adaptação/aperfeiçoamento deste modelo com vista ao estudo de estruturas com mais graus de liberdade e/ou com diferentes condições de fronteira; e
- Ao nível de análises de identificação modal, deve-se aprofundar o conhecimento sobre o método utilizado neste trabalho (o método de decomposição no domínio da frequência - FDD) e a versão melhorada deste método (*Enhanced Frequency Domain Decomposition* - EFDD), que permite estimar os valores dos amortecimentos modais. Para além destes métodos de identificação modal no domínio da frequência, também é oportuno o estudo de métodos de identificação modal.

Bibliografia

BENDAT, J.; PIERSOL, A. (2000) - Random data: Analysis and measurement procedures. 3rd edition. Wiley-Interscience.

BRINCKER, R.; ZHANG, L.; ANDERSEN, P. (2000) - Output-only modal analysis by frequency domain decomposition. Proceedings of the ISMA25 noise and vibration engineering. 11th edition pp. 717-723. September 13-15. Belgium: Leuven.

CAETANO, E. (2000) - Dynamic of cable-stayed bridges: Experimental assessment of cable-structure interaction. Tese de doutoramento. Porto: Faculdade de Engenharia de Universidade do Porto.

CANTIENI, R. (2001) - Assessing a dam's structural properties using forced vibration testing. Proc. IABSE International conference on safety, Risk a reliability, Trends in engineering. Malta.

CHOPRA, A. K. (1995) - Dynamics of structures: theory and applications to earthquake engineering. 1st edition. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall. ISBN 0-13855214-2.

CLOUGH, R. W.; PENZIEN, J. (1995) - Dynamics of structures. 3rd edition. Berkeley, California 94704 USA: Computers & Structures, Inc, University Ave.

COELHO, C. (1997) - Análise sísmica de estruturas tridimensionais de edifícios de betão armado: Teoria do comportamento não linear dos materiais. Tese de mestrado. Porto: Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.

COMPUTERS AND STRUCTURES, INC. (2011) *SAP2000*. Version 15. USA: Berkeley.

COOLEY, J.; TUKEY, J. (1965) - An algorithm for the machine calculation of complex fourrier Series. Vol. 19, p.297-301. Matematics of Computation.

COSTA, A.; RODRIGUES, J. (2001) - Structural health assessment of bridges by monitoring their dynamic characteristics. Porto : Seminário de Segurança e Reabilitação das Pontes em Portugal.

CUNHA, A. (1990) - Dinâmica estrutural estocástica. Aplicações à engenharia sísmica. Tese de doutoramento. Porto: Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.

CUNHA, A.; CAETANO, E. (2006) - Experimental modal analysis of civil engineering structures. Sound and Vibration, June.

GOMES, J.; OLIVEIRA, S. (1994) - Estudo do comportamento dinâmico da barragem do Alto Lindoso. 3º ensaio de vibração forçada. Lisboa: Relatório Laboratório Nacional de Engenharia Civil.

HECHT, F. (2012) - *freeFEM++*. Version 3.12. 3 edition. Université Pierre et Marie Curie, Laboratoire Jacques-Louis Lions, Paris. Site: <http://www.freefem.org/ff++/>.

HUGHES, T. (1987) - The finite element method - Linear static and dynamic finite element analysis. Englewood Cliffs : Prentice-Hall.

LE HYARIC, A. (2012) - *freeFEM++-cs* an integrated environment for *freeFEM++*. Site: <http://www.ann.jussieu.fr/~lehyaric/ffcs/index.html>.

MAGALHÃES, F. (2004) - Identificação modal estocástica para validação experimental de modelos numéricos. Tese de mestrado. Porto: Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.

MENDES, P. (2005) - Observação e análise do comportamento dinâmico de barragens de betão sob excitação ambiente. Tese de mestrado. Lisboa: Instituto Superior Técnico.

MENDES, P. (2010) - Observação e análise do comportamento dinâmico de barragens de betão. Tese de doutoramento. Porto: Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.

MENDES, P. (2012) - Dinâmica de Estruturas. Sebenta da unidade curricular Dinâmica de Estruturas. Lisboa: Instituto Superior de Engenharia de Lisboa.

OLIVEIRA, A. (1975) - Resistência dos materiais. Livro II - Elementos da teoria da elasticidade. 2ª edição - 1999. Lisboa: Ed. Ass. Estudantes do Inst. Sup. Técnico (AEIST).

MOREIRA, A. (2009) - Análise dinâmica de estruturas pré-fabricadas em betão armado. Comparação de resultados numéricos e experimentais obtidos em modelo físico. Tese de mestrado. Lisboa: Instituto Superior de Engenharia de Lisboa.

PAZ, M.; LEIGH, W. (2004) - Structural dynamics: Theory and computation. 5th edition. Kluwer Academic Publishers.

PEDRO, J. O. (1977) - Dimensionamento de barragens abóbada pelo método dos elementos finitos. Tese para especialista LNEC (Memória nº 479). Lisboa: Laboratório Nacional de Engenharia Civil.

PEETERS, B. (2000) - System identification and damage detection in civil engineering. Ph.D. Thesis. Belgium: Department of Civil Engineering, K. U. Leuven.

RODRIGUES, J. (2004) - Identificação modal estocástica. Métodos de análise e aplicações em estruturas de engenharia civil. Tese de doutoramento. Porto: Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.

SILVA, A. (2011) - Simulação numérica do comportamento dinâmico de uma laje. Tese de mestrado. Lisboa: Instituto Superior de Engenharia de Lisboa.

SVS, STRUCTURAL VIBRATION SOLUTIONS APS. (2002) *ARTEMIS Extractor*, Release 3.2. Denmark: Aalborg East.

SVS, STRUCTURAL VIBRATION SOLUTIONS APS. (2006) *ARTEMIS Testor*, Release 3.0. Denmark: Aalborg East.

THE MATHWORKS, INC. (2010) *MATLAB*. Version 7.10. Site: <http://www.mathworks.com/>.

VENTURA, C.; HORYNA, T. (2000) - Measured and calculated modal characteristics of the Heritage Court Tower in Vancouver. Proc. of the 18th International Modal Analysis Conference. San Antonio, USA.

WILSON, E. L. (2002) - Three-dimensional static and dynamic analysis of structures. Computers and Structures, Inc. USA: Berkeley.

ZIENKIEWICZ, O. C. (1967) - The finite element method in structural and continuum mechanics. McGraw-Hill.

Anexo A

Programa *GMSH*

A.1 Construção da malha

A geometria da estrutura foi obtida pela seguinte sequência:

1º) definição das coordenadas dos pontos extremos da estrutura.

`Point(n) = {x, y, z, p};`

Exemplo: `Point(22) = {0.38, 0.39, 0.49, 0.04};`

Em que “p” é o parâmetro de discretização.

2º) definição dos pontos inicial e final de cada linha da estrutura.

`Line(n) = {1ºponto, 2ºponto};` Exemplo: `Line(1) = { 1, 2};`

3º) definição do conjunto de pontos que definem cada superfície.

`Line Loop(n) = {1ªlinha, 2ªlinha, ... , última linha};`

`Plane Surface(m) = {n};`

Exemplo: `Line Loop(101) = {1, 2, -3, -4};`

`Plane Surface(1001) = {101};`

4º) definição do conjunto de superfícies que definem cada volume.

Surface Loop(n) = {1ªsuperf., ... , última superf.};

Volume(m) = {n};

Exemplo: Surface Loop(501) = {1021,1022,1031,1032,1041,1042,1052,
1053,1060,1061,1064,1065,1066,1067};

Volume(5001) = {501};

Ainda é possível a definição das superfícies para a imposição das condições de fronteira do tipo Dirichlet, através de superfícies físicas identificadas por uma etiqueta “n”:

Physical Surface(n) = {1ªsuperfície, ... , última superfície};

Exemplo: Physical Surface(2500) = {1001,1002,1003,1004};

Anexo B

Programa *freeFEM++*

B.1 Frequências naturais e modos de vibração

Para a importação da malha no programa *freeFEM++* é necessário o carregamento de dois comandos, de forma a permitir a resolução do problema com malhas 3D e a importar malhas guardadas, em *GMSH*, com o formato Medit INRIA:

```
// Carregamento de comandos-----  
load "msh3"  
load "medit"  
  
// Importação da malha-----  
mesh3 Th("Malha_TFM.mesh");
```

Em relação às constantes necessárias para a resolução do problema, é necessário definir o tipo de número (**int** – número inteiro, **real** – número real ou **complex** – número complexo), a constante e o valor (ou a expressão para calcular o seu valor), da seguinte forma:

```
// Constantes do problema-----  
real E = 33.e6,           // módulo de elasticidade  
    gamma = 25.,         // peso volúmico betão  
    rho = gamma/9.80665, // massa volúmica betão  
    nu = 0.2,           // coef. de Poisson
```

```

mu = E/(2*(1+nu)),          // módulo de distorção
lambda = E*nu/((1+nu)*(1-2*nu)), // coef. de Lamé
vmg = 1.e30;               // valor muito grande - imposição das c.front.

```

De forma a facilitar o cálculo da matriz de rigidez \underline{k} , o programa *freeFEM++* permite a definição de macros. As macros permitem definir novos operadores, assim, para a resolução do problema, define-se o tensor das deformações ε e o operador diferencial divergência:

```

// Macros-----
macro epsilon(u1,u2,u3) [dx(u1),dy(u2),dz(u3), (dz(u2)+dy(u3))/sqrt(2),
                        (dz(u1)+dx(u3))/sqrt(2), (dy(u1)+dx(u2))/sqrt(2)] // EOM
macro div(u1,u2,u3) ( dx(u1)+dy(u2)+dz(u3) ) // EOM

```

O espaço dos deslocamentos admissíveis é definido pela escolha do grau das funções de forma (assumindo que estas funções são polinomiais nas variáveis x , y , e z , pode-se escolher entre $P1$, $P2$ ou $P3$). No caso escalar, estas funções tomam o valor unitário no GL correspondente e são nulas nos restantes. A solução aproximada do problema pelo MEF obtém-se por uma combinação linear de todas as funções de forma definidas no espaço de deslocamentos admissíveis. A definição do espaço de aproximação e das respectivas variáveis necessárias é feita em *freeFEM++* da seguinte forma:

```

// Espaço de aproximação-----
fespace Vh(Th,P2), Sh(Th, [P2,P2,P2]);
Vh ux;      Sh [u1,u2,u3], [v1,v2,v3];

```

A construção das matrizes de massa \underline{m} e de rigidez \underline{k} é feita através do comando **varf** (de “*variational formula*”):

```

// Construção das matrizes-----
varf kk([u1,u2,u3],[v1,v2,v3]) =
    int3d(Th)( (lambda*div(u1,u2,u3)*div(v1,v2,v3)
                + 2.*mu*(epsilon(u1,u2,u3)'*epsilon(v1,v2,v3)))); // k

```

```

varf mm([u1,u2,u3],[v1,v2,v3]) =
    int3d(Th)( rho*(u1*v1 + u2*v2 + u3*v3) ); // m

matrix K,M; M = mm(Sh,Sh); K = kk(Sh,Sh); // matrizes m e k

```

As condições de fronteira normalmente são impostas por penalização ou substituição no sistema linear. No presente caso, usa-se o método de penalização recorrendo à função **varf**, que permite criar um vector nulo, excepto nas componentes correspondentes aos GL localizados sobre as superfícies com condições de fronteira, do tipo Dirichlet, onde toma o valor unitário. De seguida, multiplica-se o vector por um valor muito grande, com vista a penalizar a matriz de rigidez e o o vector de forças exteriores nos GL convenientes.

```

varf cf([u1,u2,u3],[v1,v2,v3]) =
    on(2500, u1 = 1, u2 = 1, u3 = 1); // c_fronteira

real[int] CF(0:Sh.ndof-1); CF = cf(0,Sh); // vector com as c.f.

for(int i = 0; i<Sh.ndof; i++) K(i,i) = CF(i) ? vmg : K(i,i);

```

Tendo as matrizes \underline{m} e \underline{k} definidas, com a imposição das respectivas condições de fronteira, pode-se resolver o problema de valores e vectores próprios¹⁸, de forma a obter as frequências naturais de vibração e os modos de vibração associados. Assumindo que a resposta da estrutura fica bem definida com a consideração dos 5 primeiros modos de vibração, apenas se calculam os 5 primeiros valores e vectores próprios.

```

//Problema de valores e vectores próprios-----
set(M,solver=UMFPACK);
set(K,solver=UMFPACK);
int nvp=5.; // nº de val. e vect. a considerar

```

¹⁸Que em *freeFEM++* se faz com o pacote de subrotinas UMFPACK (<http://www.cise.ufl.edu/research/sparse/umfpack/>).

```

real    s = 0.;                // 1ª aproximação aos val.próprios
real[int] vp(nvp),w(nvp),f(nvp); // vector com val. p., w e f
real[int,int] Vp(Sh.ndof,nvp); // matriz com vectores próprios

int k=EigenValue(K, M, sym=true, sigma=s, value=vp, rawvector=Vp,
                tol=1e-10, maxit=0, ncv=0); //

w=sqrt(vp);                // frequências angulares naturais
f= w; f/=(2*pi);          // frequências naturais de vibração

```

Para a análise de cada modo de vibração da estrutura, recorre-se ao programa *GMSH*, pela melhor qualidade gráfica das imagens. Assim, foi necessário exportar as coordenadas dos pontos nodais e os “deslocamentos” associados em cada modo de vibração para um ficheiro com extensão .pos:

```

// Definição da directoria para guardar resultados_____
string pasta; pasta = "res/";
// Guardar parametros modais_____
for(int i = 1; i<=nvp; i++)
  {Vh w1,w2,w3;
   for (int k=0; k<Vh.ndof; k++)
     {w1[] [k] = Vp(k*3, i-1);
      w2[] [k] = Vp(k*3 + 1, i-1);
      w3[] [k] = Vp(k*3 + 2, i-1);}
    string modos=pasta+"modo_vibracao"+i+".pos";
    ofstream fmodos(modos);
    fmodos<<"View \" "<<"Modo de vibracao "<<i<<" \{"<<endl;
    // Registo das coordenadas dos pontos nodais dos tetraédros
    for (int k=0; k<Th.nt; k++) // elemento finito - k
      {fmodos << "VS(";
       for (int j=0; j<3; j++) // vértice do tetraédro - j
         fmodos<<Th[k] [j] .x<<","<<Th[k] [j] .y<<","<<Th[k] [j] .z<<",";
       fmodos<<Th[k] [3] .x<<","<<Th[k] [3] .y<<","<<Th[k] [3] .z;

```

```

fmodos << "){" << endl;
// Registo dos "deslocamentos" em cada ponto nodal
for (int j=0; j<3; j++)
    fmodos << w1[] [Vh(k,j)] << "," << w2[] [Vh(k,j)] << ","
        << w3[] [Vh(k,j)] << "," << endl;
fmodos << w1[] [Vh(k,3)] << "," << w2[] [Vh(k,3)] << ","
    << w3[] [Vh(k,3)] << "};" << endl;
}
fmodos << "};" << endl;

```

B.2 Análise dinâmica

Para a consideração do amortecimento de Rayleigh procedeu-se da seguinte forma:

```

real c = 0.,
    c1 = .01,          // constante de Rayleigh
    c2 = .0001;       // constante de Rayleigh

// Matriz de amortecimento de Rayleigh_____
varf cc([u1,u2,u3],[v1,v2,v3])=int3d(Th)(c*(u1*v1+u2*v2+u3*v3)); // c
matrix C;    C = c1*M + c2*K;    // matriz c

```

Para a leitura do registo de aceleração foi necessário importar os dados do sismo de um ficheiro .txt com a forma da Tabela 6.3.

```

//Leitura do registo de aceleração_____
int n = 4000.;
real[int] abase(0:n-1),instante(0:n-1);
string sismo = "El_Centro_1940.txt";
real ab,t;
int ndata;

// Leitura dos dados do ficheiro_____

```

```

func int readval(real[int] &instante, real[int] &abase, string &sismo)
{
  abase=instante=-1.;
  ifstream indata(sismo);
  int  ndata=0;
      for(int i=0; i<n; i++) indata >> instante(i)>>abase(i);
      for(int i=0; i<n; i++) if( instante(i) != -1.) ndata++;
  return ndata;
}
ndata = readval( instante, abase, sismo);

```

Com o objectivo de aplicar a acção sísmica na direcção Ox , foi criado um vector com o valor unitário nos graus de liberdade da direcção Ox e nulo nas restantes direcções.

```

real[int] x1(0:Sh.ndof-1);
for (int i=0; i< Vh.ndof; i++){
x1(3*i)=1.;      // direcção $Ox$
x1(3*i+1)=0.;   // direcção $Oy$
x1(3*i+2)=0.;} // direcção $Oz$

```

Para a definição do passo de iteração no processo de integração no tempo, como já se tem conhecimento das frequências naturais de vibração, pode-se calcular o valor a considerar. No entanto, como já foi justificado, substitui-se o passo de iteração pelo valor assumido ($\Delta t = 0,01$ segundos):

```

// Passo de iteração_____
real dt = 1/(10*f.max);
dt=.01;          // valor assumido

```

De forma a analisar os deslocamentos obtidos por esta metodologia, optou-se por escolher um ponto da laje do piso superior do modelo estrutural compatível com a malha do modelo numérico do programa *SAP2000*, sendo necessário criar um ficheiro “dponto.data” para guardar os deslocamentos neste ponto ao longo do tempo:

```

string rdponeto; rdponeto = pasta+"dponeto.data";
// Definição das coordenadas do ponto de comparação com o SAP2000_____
ofstream fdponeto(rdponeto); real ax=.03,ay=.215,az=1.05;

```

Antes do início do processo iterativo definem-se as constantes α e β , calcula-se a matriz de rigidez efectiva \underline{k}_e e as duas matrizes auxiliares \underline{A}_1 e \underline{A}_2 :

```

// Parametros de Newmark_____
real alfa = .5,
      beta = .25;
// Matriz de rigidez efectiva_____
matrix Ke;
      Ke = K + alfa/(beta*dt)*C + 1/(beta*dt^2)*M;
// Matrizes auxiliares A e B_____
matrix A1, A2;
      A1 = 1/(beta*dt)*M + alfa/beta*C;
      A2 = 1/(2*beta)*M + dt*(alfa/(2*beta) - 1)*C;

```

Para o processo iterativo foi necessário criar os vectores $\Delta \underline{f}_{\sim t}, \underline{f}_{\sim t}, \underline{f}_{\sim t-\Delta t}, \underline{\dot{u}}_{\sim t-\Delta t}, \underline{\ddot{u}}_{\sim t-\Delta t}, \Delta \underline{u}_{\sim t}, \Delta \underline{\dot{u}}_{\sim t}, \Delta \underline{\ddot{u}}_{\sim t}$:

```

Sh [v1,v2,v3], [a1,a2,a3];
u1[] =0.; v1[] =0.; a1[]=0.; w1[]=0.;
real[int] dfi(0:Sh.ndof-1), Fi(0:Sh.ndof-1), F(0:Sh.ndof-1),
      dui(0:Sh.ndof-1), dvi(0:Sh.ndof-1), dai(0:Sh.ndof-1);
dfi=0.; F=0.; Fi=0.; dui=0.; dvi=0.; dai=0.;

```

No instante inicial, com vista ao cálculo do vector de aceleração inicial $\underline{\ddot{u}}_0$, foi necessário calcular o vector de forças exteriores inicial \underline{f}_0 através do registo de aceleração \underline{a}_b :

```

// Vector de forças inicial_____
F = M*x1; F*= -abase[0];      // F0 = -M.x1.ab0
// Vector de acelerações inicial_____

```

```
w1[] = C*v1[]; w1[]*=-1; w2[] = K*u1[]; w1[]-=w2[]; w1[]+=F;
a1[] = M^-1*w1[];
```

Dentro do processo iterativo, foi desenvolvido uma interpolação do vector de aceleração para um instante qualquer t , no entanto o valor podia ter sido lido directamente do registo de acelerações, visto que se assumiu um passo de iteração igual ao passo do registo de aceleração a_b :

```
for (int i=1; i<= n; i++)
  {t=i*dt;          // incremento temporal
  // Interpolação do registo sísmico para o instante t
  func real interval( real[int] &instante,real[int] &abase ,
                    int &ndata, real &t)
  {real ab;
   for(int i=0; i<(ndata-1); i++)
     if( (t-instante[i] >=0) && (t-instante[i+1]<=0) )
       ab = (t - instante[i])*(abase[i+1] - abase[i])
           /(instante[i+1] - instante[i]) + abase[i];
   return ab;
  }
  ab = interval( instante, abase , ndata, t);
```

Segue-se o cálculo do vector de forças exteriores no instante t , a resolução da equação de equilíbrio estático e as variações de deslocamento, de velocidade e de aceleração do instante $t - 1$ para o instante t :

```
// Cálculo do vector de forças no instante t
Fi = M*x1; Fi*= -ab;
// Equação de equilíbrio estático
dfi = A1*v1[]; dfi+= A2*a1[]; dfi+=Fi; dfi-=F;
// Variações de deslocamento, de velocidade e de aceleração
set (Ke,solver=CG); dui = Ke^-1*dfi;
w1[] = alfa/(beta*dt)*dui; dvi = w1[]; w1[] = alfa/beta*v1[];
dvi-=w1[]; w1[] = (1 - alfa/(2*beta))*dt*a1[]; dvi-=w1[];
```

```
dai = 1/(beta*dt^2)*dui; w1[] = 1/(beta*dt)*v1[]; dai-= w1[];
w1[] = 1/(2*beta)*a1[]; dai-= w1[];
```

Por fim procede-se à actualização das variáveis, pela soma das variações existentes do instante $t - 1$ para o instante t , à criação de um ficheiro .pos para guardar as coordenadas dos pontos nodais e os respectivos deslocamentos (de forma análoga ao desenvolvido para guardar os modos de vibração) e ainda à introdução dos deslocamentos do ponto da laje do piso superior do modelo no ficheiro “dponto.data”:

```
// Actualização de variáveis
F = Fi; u1[]+=dui; v1[]+=dvi; a1[]+=dai;
// Guardar resultados dinâmicos
string resul; resul = pasta+"d"+i+".pos";
ofstream fresult(resul);
fresult<<"View \n " <<"DESLOCAMENTOS NEWMARK t = "<<i*dt<<
    "\n {"<<endl;
// Registo das coordenadas dos pontos nodais dos tetraédros
for (int k=0; k<Th.nt; k++) // elemento finito - k
{fresult << "VS(";
    for (int j=0; j<3; j++) // vértice do tetraédro - j
        fresult<<Th[k][j].x<<","<<Th[k][j].y<<","<<Th[k][j].z<<",";
    fresult<<Th[k][3].x<<","<<Th[k][3].y<<","<<Th[k][3].z;
    fresult << "){" << endl;
// Registo dos deslocamentos em cada ponto nodal
for (int j=0; j<3; j++)
    fresult<<u1(Th[k][j].x,Th[k][j].y,Th[k][j].z)<<","
        <<u2(Th[k][j].x,Th[k][j].y,Th[k][j].z)<<","
        <<u3(Th[k][j].x,Th[k][j].y,Th[k][j].z)<<","<<endl;
    fresult<<u1(Th[k][3].x,Th[k][3].y,Th[k][3].z)<<","
        <<u2(Th[k][3].x,Th[k][3].y,Th[k][3].z)<<","
        <<u3(Th[k][3].x,Th[k][3].y,Th[k][3].z)<<"}";<<endl;
}
fresult << "};" << endl;
```

```
// Registo dos deslocamentos no ponto de comparação
fdponto << t <<"<< u1(ax,ay,az) <<"<< u2(ax,ay,az)<<"<<"
        << u3(ax,ay,az) << endl;
}
```